İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Örüntüleri Genellemede Kullandıkları Stratejiler

Dilek TANIŞLI, Aynur ÖZDAŞ**

Öz

Bu araştırmanın amacı, ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellemede kullandıkları stratejilerinin belirlenmesidir. Araştırmanın uygulaması yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip toplam 12 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Araştırma verilerinin toplanmasında veri toplama araçları olarak "klinik görüşme tekniği" ve "öğrenci günlükleri"; verilerin çözümlenmesinde ise "verinin işlenmesi", "verinin görsel hâle getirilmesi", "sonuç çıkarma ve teyit etme" şeklinde üç bölümden oluşan bir sınıflama kullanılmıştır. Araştırma sonucunda, sabit ve artarak değişen şekil örüntülerin genellenmesinde görsel ve cebirsel yaklaşımın benimsendiği, görsel yaklaşımın ve örüntülerin yapısal özelliklerinin de genelleme yapabilmeyi kolaylaştırdığı belirlenmiştir. Öğrencilerin örüntülerin genellenmesinde kullandıkları stratejileri, genellikle yakın ya da uzak genelleme yaparken de dikkate aldıkları saptanmıştır. Yakın genellemelerde bir önceki terimin kullanılmasını gerektiren yinelemeli, uzak genellemelerde ise fonksiyonel bir ilişkinin kullanılmasını gerektiren belirgin stratejilerin kullanıldığı görülmüştür.

Anahtar Kelimeler

İlköğretim, Matematik Eğitimi, Örüntü, Genelleme.

* Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü Öğretim Üyesi.

Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri / Educational Sciences: Theory & Practice
9 (3) • Yaz / Summer 2009 • 1453-1497

Yrd. Doç. Dr. Dilek TANIŞLI
Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü,
Matematik Öğretmenliği, Yunus Emre Kampüsü, Eskişehir
Elektronik Posta: dtanisli@anadolu.edu.tr

Yayın ve Diğer Çalışmalarından Seçmeler

Kabael, T. ve **Tanışlı, D.** (baskıda). Cebirsel düşünme sürecinde örüntüden fonksiyona öğretim [Elektronik dergi]. *İlköğretim-Online*,

Kılıç, Ç., Köse Yavuzsoy, N., **Tanışlı, D.** ve Özdaş, A. (2007). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin süsleme etkinliklerindeki Van Hiele geometrik düşünce düzeylerinin belirlenmesi [Elektronik dergi]. *İlköğretim-Online*, *6*(1), 11-23.

Tanışlı, D. ve Sağlam, M. (2006). Matematik öğretiminde işbirlikli öğrenmede bilgi değişme tekniğinin etkililiği. *Eğitimde Kuram ve Uygulama*, *2*(2), 2-21.

Prof. Dr. Aynur ÖZDAŞ
Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü
Matematik Öğretmenliği, Yunus Emre Kampüsü, Eskişehir
Elektronik Posta: aozdas@anadolu.edu.tr

Yayın ve Diğer Çalışmalarından Seçmeler

Kılıç, Ç. ve **Özdaş, A.** (baskıda). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin kesirlerde karşılaştırma ve sıralama yapmayı gerektiren problemlerin çözümlerinde kullandıkları temsiler. *Kastamonu Eğitim Fakültesi Dergisi*,

Köse, N. Y. ve **Özdaş, A.** (2009). İlköğretim 5. sınıf öğrencileri geometrik şekillerdeki simetri doğrularını Cabri geometri yazılımı yardımıyla nasıl belirliyorlar? [Elektronik dergi]. *İlköğretim-Online*, *8*(1), 159-175.

Uygur, T., & **Özdaş, A.** (2007). The effect of arrow diagram on achievement in applying the chain rule. *PRIMUS*, *17*(2), 131-147.

Kılıç, Ç., Köse Yavuzsoy, N., Tanışlı, D. ve **Özdaş, A.** (2007). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin süsleme etkinliklerindeki Van Hiele geometrik düşünce düzeylerinin belirlenmesi [Elektronik dergi]. *İlköğretim-Online, 6*(1), 11-23.

İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Örüntüleri Genellemede Kullandıkları Stratejiler*

Dilek TANIŞLI, Aynur ÖZDAŞ

Sayı, şekil gibi matematiksel nesnelerin düzenli sıralanması olan örüntü, pek çok matematik eğitimcisi tarafından çeşitli biçimlerde tanımlanmıştır. Souviney (1994)'e göre örüntü; geometrik şekillerin, seslerin, sembollerin ya da eylemlerin sistematik bir birleşimidir. Guerrero ve Rivera (2002)'ya göre yapılandırılan bir dizi matematiksel nesnelerin (sayılar, şekiller vb.) ögeleri arasındaki bir kuraldır. Olkun ve Toluk-Uçar (2006)'a göre düzenli dizilmiş, tekrar eden nesne ya da şekillerin oluşturduğu bir manzumedir. Papic ve Mulligan (2005) ise örüntüyü, sayısal ya da uzaysal düzenlilik olarak tanımlamıştır. Matematik dışında çeşitli disiplinlerde de yer alan örüntü aslında yaşamın her boyutunda bulunmaktadır. Yaşamımızla bütünleşmiş olan bu olguyu her yerde örneğin; duvar kâğıdında, karolarda, trafikte ve hatta televizyon programlarında bile görebiliriz.

Örüntüler, yapılarına ve sunuluş biçimlerine göre çeşitlilik gösterirler. Genelde örüntülerin tekrarlanan ve değişen olmak üzere iki grupta toplandığı görülmektedir. Tekrarlanan örüntüler, terimler arası ilişkinin sabit bir dizilimin ötelenmesi şeklinde oluşturulmuş örüntülerdir (örneğin; ABABAB…). Diğer bir değişle tekrar birimi olarak ifade edilen, belirli birtakım ögelerin döngüsel olarak devam ettiği örüntüler-

---

* Doktora tez çalışmasının bir parçası olan bu çalışma, Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonunca kabul edilen 060531 nolu proje kapsamında desteklenmiştir.

dir (Threlfall, 1999). Değişen örüntüler ise terimler arası ilişkinin genişleyen ya da daralan bir seyir izlemesi şeklinde oluşturulduğu örüntülerdir. Değişen örüntüler üç farklı biçimde gruplanabilir (Olkun ve Yeşildere, 2007):

a. *Sabit değişen örüntü (Linear pattern):* Takip eden her bir terimin, bir öncekine sabit bir sayı ilave edilerek ya da çıkarılarak elde edildiği örüntüdür (örneğin; 2, 5, 8, 11, 14, …).

b. *Artarak değişen örüntü (Quadratic pattern):* Takip eden terimler arası farkların arttığı ya da azaldığı örüntüdür (örneğin; 3, 6, 10, 15, 21, …).

c. *Diğer örüntüler:* Sabit ya da artarak değişen olmayan, ancak terimleri bir düzen içerisinde değişen örüntülerdir (örneğin; 1, 1, 2, 3, 5, 8, …).

Örüntüler sayı, şekil, tablo, grafik gibi farklı biçimlerde temsil edilebilirler.

Örüntüler, matematiksel bilgilerin ve kavramların anlaşılmasında anahtar bir kavramdır. Burns (2000)'e göre örüntü çalışmaları matematiksel ilişkileri görmede, matematiğin düzenini ve mantığını anlamada temeldir.

Çocuklarda sayı hissi ve matematiksel keşif örüntülerle gelişir. Örüntüler çocukların önce sıralama, dizme ve hesaplama gelişimlerine yardımcı olurlar, daha sonra temel işlemler için düşünme stratejilerinin gelişimini sağlarlar (Reys, Suydam, Lindquist ve Smith, 1998). Aynı zamanda çocuklarda akıl yürütme, iletişim, ilişkilendirme ve problem çözme becerilerinin gelişiminde de önemli rol oynarlar. Örüntüler özellikle küçük çocukların matematiksel düşünme becerilerinin gelişimlerinin temel bir ögesi ve matematiksel sorgulamanın merkez bir binasıdır (Waters, 2004). Küçük çocukların matematikle ilgili bilgileri ve becerileri; sayma, karşılaştırma, sınıflama, ölçme, temsil, tahmin ve sembolize etme gibi süreçlerle anlamlaşır ve gelişir. Örüntüler ise bu matematiksel yeterlilikleri inşa etmede bir temel oluşturur (Fox, 2005).

Okul öncesi eğitimden itibaren gerçekleştirilen örüntü etkinlikleri, cebirin temelini oluşturmada önemli bir role sahiptir. Diğer bir deyişle örüntüler ve örüntüler arasındaki ilişkilerle ilgili çalışmalar, cebir için bir ön koşuldur ve gelişimi için bir temeldir. Başlangıç yıllarında örüntü çalışmalarıyla cebire giriş, daha sonraki formal cebire girişteki zorluğu hafifletir (Herbert ve Brown, 1997; Orton ve Orton, 1994, 1999; Resnick, Cauzinille-Marmeche ve Mathieu, 1987'den aktaran Threlfall, 1999; Zazkis ve Liljedahl, 2002). Bu durum ise öğrencilerin daha sonraki öğrenim basamaklarında daha etkin olmalarını sağlar. Bu nedenle öğrencilerinde cebirsel kavramların ve düşüncelerin gelişimi için, okulöncesi eğitimden itibaren örüntülerle ilgili deneyimler yaşaması gereklidir. Bu deneyimler boyunca öğrenciler tahminde bulunmayı, bağıntı kurmayı, ilişkileri görmeyi, genellemeyi ve sembolize etmeyi öğrenebilirler.

Bu kazanımlardan genelleme yapabilme, bireyin matematik yaşantısında oldukça önemlidir. Dörfler (1991) tarafından "düşünmenin bir aracı ve iletişimi" olarak ifade edilen genelleme, aslında matematiksel etkinliklerin merkezi ve matematiksel bilginin gelişiminin temelidir (aktaran Zazkis ve Liljedahl, 2002). NCTM (National Council of Teacher of Mathematics) (2000) standartları genellemeyi matematik öğretiminin temel amaçlarından biri olarak ifade etmektedir. Örüntüler ise genellemenin biçimlenmesinde temel bir adımdır. Örüntüler genellemenin, genelleme ise cebirin yapı taşlarından birisi olarak görülebilir. Jones (1993'ten aktaran Hargreaves, Shorrocks-Taylor ve Threlfall, 1998) genellemenin cebirin kalbi/özü olduğunu ve örüntü aramanın genellemenin ilk adımı olduğunu ifade etmektedir. Kaput (1999) ise cebiri, "genelleme ve örüntülerin düzeni" olarak tanımlar. Örüntüleri genelleme, çocukların cebirsel düşünme ve özellikle değişken ve fonksiyon kavramlarının gelişiminde önemli bir ögedir (Lesley ve Freiman, 2004). Kieran (1989'dan aktaran Radford, 2006)'a göre örüntüleri genelleme; cebirsel düşünme ve matematiksel genellemeler arasında iletişim kurarak cebirin rotasını belirler.

Örüntü etkinlikleri ile öğrencilerden örüntüdeki terimlerin oluşumunda geçerli olan bir kuralı genellemeyi bulmaları ya da verilen kuralı örüntülerin özel durumlarını belirlemede kullanmaları istenebilir. Böylesi uygulamalar öğrencilerin çeşitli genellemeleri yapılandırmalarına yol açar. Hargreaves ve arkadaşları (1998), verilen bir dizi terimlerle ilgili genellemenin iki anlama geldiğini belirtirler. Biri, bir örüntünün genellenmesi, diğeri ise bir dizinin genellenmesidir. Örüntünün genellenmesi daha çok verilen sayı kümesi ile sınırlıdır, dizinin genellenmesi ise sayı kümesinden daha öteye geçilmesidir. Örneğin, 1, 3, 5, 7, 9 sayı örüntüsünde çocuğun, sayıların tek sayı olduğunu ve ikişer artarak devam ettiğini ifade etmesi genelleme olarak adlandırılır. Ancak genellemenin birçok farklı yolu vardır. Burada, örüntüdeki sayıların tek sayı olduklarını bilmek, sayı gruplarının bir özelliği ile ilgili bir genellemedir. Dolayısıyla sadece bu özellik dikkate alınarak örüntüyü devam ettirirken, sayıların ikişer artma ilişkisine ve sayıların sırasına önem verilmeyebilir. Örneğin, 1, 3, 5, 7, 9, 21, 37, 15 gibi. 1, 3, 5, 7, 9 örüntüsüyle ilgili genellemede, daha fazla matematiksel deneyim kazanmak için n. terimi f(n)=2n-1 gibi cebirsel olarak sembolize etmek gereklidir. Bu durum ise daha sonra örüntüdeki herhangi bir terimin değerini bulmayı sağlar (Hargreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1999).

Literatürde farklı sınıf düzeylerinde öğrencilerin sayı, şekil, tablo temsili ile verilmiş örüntüleri genelleme sürecinde kullandıkları yaklaşımları ve stratejileri belirlemeye yönelik pek çok çalışmaya rastlanmaktadır. Bu çalışmaların ilki diyebileceğimiz lineer örüntüler üzerine gerçekleştirilen çalışmada Stacey (1989), örüntünün devamında gelen en yakın terimi, yani sayma, çizme ile ulaşılabilen terimleri bulmayı gerektiren "yakın genelleme" ve bir örüntüde genel bir kuralın bulunmasını gerektiren "uzak genelleme" arasındaki farkı ayırt etmiş ve üç temel genelleme stratejisi tanımlamıştır. Birinci, örüntünün bir önceki teriminden bir sonraki teriminin elde edildiği "yinelemeli" (recursive) strateji, ikincisi "fonksiyonel ilişki arama", üçüncüsü ise f(x)=ax+b (b≠0) ilişkisinin olduğu durumda f(x)=ax oranının kullanıldığı, yani orantısal akıl yürütmenin uygulandığı "bütüne genişletme" (whole-object) stratejisidir. Stacey'nin tanımladığı bu genelleme stratejileri pek çok araştırma için de temel oluşturmuştur.

Yapılan araştırmalara bakıldığında, örüntülerin şekil temsili ile verilmesi durumunda bu örüntülerin genellenmesinde öncelikle iki yaklaşımın kullanıldığı görülmektedir. Bunlar verilen örüntünün her adımında yer alan şekillerin yapısından yararlanarak sayısallaştırma yoluyla, şekil örüntüsünün sayı örüntüsüne dönüştürüldüğü "sayısal yaklaşım" ve şeklin yapısal özelliğinin dikkate alındığı ya da Presmeg (1986'dan aktaran Garcia-Cruz ve Martinon, 1997)'ın ifade ettiği gibi görsel imgeler içeren bir çözüm yönteminin kullanıldığı "görsel yaklaşım" dır (Becker ve Rivera, 2005, 2006; Garcia-Cruz ve Martinon, 1997; Krebs, 2005; Lan Ma, 2007; Orton, Orton ve Roper 1999; Stacey, 1989). Bazı araştırmalarda ise bu yaklaşımların analytic (görsel olmayan), geometrik (görsel) ve harmonic (görsel olmayan ve görsel) olmak üzere üç başlık altında toplandığı da görülmektedir (Moses, 1982; Noss, Healy ve Hoyles, 1997; Stacey, 1989'den aktaran Barbosa, Palhares ve Vale, 2007).

Örüntüler ister şekil temsili isterse de sayı temsili ile verilmiş olsun kullanılan genelleme stratejilerinin genel olarak, örüntünün ardışık terimleri arasındaki ilişkinin araştırıldığı "yinelemeli" (recursive) ve iki küme arasındaki ilişkinin yani fonksiyonel bir ilişkinin araştırıldığı "belirgin" (explicit) stratejiler olmak üzere iki başlık altında toplandığı söylenebilir (Amit ve Neria, 2007, 2008; Carraher, Martinez ve Schliemann, 2008; Lannin, 2005; Ley, 2005; Looney, 2004; Sasman, Linchevski ve Olivier, 1999; Warren, Cooper ve Lamb, 2006). Bazı araştırmalarda ise örüntülerin genellenmesinde kullanılan stratejilerin farklı ifade biçimlerine de rastlanmaktadır. Örneğin, Garcia-Cruz ve Martinon (1998) lineer örüntülere ilişkin öğrencilerin performanslarına dayalı olarak gerçekleştirdikleri çalışmalarında yinelemeli stratejiye dayanan "kısmi (local) genelleme" ve fonksiyonel bir ilişkiyi araştırmaya dayanan "bütüncül (global) genelleme" olmak üzere hiyerarşik genelleme seviyelerini tanımlamışlardır. Lannin (2005) ise örüntülerin genellenmesinde kullanılan genelleme stratejilerini "belirgin olmayan" (non-explicit) ve "belirgin" (explicit) olmak üzere iki başlık altında toplamıştır. Belirgin olmayan stratejiler başlığı altında sayma ve yinelemeli stratejiyi, belirgin stratejiler başlığı altında ise bütüne genişletme (whole-object), tahmin ve kontrol (guess-and-check) ve bağlamsal (contextual) şeklinde stratejileri ele almıştır.

Amit ve Neria (2007) gerçekleştirdikleri bir çalışmada ise öğrencilerin lineer örüntülere ilişkin bilişsel seviyelerini belirlemede dört temel strateji tanımlamışlardır. Birincisi lineer örüntülerde terimler arası sabit farklılığa odaklanıldığı "işlemsel etkinlik", ikincisi şekilden sabit bir niceliğin belirlendiği ve kuralın tahmin edildiği "işlemsel anlama", üçüncüsü "fonksiyonel bir ilişkiyi araştırma", dördüncü ise "fonksiyonel bir ilişki bulma ve aynı zamanda bu ilişkiyi formal cebirsel bir yolla ifade etmedir". Hargreaves ve arkadaşları (1998) ise lineer, quadratik ve fibonacci sayı örüntülerinin genellenmesinde öğrencilerin bilişsel süreçlerini belirleyerek örüntüde ardışık terimler arasındaki farkların arandığı "farklılığı arama (looking for differences)", terimler arasındaki farkların eşit olmaması durumunda, terimler arası farklar ile oluşan yeni örüntüde farklılığı arama stratejisinin uygulandığı "farklılık arasında farklılık arama (looking for differences between differences)", örüntüdeki sayılar için bir nitelik ya da özelliğin arandığı, örneğin örüntüdeki sayıların tek ya da çift sayı olması gibi "sayıların doğasına bakma (looking at the nature of the numbers)", örüntünün terimleri arasındaki farkın sabit olmaması durumunda, bulunan farkların doğasından yararlanarak çıkarsamada bulunulduğu "farklılığın doğasına bakma (looking at the nature of the differences)", bir sayının sıralı tam katlarını, verilen örüntünün terimleri ile ilişkilendirildiği "çarpım tablosu arama (looking for multiplication tables)" ve örüntüdeki bir terimi bulmak için, o terimden önce gelen terimlerinin toplandığı "terimleri birleştirme (combining terms to make other terms)" şeklinde stratejiler tanımlamışlardır.

Yukarıda sunulan ve özetlenen araştırmaların dışında, uluslararası literatürde örüntülerin genellenmesine ilişkin pek çok araştırmaya rastlanmış, Türkiye'de ise özellikle de ilköğretim basamağında, örüntülerin genellenmesine üzerine gerçekleştirilen bir araştırmaya rastlanamamıştır. Daha önceki İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'nda örüntülere yer verilmemesi, bu konuda araştırma yapılmamasının bir nedeni olabilir. Oysa örüntü kavramında öğrencilerin örüntüleri nasıl yapılandırdıkları, bu yapılandırmada bilişsel süreçlerini nasıl çalıştırdıkları ve nasıl bir zihinsel fonksiyona sahip olduklarının bilinmesi, onların cebirsel düşünme ve fonksiyon kavramının gelişimini sağlama açısından önemlidir.

Bireyin cebirsel düşünme gelişimine getireceği katkı nedeni ile örüntü kavramının okul öncesi eğitim düzeyine kadar inilmesi gerekliliği literatürde yer almaktadır. Bütün bunlar dikkate alınarak bu çalışmayla ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellemelerinin ve buna ilişkin düşünme süreçlerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu çalışmanın sonuçlarının, literatürde yer alan çalışmalardaki sonuçlarla paralelliğinin ya da farklılıklarının, yanı sıra öğrencilerin cebirsel düşünme ve fonksiyon kavramının gelişimi süreçlerinde en çok zorlandıkları ve yanıldıkları noktaların belirlenmesi ve bu sorunların giderilmesi için önlemler alınması gibi konularda Türkiye'de, alana katkı sağlayacağı umulmaktadır. Aynı zamanda İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'nda örüntüler konusunun geliştirilmesi ve ders kitaplarında yeni örüntü etkinliklerinin tasarlanması açısından da bu araştırmanın sonuçlarının önemli bir katkı sağlayacağı söylenebilir.

Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın genel amacı, ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellerken kullandıkları stratejileri belirlemektir. Belirtilen bu genel amaç kapsamında, öğrencilerin başarı düzeyleri dikkate alınarak aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

1. İlköğretim beşinci sınıf öğrencileri, sabit ve artarak değişen şekil örüntülerinin kuralını nasıl bulmaktadırlar?
2. İlköğretim beşinci sınıf öğrencileri, sabit ve artarak değişen şekil örüntülerini yakın ve sonlu bir adıma nasıl devam ettirmektedirler?

Yöntem

İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellerken kullandıkları genelleme stratejilerinin belirlenmesinin amaçlandığı bu araştırmada, öğrencilerin örüntülere ilişkin düşünme ve akıl yürütme süreçleri ile ilgilenildiğinden verilerin toplanması, çözümlenmesi ve yorumlanmasında nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir.

Katılımcılar

Araştırmada katılımcılarının belirlenmesinde amaçlı örnekleme yöntemlerden biri olan ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Ölçüt örnekleme, önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan bütün durumların çalışılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s. 112). Bu bağlamda ölçütlerden biri, sınıf düzeyinin ilköğretim beşinci sınıf olmasıdır. Zengin veri elde edebilecek ve birçok örüntü çeşidi ile tanışmış öğrenci düzeyinin uygun olacağı düşünülerek, sınıf düzeyi ilköğretim beşinci sınıf olarak benimsenmiştir. Diğer ölçüt ise çeşitlilik gösteren durumlar arasında ortak ya da farklı olguların olup olmadığının görülebilmesi için, öğrencilerin üç farklı (yüksek, orta, düşük) başarı düzeyine sahip olmalarıdır. Öğrenci başarı düzeylerini belirlemede etken olan faktörler ise aşağıdadır:

1. Örüntü testinden alınan puan
2. 2006-2007 Güz dönemi matematik dersi karne notu
3. Sınıf öğretmenlerinin öğrencilerle ilgili görüşleri

Katılımcıların başarı düzeylerini belirlemede kullanılmak üzere geliştirilen Örüntü Testi'nin geçerliliği, kapsam geçerliliği araştırılarak belirlenmiştir. Bu amaçla test, matematik eğitimi alanında uzman üç öğretim üyesi ile ilköğretim okullarında görev yapan sınıf öğretmenlerinden oluşan grubun görüşlerine başvurularak hazırlanmıştır. Testin güvenirliliğini ölçmek için, öncelikle testteki soruların yanıt anahtarı hazırlanmış ve her bir yanıt puanlanmıştır. Daha sonra her soruya yönelik ölçütler belirlenerek verilen puan bu ölçütlere göre paylaştırılmıştır. Testin pilot uygulaması yapıldıktan sonra gelen yanıtlara göre ölçütler ve puanlar tekrar düzenlenmiştir. Daha sonra üç alan uzmanı hazırlanan ölçütleri ve puanları dikkate alınarak değerlendirme yapmıştır. Üç değerlendirme arasındaki ilişkinin araştırılmasında ise alfa güvenirlik kat sayısına (α=0.9787) ve bağımsız gözlemciler arası uyuma (α=0.9395) bakılmıştır.

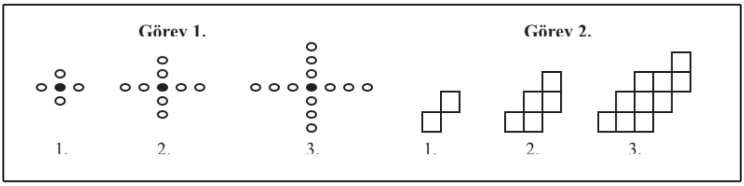
Geçerlilik ve güvenirliliği yapılmış olan Örüntü Testi, uygulamanın yapılacağı okulda beşinci sınıf öğrencilerine uygulanmıştır. Daha sonra alınan puanlar üç bölüme ayrılmış ve bu puan aralıklarında yer alan öğrenciler belirlenmiştir. Bu bölümlerde yer alan öğrenciler arasından seçim yapmak için de sınıf öğretmenlerinin görüşüne başvurulmuştur. Elde edilen görüşler doğrultusunda, özellikle ifade becerisi iyi öğrencilerin seçilmesine de dikkat edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin matematik dersi karne notları ile Örüntü Testi'nden aldıkları puanların örtüştüğü de görülmüştür. Böylece başarı düzeyi, dört yüksek, dört orta ve dört düşük toplam 12 öğrenci seçilmiştir. Araştırmada gizlilik esası dikkate alındığından katılımcıların isimleri yerine kısaltma kullanılmıştır. Bu bağlamda, başarı düzeyi yüksek olan öğrenciler Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, başarı düzeyi orta olan öğrenciler O_1, O_2, O_3, O_4 ve başarı düzeyi düşük olan öğrenciler ise D_1, D_2, D_3, D_4 şeklinde gösterilmiştir. Ayrıca bu öğrencilerin örüntüleri genellerken kullandıkları stratejilerin hangi örüntü çeşidine (artarak ve sabit değişen) ilişkin olduğunu göstermek amacıyla "a" (artarak değişen örüntü) ve "s" (sabit değişen örüntü) harfleri üst indeks olarak kullanılmıştır. Örneğin "${}^{a}Y_1$" gösterimi, artarak değişen şekil örüntüsü ile çalışan yüksek başarı düzeyine sahip öğrenci anlamına gelmektedir. Ancak öğrenciler aynı stratejiyi her iki örüntü çeşitinde de kullanmışsa bu durumda üst indeks yazılmamıştır.

Verilerin Toplanması

Bu araştırmanın verilerinin toplanmasında, görüşme tekniğinin bir çeşidi olan ve matematik eğitiminde sıklıkla kullanılan klinik görüşme tekniği kullanılmıştır. Klinik görüşme, bilgi yapısının biçimini ve akıl yürütme sürecini araştırmak için Piaget'nin öncülük ettiği bir tekniktir (Clement, 2000). Bu teknik öğrencilerin düşüncelerini derinlemesine incelemek amacıyla öğrenciyle karşılıklı yapılan görüşmeleri içerir. Klinik görüşme, öğrencilerin düşünce doğası ile ilgili önemli ipuçları verir ve aynı zamanda, öğrencilerin kendi dünyalarını nasıl oluşturduklarını, nasıl düşündüklerini, bilişsel süreçlerini nasıl işlediklerini ve zihinlerini nasıl çalıştırdıklarını anlamaya da yardımcı olur (Ginsburg, 1981). Klinik görüşmenin yanı sıra, öğrenci günlükleri aracılığıyla da veri toplanmıştır. Günlükler klinik görüşmelerin analizi sırasında destek veri olarak kullanılmıştır.

İşlem

Araştırmanın genel amacı ve alt amaçları belirlendikten sonra bunlar dikkate alınarak örüntü sorularını içeren klinik görüşme görevleri (örüntü soruları) hazırlanmıştır. Aslında görevlerde tekrarlanan, sabit ve artarak değişen olmak üzere sayı, şekil ve tablo temsil biçimi kullanılarak sunulan üç çeşit örüntü yer almıştır. Ancak bu örüntüler üzerine hazırlanmış görevlerle bütüncül olarak gerçekleştirilen kapsamlı bir araştırmanın sadece sabit ve artarak değişen şekil örüntülerini içine alan kesiti, bu çalışma için bütünleştirilmiştir (Şekil 1). Öğrencilerin klinik görüşme görevlerinin (örüntü sorularının) çözümü sırasında düşünme süreçlerini ortaya çıkaracak biçimde klinik görüşme soruları hazırlanmıştır. Klinik görüşme sorularında "*Ben senin düşünce tarzını öğrenmeye çalışıyorum. O yüzden bu soruyu çözerken yüksek sesle düşüncelerini benimle paylaşır mısın?*", "*Ne yaptığını yüksek sesle söyler misin?*", "*Bunu nasıl düşündüğünü söyler misin?*", "*Nasıl çözdüğünü açıklayabilir misin?*", "*Nasıl biliyorsun? Nasıl karar verdin?*", "*Niçin?*", "*Bulduğun sonucun doğruluğunu nasıl kontrol edersin?*", "*Emin misin?*" şeklinde soru biçimleri kullanılmıştır.



Şekil 1. *Klinik Görüşmede Kullanılan Sabit ve Artarak Değişen Şekil Örüntüleri*

Ayrıca soruların tam olarak anlaşılamama olasılığına karşın ise *"Tekrar açıklar mısın?"* gibi alternatif ve sonda sorular da sorulmuştur. Yine yönlendirme yapmaksızın *"çok güzel"*, *"aferin"*, *"tamam"* gibi cesaretlendirici sözel ipuçları da kullanılmıştır (Clement, 2000, s. 572). Hazırlanan klinik görüşme görevleri ve soruları iki uzman görüşüne sunulmuş ve gelen görüşler doğrultusunda görevlere ve sorulara son şekli verilmiştir. Daha sonra klinik görüşme soruları araştırmada yer alan katılımcılara benzer bir gruba uygulanarak pilot çalışması yapılmıştır.

Araştırmanın uygulaması, Millî Eğitim Bakanlığından izin alınarak Eskişehir il merkezinde yer alan bir ilköğretim okulunda, 2006-2007 öğretim yılı Bahar döneminde gerçekleştirilmiştir. Bu okulun seçilmesinde, öğrencilerin yaklaşık aynı sosyoekonomik koşullara sahip olmaları ve okulda klinik görüşmelerin gerçekleştirilmesi için uygun ortamların yer alması etkili olmuştur. Görüşmeler, öğrencilerin kendilerini rahat hissettikleri, sessiz bir ortam olan okulun kütüphanesinde yapılmıştır. Görüşmeler video kameraya çekilmiş ve kamera; öğrencileri, öğrencilerin çalışma kâğıtlarını, araştırmacıyı görebilecek ve öğrencilerin dikkatini dağıtmayacak şekilde yerleştirilmiştir. Görüşmeci görüşmeler sırasında öğrenci ile etkileşim içinde olduğundan, video kamera çekimlerinde beklenilen deneyime sahip bir eleman kullanılmıştır.

Klinik görüşmelere başlanmadan önce, görüşme yapılacak öğrencilerin velilerinden ve öğrencilerin kendilerinden görüşme izni alınmıştır. Araştırmacı, görüşmeler için izin aldıktan sonra görüşmeye geçmeden, öğrencilerden ayrıca sözlü izin almıştır. Daha sonra öğrencilere doğru ya da yanlış bir yanıta ulaşmalarının değil, o yanıta nasıl ulaştıklarının daha önemli olduğu açıklanmıştır. Öğrenciler kendilerine sorulan soruları yanıtlarken sesli düşünmeleri söylenmiş ve çözümlerini açıklamaları istenmiştir. Öğrencilere çözümlerini gerçekleştirebilmeleri için yeterince süre tanınmış ve toplam görüşme süresi 35-50 dakikayı geçmeyecek şekilde ayarlanmıştır (Hunting, 1997). Ayrıca araştırmacı görüşmeler sırasında öğrencilerle ilgili küçük notlar almıştır. Her görüşme sonunda ise öğrencilerin günlüklerine o gün yapılan çalışma ile ilgili düşüncelerini yazmaları için de süre tanınmıştır.

Nitel araştırmalarda araştırmacının rolü nicel araştırmadakinden farklıdır. Nitel araştırmada araştırmacı, bizzat alanda zaman harcayan, araştırma kapsamındaki kişilerle doğrudan görüşen ve gerektiğinde bu kişilerin deneyimlerini yaşayan, alanda kazandığı bakış açısını ve deneyimlerini, toplanan verilerin analizinde kullanan kişidir (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s. 43). Bu araştırmada araştırmacı, araştırma sürecinde tüm adımların planlaması, yürütülmesi aşamalarında tarafsızlığını korumuş, görüşmeci olarak öğrencilerle görüşmüş, görüşmeler sırasında yönlendirme yapmaksızın öğrencilerin düşünme süreçlerini ortaya çıkaracak sorular yöneltmiştir.

Verilerin Analizi

Araştırmada toplanan veriler analiz edilmeden önce, klinik görüşmelerle elde edilen verilerin dökümü, sonrasında ise döküm sürecindeki güvenirlik çalışması yapılmıştır. Bunun için görüşme kayıtlarından yansız olarak seçilen kayıtlar, bir alan uzmanına dinlettirilerek dökümlerin doğruluğunun kontrolü sağlanmıştır (Kvale, 1996). Araştırma verilerinin analizinde "verinin işlenmesi" (data reduction), "verinin görsel hâle getirilmesi" (data display), "sonuç çıkarma ve teyit etme" (drawing conclusion and verification) şeklinde üç bölümden oluşan sınıflama kullanılmıştır (Miles ve Huberman, 1994, s. 10-12). Verinin işlenmesi aşamasında öncelikle üç alan uzmanı bağımsız çalışarak verileri kodlamıştır. Veri kodlanırken, araştırmacı tarafından daha önce literatür taraması yapılarak hazırlanmış olan kavramsal çatı dikkate alınmıştır. Verilerin analiz edilmesi aşamasında yapılacak güvenirlilik çalışmalarından biri de kodlama güvenirliğidir. Bu araştırmada kodlama güvenilirlik hesaplaması için, Miles ve Huberman (1994, s. 64)'ın önerdiği aşağıdaki uyuşum yüzdesi kullanılmıştır. Bunun için, araştırmacının ve iki alan uzmanının belirledikleri kodlar için "görüş birliği" ve "görüş ayrılığı" sayıları belirlenmiş ve yapılan hesaplama sonucunda uyuşum yüzdesi % 91 olarak bulunmuştur.

Güvenirlik = (Görüş Birliği) / [(Görüş Birliği) + (Görüş Ayrılığı)]

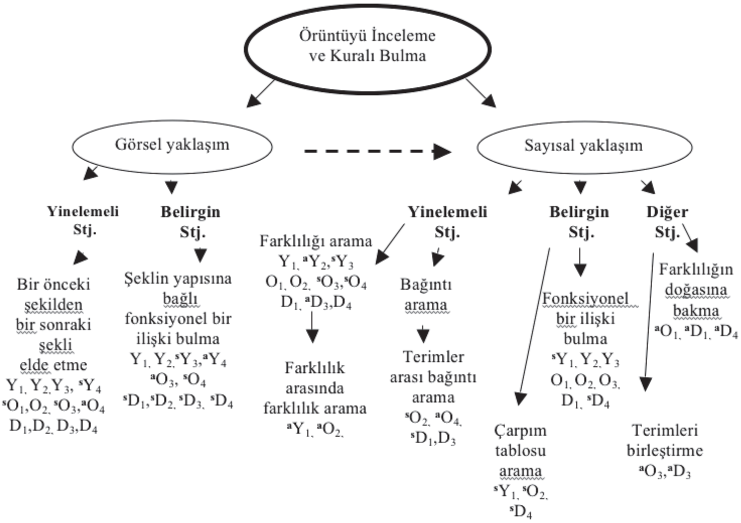
Araştırma verileri üzerinde araştırmacı ve iki alan uzmanı bağımsız çalışarak, temaları ve alt temaları oluşturmuşlardır. Temalar, araştırma verilerinden ortaya çıkartılan kavramlardır (Bogdan ve Biklen, 1998; Merriam, 1998). Temalar, katılımcının görüşme sırasında kullandığı ifadelerden meydana gelebileceği gibi araştırmacının, alandaki bilgi yeterliliğine dayanarak verilerde var olan bilgilere isimler vermesiyle de oluşturulabilir (Patton, 1990). Bu bağlamda araştırmada veriler bir araya getirilerek incelenmiş ve ortak yönleri bulunmaya çalışılmıştır. Ortak yönleri olan veriler birer alt başlık altında gruplanmıştır. Bu alt başlıklar ise araştırmanın alt temalarını oluşturmuştur. Bu alt temalar örüntüyü inceleme ve kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme şeklinde başlıklandırılmıştır. Daha sonra alt temalar bir araya getirilerek temalar oluşturulmuştur. Elde edilen tema ve alt temalar birbiriyle ilişkili ve anlamlı bir bütün oluşturacak şekilde düzenlenmiştir. Verinin görsel hâle getirilmesinde araştırmacı tema, alt temalar ve alt temalar altında yer alan kategoriler ve bunlar arası ilişkileri diyagram kullanarak görsel hâle getirmiştir. Sonuç çıkarma ve teyit etme aşamasında ise ortaya çıkan temalar ve temalar arası ilişkiler araştırma soruları altında yorumlanmış ve karşılaştırılmıştır. Bulgular öğrenci günlüğünden doğrudan alıntılar yapılarak desteklenmiştir.

Bulgular

İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin sabit ve artarak değişen şekil örüntülerini genellerken kullandıkları stratejilere ilişkin bulgular; örüntüyü inceleme ve kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme şeklinde iki alt başlıkta sunulmuştur.

Örüntüyü İnceleme ve Kuralı Bulma

Sabit ve artarak değişen şekil örüntülerinde, örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması altında öğrencilerin, başarı düzeyleri de dikkate alınarak kullandıkları stratejiler Şekil 2'de verilmiştir.



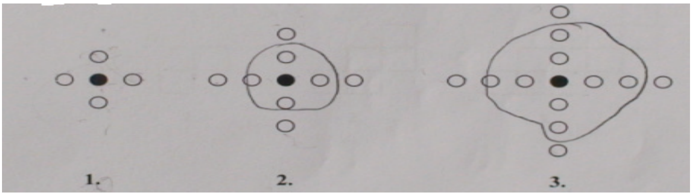
__Şekil 2.__ Sabit ve Artarak Değişen Şekil Örüntülerini İnceleme ve Kuralı Bulmada Kullanılan Stratejiler

Şekil 2'de görüldüğü gibi, öğrenciler sabit ve artarak değişen şekil örüntülerinde kuralı bulurken, "görsel" ve "sayısal" olmak üzere iki yaklaşım benimsemişlerdir. Ayrıca her iki örüntü çeşidinde hem görsel yaklaşımı hem de sayısal yaklaşımı benimseyen öğrenciler olmuştur. Bu yaklaşımlar altında da öğrenciler yinelemeli, belirgin ve diğer stratejiler olmak üzere üç başlık altında toplam dokuz strateji kullanmışlardır. Öğrencilerin kullandıkları toplam dokuz stratejinin bazıları literatürde yer alan stratejilerle çakışırken, bazıları da bu araştırmada görülen farklı stratejilerdir. Toplam dokuz stratejinin, yinelemeli, belirgin ve diğer stratejiler olarak sınıflanması, bu çalışmada araştırmacı tarafından yapılmıştır.

Görsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerden bazıları sabit değişen, bazıları artarak değişen bazıları da her iki örüntü çeşidinde yinelemeli stratejiler içinde yer alan "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme", belirgin stratejiler içinde yer alan "şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişki bulma" stratejilerini kullanmışlardır. Ayrıca iki örüntü çeşidinde her iki stratejiyi birden kullanan öğrenciler de olmuştur. Yinelemeli stratejileri kullanan öğrenciler, şekillerin yapısına bağlı olarak sabit değişen şekil örüntüsünde, her şekilde siyah daire sayısının sabit, siyah daire etrafında yer alan beyaz daire sayılarının ise birer birer arttığını, artarak değişen şekil örüntüsünde ise her yeni şekil için bir önceki şekle eklenen kare sayılarının ne olduğunu ifade etmişlerdir. Örneğin sabit değişen şekil örüntüsünde;

...

D_4 **:** *Ee… birinci adımda böyleydi* (birinci adımdaki şekli gösterdi) *birinci adımla, bu adımla bu adım aynı* (birinci adımdaki şekli ikinci adım içinde yuvarlak içine aldı*) yanlarına bir tane daha daire eklemişler, bu bunun adımıyla şöyle adım aynı* (ikinci adımdaki şekli üçüncü adım içinde yuvarlak içine aldı) *birer tane daha yanlarına daire eklemişler.*



Şekil 3. *D_4'ün Kullandığı Stratejiye İlişkin Örnek*

D_4'ün kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimde cebirsel olarak genelleme yoluna gidilmiştir.

f(1)=5

f(2)=f(1)+4=5+4=9

f(3)=f(2)+4=9+4=13

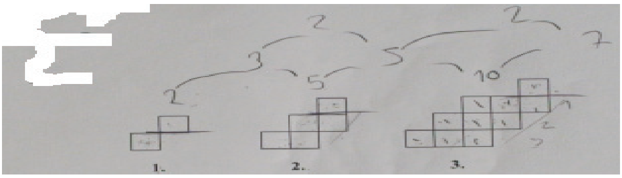
Bu biçimde devam eden örüntünün genel formu f(n)=f(n-1)+4'tür.

Belirgin stratejileri kullanan öğrenciler ise sabit değişen şekil örüntüsünde şeklin yapısına bağlı olarak, siyah daire etrafında yer alan beyaz dairelerin sayısını, artarak değişen şekil örüntüsünde ise basamak sayısı ve her basamakta yer alan kare sayılarını adım sayıları ile ilişkilendirerek "fonksiyonel bir ilişki" bulmuşlardır. Örneğin;

> ***Y_1*** :… *Bir kural daha geldi, adım sayısıyla bunlar aynı* (her şekildeki adım sayıları ile beyaz daireleri gösterdi ve adım sayıları ile siyah dairelerin her bir yanında olan beyaz daire sayılarının aynı olduğunu gördü).

Sayısal yaklaşımı benimseyen öğrenciler, öncelikle verilen şekil örüntülerini sayı örüntülerine dönüştürmüşlerdir. Elde edilen sayı örüntülerinde de, bazı öğrenciler sabit değişen, bazıları artarak değişen, bazıları da her iki örüntü çeşidinde yinelemeli, belirgin ve bu çalışma kapsamında araştırmacı tarafından diğer stratejiler (yinelemeli ve belirgin stratejiler içinde yer almayan ya da hatalı uygulanan stratejiler) şeklinde tanımlanan üç başlık altında toplam yedi strateji kullanmışlardır. Bu bağlamda yinelemeli stratejiler içinde yer alan, öğrencilerin çoğunluğu tarafından da kullanılan "farklılığı arama" stratejisi ilk olarak odaklanılan strateji olmuştur. "Farklılığı arama" stratejisini kullanan öğrencilerden iki öğrenci (Y_1, O_2) ise, artarak değişen şekil örüntüsünde "farklılık arasında farklılık arama" stratejisini de kullanmışlardır. Örneğin;

> ***Y_1*** :… *mesela üçken beş olmuş* (kare sayıları arasındaki farkları buldu ve 2 ile 5 arasına 3, 5 ile 10 arasına 5 yazdı) *iki fark var* (farkların farkını buldu ve 3 ile 5 arasına 2 yazdı).



Şekil 4. *Y_1'in Kullandığı Stratejiye İlişkin Örnek*

Y_1'in kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimiyle cebirsel olarak genelleme yoluna gidilmiştir.

f(1)=2

f(2)-f(1)=5-2=3=g(1)

f(3)-f(2)=10-5=5=g(2)

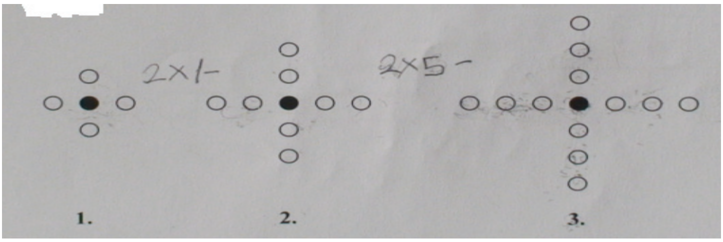
Öğrencinin kullandığı bu stratejisi; n. adım için, f(n)-f(n-1)=g(n-1) ve (n+1). adım için düşünüldüğünde, g(n)=f(n+1)-f(n) şeklinde modellenebilir. Öğrencinin ayrıca kullandığı farklılık arasında farklılığı arama stratejisinin genel formu da; a terimler arası sabit fark olmak üzere; g(n)-g(n-1)=a şeklinde modellenmiştir.

Bir orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci ($O_{2,}$ O_4, D_1, D_3), yinelemeli stratejiler içinde yer alan ve araştırmacı tarafından "bağıntı arama" adı verilen stratejiyi kullanmıştır. Bu strateji, bir sonraki terim ile bir önceki terim arasında bir bağıntı oluşturma şeklinde açıklanmıştır. Öğrenciler bu stratejiyi elde ettikleri sayı örüntüsünün terimleri arasında kullanmışlar, bu öğrencilerden O_2 ve D_1'de ifade ettikleri terimler arası bağıntının, örüntünün her bir teriminin oluşturulmasında çalışmadığını görmüşler ve bu kuralın işlemediğini ifade etmişlerdir. Örneğin;

G **:** *Örüntüde yer alan şekiller arasında bir ilişki gözlemleyebildin mi?*

...

D_3 **:** *Şimdi burda ikinci şekilde toplam iki, dört, altı, sekiz, dokuz tane vardı ikiyle çarptık onsekiz oluyor, onsekizdi burda onbeş tane var, onüç tane var, üç, altı, dokuz, oniki, onüç tane var* (üçüncü adımdaki daireleri saydı) *burda da dokuz tane vardı, ikiyle çarptık dokuzu onsekiz etti, onsekizden onüç çıktı, onüç tane vardı burda üçüncü şekilde 18 den 13 çıkınca da beş çıkartcaz* (2x3- sildi ve 2x5- yazdı) *beş çıkartcaz.*



Şekil 5. *D_3'ün Kullandığı Stratejiye İlişkin Örnek*

D_3'ün kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimde cebirsel olarak genelleme yoluna gidilmiştir.

f(1)=5

f(2)=2.f(1)-1=2.5-1=9

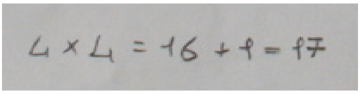
f(3)= 2.f(2)-5=2.9-5=13

Öğrencinin yaklaşımı dikkate alınarak, araştırmacı tarafından genel formu, f(n)=2f(n-1)-(f(n-1)-a) olarak belirlenen bu modelleme yeni-den düzenlendiğinde, farklılığı arama stratejisinin genel formu olan, f(n)=f(n-1)+a biçimini almaktadır.

Şekil 2'de görüldüğü gibi, belirgin stratejiler kapsamında, "fonksiyonel bir ilişki bulma" ve "çarpım tablosu arama" şeklinde toplam iki strateji kullanılmıştır. Öğrencilerden Y_1 ve D_4 sabit değişen örüntüde, Y_2, Y_3, O_1, O_2, O_3, D_1 ise her iki örüntü çeşidinde "fonksiyonel bir ilişki" bularak örüntüyü genelleme yoluna gitmişlerdir. Bu bağlamda öğrenciler, sabit değişen şekil örüntüsünde adım sayısı ile her adımda yer alan toplam daire sayılarını ilişkilendirerek örüntünün genel kuralını, "*adım sayısının dört katının bir fazlası*" olarak sözlü ifade etmişlerdir. Örneğin;

…

Y_2 : *Adım sayısı ile dördü çarpıyoruz ve çıkan sonuca bir ekliyoruz.*



Y_2'nin sözlü ifadesi araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimde genelleme yoluna gidilmiştir.

f(4)=4.4+1=17

Öğrencinin yaklaşımı dikkate alınarak örüntünün genel formu, f(n)=4.n+1 şeklinde modellenebilir.

"Fonksiyonel bir ilişki" bulan O_2 ise bu ilişkiye ulaşırken, öncelikle şeklin yapısının, daha sonra ise adım sayısının etkili olduğunu günlüğünde "*…şekillerin oluşumu ve adım sayıları benim kuralı bulmama çok yardımcı oldu. Adım sayılarının dört katının bir fazlası olarak kuralı buldum. Ama şekillerden de yararlanarak kurallar buldum."* *(22.03.2007)* şeklinde ifade etmiştir. Öğrencilerden Y_2, Y_3, O_1, O_2, O_3, D_1 ise artarak değişen şekil örüntüsünde adım sayısının karesinin bir fazlasını alarak her adımdaki kare sayılarını elde etmişlerdir. Örneğin;

G *:Örüntünün her bir adımındaki şekillerin oluşumunda yer alan, karelerin toplam sayısını veren bir kural ifade edebilir misin?*

O_1 *:Toplam sayısı bir dakka, iki katı, üç katı, burda dört katı, üç katının bir fazlası oluyor, olmuyor ee… bir dakka başkaaa… haa buldum. Şimdi bu sayıların* (adım sayılarını gösterdi) *karesinin bir fazlası oluyor. Evet birin karesi, bir kere bir, bir olur bir fazlası iki, ikinin karesi dört bir fazlası beş, üçün karesi dokuz bir fazlası on.*

"Fonksiyonel bir ilişkiyi" bulan D_1, bu ilişkiyi günlüğünde *"bugünkü örüntünün ilişkisi adım sayısı çarpı kendisi artı bir ekleyip öbür toplam kare sayısını elde ediyorum" (05.04.2007)* şeklinde dile getirmiştir. Y_1, O_2, D_4 ise sabit değişen şekil örüntüsünde "çarpım tablosu arama" stratejisini kullanmıştır. Öğrenciler burada beyaz daire sayılarını bir terimin katları ile ilişkilendirmişlerdir. Örneğin Y_1, her adımda siyah daireden geçen düşey ve yatay beyaz dairelerin sayısının ikinin katları, O_2 ve D_4 ise her adımda siyah daire etrafında yer alan toplam beyaz daire sayılarının dördün katları olduğunu ifade etmişlerdir. Örneğin O_2, "*...mesela burda dört burda iki katı sekiz, dördün üç katı on iki yani dördün katları olarak gitmiş...*" şeklinde görüş bildirmiştir. Uygulanan bu strateji ile istenilen bir adımdaki beyaz daire sayısı ve bu sayıya da bir eklenerek toplam daire sayısı bulunabilir. Sayısal yaklaşımı benimseyerek artarak değişen şekil örüntüsünde "fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanan Y_2 ve O_3 ise aynı zamanda görsel yaklaşım kapsamında da şeklin yapısından yararlanarak fonksiyonel bir ilişki bulan öğrencilerdir. Örneğin;

G : *Ne düşündüğünü söyler misin?*

O_3 : *Hepsinin yanlarına birer tane daha kare konulup, en üstte de bir tane daha kare konuyor. Sonra şey ee... adımın kendi sayısı ile çarpımının bir fazlası. Birle biri çarpıyor bir ekliyorlar iki, ikiyle ikinin çarpımı dört bir daha beş, üçle üçün çarpımı dokuz bir daha on. Bu şekilde...*

Şekil 2'de görüldüğü gibi, öğrencilerden O_1, D_1, D_4 artarak değişen şekil örüntüsünde diğer stratejiler içinde yer alan, "farklılığın doğasına bakma" ve O_3, D_3 ise "terimleri birleştirme" stratejilerini kullanmışlardır. Aşağıda her iki stratejiye ilişkin birer örnek sunulmuştur. Örneğin;

G : *Peki örüntüde yer alan şekiller arasında neler gözlemledin?*

O_1 : *Şimdi bu kareler... tek sayı olarak artıyor, üç, beş diye artıyor, yedi, dokuz diye artar... Burda üç artmış, burda beş artmış, tek sayı olarak artar.*

Örneğin;

G : *Bulduğun ilişkiyi ifade eder misin?*

O_3 : *Burda iki tane var, burda beş tane var, burda da on tane var* (her adımdaki toplam kare sayılarını buldu) *ikisini çarpmışlar on bulmuşlar.*

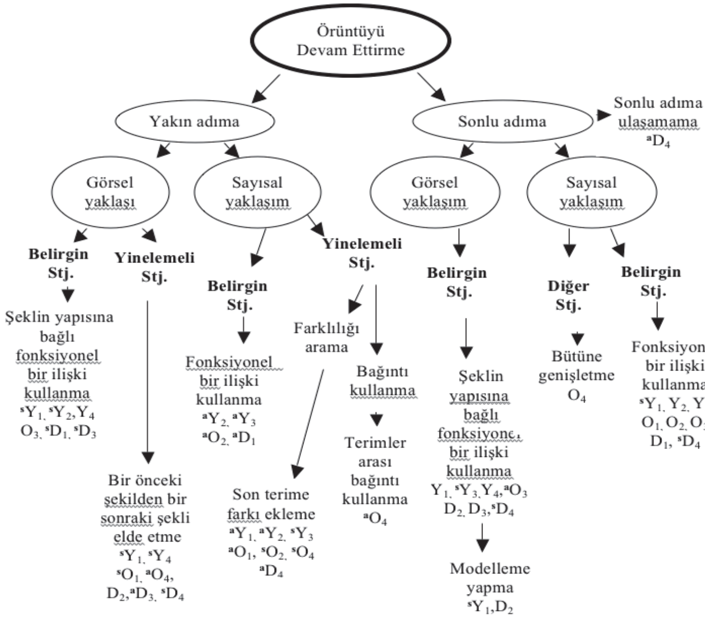
D_3 ise terimleri birleştirme stratejisini, birinci ve ikinci terim toplamının üç fazlasının üçüncü terimi verdiğini *"başkaaa... şu şekille şu şekli toplamış, birinci şekille, ikinci şekli toplamış yani ikiyle beşi toplamış üç artırmış, üçüncü şekli bulmuş"* şeklinde ifade etmiştir.

Örüntüyü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirme

Sabit ve artarak değişen şekil örüntülerinde, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme alt teması altında öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 6'da verilmiştir.

Öğrencilerinden, sabit ve artarak değişen şekil örüntülerini yakın bir adıma devam ettirme kapsamında, verilen örüntülerin dördüncü adımında yer alan şekil sayıları istenmiştir. Şekil 6'da görüldüğü gibi öğrenciler, örüntüyü bir adım (yakın) devam ettirirken, örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt temasında olduğu gibi, "görsel" ve "sayısal" yaklaşımı benimsemişler ve bu yaklaşımlar altında yinelemeli ve belirgin stratejiler olmak üzere, iki başlık altında yer alan stratejiler kullanmışlardır.

Örüntüleri yakın bir adıma devam ettirirken sayısal yaklaşımı benimseyen öğrencilerden bazıları sabit değişen, bazıları da artarak değişen örüntüde yinelemeli stratejiler içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisini kullanmışlardır. Bu stratejiyi kullanan öğrencilerden Y_3, O_2, O_4 sabit değişen şekil örüntüsünde dördüncü adımda yer alan şeklin toplam daire sayısını, Y_1, Y_2, O_1, D_4 ise artarak değişen şekil örüntüsünde son terime farkı ekleyerek dördüncü adımda yer alan şeklin toplam kare sayısını belirlemişlerdir.



Şekil 6. *Sabit ve Artarak Değişen Şekil Örüntülerini Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirmede Kullanılan Stratejiler*

Örneğin;

G : *Üçüncü şekilde toplam on kare var dedin. Peki şekiller böyle devam ederse, dördüncü şekli oluşturmak için karelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

O_1 : *On, dördüncü adımda o zaman beş mi bir dakka dur, üç, beş, yedi artar onyedi olur.*

O_1'in kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimde modellenmiştir.

f(1)=2

f(2)=f(1)+3=2+3=5

f(3)=f(2)+5=5+5=10

f(4)=f(3)+7=10+7=17

Öğrencilerden O_4, artarak değişen şekil örüntüsünde "bağıntı kullanma" stratejisini kullanmıştır. Bu öğrenci dördüncü adımdaki şekil sayısını belirlerken, daha önce örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması kapsamında kullandığı, terimler arası "bağıntı arama" stratejisini kullanmıştır. Örneğin;

G : *Üçüncü şekilde toplam on tane kare olduğunu buldun peki daha sonra şekiller böyle devam ederse, dördüncü şekli oluşturmak için karelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

O_4 : *Yirmi, şuralara bir kare* (üçüncü şeklin üç satırına ve en üst karenin üstüne bir kare ekledi) *ya da ama ondört*

G : *Nasıl düşündüğünü açıklar mısın?*

O_4 : *Şimdi iki katı ama, burda iki katının bir fazlası, iki katı, iki katının bir fazlası yirmibir de olabilir...*

O_4'ün kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimiyle modellenmiştir.

f(1)=2

f(2)=2f(1)+1=5

f(3)=2f(2)=10

f(4)=2f(3)+1=21

Sayısal yaklaşımı benimseyen öğrencilerden Y_2, Y_3, O_2, D_1, belirgin stratejiler içinde yer alan, "fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanarak adım sayısı ve her adımda yer alan kare sayılarını ilişkilendirmişler ve dördüncü adımda yer alan toplam kare sayısına ulaşmışlardır. Örneğin;

G **:** *Üçüncü şekilde toplam kare sayısını buldun kaç kare vardı?*

D_1 **:***Üçüncü şeklide on kare var.*

G **:** *Daha sonra şekiller böyle devam ederse, dördüncü şekli oluşturmak için karelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

D_1 **:** *On yedi.*

G **:** *Nasıl bulduğunu açıklar mısın?*

D_1 **:** *Dört kere dört onaltı, on altı artı bir onyedi.*

G **:** *Neden dört ile dördü çarptın?*

D_1 **:** *Çünkü kuralda adım sayısı ile adım sayısı çarpılıyor ve bir ekleniyor o yüzden.*

D_1'in kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimde cebirsel olarak genelleme yoluna gidilmiştir.

$f(4)=4.4+1$

Öğrencinin yaklaşımı dikkate alınarak, örüntünün genel formu $f(n)=n.n+1$ şeklinde modellenebilir.

Örüntüleri yakın bir adıma devam ettirirken görsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerden bazıları sabit değişen, bazıları artarak değişen ve bazıları da her iki örüntü çeşidinde yinelemeli stratejiler içinde yer alan "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini kullanmışlardır. Örneğin;

G **:** *Dördüncü şekli oluşturmak için siyah ve beyaz dairelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

D_2 **:** *Çizip mi?*

G **:** *Çizmeden.*

D_2 **:** *Dört, sekiz, on iki, on altı, on yedi* (üçüncü şekil üzerinden siyah daire etrafında yer alan beyaz daireleri dörder dörder saydı ve bir ekledi*) Birer artırdım buraları* (daha önce her adımda beyaz dairelerin her bir yanda birer birer artığını söylemişti buna göre dördüncü adımda siyah daire etrafında dörder beyaz daire olduğunu söyledi ve dörder dörder saydı ve bir ekledi).

G **:** *Burda kaç tane oldu?*

D_2 **:** *Dört, dört, dört, dört on altı bir tane de ortada var on yedi.*

G : *Dörder dörder sayarak buldun beyazları*

D_2 **:** *Bir tane de artırcaktık*

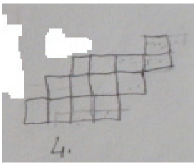
Artarak değişen şekil örüntüsünde, öğrencilerden O_4, D_2, D_3 bu stratejiyi kullanarak dördüncü adımdaki şekil sayısını belirlerken hata yapmıştır. O_4 ve D_3 ise dördüncü adımdaki şekil sayısını, şekli çizerek belirlemişlerdir. Örneğin;

…

D_3 **:***Dördüncü şekil, bu şöyle oluyor* (üçüncü şeklin üç basamağına da birer kare eklemişti daha sonra en üstteki karenin yanına iki kare, onun üstüne iki kare ve en üstte bir kare ekledi ve aşağıdaki şekli oluşturdu).

G **:** *Toplam kaç tane kare oldu?*

D_3 **:** *Toplam 13 tane oldu.*



Şekil 7. *D_3'ün Artarak Değişen Şekil Örüntüsünün 4. Adımına İlişkin Çizimi*

Öğrencilerden Y_1, Y_4, O_3, D_1, D_3, belirgin stratejiler içinde yer alan, "şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanarak, sabit değişen şekil örüntüsünde adım sayısı ve her adımda yer alan beyaz daire sayılarını ilişkilendirmişler ve dördüncü adımda yer alan toplam daire sayısına ulaşmışlardır. Örneğin;

G **:** *Şekiller böyle devam ederse, dördüncü şekli oluşturmak için siyah ve beyaz dairelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

Y_1 **:** *Dördüncü şekilde dört kere dört onaltııı… on yedi.*

G **:** *Nasıl bulduğunu açıklar mısın?*

Y_1 **:** *… dört kere dört, dört tane olduğu için on altı bir de ekledim on yedi* (dördüncü adımda siyah dairelerin etrafında dörder tane beyaz top olduğundan dört ile dördü çarptı ve bir tane siyah daireyi ekledi toplam 17 daire olduğunu buldu)…*adım sayısıyla bunlar aynı* (her şekildeki adım sayıları ile beyaz daireleri gösterdi ve adım sayıları ile siyah dairelerin her bir yanında olan beyaz daire sayılarının aynı olduğunu söyledi).

G **:** *Peki çok güzel.*

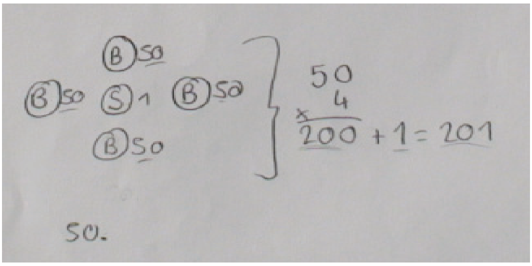
Öğrencilerinden, sabit ve artarak değişen bir şekil örüntülerinde, örüntüleri sonlu bir adıma devam ettirme kapsamında, 50. (sonlu) adımda yer alan toplam şekil sayılarının ne olacağını bulmaları istenmiştir. Şekil 6'da görüldüğü gibi öğrenciler, 50. adımdaki toplam şekil sayılarını belirlerken, yakın adımda olduğu gibi, "görsel" ve "sayısal" yaklaşımı benimsemişlerdir. Görsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerden Y_1, Y_3, Y_4, D_2, D_3, D_4 sabit değişen şekil örüntüsünde, Y_1, Y_4, O_3, D_2, D_3 artarak değişen şekil örüntüsünde belirgin stratejiler içinde yer alan "şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi" ve bunun yanı sıra bu öğrencilerden Y_1 sabit değişen şekil örüntüsünde, D_2 ise her iki örüntü çeşidinde, şekil kullanarak "modelleme" aracılığıyla sonuca ulaşmıştır. Örneğin sabit değişen şekil örüntüsünde;

...

G : *Nasıl yaptığını açıklar mısın?*

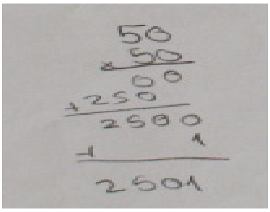
Y_1 : *Adım sayısı ile beyaz topların sayısı aynı olduğu için yani ee… 50 oluyor beyaz topların sayısı, hepsine 50 yazdık, beyaz toplar sağda, solda, önde, arkada olmak üzere yani dört tane ee hepsinin sayısı birbirine eşit 50, dört tane olduğu için kısa yoldan 50 ile 4'ü çarptım, 50 ile 50.. toplamak uzun oluyor, yani 50 ile 4'ü çarptım 200 çıktı, bir de siyah topumuz vardı ekledim 201 sonuç.*

G : *Çok güzel.*



Şekil 8. *Y_1'in Sabit Değişen Şekil Örüntüsünün 50. Adımına İlişkin Yaptığı Modelleme*

Artarak değişen şekil örüntüsünde, şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi bulan Y_4, örüntüyü ilk incelemesinde, basamak sayısı ve her basamakta yer alan kare sayılarını adım sayıları ile ilişkilendirerek fonksiyonel bir ilişki keşfetmiştir. Bu öğrenci örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken de bu ilişkiyi kullanarak, örüntünün 50. adımında 50 tane basamak ve her basamakta 50 kare ve şeklin en üstünde de bir tane kare olduğunu ifade etmiş ve aşağıda gösterilen işlemi gerçekleştirmiştir. Örneğin;



G : *Nasıl bulduğunu açıklar mısın?*

Y_4 : *Ee… şimdi şöyle değerlendirdim. Her basamak birer birer artığı için 50. adımda 50 basamak oluyor, elli basamak ve her basamakta da 50 tane kare olacağı için elliyle elliyi çarptım 2500 buldum, ee… bir de üstüne tek bir kare koyduğumuz için 2501.*

Şekil 6'da görüldüğü gibi, örüntüleri sonlu bir adıma devam ettirirken "şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanan öğrencilerden Y_1 ve D_3'ün dışında diğer öğrenciler, örüntüleri yakın bir adıma devam ettirirken yinelemeli stratejiler içinde yer alan stratejileri kullanmışlardır. Buradan öğrencilerin örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken yinelemeli stratejilere, sonlu bir adıma devama ettirirken ise belirgin stratejilere odaklandıkları söylenebilir.

Örüntüleri sonlu bir adıma devam ettirirken sayısal yaklaşım kapsamında, Y_1 ve D_4 sabit değişen şekil örüntüsünde Y_2, Y_3, O_1, O_2, O_3, D_1 ise her iki örüntü çeşidinde 50. adımdaki toplam şekil sayılarını bulurken "fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanmışlardır. Bu öğrenciler örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması kapsamında da, aynı stratejiyi kullanan öğrencilerdir. Örneğin sabit değişen şekil örüntüsünde;

G : *Örüntüde 50. adımda yer alacak siyah ve beyaz dairelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

…

O_1 : *Bir dakka şimdi 4 ile çarpsam 4 kere 5, 20, 200, 201.*

G : *Nasıl yaptın? Önce neden 50'yi 4 ile çarptın?*

O_1 : *Çünkü adım sayısının 4 katının 1 fazlası ee... toplam çemberleri oluşturuyor, onun için 50'yi 4 ile çarptım 200, 200'e 1 ekledim 201 oldu.*

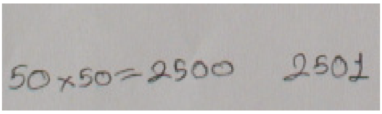
G : *Peki teşekkür ederim.*

O_1'in yaklaşımı dikkate alınarak, genel formu f(n)=4.n+1 şeklinde modellenen örüntünün, 50. adımında yer alan daire sayısı f(50)=4.50+1=201 şeklinde ifade edilebilir.

Örneğin artarak değişen şekil örüntüsünde;

G : *Peki örüntüde 50. adımda yer alacak karelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

Y_3 : *Ellinci adımda* (zihinden hesaplamaya çalıştı).



G : *Nasıl bulduğunu açıklar mısın?*

Y_3 : *Ee … 50. adımda adım sayısı ile kendisinin çarpımı 2500 yapıyor, artı bir var 2501 oluyor*

G : *Peki çok teşekkür ederim.*

Y_3'ün yaklaşımı dikkate alınarak, genel formu f(n)=n.n+1 şeklinde modellenen örüntünün, 50. adımında yer alan kare sayısı f(50)=50.50+1=2501 şeklinde ifade edilebilir.

Verilen bu şekil örüntülerinin yapısının öğrencilerin kuralı bulmalarına ve özellikle örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirmelerine yardım ettiği söylenebilir. Bazı öğrenciler bu durumu günlüklerinde de dile getirmişlerdir. Örneğin D_1 günlüğünde *"Bugün bana örüntü daha basit geldi. Çok kolay bir şekilde buldum. Bulmaya çalışırken ve çözerken çok eğlendim. Bu şekil öbür şekillerden kendisini ortaya koyuyordu. Bu yüzden kolay geldi. Öğretmenimin sorduğu sorular da basit ve eğlenceliydi. Kuralda adım sayısı çarpı dört ve bir eklemekti. Bunu da bence herkes yapabilir." (04.04.2007)* şeklinde açıklamıştır. Y_1 ise günlüğünde, *"Bugünkü örüntü şekillerle ilgiliydi. Kuralı ilk görüşte buldum. Kural siyah topların artmadan ve eksilmede bir tane olup ilerlemesi beyaz topların ise üstten alttan sağdan soldan birer birer artması. Beyaz topların sayısı adım sayısıyla aynıdır. Ben bu örüntüde dördüncü ve 50. adımı buldum. Bu örüntüyü sayılarla ilişkilendirirsek aralarında dört fark olur. Bu örüntüde hiç zorlanmadım. Rahatlıkla çözdüm." (04.04.2007)* şeklinde verilen şekil örüntüsünde zorlanmadığını ifade etmiştir. Benzer şekilde D_3 de bu şekil örüntüsünü kolay bulduğunu şu şekilde günlüğüne yazmıştır. *"Bugünkü sorular bana çok kolay geldi. Önceki örüntü sorularında 60. şekli sormuştu. 60. şekli bulurken zorlanmıştım. Ama 60. şekli zor bulmamın sebebi şekillerdi galiba. Şimdi ki örüntüde olan şekiller çok kolaydı. Onun için bugün 50. şekli bulurken hiç zorlanmadım. Zaten 50. şekildeki örüntüde her bir kenarında 50 daire vardı. Ortasında da bir tane siyah daire vardı. Bütün daireleri topladığımda 201 sayısını buldum." (04.04.2007).*

Sayısal yaklaşım kapsamında öğrencilerden O_4, sabit değişen şekil örüntüsünde diğer stratejiler içinde yer alan "bütüne genişletme" stratejisini kullanarak doğru bir sonuca ulaşamamıştır. Örneğin;

G : *Örüntüde 50. adımda yer alacak siyah ve beyaz dairelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

...

O_4 : *Önce 5 i bulalım. 5, 21 olur* (beşinci adımda 21 tane daire olduğunu söyledi, sonra 21 ile onu çarptı 210 buldu) *210.*

G : *210. Nasıl bulduğunu açıklar mısın?*

...

O_4 : *5. şekildeki daireleri buldum.*

...

G : *Sonra?*

O_4 : *10 ile çarptım 210*

G : *Neden 10 ile çarptın?*

O_4 : *5 i 10 ile çarptım 50, 21 i de 10 ile çarparım.*

G : *Peki teşekkür ederim.*

Öğrenci beşinci adımdaki şekil sayısına odaklanmış ve bu bağlamda 50, beşin on katı olduğu için 50. adımdaki şekil sayısını bulurken beşinci adımdaki şekil sayısının on katını almıştır. O_4'ün kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimiyle cebirsel olarak genelleme yoluna gidilmiştir.

n=5 için f(5)=21 ise,

n=5.10=50 için f(50)=10.f(5)

= 10.21

= 210

Öğrencinin yaklaşımı dikkate alınarak, stratejinin genel formu n=k.m olmak üzere, f(n)=k.f(m) şeklinde modellenebilir.

Şekil 6'da görüldüğü gibi, düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci, artarak değişen şekil örüntüsünde 50. adımdaki toplam kare sayısına ulaşmada bir strateji geliştirememiştir. Bu öğrenci yinelemeli stratejilere odaklandığı için, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirmede zorlanmıştır.

Tartışma

Öğrenciler sabit ya da artarak değişen şekil örüntülerinin kuralını belirlerken birçok araştırma bulgularında da görüldüğü gibi, örüntülerin her adımında yer alan şekillerin yapısal özelliklerini inceleyerek, örüntülerdeki şekillerin oluşumunu belirledikleri "görsel yaklaşımı" ve her bir adımdaki şekillere ilişkin sayısal bir karşılık bularak "sayısal yaklaşımı" benimsemişlerdir (Becker ve Rivera, 2005, 2006; Garcia-Cruz ve Martinon, 1997; Krebs, 2005; Lan Ma, 2007; Orton ve Orton, 1999; Orton et al., 1999; Stacey, 1989). Ayrıca bu öğrencilerin çoğunluğu, bazı araştırma sonuçlarında da görüldüğü gibi (Moses, 1982; Noss, Healy ve Hoyles, 1997; Stacey, 1989'dan aktaran Barbosa et al., 2007) hem görsel hem de sayısal yaklaşımı, buna karşın bazı öğrenciler ise sadece görsel yaklaşımı benimsemişlerdir.

Örüntülerinin kuralını belirlerken görsel yaklaşımda, öğrenciler şeklin yapısına odaklanmışlar ve bu bağlamda yinelemeli ve belirgin stratejiler içinde yer alan stratejileri kullanmışlardır. Yinelemeli stratejiler kapsamında, her iki örüntü çeşidinde de öğrencilerin çoğunluğu Stacey (1989), Samsan ve arkadaşları (1999), Orton ve Orton (1999), Becker ve Rivera (2006) ve Lan Ma (2007) tarafından gerçekleştirilen araştırmalarda da olduğu gibi, bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde ederken, her yeni şekle kaç tane şekil gerektiğini ifade etmişlerdir. Ayrıca yüksek başarı düzeyine sahip bir ve orta başarı düzeyine sahip üç öğrencinin de sadece bir örüntü çeşidinde bu stratejiyi kullandığı gözlenmiştir. Belirgin stratejiler kapsamında ise bazı öğrenciler sabit değişen şekil örüntüsünde, bazı öğrenciler ise artarak değişen şekil örüntüsünde, şeklin yapısına bağlı olarak fonksiyonel bir ilişkiyi keşfetmişlerdir. Ancak sabit değişen şekil örüntüsünde bu ilişkiyi bulan öğrenci sayılarının daha fazla olduğu görülmüştür. Bu durum, verilen şekil örüntüsünün yapısının fonksiyonel bir ilişki bulmada etkili olduğu izlenimini vermektedir. Benzer bulgulara, Sasman ve arkadaşları (1999), Becker ve Rivera, (2006) ve Lan Ma (2007) tarafından gerçekleştirilen araştırmalarda da rastlanmıştır. Öğrencilerin başarı düzeyleri dikkate alındığında ise yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerin yarısı her iki örüntü çeşidinde, diğer yarısı ile orta başarı düzeyine sahip öğrencilerin yarısı sadece bir örüntü çeşidinde, düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin tamamı ise sadece sabit değişen şekil örüntüsünde fonksiyonel ilişkiyi bulmuşlardır. Bu stratejinin kullanımında düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin orta başarı düzeyine sahip öğrencilerden daha başarılı olduğu dikkat çekicidir. Bu durum ise düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin görsel algılarının orta başarı düzeyinde yer alan öğrencilere nazaran daha güçlü olduğunun bir göstergesi olabilir. Diğer taraftan örüntü çeşitlerine göre değişiklik göstermesine karşın yinelemeli ve belirgin stratejilerinin her ikisini kullanan öğrenciler de olmuştur.

Örüntülerinin kuralını belirlerken sayısal yaklaşımı kullanan öğrenciler ise birçok araştırma sonuçlarında da görüldüğü gibi öncelikle verilen şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürmüşlerdir (Becker ve Rivera, 2006; Krebs, 2005; Lan Ma, 2007; Orton ve Orton, 1999; Stacey, 1989). Bu bağlamda da öğrenciler yinelemeli, belirgin ve bu araştırma kapsamında diğer olarak tanımlanan stratejiler altında yer alan stratejileri kullanmışlardır. Benzer bir sonuca Garcia-Cruz ve Martinon (1998), Sasman ve arkadaşları (1999), Looney (2004), Lannin (2005), Ley (2005), Carraher ve arkadaşları (2008), Lan Ma (2007), Amit ve Neria (2007, 2008) tarafından gerçekleştirilen araştırmalarda da rastlanmıştır. Yinelemeli stratejileri benimseyen öğrencilerin çoğunluğu birçok araştırma bulgularında da görüldüğü gibi (Hargreaves et al., 1999; Orton ve Orton, 1999; Stacey, 1989; Warren, 1996, 2000, 2005'ten aktaran Ley, 2005; Lan Ma, 2007) öncelikle her iki örüntüde terimler arası farkları, yüksek ve orta başarı düzeyine sahip birer öğrenci ise artarak değişen örüntülerin yapısal özelliğinden kaynaklanan terimler arası farkların farklarını bulmuşlardır (Hargreaves et al., 1999; Orton ve Orton, 1994). Bunun dışında bu araştırma kapsamında bağıntı arama stratejisi olarak tanımlanan stratejide orta ve düşük başarı düzeyine sahip kimi öğrenciler tarafından kullanılmıştır. Aslında bu stratejiyi kullanan öğrenciler, farklı bir kural arayışı içine girdikleri için, bir sonraki terim ile bir önceki terim arasında bir bağıntı oluşturmaya çalışarak, bir bakıma terimler arası farklılığı arama stratejisini bir başka biçimde ifade etmeye çalışmışlardır.

Stacey (1989), Orton ve Orton (1994), Sasman ve arkadaşları (1999), Looney (2004), Ley (2005) tarafından gerçekleştirilen araştırmalarda da olduğu gibi, sayısal yaklaşım kapsamında her iki örüntü çeşidinde fonksiyonel ilişkiyi bulan öğrenciler olmuştur. Bu öğrenciler elde ettikleri sayı örüntüsüsün terimlerini adım sayıları ile ilişkilendirerek bir genellemeye ulaşmışlar ve bunu da sözlü olarak dile getirmişlerdir. Örüntünün adım sayıları ile verilmesi öğrencilerin genelleme yapabilmelerinde etkili olmuştur. Fonksiyonel bir ilişkiyi yüksek ve düşük başarı düzeyine sahip birer öğrenci sadece sabit değişen sayı örüntüsünde, diğerleri ise her iki örüntü çeşidinde bulabilmiştir. Dolayısıyla sabit değişen şekil örüntülerinde, artarak değişen şekil örüntülerine nazaran daha fazla sayıda öğrenci fonksiyonel bir ilişkiye ulaşmıştır. Sasman ve arkadaşlarının (1999) araştırmalarında ise tam tersi bir sonuç elde edilmiştir. Ancak belirgin stratejiler kapsamında fonksiyonel bir ilişkiyi bulan öğrenci sayısının, yinelemeli stratejiler kapsamında farklılığı arama stratejisini kullanan öğrenci sayısından daha az olduğu da belirlenmiştir. Bunun yanı sıra sayısal yaklaşım altında fonksiyonel bir ilişkiyi keşfeden öğrencilerin sayısı, görsel yaklaşımdakinden daha azdır. Bu durumda görsel yaklaşımla fonksiyonel ilişkiye ulaşmanın, sayısal yaklaşımdan daha kolay olduğu söylenebilir. Benzer şekilde Lan Ma (2007) tarafından gerçekleştirilen araştırmada da görsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerin genelleme yapabilme potansiyelinin daha fazla olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Fonksiyonel bir ilişkiye ulaşabilen öğrencilerden yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip birer öğrenci ayrıca sabit değişen sayı örüntüsünde bir sayının sıralı tam katlarını, örüntünün terimleri ile ilişkilendirerek Hargreaves ve arkadaşları (1999) tarafından çarpım tablosu arama şeklinde tanımlanan stratejiyi kullanmışlardır. Son olarak öğrenciler sayısal yaklaşım altında, yinelemeli ve belirgin stratejiler dışında artarak değişen sayı örüntüsünün terimleri için bir nitelik ya da özellik arayarak ve örüntüdeki bir terimi bulmak için, o terimden önce gelen terimleri toplayarak yine Hargreaves ve arkadaşları (1999) tarafından farklılığın doğasına bakma ve terimleri birleştirme stratejilerini kullanmışlardır. Elde edilen tüm sonuçlar göz önüne alındığında sabit ya da artarak değişen şekil örüntülerinde kuralı bulurken öğrencilerin görsel ya da sayısal yaklaşım altında yinelemeli stratejileri, belirgin stratejilere oranla daha fazla kullandığı söylenebilir. Looney (2004) tarafından gerçekleştirilen araştırmada da benzer bir sonuç elde edilmiştir.

Sabit ya da artarak değişen şekil örüntülerini yakın bir adıma devam ettirirken, örüntünün kuralını bulma aşamasında olduğu gibi, genel olarak görsel ve cebirsel yaklaşım benimsenmiş ve bu yaklaşımlar altında yinelemeli ve belirgin stratejiler kullanılmıştır. Bu bağlamda her iki örüntü çeşidinde de yinelemeli stratejileri kullanan öğrenci sayılarının, belirgin stratejileri kullanan öğrenci sayılarına göre daha fazla olduğu görülmüştür. Örüntüleri yakın bir adıma devam ettirirken, sayısal yaklaşımı daha az sayıda öğrenci benimsemiştir. Bu yaklaşım kapsamında ise öğrenciler ağırlıklı olarak terimler arası farkların arandığı farklılığı arama stratejisini kullanmışlar, bazı öğrenciler ise fonksiyonel bir ilişkiye ulaşmışlardır. Orton ve Orton (1994), Sasman ve arkadaşları (1999), Becker ve Rivera (2006) ve Lan Ma (2007) tarafından gerçekleştirilen araştırmalarda da benzer sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca yinelemeli ya da belirgin stratejilerin kullanımı örüntü çeşitlerine göre değişkenlik göstermiştir. Örneğin sabit değişen şekil örüntüsünü yakın bir adıma devam ettirirken görsel ya da sayısal yaklaşım altında fonksiyonel bir ilişkiyi kullanan bir öğrenci, artarak değişen şekil örüntüsünde yinelemeli stratejiyi kullanmıştır. Diğer taraftan yüksek ve orta başarı düzeyine sahip öğrenciler genel olarak her iki örüntü çeşidinde görsel ve sayısal yaklaşımları, buna karşın düşük başarı düzeyine sahip öğrenciler ise daha çok görsel yaklaşımı benimsemişlerdir.

Sabit ya da artarak değişen şekil örüntülerini sonlu bir adıma devam ettirirken ise görsel yaklaşım kapsamında sadece belirgin, sayısal yaklaşım kapsamında ise belirgin ve diğer stratejiler kullanılmıştır (Orton ve Orton, 1994; Sasman et al., 1999; Stacey, 1989). Bu örüntülerde sonlu adım olarak 50. adımda yer alan şekil sayısı istendiğinden, öğrencilerin çoğunluğu fonksiyonel bir ilişki bularak, bu adımda yer alan şekil sayısını elde etmişlerdir. Ancak orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci her iki örüntü çeşidinde de yinelemeli stratejilere odaklandığından örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken oldukça zorlanmıştır. Bu bağlamda, diğer stratejiler içinde yer alan "bütüne genişletme" stratejisine yönelmiş ve yanlış bir sonuca ulaşmıştır. Bütüne genişletme stratejisinin kullanımında 50. adımın istenmesi de (50 sayısının asal bir sayı olmaması) etkili olmuştur (Sasman et al., 1999). Lan Ma (2007) tarafından gerçekleştirilen araştırmada da, görsel yaklaşımı benimseyen bazı öğrencilerin belirgin stratejilere odaklanarak, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirdiği, görsel ya da sayısal yaklaşımı benimseyen öğrencilerden yinelemeli stratejilere odaklanan öğrencilerin ise örüntüyü sonlu bir adıma devam ettiremediği ve sayısal yaklaşım altında "bütüne genişletme" stratejisini kullandıkları belirlenmiştir. Benzer bir sonuca Stacey, (1989), Orton ve Orton, (1994) ve Sasman ve arkadaşları (1999) araştırmalarında da ulaşılmıştır. Diğer taraftan düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci sabit değişen şekil örüntüsünü sayısal yaklaşım altında, fonksiyonel bir ilişki bularak sonlu bir adıma devam ettirebilmiştir. Buna karşın artarak değişen şekil örüntüsünü sonlu bir adıma devam ettirememiştir. Öğrenci başarı düzeyleri ile örüntüleri sonlu bir adıma devam ettirmede kullanılan genelleme yaklaşımlarını değerlendirdiğimizde ise yüksek başarı düzeyine sahip öğrenciler genel olarak her iki örüntü çeşidinde görsel ve sayısal yaklaşımları, buna karşın orta başarı düzeyine sahip öğrenciler daha çok sayısal, düşük başarı düzeyine sahip öğrenciler ise daha çok görsel yaklaşımı benimsemişlerdir.

Sonuç olarak, sabit ve artarak değişen şekil örüntüleri genellenirken görsel ve sayısal olmak üzere iki yaklaşım benimsenmiştir. Bu yaklaşımlardan sadece birini benimseyen öğrenciler de olmuştur. Görsel ve sayısal yaklaşımların kullanılma durumu ile öğrencilerin sahip oldukları başarı düzeyleri arasında bir ilişki olduğu da görülmüştür. Genellikle yüksek başarı düzeyine sahip öğrenciler her iki yaklaşımı, orta başarı düzeyine sahip öğrenciler daha çok sayısal, düşük başarı düzeyine sahip öğrenciler ise daha çok görsel yaklaşımı benimsemişlerdir. Görsel yaklaşımın ve örüntülerin yapısal özelliklerinin de genelleme yapabilmeyi kolaylaştırdığı elde edilen sonuçlar arasındadır. Örüntülerin genellenmesinde ortaya konulan stratejiler, genellikle yakın (yakın adım) ya da uzak genelleme (sonlu adım) yaparken de dikkate alınmıştır. Ancak örüntünün kuralı doğru bir şekilde tanımlanırken, örüntünün devamında bu kuralın göz ardı edildiği ya da hatalı uygulandığı da olmuştur. Ayrıca yakın genellemelerde bir önceki terimin kullanılmasını gerektiren yinelemeli, uzak genellemelerde ise fonksiyonel bir ilişkinin kullanılmasını gerektiren belirgin stratejilere odaklanılmıştır.

Tüm bu sonuçlara dayalı olarak, görsel yaklaşımın fonksiyonel bir ilişkiyi bulmada etkili olduğu göz önüne alındığında, ilköğretimde öğretmenler şekil örüntüleriyle ilgili etkinliklere ağırlık verebilir ve bu etkinlikleri öğrencilerin fonksiyonel ilişkiyi görebilmelerine olanak sağlayacak şekilde düzenleyebilirler. Örüntülerde genelleme becerisinin gelişimi, daha çok örüntünün sonlu bir adıma devamı gereksiniminde ortaya çıktığı göz önüne alındığında, öğretmenler bu becerinin gelişimine katkı sağlayacak öğretim etkinlikleri planlayabilirler. Örüntüleri sonlu bir adıma devam ettirmede öğrencilerin doğru stratejilere yönelmelerini sağlamak amacıyla verilen örneklerde sonlu adım seçimlerindeki sayı, asal sayı olabilecek örneklemeleri de içerebilir.

The Strategies of Using the Generalizing Patterns of the Primary School 5th Grade Students

Dilek TANIŞLI, Aynur ÖZDAŞ***

Abstract

The main purpose of this study is to determine the strategies of using the generalizing patterns of the primary fifth grade students. The practice of this research is conducted on twelve students, which have high, middle and low success levels. Task-based interviews and students journals are used as the tools for data collection. For the analysis of the data, a classification method including "data reduction", "data display" and "drawing conclusion and verification" are used. At the end of the research, it is seen that the visual and numerical approaches are adopted in the generalization of patterns and the visual approach is made easy for generalization, as well. In generally, the present strategies in the generalizing of patterns are also taken into account of near or far generalizing. The recursive strategies are used in the near generalizing. However, the explicit strategies are determined in using far generalizing.

Key Words

Elementary, Mathematics Education, Pattern, Generalization.

* *Correspondence:* Assist. Prof. Dr., Dilek TANIŞLI, Anadolu University, Faculty of Education, Department of Elementary Education, Yunus Emre Campus, Eskişehir / Turkey.
E-mail: dtanisli@anadolu.edu.tr
** Prof. Dr., Anadolu University, Faculty of Education, Department of Elementary Education, Yunus Emre Campus, Eskişehir, Turkey.

Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri / Educational Sciences: Theory & Practice
9 (3) • Summer 2009 • 1485-1497

A systematic combination of geometric shapes, sounds, symbols, or actions is defined as a pattern (Souviney, 1994). According to Guerrero and Rivera (2002), a pattern is the rule between the elements of a series of mathematical objects which are constructed. It is defined by Olkun and Toluk-Uçar (2006) as a system of repetitious and orderly arranged objects or shapes. Also, Papic and Mulligan (2005) defined a pattern as a spatial or numerical regularity. According to structures and presentation styles, patterns can be combined in two groups as repeating and changing (Olkun &Yeşildere, 2007). A pattern is a key concept for understanding of mathematical knowledge and concepts. Pattern studies are the basis for understanding of the system and logic of mathematics and the observing of mathematical relationships (Burns, 2000). Mathematical expedition and number sense for children have been developed by patterns (Reys, Suydam, Lindquist, & Smith, 1998). Especially, a pattern is an essential element of mathematical development for young children and also a central construction of mathematical inquiry (Waters, 2004). The mathematical knowledge and skills of young children develop with the process as counting, comparing, classifying, measuring, representing, estimating, and symbolizing. But patterns form a basis to build these mathematical efficiencies (Fox, 2005). Pattern activities performed at kindergarten level have important roles for forming of the basis of algebra. In other words, the studies with patterns and the relationships between patterns are a prerequisite and a basis for developing. In the beginning, the introduction to algebra with patterns enables the difficulties for formal algebra (Resnick, Cauzinille-Marmeche ve Mathieu, 1987 cited in Threlfall, 1999; Orton & Orton, 1999; Zazkis & Liljedahl, 2002; Orton & Orton, 1994; Herbert & Brown, 1997). So, it is necessary to have previous experiences with patterns for developing algebraic thinking and concepts. Generalization, which is the means of communication and the tool of thinking, is the basic for the development of mathematical knowledge and the center of mathematical activities. National Council of Teacher of Mathematics (NCTM; 2000) standards call for generalization as one of the main goals of mathematical instruction. A pattern is an essential step for the formation of generalization. It can be seen that the generalization is a basic structure of algebra and patterns are the basic structure of generalization. Jones (1993 cited in Hangreaves, Shorrocks & Threlfall, 1998) implies that the generalization is the principle of algebra and the search of pattern is the first step for generalization. Also, Kaput (1999) defines algebra as "formation of patterns and constraints and the generalization." According to Kieran (1989 cited in Radford, 2006), the generalization of a pattern as a route to algebra rests on the idea of a natural correspondence between algebraic thinking and generalizing. A pattern generalizing is a major factor for developing the algebraic thinking of children-with particular importance for the development of the concepts of variable and function (Lesley, & Freiman, 2004).

There are abundant number of research studies on the shape or number patterns in the literature (e.g., Carraher, Martinez & Schliemann, 2008; Amit & Neria, 2007, 2008; Lan Ma, 2007; Warren, Cooper & Lamb, 2006; Becker & Rivera, 2005, 2006; Krebs, 2005; Lannin, 2005; Ley, 2005; Looney, 2004; Orton, Orton & Roper 1999; Hargreaves, Shorrocks & Threlfall, 1999; Sasman, Linchevski & Olivier, 1999; Garcia-Cruz & Martinon, 1998; Garcia-Cruz & Martinon, 1997; Stacey, 1989). These studies are used for the determining process of the strategies and approaches. It is seen that the two approaches (i.e., visual and numerical) are the first used in generalization of these patterns when patterns are given with shape representation (Becker, & Rivera, 2005, 2006; Garcia-Cruz, & Martinon, 1997; Krebs, 2005; Lan Ma, 2007; Orton, Orton, & Roper, 1999; Stacey, 1989). Also, three main generalization strategies are defined in research studies are: *(i)* Recursive approach-the using of previous term, *(ii)* Explicit approach-searching for the functional relationship (Amit, & Neria, 2007, 2008; Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008; Lannin, 2005; Ley, 2005; Looney, 2004; Sasman, Linchevski, & Olivier, 1999; Stacey, 1989; Warren, Cooper, & Lamb, 2006), and *(iii)* Whole-object making incorrect proportional reasoning, using the ratio $f(x)=ax$, when the relation is $f(x)=ax+b$ ($b\neq 0$) (Stacey, 1989). In Turkey, no research on the generalization of patterns has been found for primary grade levels. Threfore, the aim of this study is to determine the thinking process and generalization patterns of fifth grade students.

Purpose

The main purpose of this study is to determine the strategies, which are used for the generalization of patterns. In this scope, according to the success levels of students, the following research questions are addressed:

1. How do students find the rule of the linear and quadratic shape patterns?
2. How do students extend to the near and far step to pattern?

Method

The study was conducted on twelve primary fifth grade students who had different mathematics success levels (i.e., high, middle, low). Selecting the participants for the study was chieved using purposeful sampling techniques, so the criterion sampling technique was used (Yıldırım, & Şimşek, 2005, p. 112). One criterion was the level of class which is the primary fifth grade; another was the students who had three-different success levels.

Data Collection Process

The data were collected through "task-based interviews" and "student journals." The task-based interview is a technique purposed by Piaget to study the form of knowledge structures and reasoning processes (Clement, 2000). The task-based interview gives the important clues concerning the nature of students' thinking (Ginsburg, 1981). After determining the aims for the research, the task-based interview, which includes the pattern questions, were prepared. Linear and quadratic shape patterns took part in the task. Then, the task-based interview questions which determine the thinking process for resolution of students' interview task were arranged.

The prepared task-based interview, task and questions were presented to two-experts. The tasks were taken on the piloted group reassembly similar features. The study was conducted at a primary school in Eskişehir, and the interviews were video recorded. Adequate time was given for the students to do find their solutions, and the total interview time was arranged for approximately 35-50 minutes was arranged for total interview time (Hunting, 1997). At the end of each interview, the students are given extra time to write their feelings and thoughts about the task in their journals.

Data Analysis Process

Before analyzing the data, the data which were obtained from the task-based interviews, were transcribed and checked by another field expert (Kvale, 1996). For the analysis, the classification method which includes "data reduction", "data display," and "drawing conclusion and verification" has been used (Miles, & Huberman, 1994, pp. 10-12). In the data analysis process, three fields independently coded the data. For the reliability of coding, the agreement percentage suggested by Miles and Huberman (1994), was used as following;

Reliability=number of agreements/(total number of agreements)+(disagreements)

And the result was found to be 91%. The researcher and the two field experts independently studied the data. The common data were categorized under several sub-themes which constitutes themes. The themes are concepts which are discovered from the research data (Bogdan & Biklen, 1998; Meriam, 1998). Themes can be formed from the expressions of participants as well as formed by the researcher (Patton, 1990). Themes were developed by sub-themes, sub-themes, categories in sub-themes and relationships between them. Hereby, the data were displayed. The existing themes and relationships between themes were evaluated and compared under the research questions. The findings were supported by the questions elicited from students' journals.

Results

Finding the Rule of Pattern and Its Investigation

As seen in Figure 1, when they found the rule at linear and quadratic shape patterns, students adopted two approaches as "visual" and "numerical." In the visual approach, students focused on the structure of the shape and in this context, they used the strategies in recursive and explicit strategies. The majority of the students obtained the latter shape from the previous shape in both two patterns within recursive strategies. According to the explicit strategies, some students discovered a functional relationship based on the structure of the shape in linear shape patterns, and others found a functional relationship in quadratic shape patterns. However, the number of students finding the relationships in linear shape pattern was higher. Thus, we have an impression that the structure of given shape pattern was effective for findings a functional relationships. Half of the students who had high-success levels found the functional relationships in each two patterns, the rest of the high-success level students and half of middle-success level students, found functional relationships in a pattern and all of low-success level students, only found the functional relationships in linear shape pattern. In the use of this strategy, students who had low success levels were more successful than middle-success level students. So, we can think that the visual perceptions of low-success level students are more powerful than middle-success level students.

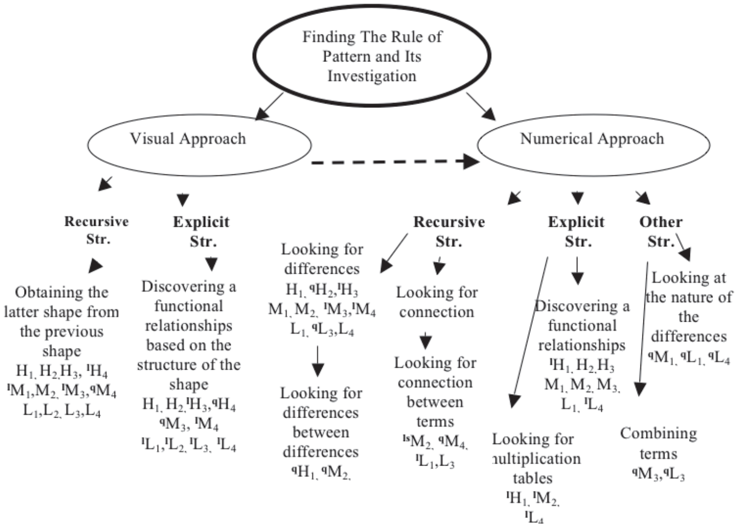


Figure 1: Strategies That Used in Finding the Rule at Linear and Quadratic Shape Patterns

First of all, the students using the numerical approach transformed the shape pattern to the number pattern. In this correlation, students used the strategies, which take part under the recursive, explicit and other strategies. Most students, who adopted the recursive strategies, found the difference between the terms at each pattern, but each student, found the difference of distinction at quadratic pattern. In scope of this research, some students at the middle and low level success used the "looking for connection" strategy. Actually, students using this strategy implied the looking for difference strategy between terms in alternative form because students looking for a different rule and want to form a connection between the latter and previous terms. In the scope of numerical approach, some students also found a functional relationship in both two patterns. These students generalized the terms of finding number pattern with step numbers and they expressed them verbally.

Verbally expressing the step numbers of patterns was effective for generalization. A functional relationship was found by each student who had high and low success levels at linear number pattern. Whereas, others found two patterns. So, in linear shape patterns, a functional relationship was found by many students in comparison to quadratic shape patterns. However, the number of students who found a functional relationship was smaller than the number of students using the looking for difference strategy at recursive strategies.

Extending To a Near and Far Step of Pattern

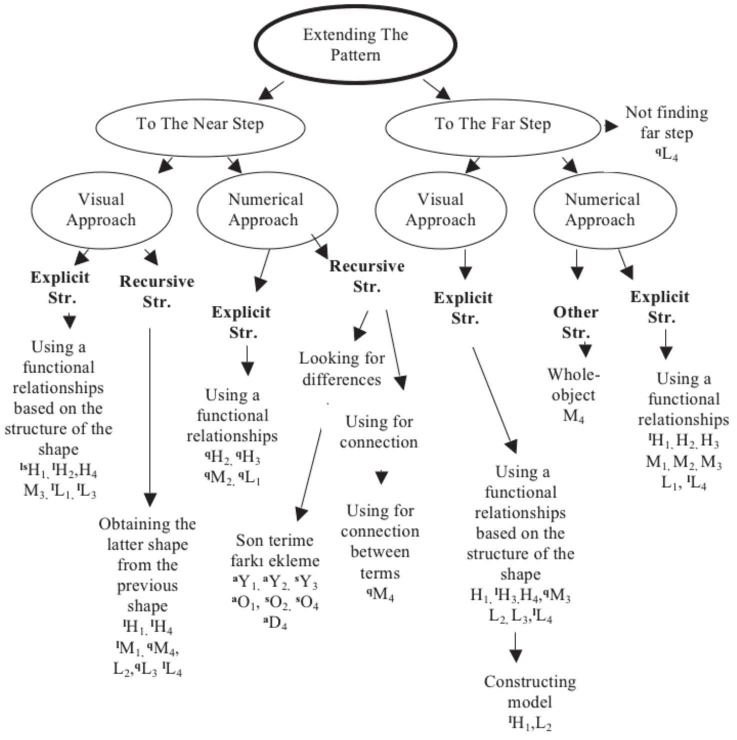


Figure 2: Strategies That Used in Extending to a Near and Far Step of Linear and Quadratic Shape Patterns

As seen in Figure 2, the numerical approach was adopted by fewer students when the patterns were extended to near step. In scope of this approach, some students used the functional relationship, but others used mostly looking for the difference between terms. One the other hand, in general, students who had high and middle-success levels adopted the visual and numerical approaches at each patterns, whereas students who had low-success level usually preferred the visual approach. When the linear or quadratic shape patterns were extended to the far step, the explicit strategies were used in scope of the visual approach. The explicit and other strategies were used in the numerical approach. In these patterns, the majority of the students got the number of shape in the fiftieth step with a functional relationship. But, a middle success level student was considerably coerced when he/she extended the pattern to the far step because he/she focused on the recursive strategies in each two patterns, as well. In this context, he/she carried to the entire extension strategies within other strategies and arrived to a false result. On the other hand, a low-success level student extended the linear shape pattern to the far step using a functional relationship under the numerical approach. However, he/she did not extend the quadratic shape pattern to the far step. In general, high-success level students adopted the visual and numerical approaches, but middle-success level students adopted the numerical approach, and low-success level students adopted the visual approach.

Discussion

In many research findings, when the rules of the linear and quadratic shape patterns were determined by students, the structural properties of the shape at step of patterns were investigated. And the students adopted the visual approach for the formation of shapes and the numerical approach concerning shapes in each step (Becker, & Rivera, 2005, 2006; Garcia-Cruz, & Martinon, 1997; Krebs, 2005; Lan Ma, 2007; Orton, & Orton, 1999; Orton, Orton, & Roper 1999; Stacey, 1989). Moreover, the majority of these students adopted the visual and numerical approaches, but some students adopted only the visual approach (Moses, 1982; Noss, Healy, & Hoyles, 1997; Stacey, 1989 cited in Barbosa, Palhares, & Vale, 2007). It is seen that there is a relationship between the success levels of students and the use of the visual and numerical approaches. Usually, high-success level students adopt both approaches; middle-success level students adopt rather the numerical approach, and low-success level students adopt the visual approach. In getting results, it is seen that the visual approach and the structural properties of patterns simplified the generalization, as well. Students used the recursive, explicit, and the generalization strategies, which define by this research and were used by some of the students under the visual and numerical approaches. The strategies within generalization of patterns were usually considered as the near and far generalizations. However, when the rule of pattern was defined as correct in continuity of patterns this rule was not considered or used as faulty (Orton, & Orton, 1994; Sasman et al., 1999; Stacey, 1989). Also, within far generalizations the focus was on the explicit strategies, and within the near generalizations the focus was on the recursive strategies, which involves the use of previous terms (Stacey, 1989).

References/Kaynakça

Amit, M., & Neria, D. (2007). *Assessing a modeling process of a linear pattern task*. 13th Conference of the International Community of Teachers of Mathematical Modeling and Applications. Indiana University Bloomington, USA.

Amit, M., & Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 111-129.

Barbosa, A., Palhares, P., & Vale, I. (2007). Patterns and generalization: The influence of visual strategies. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 6, pp. 844-851). Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.

Becker, J. R. & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Ed.) *Proceeding of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121-128). Melbourne: PME.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra (1). In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Saiz, & A. Mendez (Eds.), *Proceeding of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 95-101). Merida, Mexico: Universidad Pedagogica Nacional.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1998). *Qualitative research for education: An ıntroduction to theory and methods* (3rd ed.). Boston, MA: Allyn and Bacon.

Burns, M. (2000). *About teaching mathematics. A-K 8 research* (2nd ed.) Sausaluto, California. CA: Math Solutions Publication.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 3-22.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. In A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 547-589). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Fox, J. (2005). Child-initiated mathematical patternning in the pre-compulsory years. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceeding of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 313-320). Melbourne: PME.

Garcia-Cruz, J.A. & Martinon, A. (1997). Actions and invariant schemata in linear generalizing problems. In E. Pehkonen (Eds.) *Proceeding of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 289-296). Finland: PME

Garcia-Cruz, J. A., & Martinon, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. In A. Olivier & K. Karen (Eds.), *Proceeding of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 329-336). South Africa: PME

Ginsburg, H. P. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For The Learning of Mathematics*, *1*(3), 4-11.

Guerrero, L., & Rivera A. (2002). Exploration of patterns and recursive functions. In D. S. Mewborn, P. Sztajn, D. Y. White, H. G. Heide, R. L. Bryant & K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (24th, Athens, Georgia, October 26-29)* (Vol. 1-4, pp. 262-272). Athens, Georgia: PME-NA.

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D., & Threlfall, J. (1998). Children's strategies with number patterns. *Educational Studies*, *24*(3), 315-331.

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D., & Threlfall, J. (1999). Children's strategies with number patterns. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-83). London and New York, NY: Cassell.

Herbert, K., & Brown, R. H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, *3*, 123-128.

Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior.* 16(2), 145-165.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classsrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Krebs, A. S. (2005). Studying students' rea. *Mathematics Teaching in The Middle School*, *10*(6), 284-287.

Kvale, S. (1996). *Interviews: An ıntroduction to qualitative research ınterviewing.* California, CA: Sage Pub.

Lan Ma, H. (2007). The potential of patterning activities to generalization. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceeding of The 31th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 225-232). Seoul: PME.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The chalenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231-258.

Lesley, L., & Freiman, V. (2004). Tracking primary students' understanding of patterns. In M. J. Hoines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 415-422). Bergen, Norway: PME.

Ley, A. F. (2005). A cross-sectional investigation of elementary school student's ability to work with linear generalizing patterns: The impact of format and age on accuracy and strategy choice. *Masters Abstract International*, *44*(02), 124. (UMI No: AAT MR07303).

Looney, S. C. (2004). A study of students' understanding of patterns and functions in grades 3-5. *Dissretation Abstract International*, *65*(03), 868. (UMI No: AAT 3124854).

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education* (1st ed.). San Francisso: Jossey-Bass.

Miles, M., & Huberman, M. (1994). *An expanded sourcebook qualitative data analysis* (2nd ed.). California, CA: Sage Publications.

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM). (2000). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Retrieved August 14, 2005, from http://www.nctm.org/standards.

Olkun, S. ve Toluk-Uçar, Z. (2006). *İlköğretimde matematik öğretimine çağdaş yaklaşımlar.* Ankara: Ekinoks Yayınları.

Olkun, S. ve Yeşildere, S. (2007). *"Sınıf öğretmeni adayları için" temel matematik 1.* Ankara: Maya Akademi.

Orton, A., & Orton, J. (1994). Student's perception and use of pattern and generalization. In J. P. da Ponte, & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of The 18th Conference of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 407-414). Lisbon, Portugal: PME.

Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 104-120). London and New York, NY: Cassell.

Orton, J., Orton A., & Roper, T. (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 121-136). London and New York, NY: Cassell.

Papic, M., & Mulligan, J. (2005). Preschoolers' mathematical patterning. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce et al. (Eds.), *Building Connections: Research, Theory and Practice- MERGA28* (*Mathematics Education Research Group of Australasia Conference Proceedings 28).* Retrieved November 12, 2006, from http://www.merga.net.au/publication/conf_display.php?year=2005

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods* (2nd ed.). London: Sage Publications.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Saiz, & A. Mendez (Eds.). *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 2-21). Merida, Mexico: Universidad Pedagogica Nacional.

Reys, R. E., Suydam, M. N., Lindquist M. M., & Smith. N. L. (1998). *Helping children learn mathematics* (5th ed.). Boston, MA: Allyn and Bacon.

Sasman, M. C., Linchevski, L., & Olivier, A. (1999). The influence of different representations on children's generalisation thinking processes. In J. Kuiper (Eds.), *Proceedings of the Seventh Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics and Science Education* (pp. 406-415). Harare, Zimbabwe.

Souviney, R. J. (1994). *Learning to teach mathematics* (2nd ed.). New York, NY: Merrill.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*, 147-164.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London and New York, NY: Cassell.

Warren, E. A., Cooper, T. J., & Lamb, J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 208-223.

Waters, J. (2004). Mathematical patterning in early childhood settings. In I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds.), *Mathematics Education For The Third Millennium, Towards 2010, MERGA* (*Mathematics Education Research Group of Australasia Conference Proceedings).* Retrieved November 12, 2006, from http://www.merga.net.au/publication/conf_display.php?year=2005

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (beşinci baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379-402.