Eğitim ve Bilim

Cilt 42 (2017) Sayı 192 139-172

tedmem

8. Sınıf Öğrencilerinin Eğim Kavramını Oluşturma Süreçleri *

Ömer Deniz [1], Tangül Kabael [2]

Öz

Eğim, başta türev olmak üzere pek çok yüksek matematik kavramı için temel bir kavramdır. Dahası bu kavram sanat, mimari, fizik, mühendislik gibi birçok farklı alanda yer alan bir yapıtaşıdır. Öğrenciler eğim kavramı ile formel olarak tanışmadan önce, bu kavramın günlük yaşamdaki kullanımlarından dolayı ona ilişkin informel bilgiye sahip olurlar. Ancak formel anlamda ilk etkileşimleri sekizinci sınıfta gerçekleşmektedir. Bu araştırmanın amacı sekizinci sınıf öğrencilerinin eğim kavramını oluşturma süreçlerinin incelenmesidir. Bu çalışma, sekizinci sınıflar için eğim kavramına ilişkin öğretim süreci desenlemeye ve desenlenen öğretim sürecinde öğrencilerin kavramı matematikleştirme ve oluşturma süreçlerini incelemeye odaklanan tez çalışmasının ve onunla bağlantılı projenin bir parçasıdır. Araştırmanın katılımcıları, 16 sekizinci sınıf öğrencisi arasından, eğim kavramına önkoşul oluşturan kavramlara ilişkin hazırlanan açık uçlu testin sonuçlarına göre amaçlı örneklem yolu ile seçilmiştir. Nitel olarak desenlenmiş bu araştırmanın verileri, katılımcı olarak seçilen beş sekizinci sınıf öğrencisi ile öğretim süreci boyunca birebir gerçekleştirilen, her biri ile üçer olmak üzere toplamda 15 klinik görüşmeden elde edilmiştir. Elde edilen veriler tematik analiz yöntemi ile analiz edilmiş ve katılımcıların eğim kavramını anlama aşamaları APOS öğrenme teorisi çerçevesinde yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler

Eğim
APOS
Kavramsallaştırma
Genetik çözümleme
Anlama aşamaları

Makale Hakkında

Gönderim Tarihi: 11.11.2016
Kabul Tarihi: 29.09.2017
Elektronik Yayın Tarihi: 14.11.2017

DOI: 10.15390/EB.2017.6996

Giriş

Günlük yaşantımızda rampa, dağ eteği, çatı gibi birçok farklı durumda karşılaşılan eğim kavramı ile okul öncesinden itibaren deneyime girilmektedir. Eğim kavramının formel anlamda oluşturulması ise ilk olarak ortaokul yıllarında başlamaktadır (Hoffman, 2015). Gerçek yaşamda karşılaşılan doğrusal modellerin dikliklerinin ölçülmesi gereksiniminden doğan eğim (Sandoval, 2013), doğrusal görsel (gerçek yaşamda görülen dağ eteği, rampa, yol gibi doğru modelleri) üzerinde hareket halindeyken yatayda alınan mesafenin dikeyde alınan mesafeye oranıdır (Lobato ve Thanheiser, 2002). Eğimin ilk olarak formel bir anlam kazandığı ortaokul yıllarından itibaren bir oran olarak yapılandırılması ve farklı temsilleri arasında anlamlı geçişler yaparak oluşturulma sürecinin ilerleyen yıllarda devam etmesi başta türev olmak üzere birçok ilişkili kavramın oluşturulmasında önemli görülmektedir (Clement, 1985; Stump, 1999; Tabaghi, Mamolo ve Sinclair, 2009; Cheng, 2010;

* Bu makale Ömer Deniz'in Tangül Kabael danışmanlığında yürütülen "8. sınıf öğrencilerinin gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımı altında eğim kavramını oluşturma süreçlerinin APOS teorik çerçevesinde incelenmesi" başlıklı yüksek lisans üretilmiştir.

[1] İnegöl Fenerbahçeliler Derneği Hamamlı Ortaokulu, Türkiye, omeraga86@gmail.com

[2] Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Türkiye, tuygur@anadolu.edu.tr

Moore-Russo, Conner ve Rugg, 2011). Nagle ve Moore-Russo (2014) öğrencilerin eğimi ortaokul yıllarında sabit bir değişim oranı, lise yıllarında ise ortalama değişim oranı olarak yapılandırmalarının, onların anlık değişim hızı fikrine ve dolayısıyla yüksek matematiğin önemli konularından birisi olan türev kavramına hazır olmalarına olanak tanıdığını belirtmiştir. Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingendorf (1997) eğimin, "bir fonksiyonun türevi" kavramının soyutlanmasında gerekli görülen öncüllerden birisi olduğunu ortaya koymuştur. Zandieh (2000) de eğimin, türevin soyutlanması sürecinde var olması gereken ilk matematiksel nesnelerden biri olduğunu ileri sürmektedir. Ubuz (2001) türev kavramının anlaşılmasında yaşanan sıkıntıların giderilmesinde eğim ile türev arasındaki ilişkinin anlamlandırılmasının önemine dikkat çekmektedir. Şahin, Yenmez ve Erbaş'a (2015) göre ise türevin ilişkisel olarak anlaşılması için hem türev ile değişim oranı hem türev ile bir tanjant doğrusunun eğimi arasında hem de değişim oranı ile eğim arasında bağlantılar kurulması gerekmektedir.

Alanyazında eğim kavramının öneminin vurgulanmasına karşın bu kavramın öğrenilme sürecine ilişkin çalışmaların azlığı dikkat çekmektedir. Bu konuda var olan çalışmaların çoğunluğu ise lise ve üniversite öğrencileri ile yürütülmüştür (ör. Simon ve Blume, 1994; Lobato ve Thanheiser, 2002; Tabaghi vd., 2009; Moore-Russo vd., 2011; Duncan ve Chick, 2013) . Lise ve üniversite yıllarında eğim kavramında ve eğimin önkoşul oluşturduğu türev kavramında yaşanan güçlüklerin (ör. Barr, 1981; Teuscher ve Reys, 2010; Gökçek ve Açıkyıldız, 2016) üstesinden gelinmesinde eğimin erken okul yıllarından itibaren sağlam bir zemine oturtularak oluşturulması temel esaslardan birisidir (Stanton ve Moore-Russo, 2012). Bu çalışmada eğim kavramının 8. Sınıf düzeyinde oluşturulma sürecinin ayrıntılı olarak incelenmesine odaklanılmıştır.

İlişkili Alanyazın

Eğim kavramına yönelik alanyazın incelendiğinde çalışmaların en genel anlamda, eğimin kavramsallaştırmalarını incelemeye yönelik, eğim ile ilgili var olan güçlük ve yanılgıları ortaya çıkarmaya yönelik ve eğimin öğrenme-öğretilme sürecine yönelik çalışmalar şeklinde üç kategoride ele alınabileceği sonucuna ulaşılmıştır. Daha çok lise ve üniversite düzeyinde katılımcılarla yürütüldüğü görülen bu çalışmalar sırasıyla bu üç kategoride sunulacaktır.

Eğimin farklı kavramsallaştırmalarını inceleyen ilk araştırmacı Stump (1999) olmuştur. Stump (1999) lise matematik öğretmenlerinin eğim ile ilgili kavram tanımlarını araştırmış ve eğim tanımlarının geometrik oran (dikey mesafe/yatay mesafe), fiziksel özellik (günlük yaşamdaki anlamı), fonksiyonel karakteristik (değişkenler arasındaki değişim oranı), cebirsel özellik (y2-y1/x2-x1), trigonometrik kavram (tanjant), parametrik ilişki (y=mx+n) ve kalkülus kavramı (türevle olan ilişkisi) olmak üzere yedi gruba dağıldığını ortaya koymuştur. Bu çalışmanın sonuçlarından lise matematik öğretmenlerinin eğitiminde eğimin farklı temsillerinin ele alınmasının gerekli olduğu ortaya çıkmıştır. Stump'ın (2001) hizmet öncesi öğretmenlerin eğim hakkındaki pedagojik alan bilgisinin gelişimine yönelik bir diğer araştırmasında, öğrencilerin eğim kavramını oluşturmakta yaşayabileceği olası güçlüklerin neler olabileceği ve bu zorlukları neden yaşadıkları konusunda öğretmenlerin bilgi sahibi olmalarını amaçlamıştır. Ayrıca eğimin farklı kavramsallaştırmaları olarak da kabul edilen bu yedi kategoriye gerçek yaşam durumlarını (durağan fiziksel durum ya da dinamik fonksiyonel durum) da eklemiştir. Moore-Russo ve diğerleri (2011) ise eğim için ortaya konan kavramsallaştırmaları üç yeni kategori daha katarak genişletmiştir: belirleyici özellik (doğruların dik ya da paralel olduklarını belirlemeye yarar özelliği), davranış göstergesi (bir doğrunun yatay olup olmadığı ya da yükselip alçaldığını gösterir özelliği) ve doğrusal sabit (bir doğrunun eğriliğinin yokluğu yani düz oluşunu gösterir onun sabit kalma özelliği). Bu kavramsallaştırmaların Amerika Birleşik Devletleri okullarında nasıl ele alındığını araştıran Stanton ve Moore-Russo (2012) eğimin geometrik ve cebirsel oran olarak formel anlam kazanmasının ortaokul yıllarında gerçekleştiğini ortaya koyarak, bu düzeyde eğime yönelik öğretimin önemine dikkat çekmiş, ön anlayışlardan gelen eğimin farklı temsilleri arası ilişki kurulmasına vurgu yapmıştır. Hoffman (2015) da ortaokul 8. Sınıftan itibaren eğim kavramının formel olarak oluşturulmasına dikkat çekerek, ortaokul matematik öğretmenlerinin eğim kavramsallaştırmalarını incelemiş ve onların eğime yönelik kavram imajlarını araştırmıştır. Katılımcı öğretmenlerin çoğunlukla eğimin fiziksel özellik, geometrik ve cebirsel oran kavramsallaştırmalarına sahip oldukları görülürken, doğrusal sabit, parametrik ilişki ve belirleyici özellik kavramsallaştırmalarına yönelik bir kavram imajına sahip olmadıkları görülmüştür. Dündar (2015) da benzer bir çalışmayı birinci sınıftan dördüncü sınıfa kadar 192 ilköğretim matematik öğretmeni adayı ile yürütmüş ve onların eğime yönelik kavram imajlarını araştırmıştır. Daha çok fiziksel, trigonometrik ve geometrik kavramsallaştırmalara sahip olduğu görülen öğretmen adaylarının sınıf düzeyi arttıkça eğime yönelik fiziksel özellik temelli imajlarının trigonometrik kavram temeline doğru kaydığını ortaya koymuştur.

Eğim kavramına yönelik öğrencilerin sahip oldukları güçlük ve yanılgıları ortaya koyan çalışmalardan elde edilen sonuçlardan en yaygın olanlarından biri yükseklik- eğim karmaşasının varlığıdır (Leinhardt, Zaslavsky ve Stein, 1990). Clement (1985) grafiklerde kavram yanılgılarını ortaya koymaya yönelik yaptığı araştırmasında, öğrencilerin doğruların eğimini karşılaştırırken o doğruların bir kısmını hipotenüs kabul eden dik üçgenler için yüksekliği (dikey mesafesi) fazla olanın eğiminin de fazla olacağı yanılgısına sahip oldukları sonucuna ulaşmıştır. Eğim ile ilgili var olan genel güçlükleri ortaya koyan bir diğer araştırmacı olan Barr (1981), üniversite öğrencileri üzerinde yaptığı araştırmasında kalkulüste yaşanan güçlüklerin temelinde içsel oluşumların yattığını, işlemsel ya da mekanik olarak ortaya konan performansların üzerinde durularak var olan zorlukların üstesinden gelinemeyeceğini belirtmiştir. Bununla birlikte öğrencilerin türev için temel oluşturduğunu vurguladığı eğim kavramını yapılandırmasının önemine değinen araştırmacı, öğrencilerin eğime ilişkin yaşadığı güçlükleri ortaya koymuştur. Barr'a (1981) göre eğim ile ilgili karşılaşılan genel güçlükler şu şekildedir;

i. *Eğimin bir oran olması hakkında yaşanan karışıklık. Örneğin, y=3x+2 doğrusunun eğimi 3' tür fakat 3, bir oran mıdır?*

ii. *Bir doğrunun iki noktası, koordinatları ile verildiğinde, "x değerlerindeki değişimi y değerlerindeki değişime mi bölüyorduk yoksa tam tersini mi yapıyorduk?" karışıklığı.*

iii. *y=mx+c formundaki genel doğru denkleminde "m" ile "c" arasında hangisinin eğim olacağına dair yaşanılan karışıklık.*

iv. *İki noktası verilen bir doğrunun eğimini bulamama.*

v. *İki nokta ve bir eğrinin denklemi olan bir fonksiyon verildiğinde eğimi bulamama* (s.17).

Barr (1981) ile Crawford ve Scott (2000), yaşanan güçlüklerin eğimi değişim oranı olarak kavrayamamaktan, diğer bir deyişle değişim oranı kavramı ile eğim arasında ilişki kurmadan kuralların ezberlenmesinden kaynaklanabileceğini öne sürmektedir. Barr'ın (1981) ortaya koyduğu "m" ile "c" arasındaki karışıklığı ortaokul düzeyinde ayrıntılı olarak inceleyen Hattikudur ve diğerleri (2012), 180 ortaokul öğrencisinin doğrusal fonksiyonların grafiğini oluşturma ve yorumlama sürecinde, doğrunun eğimi ve y eksenini kesme noktasına (y-intercept) yönelik bilgilerine odaklanmışlardır. Sonuç olarak grafik oluşturma ve yorumlama sürecinde eğim ile ilgili aritmetiksel hataların yanı sıra eğim değerinin büyüklüğünü yorumlayamamaktan kaynaklı grafik hatalarının yapıldığı sonucuna ulaşmışlardır. Ayrıca bu yaştaki öğrencilerin doğrunun y eksenini kestiği noktayı yorumlamakta eğime göre daha çok zorlandıkları ortaya konmuştur. Bunun sebebinin de ders kitaplarının içeriğinin yanında eğimin informel olarak da olsa deneyime girilen bir kavram olmasının sağladığı avantaj olabileceğine dikkat çekilmektedir. Simon ve Blume (1994) ise oranın bir ölçüm olarak anlaşılmasını araştırdığı çalışmasında, sınıf öğretmeni adaylarından oluşan katılımcıların eğim kavramının öğrenilmesi sırasında yaşadıkları başlıca güçlükleri ortaya koymuştur. Oranın bir ölçüm olarak ortaya konulmasını gerektiren eğim hesaplama durumunda öğrencilerin eğimi, dikey mesafe ile yatay mesafe arasındaki fark ile hesaplamaya çalıştıkları ancak bu ölçümün eğim için uygun olmadığını tespit ettikten sonra oransal ilişkiye odaklanarak eğim için dikey ile yatay mesafe arasındaki oranın doğru bir ölçüm olduğu sonucuna ulaştıkları görülmüştür. Bu çalışmada aynı eğimlere sahip farklı birçok örnek rampa üretilebileceği fakat hepsinin birbirinden büyüklük olarak farklı olabileceğinin içselleştirilmesinin oran olarak eğimin anlaşılmasında önemli rol oynayabileceği belirtilmektedir.

Alanyazında eğimin ortaokul düzeyinde öğrenilme sürecine odaklanan üç çalışma bulunmuştur. Choy (2006) "bir doğrunun eğimi" konusunu esas alan, 141 ortaokul üçüncü sınıf öğrencisinin katılımcı olduğu, çeşitlilik teorisine (variation theory) dayalı bir çalışma gerçekleştirmiştir.

Bu çalışmada doğruların herhangi iki noktası arasında kalan parçasına ait yatay mesafe ve dikey mesafenin fark edilmesinin eğimin anlamlandırılmasındaki önemi ortaya konmuştur. Olive ve Çağlayan (2007) sekizinci sınıf öğrencileriyle gerçekleştirdikleri çalışmada öğrenci geçmişlerinin eğimin anlaşılmasına etkisini incelemişlerdir. Bu çalışmada öğrencilerin eğime ait geçmişlerinin bu kavramı anlamlandırmada önemli rol oynadığına dikkat çekilmiş ve öğrencilerin eğimi birçok farklı açıdan yorumlayabileceği sonucu elde edilmiştir. Cheng (2010) ise altı, yedi ve sekizinci sınıf öğrencileri ile yürüttüğü araştırmasında, ortaokul öğrencilerinin diklik problemlerini çözebilme becerilerinin orantısal muhakeme becerileriyle ilişkili olduğu sonucuna varmıştır. Duncan ve Chick (2013), öğretmen adaylarını katılımcı olarak belirlediği araştırmasında eğimin algılanması, analiz edilmesi ve ölçülmesinin nasıl gerçekleştiği üzerine odaklanmışlardır. Nitel olarak desenlenen bu araştırmada elde edilen bulgular doğrultusunda dikliğin ölçümünün doğru anlaşılabilmesinin lineer cebirdeki başarıyla ve eğimin bir oran olarak algılanmasıyla ilişkili olduğu sonucuna varılmıştır. Lobato ve Thanheiser (2002) tarafından bilgisayar ortamında yürütülen nitel araştırmada okuldaki derslerde en yüksek performansa sahip lise öğrencilerinin bile bir doğrunun görselleştirilerek eğimi sorulduğunda, sonuca "dikey mesafe/ yatay mesafe" kuralı ile ulaşabildikleri, eğimi sadece bir sayı olarak gördükleri, bir ölçüm olarak algılamadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Eğimin bir oran olarak anlaşılması üzerine yürütülen çalışma sonucunda oranın bir ölçüm olarak anlaşılması için araştırmacılar dört bileşen ortaya atmışlardır: (i) ölçülecek özelliği belirlemek, (ii) hangi niceliklerin bu özelliğe etki edeceğini belirlemek, (iii) bu ölçümün karakteristiğini anlamak ve son olarak (iv) bir oran olarak yapılandırmak. Tabaghi ve diğerleri (2009) ise liberal sanatlar ve sosyal bilimler bölümü üniversite öğrencilerinin katılımcı olduğu çalışmasında, dinamik geometri yazılımı kullanımına dayalı olarak desenlenen bir öğretim sürecinin eğimin kavramsallaştırılmasına etkisini incelemek amacıyla öğrencilerinin anlama aşamalarının belirlenmesinde APOS teorik çerçevesinin kullanıldığı bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmada, nesne aşamasında soyutlama gerçekleştirilebilmesi için doğruyu kaydırma özelliği ile doğrunun hareketine göre eğim değerindeki değişimi gözlemleyebilme fırsatı sağlanması önerilmekte, geleneksel yaklaşımla ancak süreç aşamasında bir kavram oluşturulabileceği ileri sürülmektedir.

Alanyazında görüldüğü gibi eğimin matematiksel bir kavram olarak yapılandırma sürecinin başladığı ortaokul yıllarında kavramsal gelişiminin ortaya konduğu çalışmalara gereksinim duyulmaktadır. Eğimin öğrenciler tarafından nasıl ve hangi aşamalardan geçerek öğrenildiğine ışık tutan çalışmalar en başta ona yönelik öğretim desenlerinin oluşturulmasına katkı sağlamakla birlikte öğretmenlerin ve öğrencilerin kavram yanılgılarının, güçlüklerinin nedenleriyle beraber ortaya çıkarılmasına, ilerleyen yıllarda devam eden kavram gelişiminde yaşanabilecek olası aksaklıkların önüne geçilebilmesine ve bu sayede onunla doğrudan ya da dolaylı yoldan ilişkili diğer kavramların daha üst düzeyde öğrenilebilmesine önemli katkı sağlayacaktır. Bu çalışmada eğim kavramının formel anlamda ilk kez yapılandırılmasının beklendiği sekizinci sınıfta eğimin oluşturma sürecinin derinlemesine incelenmesi amaçlanmaktadır.

Teorik Çerçeve (APOS Action-Process-Object-Schema)

Kavramın öğrenilme sürecinde, aynı zamanda anlama aşamaları olarak ele alınabilen, zihinde gelişen bilişsel yapıların ortaya çıkarılmasına, gelişimsel olarak kavramın yapılandırılma sürecinin ortaya konulabilmesine olanak tanımasından dolayı bu çalışmanın teorik çerçevesi APOS olarak benimsenmiştir. APOS, Piaget' nin yansıtıcı soyutlama (reflective abstraction) kuramına dayanan, bir kavramın öğrenilme sürecinde zihindeki bilişsel oluşumları ortaya koyan bir teorik çerçevedir (Dubinsky, 1991). Diğer bir deyişle matematiksel kavramların nasıl öğrenildiğini tarif etme amacı güden bir çerçevedir (Oktaç ve Çetin, 2016, s. 164). APOS burada kısaca açıklanacak olup daha ayrıntılı bilgi için Asiala, Brown ve diğerleri (1997) Arnon ve diğerlerinin (2014) çalışmasına başvurulabilir.

APOS öğrenme teorisine göre birey matematiksel bir durumla, ancak o durumda başvurabilecekleri bilişsel yapıları oluşturmalarını sağlayan zihinsel mekanizmaları kullanarak başa çıkabilir. Bahsedilen bu zihinsel mekanizmalar içselleştirme (interiorization) ve kapsülleme (encapsulation) iken, bilişsel yapılar ise eylem (action), süreç (process), nesne (object) ve şema (schema)'dır (Dubinsky, Weller, Mcdonald ve Brown, 2005). Bu bilişsel yapılar aynı zamanda kavramsal öğrenme aşamaları olarak da ele alınmaktadır. APOS teorisine göre kavramın oluşturulması eylemlerle başlar, daha sonra eylemlerin içselleştirilmesiyle dinamik süreçlere ve dinamik süreçlerden kapsüllenen nesnelere doğru gelişir (Tall, 1999). Eylem, var olan objeleri yeni objeler elde etmek için dönüştürebilen, tekrarlanabilir fiziksel ya da zihinsel manipülasyonlardır (Breidenbach, Dubinsky, Hawks ve Nichols, 1992). Dubinsky ve McDonald'a (2001) göre eylem aşamasında, nesnelerin dönüşümü dışsal olarak düşünülür ve bu aşamadaki öğrenci sadece verilen bir uygulamada açık olarak ya da ezberden nasıl bir işlem uygulayacağını bilir. Eylem yansıtıldığında ve ona uygun içsel bir işlem oluşturulduğunda eylem sürece içselleştirilmiş olur. Süreç aşamasında kavrama sahip olan bir birey, gerçekten süreci ortaya koymadan, onu uyguluyormuş gibi düşünebilir (Dubinsky ve McDonald, 2001). Bir süreç, eylemin aksine, bireyin herhangi bir dışsal uyarana tepki vererek onu yapmasından ziyade, onu kontrolü altında tutup içsel olarak algılamasını gerektirir (Asiala, Brown, vd., 1997). Eğer birey sürecin bütünüyle farkında olursa, bu bütünlüğün üzerine dönüşümler gerçekleştirebiliyorsa ve dönüşümleri yapılandırabiliyorsa o zaman süreci bilişsel nesne içerisine kapsüllemiştir (Breidenbach vd., 1992; Dubinsky vd., 2005). Kavramın nesne aşamasındabilişsel yapı olabilmesi için onun üzerine başka bir eylemin uygulanabilmesi gerekir ki böylece dinamik yapıdaki süreç, üzerine eylem uygulanabilen statik bir varlık gibi görülür (Arnon vd., 2014, s. 21). Son olarak şema, yeni bir matematiksel problem durum ile başa çıkmak için çağırılan eylemler, süreçler, nesneler ve diğer şemaların uyumlu bir topluluğudur (Clark vd., 1997). Bir kavramın farklı problem durumlarının üstesinden gelinmesine yardımcı olması amacıyla yansıtılabilmesi o kavrama ait şemanın tutarlılığını ortaya koymaktadır (Oktaç ve Çetin, 2016, s. 175).

Bu teorik çerçevede bir kavramın öğrenilmesi sürecinde geliştirilecek özel zihinsel oluşumları belirleme genetik çözümleme (genetic decomposition) olarak isimlendirilir. Aynı zamanda kavramların öğrenilme süreçlerinin incelendiği bir araştırma çerçevesi olan APOS teorik çerçevesi; teorik analiz, öğretimin desenlenmesi ve uygulanması, veri toplama ve analiz olmak üzere üç bileşene sahiptir. Kavramın teorik analizi sürecinde araştırmacılar, verilen bir kavramın nasıl anlaşıldığının formüle edilmesi amacıyla ilişkili alanyazını ve deneyimlerini temel alarak olası bilişsel yapıları açıkça tanımlayan ilk genetik çözümlemeyi ileri sürmeye yönelik çalışma yapar (Weller vd., 2000). İleri sürülen bu ilk genetik çözümleme temelinde öğretim desenlenir ve uygulanır. Elde edilen verilerin analiz edilip yorumlanması sonucunda başlangıçta öne sürülen genetik çözümlemenin aynı kalması ya da revize edilmesine karar verilir.

Yöntem

Sekizinci sınıflarda öğrencilerin eğim kavramını oluşturma süreçlerini inceleyen bu çalışma nitel olarak desenlenmiş geniş kapsamlı bir lisansüstü tez çalışmasının geniş bir parçasını oluşturmaktadır. Çalışmada, katılımcıların eğim kavramının öğretim sürecindeki zihinsel yapılarını ortaya çıkarma açısından etkili bir yöntem olmasından dolayı nitel araştırma yöntemi (Strauss ve Corbin, 1998) seçilmiştir. Eğimin bu sınıf düzeyindeki öğretim desenlemesi için günlük yaşamda sıklıkla deneyime girilen bu kavrama ilişkin var olan informel bilgi ve stratejilerin yansıtılmasına ve kendilerinin geliştirdikleri bilişsel modeller (emergent modelling) aracılığıyla kavramın bizzat öğrenciler tarafından formel bir anlam kazandırılmasına fırsat veren bir yaklaşım olmasından dolayı Gerçekçi Matematik Eğitimi (RME)' nin uygun olduğu düşünülmüştür. Bu çalışmada RME yaklaşımı altında desenlenen öğretim sürecinde katılımcıların eğim kavramı oluşturma sürecindeki zihinsel yapılarının incelenmesi amaçlandığından elde edilen veriler Piaget'in öğrenme teorisine dayanan APOS teorik çerçevesinde yorumlanmıştır. APOS teorik çerçevesinin lise ya da daha üst düzeydeki öğrencilerin yüksek matematik kavramlarını oluşturma sürecini incelemek üzere Piaget'in yansıtıcı soyutlama kuramına dayanarak geliştirilmiş olduğu bir gerçektir (Asiala, Brown, vd., 1997; Dubinsky, 1991). Bunun yanı sıra eğim, özel bir oran olduğundan oran kavramı üzerine yapılandırılan ve öğrenilme süreci sekizinci sınıf düzeyinde başlayan eğim kavramının 8. Sınıf düzeyindeki şemasının yapılanma biçiminin incelenmesinin alana katkı sağlayacağı ve ileriki düzeylerde bu şemanın nasıl geliştiğine ilişkin yapılacak çalışmalara ışık tutacağı düşünülmektedir.

İlk Genetik Çözümleme

Eğim kavramının epistemolojik yapısı göz önüne alındığında özel bir oran olan bu kavramın sekizinci sınıf düzeyinde, ileriki düzeylerde ilişkili kavramların oluşturulmasında kullanılabilecek düzeyde oluşturulmasının gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla bu kavram üzerine başka eylemlerin uygulanabilmesi için eğim kavramının sekizinci sınıf düzeyinde kapsüllenme sürecine girmesinin gerekliliği görülmektedir. Kavramın şema aşamasının tam olarak oluşturulması ileriki düzeylerde ilişkili kavramların oluşturulması ile gerçekleşeceğinden burada eğim kavramının oluşturulma süreci eylem, süreç ve nesne aşamalarında ele alınmıştır.

APOS araştırma çerçevesinde nitel olarak desenlenen bu çalışmada araştırmacılar, ilk olarak ilgili alanyazın ve deneyimlerine dayalı olarak bir ilk genetik çözümleme ileri sürmüşlerdir. Bu ilk genetik çözümleme aşağıdaki biçimde oluşmuştur:

Eylem. Verilen bir doğru ya da doğrusal görselin eğim değerini, o doğru ya da doğrusal görselin tamamı ya da bir parçasını hipotenüs kabul eden dik üçgeni oluşturarak dikey mesafe ve yatay mesafeyi bulup birbirine bölerek bulma eylemi. Bu aşamada doğru parçasını hipotenüs kabul eden herhangi bir dik üçgen için dikey mesafenin yatay mesafeye olan oranının değişmezliği henüz anlamlandırılamaz. Eğim dik üçgen modelinde "dikey mesafe/yatay mesafe" kuralı ile hesaplanabilen bir kavram olarak görülür. Koordinat düzlemindeki bir doğrunun eğimi, onun üzerinde alınan herhangi iki noktanın koordinatlarının "y_2-y_1/x_2-x_1" formülünde yerine yazılmasıyla bulunur ancak bu formülün "dikey mesafe/yatay mesafe" sabit oranı ile ilişkisi kurularak, alınan herhangi iki nokta için bu oranın değişmediği ve eğimin aslında bu oran olduğunu henüz içselleştirilemez.

Süreç. Verilen bir doğru ya da doğrusal görsel için onun herhangi bir parçasını hipotenüs kabul eden dik üçgenlerde dikey mesafenin yatay mesafeye oranının sabit kaldığı içselleştirilerek eğimin oran olduğunu anlamlandırma süreci. Koordinat düzlemindeki bir doğru için, onun üzerindeki herhangi iki nokta esas alınarak oluşturulan dik üçgen modelinden, koordinatlar arası farklar yardımıyla eğim, cebirsel bir oran "y_2-y_1/x_2-x_1" olarak düzenlenir. Doğrunun herhangi iki noktası için cebirsel oranın da sabit kalacağı gerekçelendirmelerle açıklanabilir.

Nesne. Süreç aşamasında "eğim" olarak içselleştirilen "dikey mesafe/yatay mesafe" ve "y_2-y_1/x_2-x_1" oranları, bu aşamada nesne olarak kapsüllenir. Bu sınıf düzeyinde eğim kavramı, nesne olarak yapılandırılması sonucu, farklı problem durumlarına, sahip olunan ilişkili matematiksel kavramlarla bağ kurularak yansıtılabilir.

Katılımcılar

Araştırmanın katılımcıları, araştırmacılardan birinin matematik öğretmeni olarak görev yaptığı bir devlet okulundaki sekizinci sınıf öğrencileri arasından amaçlı örnekleme (Yıldırım ve Şimşek, 2005) yoluyla seçilmiştir. Alanyazın taraması ve araştırmacıların deneyimleri doğrultusunda eğim kavramının bu sınıf düzeyinde oluşturulmasında önkoşul bilgiler olduğu sonucuna varılan oran-orantı, bağımlı-bağımsız değişken ve doğru denklemi kavramlarına yönelik hazırlanan açık uçlu test 16 sekizinci sınıf öğrencisine uygulanmıştır. Elde edilen veriler nitel olarak analiz edilmiş ve öğrencilerin performanslarının benzerliklerine göre beş gruba ayrıldıkları görülmüştür. Birinci gruptaki öğrencilerin sayı örüntülerini genişletirken yinelemeli (recursive) stratejiyi kullanabildikleri ancak genel kuralı sözel olarak da olsa ifade edemedikleri, iki değişken arasındaki bağımlılığı da göremedikleri sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca orantı kurmakta başarısız oldukları ve doğrusal denklem ile ilgili herhangi bir varlık gösteremedikleri görülmüştür. İkinci gruptaki öğrencilerin ise birinci gruptakilere göre genel kuralı sözel olarak ifade edebildikleri bağımlılık ilişkisini görebildikleri ancak değişken kavramının farkında olmadıkları dikkat çekmiştir. Günlük yaşam ile ilgili basit orantı problemlerinde basit orantısal muhakeme ile sonuca gidebildikleri görülmüştür. Üçüncü grupta yer alan öğrencilerin ise sayı örüntülerini devam ettirme ve genelleme de fonksiyonel düşünme yürüttükleri ancak sembolleştirmede sıkıntı yaşadıkları görülmüştür. Değişken kavramı ile ilgili fikirleri olan bu öğrencilerin doğrusallık hakkında yorum yapabildikleri ve doğru denkleminin grafiğinin çizilmesinde ve orantı kurma problemlerinde daha çok işlemsel bilgilerini çağırabildikleri görülmüştür. Dördüncü grupta yer alanların ise örüntülerin genellenmesinde fonksiyonel düşünme ile ulaştıkları genel terimi sembolleştirmekte de sıkıntı yaşamadıkları görülmüştür. Ayrıca orantı kurma gerektiren problemleri çözebildikleri görülen bu gruptaki öğrencilerin doğru orantılı nicelikler arasındaki oranın daima sabit kalışını göremedikleri sonucuna varılmıştır. Bunun yanında doğru denklemine yönelik işlemsel bilgilerini ortaya koyabildikleri görülmüştür. Beşinci grup öğrencilerin ise orantısal muhakeme yürütmenin yanı sıra doğru orantılı niceliklerin arasındaki oranın sabitliğini de problem durumlarına yansıtabildikleri görülmüştür. Ayrıca doğru denklemi kavramına yönelik bilgilerinin hem işlemsel hem de kavramsal olarak varlığı ortaya çıkmıştır. Bu gruplarla ilgili daha ayrıntılı bilgi için Deniz'e (2014) bakılabilir. Elde edilen veriler doğrultusunda her gruptan araştırmacılar tarafından iletişim becerilerinde sıkıntısı olmadığı düşünülen birer temsilci seçilerek çalışmanın katılımcısı olarak belirlenmişlerdir. Katılımcılar çalışma boyunca, temsil ettikleri grup sırasına göre Ö1, Ö2, Ö3, Ö4 ve Ö5 olarak kodlanacaktır.

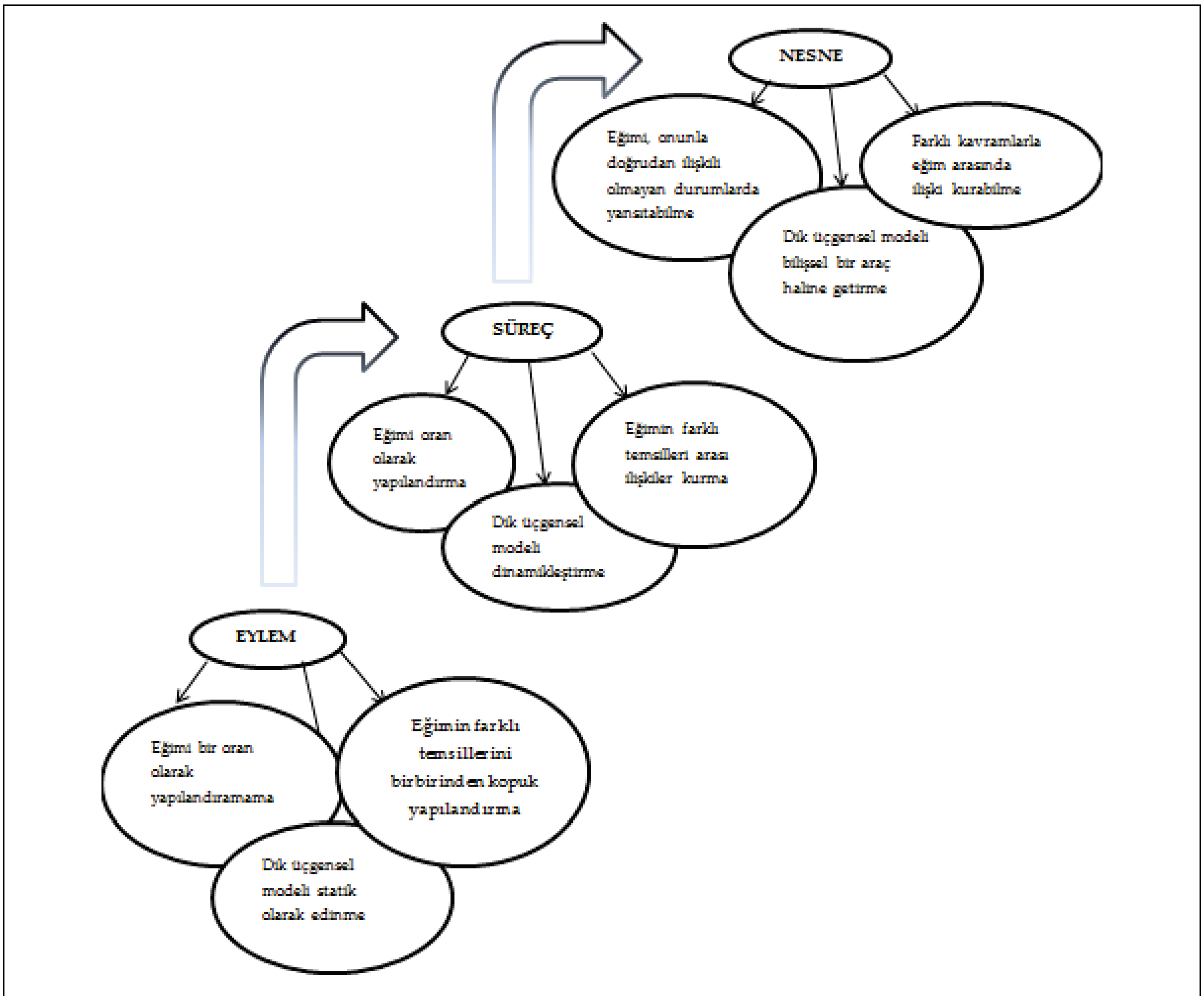
Veri Toplama Aracı

Nitel araştırmalarda araştırmacı küçük bir grubun bireyleri ile konuşarak ifadelerini derler, çeşitli belgeler toplar ve davranışları gözlemler (Glesse, 2012). Nitel olarak desenlenen bu araştırmada veri toplama aracı klinik görüşmeler olarak belirlenmiştir. İlk olarak Piaget tarafından geliştirilen klinik görüşme tekniği, öğrencilerin zihinlerindeki zenginliği keşfetmek, zihindeki temel aktiviteleri yakalamak ve bilişsel becerileri değerlendirmek amacıyla matematik eğitimindeki araştırmalarda sıklıkla kullanılmaktadır (Ginsburg, 1981; Clement, 2000; Baki, Karataş ve Güven, 2002). Bu araştırmada da öğretim süreci boyunca ve öğretimin ardından birebir gerçekleştirilen klinik görüşmelerde, katılımcılardan kendilerine verilen eğim ile dolaylı ya da doğrudan ilişkili problemleri çözmeleri istenmiştir. Gerek çözüm sırasında gerekse çözümün ardından yöneltilen sonda soruları ile genetik çözümlemeyi oluşturan bilişsel yapıların göstergeleri sorgulanmıştır. Bu sayede hem ilk genetik çözümlemede öne sürülen yapıların kavramın oluşturulma sürecini ortaya koyup koymadığı hem de bireyin genetik çözümlemenin hangi aşamasında kavram oluşturabildiğine yönelik derinlemesine bilgi toplanmıştır. Örneğin kendisine sunulan bir doğrusal görselin eğimini oluşturduğu dik üçgen modelinden dikey mesafeyi yatay mesafeye bölerek hesaplayabilen bir katılımcı, aynı doğrusal görsel üzerinde farklı bir noktada eğimin ne olacağı sorgulaması ile gerekçeli açıklama yapması konusunda teşvik edilmiştir. Dikey mesafe ile yatay mesafenin aynı oranda artıp azaldığını dik üçgen modeli yardımıyla açıklaması onun süreç aşamasında kavram oluşumunu işaret ederken, doğrudan eğim sorgulaması gerektirmeyen bir problem durumunda eğimi bir oran olarak görüp onu benzerlik kavramı ile oran temelinde ilişkilendirebilen katılımcının ise nesne aşamasında kavram oluşuma geçtiği yorumu yapılmıştır. Klinik görüşmelerde katılımcılara yöneltilen sorular EK 1' de verilmiştir. Ayrıca klinik görüşmelerde, katılımcılar için sesli düşünmelerine olanak tanıyan bir ortam yaratılmıştır. Bunun yanında katılımcılara tükenmez kalem ve çizgisiz kâğıt verilmiş ve gerekli gördükleri her türlü çizim, yazı, karalamayı yapabilmelerine fırsat verilmiştir. Katılımcılardan yanlış yazdıklarını düşündüklerinde karalamamaları, doğru olarak düşündüklerini kağıda tekrar kaydetmeleri rica edilmiş ve böylece bilişsel süreçlerine yönelik daha derin bilgi edinilmesi sağlanmıştır. Klinik görüşmeler ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmış ve görüşme boyunca araştırmacı tarafından gerekli görüldüğünde mimik ve jestler de dahil olmak üzere notlar alınmıştır. Ayrıca araştırmacı tarafından, görüşmelerin hemen sonrasında önemli ve kritik görülen performanslar kayıt altına alınarak olası veri kayıplarının asgari düzeye indirilmesi sağlanmıştır. Klinik görüşme sorularının hazırlanmasının ardından pilot çalışma, katılımcı olmayan ve farklı hazırbulunuşluklara sahip üç öğrenci ile yapılmış ve görüşmeler iki uzman tarafından incelenerek asıl uygulamanın bu görüşme sorularıyla yapılabileceğine karar verilmiştir.

İşlem

Bu çalışma sekizinci sınıf düzeyinde, kırsal kesimdeki bir devlet okulunun bir şubesinde, eğim kavramının toplam altı ders saati olan öğretim sürecini içeren yaklaşık bir aylık zaman diliminde yürütülmüştür. Alanyazın öğrencilerin eğim kavramı ile küçük yaşlardan itibaren etkileşime girdiklerini ve bu kavrama ilişkin formel bir anlam kazandırmadan önce informel de olsa bir kavram imajıyla okula geldiklerini ortaya koymaktadır (Stanton ve Moore-Russo, 2012). Bu nedenle eğim kavramının ilk tanıtıldığı sekizinci sınıf düzeyinde öğrencilerin informel bilgilerini ortaya koymalarına ve önceki yaşantılarından yola çıkarak kavramı kendilerinin matematikleştirmelerine fırsat veren bir öğretim süreci ilkesine dayanan RME yaklaşımı benimsenmiştir. Öğretim sürecine yönelik ayrıntılı bilgi bu çalışmada "öğretim süreci" başlığı altında verilmiş olup daha ayrıntılı bilgi için ise Deniz ve Kabael'e (2017) bakınız. Öğretim ikişer saatlik periyotlar halinde toplam altı ders saati sürmüş olup, her iki dersin sonrasında katılımcılar ile klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Klinik görüşmeler kavramın öğrenilme sürecinde oluşturulan bilişsel yapılara yönelik veri toplanması amacıyla gerçekleştirilmiştir. Ayrıca her iki dersten sonra öğrencilere bilişsel süreçlerinde yaşanacak kopuklukların önüne geçilmesi amacıyla ödevler verilmiştir. Araştırma boyunca toplam 15 klinik görüşme gerçekleştirilmiş ve böylece katılımcıların eğim kavramını oluşturma süreçlerinin gelişimsel olarak izlenebilmesi ve derinlemesine bilgi sahibi olunabilmesi sağlanmıştır.

Klinik görüşmelerden elde edilen veriler tematik analiz (Glesse, 2012, s. 255; Green vd., 2007) tekniği ile nitel olarak analiz edilmiştir. Tematik analizde araştırmacı, veriler içinde tema ve örüntüler aramak amacıyla verileri kodlar, daha sonra aynı biçimde kodlanmış tüm verileri okur ve özünde ne olduğunu bulmaya çalışır (Glesse, 2012, s. 255). Bu araştırmadaki temalar APOS çerçevesini benimseyen çalışmalarda olduğu gibi eylem, süreç ve nesne temalarıdır. Analiz sürecinde öğrencilerin, her bir tema için kritik görülen kelime, ifade, açıklama, yorum gibi performansları iki araştırmacı tarafından ayrı ayrı kodlanmış ve ardından iki araştırmacı bir araya gelerek karşılaştırmalı olarak analiz sonuçlarının tutarlılığına bakılmıştır. Belirlenen temalar üzerinden araştırmacıların analiz sonuçlarının %93 oranında tutarlı olduğu görülmüştür. Temalar altına giren kodlardan bazı örnekler Şekil 1'de ve örnek kodlara yönelik bazı öğrenci performansları ise Tablo 1'de sunulmuştur.



Şekil 1. Temalar ve Örnek Kodlar

Tablo 1. Örnek Kodlara Yönelik Öğrenci Performansları

Öğrenci Performansları	Kodlar	Temalar
Yükseklik değişince eğim de değişecek.	Eğimi oran olarak yapılandıramama	Eylem
(Doğru üzerinde alınan herhangi bir noktada) Yükseklik ve yatay mesafe değişir o zaman eğim de değişir.	Eğimi oran olarak yapılandıramama	Eylem
(Doğru üzerinde alınan herhangi bir noktada) Eğim değişmez. Yüksekliğin yatay mesafeye oranı sabit kalıyor hep.	Eğimi oran olarak yapılandırma	Süreç
(Yükseklik arttığında her zaman eğim artmak zorunda mıdır?) Hayır. Yatay yol da değişirse o zaman eğim ona göre değişir. Yükseklikle yatay mesafe aynı oranda arttığı sürece bunun eğimi değişmez.	Eğimi oran olarak yapılandırma	Süreç
("y_2-y_1/x_2-x_1" cebirsel oran temsili için) Nedenini ben de bilmiyorum. Derste öyle yapıyorduk oradan aklıma geldi.	Eğimin farklı temsillerini birbirinden kopuk yapılandırma	Eylem
("y_2-y_1/x_2-x_1" cebirsel oran temsili için) Dikey mesafe/yatay mesafe ile aynı işte. Aralıkları çıkartacağız sonra birbirine böleceğiz"	Eğimin farklı temsilleri arasında ilişki kurma	Süreç
(Doğrudan eğim hesaplaması sorulmayan bir problem durumunda) Bu doğru parçası aynı doğru parçası ve bu iki üçgen benzer. O zaman bu 3/6 (büyük üçgendeki eğim)bu da 1/2 (küçük üçgendeki eğim). Kenarlar arasındaki oran da sabit.	Eğimi doğrudan onunla ilişkili olmayan durumlara yansıtabilme	Nesne
(Doğrudan eğim hesaplaması sorulmayan bir problem durumunda) Eğimi değişmez bunların. Çünkü hep benzer üçgenler oluşuyor yani doğrusal olarak artıyor ve hep aynı açıda devam ediyor.	Farklı kavramlarla eğim arasında ilişki kurabilme	Nesne

Öğretim Deseni

RME yaklaşımına dayalı öğrenme ortamlarında öğrencilerin hem kendi aralarındaki hem öğretmenle olan etkileşiminin üst düzeye çıkarılması beklenmekte ve bu sebeple heterojen gruplar oluşturulması önerilerek hem grup içi hem de tüm sınıf tartışmalarıyla informel ve formel bilgi ve stratejilerin paylaşılması ve savunulmasının önemine vurgu yapılmaktadır. Bu çalışmada öğretim öncesinde alanyazın taraması ve araştırmacıların deneyimleri doğrultusunda eğim için önkoşul olduğu sonucuna varılan oran-orantı, bağımlı bağımsız değişken ve doğru denklemi kavramlarına yönelik geliştirilen açık uçlu test sonuçlarına göre bilgi, güçlük ve yanılgılarına göre beş gruba ayrılan öğrenciler desenlenen öğretim sürecinde heterojen gruplar oluşturacak şekilde dağıtılmıştır. Klinik görüşmelerin gerçekleştirileceği her bir katılımcı öğrenci farklı grupta yer almıştır. Öğretim öncesinde düşünce deneyleri ile şekillendirilen olası öğrenme süreci için, kavramın zihinde var olan diğer yapılarla ağ örülerek yapılandırılmasına olanak tanıyan toplamda yedi adet gerçekçi bağlam durumları hazırlanmıştır. Hazırlanan bu bağlam durumlarında öğrencilerin bilgi ve stratejilerini, çıkış ve varış noktalarını önce grup içi ardından gruplar arası sınıf tartışmalarında paylaşmalarına ve sorgulamalarına fırsat verecek bir öğrenme ortamı yaratılmıştır. Öğrencilere öğretim boyunca doğrudan hazır bilgi verilmemiş, kendilerinin etiketlemeler yapmalarına izin veren bir ortam yaratılarak informel bilgilerinden formel matematiğe doğru doğal bir geçiş yapmaları için fırsat verilmiştir. Gerçekçi bağlam durumlarında önce grup içinde tartışmalar yapmaları istenmiş ve ardından çıkış, varış noktalarını yürüttükleri akıl yürütme ve stratejilerle birlikte sınıf tartışmalarında sunmaları istenmiştir. Öğretmen tarafından yöneltilen "*hangi yol daha zorlayıcı?, daha dik derken ne demek istiyorsunuz?, Daha dik olduğunu nereden anlıyorsunuz?, Yüksekliği fazla derken ne demek istiyorsunuz bana çizerek de gösterir misiniz?, peki yükseklikleri aynı olsaydı diklik aynı mı olacaktı?, Aksi bir örnek sunabilen var* *mı?, (yatay mesafe etiketini kullanmalarının ardından) Peki yatay mesafe aynı olup diklik (ya da onlardan gelen bayır, eğim, eğiklik etiketleri) farklı olabilir mi? Yükseklik ve yatay mesafe farklı olduğunda eğim hep farklı mı olur peki, açıklayabilir misiniz?"* gibi yönlendirici sorularla eğimin matematiksel bir kavram olarak adım adım yapılandırılması için uygun öğrenme ortamı hedeflenmiştir. Öne sürülen ilk genetik çözümleme esas alınarak eğim kavramının oluşturulma sürecinde, yapılar (aşamalar) arası geçişlerin sağlanmasını destekleyen öğrenme yolları planlanmış ve uygulanmıştır. Örneğin, eğimin bir doğru ya da doğrusal görsel üzerindeki her nokta için değişmez bir oran oluşunun keşfedilmesi ve anlamlandırılması süreç yapılandırmasına geçişte önemli görülmüştür. Bunun için aynı doğrusal görselin farklı noktalarındaki bireylerin, önlerindeki yol için eğimi sorgulamaları istenmiştir. Bu noktalara yerleştirilecek eğim durumunu gösterir tabelalar üzerinden tartışma genişletilmiştir. Bu süreçte aynı doğru üzerinde eğimin değişmezliği informel bilgisinin çağırılması ve dikeyde ve yatayda alınan mesafelerin aynı oranda artıp azalışının ona matematiksel dayanak oluşturduğunun keşfedilmesine yönelik tartışma ve sorgulamaya dayalı öğretim yürütülmüştür. Ancak öğrencilerin önbilgileri, karakteristiği, iletişim ve etkileşim becerileri gibi etkenlerin onların öğrenme sürecini etkileyeceği öngörülmüş ve asgariye indirilmesi için yeterli özen gösterilse de bu gibi kontrol edilemeyen etkenler çalışmanın sınırlılığı olarak kabul edilmiştir.

İlk iki derslik süreçte eğimin bağlı olduğu değişkenlerin fark edilip yorumlanması amacıyla günlük yaşamdan alınan görsellerle destekli dört bağlam durumunda öğrenciler yatay mesafe, dikey mesafe, açı değişkenlerini fark ederek, yol uzunluğunun eğimi doğrudan etkileyen bir değişken olup olmadığını yorumlamaları için teşvik edilmişlerdir (Şekil 2). Böylece öğrenciler, günlük yaşamdan sahip oldukları eğimin fiziksel özellik ve gerçek yaşam durumları temsilleri temelinde eğimi, bağlı olduğu değişkenlere göre anlamlandırmaları için desteklenmişlerdir.

Şekil 2. Eğim Kavramının Günlük Yaşamdan Çağrılmasına ve Onun Farklılaşmasına Sebep Olan Dikey ve Yatay Mesafenin Fark Edilmesine Fırsat Veren Bağlam Görselleri

İkinci iki derslik süreçte ise iki bağlam sunulmuş ve öğrencilerden önce dikey ve yatay mesafeye göre eğimi orantısal muhakemeye dayalı olarak yorumlamaları istenmiştir. Devamında aynı doğrusal görsel üzerinde eğimin alınan noktaya göre değişmediği bilgisinin (informel olarak) çağırılması ve ardından bu informel bilgiye matematiksel bir dayanak yaratma gereksinimi doğuracak bağlam durumunda (Şekil 3) eğimin bir sabit oran oluşunu keşfetmeye yönelik yönlendirici sorgulamalar yaptırılmıştır. Dikey ve yatay mesafe değişmesine rağmen eğimin değişmemesi gerektiği düşüncesinin yarattığı bilişsel dengesizliğin giderilmesi amacıyla dikey ve yatay mesafenin doğru orantılı değişiminin fark edilmesi, ardından aralarındaki oranın değişmez kalışının eğimin değişmezliğine dayanak sağlaması ve son olarak bu oran ile eğimin eşitlik ilişkisinin kurulmasına yönelik öğretim süreci tasarlanmış ve yürütülmüştür. Eğim hesaplama ve yorumlama etkinlikleri ile ev ödevleri yardımıyla eğimin geometrik yorumu pekiştirilmiştir.

Şekil 3. Aynı Doğrusal Görselin Farklı Noktalarında Eğimin Değişmemesi ve Eğimin Geometrik Oran Olarak Yapılandırılmasına Olanak Tanıyan Bağlam Görseli

Son iki derslik süreçte ise yaylaya çıkma bağlamı sunulmuş (şekil 4) ve öğrencilerin yatayda alınan yol ile dikey çıkılan yüksekliğin değişimini gösteren grafik yardımıyla koordinat düzleminde bir doğru için geçiş yapmaları hedeflenmiştir. Ardından sırasıyla koordinat düzleminde görsellenmiş bir doğrunun eğimi, sadece iki noktasının koordinatları verilmiş bir doğrunun eğimi, koordinat düzleminde görselleştirilmesi zor olacak kadar büyük koordinat değerlerine sahip iki noktası verilen doğrunun eğimi etkinlikleri arka arkaya yaptırılarak adım adım yatay ve dikey mesafenin koordinatlar arası farklar ile bulunabileceğinin keşfedilmesi için destekleyici ve yönlendirici bir öğrenme yolu yaratılması amaçlanmıştır. Ardından koordinat düzlemindeki bir doğru için cebirsel genelleme yapma fırsatı sağlanarak kendilerinin ortaya koydukları cebirsel bir oran olarak eğim bilgilerini yeniden yapılandırmaları için olanak tanınmıştır. Her iki derslik sürecin ardından verilen ev ödevlerin aynı zamanda öğretmen olan araştırmacı tarafından bizzat kontrol edilmesi, onların ödevleri ciddiyetle yapmalarında itici bir güç olmuştur.

Şekil 4. Düşeyde ve Yatayda Alınan Mesafeler Arasındaki İlişkiyi Gösteren Çizgi Grafiği Yardımıyla Koordinat Düzleminde Bir Doğrunun Eğimine Geçiş Bağlamı

Bulgular

Bu bölümde öğrencilerin eğim kavramını oluşturma süreçlerine yönelik elde edilen bulgular, her öğrenci için bilişsel süreçlerin ayrı ayrı ortaya konabilmesini sağlamak amacıyla tek tek ve doğrudan klinik görüşmelerden elde edilen alıntılarla verilecektir. Alıntılarda katılımcılar dikey mesafe yerine yükseklik, yatay mesafe yerine alt mesafe, eğim yerine diklik gibi kendi etiketlemelerini kullanmışlardır. Ardından bulgulara dayalı olarak APOS teorik çerçevesinde elde edilen sonuçlar sunulacaktır.

Ö1' in Eğimi Oluşturma Süreci

Ö1, "dikey ve yatay mesafeyi bul ve dikey mesafeyi yatay mesafeye böl" şeklindeki algoritma adımlarını takip ederek eğim hesaplaması yapabilen ancak çalışma boyunca eğim kavramını dikey ile yatay mesafe arasındaki oran olarak yapılandıramayan bir katılımcıdır.

İlk görüşmeden itibaren eğim kavramına ilişkin açıklama ya da yorumlamalarını dik üçgen modelini kullanarak yapan bu katılımcı kendisiyle gerçekleştirilen ilk görüşmede eğimin dikey ve yatay mesafeye bağlı olarak değiştiğini ifade etmiş ancak bu ifadesi, eğime ilişkin yaptığı açıklama ve yorumlamalarla tutarlılık göstermemiş ve buna bağlı olarak çeşitli güçlükler yaşamıştır. Dik üçgen modelini eğimi anlamlandırma yolunda bir araç olarak kullanıp, eğimin dikey ve yatay mesafeye bağlı olduğunu ifade etmesine karşın Ö1'in, dik üçgen modelini dinamik olarak oynatamadığı, dikey ve yatay mesafe değişimine bağlı olarak eğimi yorumlamakta güçlük çektiği görülmüştür. Örneğin Ö1, uzunlukları eşit olan iki eğimli yolun eğimlerinin de aynı olması gerektiğini belirtmiştir. Ayrıca kendisinden yükseklikleri aynı olan fakat eğimleri farklı olan iki yol çizmesi istendiğinde yatay mesafeyi kısaltması gerektiğini ifade etmesine karşın bunu görselleştirememiş, hem yükseklik hem de yatay mesafeyi kısaltarak dik üçgen modelini küçültmüştür (Şekil 5). Ö1'in ilk görüşmesinden bazı alıntılar aşağıda verilmiştir.

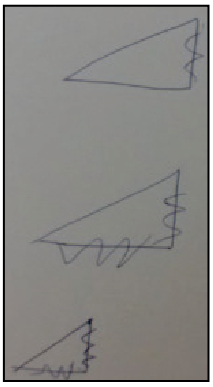
G: *Şimdi örneğin uzunlukları birbirine eşit olan iki tane yol olduğunu varsayalım. Bu iki yolun diklikleri konusunda ne söyleyebilirsin?*

Ö1: *İki yolun da uzunluk ölçüleri aynı olursa diklik aynı olur.*

….

G: *Peki ben sana yükseklikler aynı kalsın ama yollardan birisi daha dik olsun desem ne yaparsın?*

Ö1: *Yatay mesafeyi kısaltırım.*



Şekil 5. Ö1' in Dikey Mesafeleri Aynı Olan Yol Modelleri İçin Çizimleri

İlk görüşmede dik üçgen modelini dinamik olarak değiştirerek eğimdeki değişimi yorumlamakta güçlük çeken Ö1'in kendisiyle gerçekleştirilen ikinci klinik görüşmede ise eğimi "dikey mesafe ile yatay mesafeyi bul, dikey mesafeyi yatay mesafeye böl" şeklindeki algoritmanın adımlarını uygulayarak hesaplayabildiği görülmüştür. Bunun yanı sıra ikinci görüşmede de eğimin değişimini, dikey ve yatay mesafenin değişimine göre içselleştiremediği görülmüştür. Bu görüşmede Ö1'in verilen doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre dikey ve yatay mesafe değiştiği için eğimin de değişeceğini düşündüğü, eğimin değişmeyeceğinin farkında olmadığı, eğimi sıklıkla dikey mesafeye bağlı olarak düşündüğü görülmüştür.

G: *Yol üzerinde bulunulan yer değiştikçe diklik değişiyor mu?*

Ö1: *Yukarı çıktıkça daha da yokuş olabiliyor.*

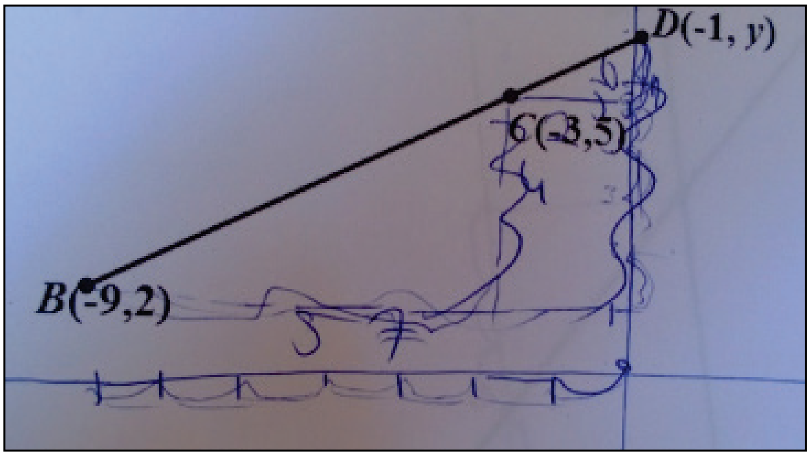
G: *Peki bu yol için yukarıya çıktıkça yolun dikliği değişiyor mu?*

Ö1: *Evet.*

G:*Neden?*

Ö1: *Yükseklik değişince o da değişiyor.*

Son klinik görüşmede de bir doğru üzerinde alınan farklı noktalarda *"yükseklik değiştiği için eğim de değişecek"* şeklinde vurgu yaptığı görülen Ö1' in hala eğimi sadece dikey mesafeye bağlı olarak yorumladığı, eğimi oran olarak yapılandırma sürecine giremediği görülmüştür (Şekil 6).

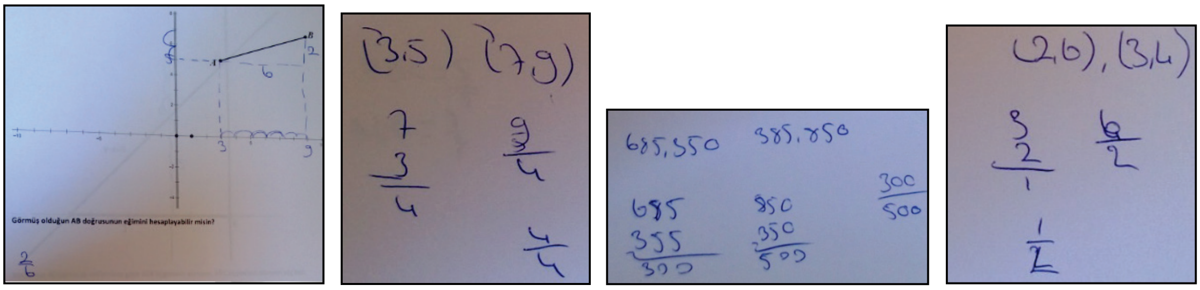


Şekil 6. Ö1'in Aynı Doğru Üzerinde Eğimi Alınan Noktalara Göre Yorumlaması

G: *Bu doğrunun üzerinde yürüdüğünü düşünelim. Bu üç noktadan geçeceksin. Bu noktalara göre doğrunun eğimini nasıl yorumlarsın?*

Ö1: *Eğim değişecek. Yükseklik değiştiği için eğim de değişecek.*

Ayrıca bu katılımcı kendisine iki noktanın koordinatları verilerek bu noktalardan geçen doğrunun eğimini bulması istendiğinde ise koordinatlar arası farklardan dikey ve yatay mesafeyi, koordinat düzleminde görselleştirmeksizin bulabilmiştir. Buradan bu katılımcının geliştirmiş olduğu algoritmayı koordinat düzleminde verilen bir doğrunun eğimi için de uygulayabildiği yani bu algoritmayı eğim hesaplama için bir araç olarak içselleştirdiği düşünülmüştür. Ancak kullandığı bu algoritmanın nedeni sorgulandığında Ö1 "*nedenini ben de bilmiyorum. Derste öyle yapıyorduk oradan aklıma geldi*" şeklinde savunma yapmış ve eğimi veren oranı anlamlandıramadığını göstermiştir. Bu görüşmenin devamında bu katılımcının daima büyük sayıdan küçük sayıyı çıkarak yüksekliği ve yatay mesafeyi hesaplaması ve buna bağlı olarak hiç negatif eğim sonucu elde etmemiş olması eğimi oran olarak yapılandıramadığı sonucunu desteklemektedir (Şekil 7).



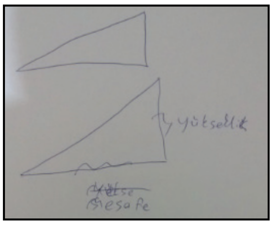
Şekil 7. Ö1'in Koordinatları Bilinen Noktalardan Geçen Doğru ya da Doğru Parçaları İçin Eğim Hesaplamaları

Eğimi bir oran olarak oluşturamayan Ö1 doğal olarak bu kavramı doğrudan göremediği bir problem durumunda da çağıramamıştır. Ö1 bir doğru üzerindeki iki noktanın bileşenleri verildiğinde doğru üzerindeki sadece apsisi verilen üçüncü bir noktanın ordinatını bulmak için eğim kavramını bir araç olarak kullanamamıştır.

Ö2' in Eğimi Oluşturma Süreci

Ö2, dikey ile yatay mesafe arasındaki oransal ilişkiyi içselleştirerek eğimi bunlara bağlı bir oran olarak yapılandırmayı başarabilmiş bir katılımcıdır.

Gerçekleştirilen birinci görüşmede Ö2, eğimin bağlı olduğu değişkenleri ifade etmenin ötesine geçerek, bu değişkenlere bağlı olarak eğimi yorumlayabildiğini göstermiştir. Ayrıca yorumlama sürecinde dik üçgen modelini dinamik bir şekilde oynatabildiği ve hata yaptığında bunu fark edip düzeltebildiği görülmüştür. Kendisinden eğimleri farklı iki yol çizmesi istendiğinde dik üçgen modelini kullanan Ö2, dikey mesafelerin farklı ancak yatay mesafelerin aynı olduğu modeller oluşturmuş ve eğimi yorumlarken de bu değişmezlerin ve değişenlerin farkında olduğunu ortaya koymuştur (Şekil 8).



Şekil 8. Dikey Mesafeleri Farklı Ancak Yatay Mesafeleri Aynı Olan, Eğimleri Farklı İki Dik Üçgen Modeli

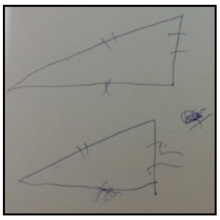
***G:** Peki neden ikinci yol daha diktir diyorsun?*

***Ö2:** Yüksekliği daha fazla, yatay mesafeler eşittir.*

Dikey mesafeleri aynı fakat eğimleri farklı iki yol çizmesi istendiğinde ise öğrencinin oluşturduğu iki dik üçgen modelinde dikey mesafeyle birlikte yol uzunluğunu (hipotenüs) da aynı tuttuğu görülmüştür. Ancak yatay mesafelerin bu durumda farklı olamayacağını, yol uzunluğunun da farklı olması gerektiğini modeller üzerinde savunması ve bunun yanı sıra dikey mesafeler aynı olduğunda yatay mesafesi kısa olanın eğiminin fazla olacağını vurgulaması, model üzerinde dinamik olarak değişkenleri uzatıp kısaltabildiği ve buna bağlı olarak eğimi yorumlayabildiğini göstermiştir (Şekil 9). Oysa Ö1 dikey mesafeyi kısalttığında daima yatay mesafeyi de kısaltma yönünde performans göstermiş ve dikey ve yatay mesafenin doğru orantılı artışını görmeksizin aynı doğru üzerindeki farklı noktalarda eğim için sadece dikey mesafeyi dikkate aldığını gösteren "yükseklik değiştikçe eğim de değişir" yorumlarını yaparak bu doğrultuda performans sergilemiştir.

***G:** Yüksekliklerin aynı olup da eğimin farklı olduğu iki yol çizebilir misin?*

***Ö2:** Bu sefer yatay mesafeler farklı olmalı.*



Şekil 9. Ö2'nin Modeli

***G:** O zaman bu ikisinden hangisi daha diktir?*

***Ö2:** Ben yanlış yaptım hocam burada değil mi? Şurası*

***G:** Neden? Nasıl yanlış yaptığını düşünüyorsun?*

***Ö2:** Şurada yükseklikler eşit. O zaman bunun (yatay mesafesi uzun olan birinci resmin hipotenüsünden bahsediyor) daha uzun olması lazım.*

***G:** Peki hangisi daha diktir diyorsun?*

***Ö2:** Kısa olan yol daha diktir.*

İkinci görüşmede dikey ile yatay mesafeyi oranlayarak eğimi hesaplayabildiği görülen Ö2' nin, aynı doğru üzerinde farklı bir nokta ele alınsa da eğimin değişmeyeceğini dile getirdiği görülmüştür. Ancak eğimin değişmezliğini, dikey mesafenin yatay mesafeye oranı ile değil hipotenüsün yatay mesafeye oranı ile yorumlaması ve alınan noktaya göre yüksekliğin sabit kaldığını dile getirmesi henüz eğimi dikey ile yatay mesafe arasındaki oran olarak yapılandırma sürecinde yanılgılara sahip olduğunu düşündürmüştür.

G: *Bu yol yarıya ya da üçte birine düşse tabelaya yazacağın sayısal değer (eğim) değişir mi değişmez mi?*

Ö2: *Değişmez.*

G: *Neden değişmez yolun eğimi?*

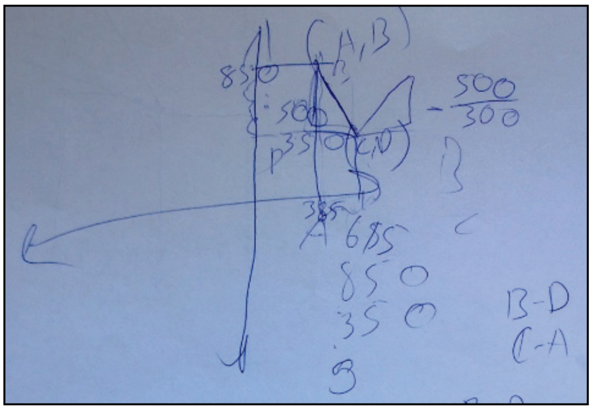
Ö2: *Yükseklik sabit. Alt mesafe azaldıkça yol azaldı sadece. Bununla bu aynı oranda azaldı (yatay mesafe ile hipotenüsten bahsediyor).*

Ancak kendisiyle gerçekleştirilen son görüşmede Ö2’ nin aynı doğru üzerinde alınan noktaya göre eğimin değişmezliğini artık dikey ile yatay mesafe arasındaki oran ile açıklayabildiği görülmüştür. Oysa Ö1 benzer durumlarda “yükseklik değişirse eğim de değişir” yorumunu yaparak eğimi sabit oran olarak yapılandıramadığını göstermiştir.

Ö2: *Nasıl anlatsam. Eğim değişmiyor ama mesafe artıyor azalıyor. Mesela eğim sabit değişmiyor. Yükseklik azaldı aynı oranda alt mesafe de azaldı.*

Ayrıca Ö2 üçüncü klinik görüşmede kendisine verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimini hesaplamak için koordinat düzleminde o noktalardan geçen doğruyu görselleştirme ihtiyacı duymuş ve dik üçgen modelini koordinat düzleminde inşa ederek eksenler yardımıyla dikey ile yatay mesafeyi hesaplayarak sonuca ulaşabilmiştir. Burada Ö2’ nin, *“dikey mesafe/yatay mesafe”* yi ya da “y_1-y_2/x_1-x_2” genellemesini eğimi hesaplamada kullandığı algoritma olarak gören katılımcıların aksine yüksek sayı değerli koordinatları olan noktalar verildiğinde dahi eğim hesabında görselleştirmeye yöneldiği dikkat çekmiştir (Şekil 10).

G: *Bize başka iki nokta veriliyor ve bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi soruluyor. Yaz koordinatları. (685,350), birinci noktamız. İkinci noktamız, (385,850). (öğrenci not alıyor). Bu iki noktadan geçen doğrunun eğimini hesaplayabilir misin?*



Şekil 10. Sayısal Değerleri Büyük Koordinatlara Sahip İki Noktadan Geçen Doğrunun Eğimi

Ayrıca eğim sonucunun negatif olabileceğini da fark eden bu katılımcı, negatifliği doğrunun sağa ya da sola yatık oluşu ile görsel olarak açıklayabilmiştir. Ö2’ den koordinat düzleminde bir doğrunun eğimi için yaptıklarına uygun bir cebirsel ifade oluşturması istenildiğinde, son görüşmenin sonunda bu konuda da başarılı olmuş ve elde ettiği cebirsel ifadeyi eğim hesaplamalarında kullanabildiğini göstermiştir. İki noktası verilen bir doğru üzerindeki sadece apsisi verilen üçüncü noktanın ordinatını bulması istenildiğinde ise Ö2 eğimi ancak görüşmeciden gelen dışsal destek ve uyaranlarla çağırabilmiştir.

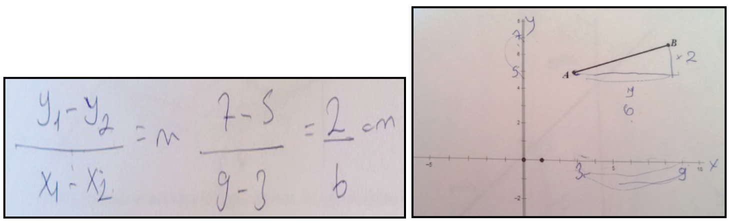
Ö3’ ün Eğimi Oluşturma Süreci

Ö3 eğimi bir oran olarak yapılandırabilen bir diğer katılımcıdır. İlk görüşmeden itibaren dik üçgen modelini dinamik bir şekilde kullanabildiği görülen Ö3, eğimi dikey ve yatay mesafeye bağlı olarak yorumlamanın yanı sıra açısal ilişki de kurmaya başladığını göstermiştir. Örneğin, dikey mesafeleri farklı olan iki yol çizerken aslında yatay mesafeyi sabit tuttuğu görülen katılımcının, kendisinden dikey mesafeyi sabit tutması istendiğinde ise eğimi değiştirmek için yatay mesafeleri değiştirmesi dikkat çekmiştir. "*Yükseklikler aynı olursa iki yolun yatay mesafelerine bakarız*" diyen Ö3' ün bu sırada açıları da dikkate aldığı ve eğim ile ilişkilendirmeye başladığı görülmüştür. Modeldeki dikey mesafe ile hipotenüs arasındaki açıyı kastederek *"Burada yükseklikler aynı ama açısı daralıyor. Açısı dar olan daha diktir"* yorumunda bulunması eğim ile açısal ilişkiyi kurmaya başlaması bakımından önemli görülmüştür. Dikey mesafelerin yanında yol uzunluklarının da aynı fakat eğimlerin farklı olduğu iki yol çizmesi istendiğinde ise *"olmaz ki öyle…eğim aynı olmak zorunda o zaman"* demesi onun dik üçgen modelini zihninde dinamik bir şekilde hareket ettirebildiğini ve buna bağlı olarak eğimi istediği değişkene göre yorumlayabildiğini düşündürmüştür. Ö2 de benzer şekilde böyle bir durumda eğimin aynı kalması gerektiğini dile getirip dik üçgen modelinde bu görüşünü savunabilmiştir. Ancak dik üçgen modelini aynı zamanda eğimi hesaplamada bir araç olarak kullanabildiğini gösteren Ö1, dikey ve yatay mesafelerin eğimi etkilediği savunmasını bu araç üzerinden yapmaya çalışmasına rağmen orantısal ilişkiyi kurup eğim ile sabit oranı ilişkilendirememiştir.

İkinci görüşmede verilen doğrusal görselin eğimini, dikey mesafeyi yatay mesafeye bölerek hesaplayabilen Ö3 eğimin aynı doğru üzerinde alınan noktaya göre değişmeyeceğini önce *"aynı yol, aynı yokuş"* şeklindeki savunmuş ancak ardından "*yükseklik ve yatay mesafe değişeceği için, yüksekliği yatay mesafeye böldüğümüz için eğim de değişecek* " şeklindeki ifadesi ile informel yaşamdan edindiği bilgi ile formel matematik içerisinde oluşturmaya çalıştığı bilgi arasında bir dengesizlik yaşadığını ortaya koymuştur. Ö3, görüşme sırasında sayısal örnekler üzerinden savunma yaparken eğimin değişmeyeceğini fark ederek yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın sabit kalmasından dolayı eğimin de sabit kalacağına ilişkin anlamlandırmayı bu görüşme sırasında yapılandırmıştır.

> ***Ö3:*** *Alt mesafesi 240. Tabelanın koyulacağı yere kadar da yüksekliği vermiş 70. 70' i 240' a böleceğiz.*
>
> ***G:*** *Eğim değişti mi?*
>
> ***Ö3:*** *Değişmedi. Buradaki sonuçlara bakılınca değişmedi eğim. Yüksekliğin yatay mesafe oranı sabit kalıyor hep.*

Üçüncü görüşmede kendisine koordinat düzleminde bir doğru parçası verildiğinde "*y_1-y_2/x_1-x_2*" cebirsel oranı ile eğim hesaplaması yaptığı görülen Ö3 farklı bir yolla sonuca ulaşıp ulaşamayacağı sorgulandığında "*dikey mesafe/yatay mesafe*" oranını kastederek "*Aynı olacak işte. Aralıkları çıkartacağız sonra birbirine böleceğiz. Bu formüldeki gibi…*" şeklinde açıklama yaparak eğimin cebirsel ve geometrik yorumlarını ilişkilendirdiğini göstermiştir (şekil 11). Buna karşın Ö1' in cebirsel oranı kullanmasına rağmen onu bir doğrunun üzerindeki noktaların koordinatları verildiğinde kullanacağı "y' ler arasındaki fark ile yüksekliği bul, x' ler arasındaki fark ile yatay mesafeyi bul ve birbirine böl" algoritması olarak gördüğü ve doğru üzerindeki herhangi iki nokta için bu algoritmanın verdiği sonucun daima aynı çıkacağını içselleştiremediği görülmüştür. Ö2' nin de cebirsel oranı kullanmaktan kaçınması ve koordinat değerleri büyük olan noktalar bile verildiğinde koordinat düzleminde doğruyu kabataslak görselleştirerek "dikey mesafe/yatay mesafe" den sonuca ulaşması dikkat çekmiştir. Ancak Ö1' in koordinatlar arası fark ile dikey ve yatay mesafeleri bulabildiğini açıklaması onun geometrik oran ile cebirsel oran arasında zayıf da olsa bağ kurduğu şeklinde yorumlanmıştır. Ö2' nin ise cebirsel oranı kendi verdiği harflerle ortaya koyup geometrik oran ile ilişkilendirerek açıklaması onun eylem aşamasından süreç aşamasına geçişte önemli bir adımı olarak görülebilir.



Şekil 11. Ö3'ün Eğimin Hem Cebirsel Hem Geometrik Oran Yorumlarını Kullandığı Performansından Görüntüler

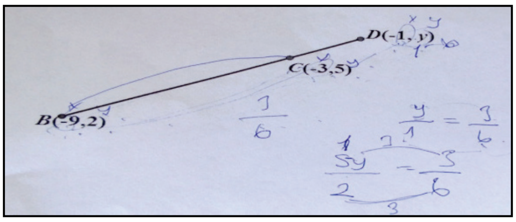
İki noktası verilen bir doğru üzerindeki sadece apsisi verilen üçüncü noktanın ordinatını bulma sorusunda ise Ö3 görüşmecinin uyarıcı sorusu ile eğimi çağırabilmiş ve eğimin aynı kalacağını vurgulayarak, bilinen iki noktadan eğimi kolayca hesaplayabilmiştir (şekil 12). Ö3 bu adımıyla, verilen doğru üzerinde herhangi iki noktada eğimin değişmezliğini içselleştirme yolunda Ö2' ye göre daha sağlam bir kavram oluşumunda olduğunu göstermiştir. Çünkü sadece eğimin sabit bir oran oluşunu gerekçelendirerek savunmamış aynı zamanda onu kullanabilmiştir. Ö1 ise aynı doğru üzerinde de olsa farklı noktalar alındığında eğimin değişebileceği yönünde performans ortaya koymuş ve dolayısıyla eğimi sabit oran olarak içselleştiremediğini göstermiştir. Dolayısıyla bu problemin çözümünde de eğime başvuramamıştır.

G: *Peki bu üç noktanın aynı doğru üzerinde olması sana ne gibi bir kolaylık sağlar?*

Ö3: *Eğimleri aynı çıkar. X' ten x' i çıkardık, y' den de y' yi çıkardık (koordinatları bilinen B ve C noktasının ordinatları arası farkı ve apsisleri arası farkı aldı ve böldü): 3/6.*

G: *Peki doğru üzerinde başka iki nokta alsan?*

Ö3: *Bununla bunu (C ve D noktalarını gösteriyor). Yine 3/6 olur çünkü aynı doğru.*



Şekil 12. Ö3'ün Bir Doğru Üzerinde Verilen 3 Noktadan Birisinin Ordinatının Sorulduğu Porblem Durumundaki Performansından Bir Görüntü

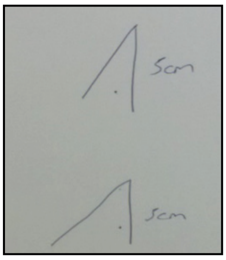
Ö4' ün Eğimi Oluşturma Süreci

Çalışma boyunca "dikey mesafe/yatay mesafe" yi eğimi hesaplayabileceği bir formül olarak gören Ö4, eğimi dikey ile yatay mesafe arasındaki oran olarak yapılandıramamış bir katılımcıdır.

Gerçekleştirilen birinci görüşmede bu katılımcının dik üçgen modelini bir araç olarak kullanabildiği ve savunma yaparken dinamik olarak oynatarak eğimi yorumlayabildiği görülmüştür. Örneğin, dikey mesafeleri aynı olup eğimleri farklı yollar çizmesi istendiğinde Ö4, bu sırada yatay mesafeleri farklı tuttuğunun farkında olduğunu göstermiştir (Şekil 13).

G: *Yükseklikleri aynı olup da eğimleri farklı olacak iki yol çizebilir misin bana?*

Ö4: *Şimdi burası 5 cm olsun, burası da 5 cm olsun (iki dik üçgen çizerken mırıldanıyor). Çizilebilir.*



Şekil 13. Ö4'ün Dikey Mesafeleri Aynı Olup Da Eğimleri Farklı Yol Modelleri

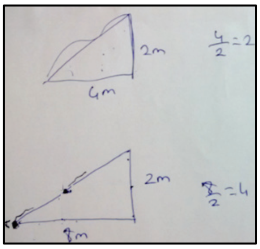
G: *Yükseklikler aynı diyorsun ve 5' er cm vermişsin.*

Ö4: *Bu daha dik (birinci model).*

G: *Peki yükseklikler aynı olmasına rağmen daha dik dedin Neden öyle dedin?*

Ö4: *Çünkü buradaki mesafeler farklı (yatay mesafeleri gösterdi).*

Diğer yandan Ö4'ün ikinci görüşmede eğim hesaplarken dikey mesafeyi yatay mesafeye oranlamak yerine yatay mesafeyi dikey mesafeye oranlayarak işlem yaptığı görülmüştür. Kendisinin çizdiği modeller üzerinde hatasını fark etmesine fırsat verecek sorularla karşılaştığında ise eğimin hangisinde fazla olması gerektiğini doğru bildiği ancak matematiksel olarak hesapladığında bu karşılaştırmanın tam tersi sonuç vermesinin normal olabileceğini düşünmesi dikkat çekmiştir (Şekil 14).



Şekil 14. Ö4'ün Yatay Mesafeyi Dikey Mesafeye Bölerek Eğimi Hesaplama Yanılgısı

G: *Peki hangisinin eğimi fazla?*

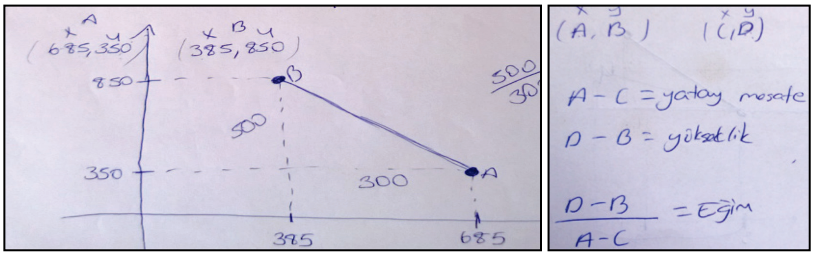
Ö4: *Bunun eğimi daha fazla…Dur! Bunun eğimi daha fazla (heyecanla görsel olarak eğimi fazla olanı doğru seçti). Çünkü eğim bunlarla ters orantılıydı (yatay mesafeleri gösteriyor).*

G: *Peki onun eğiminin fazla olduğunu söylüyorsun ancak elde ettiğin sonuçlara bakarsak bu sonuçlar benzer sonuç olmak zorunda mı değil mi?*

Ö4: *Bence değil. Çünkü bunda 4 m çıktı. 4 m çıktığı için o zaman daha fazla olduğundan diklik azalıyor. Burada 2 m çıktı. Metresi yani mesafesi daha az olduğu için daha dik oluyor eğim bence. Değildir yani.*

Ö4 aynı doğru üzerinde farklı noktalar alındığında eğimin değişeceğini *"yükseklik ve yatay mesafe değişir. O zaman eğim de değişir"* şeklinde savunmuştur. Öğrenme sürecine bakıldığında bu anda dikey ve yatay mesafenin alınan noktaya göre değiştiği tüm gruplar tarafından görülmüştür. Ancak informel olarak edinilen eğimin aynı doğru üzerinde değişmemesi gerektiği bilgisi ile oluşan bilişsel dengesizliğin giderilmesi için gerek grup içi gerekse sınıf tartışmalarında dikey mesafenin yatay mesafeye oranının sabit kaldığının fark edilmesi ve bu sabit oranın eğimin değişmemesini sağladığının anlamlandırılması beklenmekteydi. Nitekim süreç bu şekilde ilerlemiş ve katılımcılarda n Ö2 ile Ö3'ün matematiksel olarak dikey ve yatay mesafelerin değişmesine rağmen aralarındaki oranın değişmediğini içselleştirebildikleri görülmüştür. Ancak Ö4' ün istenilen kavramsallaştırmayı yapamamasında kontrol edilemeyen değişkenlerin yanı sıra açık uçlu test performansına bakıldığında doğru orantılı değişkenlerin arasında oranın daima sabit kaldığını anlamlandıramamasının da etkili olmuş olabileceği düşünülmektedir. Nitekim bu katılımcı eğimi, ilk görüşmelerde dikey ve yatay mesafedeki değişime göre yorumlamada bazı güçlükler yaşamış ve ikinci görüşmede ise bu kavramı oran şeklinde yapılandırma sürecinde yanılgılar yaşadığını göstermiştir.

İkinci görüşme boyunca yatay mesafeyi dikey mesafeye oranlayarak eğim hesaplamaya çalıştığı görülen Ö4'ün üçüncü görüşmede ise eğim hesaplarken artık dikey mesafeyi yatay mesafeye böldüğü, iki noktasının koordinatları verilen bir doğrunun eğimini hesaplarken ise daima görselleştirerek eğim hesapladığı görülmüştür (Şekil 15). Ayrıca negatif eğimin farkında olmadığını gösteren Ö4, y_1-y_2/x_1-x_2 gibi bir formülü hiç görmediğini ifade ederek eğimin geometrik oran yorumundan cebirsel oran yorumuna geçiş yapmadığını ortaya koymuştur. Bu katılımcı "dikey mesafe/yatay mesafe" oranını koordinat düzleminde bir doğru için de kullanarak dik üçgen modelini bir araç olarak kullandığını göstermiştir. Ancak yükseklik ve yatay mesafenin doğru üzerinde aynı oranda azalıp arttığını göremeyen Ö4' ün modeli henüz tam anlamıyla dinamikleştiremediği düşünülmüştür.



Şekil 15. Ö4'ün Koordinatları Verilen İki Noktadan Geçen Doğrunun Eğimini Hesaplaması

Ö4: *Siz bana iki nokta verdiğinizde bu iki noktanın neresi olduğunu buluyorum. Mesela ilk verdiğiniz nokta A noktası ise A noktasını buluyorum, ikinci verdiğiniz nokta B noktası ise B noktasını buluyorum. Bunları koordinat düzleminde göstermiştik. Oradan yüksekliği ve yatay mesafesini buluyorum. Buradan yüksekliği yukarıya yazıp, yükseklik/ yatay mesafeden eğimi hesaplıyorum.*

Doğrudan eğim sorgulaması içermeyen, iki noktası verilen doğru üzerindeki sadece apsisi verilen üçüncü noktanın ordinatının istenildiği soruda ise Ö4 eğimi çağıramamış ve görüşmecinin yönlendirmesi ile çağırsa bile eğimin aynı doğru üzerinde değişmezliğini anlamlandıramamış ve sorunun çözümüne ulaşamamıştır.

Ö5' in Eğimi Oluşturma Süreci

Çalışmada eğimi bir oran olarak yapılandırdığı sonucuna varılan Ö5, aynı zamanda benzerlik kavramı ile eğim arasında ilişki kuran, eğim ile açı ilişkisini algıladığı görülen, dik üçgen modelini artık fiziksel olarak ortaya koyma gereği hissetmeden dinamik olarak oynatabildiği bilişsel bir araç olarak içselleştirmeyi başardığı düşünülen katılımcıdır. Ayrıca eğimi cebirsel oran olarak da yapılandırabildiği görülen bu katılımcının, aynı soru içerisinde geometrik oran ile cebirsel oran yorumları arasındaki dinamik geçişler yapabildiği ve doğrudan eğim sorgulaması gerektirmeyen farklı problem durumlarında eğimi dışsal destek ve uyaran almaksızın çağırıp kullanmayı başarabildiği görülmüştür.

İlk görüşmeden itibaren eğimi, bağlı olduğu değişkenlere göre oldukça rahat bir şekilde yorumlayabildiği görülen Ö5' in dik üçgen modelini dinamik bir şekilde oynatabildiği dikkat çekmiştir. Bir değişkeni sabit tutarken diğeri ile eğim arasındaki ilişkiyi "*Yükseklik arttıkça dikliği artar. Yatay yoldaki şu yatay mesafe azaldıkça dikliği yine artar*" ya da "*Yükseklikle eğim doğru orantılı. Yatay yolda aldığı mesafe ile de ters orantılı*" şeklinde ifade edebildiği görülmüştür. Ayrıca dikey mesafe ile yatay mesafenin aynı oranda artıp azalmasından dolayı eğimin doğrudan, doğru ya da doğrusal görselin uzunluğuna bağlı olmadığını da anlamlandırdığı görülmüştür.

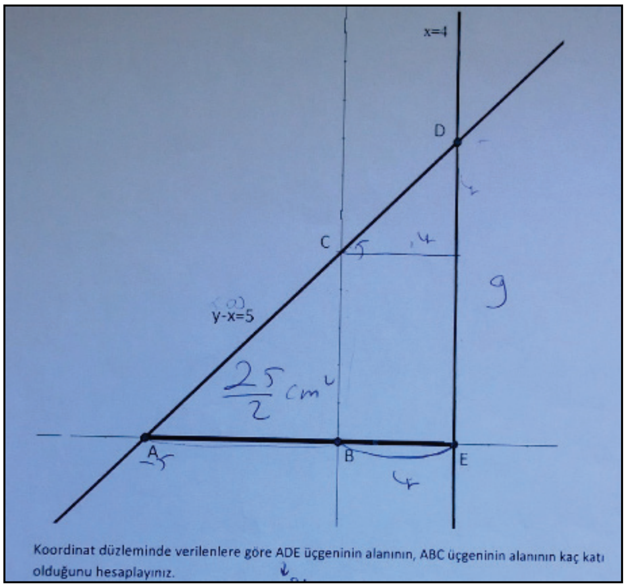
G: *Peki yükseklik arttığında her zaman eğim artmak zorunda mıdır?*

Ö5: *Hayır. Yatay yol da değişirse o zaman eğim ona göre değişir. Yükseklikle yatay mesafe aynı oranda arttığı sürece bunun eğimi değişmez.*

İkinci görüşmede ise "*eğim deyince, bir şeyin kenarlarına bağlı olarak ortaya çıkan diklik ya da eğiklik durumunu anlıyorum*" diyerek dik üçgen modelini zihninde canlandırarak yükseklik ve yatay mesafeye bağlı olarak yorumladığı dikkat çekmiştir. Kendisine verilen bir doğrusal görselin eğimini hesaplarken zorlanmadığı görülen katılımcının eğimini bulduğu doğruya uygun dik üçgen modeli oluşturma sırasında dik üçgen modelini istediği kadar küçültebileceğini çünkü eğimin değişmeyeceğini vurguladığı görülmüştür. Bunun yanında kendisine bir dağ yolunun eğiminin sayısal değeri ve tepe noktasına kadar olan kısmın yatay mesafe uzunluğu verildiğinde tepe noktasının yüksekliğini orantısal muhakeme ile açıklaması onun eğimi bir oran olarak içselleştirme sürecinde olduğunun desteklemiştir.

Ö5: *Yatay mesafesi 1000 m. Eğim 3/10. Burada yatay mesafeye 10 demiş sanki. Burada 1000, 10' un 100 katı. O yüzden 3' ün de 100 katı olması lazım. Bundan dolayı yükseklik 300 oluyor.*

Üçüncü görüşmede doğrudan eğim sorgulaması içermeyen iki soruda da eğimi dışsal destek ya da uyaran almaksızın çözüm sürecine çağırıp kullanabildiği dikkat çeken katılımcının benzerlik ile eğim kavramları arasında ilişki kurmaya başladığı görülmüştür (Şekil 16).



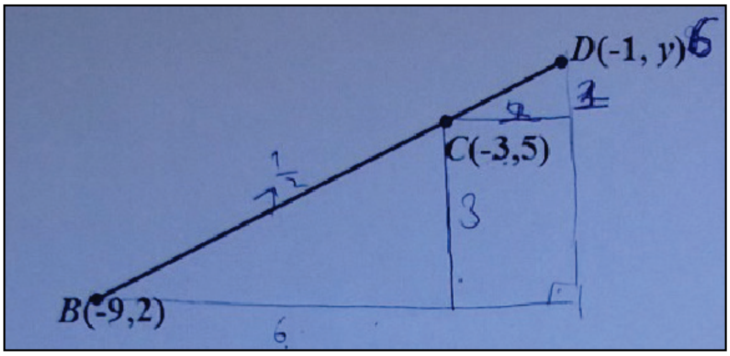
Şekil 16. Koordinat Düzleminde Doğruların Oluşturuduğu İki Üçgenin Alanları Oranı Sorusunda Ö5'in Performansından Bir Görüntü

Ö5: *Bunların ikisinin eğimi eşit.*

G: *Eğimleri eşit mi? Nelerin eğimleri eşit?*

Ö5: *Şu iki üçgenin hipotenüslerinin eğimleri eşittir. Zaten burada bir küçük üçgen oluşturursak (DC' yi hipotenüs kabul eden üçgen), burası 4(BE nin karşısındaki kenarı gösteriyor) ve buradan da zaten 1 oluyor (yazarak benzerlik oranının 1 olduğunu gösteriyor) ve iki üçgen benzer olduğu için eğim yine değişmiyor.*

Bu görüşmede de aynı doğru üzerinde eğimin değişmemesini hem görsel olarak (doğrunun zig zag çizmemesi ifadesi ile), hem dikey ve yatay mesafe değerlerinin doğrusal artması ile, hem de açının sabit kalması ile açıklayabildiği görülen Ö5, eğimi farklı yorumlarla içselleştirerek yapılandırdığını göstermiştir (Şekil 17).



Şekil 17. Aynı Doğru Üzerinde Olan 3 Noktadan Birisinin Ordinatının Sorulduğu Soruda Ö5'in Performansından Bir Görüntü

***G:** Peki eğimin değişmediğini nereden biliyorsun bu yol üstünde?*

***Ö5:** Bu doğru parçası aynı doğru parçası ve bu iki üçgen benzer. O zaman bu 3/6 (büyük üçgendeki eğim)bu da 1/2 (küçük üçgendeki eğim). Kenarlar arasındaki oran da sabit.*

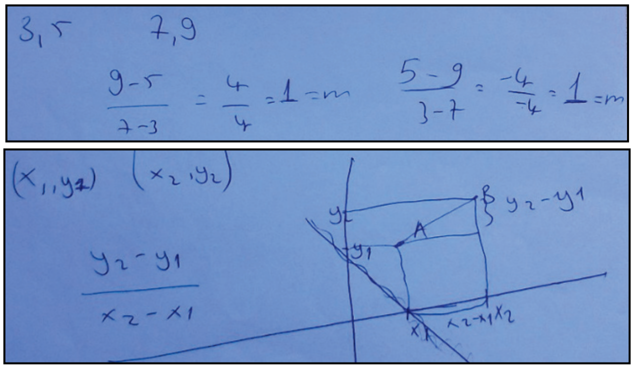
***G:** Mesela birazcık daha uzatsak bu doğruyu eğim değişmeyecek mi?*

***Ö5:** Değişmeyecek. Zig zak çizmediğimiz sürece değişmez.*

***G:** Eğim neden değişmiyor?*

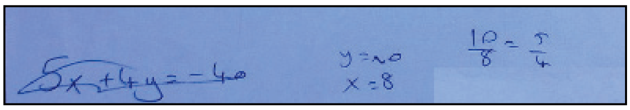
***Ö5:** Çünkü hep benzer üçgenler oluşuyor yani doğrusal olarak artıyor ve hep aynı açıda devam ediyor.*

Kendisine iki nokta verildiğinde bu noktalardan geçen doğrunun eğimini koordinat düzleminde görselleştirmeksizin y_2-y_1/x_2-x_1 cebirsel genellemesiyle de bulabildiği görülen katılımcının attığı her adımın farkında olduğu ve bu genellemeye nasıl ulaştığını rahatça açıklayabildiği görülmüştür (Şekil 18).



Şekil 18. Ö5'in Cebirsel Oran Yorumu İle Eğimi Hesaplama Ve Genellemeye Ulaşama Sürecini Modelle Açıklaması

Ayrıca eğimin negatif olabileceğinin farkında olup negatif eğim sonuçlarına da ulaşabildiği görülen Ö5' in "*negatif doğrular hep sola yatık olur, pozitif olanlar hep sağa yatık olur ya da negatif olanlar geniş açı, pozitif olanlar hep dar açı olur*" şeklinde bir genellemeye ulaştığı ortaya çıkmıştır. Kendisine verilen bir doğrunun eğimini hem dik üçgen modelinden dikey mesafenin yatay mesafeye oranı olarak hem de koordinat düzleminde y_2-y_1/x_2-x_1 genellemesi ile hesaplayabildiği, buna bağlı olarak eğimin geometrik oran yorumundan cebirsel oran yorumuna anlamlı bir geçiş yapabildiği dikkat çeken Ö5' in sadece denklemi verilen bir doğrunun eğimini nasıl hesaplayabileceğini de açıklayabildiği görülmüştür. Aynı doğruyu koordinat düzleminde çizmeksizin eğimini hesaplayıp hesaplayamayacağı sorgulandığında yükseklik ile yatay mesafeye doğrunun y ve x eksenlerini kestiği noktalardan ve sonuca geometrik oran yorumundan ulaştığı görülmüştür. Bu sırada dik üçgen modelini zihinde canlandırarak, onu fiziksel olarak ortaya koyma gereği duymadığını göstermiştir (şekil 19). Bu sırada dik üçgen modelinin zihninde canlandırılmasının adım adım olmadığı, hızlı ve seri bir biçimde hatta katılımcının modeli kullandığının farkında olmadığı görülmüştür. Bu sebeple Ö5' in kavram şemasına dik üçgen modelinin ayrılmaz bir varlık olarak entegre olduğu şeklinde yorumlanmıştır.



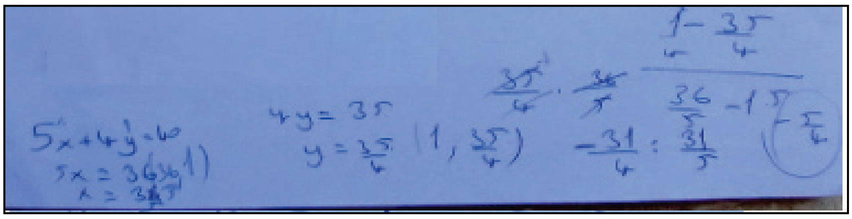
Şekil 19. Ö5'in Denklemi Verilen Bir Doğrunun Eğimini, Eksenleri Kestiği Noktalardan Geometrik Oran Yorumu İle Hesaplaması

Ardından doğru üzerinde eksenleri kestiği noktaların dışında herhangi iki nokta da alabileceğinin farkında olduğunu ortaya koyan Ö5′ in bu sefer cebirsel oran yorumundan yararlanarak eğimi hesaplayabildiği dikkat çekmiştir. Aynı soru içerisinde eğimin farklı yorumlarını kullanabildiği görülen Ö5′ in eğim ile ilgili vardığı genellemeleri sadece anlamlandırarak benimsemediği aynı zamanda içselleştirerek problem durumlarında anlamlı bir şekilde kullanabildiği görülmüştür (Şekil 20).

Ö5: *5x+4y-40=0′ dan yapayım. Y′ ye 1 verdim. -36 oldu attım karşı tarafa x buradan 36/5 oldu(işlemleri yaparken kağıtta sesli olarak da anlatıyor). Sonra x′ e 1 verdim. X′ e 1 verince 4y=35 oldu. y=35/4 oldu. Burada koordinat 36/5 oldu. (36/5,1) oldu. sonra burada da x′ e kaç vermiştim? 1 vermiştim. (1,35/4) oldu. Bunlardan birbirini çıkaracağım. 1′ den 35/4′ ü çıkaracağım, sonra da 36/5′ ten 1 çıkarılmış hali bulacağım (yazarak gösteriyor). Sonra da böleceğim.*

G: *Böl bakalım.*

Ö5: *Burası -31/4 olacak (payı buluyor işlem yaparak). Burası da 31/5 olacak (paydayı buldu işlem yaparak). (İkisini bölme işlemi olarak yazdı) bunu ters çevirirsek (paydadan bahsediyor) sonuç yine -5/4 olacak.*



Şekil 20. Ö5′in Denklemi Verilen Bir Doğrunun Eğimini, Onun Üzerindeki Herhangi İki Noktanın Koordinatlarını Bularak Cebirsel Oran Yorumuyla Hesaplaması

Sonuç

Bu bölümde, çalışmada elde edilen bulgulardan APOS öğrenme teorisindeki bilişsel yapılara göre elde edilen sonuçlar ve bu sonuçlar doğrultusunda revize edilen genetik çözümleme sunulacaktır. Elde edilen bulgular doğrultusunda genetik çözümlemede eğimin geometrik ve cebirsel temsillerinin oluşumlarının ayrı olarak ele alınmasının kavramın yapılandırılma sürecinin tarif edilmesini daha açık ortaya koyacağı düşünülmüştür. Elde edilen bulgularda bireyin eğimi geometrik sabit oran olarak yapılandırması süreç aşamasını işaret etmesine rağmen, bu performans cebirsel oran kavramsallaştırmasında benzer adımda olmasını gerektirmemektedir. Örneğin, Ö2′nin geometrik oran kavramsallaştırmasında eğimi aynı doğru üzerinde sabit bir oran olarak içselleştirdiğini gösterdiği düşünülmüş ancak cebirsel oran kavramsallaştırmasında “y_2-y_1/x_2-x_1” ya da ona benzer bir genelleme içselleştirmekten ziyade sadece geometrik oran yardımıyla eğim hesaplayıp yorumladığı görülmüştür Ayrıca bu çalışmada, eğiminin hesaplanması ya da yorumlanması istenen doğru parçasının tamamını ya da doğrunun bir kısmını hipotenüs kabul eden dik üçgen modelinin oluşturulan bilişsel yapılara göre farklı işlevler edindiği sonucuna ulaşıldığından, genetik çözümlemeye dik üçgen modelinin gelişimi de eklenmiştir.

1. Eylem

Eğim kavramını eylem aşamasında oluşturabilen öğrencilerin eğimi, bir oran olarak yapılandıramadığı görülmüştür. Bu aşamadaki öğrenciler kendilerine verilen bir doğru ya da doğrusal görselin eğimini, dikey mesafeyi yatay mesafeye böleceği bir algoritma ile hesaplamakta ya da “dikey mesafe/yatay mesafe”yi bir formül olarak düşünüp o doğru ya da doğrusal görsele ait dikey ve yatay mesafe değerini formülde yerine yazarak sonuca ulaşmaktadırlar. Eğimi eylem aşamasında oluşturabilen bir birey, eğimi dikey ile yatay mesafe arasındaki oransal ilişkiden yola çıkarak kavramsallaştıramamıştır. Diğer bir deyişle aynı doğrusal görsel üzerindeki herhangi bir noktada eğimin değişmezliği ve dikey ile yatay mesafe arasındaki oranın değişmezliği arasındaki eşitlik ilişkisini kuramamıştır. Dolayısıyla eğimi, dikey mesafeyi yatay mesafeye bölerek hesaplayacağı bir algoritma olarak gören bireyin aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre eğimin değişmeyeceğini anlamlandıramadığı görülmüştür. Katılımcılardan Ö1 ve Ö4′ ün eğim kavramını henüz eylem aşamasında oluşturabildikleri sonucuna varılmıştır. Örneğin, Ö1′ in aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde, eğimin alınan noktaya göre değişeceğini ileri sürdüğü ve buna neden olarak da dikey ve yatay mesafe değerlerinin değişmesini gösterdiği görülmektedir. Dikey ve yatay mesafe değerleri değişirken bu değerler arasındaki oranın değişmediğini fark edemeyen bir diğer katılımcı Ö4′ ün de eğimi, "dikey ve yatay mesafeyi bulup birbirine böl" şeklinde geliştirdiği algoritma olarak gördüğü dikkat çekmektedir. Ayrıca hem Ö1′ in hem Ö4′ ün aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre eğimi yorumlamalarına yönelik sorgulamalarında, her adımda hesaplama yapmaksızın onun hakkında düşünmekte zorlandıkları görülmüştür. Eylem aşamasında kavram oluşumuna sahip bu öğrencilerin dik üçgen modelini dinamik olarak hareket ettiremediği ve durumdan bağımsız bir bilişsel araç olarak kullanamadığı sonucuna varılmıştır. Ayrıca bu aşamada kullanılan dik üçgen modelinin, verilen bir doğrunun herhangi bir parçasının hipotenüs kabul edilerek inşa edilemediği görülmüştür. Onun yerine doğrunun tamamı doğru parçası gibi düşünülerek başlangıç ve bitiş noktaları esas alınmak şartıyla hipotenüs kabul edilen dik üçgen modeli dikkat çekmiştir ki bu da modelin durağanlığı olarak yorumlanmıştır. Bunun yanında bağlam durumunda verilen doğrusal görselin (örneğin dağ eteği, rampa, yokuş bir yol vb.) daima tamamının hipotenüs kabul ederek dik üçgen olarak modelinin ortaya konması da durumun modellenmesi kapsamında yorumlanarak modelin durağanlığı fikrini desteklemiştir. Bunun yanında bu aşamadaki öğrenciler "y_2-y_1/x_2-x_1" oranını eğim hesaplamasında bir formül olarak kullanabilmişler ancak bu cebirsel oran ile geometrik yorum (dikey mesafe/yatay mesafe) arasında ilişki kuramamışlardır. Sonuç olarak genetik çözümlemenin ilk aşamasının aşağıdaki biçimde özetlenebileceği düşünülmektedir:

1a. Geometrik: Verilen bir doğru ya da doğrusal görsel için "dikey mesafe/yatay mesafe" oranını eğim hesaplaması için sadece bir algoritma olarak kullanma eylemi. Eğimin dikey mesafe ile yatay mesafe arasındaki sabit oran olarak anlamlandırılmaması.

1b. Cebirsel: "y_2-y_1/x_2-x_1" cebirsel oranını bir formül olarak kullanma ve verilen iki noktanın koordinatlarını yerine yazarak sonuca ulaşma eylemi.

Durağan model: Eylem kavramsallaştırmasında, eğimi sorgulanan doğrunun herhangi bir parçasını hipotenüs kabul eden dik üçgen modeli durağandır ve daha çok durumu (dağ eteği, yol vb.) modelleyerek anlamlandırmaya yöneliktir. Bu aşamada dik üçgen modeli oluşturulurken doğru ya da doğrusal görselin herhangi bir kısmının hipotenüs kabul edilebileceğinin henüz içselleştirilemediği görülür. Bu sebeple daima doğrunun tamamı, doğru parçası gibi düşünülerek, hipotenüs kabul edilir.

2. Süreç

Eğimi dikey mesafe ile yatay mesafe arasındaki oran olarak yapılandırabilen birey aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre eğimin değişmeyeceğini içselleştirmiştir. Öğrencinin sadece görsel olarak eğimin değişmeyeceğini vurgulaması, onun informel yaşantısından edindiği deneyimler doğrultusunda bu yargıya varmış olabileceğini ve dolayısıyla henüz süreç aşamasında kavramsallaştırma sağlayamadığını düşündürmüştür. Ayrıca eğimin aynı doğru üzerinde değişmeyeceğini anlamlandırmadan ezberleyen bireyin de, eğimin özel bir oran olduğunu içselleştiremediği için süreç kavramsallaştırmasına sahip olamayacağı sonucuna varılmıştır. Süreç aşamasında kavram oluşumu sağlayan bireyin aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre, dikey ve yatay mesafenin değişmesine rağmen bu ikisinin arasındaki oranın sabit kaldığını içselleştirdiği görülmektedir. Eğimin bir oran oluşunun içselleştirilmesinde doğrunun herhangi bir noktasında dikeyde ve yatayda alınan mesafelerin doğru orantılı değişiminin gerekçelendirilerek açıklanması bir gösterge olarak yorumlanmıştır. Bununla birlikte aynı doğru üzerinde alınan herhangi iki noktanın arasındaki doğru parçasının eğiminin değişmezliğinin cebirsel oran yardımıyla gerekçelendirilebilmesi de süreç yapısını işaret eden içselleştirme şeklinde yorumlanmaktadır.

Bu aşamada dik üçgen modelinin artık durumu modellemekten daha ileriye gitmeye başladığı ve dinamik bir şekilde oynatılabildiği görülür. Dik üçgen modelinin eğim için ayrılmaz bir parça haline geldiği görülürken öğrencilerin savunmalarında, yorumlarında, geometrik orandan yola çıkıp cebirsel bir oran olarak eğimi yeniden düzenleme etkinliklerinde dinamik bir şekilde modeli kullanabildiği dikkat çekmiştir. Ancak dik üçgen modelinin bu aşamada, onu ortaya koymaksızın bir araç olarak kullanılamadığı, kullanılacağı zaman ise görselleştirme ihtiyacının olduğu dikkat çekmiş ve bu sebeple süreç aşamasındaki kavramsallaştırmada henüz tam anlamıyla bir bütün olarak soyutlanarak bilişsel bir araç haline gelmediği görülmüştür.

Eğimin süreç yapısının oluşumunu gösteren göstergelerden bir diğeri "y_2-y_1/x_2-x_1" cebirsel oranının eğimin geometrik yorumu ile ilişkilendirilerek kullanılmasıdır. Bu aşamadaki birey neden koordinatlar arasındaki farkı bulduğu, farkları neden birbirine böldüğü, neden sonucun negatif olabileceği gibi sorulara anlamlı cevaplar verebilir. Süreç kavramsallaştırması gerçekleştirdiği sonucuna varılan Ö2 ve Ö3' ün attıkları adımları nedenleriyle birlikte açıklayabilmeleri, onların kullandıkları cebirsel oranı anlamlandırdıklarını ortaya koymaları açısından önemli görülmüştür. Kendi cebirsel genellemelerini ortaya koymaları, eğimin cebirsel ve geometrik yorumu arasında dinamik geçişler yapabilmeleri, dik üçgen modelini dinamik olarak oynatabilmeleri ve henüz görselleştirme gereksinimi duysalar da bu modeli eğim için bir araç olarak kullanabilmeleri ayırt edici performansların başında gelmiştir. Ancak bu aşamadaki katılımcıların eğimin doğrudan sorgulanmadığı problem durumlarında ancak araştırmacıdan gelen dışsal uyaranlar doğrultusunda eğim kavramını çağırılabildikleri ve kavramı kullanmada güçlükler yaşayabildikleri görülmüştür. Sonuç olarak revize edilmiş genetik çözümlemenin ikinci aşamasının aşağıdaki biçimde özetlenebileceği düşünülmektedir:

2a. Geometrik: Eğimin dikey mesafe ile yatay mesafe arasındaki oran olarak içselleştirilmesi. Doğru ya da doğrusal görsel üzerinde alınan herhangi bir noktada eğimin değişmemesinin nedeninin dikey mesafe ile yatay mesafe arasındaki oranın sabit kalması olduğunun anlamlandırılması.

2b. Cebirsel: Dikey mesafenin yatay mesafeye oranı olarak yapılandırılan eğimin, koordinat düzleminde bir doğrunun eğimi için "y_2-y_1/x_2-x_1" cebirsel oranı ile ilişkilendirilerek yeniden düzenlenmesi ve anlamlandırılması. Doğrunun eğimi için doğru üzerinde herhangi iki noktanın esas alınabileceği düşüncesinin eğimin sabit oran oluşu yardımıyla içselleştirilmesi. Eğimin farklı temsilleri arasında geçişler yapılabilmesi ve ilişkiler kurulabilmesi. Eğim hesaplarken atılan her adımın farkında olunması ve gerekli açıklamalarla bu farkındalığın savunulabilmesi.

Modelin bilişsel araç olarak oluşturma süreci: Süreç aşamasında dik üçgen modeli sadece durumu anlamlandırmaya yönelik bir araç olmaktan öte eğimi yeniden düzenleme, problem durumlarında kullanma, yorumlama ve düşüncelerini savunma sırasında bir araç olarak kullanılır. Ancak bu aşamada birey modeli görselleştirerek kullanma ihtiyacı duymaktadır.

3. Nesne

Bir kavram oluşumunun süreç yapısının kavramsallaştırılması tamamlandığında sürecin kapsüllenip nesne olarak ortaya konması ve bu sayede üzerine eylemler uygulanabilmesi beklenmektedir. Öğretimine sekizinci sınıfta başlanılan eğim kavramının nesne aşamasında kavramsallaştırılmasının, eğim kavramının önkoşul olduğu türev gibi kavramların öğrenilmesi sırasında oluşacağı düşünülebilir. Sekizinci sınıf düzeyinde nesne aşamasının göstergelerinin çok açık bir şekilde görülemeyeceği düşünülmekte, lise ve üniversite yıllarında ise daha net görülebilmesi beklenmektedir. Bunun yanında nesne aşamasında kavram oluşumu sağlanmasının bir diğer göstergesi nesnenin kapsülünden çıkarma mekanizması ile süreç formunda farklı problem durumlarında ya da kavram oluşumlarında yansıtılabilmesidir. Elbette farklı bir problem durumunda eğim kavramının yansıtılması onun kapsülünden çıkarıldığını ve dolayısıyla nesne olarak yapılandırıldığını kesin olarak göstermemektedir. Ancak olası nesne oluşumuna işaret etmesi açısından doğrudan eğimi sorgulamayan farklı problem durumlarında, katılımcıların benzerlik gibi farklı kavramlarla ilişkilendirmeler yapabilmesi onların nesne aşamasında oluşu fikrini güçlendirmektedir. Eğim kavramının nesne yapısını incelemek amacıyla üçüncü klinik görüşmede doğrudan eğim sorgulaması gerektirmeyen, öğrencilerin daha önceden karşılaşmadığı kabul edilen iki problem durumu verilmiştir. Her iki problem durumunda da dışsal destek ve uyaranlar beklemeksizin eğim bilgisini problem durumuna yansıtabildiği ve sonuca rahatça ulaşabildiği görülen Ö5′ in eğimin farklı temsilleri (fiziksel, cebirsel, geometrik, doğrusal sabit) arasında ilişkiler kurabildiği ve geçişler yapabildiği görülmüştür. Eğimi bir süreç olarak çağırıp yansıtabildiği görülen bu katılımcının orandan yola çıkarak benzerlik ile eğim kavramı arasında ilişki kurabildiği ve gerektiği zaman açı ile eğim arasındaki ilişkiyi de ortaya koyabildiği görülmüştür. Dolayısıyla Ö5′ in, eğimi sahip olduğu farklı kavramlarla ilişkilendirebilmesi ve gerektiğinde dışsal uyaran ya da destek beklemeksizin onu başka bir problem durumunda çağırarak kullanabilmesi eğimin bilişsel oluşumunun süreç aşamasını tamamladığını ve nesneleştirme sürecine girdiğini düşündürmektedir. Ayrıca bu katılımcının dik üçgen modelini görselleştirme ihtiyacı duymadan zihninde canlandırma yaparak bilişsel bir araç olarak kullanmaya başlamasının, kapsülleme sürecinde olduğuna ilişkin önemli bir gösterge olduğu sonucuna varılmıştır. Ö5′ in dik üçgen modelini dinamik bir şekilde hareket ettirmenin yanında onu görsel olarak ortaya koymaksızın sözel olarak da açıklayabildiği ve zihinden işlemler yaparak, modeli kullandığının farkında bile olmaksızın onun bilişsel aracılığında sonuca ulaşabildiği de görülmektedir. Sonuç olarak sekizinci sınıf düzeyinde eğim kavramının öğretiminin başlamasıyla bu sınıf düzeyindeki bir öğrencinin nesne aşamasına geçiş yaparak sahip olduğu bilişsel yapı aşağıdaki biçimde özetlenebilir:

3a. Eğim kavramı ile ilişkili farklı bir kavramın oluşturulması sırasında sürecin üzerine başka eylemlerin uygulamasına izin verecek şekilde kapsüllenmesi. Nesne olarak kapsüllenen eğimin, onunla doğrudan ilişkili olmayan farklı problem durumlarında kapsülünden çıkarılıp süreç olarak dışsal destek ya da uyaran beklemeksizin ortaya konulabilmesi. Bunun yanında doğrudan eğim ile ilişkili olmayan problem durumlarında sahip olunan farklı bilişsel yapılarla eğim arasında anlamlı ilişkiler kurulması.

Bilişsel bir araç olarak model: Nesne aşamasındaki kavram oluşumunda dik üçgen modeli artık fiziksel olarak ortaya konma gereği duyulmayan bilişsel bir bütün olma yolundaki araçtır.

Tartışma ve Öneriler

Eğim matematiğin farklı alanlarında farklı temsillerle yer alan, birçok yüksek matematik kavramının oluşturulması sırasında çağırılması beklenen ve buna bağlı olarak mimarlık, mühendislik, fen, uzay bilimi gibi birçok farklı bilim dalında kazanılması beklenen bir kavramdır. Bu kavramın anlamlı bir şekilde öğrenilebilmesi birçok mesleğin daha nitelikli olarak yerine getirilmesine ve dolayısıyla toplum refahının artmasına olumlu katkı sağlayacaktır. Bu sebeple eğim kavramının oluşturma sürecinin incelenmesi ve bilişsel yapıların ortaya çıkarılması yönündeki çalışmalar, kavramın öğrenilmesinin nasıl gerçekleştiği, öğrenme sırasında karşılaşılabilecek güçlükler, önkoşul bilgilerin neler olduğu ve kavramsal öğrenme sürecini nasıl etkilediği gibi birçok soruya yanıt verebilecektir. Bu çalışmada eğimin sekizinci sınıf düzeyindeki genetik çözümlemesi ortaya konmuş ve kavramın oluşturulma sürecine yönelik önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Crawford ve Scott (2000) ile Barr (1981) eğimin daha çok işlemsel olarak öğrenildiğini vurgulamakta ve kavramsal öğrenmenin gerekliliğine dikkat çekmektedir. Bu çalışmada görülmektedir ki eğimi bir formül ya da algoritma olarak oluşturabilen bireyler kavramsal öğrenmenin ancak eylem aşamasındadır. Bu aşamadaki birey eğimi anlamlandırmadan bir dizi işlemler sonucu elde edeceği bir kavram olarak görmektedir. Lobato ve Thanheiser (2002) ile Simon ve Blume'un (1994) ele aldıkları eğimin bir oran olarak anlaşılmasının gerekliliğinin, bu çalışmada eylemin sürece içselleştirilmesinde kritik bir role sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Eylemden süreç aşamasına geçilmesinin, eğimin dikey ve yatay mesafe arasındaki oran olarak içselleştirilmesi ile mümkün olacağı görülmektedir. Eğimin geometrik oran yorumunu anlamlı bir şekilde oluşturan birey, cebirsel genellemeye de anlamlı bir geçiş yapabilecektir. Böylece, lise ve üniversite yıllarında devam eden kavram şemasının yeniden düzenlenmesi sürecinde, eğimin farklı temsillerinin birbirinden kopuk bir şekilde öğrenilmesinin önüne geçilebilecektir. Bu açıdan bakıldığında bu çalışmada elde edilen sonuçlar Stump (1999, 2001) ve

Stanton ve Moore-Russo'nun (2012) ileri sürdüğü eğimin farklı temsilleri arasında anlamlı ilişkilerin kurulması ve bu sayede daha üst aşamalarda kavram oluşumu sağlanması düşüncesini desteklemektedir. Bu araştırmada süreç ve nesne aşamasına ulaştığı düşünülen Ö3 ve Ö5'in eğimin farklı temsilleri arasında dinamik geçişler yapabildiği görülmüştür. Sürecin kapsüllenerek nesneleştirilmesi ise onun üzerine farklı eylemler uygulanmasına fırsat vermektedir. Ancak bu araştırmada sekizinci sınıf düzeyinde nesne üzerine farklı eylemler uygulanmasına fırsat verecek çok açık durumlar oluşmayabileceği düşünülmektedir. . Ancak yine de öğretim desenlemesinde eğimin değişmezliğinin fark edilmesi gibi onun süreç olarak çağırılmasını ve üzerine karşılaştırma eyleminin uygulanmasını gerektirebileceği düşünülen öğrenme durumlarına olanak tanınması önerilmektedir. Bunun yanı sıra nesnenin kapsülünden çıkarılıp süreç olarak farklı problem durumlarına yansıtılmış olma olasılığı, Ö5' in performansında dikkat çekmiştir. Eğim ile doğrudan ilişkili olmayan problem durumlarında bu kavramı yansıtabilen, açı ve benzerlik gibi sahip olduğu kavramlarla eğim arasında ilişki kurabilen bu öğrencinin kavramı nesneleştirme yolunda olduğu görülmektedir. Bu nedenle öğretim sürecinde, eğim kavramının nesneleştirilmesinin sağlanması amacıyla öğrencilerin onu yansıtıp kullanabilecekleri problem durumları ile karşı karşıya bırakılması yararlı olacaktır. Ayrıca farklı kavramlar ile eğim arasında ilişki kurmalarını sağlayacak iyi planlanmış etkinlikler de bireye süreci nesneleştirme fırsatı verecektir.

Bu çalışmada, Stump (1999, 2001) ve Moore-Russo ve diğerlerinin (2011) ortaya koyduğu eğimin 11 temsilinden ikisi olan geometrik ve cebirsel oran temsillerinin oluşturulma süreci incelenmiştir. Eğimin bu iki formel kavramsallaştırmasında, eğim ile ilgili edinilen informel anlayışların- en başta fiziksel özellik, gerçek yaşam durumları ve doğrusal sabitlik- öğretime yansıtılmasının ve onlarla ilişki kurularak kavramsal gelişimin sağlamasının olumlu katkıları görülmüştür. Lise ve üniversite yıllarında karşılaşılacak parametrik katsayı, fonksiyonel özellik, trigonometrik kavram ve kalkülus kavramı olan diğer temsillerin oluşturulması, bir diğer deyişle eğimin yeniden yapılandırılma sürecinin incelenmesi gerekli görülmektedir. Türev gibi birçok matematiksel kavramın oluşturulmasında yansıtılması beklenen eğimin genetik çözümlemesinin tam olarak ortaya konabilmesi açısından bu araştırmalar önemlidir.

APOS' a dayalı araştırmalarda bir kavramın genetik çözümlemesinin sadece bir araştırma ile ortaya çıkarılmasının beklenmediği, genetik çözümlemenin ona yönelik birçok çalışma ile desteklenmesi gerektiği vurgulanmaktadır (Asiala, Brown, vd., 1997). Bu nedenle bu çalışmada ortaya çıkarılan genetik çözümlemenin ileriki düzeylerde ve daha büyük örneklem üzerinde yapılan farklı araştırmalarda ele alınarak yeniden incelenmesi gerekli görülmektedir.

Son olarak bu çalışmada, dik üçgen modelinin kavramsal öğrenme aşamalarının farklı basamaklarında farklı işlevler edinmesi dikkat çekmiştir. Eylem aşamasındaki bireylerde daha çok durumu anlamlandırmaya yönelik olup durağanlığı dikkat çeken modelin, süreç aşamasında bireylerde durumdan bağımsızlaşarak dinamikleştiği ve fiziksel olarak ortaya konulma ihtiyacı hissedilen bir araç olduğu görülmüştür. Nesne yapısının oluşturulması yolunda olduğu düşünülen bireyde ise modelin artık fiziksel olarak ortaya konulma gereği duyulmayan bir bilişsel araç olduğu ve eğim şemasının ayrılmaz bir parçası olan bilişsel bir varlık olduğu görülmektedir. Öğrenme sürecindeki modellerin kavram oluşturmadaki rolünün ortaya konacağı detaylı araştırmaların yapılması, kavramsal öğrenmenin nasıl daha verimli gerçekleştirilebileceği sorusunun cevaplanmasında önemli bir adım olacaktır.

Kaynakça

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. ve Weller, K. (2014). *APOS Theory – A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. ve Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *MAA NOTES*, 37-54.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. ve Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399-431.

Baki, A., Karataş, İ. ve Güven, B. (2002, 16-18 Eylül). *Klinik mülakat yöntemi ile problem çözme becerilerinin değerlendirilmesi*. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulmuş bildiri, ODTÜ, Ankara.

Barr, G. (1981). Some student ideas on the concept of gradient. *Mathematics in School*, *10*(1), 14-17.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. ve Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(3), 247-285.

Cheng, D. S. (2010). *Connecting proportionality and slope: Middle school students' reasoning about steepness* (Yayımlanmamış doktora tezi). Boston Üniversitesi, Boston.

Choy, C. (2006). *The use of variation theory to improve secondary three students' learning of the mathematical concept of slope* (Yayımlanmamış doktora tezi). University of Hong Kong, Pokfulam, Hong Kong SAR. http://hub.hku.hk/bitstream/10722/51380/6/FullText.pdf?accept=1 adresinden erişildi.

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St John, D. ve Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule?. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 345-364.

Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. The Netherlands.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. A. E. Kelly ve R. A. Lesh (Ed.), *Handbook of research design in mathematics and science education* içinde (s. 547-589). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Crawford, A. R. ve Scott, W. E. (2000). Making sense of slope. *The Mathematics Teacher*, *93*(2), 114-118.

Deniz, Ö. (2014). *8. sınıf öğrencilerinin gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımı altında eğim kavramını oluşturma süreçlerinin APOS teorik çerçevesinde incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, Türkiye.

Deniz, Ö. ve Kabael, T. (2017). Students' mathematization process of the concept of slope within the realistic mathematics education. *Hacettepe University Journal of Education*, *32*(1), 123-142. http://www.efdergi.hacettepe.edu.tr/upload/files/1724denizslope-mathematization-1.pdf adresinden erişildi.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. D. O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* içinde (s. 95-126). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. D. ve McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. *New Icmi Studies Series*, *7*, 275-282.

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A. ve Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An Apos-Based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 335-359.

Duncan, B. ve Chick, H. L. (2013). How do adults perceive, analyse and measure slope?. *36th annual conference of the mathematics education research group of Australasia (MERGA 36)* içinde (s. 258-265). Melbourne.

Dündar, S. (2015). Knowledge of mathematics teacher-candidates about the concept of slope. *Eğitimde Kuram ve Uygulama*, *11*(2), 673-693.

Ginsburg, H. P. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For The Learning of Mathematics*, *1*(3), 4-11.

Glesse, C. (2012). *Nitel araştırmaya giriş* (A. Ersoy ve P. Yalçınoğlu, Çev.). Ankara: Anı Yayıncılık.

Gökçek, T. ve Açıkyıldız, G. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının türev kavramıyla ilgili yaptıkları hatalar. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *7*(1), 112-141.

Green, J., Willis, K., Hughes, E., Small, R., Welch, N., Gibbs, L. ve Daly, J. (2007). Generating best evidence from qualitative research: The role of data analysis. *Australian and New Zealand Journal of Public Health*, *31*(6), 545-550.

Hattikudur, S., Alibali, M. W., Prather, R. W., Knuth, E. J., Asquith, P. ve Nathan, M. (2012). Constructing graphical representations: Middle schoolers' intuitions and developing knowledge about slope and y-intercept. *School Science and Mathematics*, *112*, 230-240.

Hoffman, T. W. (2015). *Concept image of slope: Understanding middle school mathematics teachers' perspective through task-based interviews* (Yayımlanmamış doktora tezi). The University of North Carolina at Charlotte.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. ve Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, *60*, 1-64.

Lobato, J. ve Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio-as measure as a foundation for slope. B. Litwiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook* içinde (s. 162-175). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Moore-Russo, D., Conner, A. ve Rugg, K. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational studies in Mathematics*, *76*(1), 3-21.

Nagle, C. ve Moore-Russo, D. (2014). The concept of slope: Comparing teachers' concept images and instructional content. *Investigations in Mathematics Learning*, *6*(2), 1-18.

Oktaç, A. ve Çetin, İ. (2016). *APOS teorisi ve matematiksel kavramların öğrenimi*. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (s. 163- 182). Ankara: Pegem Akademi.

Olive, J. ve Çağlayan, G. (2007). 8th grade students' understanding of slope and its antecedents in a learning situation based on quantitative reasoning. D. K. Pugalee, A. Rogerson ve A. Schinck (Ed.), *Proceedings of the ninth international conference of the mathematics education into the 21st century project: Mathematics education in a global community* içinde (s. 491-496). Charlotte, NC: University of North Carolina at Charlotte.

Sandoval, C. (2013). Transcript of History of Mathematics: Slope of a Line. 10 Mayıs 2017 tarihinde https://prezi.com/8q5czopcujx9/history-of-mathematics-slope-of-a-line/ adresinden erişildi.

Simon, M. A. ve Blume, G. W. (1994). Mathematical modeling as a component of understanding ratio-as-measure: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *13*(2), 183-197.

Stanton, M. ve Moore-Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope: A review of state standards. *School Science and Mathematics*, *112*(5), 270-277.

Strauss, A. ve Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and technique* (2. bs.). NewburyPark, London: Sage.

Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, *11*(2), 124-144.

Stump, S. (2001). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*, 207-227.

Şahin, Z., Yenmez, A. A. ve Erbaş, A. K. (2015). Relational understanding of the derivative concept through mathematical modeling: A case study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(1), 177-188.

Tabaghi, S. G., Mamolo, A. ve Sinclair, N. (2009). The Effect Of DGS on students' conception of slope. *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American cahpter of the international group for the psychology of mathematics education* içinde (Cilt 5, s. 226-234). Atlanta, GA: Georgia State University. http://www.pmena.org/2009/proceedings/ALGEBRAIC%20THINKING/algebraBRR369496.pdf adresinden erişildi.

Tall, D. O. (1999). Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking. O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd conference of the international group for the psychology of mathematics education* içinde (Cilt 1, s. 111-118). Haifa, Israel.

Teuscher, D. ve Reys, R. E. (2010). Slope, rate of change, and steepness: Do students understand these concepts?. *Mathematics Teacher*, *103*(7), 519-524.

Ubuz, B. (2001). First year engineering students' learning of point of tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *20*(1), 113-137.

Weller, K., Clark, J., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M. A. ve Merkovsky, R. (2000). *An examination of student performance data in recent RUMEC studies*. Washington, DC: Mathematical Association of America. 10 Mayıs 2017 tarihinde http://www.math.kent.edu/~edd/Performance.pdf adresinden erişildi.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (5. bs.). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zandieh, M. J. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *8*, 103-127.

Ek 1. Klinik Görüşme Soruları

1. Klinik Görüşme Soruları

RESİM 1

Şekilde gördüğün motosiklet elektriklidir ve belli bir şarj kapasitesi vardır. Aynı kişi aynı motosiklet ile resimde gördüğün yollarda gitmeyi planlamaktadır. Her bir yola çıkmadan önce motosikleti şarj edecektir. Sence hangi yolda motosikletin şarjı çabuk biter?

Neden?

O ne demek? Açıklar mısın? (Eğer diktir, yokuştur gibi ifadeler kullanırsa)

Bu iki yolda aynı düzeyde zorlanmıyorsa bu ikisi arasındaki fark ne?

Onu nereden anlıyorsun? (Örneğin, daha diktir derse…)

Peki motosikletin şarjı sadece çıktığı yüksekliğe (ya da yatay uzunluğa) mi bağlı?

Motosiklet aynı yüksekliğe farklı yollardan çıkabilir mi?

Yüksekliği fazla olan yolun dikliği her zaman fazla mı olur? Çizerek de açıklayabilir misin?

Yatay uzunluk ile eğim arasında nasıl bir ilişki var? Çizerek, ya da örnekler üzerinden anlatabilir misin?

Eğim nelere bağlı olarak değişiyor? Nasıl?

2. Klinik Görüşme Soruları

Resimde görülen bayıra, köye ulaşımı sağlamak için yol yapılacaktır. Her yolun girişinde yolun eğimini gösteren, 

şeklinde bir tabela bulunmaktadır. Bu yolun girişine konulacak tabelayı siz hazırlasanız, nelere ihtiyaç duyardınız?

Yolun dikliğini hesaplayabilmen için nelere ihtiyaç duyarsın?

İstediğin uzunlukları bana kâğıt üzerinde de kalemle gösterebilir misin?

Bu istediğin uzunlukları nasıl kullanacaksın şimdi?

O zaman ne yazılacak tabelaya? (Yüksekliği eğimi verir derse eğer…)

Pekala, herhangi bir yolun, merdivenin, çatının, rampanın eğimin nasıl hesaplarsın o halde?

Bu yol bu gösterdiğimiz yerde değil de biraz daha yukarıda başlasa ve tabela buraya konsa, tabelada yazan değer değişir mi? Neden?

Yolun uzunluğu değişirken değişmeyen bir şey var mı?

Diklik sabit kalır diyorsun (eğer diyebilirse!). Sence dikliğin sabit kalmasını sağlayan ne?

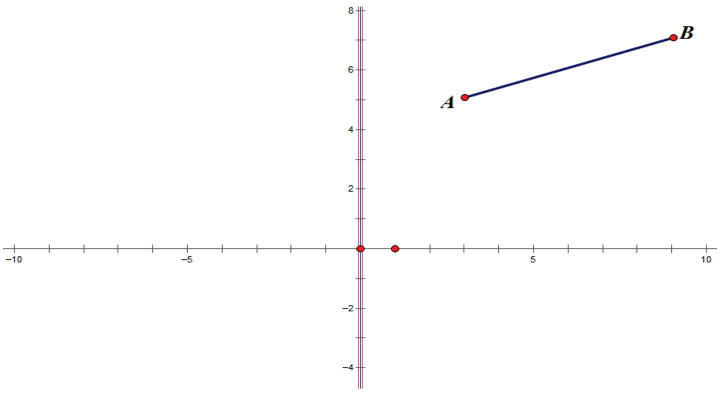
Dikliğin sabit kalması hangi uzunluklar sayesinde oluyor?

Peki bu ikisinin arasındaki hangi ilişki eğimin sabit kalmasını sağlıyor?

Şekilde eğimi 3/10 olan bir dağ görülmektedir. Bu dağın yanında ona paralel olarak devam eden yolun belirtilen yere kadar olan uzunluğu 1000 m olduğuna göre dağın yüksekliğini bulabilir misin ? Nasıl?

Sadece şu kısmının (kalemle doğrusal görünen dağ eteği üzerinde ya da onun oluşturduğu dik üçgen modelinin hipotenüsü üzerinde bir parça gösterilerek) eğimini hesaplayabilir misin peki?

3. Klinik Görüşme Soruları



Görmüş olduğun AB doğrusunun eğimini hesaplayabilir misin?

Olası cevaplar:

- Yüksekliği yatay mesafeye bölerek. (**O halde yükseklik ve yatay mesafeyi nasıl bulursun?**).
- Y_2-y_1/x_2-x_1 formülünü kullanarak buluyorum.(**Bu formülün nereden geldiğini biliyor musun? Biraz açıklar mısın bu formülü**).

Yüksekliği yatay mesafeye bölerek buluyorsa,

Yükseklik ve yatay mesafe dediğin yerleri çizerek gösterebilir misin?

Yüksekliğin uzunluğunu nasıl bulabilirsin?

Yatay mesafenin uzunluğunu nasıl bulabilirsin?

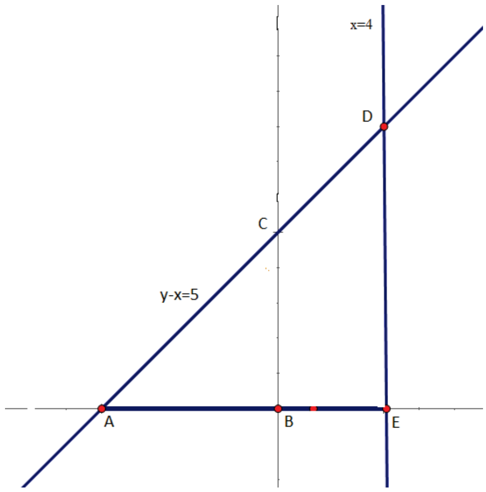
Bu doğrunun koordinat düzleminde olması sana nasıl bir kolaylık sağlar?

Peki sana sadece iki nokta versem, tabi ki bu noktanın koordinatlarını vereceğim, o iki noktadan geçen doğrunun eğimini bulabilir misin? (3, 5) ve (7,9) noktaları verilir.

Olası cevaplar:

- İki noktayı koordinat düzleminde bulurum. İkisini birleştirerek doğruyu gösteririm ve "yükseklik/ yatay mesafe" yardımıyla eğimi hesaplarım.
  Peki bu iki noktayı kullanarak doğruyu çizmeden eğimi bulabilir misin?
  Sadece iki noktadan yararlanarak eğimi hesaplayacağın kısa bir yol biliyor musun?
  Mesela (685,350) ile (385,850) noktalarından geçen doğrunun eğimini bulabilir misin?
  Senin yaptığın yolla biraz zor olacak sanki… Daha pratik bir yol biliyor musun?

- y_2-y_1/x_2-x_1 formülünü kullanarak eğimi bulabilirim.
  Bu formülü nereden buldun?
  Bu formülü kullanmadan eğimi hesaplayabilir miydin peki?



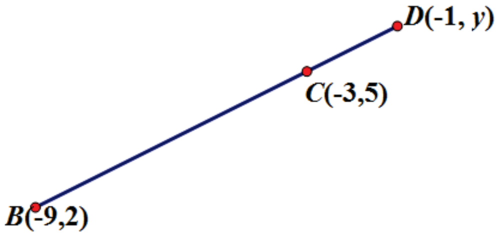
Koordinat düzleminde verilenlere göre ADE üçgeninin alanının, ABC üçgeninin alanının kaç katı olduğunu hesaplayınız.

Eğim niye kullandın bu soruda?

Eğim ile ilişkisi var mı bu sorunun?

Eğim sana yardımcı oldu mu bu soruda?

Nereden biliyorsun bu noktalarda eğimin değişmeyeceğini? Açıklar mısın?



Neden eğim hesaplıyorsun?

Eğim ile ne ilişkisi var bu problemin?

Neden bu iki noktayı aldın eğim hesaplarken? Diğerlerini neden almadın?

Neden eğim aynı çıkıyor aldığın herhangi iki nokta için? Nereden biliyorsun aynı çıkacağını?

Sana bir doğrunun denklemin versem bana onun eğimini hesaplayabilir misin? 5x+4y-40=0.

Farklı yoldan hesaplayabilir misin?

Neden bu yolu kullanıyorsun?