

ÇİZGE-YÖNLENDİRİLMİŞ FRAKTALLARIN ÇAPLARI ÜZERİNE

Ali DENİZ *

Matematik Bölümü, Fen Fakültesi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, Türkiye

ÖZET

Bu çalışmada çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sistemleri ele alınmış, verilen keyfi noktaları merkez kabul eden ve bu sistemlerin çekicilerini kapsayan disklerin bulunabilmesi için bir yeterli koşul verilmiştir. Ayrıca çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sistemi çekicilerinin çapları için alt ve üst sınırlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fraktallar, Yinelemeli fonksiyon sistemleri, Çizge-yönlendirilmiş fraktallar

ON THE DIAMETERS OF GRAPH-DIRECTED FRACTALS

ABSTRACT

In this work it is considered the graph-directed iterated function systems, and a sufficient condition to find disks which are centered at arbitrarily given points and containing the attractors of these systems is given. It is also given upper and lower bounds for the diameter of the attractors of a graph-directed system.

Keywords: Fractals, Iterated function systems, Graph-directed fractals

1. GİRİŞ

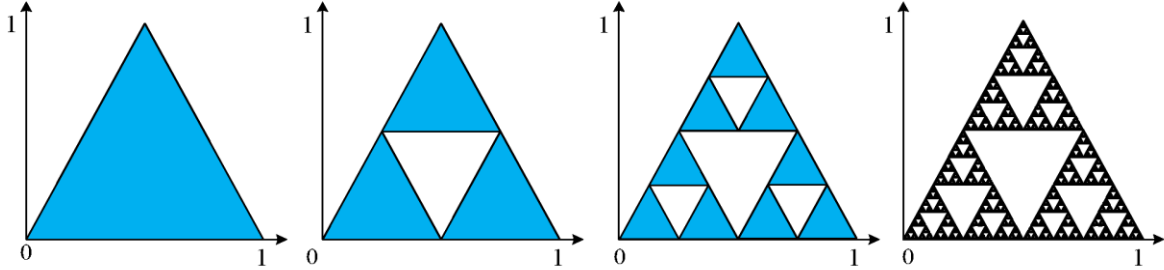
Kendine benzer yapıları veya kümeleri araştıran fraktal geometrinin ana dallarından biri yinelemeli fonksiyon sistemleridir. Yinelemeli fonksiyon sistemlerinin günlük hayatta fraktal görüntü sıkıştırma, fraktal antenler, fraktal interpolasyon fonksiyonları, sinyal modelleme gibi birçok farklı uygulaması vardır.

Bir yinelemeli fonksiyon sistemi (YFS) bir X tam metrik uzayı üzerinde tanımlı $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ fonksiyonlarından oluşur. Burada her bir $\varphi_i: X \rightarrow X$ fonksiyonu büzülme katsayısı $0 \leq \lambda_i < 1$ olacak şekilde bir büzülme fonksiyonudur. $H(X)$, X tam metrik uzayının boş olmayan kompakt altkümelerinin ailesi üzerinde Hausdorff metriği alınarak oluşturulan tam metrik uzay olmak üzere, Hutchinson teoremine göre,

$$\Phi : H(X) \rightarrow H(X)$$
$$\Phi(U) = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(U)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon büzülme katsayısı $\lambda = \max_{i=1, \dots, N} \lambda_i$ olan bir büzülme dönüşümüdür ve dolayısıyla bir sabit noktası vardır. Bu sabit noktaya $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ yinelemeli fonksiyon sisteminin çekicisi (atraktörü) adı verilir. Ayrıca yine Hutchinson teoremine göre, Φ^n , Φ operatörünün kendisiyle n defa bileşkesini göstermek üzere, $H(X)$ içinden seçilen keyfi bir U kümesi için $\Phi^n(U)$ küme dizisi bu çekiciye yakınsar (bkz [1, 2]).

Örnek 1.1: $X = \mathbb{R}^2$ ve $\varphi_1(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$, $\varphi_2(x, y) = \frac{1}{2}(x + 1, y)$ ve $\varphi_3(x, y) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2})$ fonksiyonlarından oluşan yinelemeli fonksiyon sisteminin çekicisi Sierpinski üçgeni adıyla bilinen bir fraktaldır. Şekil 1’de bu yinelemeli fonksiyon sisteminin ilk birkaç iterasyonu ve çekicisi görülmektedir.



Şekil 1. Örnek 1.1 de verilen $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi için oluşturulan Φ operatörünün en soldaki üçgene iki kez uygulanmasıyla ikinci ve üçüncü şekildeki kümeler elde edilir. Bu yineleme işleminin sonunda (limit durumunda) elde edilen küme en sağda temsili olarak gösterilen Sierpinski üçgenidir.

Bir YFS çekicisinin çapı için bir üst sınırın gerekli olduğu bazı algoritmalar vardır, bunlar arasında [3] ve [4] çalışmalarını sayabiliriz. Bu algoritmalar en azından çekicinin çapı için bir üst sınırın bilinmesine dayanır. YFS çekicilerinin çapları için bir üst sınır Dubuc ve Hamzaoui tarafından verilmiştir, (bkz. [5]). Bunun dışında bir YFS çekicisini kapsayan disklerin bulunmasıyla ilgili olarak pek çok çalışma bulunmaktadır (bkz. [6-9]). Bu çalışmada klasik yinelemeli fonksiyon sistemlerinin genellemesi olan çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sistemlerinin çekicilerini kapsayan diskler için bir yeterli koşul verilecek ve çekicilerin çapları için bir sınır eşitsizliği ifade edilecektir.

Kendine-benzer bir fraktal kendisinin küçültülmüş kopyalarının birleşimi olarak ifade edilebilen bir metrik uzaydır. Bunun genellemesi olarak her biri birbirlerinin küçültülmüş kopyalarının birleşiminden oluşan sonlu sayıdaki metrik uzayların bir koleksiyonu oluşturulabilir. Bu tür metrik uzaylara da çizge-yönlendirilmiş fraktallar diyeceğiz. Şimdi çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sistemlerini kısaca özetleyelim: $\{X_\alpha, d_\alpha \mid \alpha = 1, 2, \dots, N\}$ tam metrik uzayların bir sonlu ailesi olsun. Bir çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sistemi (ÇYFS), bu metrik uzaylar arasında $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N$ ve $k = 1, 2, \dots, K^{\alpha, \beta}$ olmak üzere $\varphi_k^{\alpha, \beta}: X_\beta \rightarrow X_\alpha$ büzülme fonksiyonlarından oluşur. ($\varphi_k^{\alpha, \beta}$ fonksiyonunun büzülme katsayısını $\lambda_k^{\alpha, \beta} \in [0, 1)$ ile göstereceğiz.) Böylece oluşturulan

$$\{X_\alpha, \varphi_k^{\alpha, \beta} \mid \alpha, \beta = 1, 2, \dots, N \text{ ve } k = 1, 2, \dots, K^{\alpha, \beta}\}$$

koleksiyonuna bir çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sistemi denir.

$H(X_1) \times \dots \times H(X_N)$ çarpımı, her bileşen üzerindeki Hausdorff uzaklıklarının maksimumu alınarak oluşturulan metrik ile bir tam metrik uzaydır. Yukarıdaki biçimde bir ÇYFS verildiğinde

$$\Phi: H(X_1) \times \dots \times H(X_N) \rightarrow H(X_1) \times \dots \times H(X_N)$$

operatörünü $\alpha = 1, 2, \dots, N$ için

$$\Phi_\alpha(U_1, U_2, \dots, U_N) = \bigcup_{\beta=1}^N \bigcup_{k=1}^{K^{\alpha, \beta}} \varphi_k^{\alpha, \beta}(U_\beta)$$

olmak üzere $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N)$ olarak tanımlayalım. Klasik yinelemeli fonksiyon sistemlerine

benzer olarak, buradaki Φ fonksiyonu da bir büzülme dönüşümüdür ve bir sabit noktası vardır. Bu sabit nokta $(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2, \dots, \mathcal{A}^N)$ olmak üzere

$$\mathcal{A}^\alpha = \bigcup_{\beta=1}^N \bigcup_{k=1}^{K^{\alpha,\beta}} \varphi_k^{\alpha,\beta}(\mathcal{A}^\beta), \quad \alpha = 1, 2, \dots, N$$

eşitlikleri geçerlidir (bkz. [10-11]). Φ operatörünün sabit noktası olan $(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2, \dots, \mathcal{A}^N)$ küme N -lisine sistemin çekici N -lisi ve bileşenlerinden her birine bir çizge-yönlendirilmiş fraktal veya sistemin bir çekicisi diyeceğiz. Burada uzaylar arasındaki fonksiyon ilişkileri bir çizge yardımıyla ifade edilebileceğinden bu tip yinelemeli fonksiyon sistemlerinde “çizge-yönlendirilmiş” tabiri kullanılmaktadır.

Bundan sonraki kısımda notasyon karmaşasından kurtulmak amacıyla $N = 2$ durumuyla ilgileneceğiz, genel durum benzer şekilde kolaylıkla elde edilebilir. Yukarıdakileri $N = 2$ durumunda ifade edecek olursak $\Phi: H(X_1) \times H(X_2) \rightarrow H(X_1) \times H(X_2)$ fonksiyonu

$$\Phi(U, V) = (\Phi_1(U, V), \Phi_2(U, V))$$

= $(\bigcup_{k=1}^{K^{1,1}} \varphi_k^{1,1}(U) \cup \bigcup_{k=1}^{K^{1,2}} \varphi_k^{1,2}(V), \bigcup_{k=1}^{K^{2,1}} \varphi_k^{2,1}(U) \cup \bigcup_{k=1}^{K^{2,2}} \varphi_k^{2,2}(V))$ olarak yazılır. Sistemin çekici ikilisi $(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^1 &= \bigcup_{\substack{k=1 \\ K^{1,1}}}^{K^{1,1}} \varphi_k^{1,1}(\mathcal{A}^1) \cup \bigcup_{\substack{k=1 \\ K^{1,2}}}^{K^{1,2}} \varphi_k^{1,2}(\mathcal{A}^2) \\ \mathcal{A}^2 &= \bigcup_{k=1} \varphi_k^{2,1}(\mathcal{A}^1) \cup \bigcup_{k=1} \varphi_k^{2,2}(\mathcal{A}^2) \end{aligned}$$

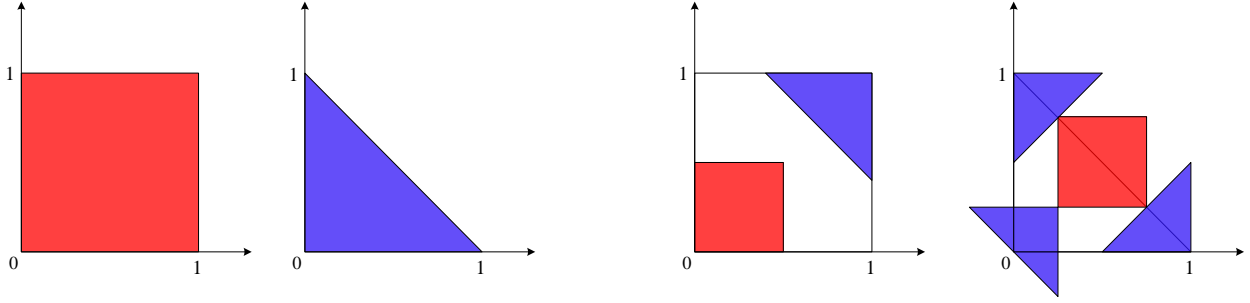
olur. Yine klasik yinelemeli fonksiyon sistemi durumundakine benzer olarak keyfi $U \in H(X_1)$ ve $V \in H(X_2)$ kümeleri için $\Phi^n(U, V)$ dizisi $n \rightarrow \infty$ için $(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)$ ikilisine yakınsar (bkz. [10, 11]).

Örnek 1.2. $X_1 = X_2 = \mathbb{R}^2$ ve $\varphi_k^{\alpha,\beta}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aşağıdaki tabloda verilen büzülme dönüşümleri olmak üzere $\{\varphi_k^{\alpha,\beta}\}$ çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sistemini ele alalım. Burada $K^{1,1} = K^{1,2} = K^{2,1} = 1$ ve $K^{2,2} = 3$ tür.

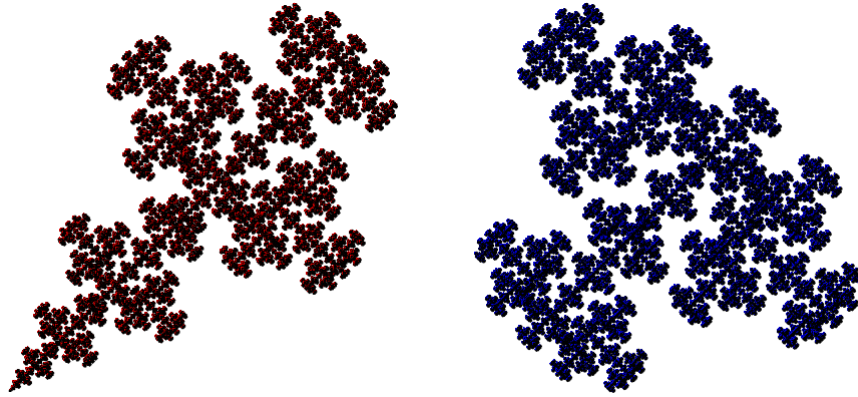
$\varphi_1^{1,1}(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$	$\varphi_1^{1,2}(x, y) = -\frac{3}{5}(x, y) + (1, 1)$
$\varphi_1^{2,1}(x, y) = \frac{1}{2}(x, y) + (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	$\varphi_1^{2,2}(x, y) = \frac{1}{2}(x, -y) + (0, 1)$
	$\varphi_2^{2,2}(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x) + (1, 0)$
	$\varphi_3^{2,2}(x, y) = -\frac{1}{2}(x, y) + (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

$\varphi_k^{\alpha,\beta}$ dönüşümlerinin görüntülerinin birleşimi alınarak oluşturulan Φ_1 ve Φ_2 operatörlerinin geometrik tasvirleri Şekil 2’de yapılmıştır. Şekil 2’nin sol tarafındaki gibi alınan kare ve üçgenin görüntüleri sağda gösterilmiştir. $\{\varphi_k^{\alpha,\beta}\}$ çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sisteminin çekici ikilisi $(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)$ ise

Şekil 3'te gösterilmiştir.



Şekil 2. Soldaki küme ikilisinin (kare ve üçgen) Φ_1 ve Φ_2 operatörleri altındaki görüntüleri sağda sırasıyla verilmiştir.



Şekil 3. Örnek 1.2'de verilen ÇYFS'nin çekicisi olan \mathcal{A}^1 ve \mathcal{A}^2 kümeleri

Bu çalışmada ilk önce merkezleri verilen keyfi noktalar olan ve çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sisteminin çekicilerini kapsayan diskler için bir yeter koşul vereceğiz. Daha sonra ise çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sistemi çekicilerinin çapları için Hausdorff uzaklığına bağlı olarak alt ve üst sınırlar vereceğiz.

2. ÇYFS ÇEKİCİLERİNİ KAPSAYAN DİSKLER İÇİN BİR YETER KOŞUL

Bu bölümde çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sistemlerinin çekicilerini kapsayan diskler için bir yeterli koşul vereceğiz. Öncelikle aşağıdaki yardımcı teoremi ifade edelim:

Yardımcı Teorem 2.1 $\{X_\alpha, \varphi_k^{\alpha,\beta}\}$ ($\alpha, \beta = 1,2; k = 1,2, \dots, K^{\alpha,\beta}$) bir çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sistemi ve \mathcal{A}^1 and \mathcal{A}^2 de bu sistemin çekicileri olsun. Eğer $\Phi_1(U,V) \subseteq U$ ve $\Phi_2(U,V) \subseteq V$ olacak şekilde $U \subseteq X_1$ ve $V \subseteq X_2$ kümeleri varsa $\mathcal{A}^1 \subseteq U$ ve $\mathcal{A}^2 \subseteq V$ olur.

İspat Hipotezden dolayı $\Phi(U,V) = (\Phi_1(U,V), \Phi_2(U,V)) \subseteq (U,V)$ dir. Φ fonksiyonu ardarda uygulanarak her $n \in \mathbb{N}$ için $\Phi^n(U,V) \subseteq (U,V)$ elde edilir. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n(U,V) = (\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)$ olduğundan $(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2) \subseteq (U,V)$ ve dolayısıyla $\mathcal{A}^1 \subseteq U$ ve $\mathcal{A}^2 \subseteq V$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.1, merkezleri keyfi $x \in X_1$ ve $y \in X_2$ noktaları olan, $\mathcal{A}^1 \subset B(x, r_x)$ ve $\mathcal{A}^2 \subset B(y, r_y)$ kapsamalarını sağlayan disklerin bulunması amacıyla kullanılabilir. Aşağıdaki teorem yarıçaplarla ilgili olarak bir yeter koşul vermektedir:

Teorem 2.2 $\{X_\alpha, \varphi_k^{\alpha,\beta}\}$ ($\alpha, \beta = 1,2; k = 1,2, \dots, K^{\alpha,\beta}$) bir çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon

sistemi, \mathcal{A}^1 ve \mathcal{A}^2 de bu sistemin çekicileri olsun. Keyfi bir $(x, y) \in X_1 \times X_2$ verilsin. Eğer r_x ve r_y yarıçapları

$$r_x \geq \frac{d_1(\varphi_k^{1,1}(x), x)}{1 - \lambda_k^{1,1}}, \quad k = 1, 2, \dots, K^{1,1} \quad (1)$$

$$r_x - \lambda_k^{1,2} r_y \geq d_1(\varphi_k^{1,2}(y), x), \quad k = 1, 2, \dots, K^{1,2} \quad (2)$$

$$-\lambda_k^{2,1} r_x + r_y \geq d_2(\varphi_k^{2,1}(x), y), \quad k = 1, 2, \dots, K^{2,1} \quad (3)$$

$$r_y \geq \frac{d_2(\varphi_k^{2,2}(y), y)}{1 - \lambda_k^{2,2}}, \quad k = 1, 2, \dots, K^{2,2}. \quad (4)$$

eşitsizliklerini sağlıyorsa $\mathcal{A}^1 \subseteq B(x, r_x)$ ve $\mathcal{A}^2 \subseteq B(y, r_y)$ olur.

İspat (1)-(4) eşitsizliklerinin sağlanması durumunda, eğer

$$\Phi_1(B(x, r_x), B(y, r_y)) \subseteq B(x, r_x) \quad (5)$$

$$\Phi_2(B(x, r_x), B(y, r_y)) \subseteq B(y, r_y) \quad (6)$$

ifadeleri kanıtlanırsa Yardımcı Teorem 2.1 ile ispat tamamlanır. (5) kapsamasını kanıtlamak için

$$\varphi_k^{1,1}(B(x, r_x)) \subseteq B(x, r_x), \quad k = 1, 2, \dots, K^{1,1} \quad (7)$$

$$\varphi_k^{1,2}(B(y, r_y)) \subseteq B(x, r_x), \quad k = 1, 2, \dots, K^{1,2} \quad (8)$$

kapsamalarını ve (6) kapsamasını kanıtlamak için ise

$$\varphi_k^{2,1}(B(x, r_x)) \subseteq B(y, r_y), \quad k = 1, 2, \dots, K^{2,1}$$

$$\varphi_k^{2,2}(B(y, r_y)) \subseteq B(y, r_y), \quad k = 1, 2, \dots, K^{2,2}$$

kapsamalarının kanıtlanması gerekir. Şimdi herhangi $x_0 \in B(x, r_x)$ ve $y_0 \in B(y, r_y)$ noktalarını alalım.

(1) eşitsizliği kullanılarak her bir $k = 1, 2, \dots, K^{1,1}$ için

$$\begin{aligned} d_1(\varphi_k^{1,1}(x_0), x) &\leq d_1(\varphi_k^{1,1}(x_0), \varphi_k^{1,1}(x)) + d_1(\varphi_k^{1,1}(x), x) \\ &\leq \lambda_k^{1,1} d_1(x_0, x) + d_1(\varphi_k^{1,1}(x), x) \\ &\leq \lambda_k^{1,1} r_x + d_1(\varphi_k^{1,1}(x), x) \\ &\leq r_x \end{aligned}$$

ve buradan da $\varphi_k^{1,1}(x_0) \in B(x, r_x)$ elde edilir. Böylece (7) kapsaması kanıtlanmış olur. Benzer şekilde (2) eşitsizliği kullanılarak her bir $k = 1, 2, \dots, K^{1,2}$ için

$$\begin{aligned} d_1(\varphi_k^{1,2}(y_0), x) &\leq d_1(\varphi_k^{1,2}(y_0), \varphi_k^{1,2}(y)) + d_1(\varphi_k^{1,2}(y), x) \\ &\leq \lambda_k^{1,2} d_2(y_0, y) + d_1(\varphi_k^{1,2}(y), x) \\ &\leq \lambda_k^{1,2} r_y + d_1(\varphi_k^{1,2}(y), x) \\ &\leq r_x \end{aligned}$$

ve dolayısıyla $\varphi_k^{1,2}(y_0) \in B(x, r_x)$ elde edilir. Yani (8) kapsaması sağlanır. Böylece

$$\Phi_1(B(x, r_x), B(y, r_y)) \subseteq B(x, r_x).$$

ifadesi ispatlanmış olur. (6) ifadesinin doğruluğu da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 2.2'ye göre, herhangi $x \in X_1$ ve $y \in X_2$ noktaları verildiğinde (1)-(4) eşitsizliklerini sağlayan r_x ve r_y yarıçapları belirlenerek oluşturulan $B(x, r_x)$ ve $B(y, r_y)$ yuvarları sırasıyla sistemin çekicileri \mathcal{A}^1 ve \mathcal{A}^2 kümelerini kapsamaktadır. Bu durumda $2r_x$ ve $2r_y$ sayıları sırasıyla \mathcal{A}^1 ve \mathcal{A}^2 çekicilerinin çapları için birer üst sınır olurlar. Aşağıda çekicilerin çapları için Hausdorff uzaklığına bağlı olarak başka bir sınırlandırma yapılacaktır.

3. ÇİZGE-YÖNLENDİRİLMİŞ YİNELEMELİ FONKSİYON SİSTEMİ ÇEKİCİLERİNİN ÇAPLARI İÇİN BİR SINIR

Bu bölümde bir çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sistemi çekicilerinin çapları için Hausdorff metriği ile ifade edilen bir sınır vereceğiz. Öncelikle bir (X, d) metrik uzayının altkümeleri üzerinde çap fonksiyonunu tanımlayalım. X 'in boş olmayan kompakt altkümelerinin kümesi $H(X)$ üzerinde çap fonksiyonu

$$\delta: H(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \mapsto \delta(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

olarak tanımlanır. Çap fonksiyonu δ Lipschitz sabiti 2 olan bir Lipschitz fonksiyondur, yani $h, H(X)$ üzerindeki Hausdorff uzaklığını göstermek üzere, herhangi $A, B \in H(X)$ kümeleri için

$$|\delta(A) - \delta(B)| \leq 2 h(A, B) \quad (9)$$

eşitsizliği geçerlidir, (bkz. [12]).

Şimdi bir büzülme dönüşümü için ifade edilebilecek kontraksiyon prensibini hatırlayalım: (X, d) bir metrik uzay, $\varphi: X \rightarrow X$ büzülme katsayısı $0 \leq \lambda < 1$ ve sabit noktası $x_0 \in X$ olan bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ için

$$d(x_0, \varphi^n(x)) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x, \varphi(x))$$

eşitsizliği geçerli olur. Klasik YFS durumunda ifade edilen kontraksiyon prensibini $H(X_1) \times H(X_2)$ üzerinde büzülme dönüşümü olduğunu bildiğimiz çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sisteminin belirlediği Φ operatörü için kullanacağız.

Teorem 3.1 (X_α, d_α) , $\alpha = 1, 2$ iki tam metrik uzay, $\{X_\alpha, \varphi_k^{\alpha, \beta}\}$ ($\alpha, \beta = 1, 2; k = 1, 2, \dots, K^{\alpha, \beta}$) bir çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sistemi ve $\varphi_k^{\alpha, \beta}$ fonksiyonlarının büzülme katsayıları $0 \leq \lambda_k^{\alpha, \beta} < 1$ olsun. Sistemin çekicileri $\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2$ ve $\lambda = \max\{\lambda_k^{\alpha, \beta} \mid \alpha = 1, 2 \text{ ve } k = 1, 2, \dots, K^{\alpha, \beta}\}$ olmak üzere keyfi $E \in H(X_1)$ ve $F \in H(X_2)$ kümeleri için

$$|\delta(\mathcal{A}^i) - \delta((\Phi^n(E, F))_i)| \leq \frac{2\lambda^n}{1-\lambda} h_1 \times h_2((E, F), \Phi(E, F))$$

eşitsizliği her $n \in \mathbb{N}$ ve $i = 1, 2$ için geçerlidir.

Teorem 3.1'in ifadesindeki $(\Phi^n(E, F))_i$ terimi Φ operatörünün (E, F) küme ikilisine n defa uygulanmasıyla elde edilen $\Phi^n(E, F)$ küme ikilisinin i . bileşenini göstermektedir. $n = 1$ durumunda $(\Phi(E, F))_i = \Phi_i(E, F)$, $i = 1, 2$ olduğuna dikkat ediniz.

İspat h_1 ve h_2 sırasıyla $H(X_1)$ ve $H(X_2)$ üzerinde d_1 ve d_2 metrikleri tarafından üretilen Hausdorff metriklerini göstermek üzere $H(X_1) \times H(X_2)$ uzayı üzerinde $h_1 \times h_2$ çarpım metriği vardır ve bu metrik

herhangi $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in H(X_1) \times H(X_2)$ küme ikilileri için

$$h_1 \times h_2((A_1, B_1), (A_2, B_2)) = \max \{h_1(A_1, B_1), h_2(A_2, B_2)\}$$

olarak tanımlanır. $\{X_\alpha, \varphi_k^{\alpha, \beta}\}$ çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sisteminin belirlediği operatör Φ olsun. Şimdi Φ operatörünün büzülme katsayısı $\lambda = \max \{\lambda_k^{\alpha, \beta} \mid \alpha = 1, 2 \text{ ve } k = 1, 2, \dots, K^{\alpha, \beta}\}$, sistemin çekici ikilisi $(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)$ ve $(E, F) \in H(X_1) \times H(X_2)$ keyfi bir küme ikilisi olmak üzere kontraksiyon prensibini her $n \in \mathbb{N}$ için

$$h_1 \times h_2((\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2), \Phi^n(E, F)) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} h_1 \times h_2((E, F), \Phi(E, F)) \quad (10)$$

olarak ifade edebiliriz.

Şimdi $(E, F) \in H(X_1) \times H(X_2)$ olsun. (9) eşitsizliği ile ifade edilen X_i üzerinde çap fonksiyonunun Lipschitz fonksiyonu olmasını \mathcal{A}^i ve $(\Phi^n(E, F))_i$ kümeleri için kullanırsak $i = 1, 2$ için

$$|\delta(\mathcal{A}^i) - \delta((\Phi^n(E, F))_i)| \leq 2 h_i(\mathcal{A}^i, (\Phi^n(E, F))_i)$$

elde ederiz.

$H(X_1) \times H(X_2)$ üzerindeki Hausdorff çarpım metriğinin tanımından dolayı

$$h_i(\mathcal{A}^i, (\Phi^n(E, F))_i) \leq h_1 \times h_2((\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2), \Phi^n(E, F))$$

yazabiliriz. Burada (10) eşitsizliğini kullanarak

$$|\delta(\mathcal{A}^i) - \delta((\Phi^n(E, F))_i)| \leq \frac{2\lambda^n}{1-\lambda} h_1 \times h_2((E, F), \Phi(E, F))$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2. Teorem 3.1’de ifade edilen eşitsizlikten ÇYFS çekicilerinin çapları için keyfi $E \in H(X_1)$ ve $F \in H(X_2)$ kümelerine karşılık her $n \in \mathbb{N}$ sayısı için

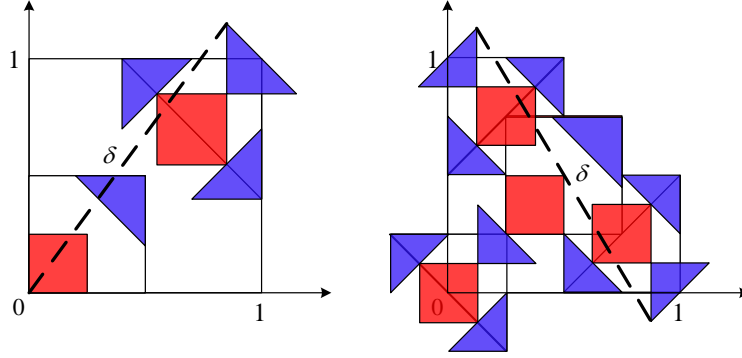
$$\begin{aligned} |\delta(\mathcal{A}^i)| &\leq \frac{2\lambda^n}{1-\lambda} h_1 \times h_2((E, F), \Phi(E, F)) + \delta((\Phi^n(E, F))_i) \\ -\frac{2\lambda^n}{1-\lambda} h_1 \times h_2((E, F), \Phi(E, F)) + \delta((\Phi^n(E, F))_i) &\leq |\delta(\mathcal{A}^i)| \end{aligned}$$

sınırları elde edilir.

Burada $\lambda < 1$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 0$ olduğuna ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n(E, F) = (\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)$ olmasından dolayı yeterince büyük n değerleri için $(\Phi^n(E, F))_i$ kümesinin çapının $\delta(\mathcal{A}^i)$ değerine yaklaşacağına dikkat edelim.

Örnek 3.3. Teorem 3.1’i kullanarak Örnek 1.2’de verdiğimiz çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sisteminin çekicilerinin çapları için alt ve üst sınırlar belirleyelim. E ve F kümeleri olarak sırasıyla Şekil 2’deki kare ve üçgeni alalım ve iterasyonun ikinci adımı, yani $n = 2$ için hesap yapalım. $\lambda = \max \{\lambda_k^{\alpha, \beta} \mid \alpha = 1, 2 \text{ ve } k = 1, 2, \dots, K^{\alpha, \beta}\} = \frac{3}{5}$ olduğundan $\frac{2\lambda^2}{1-\lambda} = \frac{9}{5}$ olur. $h_1(E, \Phi_1(E, F)) = \frac{41}{100}$ ve

$h_2(F, \Phi_2(E, F)) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ olduğundan $h_1 \times h_2((E, F), \Phi(E, F)) = \frac{41}{100}$ olur. Diğer taraftan büzülme katsayılarından faydalanılarak $\delta((\Phi^2(E, F))_1) = \frac{\sqrt{818}}{20}$ ve $\delta((\Phi^2(E, F))_2) = \frac{\sqrt{130}}{8}$ olduğu kolayca görülür (bkz. Şekil 4).



Şekil 4. $\{\varphi_k^{\alpha, \beta}\}$ çizge-yönlendirilmiş yinelemeli fonksiyon sisteminde kare ve üçgen iterasyonunun ikinci adımını. Burada $(\Phi^2(E, F))_i$, $i = 1, 2$ kümeleri için çapın alındığı uzaklıklar kesikli çizgiyle gösterilmiştir.

Bu durumda Teorem 3.1 ile

$$0.692 \approx -\frac{9}{5} \cdot \frac{41}{100} + \frac{\sqrt{818}}{20} \leq \delta(\mathcal{A}^1) \leq \frac{9}{10} \cdot \frac{41}{100} + \frac{\sqrt{818}}{20} \approx 2.168$$

$$0.687 \approx -\frac{9}{5} \cdot \frac{41}{100} + \frac{\sqrt{130}}{8} \leq \delta(\mathcal{A}^2) \leq \frac{9}{5} \cdot \frac{41}{100} + \frac{\sqrt{130}}{8} \approx 2.163$$

sınırları elde edilir.

Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ olduğundan yeterince büyük n değerleri için

$$|\delta(\mathcal{A}^i) - \delta((\Phi^n(E, F))_i)| \leq \frac{2\lambda^n}{1 - \lambda} h_1 \times h_2((E, F), \Phi(E, F))$$

eşitsizliğinin sağ tarafı sıfıra gidecektir. Böylece $(\Phi^n(E, F))_i$ kümesinin çapı $\delta(\mathcal{A}^i)$ değerine yaklaşacaktır. Dolayısıyla daha büyük n değerleri için $(\Phi^n(E, F))_i$ kümesinin çapı hesaplandığında \mathcal{A}^i kümesinin çapı için daha yakın sonuçlar elde edilecektir.

KAYNAKLAR

- [1] Hutchinson, JE. Fractals and self similarity. Indiana Univ Math J 1981; 30: 713-747.
- [2] Barnsley, M. Fractals Everywhere. Boston: Academic Press, 1993.
- [3] Dubuc S, Elqortobi A. Approximations of fractal sets. J Comput Appl Math 1990; 29: 79-89.
- [4] Hepting D, Prusinkiewicz P, Saupe D. Rendering methods for iterated function systems. In: Fractals in the Fundamental and Applied Sciences; 1991; H.-O. Peitgen, J. M. Henriques, L. Peneda (eds.), North-Holland, Amsterdam.

- [5] Dubuc S, Hamzaoui R. On the diameter of the attractor of an IFS. C R Math Rep Acad Sci. Canada, 1994.
- [6] Canright D. Estimating the spatial extent of attractors of iterated function systems. Computers and Graphics 1994; 18(2): 231-238.
- [7] Rice J. Spatial Bounding of Self-Affine Iterated Function System Attractor Sets. Proceedings of the Conference Graphics Interface 1996; 107-115.
- [8] Hart JC, DeFanti TA. Efficient antialiased rendering of 3-D linear fractals. Computer Graphics 1991; 25(4): 91-100.
- [9] Martyn T. The smallest enclosing disc of an affine IFS fractal. Fractals 2009; 17(3): 269-281.
- [10] Edgar G. Measure, Topology and Fractal Geometry. Springer, New York, 2008.
- [11] Mauldin RD, Williams SC. Hausdorff dimension in graph directed constructions. Trans Amer Math Soc 1988; 309(2):811–829.
- [12] Berger M, Cole M, Levy S. Geometry I. Springer, 2009.