**11. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN FONKSİYON KAVRAMI KAPSAMINDA PROBLEM ÇÖZME SÜRECİNDEKİ DÜŞÜNME YOLLARININ İNCELENMESİ**

**Doktora Tezi**

**Onur TOPRAK**

**Eskişehir 2019**

# 11. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN FONKSİYON KAVRAMI KAPSAMINDA PROBLEM ÇÖZME SÜRECİNDEKİ DÜŞÜNME YOLLARININ İNCELENMESİ

**Onur TOPRAK**

**DOKTORA TEZİ**

**Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı**

**Matematik Eğitimi Doktora Programı**

**Danışman: Prof. Dr. Tangül KABAEL**

**Eskişehir**

**Anadolu Üniversitesi**

**Eğitim Bilimleri Enstitüsü**

**Temmuz 2019**

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Onur TOPRAK'ın "11. Sınıf Öğrencilerinin Fonksiyon Kavramı Kapsamında Problem Çözme Sürecindeki Düşünme Yollarının İncelenmesi" başlıklı tezi 24.05.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Programında, Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

| | Unvanı-Adı Soyadı | İmza |
|---|---|---|
| Üye (Tez Danışmanı) | : Prof.Dr. Tangül KABAEL | ............... |
| Üye | : Prof.Dr. Ali ERSOY | ............... |
| Üye | : Doç.Dr. H.Bahadır YANIK | ............... |
| Üye | : Dr. Öğr. Üyesi Emre EV ÇİMEN | ............... |
| Üye | : Dr. Öğr. Üyesi Figen UYSAL | ............... |

Doç.Dr. Yasemin ERGENEKON
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Müdür Vekili

# ÖZET

11. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN FONKSİYON KAVRAMI KAPSAMINDA PROBLEM ÇÖZME SÜRECİNDEKİ DÜŞÜNME YOLLARININ İNCELENMESİ

Onur TOPRAK

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Temmuz 2019

Danışman: Prof. Dr. Tangül KABAEL

Problem çözme, okul matematiğinin merkezinde yer alan en temel becerilerden biri olmanın yanı sıra matematik eğitimi alanyazınının en çok odaklanılan çalışma alanlarından biridir. Problemin tanımı gereği, bir problemin çözümünde bulunan sonuçtan ziyade problem çözme sürecinde ortaya konulan strateji, düşünme yolu önem kazanır. Bu doğrultuda bu çalışmada öğrencilerin fonksiyon kavramı kapsamında düşünme yollarının ve düşünme yolları ile problem durumuna ilişkin bağlam arasında varsa ilişkinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Araştırmanın katılımcılarını akademik başarı ölçütüne göre seçilen 10, 11. sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Nitel olarak desenlenmiş çalışmada araştırmanın verileri klinik görüşme yoluyla toplanmış ve elde edilen veriler içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. Elde edilen verilerden düşünme yollarının yorumlanmasında DNR (Duality- Necessity- Repeated Reasoning) çerçevesi kullanılmıştır. Katılımcıların problem çözme sürecindeki düşünme yolları, fonksiyon kavramına dayanan problemlerde incelendiğinden DNR çerçevesindeki problem çözme stratejilerinin belirlenmesinde kovaryasyonel muhakeme kavramına dayanan zihinsel eylem düzeyleri kullanılmıştır.

**Anahtar Sözcükler:** Problem, Problem Çözme, Düşünme yolları, Problem Bağlamı.

## ABSTRACT

INVESTIGATION OF ELEVENTH GRADE STUDENTS' WAYS OF THINKING IN PROBLEM SOLVING PROCESS WITHIN THE CONCEPT OF FUNCTION



Onur TOPRAK

Department of Mathematics and Educational Sciences

Anadolu University, Graduate School of Education Sciences, July 2019

Supervisor: Prof. Dr. Tangül KABAEL



Problem solving is one of the most basic skills at the center of school mathematics, as well as one of the most focused areas of study in the mathematics education literature. By definition of the problem, rather than the result found in the solution of a problem, the strategy put forward in the problem solving process, the way of thinking becomes important. In this direction, in this study, it is aimed to investigations the ways of thinking and the relationship between the ways of thinking and the context of the problem situation, if any, within the concept of function. The participants of the study are 10 of $11^{th}$ grade students selected according to their academic success criteria. In the designed qualitative study, the data of the study were collected through clinical interview and the data obtained were analyzed using content analysis method. DNR (Duality-Necessity-Repeated Reasoning) framework was used in interpreting the ways of thinking from the data obtained. Since the ways of thinking of the participants in the problem solving process were examined in the problems based on the concept of function, mental action levels based on the concept of covariate reasoning were used in the determination of the problem solving strategies within the framework of DNR.



**Keywords:** Problem, Problem Solving, Ways of Thinkings, Context of the Problem Situation.

# TEŞEKKÜR

Matematik eğitimi, ülkelerin gelişiminde, kalkınmasında ve analitik düşünebilmesinde şüphesiz ki en değerli paylardan birine sahiptir. Matematik eğitiminin anlaşılmasında da problem çözmenin kritik bir önemi vardır. Düşünebilen ve düşündüğünü uygulamaya çalışan bir bireyin sadece matematikte değil hayatın her alanında problem çözebilmesi için problem çözme sürecine girmeye, bu süreci öğrenmeye ve devamında öğrendiklerini uygulayabilmesine ihtiyaç vardır. Öğretmenler olarak öğrencilerimizde problem çözmenin ışığını yakmayı başarabilirsek, onları yakılan bu ışığın sonundaki yolun aydınlık olduğuna ikna edebilirsek, kalkınmak ve nasıl düşünmesi gerektiğini bilen bireyler yetiştirmek adına ilk adımı atmış oluruz. Bu çabaya başlamadan önce ise onların ne düşündüğünü bilmeye, probleme nasıl yaklaştıklarını görmeye ve sürecin neresinde olduklarını anlamaya ihtiyacımız vardır. Bu düşünceden yola çıkıp araştırmada öğrencilerin problem çözme sürecinde düşünme yolları incelenmiştir.

Bu çalışmanın başlatılmasında, inşa edilmesinde ve sonuçlandırılmasında pek çok kişinin emeği, desteği ve katkısı olmuştur.

Bir öğretmen olarak hayata bakış açımı değiştiren, bu zorlu süreçte her daim yanımda olan, her düştüğümde beni bulunduğum yerden kaldıran, motivasyonumu kaybettiğimde desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen, yapabileceğimin en iyisini yapmam konusunda arkamda duran, bana inanan ve güvenen değerli tez danışmanım sayın Prof. Dr. Tangül KABAEL'e teşekkürü bir borç bilirim. Tez çalışmalarım, ders sürecim ve hatta doktora eğitimime başladığım ilk günden beri yaptığı rehberlik, verdiği emek ve sonsuz katkıları için minnettarım.

Doktora eğitimim boyunca dürüstlüğüyle, duruşuyla, öneri ve görüşleriyle ders dönemimde ve tez izlemelerimde tüm samimiyetiyle düşüncelerimin ifade ettiklerime dönüşmesini sağlayan, bana yol gösteren değerli hocam sayın Prof. Dr. Ali ERSOY'a tüm katkıları için teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme ve savunma sürecimde nezaketiyle, her daim ilgisiyle, iyi niyetiyle ve alan bilgisiyle beni destekleyen çok değerli hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Emre Ev ÇİMEN'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Birçok dersini aldığım, her dersinin gerektirdiklerini özveriyle yapmaya çalıştığım, tez önerimde ve savunmamda katkılarıyla, yaklaşımıyla bana yardımcı olan değerli hocam sayın Doç. Dr. H.Bahadır YANIK'a her şey için teşekkür ederim.

Tez savunmama verdiği destek, ilgi ve yapıcı eleştirileriyle bana katkısını esirgemeyen sayın hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Figen UYSAL'a teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimimde tanıştığım, ilgisini ve bilgisini benden hiçbir zaman esirgemeyen, kafamdaki her soru işaretini tek tek gideren ve bu yardım elini bana uzatmaktan hiçbir zaman bıkmayan zorlu süreci geriye baktığımda bana her daim gülümseterek hatırlatacak olan değerli arkadaşım Dr. Öğr. Üyesi Deniz EROĞLU'na tüm desteği için teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmamın çeşitli kısımlarında ne zaman kapısını çalsam hiçbir zaman beni geri çevirmeyen, her zaman bana yardımcı olmak için uğraşan çocukluk arkadaşım Rıfat Emre ÖZER'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Üniversitede tanıştığım, ders döneminin heyecanını, stresini beraber paylaştığım kıymetli arkadaşlarım Dr. Öğr. Üyesi Başak BARAK'a, Araş. Gör. Dr. Ayla Ata BARAN'a ve Araş. Gör. Dr. Osman BAĞDAT'a tüm paylaştıklarımız için teşekkürlerimi sunarım.

Aynı kurumda beraber çalıştığımız, tezimin yazım aşamasında gecesini gündüzüne katıp bana destek olan, yardım elini uzatmayı bir yaşam tarzı haline getirmiş her daim gülümsemesiyle hatırlayacağım değerli arkadaşım Erdem ŞENEL'e tüm katkıları için teşekkür ederim.

Canım ailem, derttaşlarım, tüm süreci beraber yaşadığımız kuzenim Damla BENLİ'ye, teyzem Yıldız BENLİ'ye ve abim Nuri BENLİ'ye her şey için tek tek teşekkür ederim. Sizler olmasanız bu kadar güçlü kalamazdım.

Hayatımın anlamı, bu günlere gelebilmemin sebebi, adeta benimle birlikte doktora yapmış kadar yorduğum, hakkını asla ödemeyeceğim biricik annem Ayşe Filiz TOPRAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. İyi ki varsın.

Onur TOPRAK
Eskişehir 2019

02/07/2019

## ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalardan bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Onur TOPRAK

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

## TABLOLAR DİZİNİ

**Sayfa**

# ŞEKİLLER DİZİNİ

**Sayfa**

## GÖRSELLER DİZİNİ

**Sayfa**

# SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

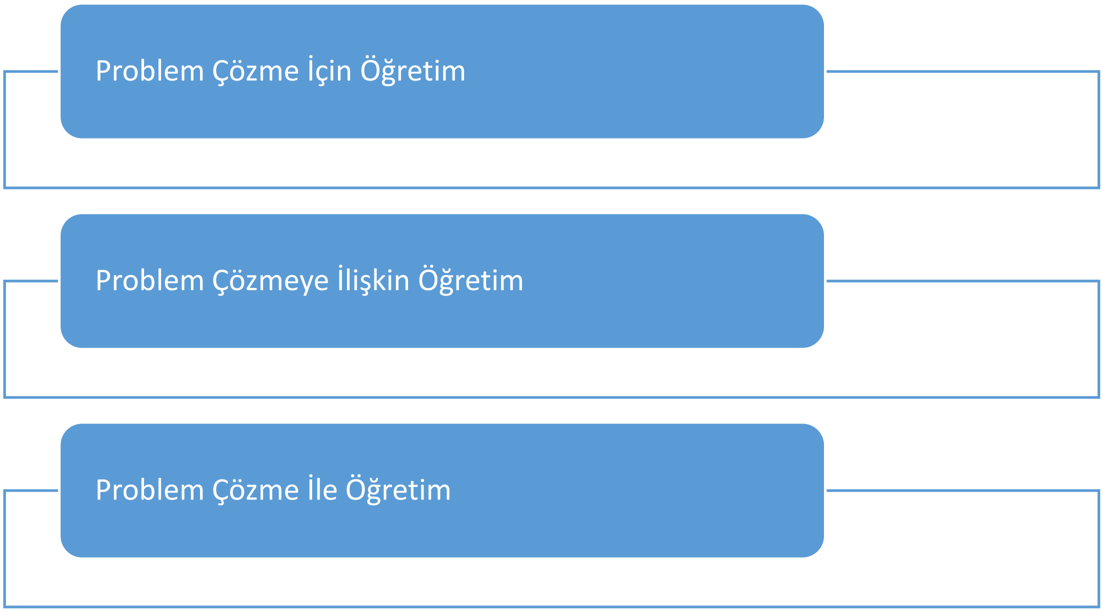
| | |
|---|---|
| DNR | : Duality, Neccessity and Repeated Reasoning. |
| NCTM | : National Council Teacher of Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi) |
| ALES | : Akademik Lisansüstü Eğitim Sınavı |
| SAT | : Scholastic Aptitude Test (Eğitim Yetenek Testi) |

# 1. GİRİŞ

İnsanlığın düşünce dünyasına yön veren onu biçimlendiren matematik, medeniyetlerin doğuşunda ve gelişiminde önemli rol oynamıştır. Matematiğin doğuşunun en önemli kaynağı ise insanın önce yakın çevresindekileri, daha sonra evrende olan bitenleri nicel özellikler yardımıyla algılama yeteneğine dayanmaktadır (Baki, 2006). Bu yetenek, bireylere günlük ihtiyaçlarını gidermede ve problem çözmede tarihler boyunca yardımcı olmuştur. Örneğin yerleşik hayata geçilmesiyle tarım yapmakta olan Mısırlılar, Nil nehri kıyılarından suların çekilmesiyle her yıl tarlalarını ölçme ihtiyacı hissetmişler ve geometri yapmak zorunda kalmışlardır. Bu doğal ortamda oluşan problemi çözmek için bir arayış içerisine girmişler, matematik yapmak durumunda kalmışlardır.

Matematik, kişilerin önüne bir tepsiyle konulmuş öğrenilmesi gereken soyut kavram veya becerilerin birikimi olmaktan ziyade zorlu ancak bir o kadar da anlamlı bir sürece girme ve o süreçte bilgiyi anlamlandırma, yapılandırma olarak düşünülmelidir. İnsanoğlu ham matematiksel bilgileri işleyip onları ortaya çıkan problemlerin çözümlerinde kullanmasaydı ne teknolojinin ne de bilimin gelişiminden söz edilebilirdi. Bu sebeple matematiği süreç içerisinde kullanmak, yani matematiği yapılanların ifade edilebileceği bir dil gibi araç olarak hayatlarımıza katmak ancak bu süreci yönetebileceğimiz beceri olan problem çözmenin önemini anlamaktan geçmektedir. Matematiğin anlaşılabilmesi için problem çözme sürecini öğrenmeye, problem çözme sürecini etkin olarak yürütebilmek içinse matematiği kullanabilmeye ihtiyaç vardır. Bu çıkarımlardan da anlaşılabileceği gibi matematik eğitiminin merkezinde problem çözme olmalıdır (Polya, 1945).

Matematik eğitiminde problem çözme hem bir araç hem de amaç olarak düşünülebilir (NCTM, 2000). Problem çözme, matematik eğitiminde gelişmesi gereken en temel matematiksel beceri olması yönü ile bir amaç, matematik öğrenme sürecinde kavramsal öğrenmeden işlemsel öğrenmeye kadar her türlü öğrenmenin gerçekleşebilmesi için de bir araçtır. Schroeder ve Lester, 1989 yılında yaptıkları araştırmada problem çözmenin matematik öğretimine üç yolla bütünleştirilebileceğini belirtmişlerdir.




**Şekil 1.1.** *Problem Çözme ve Matematik Öğretimi (Schroeder ve Lester, 1989)*

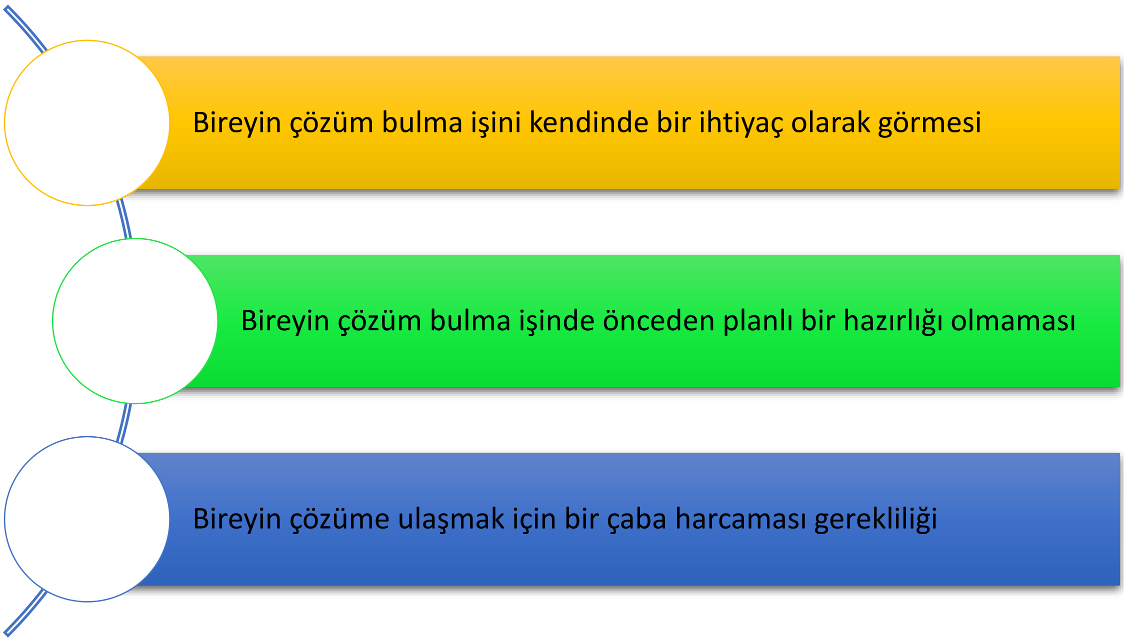
Problem Çözme İçin Öğretim: Bu yaklaşımda öğrenciye bir becerinin öğretilmesi ve sonrasında öğrencinin bu beceriyi kullanıp problem çözebilir hale gelmesi beklenir. Öğrenci, önce soyut kavramı öğrenmeye yönlendirilir ve öğrendiği kavrama dair uygulama amaçlı problem çözmeye yönelir. Problem çözme için öğretim yaklaşımının çözüme dair tek bir yol sunması ve alternatif çözüm yollarına açık olmaması durumlarından dolayı başarı olmadığı düşünülmektedir.

Problem Çözmeye İlişkin Öğretim: Bu yaklaşımda ise öğrenci problem çözmenin aşamalarını ve süreçte kullanılacak stratejileri öğrenir. Burada öğrenciye ne yapacağını söyleme durumlarında tereddüte düşülmesine rağmen problem çözme sürecinin öğretilmesi açısından fayda sağlayan bir yaklaşım olduğu düşünülebilir.

Problem Çözme Yoluyla Öğretim: Problem çözme için öğretim yaklaşımındaki sürecin terse işlediği bir yaklaşım olarak düşünülebilir. Bu yaklaşımda öğrenciler soyut kavramları öğrenebilmek için önce gerçek bağlam, problem veya modellerle karşılaşırlar ve bu kavramların anlamlarını kendileri oluştururlar. Bu yaklaşım, problem çözmenin matematikten ayrı bir parça gibi durmasının önüne geçmede fayda sağlayabilir (Akt. Van de Walle, 1994, s. 32).

Polya (1957) ve Branca (1980) da problem çözmenin matematiği öğrenmenin hedefi olduğunu iddia etmişlerdir. Problem çözmenin matematik müfredatlarının merkezinde oluşu, matematik eğitimcilerinin bu konunun üzerinde fazlasıyla durmasına sebep olmuştur. Çünkü matematiksel bilgiyi anlama ve bu bilgiler arasındaki ilişkiyi oluşturma problem çözme sürecinde meydana gelmektedir (Swings ve Peterson, 1988).

Problem çözmenin matematiğin doğuşu, gelişimi ve matematik eğitimindeki yeri aşikar iken 'problem' kavramının tanımı akla gelmektedir. Ne zaman matematiksel bir durum problem olarak nitelendirilebilir? Matematik eğitimindeki problem çözme alanyazınının öncüsü Polya (1957), kafa karıştırıcı bulunan veya birey tarafından çözümü açıkça görülemeyen zorlukları problem olarak tanımlamaktadır. Problemler ya da problem durumu, hayatın her anında karşımıza çıkmasının yanı sıra matematikle özdeşleştirilmiş ve matematik eğitiminde de önemli bir yere sahip olmuştur. Çünkü matematik, bireylere karşılaştıkları problem durumlarına karşı algoritma oluşturma yetisi kazandırabilir. Birey, kafasında doğrudan bir çözüm belirleyemiyor ve çözüm için duraksamadan devam edemiyorsa bu, o birey için bir problemdir (Lester, 1980). Lester, bir matematik problemini; bireyin kolayca çözüme ulaşması için gereken stratejiye sahip olmadığı, o problemi çözmek için çaba göstermesi gerektiği ve bireyde çözüm bulma isteği uyandıran bir görev olarak tanımlamaktadır. Benzer şekilde Van de Walle de problemin tanımını üç ana hatla belirlemiş ve bunları aşağıdaki gibi sıralamıştır (Van de Walle, 1994).

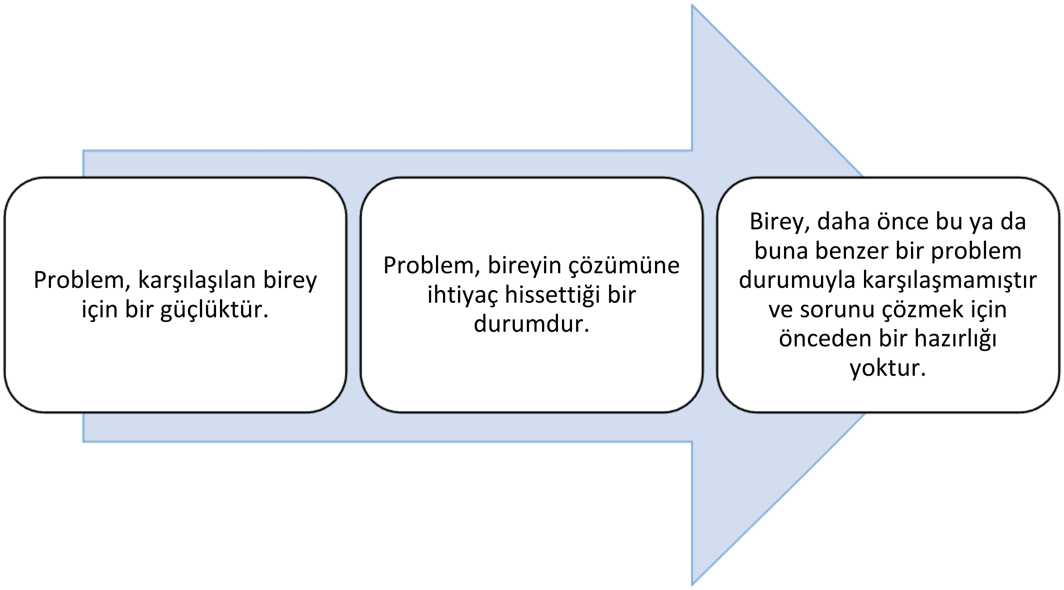



**Şekil 1.2.** *Ana hatlarıyla problem (Van de Walle, 1994, s.39)*

Problem çözme sürecine üst bilişi de katarak bir çerçeve oluşturan Schoenfeld ise 1994'de yaptığı problem tanımında ilk adımın bireyin durum karşısında çözüm elde etme isteğine yönelik çaba gösterdiği bir görev olarak belirlemiş ve ikinci adımın ise bireyin çözüme giden yolda kolayca ulaşabileceği matematiksel ifadelere sahip olmama durumu olarak tespit etmiştir. Buradan da anlaşılacağı gibi gerçek hayat durumuyla karşı karşıya kalan bireyin önce durumun farkına varması, onu bir problem olarak kabul etmesi ve sonrasında çözüme gidecek bir yol üretmesi gerekmektedir.

NCTM (National Council Teacher of Mathematics) Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi'ne (1991) göre gerçek hayat problemlerinin çözümü öğrenilemez ve yönlendirilemez. Yani problemle ilk kez karşılaşan bir birey problemin çözümünü bilmemektedir. Eğer bu problemin çözümünü bilseydi o zaman bu bir problem olmazdı. Bireyin burada bilmesi gereken şey problemin çözümünün nasıl yapılması gerektiğini aramak, problemi çözebilmek adına uygun adım ve stratejileri uygulama becerisidir (NCTM, 1991).

Problem kavramına ilişkin yapılmış tanımlamalardan da görüldüğü gibi bir durumun birey için problem oluşturması için bu durumdaki sorunun ya da benzer bir sorunun ortadan kaldırılmasına yönelik bir çözüm stratejisi geliştirmemiş olması gerekmektedir. Altun (2004) bu durumu aşağıdaki gibi betimlemiştir.




**Şekil 1.3.** *Sorunun bir problem olması durumu (Altun, 2004)*

Buradan da anlaşılmaktadır ki problem durumu kişiden kişiye değişkenlik gösterebilmektedir. İnsanların deneyimleri ve ihtiyaçları farklı olduğundan bir birey için problem olarak görülen durum bir başkası için problem olma özelliği taşımayabilir (Altun ve Memnun, 2008). Dolayısıyla problem çözmede problemin çözüm süreci ve bireyin bu süreçteki zihinsel eylemleri önem kazanmaktadır.

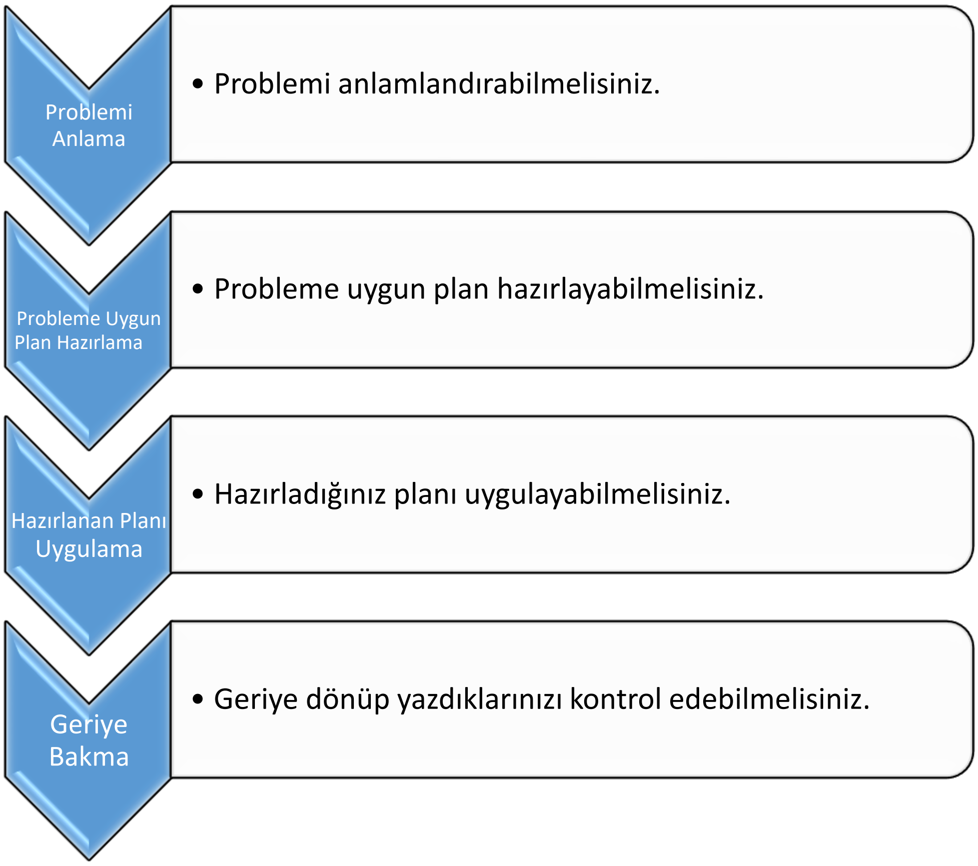
Bireyin problem durumu karşısında ne yapacağı, yaptığı şeylerin altında yatanlar, attığı adımların dayanakları, kullandığı yazılı ve sözlü matematiksel ifadeler ve çözüme ulaşmak için sarf ettiği efor bir süreç olarak problem çözme adı altında düşünülebilir. Yani problem çözme, çözüme ulaşmak için yapılan ya da yapılması gereken eylemler dizisidir (Cooper, 1986).

Matematik eğitiminde problem çözme hep merak edilen bir konu olmuş ve hakkında birçok araştırma yapılmıştır. Problem çözme sürecinin varlığı, bireyin ve öğreticinin süreçteki yerleri kabul edilmiş ancak bunları belirlemek pek de mümkün olmamıştır. Öğrencilerin problem çözme becerilerini değerlendirmek diğer becerileri değerlendirmeye göre oldukça zordur. NCTM'in 1989 yılında yayınlanan standartlar kitabında, problem çözme becerilerinin değerlendirilmesi; "öğrencilerin problem çözme sürecinde matematiği kullanma becerisini değerlendirmek, onların problemleri matematiksel denklemlere dönüştürmesi, problemleri çözmede farklı yöntemleri kullanması, problemleri çözmesi, sonuçları doğrulaması, açıklaması ve genellemesi ile mümkün olabilir" (s.209) biçiminde ifade edilmiştir (NCTM, 1989). Problem çözme sürecini değerlendirebilmek adına kişilerin farklı düşünme yollarına odaklanılması bir yöntem olarak düşünülebilir.

Öğrenciler matematik derslerinde problem çözmeyi öğrenerek, düşünme yollarını, sabır ve merak alışkanlıklarını ve benzer olmayan (farklı) durumlarla karşılaştıklarında kendilerine güven duygularını kazanmalıdır (NCTM, 2000). Yani bireyler problem çözme sürecine girdiklerinde sonuca ulaşabileceklerine dair önce kendilerine güven duymalıdırlar. Polya (1957) bu durumu problem çözmenin, sonuç bulmanın yanı sıra bir yol bulma, güçlükten kurtulma ve bir hedefe en makul yoldan ulaşmak için yapılabilecek hamlelerin bilinçli olarak araştırılması olduğunu ifade etmiştir. Bireylerin problem durumuyla karşılaştıklarında ne yaptıkları, yaptıklarını neye dayandırdıkları yani farklı düşünme yollarını nasıl ortaya koydukları problem çözme sürecini anlamlandırma açısından kayda değer bir veri olarak ön plana çıkmaktadır. Bu araştırmada da problem çözme sürecindeki önemi açıkça ortaya çıkan düşünme yollarına odaklanılmaktadır.

Matematik eğitimi alanyazını problem çözme odaklı olarak incelendiğinde matematik eğitimcilerinin de problem çözmeye verdikleri önem ortaya çıkmaktadır. Matematik eğitiminde problem çözme alanyazını en belirgin hatlarıyla 1945 yılında

Polya'nın çalışmalarıyla başlar. Polya (1945) Problem çözme süreci üzerine yazdığı "Nasıl çözmeli?" isimli kitabında süreci dört temel aşamaya ayırmış ve bunları aşağıdaki gibi belirlemiştir.




**Şekil 1.4.** *Problem çözme basamakları (Polya, 1945)*

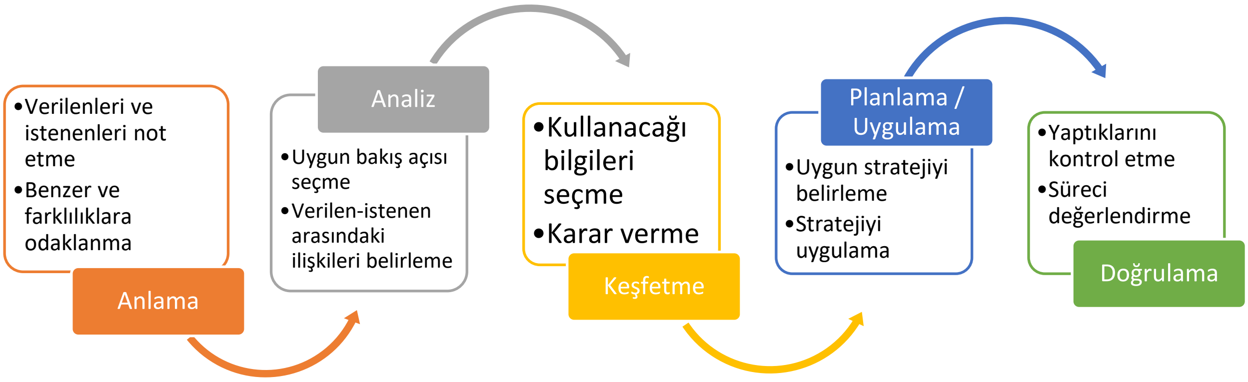
Polya, problemi anlama aşamasında 'bilinmeyen nedir? Veriler nelerdir? Koşul nedir? Koşulun çeşitli kısımlarını birbirinden ayırabiliyor musunuz?' gibi sorularla problemle ilgili farkındalık yaratma ve neye cevap aradığını bilme kısmına dikkat çekmektedir. Probleme uygun plan hazırlama kısmında ise 'probleme daha önce rastladınız mı? Ya da problemin biraz daha farklı biçimine rastladınız mı? Bilinmeyene bakın ve benzer bir bilinmeyen içeren bildik bir problem düşünmeye çalışın' gibi yönlendirmelerle veriler ile bilinmeyen arasındaki bağlantıyı kurmaya çalışmakta ve problemde çözüme ilişkin bir plan elde edebilmek gerektiğini vurgulamaktadır. Hazırlanan planı uygulama kısmında ise adımları tek tek kontrol etmenin önemine ve adımların doğru atıldığının kanıtlanması kısmına dikkat çekmiştir. Geriye bakma kısmında ise bireyin sonucu kontrol edebilmesi gerektiği, argümanı kontrol edebilmesi gerektiği sonucu daha farklı çıkarıp çıkaramayacağı ya da bu sonucu başka bir problemde kullanıp kullanamayacağı gibi sorularla süreci bireye inceletmektedir (Polya, 1945, s. xxxvi)

Problem çözme ve problem çözme öğretimini ilk öne süren isim Polya, bu durumu problem çözme stratejileriyle (heuristikler) desteklemiştir. Polya, problem çözme stratejilerini genel olarak; özel durumları inceleme, anahtar kelimelerden faydalanma, bağıntı bulma (örüntü arama), verilen değerlerden ilişkili durumları bulma, bir model veya diyagram oluşturma, sistematik bir liste oluşturma, tablo oluşturma, daha basit bir problemi çözerek sonucu arama, sembolik manipülasyon yapma, denklem kullanma, formül kullanma ve deneme yanılma yöntemini kullanma olarak isimlendirmiştir (örn. Fan ve Zhu, 2007; Herman, 2007; Polya, 1945; Van Dooren, Verschaffel, ve Onghena, 2003).

Polya (1945), kitabında problem çözmeyi tanımlarken bireyin süreç içerisinde problemi çözerken ne yaptığının farkına varabilmesi, durumu değerlendirebilmesi ve problem kaynağının ulaşılabilir olması gerektiğine vurgu yapmış ve problem çözmeye çalışan bir öğrencinin ne zaman ilerlediğini ne zaman çıkmaz bir sokağa girdiğini fark etmesinin süreçteki öneminden bahsetmiştir. Buradan da bireyin süreçteki durumun farkına varması, ne yaptığını biliyor olması, yani biliş sürecini yönetmesi gibi bakış açıları ortaya çıkmıştır. Bu durum problem çözme sürecinde üst biliş kavramının önem kazanmasına sebep olmuştur.

Üst biliş kavramını ilk olarak ortaya atan Flavell (1976) üst bilişi; bireyin bilişsel süreçleri, süreç içerisinde veya sonunda ortaya çıkan çıktıları veya herhangi bir durum hakkındaki bilgisi olarak tanımlamıştır. Genel anlamıyla üst biliş insanın algılama, hatırlama ve düşünme işinde yer alan zihinsel faaliyetlerin farkında olması ve bunları kontrol edebilmesi olarak tanımlanmaktadır (Hacker ve Dunlosky, 2003).

Üst biliş ve problem çözme üzerine matematik eğitiminde araştırmalar yapan önemli isimlerin başında Schoenfeld gelmektedir. Schoenfeld (1985), Polya'nın (1945) oluşturduğu problem çözme modelini eleştirerek, bu modelle ortaya çıkan durumun kişilerin problemlerin çözümünde zorlandıklarında heuristikleri (problem çözme stratejilerini) kullanmalarını sağlamanın amaçlandığını ve buna dayalı öğretim girişimlerinin de istenilen sonucu vermediğini belirtmiştir. Schoenfeld'e (1985) göre problem çözüm sürecine giren bir birey problemin çözümü ile ilgili neyi neden yaptığını biliyorsa bu durum kişinin süreçle ilgili bilinçlenmesine yardımcı olacak ve çözümüne dair sonuca ulaşmasını, muhakeme yapmasını sağlayacaktır. Schoenfeld (1985) üst biliş davranışlarını temel aldığı problem çözme sürecini beş ayrı basamağa ayırmıştır. Bunlar anlama, analiz, keşfetme, planlama/uygulama ve doğrulama basamaklarıdır.




**Şekil 1.5.** *Schoenfeld'in problem çözme süreci (1985)*

Scohenfeld, basamakları ise şu şekilde açıklamıştır.

Anlama: Bu basamakta bireyler problemde verilenleri ve kendilerinden istenilenleri tanımlayıp problemi kendi anladıkları şekilde ifade ederler. Probleme dair verilerden kendileri için önemli gördükleri yerleri not eder, daha önce çözmüş olduğu problemlerle benzerlik ve farklılıklarını bir arada düşünürler.

Analiz: Kişinin uygun bir bakış açısı seçmesi, problemdeki verileri matematiksel olarak yeniden formüle etmesi ve verilenlerle istenilenler arasındaki ilişkileri belirleyebilmesi analiz basamağını oluşturmaktadır.

Keşfetme: Birey, kendisini çözüm sürecine götürmeye yardım edecek bilgileri seçip çıkarmalı, bu süreçte bu bilgileri arayıp bulmalı, problemi çözebileceğine karar vermeli ve aksi halde başa dönmeli veya vazgeçmelidir. Bu basamak keşfetme basamağı olarak isimlendirilmiştir.

Planlama / Uygulama: Süreç içerisinde bireyin problemin çözümü için gerekli olan stratejiyi belirlediği aşama planlama aşamasıdır. Uygulama aşamasında ise planın doğru bir biçimde ve gerekli işlemleri hatasız yapılarak uygulanması gerekir.

Doğrulama: Süreçteki kişi, yaptığı matematiksel işlemleri kontrol etmeli, yaptıklarının mantıklı olup olmadığını düşünmeli ve süreci değerlendirip güvenilir bir sonuca ulaşmalıdır. Yani son kısımda kişinin süreçte yaptıklarını kontrol etmesi, doğrulaması beklenir.

Polya ile 1945 yılında başlayan 1985 yılından sonra Schoenfeld ile devam eden problem çözme alanında oldukça fazla sayıda araştırma yapıldığı görülmektedir. Bu araştırmaların bir kısmının problem çözme stratejilerine yani heuristiklere (örn. Van Dooren, Verschaffel, ve Onghena, 2003; Fan ve Zhu, 2007; Herman, 2007), bir kısmının problem kurma yoluyla problem çözmeye (örn. Ellerton, 1986; Silver ve Cai, 1996; Cai ve Hwans, 2002; Cai vd. 2013), başka bir kısmının modelleme ve temsiller yoluyla problem çözmeye (Janvier, 1987; Blum ve Niss, 1989; Cobb, Yackel ve Wood, 1992; Lesh ve Harel, 2003; Lesh ve Zawojewski, 2007; English, Lesh ve Fennewald, 2008; Harel, 2008a), diğer bir kısmının ise üst biliş ile problem çözmeye (De Corte ve Verschaffer, 1985; Schoenfeld, 1985; Wilson, 1998; Schraw, 1998; Swanson, 1999; Muir, Beswick ve Williamson, 2008) odaklandığı görülmektedir.

English, Lesh ve Fennewald (2008), problem çözme araştırmalarının son elli yıllık gelişimini inceleyerek, bu araştırma alanındaki eksiklikleri ve ileri sürülen önerilerin etkililiğini tartışmışlar, matematik eğitimcileri arasında kabul gören modellerin problem çözmeyi izole ettiğini ve problem çözme alanında etkili bir gelişme kaydedilemediğini iddia etmişlerdir. Onlara göre alanyazında problem çözme üzerine yapılan araştırmalar soyutlanmış konulardan oluşuyordu. Kavramların öğreniminin yavaş yavaş önem kazanmasıyla ve "hikaye problemleri" yoluyla problem çözme stratejileri ön plana çıkmıştır. Deneyimlerin de yardımıyla "novel" ya da "rutin olmayan problemler" yoluyla problem çözmenin daha rahat anlaşılabileceği düşüncesi hakim olmuştur. Problem denince de akla verilenlerden istenilene gitme durumu gelmiştir. English ve arkadaşlarına göre bu geçişin nasıl yapılacağı açık değildir. Bireyin, problem çözenin üretken yolları düşünebilmesi için problem durumunu matematiksel olarak yorumlaması gerekir. Yani döngüleri açıklayabilmeli, test edebilmeli, matematiksel olarak dönüştürebilmelidir (tanımlama, tamamlama, modife edebilme veya çeşitli kaynaklardaki kavramları arındırabilme gibi). Ayrıca bir konu veya hedef bazlı etkinlik problem haline dönüştürülürken problem çözenin verilen durumlarla ilgili daha üretken düşünme yolu geliştirmesi ihtiyacı doğar (Lesh ve Zawojewski, 2007). Yani bireyin problemi nasıl çözdüğü, nasıl yorumladığı, nasıl matematikleştirdiği, nicelikleri nasıl işleme soktuğu gibi birçok sorunun cevabı aranır. English, Lesh ve Fennewald (2008) problem çözme becerisinin problem çözme stratejilerini öğrenmekten çok matematiksel içeriğe, düşünme ve muhakeme sürecine, inançlara ve bağlam gibi faktörlere bağlı olduğunu ileri sürmektedirler.

Bu çalışmada problem çözme sürecindeki düşünme yollarına ve problem durumundaki bağlamın düşünme yollarıyla ilişkisine odaklanılmakta ve bu kapsamdaki incelemeler fonksiyon kavramına dayanan problemler yoluyla yapılmaktadır. Fonksiyon kavramına dayanan problemlerle yapılan çalışmaların bir kısmında fonksiyonun tanımına ve eşleme ilişkisine (örn: Vinner ve Dreyfus, 1989; Breidenbach vd., 1992; Oehrtman, Carlson ve Thompson, 2008), bir kısmının fonksiyon kavramının cebirsel temsiline (örn; Dubinsky ve Harel, 1992; Oehrtman vd., 2008), bir diğer kısmının fonksiyonun grafik temsiline (örn: Vinner ve Dreyfus, 1989; Bakar ve Tall 1992; Monk, 1992; Carlson, 1998), başka bir kısmının ise fonksiyonlardaki niceliksel ve kovaryasyonel ilişkilere odaklandıkları görülmektedir (Blanton ve Kaput, 2004; Waren, 2005; Rivera, 2007; Carlson ve ark., 2002; Carlson ve Oehrtman, 2005).

Problem çözme sürecindeki bir etken de problemin ilişkili olduğu bağlamdır. Eğitim alanında bağlamla ilgili çalışmalara bakıldığında ise araştırmaların bir kısmının bağlam ve matematik öğrenme alanlarına odaklandığı (Boaler, 1993; Halat, 2007; Yanık, 2017), bir kısmının kavram bilgisi ile bağlam bilgisi arasındaki ilişkilere odaklandığı (Hurst, 2007; Sáenz, 2009), bir diğer kısmının ise bağlama dayalı bir model geliştirmeye odaklandığı (Langrall, Nisbet ve Mooney, 2006; Langrall, Mooney ve Williams, 2005) görülmektedir. Problem çözmede düşünme yolları, fonksiyon kavramının öğretim programındaki önemi ve bağlamın öğrencilerin problem çözme süreçlerindeki rolü beraber düşünüldüğünde bu araştırma, hem düşünme yolları hem de problem durumunun ilişkili olduğu bağlamı birlikte ele almış olmasıyla önemli görülmekte ve önemli bir boşluğu doldurduğu düşünülmektedir.

## 1.1. Amaç

Bu araştırmanın amacı 11.sınıf öğrencilerinin fonksiyon kavramı kapsamında düşünme yollarının ve düşünme yolları ile problem durumuna ilişkin bağlam arasında varsa ilişkinin incelenmesidir. Bu genel amaç doğrultusunda aşağıdaki araştırma sorularına yanıt aranmaktadır.

1. 11.sınıf öğrencilerinin problem çözme sürecindeki düşünme yolları nasıldır?
2. Problem çözme sürecinde problemin bağlamı ile 11.sınıf öğrencilerinin düşünme yolları arasında bir ilişki varsa bu ilişki nasıldır?

## 1.2. Araştırmanın Önemi

Türkiye'de problem çözebilen ya da problem çözme sürecinde ne yapması gerektiğini bilen bireylere ihtiyacımız olduğu düşünüldüğünde bu süreci anlamak, yapılandırmak ve yönetmek için yapılacak çalışmalara ihtiyaç vardır. Matematik eğitiminin merkezinde problem çözme olmasından dolayı öğrencilerin süreç içerisinde neyi yapıp neyi yapamadıklarını görmek onların ne düşündüklerini anlamaktan geçmektedir (NCTM, 2000).

Problem çözme sürecinde öğrencilerin neyi, nasıl düşündüklerini ortaya koyan yapı taşlarından biri de sahip oldukları düşünme yollarıdır. Bir öğrencinin problem çözüm sürecine başladığı andan sonucunu bulana kadarki süreçte matematiksel kavram veya nesneleri kullanış şekli, kendini ifade ediş biçimini gösteren düşünme yolları, sonuçtan çok sürecin ön plana çıktığı kavramlar bütünü olarak düşünülebilir (Harel, 2008a).

Ortaöğretim düzeyindeki öğrencilerin soyut işlemler dönemine geçmesi ile birlikte problem çözme becerilerini kazanmış olmaları beklenir. Bu doğrultuda PISA'da (Programme for International Student Assessment) Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı'nda 11.Sınıf öğrencilerinin dahil olduğu 15 yaş grubu öğrencilerine uygulanır. Bilişsel ölçme alanlarından birisi matematik okuryazarlığı olan PISA'da ölçme gerçek yaşam problemleri aracılığı ile yapılır.

Düşünme yollarının nasıl olduğunu, ilişkileri nasıl ifade ettiğini gösterebilecek en temel kavramlardan biri de şüphesiz ki fonksiyondur. Alanyazında Carlson (1998) tarafından birleştirici bir kavram olarak ifade edilen fonksiyonun kavramsal gelişim sürecinin ilkokul yıllarından başlayarak yükseköğrenime kadar yayıldığı görülmektedir (Kabael, 2016). İlköğretim yıllarında fonksiyonun sembolik gösterimleri kullanılmıyor olsa da iki niceliğin birbirine göre değişimi önem kazanmaktadır. Bu değişimi o yıllarda kavrayabilmek yükseköğrenime kadar olan süreçte fonksiyonun farklı gösterimlerini kullanabilmekte ve kavramı ifade edebilmekte ön plana çıkmaktadır.

Matematiksel bilgilerin soyutlanmasında, matematik dilinin ifade edilmesinde fonksiyonun kavramını anlamlandırabilmek, içselleştirebilmek oldukça önemli görülmektedir (Kabael, 2016). Fonksiyon kavramına dayanan problemlerin çözümüm sürecinin fonksiyonel düşünme ve kovaryasyonel düşünme gibi pek çok düşünme biçimi ile desteklenmesi gerekmektedir. Diğer taraftan fonksiyon kavramında birbirine göre değişen iki niceliğin koordine edilmesinde öğrencilerin ortaya koyduğu bilişsel aktiviteler kovaryasyonel muhakeme olarak isimlendirilmektedir (Carlson ve arkadaşları, 2002). Öğrenciler nicelikler arasındaki ilişkiyi ve niceliklerin birbirlerine göre nasıl değiştiklerini ancak bu nicelikleri kavramsallaştırabildiklerinde algılayabilirler (Kabael, 2016). Niceliklerin kavramsallaştırılması da fonksiyon kavramını anlamlandırabilmekte ve bunun düşünme yollarına yansımasında oldukça önemlidir.

Matematik eğitiminde yapılan çalışmalarda farklı kültür, çevre, deneyim ya da yaşam biçimlerine sahip katılımcılar olduğu görülmektedir. Bu çalışmaların yapıldığı şartlar ve araştırmada bulunan katılımcıların o şartlara yakınlığının araştırmanın sonucunu etkileyeceği düşünülebilir. Bu duruma yönelik kavramların öğrenilmesinde ve öğrenilenlerin yansıtılmasında problemin bağlamının da etkili olduğuna dair çalışmalar da vardır (Hurst, 2007; Sáenz, 2009; Yanık, 2017). O yüzden problemin bağlamı ile öğrencilerin düşünme yolları arasında bir ilişki varsa bu ilişkinin nasıl olduğunu incelemek alanyazına bir katkıda bulunabilir.

Tüm bunlar birlikte düşünüldüğünde soyut işlemler dönemindeki katılımcıların matematiğin en önemli kavramlarından biri olan fonksiyon kavramı kapsamında düşünme yollarının incelenmesi ve bu düşünme yollarının varsa bağlamla nasıl bir ilişkisi olduğunun araştırılması önemli görülmektedir.

### 1.3. Araştırmanın Sınırlılıkları

Araştırmanın sınırlılıkları bu bölümde verilmiş ve aşağıdaki gibi sıralanmıştır.

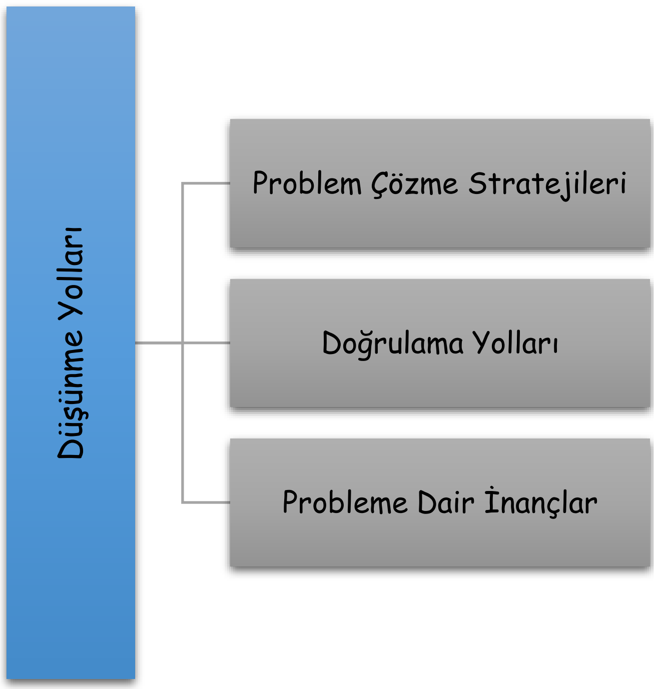
1. Araştırma, Eskişehir ilinin bir devlet okulunda bulunan 11.sınıf öğrencileriyle sınırlıdır.
2. Araştırmada katılımcıların düşünme yolları ortaöğretim müfredatının en temel kavramlarından biri olan fonksiyon kavramı kapsamında incelenmiştir.
3. Bu araştırma, problem çözme sürecindeki düşünme yolları ile sınırlı olup katılımcıların kavramsal, işlemsel öğrenme gibi farklı matematiksel çerçevelerindeki zihinsel eylemleri incelenmemektedir.

### 1.4. Kavramsal Çerçeve

Bu araştırmada 11.Sınıf öğrencilerinin fonksiyon kavramı kapsamında düşünme yolları Harel (2001) tarafından geliştirilen DNR (Duality - Necessity - Repeated Reasoning – İkililik – İhtiyaç – Tekrarlı Muhakeme) çerçevesinde incelenmiştir.

Harel tarafından ortaya atılan DNR temelli yapının amacı; öğrencilerin zihinsel ihtiyaçlarını karşılamada başarılı olmak için koşulları belirlemek, matematiksel düşünme ve anlamlandırma yollarını kazandırabilmek ve onlara öğrendikleri matematiği içselleştirebilmelerinde yardımcı olmaktır (Harel, 2007).

Harel'in geliştirdiği DNR çerçevesi, katılımcıların araştırma kapsamında belirlenen zihinsel eylemine yönelik düşünme yolları ya da anlama yollarına yoğunlaşabilmekte ya da düşünme yollarının alt bileşenleri olan problem çözme yaklaşımları, kanıt şemaları ya da matematik hakkındaki inançların derinlemesine incelenmesine de fırsat tanımaktadır (Harel, 2001). Bu araştırmada DNR çerçevesinin yalnızca düşünme yollarının derinlemesine incelenmesine odaklanılmıştır. Bu kapsamda; kanıt şemaları doğrulama yolları, matematik hakkındaki inançlar ise probleme dair inançlar kapsamında, problem çözme yaklaşımları ise problem çözme stratejileri olarak incelenmiştir.




**Şekil 1.6.** *Araştırmada düşünme yollarının incelenmesi*

Problem çözme sürecinde katılımcıların problemi anlamlandırabilmesi, kendine göre yorumlayabilmesi ve bildiklerini aktarabilmesi için DNR çerçevesi önemli bir araç olarak düşünülmektedir. DNR çerçevesini yorumlayabilmek adına düşünme yollarını problem çözme stratejileri, doğrulama yolları ve probleme dair inançlar kapsamında incelemek; katılımcıların hangi stratejiyi neden seçtiğini, seçtiği stratejiyi nasıl doğruladığını ve matematiksel problemlerin ilişkili olduğu kavramlara bakış açısını anlayabilmek için önemli görülmektedir. Onların problem çözme sürecinde nerede bulunduğunu belirleyebilmek, bu konumun geliştirebilmesi için anlamlı veriler sunabilir. Bu verileri düşünme yollarıyla ilişkilendirmede de problem çözme sürecinde DNR teorik çerçevesi araştırmada kullanılmıştır.

### 1.4.1. DNR teorik çerçevesi

DNR temelli matematik öğretimi ilk kez Harel tarafından 2001 yılında ortaya atılmıştır. DNR sistem matematikte; öğrenme, öğretme ve program boyutlarına odaklanan kavramsal bir çerçevedir.

DNR bir çerçeve olarak üç kategoride düşünülebilir.

1. Öncüller (DNR kavramının altında yatan açık varsayımlardır.)
2. Kavramlar (DNR belirleyicileri olarak adlandırılır.)
3. Öğretim İlkeleri (Öğretim yöntemlerinin öğrenme üzerindeki potansiyel etkisidir.)

İlk kategori olan öncüller kategorisi modelin altında yatan varsayımlar olup; matematiksel bilgi, öğrenme, öğretme ve ontoloji olmak üzere kendi içinde de dört kategoriye ayrılmaktadır. İkinci kategori bu öncüllere bağlı olarak tanımlanmış düşünme yolları ve anlama yolları olmak üzere ikiye ayrılan kavramlardır. Üçüncü kategori olan öğretimsel prensipler ise DNR öncüllerinin zorunlu kıldığı, deneysel çalışmalarla desteklenmiş ve DNR kavramları arasındaki ilişkileri ifade eden iddialardır (Harel, 2008a).

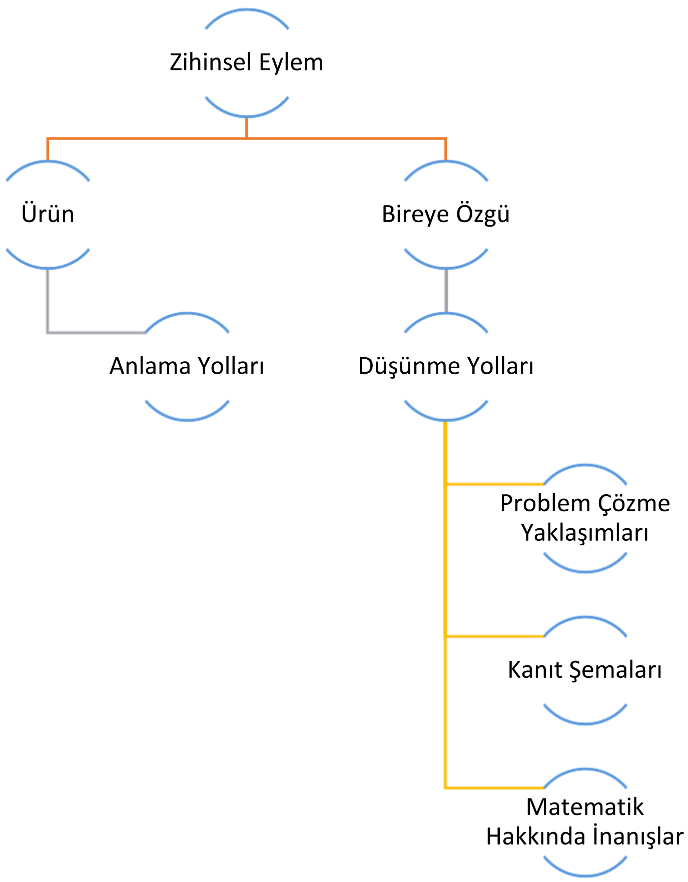
DNR, ismini Harel'in önerdiği kavramsal çerçevedeki, ikililik (duality), gereklilik (necessity) ve tekrarlı muhakeme (repeated reasoning) öğretim prensiplerinin ilk harflerinin birleştirilmesinden alır.

İkililik prensibi öğrencinin ne ürettiğini ve bu süreçte kullandığı zihinsel eylemlerle arasındaki bağı (anlama ve düşünme becerilerini) sorgular. Öğrencinin formülü görmeden önce ne düşündüğü, ondan ne anladığı ve formülü gördükten sonra ne hissettiği gibi zihinsel eylemlerinin bir deneysel kanıt şeması olarak incelenmesi bu süreçte önemli bir yer tutar (Harel, 2008a). İkililik prensibinde öğrenciler düşünme yollarını anlam üretmeye çalıştırarak geliştirirler ve ürettikleri anlamanın yolları sahip oldukları düşünme biçimleri tarafından belirlenir. Anlama yolu düşünme yolunun gelişmesine, düşünme yolu da anlama yolunun zenginleşmesine yol açar. Bu süreç birbirine bağlı olarak devam eder. Sonuç olarak düşünme ve anlama yolları ikililik prensibinin ortaya çıkmasına sebep olur (Harel, 2008a).

İhtiyaç prensibinde amaç öğrencinin ihtiyacı olan, ona yakın olan durumu ona gösterebilmektedir. Bilgi, gerçek bir hayat durumundan uzaklaştıkça öğrenci için yabancı kalmakta ve ihtiyaca yönelik olmamaktadır. Gerçek hayata yakın olmayan problemlerin öğrencilerin ilgisini çekmediğini öğretmenler çoğu zaman fark etmemektedir. Okullarda genellikle öğretmen ve öğrenci için en ortak bulunan (rutin) problemler çözülmektedir. Yani öğretmen için de öğrenci için de yaygın denilebilecek sorunlar üzerinde durulmaktadır. Ancak öğretmen için yabancı olan bir problemi öğrenci getirdiğinde ya da öğrenci için yabancı olan bir problemi öğretmen sorduğunda, son olarak da her ikisi için de yabancı bir problemle karşılaşıldığında zorlanılmaktadır. Çünkü o ana kadar bu denenmemiş bir yöntemdir. Oysaki farklı problemler üzerine daha önceden düşünüp bunun üzerine çalışılmış olsa düşünme ve anlama yolları da zenginleşecek ve iki taraf da yeni bakış açıları kazanmış olacaktır (Harel, 2008a). Sonuç olarak öğrenci öğrenmelerinde öğrencinin ihtiyacına göre öğretim yapmak gerekir. Ancak bu ihtiyaç ekonomik ve sosyal ihtiyaç değil zihinsel ihtiyaç olmalıdır.

Tekrarlı muhakeme prensibinde öğrencinin arzu edilen düşünme ve anlama yollarına nasıl ulaşabileceği tartışılır. Burada ön plana çıkan iki temel cevap deneyimler ve pratikler olmaktadır. Bireye bu süreçte pratiklerden yola çıkarak deneyim kazandırmak amaçlanmakta ve pratiklerin yeniden muhakeme edilmesiyle düşünme ve anlama yollarının geliştirilmesi düşünülmektedir (Harel, 2008a). Eğer anlama ve düşünme yolları gerçekten öğrencinin zihinsel ihtiyacına göre düzenlenebilirse öğrenci de bilgiyi kategorize edebilecek ve çok daha kalıcı bilgilere ulaşılabilecektir (Harel, 2007). Öğrenci tekrarlı muhakeme sürecinde yaptığı şeyi ifade edebilmeli ve sorgulama sürecine problem çözme esnasında mutlaka girmelidir. Öğrenciye sorgulamayı öğretmek onu sadece matematik alanında geliştirmeyip hayata dair farklı bir bakış açısı kazanmasına da yardımcı olmaktadır (Harel, 2008a).

DNR kavramsal çerçevesinin belirleyicileri zihinsel eylem (mental act), anlama yolları (ways of understanding) ve düşünme yolları (ways of thinking) olarak adlandırılan üçlemedir. Harel'e göre zihinsel eylem zihnimizde gerçekleşen eylemleri temsil eden terimdir (Harel, 2007). DNR temelli öğretime göre öğrencilerin zihinsel eylemlere eşit şekilde ihtiyaçları vardır. Zihinsel eylem yaşamın farklı yönlerinde yorumlama, problem çözme, açıklama, genelleme, araştırma, kanıtlama, ilişkilendirme ve sınıflama gibi ortak kullanılan becerilerin topluluğudur. Anlama yolları, zihinsel eylemin sonucu olan üründür, buna karşılık düşünme yolları ise zihinsel eylemin tekrarlı gözlenmesi ile elde edilen eylemin karakteristiğini gösteren birtakım kalıcı özelliklerdir (Harel, 2008a). Bireylerin düşünme yollarını anlamlandırmak için öncelikle ilişkili olduğu zihinsel eylemi belirlemek gerekir. Bu çalışmada problem çözme, zihinsel eylem olarak kabul edilecek olup düşünme yolları bu eylem üzerinden tartışılmıştır.




**Şekil 1.7.** *Zihinsel eylem, anlama yolları ve düşünme yolları üçlemesi ile düşünme yollarının alt kategorileri (Harel, 2008a)*

Bir matematik programının ve öğretiminin matematiksel bütünlüğünün sağlanması için anlama yollarını ve düşünme yollarını içinde barındırması gerekir. Düşünme yolları üç alt kümeye ayrılır ve bunlar; bireylerin problem çözme yaklaşımları, kanıt şemaları ve matematikle ilgili inançlarıdır. Bu araştırmada düşünme yollarını oluşturan bu üç temel unsur üzerinde durulmuştur.

Problem çözme yaklaşımları; yorumlama ve genellemenin yanı sıra çıkarım yapma, düşünceyi yapılandırma, sembolleştirme ve ispat etmeyi de içinde bulundurur. Problem çözme düşüncesi çözüme tek başına ulaşma düşünüldüğünde bir anlama becerisidir ancak diğer taraftan daha basit bir problem arama kısmı ele alındığında da bir düşünme becerisidir (Harel, 2007).

Kanıt şemaları; kanıt merkezli düşünmeyi problem çözme sürecinde içinde bulunduran matematiksel bir aktivitedir (Harel, 2007). Kanıt merkezli düşünmede bir iddia ile ilgili birey kendi şüphelerini ortadan kaldırmaya çalışabileceği gibi başkalarının şüphelerini de ortadan kaldırmaya çalışabilir (Harel ve Sowder, 1998). Bunlardan yola çıkılırsa bu iki davranış biçimi de bir karakteristik özelliktir ve bu da kanıt şemalarının bir düşünme yolu olduğunu ortaya koyar (Harel, 2007).

Harel ve Sowder (1998) kanıtlama zihinsel eylemi üzerine yaptıkları çalışmanın sonucunda kanıtlama, kanıt ve kanıt şemaları kavramlarını içeren bir üçleme ortaya çıkarmışlardır. Bu üçlemede kanıtlama eylemi sonucunda ortaya çıkan bilişsel ürün kanıt, kanıtlama eyleminin taşıdığı bilişsel özelikler ise kanıt şeması olarak isimlendirilmiştir. Bu çalışmada, kanıtlama eyleminden daha çok kanıtlama şemaları (öğrencinin sonucu doğrulama yolları) üzerinde durulacaktır. Bireyin sonucu elde ederken ya da elde ettikten sonra çözümünü savunması, kullandığı problem çözme yaklaşımının altında yatanlar, verilenlerden hedefe gitme sürecindeki davranışlarının nedenleri üzerinde durulacaktır.

Harel ve Sowder 1998 yılında kanıt şemaları üzerine yaptıkları çalışmada katılımcıları üç kategoriye ayırmış ve bunları aşağıdaki gibi isimlendirmişlerdir.

- Dışsal Kanıt Şeması,
- Deneysel Kanıt Şeması,
- Analitik Kanıt Şeması

Dışsal kanıt şeması; öğrencilerin kendilerini ya da başkalarını ikna etmek için dış kaynakları kullanması şeklinde açıklanmaktadır.

Deneysel kanıt şemasında sınıflandırılan öğrenciler doğrudan ölçüm miktarlarını, sayısal hesaplamaları, örnek ya da figürleri veya belirli sayıları cebirsel ifadelerde yerine koyarak matematiksel ifadeleri deneme-yanılma yöntemiyle doğrularlar (Harel ve Sowder, 1998).

Analitik kanıt şemasına sahip öğrencilerin varsayımları mantıksal çıkarımlara dayanmaktadır (Harel ve Sowder, 1998). Bu şemadaki doğrulamalar ve argümanlar formal matematiksel kanıt olarak sınıflandırılabilir. Problem çözme ve kanıt temelli düşünme matematiksel bir düşünme yoludur ve matematik yapmaya yararlar ancak bunları yapmak için matematikle ilgili bir bakış açısına sahip olmak gereklidir. İşte bu bakış açıları da bireylerin matematik hakkındaki inançlarını gözler önüne serer (Harel, 2007).

Matematikle ilgili inançlar, bireyin matematiğe olan bakış açısını içerir. Yani matematiği nasıl gördüğü, ona ne ifade ettiği, oradaki bilginin ne olduğunu ya da ne olmadığını, nasıl ortaya çıktığını düşünmesi ve bunu ifade etmesi, göstermesi bireyin inançlarıyla ilgili fikir verir (Harel, 2008a). Matematiğin entelektüel ya da pratik yararları hakkındaki bireyin düşünceleri, yani bireyin matematiğe bakış açısı onun matematik hakkındaki inançlarını oluşturur.

Bu araştırmada, DNR çerçevesinde öğrencilerin düşünme yollarının bilişsel bir bileşeni olan problem çözme stratejileri, çalışma için seçilen problemler fonksiyon kavramına dayandığından öğrencilerin kovaryasyonel muhakeme yapma becerileri olarak düşünülmüştür.

### 1.4.2. Problem çözme stratejilerinin yorumlanmasında kullanılan teorik çerçeve: Kovaryasyonel muhakeme

Soyut işlemler dönemine giren bireylerde kazanılması beklenen aynı zamanda ortaöğretim matematik programının en temel kavramlarından biri olan fonksiyonun yapı taşlarından biri birbirine göre değişen niceliklerin arasındaki değişim ilişkisi yani kovaryasyonel düşünmedir. Matematik alanyazınında sık sık birlikte ve ayrı ayrı kullanımlarına tanıklık ettiğimiz fonksiyonel düşünme ile kovaryasyonel düşünme arasında net olarak yapılan bir ayrım olmaması dikkat çekmektedir. Carlson (1998) ve Thompson'a (1994a) göre değişkenlerin birbirine göre değişimini tanımak ve bunları yorumlamak kovaryasyonel düşünme olarak kabul edilir ve kovaryasyonel muhakeme yapabilmek fonksiyon kavramının öğrenilmesinde bir önkoşuldur. Fonksiyonel düşünme ise değişen nicelikler arasındaki ilişkilerin genellenmesi, bu ilişkilerin sembol, tablo ya da grafikler gibi farklı temsillerle gösterilmesi ve fonksiyon kavramının bu çeşitli temsillerle analiz edilmesi olarak tanımlanır (Blanton ve Kaput, 2011). Chazan da (1996) kovaryasyonel düşünmeyi biri diğerine bağlı olarak değişen iki ya da daha fazla nicelik arasındaki fonksiyonel ilişkiyi görebilme olarak tanımlamaktadır. Becker ve Rivera (2005) ve Usiskin de (1998) kovaryasyonel olarak düşünüp genelleme yapabilen bir bireyin, değişken kavramını sadece bir bilinmeyen olarak kullanmanın ötesinde fonksiyonel bir ilişki olarak görüp yorumlayabildiğini ifade etmişlerdir.

Kovaryasyonel düşünmede de fonksiyonel düşünmede de öğrencilerin ilişkileri görüp değerlendirmelerini analiz etmek için değişim kavramına nasıl odaklandıkları ön plana çıkmaktadır. Genel anlamda değişim, araştırmacılar tarafından değişen büyüklükler arasındaki matematiksel ilişkilerin anlaşılması olarak tanımlanmaktadır (Carlson, Larsen ve Lesh, 2003; Carlson ve Oehrtman, 2005; Kaput, 1994; Saldanha ve Thompson, 1998; Thompson, 1994a).

İki niceliğin eş zamanlı değişimini içeren durumları öğrencilerin yorumlayabilmeleri ve değişkenler arasında ilişki kurabilmeleri kovaryasyonel düşünme yeteneklerinin ortaya çıkması için önemli bir yere sahiptir (Carlson vd., 2002). Yapılan araştırmaların sonucunda, öğrencilerin iki niceliğin eş zamanlı değişimini içinde bulunduran durumları keşfetmeye başlarken, değişenlerden birinde olan değişimin diğerine nasıl bir etki edeceğine odaklanmaya ihtiyaç duymadıkları tespit edilmiştir (Carlson, 1998, Thompson, 1994a, 1994b). Kovaryasyonel düşünmede her bir girdi yani bağımsız değişken için belirli bir düzeni saptayıp ona karşılık gelen bir çıktı yani bağımlı değişkeni bulmaktan öte tüm girdi ve çıktıların eş zamanlı olarak nasıl değiştiğini düşünmek öğrencileri en çok zorlayan kısımlardan biri olarak ön plana çıkmaktadır (Carlson ve Oehrtman, 2005).

Carlson ve arkadaşları (2002) kovaryasyonel muhakeme düzeylerini zihinsel faaliyet ve davranışlarla birlikte belirtilen tablodaki gibi sınıflandırmışlardır.

**Tablo 1.1**. *Kovaryasyon Çerçevesindeki Zihinsel Eylemler (Carlson ve ark., 2002, syf. 357)*

| Zihinsel Eylem | Zihinsel Eylemin Açıklaması | Ortaya Koyulan Davranışlar |
|---|---|---|
| **Zihinsel Eylem 1** | Bir değişkenin değerini diğer değişkendeki değişimle birlikte koordine etme/ayarlama. | - Eksenleri iki değişkenin birbiriyle ilişkisine uygun olarak sözel biçimde ifade etme (y, x'teki değişimlerle birlikte değişiyor şeklinde) |
| **Zihinsel Eylem 2** | Bir değişkendeki değişimin yönünü diğer değişkendeki değişimle birlikte koordine etme. | - Artan bir doğrusal fonksiyon grafiği oluşturmak.<br>- Bağımsız değişkendeki değişime odaklanırken bağımlı değişkendeki değişimin yönünün farkında olduğunu sözel olarak ifade etme. |

**Tablo 1.1.** (Devam) *Kovaryasyon Çerçevesindeki Zihinsel Eylemler (Carlson ve ark., 2002, syf. 357)*

| Zihinsel Eylem | Zihinsel Eylemin Açıklaması | Ortaya Koyulan Davranışlar |
|---|---|---|
| **Zihinsel Eylem 3** | Bir değişkendeki değişim miktarını diğer değişkendeki değişime göre koordine etme. | - Noktaları işaretlemek, sekant doğrularını yapılandırabilmek.<br>- Bağımsız değişkendeki değişime odaklanırken bağımlı değişkendeki değişimin yönünün farkında olduğunu sözel olarak ifade etme. |
| **Zihinsel Eylem 4** | Fonksiyonun ortalama değişim oranını, girdilerdeki yani bağımsız değişkendeki değişimin artışıyla birlikte koordine etme. | - Tanım kümesi için birbirine bitişik sekant doğruları oluşturmak<br>- Bağımsız değişkendeki artış miktarlarına odaklanırken, bağımsız değişkene göre bağımlı değişkendeki değişim oranının farkında olduğunu sözel olarak ifade etme. |
| **Zihinsel Eylem 5** | Fonksiyonun anlık değişim oranıyla, fonksiyonun tanım kümesinin tamamı için bağımsız değişkendeki sürekli değişimi koordine etme. | - Konveks veya konkavlık değişimlerinin açık şekilde gösterimini içeren düzgün bir eğri yapılandırmak.<br>- Fonksiyonun tanım kümesinin tamamında değişim oranındaki anlık değişimlerin farkında olduğunu sözel olarak ifade etme. (konveks veya konkavlığın yönü, büküm noktalarını belirtme gibi) |

Carlson ve arkadaşlarına (2002) göre bireyler zihinsel eylemlerin tamamını kullanmaya ihtiyaç duymayacakları gibi, problemin durumuna göre farklı zihinsel eylem gerektiren davranışları da sergileyebilirler. Carlson ve arkadaşlarına (2002) göre aynı zamanda değişkenlerin birbirlerine göre nasıl değiştiğini anlamak ve bir değişkendeki değişim durumunu, diğer değişkenle birlikte koordine edebilmek pek çok farklı düşünme yolu içerebilmektedir. Bu sebeple de bu araştırmada öğrencilerin DNR çerçevesindeki problem çözme zihinsel eyleminin bir alt bileşeni olan düşünme yollarına ait problem çözme stratejileri Carlson ve diğerleri (2002) tarafından oluşturulan kovaryasyonel eylem düzeyleri kapsamında incelenmiştir.

Elde edilen veriler, Carlson vd.'nin (2002) kovaryasyonel ilişki üzerine oluşturduğu "Kovaryasyonel Çerçevenin Zihinsel Eylemleri (Mental Actions of the Covariation

Framework)” çerçevesi göz önüne alınarak öğrencilerin kovaryasyonel düşünme düzeyleri kategorize edilmeye çalışılmıştır. Carlson vd. (2002) yüksek başarılı analiz dersi üniversite öğrencileriyle türev konusu üzerine yaptığı çalışmasında 5 kovaryasyonel düzeyi belirlemiş ve katılımcıları bu düzeyler içerisinde incelemiştir. Bu çalışma ise 11.sınıf öğrencileriyle yapıldığından ve kullanılan bağlam farklı olduğundan 3 temel düzeye indirgenmiş ve ortaya çıkan düzey ve davranışlar tabloda gösterildiği gibi belirlenmeye çalışılmıştır.

**Tablo 1.2.** *Kovaryasyonel Düşünme Düzeyleri*

| Kovaryasyonel Düşünme Düzeyleri | |
|---|---|
| **Zihinsel Eylem 1 Düzeyi** | *Davranışlar* |
| **Bir değişkenin varlığının problemdeki diğer değişken ya da değişkenlerin varlığına etki edebileceğinin farkında olunması durumu** | • Bir veri setinin/değişkenlerin sonuçlarını diğer veriler/değişkenlerle birlikte düşünüp onlara olan etkisinin sözel ifadesini belirtme.<br>• İki değişkenin farklı değerlerinde ortaya çıkan sonuçları ilişkilendirme (temel olarak). |
| **Zihinsel Eylem 2 Düzeyi** | *Davranışlar* |
| **Birden fazla değişkenin aralarındaki değişimi yönleriyle birlikte koordine etme durumu** | • Bir veri setinin/değişkenlerin sonuçlarını diğer veriler/değişkenlerle birlikte düşünüp onlara olan etkisini yönüyle birlikte kullanabilme.<br>• İki değişkenin farklı değerlerindeki ilişkiyi anlamlı değerler için kullanma/ilişkilendirme. |
| **Zihinsel Eylem 3 Düzeyi** | *Davranışlar* |
| **Bir değişkendeki değişim miktarını diğer değişken/değişkenlere göre koordine etme durumu** | • Bağımsız değişkendeki değişimi yönüyle birlikte, belirli sınırlar belirleyip bağımsız değişkene olan etkisini sayı/sembol kullanarak ifade etme.<br>• Değişkenler için kullanılan sayı/sembolleri manipüle etme. |

Kullanılan problemlerden ilki olan “futbol” sorusunda öğrencilerin bir takımın yaptığı maçların diğer takımlara olan etkisini ve bu etkinin yönünü kovaryasyonel muhakeme yaparak belirlemeleri beklenmiş, yaptıklarını nasıl doğruladıkları gözlenmiştir. Bu problemde bağlamın düşünme yolları ile ilişkisi incelenmiştir.

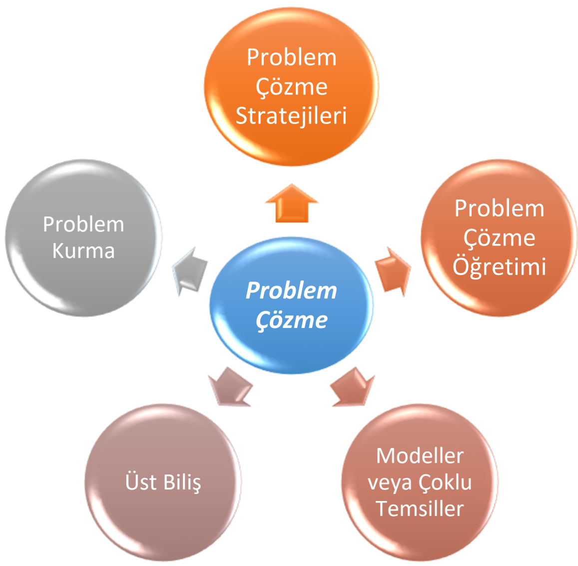
İkinci problem olan “tişört” sorusuna öğrencilerin bağımlı ve bağımsız değişkeni belirlemeleri, onların birbiriyle olan ilişkilerini ifade edebilmeleri ve bu bilgileri fonksiyonun parçalı yapısından faydalanıp belirli sınırlarla beraber düşünme yollarını birer öneri halinde sunmaları beklenmiştir.

İkinci görüşmenin ilk problemi olan “karo” sorusunda öğrencilerin görsel/sayısal stratejilerle değişken kullanıp bir genelleme yapabilmeleri, değişimdeki artış miktarlarını koordine edebilmeleri ve kullandığı stratejileri doğrulamaları hedeflenmiştir.

İkinci görüşmenin son probleminde ise öğrencilerin birden fazla değişken kullanabilmeleri ve onların birbirleriyle olan ilişkilerini kovaryasyonel muhakeme yaparak yönleriyle beraber ifade edebilmeleri hedeflenmiştir.

## 1.5. İlişkili Alanyazın

Matematik eğitiminde problem çözme alanında çok fazla çalışma yapıldığı görülmektedir. Bu yapılan çalışmalar benzerliklerine göre sınıflandırıldığında araştırmaların problem çözme stratejilerine, problem çözmenin öğretimine, problem kurma yoluyla problem çözmeye, modelleme ve çoklu temsiller yoluyla problem çözmeye ve üst biliş ile problem çözmeye genel hatlarıyla ayrıldığı belirlenmiştir.




**Şekil 1.8.** *Problem çözme ile ilgili yapılan araştırmaların sınıflandırılması*

Matematik eğitiminde problem çözme üzerine araştırmalar Polya'nın 1945 yılında yayımladığı "How to solve it" kitabıyla önem kazanmış ve merak edilen bir konu haline gelmiştir. İlerleyen yıllarda Polya'nın problem çözme adımları ve problem çözme stratejileri üzerine çeşitli araştırmalar yapılmıştır (örn. Rott, 2012; Fan ve Zhu, 2007; Charles ve Lester, 1984; Jiang ve Chua, 2010; Harel, 2008b). Bunlara dayanarak problem çözme stratejilerini; özel durumları inceleme, anahtar kelimelerden faydalanma, bağıntı bulma (örüntü arama), verilen değerlerden ilişkili durumları bulma, bir model veya diyagram oluşturma, sistematik bir liste oluşturma, tablo oluşturma, daha basit bir problemi çözerek sonucu arama, sembolik manipülasyon yapma, denklem kullanma, formül kullanma ve deneme yanılma yöntemini kullanma olarak sıralayabiliriz.

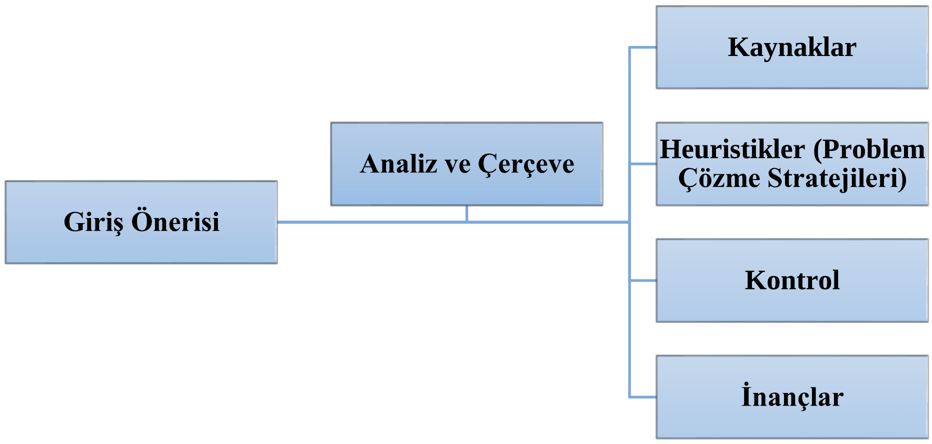
Özel durumları inceleme stratejisinde problem çözülürken problemle ilgili özel durumlar incelenebilir ya da özel değerler atanarak sonuca gidilebilir (Rott, 2012). Anahtar kelimelerden faydalanma stratejisinde birey problem durumunda verilen kelimelerden kendisi için önemli olanları arar ve çözümle ilgili bir yol bulmaya çalışır (Fan ve Zhu, 2007). Bağıntı bulma stratejisinde birey problem durumundaki verilerden yola çıkarak bir örüntü arar, veriler arasındaki ilişkiden bir genellemeye ulaşmaya çalışır (Fan ve Zhu, 2007). Verilen değerlerden ilişkili durumları bulma stratejisinde birey problem durumundaki nicelikler arasındaki ilişkileri inceleyerek bir çıkarımda bulunma yoluna gitmeyi amaçlar (Harel, 2008a). Bir model veya diyagram oluşturma stratejisinde birey bir şekil, model veya diyagram yardımıyla sonuca gitmeyi hedefler (Jiang ve Chua, 2010). Sistematik bir liste oluşturma stratejisinde problemle ilgili verilenler düzenlenir ve bilgilerin organize edilebilmesi için sistematik bir liste oluşturulur (Charles ve Lester, 1984). Tablo oluşturma stratejisinde problemin çözümünde tablo kullanılır ve veriler organize edilmiş olur (Charles ve Lester, 1984). Daha basit olanı çözerek sonucu arama stratejisinde birey daha zor bir problemle karşı karşıya olduğunu düşünerek problem durumunu değiştirmeden problemde geçen daha kompleks sayılar ya da durumlar yerine daha kolay sayı veya durumlar kullanarak çözüme gider. Böylelikle problemin basit bir temsilinin çözümünü yaparak kompleks olarak düşündüğü problemi anlamaya çalışır (Fan ve Zhu, 2007). Sembolik manipülasyon yapma stratejisinde ise problem durumunda verilen niceliklere sembol atanır ve oluşturulan cebirsel ifadeler çözülmeye çalışılır (Herman, 2007). Denklem kullanma stratejisinde problemde verilen bilinmeyen nicelikler yerine semboller değişken olarak atanarak problem çözülmeye çalışılır (Polya, 1945). Formül kullanma stratejisinde birey bu yöntemi bir araç olarak görür ve bildiği bir formülü kullanarak çözüme gitmeye çalışır (Polya,1945). Deneme yanılma yöntemini kullanma stratejisinde ise birey belirlediği değerleri (nicelikleri) kullanarak yanlış olduğunu bildiği çözümlere gider ve buradan deneyerek doğru sonuca ulaşmaya çalışır (Ishida, 2002). Problem çözmede kullanılan stratejiler tüm araştırmalarda ortak olarak önemli veriler temsil etmektedir. Katılımcılar kullandıkları, seçtikleri stratejilerle sahip oldukları düşünme yollarına dair ipuçlarını ortaya koymaktadır. Bu sahip olunan problem çözme stratejilerini belirlemek de onları geliştirmek için önemli görülmektedir.

Problem çözmenin öğretimi üzerine yapılan araştırmalarda gerçekçi matematiksel modellemenin kullanımı, bireylerin tutum ve inançlarının problem çözmedeki etkisi, matematiksel uygulama problemlerini kullanarak problem çözme ve öğrencilerin verdiği yazılı cevaplardan bilişsel süreçlerinin nasıl anlaşılabileceği gibi öğretim modelleri üzerinde durulmuş ve problem çözme süreci geliştirilmeye çalışılmıştır (örn: Ford, 1994; De Corte ve Vershaffel 1985; Higgins, 1997; Vershaffel ve diğerleri, 1997; Holton vd., 1999; Asman ve Markowitz, 2001).

Problem kurma ile problem çözme üzerine yapılan araştırmalara bakıldığında ise problem kurma, bir deneyimden yola çıkarak bir problem yaratma ya da verilen bir problemden başka bir problem üretme olarak tanımlanmış (Silver, 1993'den Akt: Stoyanova, 2003, s. 33) ve Cai de problem kurmanın; matematiksel keşfin bir anahtarı olduğunu aynı zamanda probleme çözüm bulmaktan daha değerli olduğunu belirtmiştir (Cai, 2003). Yapılan çalışmalarda problem kurmayla problem çözme süreçleri arasındaki ilişkiler incelenmiş ve problem kurma becerilerinin gelişimiyle problem çözme sürecinin anlamlandırılması genel olarak hedeflenmiştir (örn. Ellerton, 1986; Silver ve Cai, 1996; Cai ve Hwans, 2002; Cai vd. 2013).

Modelleme üzerine de alanyazında çeşitli araştırmalar yapılmış ve özellikle de problem çözme stratejileriyle birlikte düşünüldüğünde problem çözme sürecinde açıklayıcı bir yöntem olduğu belirtilmiştir (örn. English, Lesh ve Fennewald (2008); Lesh ve Zawojewski, 2007; Lesh ve Harel,2003). English, Lesh ve Fennewald (2008) da kavram gelişimi ve problem çözme becerisinin arasındaki ilişkinin açık olmadığını ve bunun modelleme yoluyla daha kolay bir hale gelebileceğini iddia etmektedirler. Yine problem çözme sürecinde çoklu temsillerin kullanımı üzerine de pek çok araştırma yapıldığı dikkat çekmektedir. Modelleme ve çoklu temsiller üzerine yapılan çalışmalar da bireylere üretken düşünme yolları kazandırabilmek için hedef bazlı etkinlikleri kullanmak yöntemi olarak alanyazında önemli görülmektedir (örn: Janvier, 1987; Cobb, Yackel ve Wood, 1992; Lesh ve Harel, 2003; Lesh ve Zawojewski, 2007; English, Lesh ve Fennewald, 2008; Harel, 2008a).

Matematik eğitiminde üst biliş üzerine de başta Schoenfeld (1985) olmak üzere çeşitli araştırmalar yapılmıştır (Schoenfeld, 1985; Wilson, 1998; Schraw, 1998; Swanson, 1999; Pugalee, 2001; Muir, Beswick ve Williamson, 2008). Schoenfeld 1985 yılında yazdığı kitabında analiz için oluşturduğu çerçeveyi dört temel bileşene ayırmış ve bunları kaynaklar, problem çözme stratejileri, kontrol ve inançlar olarak tanımlamıştır.




**Şekil 1.9.** *Schoenfeld'in çerçevesi (1985)*

Schoenfeld'e göre bireyin problem çözme sürecinde neler yaptığını anlamak için probleme başlarken hangi aletleri kullandığını bilmeye ihtiyaç vardır (1985). Kaynaklar kısmı bunu anlamak için bireyin sahip olduğu matematiksel bilginin içerisinde kendine özgü kurallar, bilgiler, beceriler gibi kavramları açıklamaya yarar. Problem çözenin potansiyel olarak sahip olduğu matematiksel eylem ve kuralları tanımlamaya yarar. Heuristikler (problem çözme stratejileri) kısmı problem çözmede başarılı olmak için belirlenmiş sınırlardır (Schoenfeld, 1985). Öğrencinin sahip olduklarını görebilmek adına kategoriler içerisinde verilmesi gruplamayı kolaylaştırır ve öğrencinin problem çözme sürecindeki durumu ile ilgili yorum yapma gücünü arttırır. Heuristikler öğrencinin sahip olduğu kaynakları ne kadar kullanabildiğini gösterir. Kontrol bölümü öğrencinin potansiyel olarak sahip olduğu bilgiyi davranışa nasıl dönüştürdüğü ile ilgilidir. Bu kısım, bireyin problemi çözerken verdiği kararları sorguladığı, doğru yolda ilerleyip ilerlemediğini fark ettiği ve davranışlarının nedenlerini açıklamaya çalıştığı kısımdır (Schoenfeld, 1985). Schoenfeld'in problem çözmede üst biliş ile ilgili görüşlerini ortaya attığı temeldir. Kontrol bölümünde öğrenci eylem, teknik ve stratejilerine karar verir. İnançlar sistemi ise bu üç bölümdeki bilgi ve davranışlar arasındaki ilişkiyi açıklamaya ve karakterize etmeye yarar. Schoenfeld, öğrencilerin sınıf ortamına gelmeden önceki önyargıları ve kavram yanılgılarının, öğrenmelerinin üzerinde etkisi olduğunu ve bu etkinin bazı durumlarda öğrenmeyi engellediğini bazı durumlarda ise bu sezgilerin (önyargı ve kavram yanılgısı) öğrenmeler ile birlikte var olduğunu iddia etmiştir (1985). İnançlar üzerine yaptığı sınıflamada ise naif deneyciler ve pür deneyciler olarak öğrencileri ikiye ayırmış ve naif deneycilerin sadece yalın gözlemlere dayanarak deney yaptıklarını, bir sistem kullanmadıklarını, pür deneycilerin ise belirli bir sistematiğe uydurduktan sonra denemeye daha düzenli olarak devam ettiklerini belirtmiştir (Schoenfeld, 1985).

Selden ve Selden, 1997 yılında yaptıkları araştırmada problem çözmede uzman bireylerin etkin bir şekilde kendi izledikleri yolu kullanabildiklerini, hangi çözüm yollarını keşfedeceğine ve hangi yaklaşımları ya da stratejileri takip edip etmeyeceğine, değiştireceğine ya da bırakacağına karar verdiklerini ancak problem çözmede acemi bireylerin ise süreç içerisinde çoğu kez yöntemlerini bilinçsizce kullandıklarını ifade etmiştir. Benzer şekilde Swanson da (1990) yüksek üst bilişe sahip bireylerin düşük üst bilişe sahip bireylere göre daha başarılı olduğunu ve üst bilişin problem çözme başarısına bir etkisi olduğunu iddia etmiştir. Schoenfeld'e göre problem çözme araştırmaları ve öğretimi aşağıdaki gibi şekillenmelidir.

- Daha spesifik olarak belirlenmiş problem sınıflarıyla daha çok öğrencilerin bireysel problem çözme stratejileri üzerine odaklanmalarının gelişimine yardım etmeli
- Öğrencilere bağlamsal bilgiyi kullanırken ya da problem çözme stratejilerini sergilerken üst bilişsel stratejileri de öğretmeli
- Öğrencilerdeki matematiğin doğasıyla ilgili inancı, problem çözmeyi ve onların bireysel yeteneklerini geliştirmelidir

**Şekil 1.10.** *Schoenfeld'e göre problem çözme araştırmaları ve öğretimi* (Schoenfeld, 1987)

Pugalee ise 2001 yılında 20, 9.sınıf öğrencisine altı problem yöneltmiş, bu problemleri çözmeleri için onlara 10 dakika süre tanımış ve bu süre içerisinde akıllarına gelen her şeyi not etmelerini istemiştir. Öğrencilerin problem çözme sürecinde ne yaptıklarının farkında olma davranışlarının onların yazılı cevaplarından ne kadar anlaşılabileceği üzerine bir araştırma gerçekleştirmiştir. Öğrenci davranışlarını probleme odaklanma, verileri organize etme, kendisinden istenen işlemleri yapma ve sonuçları anlamlandırma olarak kategorize etmiş ve öğrenci davranışlarını bu kategoriler çerçevesinde incelemiştir. Pugalee, bu araştırmasında öğrencilerin kendilerini yazılı olarak ifade etmelerinin onların üst biliş süreçlerini anlamlandırmada, nasıl düşündüklerinin ve nasıl öğrendiklerinin anlaşılmasında önemli ipuçları verdiğini ortaya koymuştur (Pugalee, 2001). Buradan da yola çıkarak problem çözme sürecinde üst bilişle ilgili araştırmaların alanyazına katkılarının ardından öğrencilerin farklı düşünme yollarının belirlenmesinde probleme dair inanç ve yaklaşım bir bileşen olarak kabul edilmiş ve düşünme yolları üzerine yapılan araştırmaları şekillendirdiği görülmüştür. Aşağıda öğrencilerin farklı düşünme yollarının belirlenmesi ve geliştirilmesini içeren araştırmalar listelenmiştir.

Lesh ve Harel (2003) düşünme yollarının gelişimi üzerine yaptıkları araştırmalarında problem çözücülerin bir problem durumuyla ilgili düşünme yollarını geliştirmek için bir dizi test ve revize yoluna girdiklerinde veya kavramsal sistemler (problem çözme yaklaşımları, kanıt şemaları, inançları) üzerine kafa yorduklarında okul matematiğinde öğrendikleri altyapıların bu düşünceleri şekillendirmede çok önemli bir hale dönüştüklerini belirtmişlerdir. Yani problem çözücülerin uyguladıkları modeller onların kompleks sistemlere karşı ihtiyaç duydukları (zihinsel ihtiyaç) düşünme yollarını ve kavramsal sistemlerini (problem çözme yaklaşımları, kanıt şemaları, inançları) ortaya koyar. Bireyin problemi nasıl çözdüğü, nasıl yorumladığı, nasıl matematikleştirdiği, nicelikleri nasıl işleme soktuğu gibi birçok sorunun cevabı aranır. English, Lesh ve Fennewald'a (2008) göre problem çözme çalışmaları matematiksel kavramları, problem çözme sürecini, üst bilişsel fonksiyonları, bireysel eğilimleri, inanç ve duyguları içinde bulundurmalıdır. Tüm bunlar birlikte düşünüldüğünde Harel (2001) tarafından ortaya atılan DNR çerçevesi katılımcıların düşünme yollarını belirlemek adına problem çözme sürecini anlamak, öğrenmek ve öğretebilmek için alternatif güçlü bir çerçeve olarak düşünülebilir.

Buradan yola çıkarak DNR çerçevesinde yapılmış olan araştırmalara bakıldığında araştırmaların matematik öğretmenleri üzerine ya da öğrenciler üzerine anlama ve düşünme yolları ile kavramlarla birlikte (cebirsel eşitlilikler, eşitsizlikler, fonksiyonlar, tamsayılar gibi) incelendiği görülmektedir. Harel ve arkadaşlarının çalışmalarında istenilen (arzu edilir) anlama ve düşünme yolu belirledikleri ve bu arzu edilir anlama ve düşünme yollarına ulaşmanın yollarını aradıkları görülmüştür (Harel ve Koichu, 2010; Koichu ve Harel, 2007; Koichu, Harel ve Manaster, 2013).

Lim (2006) yılında cebirsel eşitlik ve eşitsizlik kavramları üzerine öğrencilerinin düşünme yollarını karakterize ettiği çalışmasında tahmin ve öngörü zihinsel eylemine göre öğrencilerin düşünme yollarının ilişkili olarak şekillendiği, arzu edilen düşünme yoluna sahip öğrencilerin denklem ve eşitsizlik konularıyla ilgili anlamalarının daha kapsamlı olduğunu ifade etmiştir. Arzu edilen düşünme yollarına sahip olmayan öğrencilerin ise anlama yollarının sınırlı olduğu sonucuna varılmıştır (Lim, 2006).

Rabin, Fuller ve Harel ise 2013 yılında yaptıkları araştırmada örüntülerin ve keşif etkinliklerinin ilköğretim matematiğinde önemli bir yeri olduğunu, bunun sayı duyusu ve tahmin zihinsel eylemini geliştirdiğini belirtmişler aynı zamanda da doğrulama sürecinde örüntü arayan öğrencilerin istenmeyen düşünme yollarına yöneldiklerini ifade etmişlerdir. Sınırlı örneklerden yola çıkarak doğrulama yapmanın matematiğin doğasına uyumlu olmayıp öğrencileri deneysel kanıt şemasına yönelttiği araştırmacılar tarafından ifade edilmiştir. Harel de alanyazında sıklıkla deneysel kanıt şeması kullanıldığını ifade etmektedir (Harel, 2008b). Harel 2008 (b) yılında yaptığı çalışmada da öğretmen adaylarının kendi doğrulama yollarının öğrencilere doğrudan yansıttığını ve onlarda kanıt şeması algısının otoritere yöneldiğini belirtmiştir.

Harel ve Koichu (2010) bir ilköğretim matematik öğretmeni ile problem kurmayı temel alan bir çalışmayı kesirler konusunda incelemişler ve bu öğretmenin zihinsel düşünme sürecini DNR teorik çerçevesine göre analiz etmişlerdir. Araştırmanın sonucunda bir öğretmenin problem kurma sürecindeki öğrenmesinin işlevsel tanımının DNR teorik sistemine dayalı olduğu kanısına varılmıştır.

Koichu ve arkadaşları (2013) ile Koichu ve Harel (2007), 24 matematik öğretmeni ile 4/5'in 2/3'e bölünmesi sonucunda hesaplanan bir günlük hayat problemi oluşturmaları üzerine birer çalışma gerçekleştirmişlerdir. Çalışmada problem kurma zihinsel eylem olarak alınmış ve buna yönelik ortaya çıkan düşünme yolları DNR çerçevesinde analiz edilmiştir. Bu analizler sonucunda ortaya iki farklı düşünme yolu çıkmıştır. Bu düşünme yollarını niceliksel koordinasyon ve referans noktasından yararlanma olarak belirlemişlerdir. Araştırmanın sonucunda niceliksel koordinasyon ve referans noktasından yararlanma düşünme yollarını kullanan matematik öğretmenlerinin istenilen problem senaryosuna ulaşabildikleri görülürken niceliksel koordinasyon eksikliği yaşayan öğretmenlerin istenilen problem senaryosu kurmada zorluklar yaşadığı ortaya çıkmıştır.

Harel ve Lim (2004) yaptıkları çalışmada DNR çerçevesi kapsamında bir matematik öğretmeninin alan ve pedagojik bilgisini fonksiyon bağlamında incelemiştir. Matematik öğretmeni ile yapılan görüşmelerde fonksiyon kavramı ve öğretimi üzerine sorgulamalar yapılmış ve öğretmenden fonksiyon içeriğine sahip bir problemi çözmesi istenmiştir. Araştırma sonucunda katılımcı öğretmenin çözümlerinde yalnızca işlemlere odaklandığı, pedagojik açıdan öğrencilerin zihinsel ihtiyaçları ile anlama yollarını göz ardı ederek kendi kavramlarını onlara öğretmeye çalıştığı ortaya konmuştur. Harel ve Lim (2004) öğretmenin fonksiyonla ilgili anlama ve düşünme yollarının, pedagoji bilgisi ve öğrenci epistemoloji bilgisini yönlendirdiği sonucuna ulaşmışlardır.

Kabael ve Kızıltoprak (2014) 10 katılımcıdan oluşan altıncı sınıf öğrencisiyle cebirsel bir hikaye problemini ele alan çalışmalarında öğrencilerin problem çözme sürecinde düşünme yollarını DNR teorik çerçevesine göre analiz etmişlerdir. Araştırmanın sonucunda kendilerine yöneltilen problemle ilgili niceliksel muhakeme yapmayan öğrencilerin yalnızca hesaplamalara ve işlemlere odaklandıkları için aritmetik düşünme yoluna sahip olduğu, niceliksel muhakeme yapabilen öğrencilerin ise problem çözme yaklaşımları açısından niceliksel düşünme yoluna sahip olduğunu belirtmişlerdir.

Kabael ve Akın (2016) dokuz yedinci ve yedi sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirsel sözel problemleri çözme sürecindeki düşünme yollarını DNR teorik çerçevesine göre analiz etmişlerdir. Araştırmada öğrencilerin genelinin problem çözme sürecinde çözüm odaklı oldukları ve cebirsel düşünme yolunu etkili bir biçimde kullanamadıkları sonucuna varılmıştır.

Kabael ve diğerleri (2014), çalışmalarında ortaokul matematik öğretmen adaylarının problem çözme sürecinde anlama ve düşünme yollarını DNR çerçevesinde incelemiş ve bunların arasındaki ilişkiyi ortaya koymayı amaçlamışlardır. Araştırmada katılımcıların düşünme yollarının iki gruba ayrıldığı görülmüştür. İlk düşünme yoluna sahip katılımcıların özel örneklerle örüntü arama veya deneme yanılma yollarını tercih ettiği, ikinci düşünme yoluna sahip katılımcıların ise problem durumunu zihinlerinde çağırdıkları matematiksel kavramlarla birlikte çözmeye çalıştıkları görülmüştür. Birinci düşünme yoluna sahip katılımcıların deneysel kanıt şemasına, ikinci düşünme yoluna sahip katılımcıların ise analitik ya da dışsal kanıt şemasına sahip oldukları belirlenmiştir. Araştırmada aynı zamanda ilköğretim matematik öğretmen adaylarının anlama yollarına paralel düşünme yollarına sahip oldukları ortaya konmuştur.

Yapılan çalışmalara bakıldığında düşünme yollarının nasıl şekillendiğini belirleyebilmek için ilköğretim matematiğinde kesir, cebirlerde eşitlik – eşitsizlik, sayı duyusu ve örüntü kavramlarına odaklanıldığı görülürken ortaöğretim matematiğinde bunun görülmesini sağlayan ve farklı düşünme yollarının ortaya çıkmasına fırsat veren en temel kavramlardan birinin içinde ilişkileri de barındıran fonksiyon kavramı olduğu görülmektedir. Katılımcıların düşünme yollarını anlamlandırabilmek için nicelikler arasındaki ilişkileri kullanmaları, ilişkileri yönüyle birlikte yorumlamaları da problem çözme sürecinin önemli parçalarından biridir.

Fonksiyon kavramının incelenmesine yönelik yapılan araştırmalara bakıldığında ise fonksiyonun tanımı ve eşleme ilişkisine yönelik çalışmalar yapıldığı görülmüştür. Bu çalışmaların da fonksiyonun kavramsal öğrenimi üzerinde durup kavram yanılgılarını ortaya çıkarıp fonksiyon kavramının yalnızca bir eşleme ilişkisinden ibaret olmadığı ve onu kavramsallaştırmanın önemi üzerinde durulduğu görülmüştür (örn: Vinner ve Dreyfus, 1989; Breidenbach vd., 1992; Oehrtman, Carlson ve Thompson, 2008).

Fonksiyon kavramı kapsamında yapılan araştırmaların bir kısmının ise fonksiyonun cebirsel temsiline odaklandığı, katılımcıların bu temsilden neler anladıklarına odaklanıldığı, aynı zamanda sembolik manipülasyon becerilerinin fonksiyon kavramında nasıl olduğunun belirlendiği görülmüştür (örn; Dubinsky ve Harel, 1992; Oehrtman vd., 2008).

Fonksiyon kavramının içerisinde dinamik yapı ve ilişkileri de barındıran bir diğer temsili olan grafik temsili üzerine de çeşitli araştırmalar yapıldığı, katılımcıların fonksiyonun dinamik ve değişken yapısını nasıl kavramsallaştırdığının ilişkiler üzerinden grafikler yardımıyla nasıl ortaya çıktığına odaklanıldığı görülmüştür (örn: Vinner ve Dreyfus, 1989; Bakar ve Tall 1992; Monk, 1992; Carlson, 1998).

Alanyazında fonksiyon kavramının incelenmesinde niceliklerin birbirlerine göre nasıl değiştiğini anlamaya yönelik aynı zamanda katılımcıların kovaryasyonel muhakeme yapma becerilerini ortaya çıkaran araştırmalara da rastlanmıştır (Carlson ve ark., 2002; Blanton ve Kaput, 2004; Waren, 2005; Rivera, 2007; Carlson ve Oehrtman, 2005).

Bu araştırmalardan birinde kovaryasyonel düşünme düzeyleri üzerine Carlson ve arkadaşları 2002 yılında kalkulus dersinde yüksek başarılı 21 üniversite öğrencisiyle yaptıkları çalışmada, öğrencilerin dinamik olarak değişen oran kavramını hayal etmekte ve yorumlamakta zorlandıkları sonucuna ulaşmışlardır. Öğrencileri zihinsel eylem düzeyleri açısından beş kategoriye ayırmışlar, zihinsel eylem 3 ve üzerindeki düzeylerdeki katılımcıların nicel koordinasyonu uygulayabilmelerine rağmen bağımsız değişkendeki ortalama oranı koordine edemediklerini belirtmişlerdir. Öğrencilerin sadece küçük bir kısmının fonksiyondaki zamana bağlı anlık değişimleri grafik üzerinde gösterebildiği ifade edilmiş ve öğrencilerin fonksiyona bakış açılarını belirtebilmek için kovaryasyonel düşünme düzeyleri üzerine daha fazla odaklanılması gerektiği sonucuna varmışlardır.

Carlson, Larsen ve Lesh (2003) de matematik öğretmen adaylarıyla kovaryasyonel düşünme üzerine bir şişedeki su miktarının zamana bağlı değişiminin fonksiyonel grafiğiyle ilgili model ortaya çıkarmaya yönelik yaptıkları çalışmada katılımcılardan gelen cevapları analiz etmişlerdir. Modelleme aktivitesiyle yapılan eğitimlerin ardından öğretmen adaylarının kovaryasyonel düşünmelerinde belirgin bir ilerleme olduğu kaydedilmiştir.

Moore, Musgrave ve Paoletti (2013) iki ortaöğretim matematik programına kayıtlı lisans öğrencisiyle koordinat sisteminde fonksiyon kavramını grafik temsili üzerinden bir öğretim deneyiyle incelemişlerdir. Öğretim deneyinin sonunda katılımcıların kovaryasyonel akıl yürütmelerinin, ilişkileri çizerek gösterme yeteneklerinin ve fonksiyon algılarının önemli düzeyde arttığı sonuçlarına varmışlardır.

Harel ve Lim (2004) de fonksiyon kavramı kapsamında DNR çerçevesinde matematik öğretmeniyle yaptıkları çalışmada; öğretmenin sahip olduğu düşünme ve anlama yollarını kendi öğretiminde kullanarak pedagojik olarak öğretmeye çalıştığı sonucuna ulaşmışlardır.

Benzer şekilde Kabael ve diğerlerinin (2014) ilköğretim matematik öğretmen adaylarıyla fonksiyon kavramına dayanan üç problemle gerçekleştirdikleri çalışmada, katılımcıların sahip oldukları anlama yollarına paralel düşünme yollarını kullandıkları ve pedagojik olarak da öğrencilerine kendi sahip oldukları bu anlama ve düşünme yollarını gösterme düşüncesinde oldukları tespit edilmiştir. Aynı çalışmada katılımcıların içinde bulundukları ortamdan ve geçmiş yaşam deneyimlerinden etkilendikleri sonuçları da ortaya çıkmıştır. Buradan yola çıkıldığında problemlerin bağlamının ve katılımcıların geçmiş yaşam deneyimlerinin onların problem çözme süreçlerini etkileyip etkilemediği sorusu gündeme gelmiştir.

Alanyazında problem bağlamı ve katılımcıların çözümlerinin ilişkilerinin incelendiği çeşitlere çalışmalara rastlanılmaktadır (Hurst, 2007; Sáenz, 2009; Koparan, Güven ve Karataş, 2014; Yanık, 2017)

Hurst (2007) sekiz ilköğretim öğrencisiyle yaptığı bir dizi bağlam bilgisi içeren matematiksel kavramların tanımlamalarını, uygulamasını ve muhakeme etme becerilerini incelediği çoklu durum çalışmasında bağlam bilgisinin öğrencilerin ulaşmak istediği matematiksel düşüncelerle ilişkili olduğu sonucuna varmıştır.

Saenz (2009) da İspanyol matematik öğretmen adaylarının PISA 2003 tarafından yayımlanan maddeleri çözme konusundaki zorlukları analiz ettiği çalışmasında bağlam bilgisinin matematiksel bilginin türünü ve kullanımını etkilediğini belirtmiştir.

Koparan, Güven ve Karataş (2014) 120 on birinci sınıf öğrencisiyle matematikte bağlam bilgisiyle istatistik bilgisi arasındaki ilişkileri belirlemeye çalıştıkları araştırmada katılımcıların çoğunun sadece bağlam bilgisi ya da sadece matematiksel/istatistiksel bilgileri kullanarak cevaplar verebildiğini ancak çok azının hem bağlam bilgisi hem de matematik/istatistik bilgiyi içeren cevaplar verebildiği sonucuna varmışlardır.

Yanık (2017) 40 ortaokul matematik öğretmen adayıyla WebQuest etkinliklerini kullanarak yaptığı çalışmada; WebQuest etkinliklerinde kullanılan bağlamın öğretmen adaylarının bağlamsal bilgi ve ilişkilendirme becerilerine olumlu etkilerinin olduğunu belirtmiştir.

Yapılan çalışmalarda problem çözme sürecinde fonksiyon kavramı kapsamında katılımcıların düşünme yollarını incelemenin ve bu düşünme yollarının varsa problemin bağlamıyla olan ilişkisini ortaya koymanın alanyazında bir boşluğu doldurabileceği düşünülmüştür.

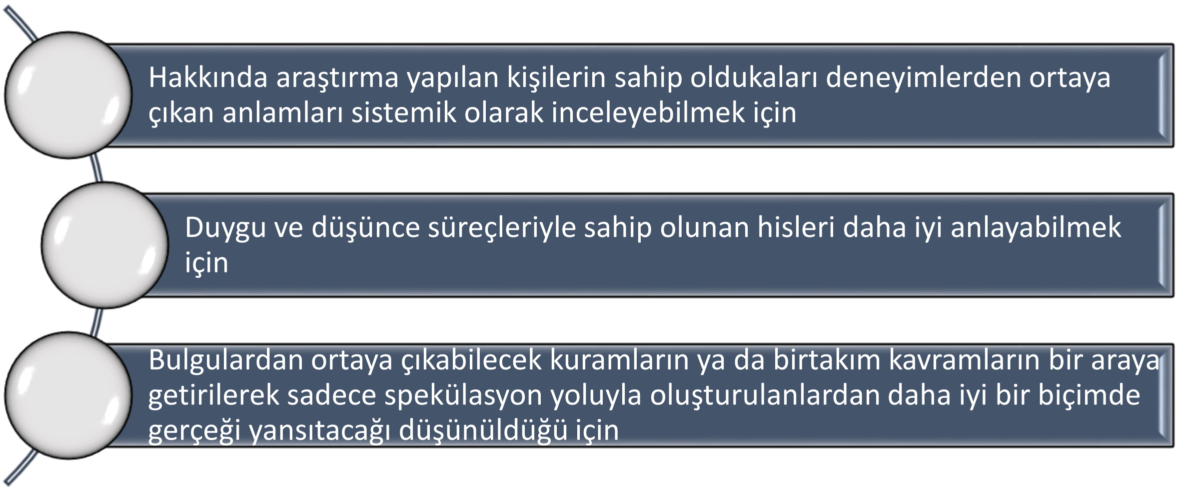
## 2. YÖNTEM

Bu araştırmada 11.sınıf öğrencilerinin fonksiyon kavramı kapsamında düşünme yollarının ve düşünme yolları ile problem durumuna ilişkin bağlam arasında varsa ilişkinin incelenmesi amacıyla nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir.

### 2.1. Nitel Araştırma Yaklaşımı

Sherman ve Webb (1988) nicel yaklaşımların eğitim alanında yapılan araştırmalarda hem teorik hem de yöntem yönünden yetersiz olmasının sık tartışılan bir konu haline geldiğini belirtmişlerdir. Genellenebilir bilgilerin eğitim alanında her zaman mümkün olmadığı düşünüldüğünde derinlemesine ve detaylı bilgilere ulaşmak ve bu bilgilerin uygulayıcı ve araştırmacılara ışık tutmak amacıyla kullanabilmesi için farklı bir araştırma türüne gereksinim duyulmuştur. Araştırmacıların, araştırmak istedikleri konuların doğal ortamında incelendiği, katılımcıların sahip oldukları olguyu anlamlaştırıp yorumlama çabasına girilen bir yaklaşım olan nitel yaklaşımlar eğitim bilimleri alanında sıklıkla kullanılmaktadır (Denzin ve Lincoln, 1998).

Strauss ve Corbin (1998) nitel yaklaşımların neden kullanılması gerektiğini aşağıdaki gibi açıklamışlardır.




**Şekil 2.1.** *Nitel yaklaşımların kullanılma gerekçeleri (Strauss ve Corbin, 1998)*

Buradan yola çıkarak nitel araştırmayı gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamlarda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlamak mümkündür (Yıldırım ve Şimşek, 2011, s. 39).

Nitel araştırmalar incelenen kişi ya da durumları kendi doğal ortamlarında anlamlandırarak ve yorumlayarak bir sonuca varmayı hedeflemektedir (Denzin ve Lincoln, 1998). Araştırmaların doğal ortamlarında yapılması araştırmaya katılanların davranışlarının günlük olağan işleyişinde olmasına ve gerçekleri daha kolay yansıtmasına imkan vermektedir. Veri toplama aracının katılımcının kendisi olmasıyla birlikte araştırmacının da sürece doğrudan dahil olabileceği, ortamın bir parçası haline gelebileceği ve verilerin tümevarımsal bir yaklaşımla toplanabileceği sonuçları ortaya çıkmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2011; Creswell, 2007; Bogdan ve Biklen, 1992).

Gerçekleştirilen nitel çalışmalarda araştırmacının ele aldığı konuyla ilgili kendisinin ya da önden önce yapılan araştırmaların sonuçlarından çok katılımcıların bakış açısı ön plandadır (Bogdan ve Biklen, 1992). Bu durum da araştırma sürecinde kesin çizgilerin olmayacağı, gerekli görüldüğünde araştırma deseninde değişiklikler yapılabileceği yani araştırmanın esnek olabileceği anlamına gelmektedir (Creswell, 2007).

Bu araştırmada 11.sınıf öğrencilerinin fonksiyon kavramı kapsamında düşünme yolları ve düşünme yolları ile problem durumuna ilişkin bağlamın arasında (varsa) ilişkinin derinlemesine incelenebilmesi için nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir.

### 2.2. Araştırma Deseni

Bu araştırma, genel nitel araştırma desenine uygun olarak (basic qualitative research) hazırlanmıştır. Araştırma sorularının niteliği uygulanacak metodu ve araştırmaya özel deseni belirler. Genel nitel araştırmalar, tek bir yöntemin güçlü yönleri kullanılırken aynı zamanda araştırma sürecinde esneklik de sağlar. Bu araştırma türünün felsefi olarak yapılandırmacılık, fenomenoloji ve sembolik etkileşimden türediği ifade edilmektedir (Merriam, 2009). Merriam, genel nitel araştırmayı bireylerin deneyimlerini nasıl yorumladıkları, yaşamlarını nasıl oluşturdukları ve deneyimlerin onlar için taşıdığı anlamı yorumlama biçiminde tanımlamaktadır (Merriam, 2009, s. 23). Merriam'a (2009) göre genel nitel araştırmanın nihai amacı bireylerin yaşamlarını ve deneyimlerini nasıl anlamlandırdıklarını kendi bakış açılarına göre inceleyip anlayabilmektir.

Bir genel nitel araştırma deseni katılımcıların deneyimlerini, bu deneyime yükledikleri anlamları ve süreci ortaya çıkarırken bu desende amaç sadece bireylerin inançlarına, düşüncelerine veya davranışlarına odaklanmak değildir. Bunlar sadece araştırmanın bulgularının birer parçası olabilir ancak yürütülen nitel araştırmanın amacı olamaz (Merriam, 2009). Caelli, Ray ve Mill'e (2003) göre de genel nitel araştırmalar yapılan nitel çalışmanın bazı ya da tüm karakteristik özelliklerini gözler önüne serebilir.

Merriam'e (1998) göre genel nitel araştırma deseni eğitim alanında en basit ve yaygın nitel araştırma yaklaşımıdır. Eğitimdeki kavramların, modellerin ve teorilerin karakteristik olarak gelişimine yardımcı olur. Teorik çerçevedeki kavramların ya da yinelenen kalıpların, kategorilerin sonuçlarda genellenerek verilerin analiz edilmesinde, verileri kesinleştirip bunun teorik çerçevede ayrıntılı olarak tartışılmasında kullanılabilir (Caeli, Ray ve Mill, 2003).

Bu araştırmada, katılımcıların düşünme yollarının yapılan klinik görüşmelerle derinlemesine incelenmesi, kodlar temalar yoluyla analiz edilmesi ve alanyazında daha önce yapılan araştırmalar sonucunda ortaya çıkan çerçevelerde yorumlanması amaçlandığından genel nitel araştırma deseni kullanılmıştır.

### 2.3. Katılımcılar

Matematik eğitimi programlarında 11.sınıf önemli bir yere sahip olup katılımcıların nicelikler arasında ilişkileri anlamlandırabileceği ve yorumlayabileceği sınıf düzeyi olarak görülmektedir. PISA uygulamalarının da 15 yaş grubu öğrencileri ile birlikte incelendiği bilindiğinden problem çözme becerilerinin ölçülmesinde 11.sınıf yaş grubunun önemli veriler sağlayabileceği düşünülmektedir. Bu sebeplerle araştırmanın katılımcıları Eskişehir'de bir devlet okulunun 11.sınıfına devam etmekte olan matematik dersi notu akademik başarısı ve gönüllülük esasına göre ölçüt örnekleme yoluyla seçilmiş 10 öğrenciden oluşmaktadır. Araştırmanın yapıldığı okul yatılı bir lise olup 37 farklı şehirden farklı kültürleri içinde barındıran karma eğitim yapan 2012- 2013 öğretim yılında anadolu öğretmen lisesi olarak açılmış ancak daha sonra anadolu imam hatip lisesine dönüştürülmüş bir devlet okuludur.

Araştırmada fonksiyon kavramına yönelik farklı düşünme yollarının ortaya çıkarılabilmesi ve bunun problem çözme sürecinde incelenmesi amaçlandığından katılımcıların seçiminde 9 ve 10. sınıf matematik not ortalamaları göz önünde bulundurulmuş ve ortalamalar bir liste halinde sıralanmıştır. Farklı matematik ortalamalarını temsil edebilecek katılımcı seçimine özen gösterilmiştir. Matematik not ortalamalarından belirgin farklılaşmaların olduğu bölümler gruplara ayrılmış ve her grubu temsil edecek bir öğrenci seçilmeye özen gösterilmiştir. Katılımcıların seçiminde okulda seçtikleri alan ve cinsiyet bilgisi de göz önünde bulundurulmuştur. Ölçüt örneklemede araştırmacı kendi yargısını kullanır ve araştırma amacına en uygun olan katılımcıları örnekleme alır (Balcı, 2005). Buradaki ölçüt veya ölçütler araştırmacı tarafından oluşturulabilir ya da daha önceden hazırlanmış bir ölçüt listesi de kullanılabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Katılımcıların seçimi gönüllülük esasına göre belirlenmiş, öğrenci velilerine tek tek bilgi verilmiş, okul yatılı bir okul olduğundan öğrenci velisi olarak geçen okul müdüründen görüşmeler için yazılı onay alınmıştır.

Öğrencilerin tümünün yer aldığı tablo aşağıda verilmiş olup ismi koyu gösterilen ve isminin sonunda yıldız (*) bulunan öğrenciler araştırma için katılımcı olarak seçilmeye uygun bulunmuştur. Araştırmanın raporlaştırılması sürecinde gizliliğinin korunmasıyla amacıyla tüm öğrenciler için birer takma ad kullanılmıştır.

**Tablo 2.1.** *Öğrencilere ilişkin bilgiler*

| Öğrenci İsimleri | 9 ve 10.Sınıf Matematik Not Ortalamaları | Alanı | Cinsiyeti |
|---|---|---|---|
| **Şerife*** | **87,714** | **Sayısal** | **Kız** |
| Erdem | 83,912 | Sayısal | Erkek |
| **Celile*** | **75,252** | **Eşit Ağırlık** | **Kız** |
| Serkan | 74,32 | Sayısal | Erkek |
| **Habibe*** | **70,268** | **Sayısal** | **Kız** |
| Serpil | 69,366 | Eşit Ağırlık | Kız |
| **Oğulcan*** | **67,474** | **Sayısal** | **Erkek** |
| Meryem | 67,3 | Eşit Ağırlık | Kız |
| Kader | 66,636 | Eşit Ağırlık | Kız |
| **Abdi*** | **64,434** | **Sayısal** | **Erkek** |
| Naz | 62,8 | Sayısal | Kız |
| **Emrah*** | **61,574** | **Eşit Ağırlık** | **Erkek** |
| Halim | 59,014 | Sayısal | Erkek |
| Beyza | 58,8 | Eşit Ağırlık | Kız |
| **Orhun*** | **57,38** | **Eşit Ağırlık** | **Erkek** |
| Miray | 57,23 | Eşit Ağırlık | Kız |
| Yonca | 56,322 | Eşit Ağırlık | Kız |
| **Mine*** | **54,292** | **Eşit Ağırlık** | **Kız** |
| Gamze | 54,238 | Eşit Ağırlık | Kız |
| Yaren | 38,43 | Eşit Ağırlık | Kız |
| **Saffet*** | **38,234** | **Eşit Ağırlık** | **Erkek** |
| **Yasir*** | **33,6** | **Eşit Ağırlık** | **Erkek** |
| Mahmut | 27,772 | Eşit Ağırlık | Erkek |

Tablo 2.1'de görüldüğü gibi araştırma için 10 katılımcı seçilmiş olup bunların altısı eşit ağırlık, dördü sayısal bölümünden belirlenmiştir. 10 katılımcıdan dördü kız, altısı erkektir. Araştırmanın ilk uygulamasında araştırma sorularından biri olan bağlamın "futbol" kavramıyla ilgili olmasından dolayı katılımcıların cinsiyetleri ve spora ya da futbola olan ilgilerinin farklı olmasına özen gösterilmiştir.

**Tablo 2.2.** *Katılımcılara ilişkin bilgiler*

| Katılımcı Öğrenci | Yaşadığı Şehir | İlgilendiği/Sevdiği Spor Branşı |
|---|---|---|
| **Şerife** | Bursa | Futbol |
| **Celile** | İzmir | Yüzme |
| **Habibe** | Bursa | Futbol |
| **Oğulcan** | Manisa | Masa tenisi |
| **Abdi** | Manisa | Futbol |
| **Emrah** | Van | Masa tenisi |
| **Orhun** | Eskişehir | Masa tenisi |
| **Mine** | Şanlıurfa | Futsal |
| **Saffet** | Eskişehir | Voleybol |
| **Yasir** | Eskişehir | Masa tenisi |

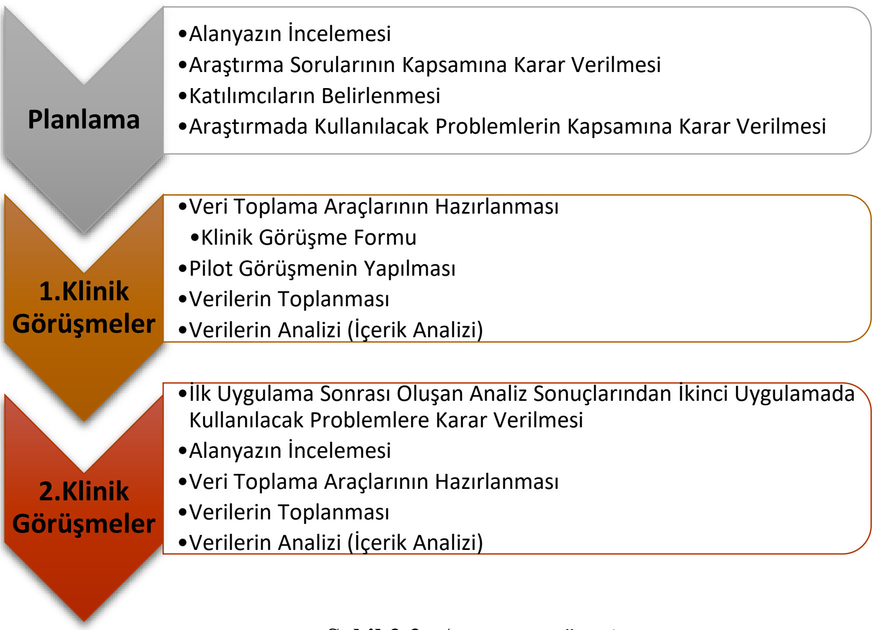
Tablo 2.2.'den görüldüğü gibi katılımcıların bulundukları yatılı okula geldikleri şehirler, yaşadıkları kültürler ve ilgilendikleri spor branşları birbirinden farklılık göstermektedir. Katılımcılardan Şerife, Habibe ve Abdi'nin futbola, Mine'nin daha önce de oynadığı için futsala, Oğulcan, Emrah, Orhun ve Yasir'in masa tenisine, Celile'in yüzmeye ve Saffet'in voleybola ilgisi olduğu bilgileri öğrencilerden klinik görüşmeler başlamadan önce alınmıştır.

### 2.4. Verilerin Toplanması

Nitel araştırma, gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin bir arada kullanıldığı bir araştırma türüdür (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Kodlar, kategoriler ve içerik analizi gibi tümevarımsal süreçler genel nitel araştırmalarda sıklıkla kullanılmaktadır. Bu araştırmanın verileri iki klinik görüşme aşaması ve bu görüşmeler sırasında alınan ses kayıtlarıyla toplanmıştır. Her iki klinik görüşmede de katılımcılara fonksiyon kavramı kapsamında ikişer problem yöneltilmiştir. İki klinik görüşme uygulaması için veri toplama süreci yaklaşık bir yıl sürmüştür.

Görüşmelerde kullanılacak problemlerin kapsamının belirlenmesi ve problem seçiminin ardından pilot uygulama yapılmış ve pilot görüşmede elde edilen verilerin ışığında ilk klinik görüşmelerin yapılmasına başlanmıştır. İlk klinik görüşmelerden sonra veriler analiz edilmiş, araştırma sorularına uygun iki yeni araştırma problemiyle ikinci klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir.

Bu araştırma planlama, birinci klinik görüşmeler ve ikinci klinik görüşmeler olmak üzere üç aşamadan oluşmaktadır. Araştırmaya ilişkin süreç aşağıdaki gibi özetlenebilir.




**Şekil 2.2.** *Araştırma süreci*

#### 2.4.1. Pilot çalışması

Araştırmanın planlama aşamasından sonra araştırma sorularının, problemlerin kapsamının ve problem seçiminin ardından öğrenci düzeyine uygunluk, problemlere yaklaşım, olası öğrenci hataları, uygulamanın gerçekleştirilme süresi hakkında bilgi sahibi olmak amacıyla bir pilot görüşme gerçekleştirilmiştir.

Araştırmanın pilot çalışmasına katılan öğrenci, katılımcılarla aynı okulda öğrenim gören, katılımcıların ortalama matematik düzeyine ve ortalamasına sahip bir kız öğrenci olarak belirlenmiştir. Pilot görüşme yaklaşık 58 dakika sürmüştür. Pilot çalışma ile ilk klinik görüşmelerin arasında yaklaşık 12 günlük bir zaman farkı söz konusu olmuştur. Bu süre, pilot çalışmanın dökümlerinin yapılması, elde edilen verilerin detaylı incelenmesi ve gerekli düzeltmelerin yapılmasına ayrılan süredir.

### 2.4.2. Klinik görüşmeler

Klinik görüşme ilk kez Piaget tarafından psikolojik araştırmalar için kullanılmıştır. Öğrencilerin düşüncelerindeki zenginliği keşfetmek, onun temel aktivitelerini yakalamak ve bilişsel becerilerini değerlendirmek için esnek soru sorma metodu uygulamaya klinik görüşme denilmektedir (Karataş ve Güven, 2003). Goldin (1998), klinik görüşmelerin genel olarak araştırmalarda; problem çözme yöntemi ile öğrencilerin matematiksel davranışlarını gözlemleme ve bu gözlemlerden öğrencilerin matematiksel anlamalarını, bilişsel yapılarını ve süreçlerini ve bu süreçte meydana gelen duyuşsal değişiklikler hakkında sonuçlar çıkarmayı mümkün kıldığını ifade etmiştir.

Araştırma süresince katılımcılarla iki kez klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmeler sırasında ses kaydı alınmıştır. Katılımcıların fonksiyon kavramı kapsamında düşünme yollarını ve düşünme yollarının varsa bağlamla ilişkisini derinlemesine inceleyebilmek için çeşitli sorular yöneltilmiştir.

**Tablo 2.3.** *Katılımcılarla yapılan görüşme süreleri*

| Katılımcı | Abdi | Celile | Oğulcan | Habibe | Şerife | Orhun | Saffet | Yasir | Mine | Emrah |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| İlk Görüşme Süresi | 87 | 76 | 96 | 58 | 77 | 75 | 72 | 74 | 66 | 75 |
| İkinci Görüşme Süresi | 42 | 46 | 47 | 50 | 55 | 64 | 66 | 58 | 73 | 78 |

Tablo 2.3’ten görüldüğü gibi ilk görüşmede öğrencilerin sorulara verdikleri yanıtlar çerçevesinde görüşmelerin süresi 58 ile 96 dakika arasında değişmektedir. İkinci

görüşmelerde ise bu sürenin 42 ile 78 dakika arasında değiştiği görülmüştür. Aşağıdaki tabloda katılımcılarla yapılan görüşme yer ve saatlerine yer verilmiştir.

**Tablo 2.4.** *Katılımcılarla Yapılan Görüşme Yer ve Saatleri*

| Katılımcı Adı | İlk Görüşmenin Yeri | İlk Görüşmenin Tarihi ve Saati | İkinci Görüşmenin Yeri | İkinci Görüşmenin Tarihi ve Saati |
|---|---|---|---|---|
| **Abdi** | Etüd Salonu | 27.05.2015 19:05 | Boş Bir Sınıf | 17.05.2016 12:35 |
| **Cemile** | Öğretmenler Odası | 30.05.2015 12:35 | Boş Bir Sınıf | 20.05.2016 12:40 |
| **Oğulcan** | Öğretmenler Odası | 31.05.2015 14:00 | Öğretmenler Odası | 21.05.2016 11:30 |
| **Habibe** | Boş Bir Sınıf | 03.06.2015 16:30 | Boş Bir Sınıf | 22.05.2016 12:20 |
| **Şerife** | Öğretmenler Odası | 06.06.2015 11:30 | Etüd Salonu | 25.05.2016 19:30 |
| **Orhun** | Boş Bir Sınıf | 07.06.2015 12:15 | Öğretmenler Odası | 28.05.2016 14:00 |
| **Saffet** | Boş Bir Sınıf | 09.06.2015 16:40 | Öğretmenler Odası | 29.05.2016 12:20 |
| **Yasir** | Etüd Salonu | 11.06.2015 19:15 | Ev Ortamı | 04.06.2016 14:30 |
| **Mine** | Öğretmenler Odası | 13.06.2015 13:05 | Boş Bir Sınıf | 08.06.2016 19:15 |
| **Emrah** | Boş Bir Sınıf | 17.06.2015 15:50 | Ev Ortamı | 14.06.2016 17:15 |

Tablo 2.4'ten görüldüğü gibi araştırmanın yapıldığı okul yatılı bir lise olduğu için araştırmacı, katılımcılarla okul saatleri ve okul saatleri dışında da vakit geçirme fırsatı bulmuş ve görüşmelerini farklı saatlerde farklı yerlerde hafta içi veya hafta sonu yapma imkanı olmuştur.

## 2.5. Araştırmada Kullanılan Problemlerin Seçimi

Bu araştırmada genel nitel araştırma kapsamına bağlı olarak katılımcıların problem çözme sürecinde düşünme yollarını inceleyebilmek için her bir klinik görüşmede iki, toplamda dört adet fonksiyon kavramı kapsamında problem kullanılmıştır. Fonksiyon kavramı kapsamında kullanılan problemlerle öğrencilerin ilişkileri yorumlamaları ve ifade etmelerine yönelik farklı düşünme yollarına ulaşılabileceği amaçlanmıştır.

Matematik eğitiminde problem çözme çalışmalarında katılımcıların ne düşündüğünü daha anlamlı bir şekilde ortaya çıkarabilmek amacıyla bu çalışmada da problem çözme sürecinde katılımcıların düşünme yollarının ve düşünme yollarının varsa bağlamla ilişkisini inceleyebilmek için gerçek yaşam durumlarına yönelik rutin olmayan problemlerden yararlanılmıştır.

### 2.5.1. İlk klinik görüşmelerde kullanılan problemlerin seçimi

İlk klinik görüşmeler için Akademik Lisansüstü Eğitim Sınavı (ALES) 2010 Bahar Dönemi matematik sorularından futbol bağlamıyla ilgili bir problem seçilmiş ve bu problem öğrencilerin fonksiyon kavramı kapsamında düşünme yollarını ve düşünme yollarının varsa futbol bağlamıyla ilişkisini gösterebilmek için araştırmacı tarafından hazırlanan sorular yoluyla düzenlenmiştir. Futbol bağlamında katılımcıların ilişkileri görebilecekleri klinik görüşmelerde kullanılan problem ve sorular EK-1'de verilmiştir. Futbol probleminde soruların ilişkili olduğu düşünme yolu bileşenleri ve problemin bağlamına yönelik verilerin incelenme yöntemi aşağıdaki tabloda belirtilmiştir.

**Tablo 2.5.** *Futbol probleminde kullanılan soruların incelenmesi*

| Futbol Probleminde Kullanılan Araştırma Sorusu | Veri | Problemde Görülmesi Amaçlanan Ölçüt |
|---|---|---|
| **Bu turnuvanın şampiyonu hangi takım olmuştur?** | Katılımcıların takımlar arasındaki ilişkileri kurup şampiyonu belirlemek için nasıl bir süreç izledikleri | Problem Çözme Stratejisi |
| **Turnuvada son sırayı hangi takım kaç puanla almıştır?** | 'Son Sırayı Almak' ifadesini katılımcıların nasıl yorumladığı | Bağlam |

**Tablo 2.5.** *(Devam) Futbol probleminde kullanılan soruların incelenmesi*

| Futbol Probleminde Kullanılan Araştırma Sorusu | Veri | Problemde Görülmesi Amaçlanan Ölçüt |
|---|---|---|
| **Turnuva sonunda kaç tane maç berabere bitmiştir?** | Katılımcıların takım sayılarına ve maç sayılarına takımlar arasındaki ilişkilere nasıl odaklandıklarının görülmesi | Problem Çözme Stratejisi |
| **Turnuva sonunda bir tablo (puanları, galibiyet, mağlubiyet ve beraberlik sayılarını gösteren) oluşturulmak istesenseydi senin tablon nasıl olurdu?** | Katılımcıların oluşturdukları tablonun 'futbol' bağlamında kullanılan 'puan durumu' kavramıyla olan ilişkisi | Bağlam |
| **Soruyu farklı bir yolla çözmek isteseydin nasıl bir yöntem kullanırdın?** | Katılımcıların alternatif çözüm yollarına yaklaşımları ve burada yapmak istediklerini organize etme durumu | Problem Çözme Stratejisi ve Probleme Dair İnanç |
| **Yaptığın yöntemlerde çıkan sonuçların doğruluğunu gösterebilir misin?** | Katılımcıların bulduğu sonuçları nasıl doğruladıkları | Doğrulama Yolu |
| **Futbolla aran nasıldır?**<br>**Futbol maçlarını izleme sıklığın nedir?**<br>**Futbol programları hakkında bir fikrin var mı?**<br>**'Puan durumu' diye bir şeyi daha önce duydun mu? Sence oluşturduğun tablo puan durumuna benziyor mu?** | Katılımcıların bağlam bilgisinin sorgulanması | Bağlam |
| **Sence bu problem nasıl bir problemdi?**<br>**Çözerken ne hissettin?**<br>**Soruya ilave edecek bir şeylerin olsaydı neleri ilave ederdin? Ya da sorudan neleri çıkarırdın?** | Katılımcıların inançlarına yönelik tutumlarının sorgulanması | Probleme Dair İnanç |

İlk klinik görüşmelerde kullanılan ikinci problem fonksiyon kavramına dayanan, fonksiyonun tanım, görüntü kümelerini ve farklı görüntüler arasındaki ilişkileri yorumlamayı gerektiren bir tişört problemidir. Problem, cebir ve fonksiyon ilişkisini inceleyen sorular yayımlayan bir internet sitesinden (https://www.shelovesmath.com/algebra/advanced-algebra/piecewise-functions/) parçalı fonksiyon problemleri kısmından seçilmiş ve araştırmanın amacına uygun olarak düzenlenmiştir. Katılımcıların fonksiyon kavramı kapsamında düşünme yollarının nasıl olduğunu gösterir tişört problemi ve sorular EK-2'de verilmiştir. Görüşmede kullanılan tişört probleminde soruların ilişkili olduğu düşünme yolu bileşenleri tabloda gösterilmiştir.

**Tablo 2.6.** *Tişört probleminde kullanılan soruların incelenmesi*

| Tişört Problemi Kullanılan Araştırma Sorusu | Veri | Düşünme Yolu Bileşeni |
|---|---|---|
| **(Özel örnekleri denediğini varsayarak) O seçtiğin tişört sayılarını nasıl belirliyorsun?** | İlişkileri nasıl yorumladığı | Problem Çözme Stratejisi |
| **Bu soruda denediğin değerleri neye göre seçtin? Her seferinde hangi matbaa olduğunu bulabilmek için tek tek denemek yerine daha kolay bir yol bulabilir miyiz?** | İki farklı matbaanın görüntü ve tanım kümelerindeki ilişkileri ifade etmesi | Problem Çözme Stratejisi |
| **Yaptıklarının doğruluğunu nasıl gösterirsin?** | Bulduğu sonuçları nasıl desteklediği | Doğrulama Yolu |
| **Problem sende ne hissettirdi?**<br>**Sence bu problem matematiksel bir kavram ile ilişkili mi?** | İnançlara ve matematiksel kavramlara bakış açısına yönelik sorgulamalar | Probleme ve Matematiğe Dair İnanç |

### 2.5.2. İkinci klinik görüşmelerde kullanılan problemlerin seçimi

Araştırma sürecinde birinci klinik görüşmelerin ardından yapılan analizlerde katılımcıların futbol sorusunda problemin bağlamı ve düşünme yolları arasındaki ilişki ile ilgili ortaya koydukları stratejiler ve inançlar arasındaki farklılıklar araştırmanın amacı için yeterli görülmüştür. İlk görüşmelerin ikinci problemi olan tişört probleminin ise katılımcıların tamamına zor geldiği fark edilmiştir. Problemin zorluğu katılımcıların düşünme yollarının nasıl farklılaştığının incelenmesinde bir sorun teşkil etmiş ve ikinci görüşmeler için katılımcıların seviyelerine uygun fonksiyon kavramına dayanan düşünme yollarını daha rahat gösterebilecek iki farklı problemin seçilmesine karar verilmiştir.

İkinci klinik görüşmelerde araştırma sorularından olan problemin bağlamı ile ilgili veri elde edilmesinden çok katılımcıların düşünme yollarına odaklanılabilecek fonksiyon kavramına dayanan, ilişkileri gösterebilecekleri gerçek hayat problemleri tercih edilmiştir. Bu problemlerden ilki örüntülerden ilişkilere odaklanabilecekleri, değişkenlerin kullanımından genellemeleri gösterebilecekleri bir karo problemi olmuştur. Problem Ferrini-Mundy ve Lappan'ın (1997) örüntülerde genelleme ve ilişkiler üzerine yazmış oldukları bir makaleden seçilmiş ve araştırmanın amacına uygun sorularla düzenlenmiştir. Probleme ait araştırmacı tarafından sorulan sorular EK-3'te gösterilmiştir. Görüşmede kullanılan konser probleminde soruların ilişkili olduğu düşünme yolu bileşenleri tabloda gösterilmiştir.

**Tablo 2.7.** *Karo probleminde kullanılan soruların incelenmesi*

| Karo Probleminde Kullanılan Araştırma Sorusu | Veri | Düşünme Yolu Bileşeni |
|---|---|---|
| **4. ve 5. Teraslara ait resimlerle ilgili neler söyleyebilirsiniz? Daha büyük teraslardaki karo sayılarını bulmak için nasıl bir yol izlersiniz?** | Örüntülerde ilişkilerin ve nicelikler arası değişimin nasıl incelendiğine odaklanılması | Problem Çözme Stratejisi |
| **Beyaz karo sayısını bulmaya yarayacak bir kural bulabilir misiniz?** | Nicelikler arasındaki değişime odaklanılması | Problem Çözme Stratejisi |
| **Bulduğunuz kuralın her adımda işe yaradığını nasıl gösterirsiniz?** | Bulduğu sonuçların nasıl savunulduğunun incelenmesi | Doğrulama Yolu |
| **Problem sende ne hissettirdi? Sence bu problem matematikte hangi kavramla ilişkili? Karo sayılarını gösterir farklı bir kural bulabilir misiniz?** | İnançlara yönelik sorgulamalar ve farklı yöntemlere yönlendirildiğinde nasıl yönergeler kullanıldığının incelenmesi | Probleme ve Matematiğe Dair İnanç |

İkinci klinik görüşmelerde kullanılan ikinci problem ise katılımcıların fonksiyon kavramı kapsamında değişken belirleyebileceği, farklı değişkenleri kullanabileceği ve bu değişkenler arasındaki ilişkileri ifade edebileceği düşünme yollarının nasıl farklılaştığını ortaya çıkarması beklenen bir konser problemidir. Bu problem, Amerika Birleşik Devletleri'ndeki lisans programlarına kayıt için gerekli görülen, öğrencilerin yetkinlikleri ile becerilerinin ölçüldüğü, lise mezunları ile lise son sınıf öğrencilerinin katılım gösterdiği SAT (Scholastic Aptitude Test – Eğitim Yetenek Testi) sınavlarının fonksiyon kavramına dayanan matematik problemlerinin taranmasıyla elde edilmiş ve araştırmacı tarafından araştırmanın amacına uygun olarak düzenlenmiştir. Problem, araştırmanın amacına uygun olarak düzenlenmiş ve görüşmeler sırasında katılımcıların düşünme yollarını ortaya çıkarmaya yönelik sorularla zenginleştirilmiştir. Problemde kullanılan sorular EK-4'te belirtilmiştir.

Görüşmede kullanılan konser probleminde soruların ilişkili olduğu düşünme yolu bileşenleri tabloda gösterilmiştir.

**Tablo 2.8.** *Konser probleminde kullanılan soruların incelenmesi*

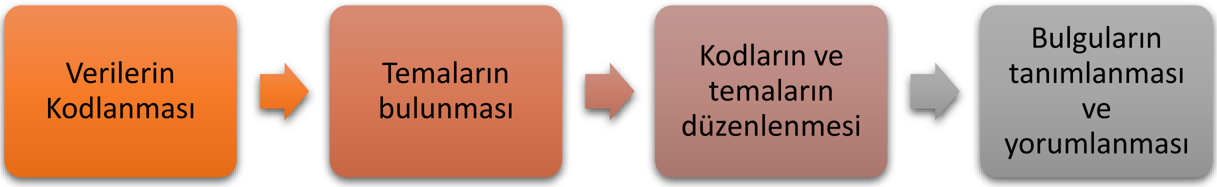
| Konser Probleminde Kullanılan Araştırma Sorusu | Veri | Düşünme Yolu Bileşeni |
|---|---|---|
| **Jale'nin kazanmayı hedeflediği ücret 150.000TL olsaydı stada gelecek kişi sayısıyla ilgili ne söylerdiniz? ( Bilet ücreti ve yapılan harcama aynı olmak üzere)** | Değişkenlerden birinin değişmesi durumunda diğerinde oluşacak değişim ilişkisinin ve bu ilişkinin yönünün nasıl incelendiğine odaklanılması | Problem Çözme Stratejisi |
| **İTÜ stadının kapasitesi, Jale Biber'in hedeflediği gelir, konser için yaptığı harcama ve konsere ödenen giriş ücretiyle ilgili bir bağlantı kurmak isteseniz neler söylersiniz?** | Tüm verilerin bir değişken olması durumunda değişkenler arasındaki ilişkiyi inceleme ve birden fazla değişkeni kullanma becerisi | Problem Çözme Stratejisi |
| **Problemi başka bir yöntemle çözecek olsanız nasıl bir yol izlersiniz?** | Alternatif çözümlerdeki yönergelerinin incelenmesi | Problemler Çözme Stratejisi ve İnanç |

### 2.6. Verilerin Analizi

Araştırmadaki veriler genel nitel araştırma desenine uygun olarak tümevarımsal içerik analizi yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir. Genel nitel araştırma yaklaşımına uygun olarak araştırmacı, nitel bir yöntemden yararlanmayı seçerek o yöntemin araştırılmasına uygun amaç, kural ya da önerileri kullanır. Bu araştırmalarda temalar, kodlar, kategoriler ve içerik analizi kullanılması nedeniyle tümevarımsal bir yöntem seçildiğinden bahsedilebilir (Lim, 2011).

İçerik analizinde temel amaç, toplanan verileri açıklayabilecek kavramlara ve ilişkilere ulaşmaktır. Bu amaçla toplanan verilerin önce kavramsallaştırılması, daha sonra da ortaya çıkan kavramlara göre mantıklı bir biçimde düzenlenmesi ve buna göre veriyi açıklayan temaların saptanması gerekmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2011).

Nitel araştırmalarda içerik analizinde dört aşamadan bahsedilebilir (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bu aşamalar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.




**Şekil 2.3.** *Nitel araştırmalarda içerik analizi aşamaları (Yıldırım ve Şimşek, 2011)*

Araştırmanın katılımcılarının düşünme yollarının analiz edilebilmesi için Şekil 1.6'da belirtilen DNR teorik çerçevesinde düşünme yollarının alt bileşenleri olan problem çözme stratejileri, doğrulama yolları ve probleme dair inançlar kapsamında bir kod-tema tablosu (Tablo 2.9) oluşturulmuştur.

Kodlama ve temaların oluşumunda problem çözme stratejilerine ilişkin Tablo 1.2'de belirtilen kovaryasyonel muhakeme çerçevesi kullanılmıştır. Düşünme yollarının incelenmesinde kullanılan kod ve tema listesini belirtir tablo ise aşağıda gösterilmiştir

**Tablo 2.9.** *Kod ve Tema Listesi*

| TEMALAR | KODLAR |
|---|---|
| **Kovaryasyonel Eylem Düzeyi Davranışları** | - Değişkeni bilinmeyen olarak kullanma<br>- Değişkeni fonksiyonel yapıda bağımlı-bağımsız olarak ifade etme<br>- Kendi sembol/simgelerini kullanma<br>- Genellemeyi sayısal veri seti üzerinden oluşturma<br>- Genellemeyi ilişkiler üzerinden oluşturma<br>- Genellemeyi görseller yardımıyla oluşturma<br>- Genellemeyi ana diliyle oluşturma<br>- Bir veri setinin sonuçlarını diğer değişkenlerle birlikte düşünüp sözel olarak ifade etme<br>- İki değişkenin farklı değerlerinde ortaya çıkan sonuçları temel olarak ilişkilendirme<br>- Bir veri setinin/değişkenlerin sonuçlarını diğer veriler/değişkenlerle birlikte düşünüp onlara olan etkisini yönüyle birlikte kullanma/kullanamama<br>- İki değişkenin farklı değerlerindeki ilişkiyi anlamlı değerler için kullanma/ilişkilendirme<br>- Bağımsız değişkendeki değişimi yönüyle birlikte ifade edebilme/edememe<br>- Seçtiği özel örnekleri rastgele belirleme<br>- Seçtiği özel örnekleri belirli bir amaç için belirleme<br>- Değişkenler için kullanılan sayı/sembolleri manipüle etme<br>- Sayı/sembol kullanımına kendiliğinden/yönlendirmeyle geçme<br>- Sembolik manipülasyon yapabilme/yapamama<br>- Birden fazla değişken kullanma/kullanmama<br>- Probleme ilişkin bir öneride bulunma/bulunmama<br>- Sonuç odaklı düşünerek çözüme odaklanma<br>- İlişki odaklı düşünerek çözüme odaklanma |
| **Doğrulama Yollarının İfade Edilmesi** | - Problemin doğruluğuna emin olma/olmama<br>- Problemin kontrol sürecine kendiliğinden girme/girmeme<br>- İfade ettikleriyle kendini ikna etme çabasında olma/olmama<br>- İfade ettikleriyle başkalarını ikna etme çabasında olma/olmama<br>- Yaptıklarını gösterirken kendine ait sayı/sembol kullanma/kullanmama<br>- Problemin kontrol sürecinde kendine ait olan/olmayan yönergeler kullanma |

| TEMALAR | **KODLAR** |
|---|---|
| **İnançlara Yönelik İfadeler ve Durumlar** | - Problemin cevabını ya da çözümünü merak etme/etmeme<br>- Çözümü boyunca kendine güvenme/güvenmeme<br>- Problemlerde kendisini yetersiz hissetme<br>- Problemi sevme/sevmeme<br>- Problemi değiştirme önerilerini kendisinin zorlandığı kısma göre seçme<br>- Problemi değiştirme önerilerini soruyu zorlaştırma/kolaylaştırma adına seçme<br>- Problemi değiştirme önerilerini rastgele seçme<br>- Çözümler boyunca onaylanma ihtiyacı hissetme/hissetmeme<br>- Problemi yapabildiğine/yapamadığına odaklanarak hissettiklerini ifade etme<br>- Geçmiş yaşam deneyimlerini çözüme yansıtma/yansıtmama |
| **Bağlama Yönelik İfadeler ve Kullanımlar** | - Problemin bağlamını günlük hayatta kullanma<br>- Problem durumuna aşina olma/olmama<br>- Problemde bulunmayan terimleri çözümünde kullanma<br>- Problemleri kendisine verilen yönergeleri kullanarak çözme<br>- Problemleri kendisine verilen yönergeler dışında geçmiş yaşam deneyimlerini dahil ederek çözme<br>- Yaptıklarını kontrol ederken problem bağlamı dışında terimler ifade etme/kullanma<br>- Problemi değiştirme önerilerini bağlam bilgisiyle birleştirme/birleştirmeme<br>- Problem bağlamına dolaylı yoldan katkı sağlayacak bir bilgiyi kullanma |

Katılımcılar kodlarda verilen davranışlara göre temalara ayrılmış ve temalarda oluşan farklılıklara göre katılımcıların düşünme yolları ve düşünme yollarının varsa bağlamla ilişkisi kategorize edilmiştir.

### 2.7. Araştırmacının Rolü

Araştırmacı, araştırmanın yapıldığı okulda öğretmen olarak görev yapmakta ve katılımcıların 9.Sınıftan itibaren matematik derslerini yürütmektedir. Bu süreçte doktora eğitimini sürdüren araştırmacı üniversitede nitel araştırma yöntemleri dersini almış ve derste öğrenilenleri okul ortamında uygulama fırsatı bulmuştur. Aynı zamanda matematik eğitimi alanında yeni yaklaşımları da okul ortamında matematik derslerinde gerçekleştirme imkanı bulan araştırmacıya bu deneyimler araştırma süreci boyunca destekleyici rol oynamıştır.

## 2.8. Araştırmada Geçerlik ve Güvenirlik

Bilimsel araştırmalar geçerlik ve güvenirlik gibi ölçütleri karşılayıp karşılamadığına göre değerlendirilir. Nitel araştırmalar ise geleneksel ölçütlerle daha az ilgilidir (Bloor ve Wood, 2006). Nicel araştırmalarda güvenirlik araştırmanın bir başka araştırmacı tarafından tekrar edilebilirliği ile ön plana çıkarken; nitel araştırmalarda geçerlik, diğer bir deyişle güvenirlik araştırmanın inandırıcılığı ile ön plana çıkmaktadır. Bununla birlikte, nitel araştırmacının verilerini başka bir araştırmacının değerlendirmesine imkan verecek şekilde düzenlemesi araştırmanın güvenirliği açısından önemlidir. Nitel araştırmada kullanılan yöntemler inandırıcılık, aktarılabilirlik, tutarlık ve teyit edilebilirlik ölçütlerine uygun olarak kullanılmaktadır. Bu araştırmada geçerlik ve güvenirliği artırmaya yönelik önlemler Tablo 2.10'da sunulmuştur.

**Tablo 2.10.** *Araştırmada geçerlik ve güvenirliği artırmaya yönelik çalışmalar*

| Kullanılan yöntemler | Ölçüt |
|---|---|
| **Uzun Süreli Etkileşim** | İnandırıcılık |
| **Ayrıntılı Betimleme** | Aktarılabilirlik |
| - **Doğrudan alıntılar** | |
| **Tutarlık İncelemesi** | Tutarlık |

Tablo 2.10'da görüldüğü gibi araştırmada geçerlik ve güvenirliği artırmak adına çeşitli yöntemler kullanılmıştır. Araştırmacı, araştırmanın yapıldığı okulda öğretmen olarak görev yaptığı için araştırmaya dahil olan katılımcılarla matematik derslerinden, okul ve pansiyon ortamından uzun süreli etkileşim halindedir. Bu durum katılımcıların yapılan görüşmelerde daha rahat davranabilmelerini ve süreçte daha samimi cevaplar verebilmelerini sağlamıştır.

Araştırmada aktarılabilirlik ölçütüne ilişkin olarak ayrıntılı betimleme yapılmıştır. Yapılan görüşmelerde elde edilen veriler ayrıntılı bir biçimde sunulmaya çalışılmıştır. Bu amaç doğrultusunda verilerin analizinden elde edilen bulguların sunumunda katılımcıların görüşlerinden ve görüşme sırasındaki matematiksel hesaplamalarını ilişkin görsellerden doğrudan alıntılara yer verilerek detaylı betimleme yapılmıştır.

Araştırmada tutarlık ölçütüne ilişkin olarak düşünme yollarında ve problem çözme stratejilerinde iki farklı kuramsal çerçeveye yer verilmiş, bu kuramsal çerçeveden uzaklaşmamaya özen gösterilmiştir. Klinik görüşmelerden önce, görüşmelerde kullanılacak katılımcıların düşünme yollarını ortaya çıkarması beklenen sorular hazırlanmış ve ikinci klinik görüşmeler öncesinde elde edilen verilerden sonra yeniden düzenlenmiştir.

Araştırmada ilk klinik görüşmelerinden ardından verilerin geçerliğini sağlamak için bir klinik görüşme daha gerçekleştirilmiş ve katılımcıların düşünme yollarının fonksiyon kavramında detaylı incelemesine çaba gösterilmiştir.

# 3. BULGULAR VE YORUM

Araştırmanın bu bölümünde katılımcıların düşünme yollarının incelenmesine yönelik gerçekleştirilen klinik görüşmelerin analiz edilmesiyle ortaya çıkan bulgulara yer verilmiştir. Araştırmanın bulguları düşünme yollarının alt bileşeni olan katılımcıların problem çözme stratejileri, doğrulama yolları ve probleme dair inançları kapsamında ayrı ayrı ele alınmıştır. Problemin bağlamı ile düşünme yolları arasındaki ilişkiye yönelik bulgulara ise her katılımcı için ayrıca yer verilmiştir. Tüm katılımcıların klinik görüşmeler boyunca problemlere verdiği yanıtları bir bütün halinde görebilmek için tüm veriler açık bir şekilde her katılımcı için ayrı ayrı sunulmuştur.

## 3.1. Problem Çözme Stratejilerine Yönelik Bulgular

Araştırma, fonksiyon kavramı kapsamında yapıldığı için problem çözme stratejilerine yönelik bulgular hem fonksiyonel düşünmede yer alan eşleme ilişkisini hem de nicelikler arasındaki birbirlerine göre değişim ilişkisini içinde barındıran kapsamlı bir fonksiyonel düşünme çeşidi olan kovaryasyonel muhakeme çerçevesinde analiz edilmiştir. Katılımcıların bulgulardaki veriliş sırası kovaryasyonel muhakeme düzeylerine göre az istendik olandan daha fazla istendik olana göre sunulmuştur.

### 3.1.1. Celile'nin problem çözme stratejilerine yönelik bulgular

Katılımcılarla yapılan görüşmelerde Celile, problemleri ilk seferde anlamakta zorlanmış, çok kez okuduklarını tekrar etmiş ve işlemlere fazla zaman ayırdığı için odaklanma sorunu yaşamıştır. İki görüşmede de kendisine yöneltilen problemlerde Celile, işlem yapmadan sonucu tahmin etme yoluna gitmiş ancak yönlendirmelerle işlem boyutuna geçebilmiştir.

> Celile: Okuyayım çünkü hiçbir şey anlamadım. (Gülüyor) (Soruyu içinden tekrar okur) Hıı. B ve… B, C ile berabere kalıyor. Hıı. E, D. Hıhı… O zaman D birinci şampiyon olmaz mı D?
>
> …
>
> Araştırmacı: İçinden tekrar okuyabilirsin ya da eğer anladım diyorsan ne anladığını söyleyebilirsin.
>
> Celile: Bakayım. (Soruyu içinden okur) Hım… Sanki ajans matbaa daha iyi.
>
> …
>
> Araştırmacı: Ne anladın?

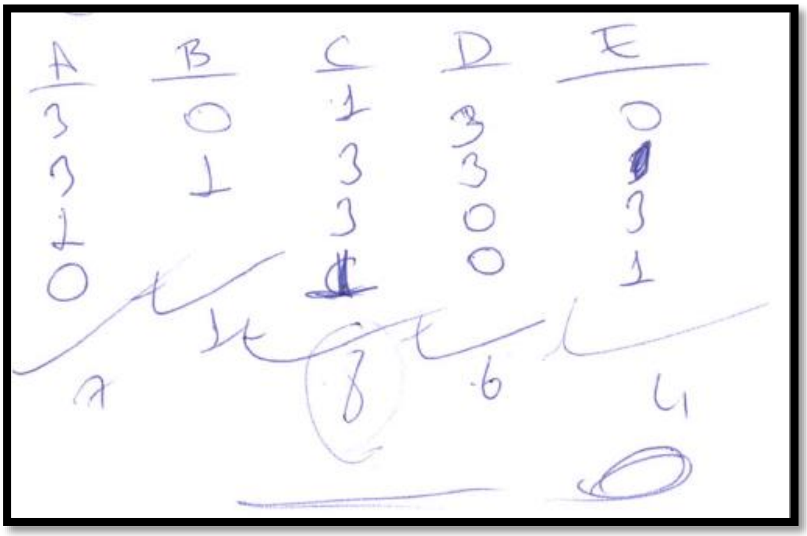
Celile: Anlamadım, bir daha okuyorum o yüzden. (Soruyu tekrar içinden okumaya başlar.) Her bir terasın ortasına dikdörtgen bir bahçe… (Sessizlik) Dördüncü ve beşinci teras… Bunların her biri teras mı şimdi?

…

Araştırmacı: İçinden tekrar okuyabilirsin ya da eğer anladım diyorsan ne anladığını söyleyebilirsin.

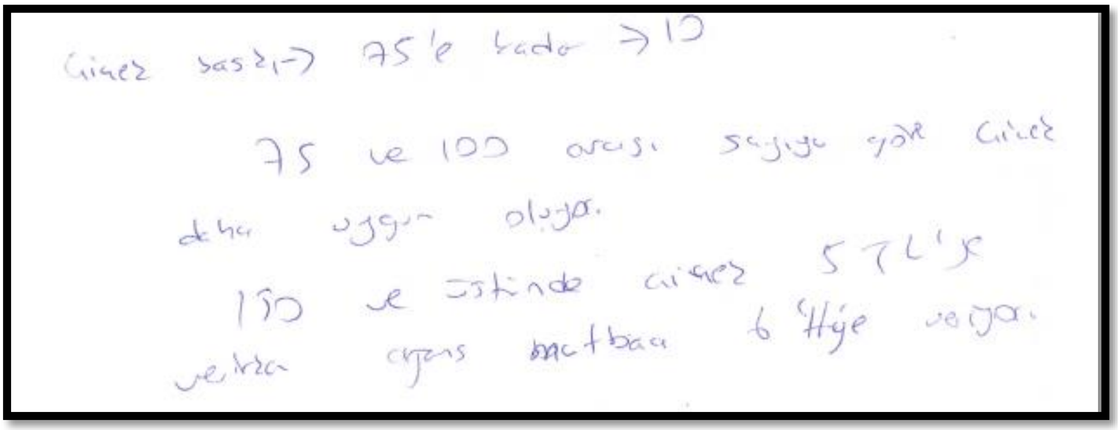
Celile: Bakayım. (Soruyu içinden okur) Hımmm… Sanki ajans matbaa daha iyi.

Yapılan yönlendirmelerle Celile'nin farklı problemlerde farklı stratejilere yönelebildiği ortaya çıkmıştır. Katılımcı, futbol sorusunda bir diyagram oluşturma yoluna gitmiştir. Takımların aldığı puanları alt alta yazmış ve soruya dair yorumlarını bu diyagram üzerinden yapmıştır.



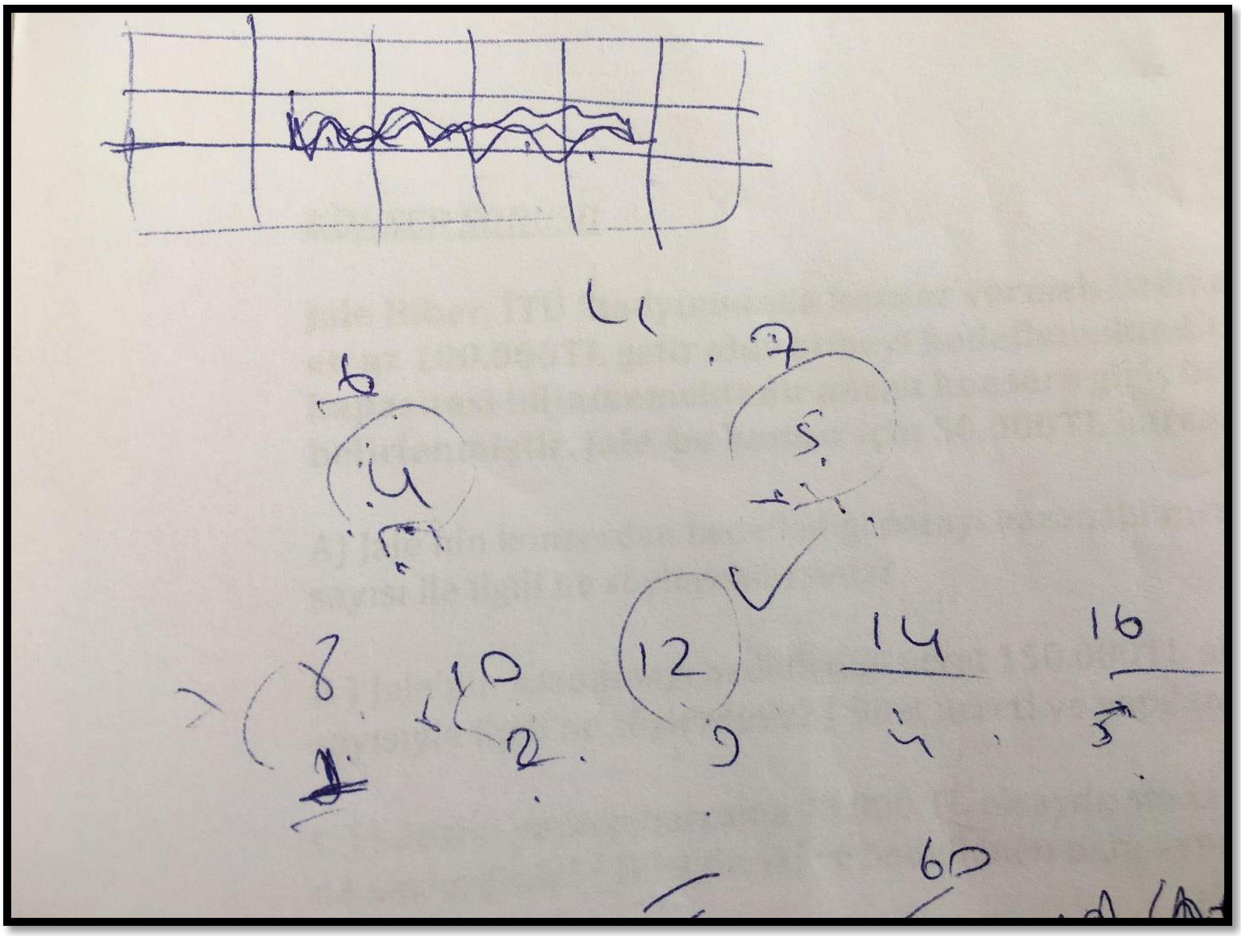

**Görsel 3.1.** *Celile'nin futbol problemine ilk yaklaşımı*

Tişört probleminde ise, Celile'nin cebirsel ifadeleri kullanmakta zorluk yaşadığı görülmüştür. Değişken ve değişkenler arasındaki ilişkileri cebirsel olarak göstermekte zorlandığı için kendisini ana dilde ifade etmeye çalıştığı da görülmüştür.



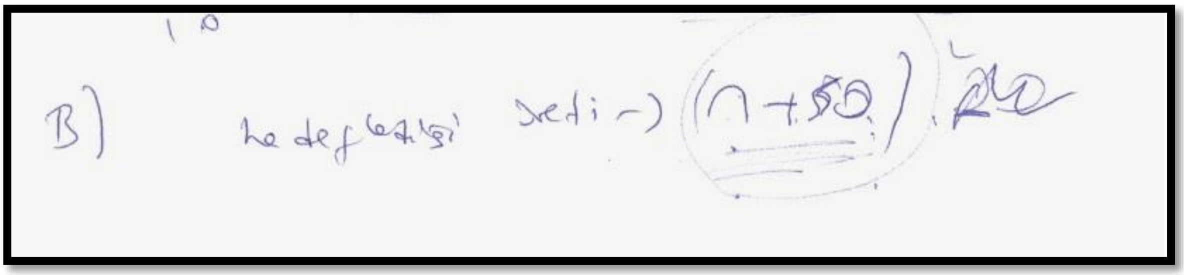
**Görsel 3.2.** *Celile'nin tişört problemine ilk yaklaşımı*

Araştırmanın bir başka problemi olan karo probleminde ise, katılımcının bir örüntü olduğunu sezdiği ve bu örüntünün nasıl devam edeceğini bulabilmek için görsel ve sayısal stratejilerden yararlanmaya çalıştığı görülmüştür.




**Görsel 3.3.** *Celile'nin karo problemine görsel ve sayısal yaklaşımı*

Görüşmelerin son problemi olan konser probleminde Celile, yine değişken kullanımında zorlandığı için kendisini ana dilde ifade etmiştir.




**Görsel 3.4.** *Celile'nin konser probleminde değişken kullanımı*

Celile'nin Problemlerde katılımcıların nicelikler arasındaki ilişkileri nasıl ifade ettiklerine yönelik verilen bilgileri ilk okuyuşta anlayamadığı ve bunu işlemlerine yansıtamadığı görülmüştür. Örneğin futbol sorusunda her bir takımın birbirleriyle birer maç yapması gerektiği cümlesini defalarca okumuş ancak bu bilgiyi yaptığı işlemlere yansıtmakta zorlanmıştır. Takımların birbirleriyle birer maç yaptığı bilgisi verilmesine rağmen sadece soruda geçen A, B ve D takımlarına odaklanmış diğer takımların da aynı sayıda maç yapacağını ilk aşamada düşünmemiştir.

> Araştırmacı: Peki sen hangi takımların puanlarını buldun?
>
> Celile: Ben mi? A, B, D'nin.
>
> Araştırmacı: Peki kaç takım var?
>
> Celile: Beş.
>
> Araştırmacı: Diğerleri?
>
> Celile: Diğerlerini vermemiş çünkü. (Gülüyor) B, yani tek tek şey yapmış ya.
>
> Araştırmacı: Vermemiş mi diğerlerini?

Benzer şekilde tişört probleminde de Celile'nin ilişkilere odaklanmadığı ve rastgele bir örnek seçerek problemin çözümüne dair örneğin sonucuna odaklandığı görülmüştür. Problemde ne düşündüğünü anlatırken de rastgele özel bir örnek seçerek giriş yapmış ve hangi matbaanın hesaplı olduğunu sembol ya da değişken kullanmadan yazarak ifade etmiştir.

> Celile: Yani 75 den sonrakilere 2 TL'lik indirim yapınca da 8 oluyor ya. (Tekrar bir kısmını okur.) Mesela ajansta 100 tişörte kadar 12 mesela. Atıyorum 89 tişört basılacaksa çiçekte ne kadar 8 lira, ajansta 12 liraya denk geliyor. Yani çiçek daha uygun oluyor fiyatı.

Tişört probleminde nicelikler arasındaki ilişkilere odaklanmakta sorun yaşayan Celile, Problemdeki parçalı yapıyı pek de dikkate almadan tüm tişört sayılarında çiçek matbaanın daha uygun olacağını söylemiştir. Farklı tişört sayılarını düşünmesi için yönlendirildiğinde bunu her seferinde özel örnekler üzerinden deneyerek yapmış ve dört işlem yaparken zorlandığı görülmüştür. Yönlendirmelere rağmen sorunun parçalı yapısına, parçalı yapıda ortaya çıkması muhtemel nicelikler arasındaki ilişkilere yönelmemiş ve matematiksel olarak problemi ifade etmekte zorlanmış, mutlaka kesin bir tişört sayısı verilmesi gerektiğini belirtmiştir.

> Araştırmacı: Şöyle söyleyeyim Celile. Biz hep deneyecek miyiz ne olduğunu bulmak için?
>
> Celile: Yani evet deneyebiliriz.
>
> Araştırmacı: Denemeden yapamaz mıyız bu soruyu? Denemeden değerleri bir bütün halinde göreceğimiz bir şey oluşturamaz mıyız?

Celile: Yani denememiz lazım o şekilde şey yapamayız sağlamasını yapmalıyız sürekli.

Araştırmacı: E bütün değerleri tek tek denememiz mümkün mü?

Celile: Değil de mesela kafadan bir oran belirleyeceksin mesela 75’e kadar diyor ya…

Araştırmacı: 75’e kadar cümlesini biz matematikte ifade edebilir miyiz? Matematiksel bir sembolle ifade edebilir miyiz?

Celile: Hayır.

Araştırmacı: Edemez miyiz? Edebilsek bu soruyu gösterebilir miydik?

Celile: Yani yine aynısı olurdu ki kesin bir şey vermedikçe, sayı vermediği için. Belirsiz öğrenciler.

Araştırmacı: 75’e kadarı biz matematiksel olarak gösteremeyiz diyorsun.

Celile: Evet.

Celile, problemin devamında net bir biçimde değişken kullanıp cebirsel ifade yazmaya yönlendirilse dahi kendini matematiksel sembollerle ifade etmekte zorlanmış, Seçtiği “x” değişkenini tişört sayısına bilinmeyen olarak atamış ancak bilinmeyeninin sınır değerlerinde ve neyi ifade ettiği konusunda emin olamadığından ilerlemekte zorlanmıştır.

Araştırmacı: 100 öğrenciye kadar. Peki Celile bu soruda biz, yine sen kendini ifade etmek için başka bir yöntem kullansan nasıl bir yöntem kullanırsın daha rahat edebileceğin?

Celile: Yani… Yine rakamlar verirdim yani.

Araştırmacı: Hep denerdin yani?

Celile: Evet, denerdim.

Araştırmacı: Denemeden yapamaz mıyız soruyu?

Celile: Nasıl yapacağız ki? Yapamayız bence yani.

Araştırmacı: Denklem kurabilir miyiz?

Celile: Denklem mi? Hıh. (Sessizlik)

Araştırmacı: Kuramaz mıyız?

Celile: Yani şu an bilmem kurabilir miyiz?

…

Araştırmacı: Mesela 75’ten az için çiçek matbaayı göstereceğiz?

Celile: (Kağıda “x<75’ten azsa” yazar)

Araştırmacı: Hı, “x” kullandık öyle mi? “x” ne burada?

Celile: Tişört sayısı.

Araştırmacı: Yaz, “x” tişört sayısı yaz.

Celile: (“x= tişört sayısı” yazar.)

Araştırmacı: Peki. 75’ten azsa ne oluyormuş?

Celile: 75 tişörte kadarmış. 10 liraymış.

Araştırmacı: Yani?

Celile: “10x”.

Araştırmacı: “10x” ne?

Celile: “10x” tişört, ha. “x” yine 750 oluyor değil mi? Evet? 10 TL imiş.

Araştırmacı: “x”, 750 mi oluyor?

Celile: Hayır, olmuyor. Çünkü öğrenci sayısını bilmiyoruz.

Araştırmacı: Hı. Öğrenci sayısına biz ne dedik?

Celile: “x” dedik.

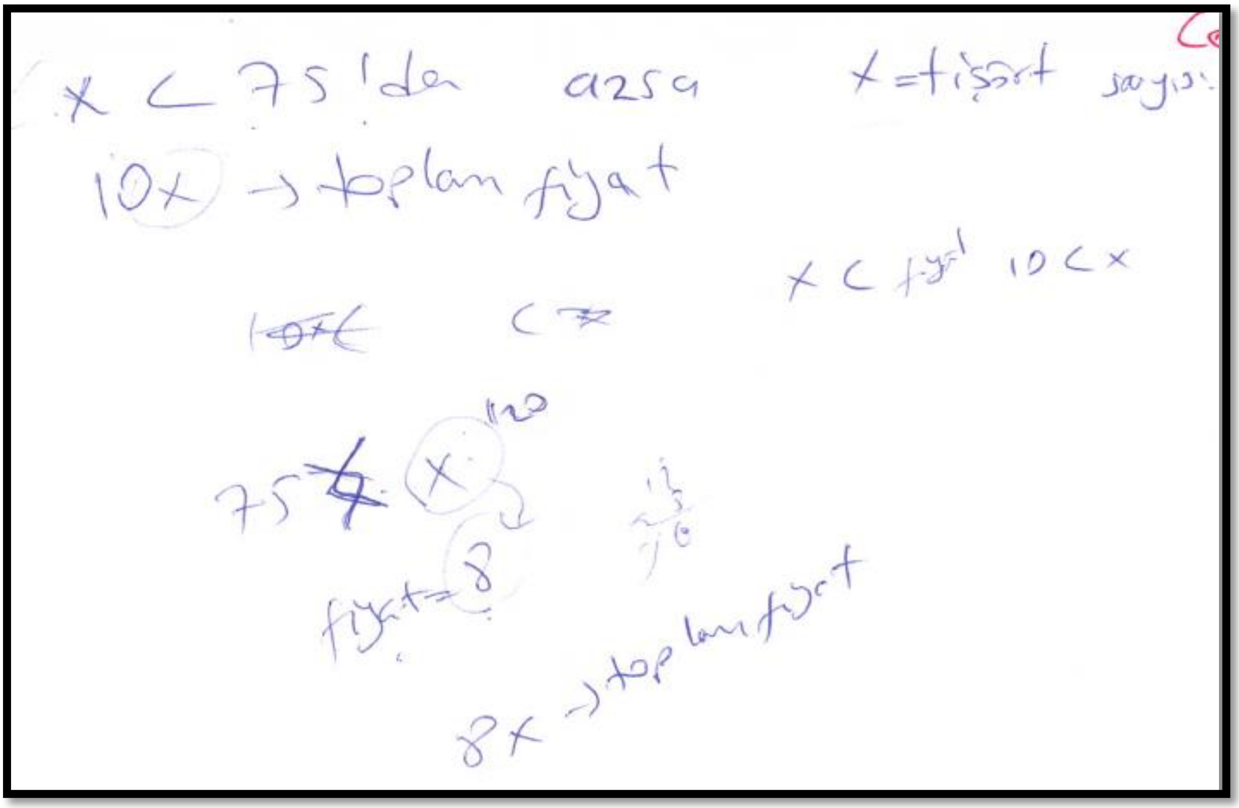
Araştırmacı: “x” dedik. Yani ne oluyormuş o?

Celile: Yani 10 liraymış fiyatı.

Araştırmacı: Yani ne olur?

Celile: Yani “10x”se 100 lira. “12x” ise 120 lira.

Yönlendirmeler üzerine değişken kullandığında dahi niceliklerin neyi temsil ettiğini ifade etmekte Celile’nin zorlandığı ve sembolik manipülasyonu yapamadığı düşünülmüştür.




***Görsel 3.5.*** *Celile’nin tişört probleminde değişken kullanımı*

İçerisinde bir örüntü barındıran ve katılımcıların görselleri ya da cebirsel ifadeleri kovaryasyonel olarak nasıl yorumladıklarına odaklanılan karo sorusunda Celile, problemi birkaç kez okumasına rağmen anlamakta zorlanmış, karoları tek tek saymış, görsellerin yardımıyla şekli kafasında devam ettirmiş sonunda da dördüncü ve beşinci teraslardaki karo sayılarını yorumlamıştır.

> Celile: Tamam, önce böyle yapmış. 3 burada, 4 ve 5. Her birinde birer tane daha artmış. Bir sonrakinde 6 tane olacak. 4, hım… Yani şuraya şey dersek 6. Beşinci 7 olacak. Kaç tane beyaz karo olduğunu bulunuz… Hı… Beşteyken 3 tane, altıdayken iki eksiği oluyor yani. Aynen. 6'dan 2 çıktı 4; buradan 2 eksiği de 5. 4 ve 5 gelecek yani siyah kısımlar. Zaten siyah karo; dördüncüde 5 tane siyah karo, beşincide de 5 tane siyah karo olacak.

Kendisinden daha büyük teraslardaki karo sayılarının nasıl bulunacağı istendiğinde aklına ilk olarak değişken kullanmak gelmiş ancak değişken olarak neyi belirlemesi gerektiğine karar verememiş ve ifadeler arasında ilişki kurmakta sorun yaşamıştır. Celile, bir cebirsel ifade yazmak için bu problemde neyi bilinmeyen olarak kullanması gerektiğini yönlendirmeler ve görseller yardımıyla görebilmiş ancak yine de genelleme adımına geçmekte zorlanmıştır.

> Araştırmacı: Şeyi bir çizsene Celile, dördüncüyü.
> Celile: Dördüncüyü mü çizeyim? Tamam
> Araştırmacı: Evet, dördüncü terası.
> Celile: Üç tane olacak. 1, 2, 3 tamam. (3 satır ve 6 sütundan oluşan bir teras çizer ve içerideki 4 karoyu siyaha boyar.) O zaman şurası olacak, 1, 2, 3, 4 tane tamam. Evet.
> Araştırmacı: Şimdi ne bulduk?
> Celile: Yani 4 tane siyah oldu, evet. Yanlış yazmamışım.
> Araştırmacı: Tamam. Yine 4 de sadece.
> Celile: Tamam. Bir sonraki de o zaman 5 olur.
> Araştırmacı: Peki. 60. terasta kaç tane siyah karo olur?
> Celile: 60 tane olur o zaman.
> Araştırmacı: Siyahta 60 tane?
> Celile: Aynen. Aynı gidiyor.

Karo probleminde Celile'nin yönlendirmeler üzerine değişken kullanarak bir genellemeye ulaşabildiği ve bunu satır-sütun sayıları yardımıyla yaptığı görülmüştür.

> Araştırmacı: Peki acaba bunu genellemeye kalksak yani sadece 60 için değil de biz öyle bir şey diyeceğiz ki artık…
> Celile: Bir kural, bir yöntem…
> Araştırmacı: Ha sen diyeceksin ki bu terası soruyorsa böyle yaparım. Hep uygulayabileceğin bir yöntem.
> Celile: Zaten siyah için hangisini soruyorsa aynısını vereceğim.
> Araştırmacı: Hıh. Yaz onu.

Celile: Hı. Siyah karo sayısı… (Siyah karo sayısı, kaçıncı teras sorduğu zamankine eşittir yazar.)

Araştırmacı: Peki beyaz için?

Celile: Beyaz için… Sonuçta sütun sayıları iki fazlası olacak. Mesela 170'i mi soruyor, ben 172 sütun olduğunu bileceğim orada. Yani "n+2" diyebilirim yani.

Araştırmacı: "n"nin ne olduğunu da yazarsan…

Celile: "n" sütun benim için, "n+2"…

Araştırmacı: "n" sütun olursa "n+2" sütun olmaz ama öyle bir durum var. "n", ne? "n+2" ne? Bir daha bak oraya.

Celile: "n" benim için teras.

Araştırmacı: Teras.

Celile: Teras. "n+2" de sütun benim için. Altında da… Iıı… "n+2"… "n+2" çarpı çünkü ikisin de alacağım. Bir de şuradan çıkartmam gereken siyahlar var.

Araştırmacı: Ama beyazı arıyoruz şuan biz siyahı aramıyoruz. Siyahı sen söyledin zaten. Toplam karo sayısında değiliz de şuan beyazdayız. Siyahlar yok çıkartman gereken. Neden çıkartıyorsun siyahları?

Celile: Ama zaten burayı 62, burayı da 62 aldım ya burayı da artı 2 daha eklemem lazım.

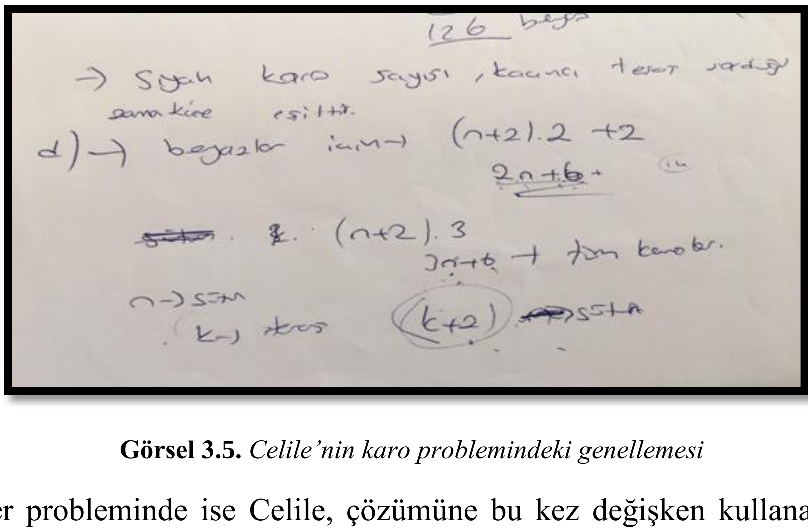
Araştırmacı: Yaz ne bulduğunu. ("d) beyazlar için – (n+2).2 +2" yazar.)

Celile: "n+2 çarpı 2 artı 2" daha ortak kısım için.

Araştırmacı: Ne olur yani?

Celile: Yani kuralım oldu bir nevi.

Celile'nin, problemde önce bütün karoların sayısı, ardından beyaz karoların sayısı istendiğinde daha hızlı bir şekilde yanıt verip kendisini ifade edebilirken doğrudan beyaz karoların sayısını gösteren bir ifade istendiğinde zorlandığı görülmüştür.




**Görsel 3.5.** *Celile'nin karo problemindeki genellemesi*

Konser probleminde ise Celile, çözümüne bu kez değişken kullanarak başlamış ancak kullandığı değişkenin neyi temsil ettiğini ifade etmekte zorlandığı görülmüştür. Konsere gelmesi beklenen kişi sayısına "n" değişkenini atamıştır. Hedeflediği ücreti “n+50 bin” olarak belirlemiş ve bunu bilgiyi kullanırken sorunlar yaşamıştır. Cebirsel ifadelerini ve onların yönlerini göstermekte zorlandığı görülmüştür.

> Celile: Yani hedeflediği ücret… Ücrete ben dedim ki “n” dedim. Yani 150 bin hedefliyor. İlk soruda da mesela 100 bin hedefliyordu. Şimdi ona “n” deyince artı 50 bin daha var. Yani 50 diyorum şu anda.
> Araştırmacı: Harcaması…
> Celile: Evet, harcaması. Bu sabit çünkü…
> Araştırmacı: Artı 50 bin mi olur eksi 50 bin mi olur?
> Celile: …
> Araştırmacı: Yani 50 bin daha az mı kazanmalı çok mu kazanmalı?
> Celile: Çok kazanmalı. Artı o yüzden.
> Araştırmacı: 50 bin daha çok kazanmalıysa mesela 100 bin hedefliyorsan…
> Celile: 150 kazanması lazım.
> Araştırmacı: 50’yi ne yapıyorsun sen orada?
> Celile: Yani… Ekstra yapıyorum.
> …
> Celile: Yani… (sessizlik) Hedeflediği ücrete “n” dersem oradan bir şey çıkartamıyorum ya da ben göremiyorum…

Celile’nin problem çözme stratejilerini gösterir tablo aşağıda sunulmuştur.

**Tablo 3.1.** *Celile’nin Problem Çözme Stratejileri*

| **Not Ortalaması:** 75,252 | | **Katılımcılar Arasındaki Not Ortalaması Sırası:** 2 |
|---|---|---|
| Tahminde Bulunma | Diyagram Oluşturma | Tablo Yapma |
| Ana Dili Kullanarak Kendini İfade Etme | Görsellerden Faydalanıp Genelleme Yapma | Tek Değişken Kullanıp Cebirsel İfade Yazma |

Tablo 3,1’den de anlaşıldığı gibi Celile’nin klinik görüşmeler boyunca tahminde bulunma, diyagram oluşturma, kendini ana dilini kullanarak ifade etme, görsellerdeki artışlardan yararlanıp genelleme yapma ve tek değişkeni kullanıp cebirsel ifade yazma problem çözme stratejilerini kullandığı görülmüştür. Celile'nin görüşmelerde verdiği cevaplardan; matematiksel işlemlerde, nicelikler arasındaki ilişkileri görme ve bunları ifade etme durumlarında, matematiksel sembol veya değişken kullanımlarında, birden fazla değişken kullanması gerektiğinde ve kullandığı değişkenlerin ne anlam taşıdığının farkında olma noktalarında sorunlar yaşadığı gözlenmiştir. Fonksiyon kavramına dayanan niceliklerin birbirlerini nasıl etkilediğini odaklanmadan problemlere sonuç odaklı yaklaştığı düşünülmüştür.

### 3.1.2. Mine'nin problem çözme stratejilerine yönelik bulgular

Araştırmanın katılımcılarından Mine'nin soruları bir kez daha okuma gereksinimi duyduğu, problem çözme stratejilerine sık sık bir sonuç bulma isteğiyle tahmin ederek başladığı görülmüştür.

> Araştırmacı: Birinci soru bu turnuvanın şampiyonu hangi takım olmuştur? Öncelikle soruyu anlamadıysan tekrar kendi içinden de okuyabilirsin. Anladıysan da ne anladın?
>
> Mine: Tamam bir kendim okuyayım.
>
> Araştırmacı: Oku.
>
> Mine: (Soruyu içinden okumaya başlar) A kazanmıştır o zaman.
>
> …
>
> Mine: Bir daha okuyacağım. (Soruyu içinden tekrar okur) İyiymiş. İndirim yapıyorlarmış.

Mine'nin görüşmelerde yer alan problemlerde nicelikler arasındaki ilişkileri gösterirken ilk problem çözme stratejilerinde kendi diyagramını oluşturabildiği, rastgele seçtiği özel örnekleri kullanabildiği, çizerek sonuç arayabildiği ve tek değişken kullanıp cebirsel ifadeleri çözme arayışı içerisine girebildiği görülmüştür.

Mine, ilk görüşmede yer alan futbol sorusunda takımların birbirleriyle yaptıkları maçları incelemiş ve herhangi bir işlem yapmadan sorunun cevabını tahmin ettikten sonra takımların puanları arasındaki ilişkiler üzerine hatalar yaptığının farkında olması araştırmacı tarafından sağlanmıştır. Mine'nin yaptığı okuma hatalarını kendisinin görmesi hedeflenmiştir.

> Araştırmacı: Nasıl bu sonuca vardın?
>
> Mine: Nasıl bu sonuca vardım. A; E ve B'yi yenmiş. Yani üçer puandan 6 puan geliyor. C ile de berabere kalmış. Oradan da 1 puan geliyor. 7 puan almış oluyor.
>
> Araştırmacı: Hıı.
>
> Mine: B de C ve D'yi yeniyor, 6 puan geliyor. D de C'ye yeniliyormuş oradan sıfır…
>
> Araştırmacı: B, C ve D'yi yeniyor mu Mine?

Mine: Yeniliyor. O zaman B hiç puan almıyor.

Araştırmacı: Bunu direkt okuyarak görebilir miyiz kimin kazandığını?

Mine: … Düşünürsek çok görürüz.

Problemi üçüncü kez okuduktan sonra şema şeklinde oklarla bir diyagram oluşturmuş ve soruda bahsi geçen takımları yazıp yaptıkları maçlardan aldıkları puanları okların karşılarına yazmayı tercih etmiştir. Bu hesaplamasının sonucunda da problemde verilen takımların aldıkları puanları hesaplayıp A takımının şampiyon olacağını düşünmüş ancak D takımının sadece C takımı ile maç yaptığını belirtip diğer maçlarında ne olduğunu bilmediğini ifade etmiştir. Problemde tek başına hiç verilmediği için C takımı için ayrıca bir hesap yapmadığı yani takımlar arasındaki ilişkilere odaklanmadığı görülmüştür.

Mine: (“A--, B yeniyor – 6”, altına “C berabere --- 1” ve onun altına da “D’ye yeniliyor 0” yazar) (“B—C D’ye yeniliyor --- 0” yazar) D, C’ye yeniliyorsa yani diğerlerini yenmiş mi? … (Sessizlik) (“D--- C’yi yeniliyor --- ?” Yazar) ( “E—D’yi yeniyor --- 3”, altına da “B, C ‘ye berabere kalıyor--- 2” yazar) Böyle yazıp hesapladığımda A şampiyon görünüyor ama D’yi bilemiyorum çünkü sadece C’ye yeniliyor demiş. E, D ve B’ye yenilmiş mi berabere mi kalmış bilmiyorum…

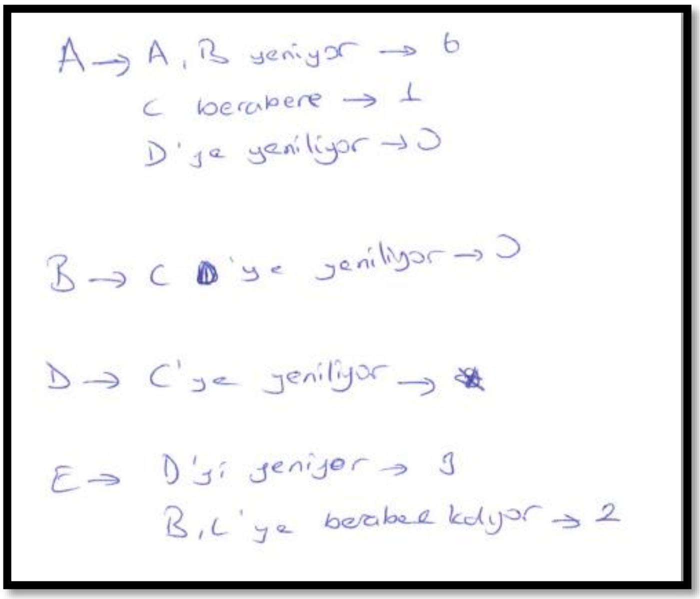
Araştırmacı: Şimdi sen oraya hangi takımları yazdın?

Mine: A, B, C, D’yi.

Araştırmacı: C’yi nereye… A’yı yazıp ok çıkarttın, B’yi yazıp ok çıkarttın, D ve E’yi yazıp ok çıkarttın…

Mine: C’yi yazmadım.

Yaptığı işlemleri oluşturduğu diyagramla göstermiştir.




**Görsel 3.6.** *Mine’nin futbol problemindeki ilk hesaplamaları*

Oluşturduğu diyagramın ardından farklı bir yöntemle çözümü daha rahat görüp göremeyeceği sorulduğunda ise, aklına ilk olarak tablo yapmak gelmiş ve tablosuna takımların her birinin kaçar maç yapmış olduğunu düşünerek başlamıştır.

Araştırmacı: Onu nasıl görebileceğiz? Böyle rahat göreceğimiz. Böyle yapınca sen hepsini görebiliyor musun kim kimi yenmiş?

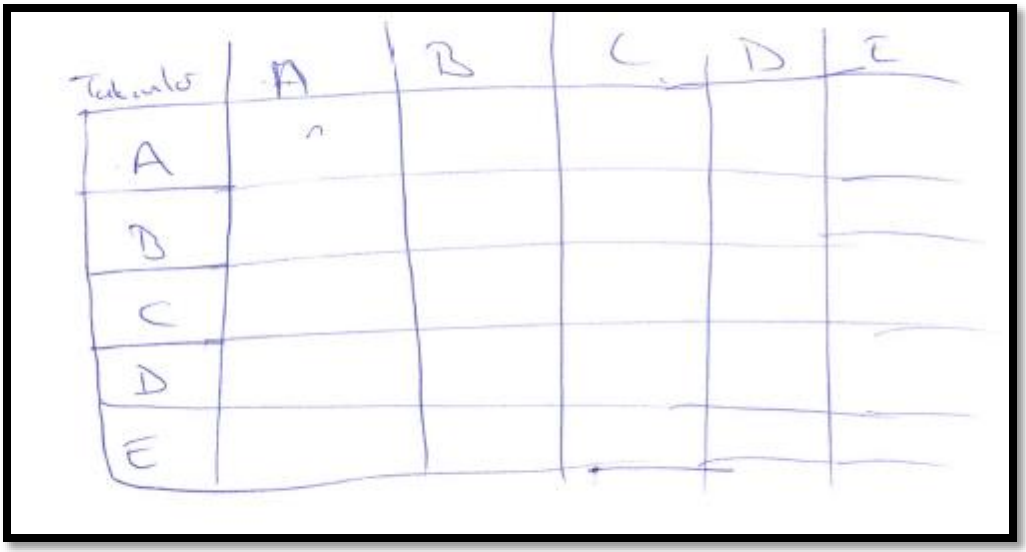
Mine: Hepsini göremiyorum ama…

Araştırmacı: Hepsini görebilecek şekilde nasıl yazabilirsin?

Mine: Pano çizsem.

Araştırmacı: Çiz.

Mine: (Tablo çizmeye başlar. Sütunlara sırayla takımlar “A, B, C, D, E” ve satırlara da “A, B, C, D, E” yazar) Her biri diğeriyle sadece bir kere maç yaptı ona göre her biri dörder maç mı oynamış oluyor?




**Görsel 3.7.** *Mine'nin futbol probleminde çizdiği ilk tablo*

Futbol probleminde takımların birbirleriyle kaçar maç yaptıkları ve toplam kaç maç yapıldığı kısmında problem yaşayan Mine'nin soruda kendisinden istenen cevaplara odaklandığında karşılaştığı tutarsız sonuçlar karşısında tek tek maçları sayma yoluna gitmiş takımların aldıkları sonuçların birbirini nasıl etkilediğine odaklanmadığı görülmüştür. Bu tutarsızlığı açıklarken de problemde olmayan bir bilgiyi probleme dahil edebildiği ortaya çıkmıştır.

Araştırmacı: Turnuva sonunda kaç tane maç berabere bitmiştir?

Mine: Berabere… 1, 2, 3, 4, 5. 5. 6.

Araştırmacı: 6 maç mı berabere bitmiş?

Mine: Evet.

…

Araştırmacı: Peki. Bu turnuvada toplam kaç tane maç yapılmış?

Mine: … 20.

Araştırmacı: 20.

Mine: Evet. 5 takım var. Her biri birbiriyle yapıyor ama her bir takım kendiyle maç yapmayacağına göre… 4 e düşüyor. 4 kere 5, 20.

Araştırmacı: Peki burada 20 maçı bana gösterir misin? Say böyle 1, 2 diye maçları.

Mine: Bir dakika. 1, 2, 3, 4.

Araştırmacı: 4 tane maç oldu şuan.

Mine: 1, 2… Şunu bir sayayım. 1…1, 2, 3... 9 maç oluyor o zaman.

Araştırmacı: 9 maç mı oluyor?

Mine: 10 maç.

Araştırmacı: Peki 10 maç mı yapılmış 20 maç mı nasıl bileceğiz Mine?

Mine: 10 maç mı 20 maç mı? Onu elenen takıma göre bilebiliriz.

Araştırmacı: Elenen takım dediğimiz?

Mine: Eğer hiç puan almadıysa elenmiştir.

Araştırmacı: Var mı öyle hiç puan almayan takım?

Mine: Yok.

Araştırmacı: Turnuvada bir de öyle bir bilgi var mı? Elenen takım hiç puan almamıştır elenmiştir diye.

Mine: Öyle bir bilgi de yok.

Yapılan yönlendirmelerle ilişkiler üzerinden hesaplamalarını tekrar yapması istendiğinde toplam maç sayısının sorulduğu sorudan sonra berabere biten maçların sonucunu her takımın için ayrıca saydığını fark etmiştir.

Araştırmacı: Peki 10 maç mı 20 maç mı ne diyeceğiz bu konuda? Bir yandan diyorsun ki 5 takım var, dörder maç yapıyorlar. 5 kere 4'ten 20 maç diyorsun. Bir yandan tek tek sayıyorsun…

Mine: 10 maç.

Araştırmacı: 10 maç buluyorsun. Ne diyeceğiz?

Mine: … 10 maç derim.

Araştırmacı: Nasıl? Neden?

Mine: Burada her takım için baktığımda B için mesela. B'nin ayrıca A ile maçını da yazdım. Burada da yazmış oldum. İki kere saydım maçı. O yüzden burada yanlış oluyor buradan baktım.

Araştırmacı: Peki yaz 10 maç diye.

Mine: (Toplam 10 maç yazar)

Araştırmacı: O zaman 10 maç yapıldıysa bu 10 maçın 6'sı berabere mi bitti?

Mine: 3 olur o zaman.

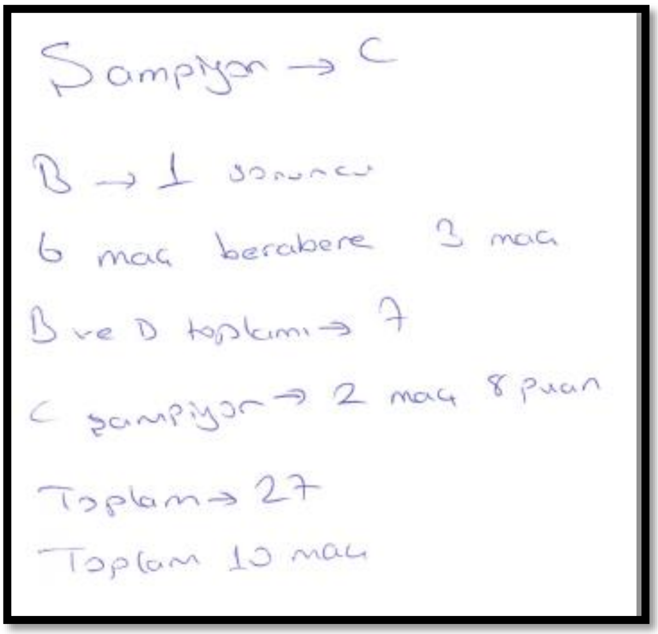
Araştırmacı: Neden 3 olur?

Mine: Bu da 20 ise 10, bu da 6 ise 3 olur.

Araştırmacı: Nasıl anlamadım. 10 maç yapılmış. Buna karar verdin. Ama berabere biten maçı sorduğumuzda 6 maç dedin. 10 maçın 6'sı berabere mi bitmiş dediğimiz zaman 3 dedin. Nasıl bakacağız ona?

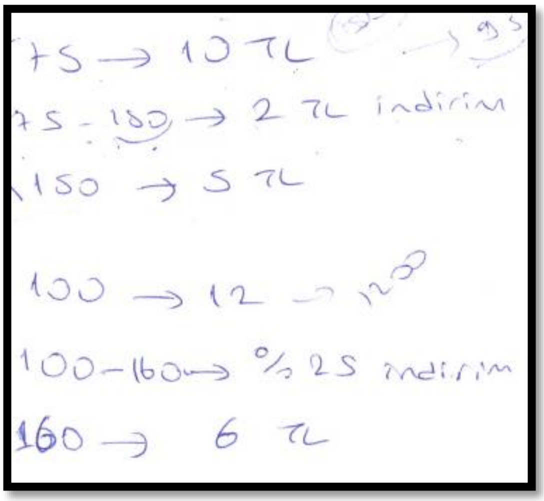
Mine: … Onla da aynı şekilde hani burada A ile B'yi ayrı ayrı yazdığımda berabere kalan maçları da ikişer kez saymış oldum o yüzden 6 oldu.

Mine'nin futbol probleminde verdiği cevaplarda yanlışlar olduğu ancak bunları kendiliğinden kontrol etme ihtiyacı hissetmediği görülmüştür.




**Görsel 3.8.** *Mine'nin futbol problemine verdiği cevaplar*

Tişört probleminde ise Mine, problemde yöneltilen indirimlere odaklanmış ve önce bunları hesaplamayı oluşturduğu bir şemayla göstermeyi tercih etmiştir.




**Görsel 3.9.** *Mine'nin tişört problemindeki ilk hesaplamaları*

Oluşturduğu şemadan sonra nasıl bir öneride bulunacağı sorulduğunda ise, öğrenci sayısının verilmemesinin onu zorladığını belirtmiş ve öğrencilerin sayılarını belirli sınırlar içerisinde göstermekte zorlanmıştır.

Araştırmacı: Peki. Böyle yazdın iki matbaayı. Şimdi sen bir öneride bulunacaksın idareye. Diyeceksin ki işte hangi şartlarda hangi matbaayı önerdiğini anlatacaksın. Nasıl öneride bulunursun?

Mine: Öğrenci sayısı belli olsaydı…

Araştırmacı: Hıı…

Mine: Daha kolay olurdu.

Araştırmacı: Peki belli değilken öğrenci sayısını böyle gösterebilecek herhangi bir şey yazabilir misin? Öğrenci sayısını belki sınırlandırabilecek.

Mine: En fazla 160 hani… 160 taneden fazla olursa indirim yapacak. 160'a kadar… En fazla ne kadar öğrenci olur ki? 200…

Bu problemde ilişkileri görebilmek için kolay hesaplayacağı 100 tişört sayısını belirlemiş ancak matematiksel işlemlerde sorun yaşamış bu durum da onun hesaplamalarını ve çözümünü etkilemiştir.

Mine: İlk matbaa… Bir tanesinde 75 tişörte 10 lira veriyor diğerinde 100 tişörte 12 lira veriyor. Hangisinin daha uygun olduğunu hesaplasak 100 kişi üzerinden…

Araştırmacı: 75 tişörte 10 lira veriyor demek ne demek?

Mine: 750 lira demek.

Araştırmacı: Yani şuan hangisinin daha az ya da daha fazla para verdiği belli değil mi?

Mine: Değil. Çünkü birinde 75 tişörte birinde 100 tişörte geliyor.

Araştırmacı: Hıı. Bu 100 tişörte ne vereceği belli değil mi?

Mine: Belli. 1200.

Araştırmacı: Bu ikisi 1200. Bunun belli değil mi?

Mine: Değil. Ama 25 kişi daha eklersek 100 üzerinden değerlendirsek 750 ye 250 daha eklersem 1000 olur. Daha uygun.

Araştırmacı: Bu 750'ye 250 daha ekledin ya…

Mine: Hıhı.

Araştırmacı: 75 tişörtü geçtiğinde ne yapıyordu?

Mine: 2 TL indirim yapıyordu.

Araştırmacı: Eee sen yaptın mı o indirimi?

Mine: Aaa yapmadım.

Araştırmacı: Nasıl yapacağız onu?

Mine: O zaman 25 kişiyi 8 liradan hesaplarız.

Araştırmacı: Yani ne olur?

Mine: Hesap makinesi var mı?

Araştırmacı: Hayır tabii ki elinle çarpabilirsin Mine. 25 ile 8'i çarpmak çok zor olmasa gerek.

Mine: (Gülüyor) 25 ile 8'i mi?

…

Araştırmacı: Bilmiyorsun. Bir sayının yüzde 25'i nasıl alınır Mine?

Mine: 25'e mi böleceğim? Hayır, 25 bölü 100.

İlk özel örneğin ardından rastgele seçtiği 150 tişört için ne kadar ücret ödenmesi gerektiğini matbaaların indirimleri üzerinden hesaplamış ve çiçek baskıyı 1350 lira olarak bulurken ajans matbaanın indirimi içerisinde geçen yüzde 25 indirim yapılan kısım onu zorlamıştır. Çeşitli işlem hatalarının ardından Mine, çözüm sürecinde ilerleme kaydetmeyince araştırmacı tarafından değişken kullanmaya yönlendirilse de değişkeni neye atayacağı ve onu nasıl kullanacağı konusunda sorunlar yaşadığı görülmüştür.

Araştırmacı: Yine böyle yapardın peki. Matematikte biz bazı değerleri göstermek için bilinmeyen kullanıyoruz.

Mine: Hıhı. "x, y, z, t."

Araştırmacı: Bu bilinmeyenleri kullanarak bu soruyu yapabilir miyiz? Ya da bu soruda bilinmeyen kullansan bilinmeyeni neye verirdin Mine?

Mine: O zaman 10 lira yerine "x" desem 2 lira indirim olduğundan "x-2" yapsam onla da "x-5" yapsam bu şekilde…

Araştırmacı: Nasıl olur o zaman? Bizim bu soruda bilmediğimiz şey ne?

Mine: Öğrenci sayısı.

Araştırmacı: Hııı. O zaman 10 liraya mı "x" diyeceğiz?

Mine: Hayır öğrenci sayısına "x" deriz.

Karo probleminde ise Mine, soruyu okuduktan sonra dört ve beşinci terasların sorulması üzerine o şekillerin olmadığını belirtip karoların artabileceğini düşünmemiş, yönlendirme üzerine bunu yapabilmiştir.

Araştırmacı: Tamam şimdi anladığını düşünüyorsan ilk soruyu bir oku.

Mine: 4. ve 5. Teraslara ait resimlerle ilgili neler söyleyebilirsiniz? Bu teraslarda kaç tane beyaz ve siyah karo olduğunu bulunuz demiş. Nasıl yani şimdi? 4. ve 5. yok ki burada.

…

Araştırmacı: 4 ya da daha fazla tasarlayamaz mı?

Mine: Tasarlar.

Araştırmacı: Peki nasıl tasarlar?

Mine: Iıı… Şimdi burada kaç tane karo var? Siyahlar hep bir bir gidiyor. Beyazlar… (Sessizlik) Hocam… (Gülüyor)

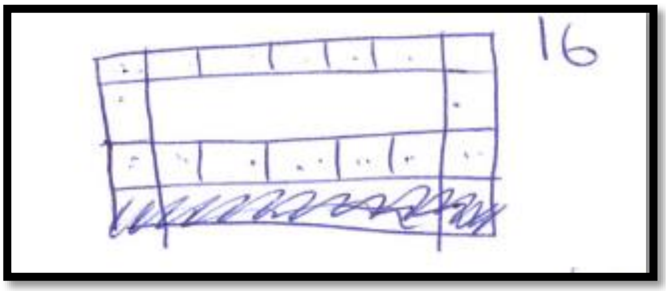
Araştırmacı: Mine şimdi burada kaç tane teras görünüyor?

Mine: 3.

Araştırmacı: Bunu nasıl devam ettirirsin beyaz ve siyah karoları kullanarak?

Mine: Hımm… Bakalım. Birincide bir tane siyah karo var. Hımm… Toplam 8 tane karo var. İkincide 1, 2, 3…10 tane karo var. Bunda da 4 şuradan 4 buradan 12 tane karo var.

Teraslardaki karo sayılarının belirli bir ilişki içerisinde artabileceğine odaklanmayan Mine, dört ve beşinci teraslardaki karoları çizerek gösterme yolunu tercih etmiştir.




**Görsel 3.10.** *Mine'nin karo probleminde görselden faydalanması*

Çizdiği görsel üzerinden dört ve beşinci teraslardaki karo sayılarını cevaplayınca artış miktarı dikkatini çekmiş ve "n" değişkenini kullanarak cebirsel ifade oluşturmaya çalıştığı görülmüştür. Bu çabasına başlarken de kendine güvenmediği anlaşılmıştır.

Araştırmacı: Şimdi ne diyebilirsin 4 ve 5. teraslardaki karo sayıları için? Hatta alttaki şıkla yani 60. terasla da birlikte düşünebilirsin. 4 ve 5 e takılı kalma.

Mine: Şey dördüncüde şey olur dedim. 6, 6 12 uzun kenarlar. Kısa kenarlar da 3, 3. Tekrar 6, 18. Siyahlar da 4 dedim. Iıı çünkü örüntü şeklinde devam eder yine. İkişer ikişer artıyor sınırları. Hani yani 14, 16 mesela 2 artıyor…

Araştırmacı: Hıhı. 2 artıyor.

Mine: Hımm… Sabit sayı "n" olursa artı 2 sürekli 2 artarsa artı 2, "n/2" bulurum.

Araştırmacı: Şu an ne yapmaya çalışıyorsun? Genellemeye mi çalışıyorsun?

Mine: Formül bulmaya çalışıyorum.

Araştırmacı: Formül bulmaya çalışıyorsun… 60. teras için formül bulmaya çalışıyorsun.

Mine: Hıhı. Zamanım olsaydı tek tek çizerdim. (Gülüyor)

…

Araştırmacı: b ve c'yi birlikte düşün. B ve C şıklarını.

Mine: Daha büyük teraslardaki karo sayılarını bulmak için nasıl bir yol izlersiniz? (b şıkkını tekrar okur) ( Sessizlik ) Boş bırakabiliyor muyum?

Görseller üzerinden verdiği değişken yardımıyla oluşturduğu genellemesinde "8 + 2n" gibi bir cebirsel ifade oluşturduğu görülmüştür. Burada "2n"deki 2'nin beyaz karoların sabit artışı olan 2 olduğu anlaşılmıştır.

Mine: 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64… 20 20 artıyor o zaman. Buradan da bunu çıkarırım ben.

Araştırmacı: Ne çıkarırsın mesela?

Mine: Iıı 5.terasta 16 idi, 10 da 24 oldu. 20 de 44 oldu. 30 da 64 oldu. E arada 20 fark var. 20 karoluk fark var.

Araştırmacı: Ne diyebiliriz şimdi?

Mine: "8+2n" (yazar)

Araştırmacı: Neyi yazdın oraya?

Mine: Karoların sayısını.

Araştırmacı: Oradaki "n" ne?

Mine: "n", birinci terasa göre artan karo sayısı. Mesela birincide artan karo sayısı yok yani sıfır. 8 gelir.

Araştırmacı: İkincide nasıl olur?

Mine: İkincide mesela uzun kenar bir arttı. 2 çarpı 1 artı 8'den 10.

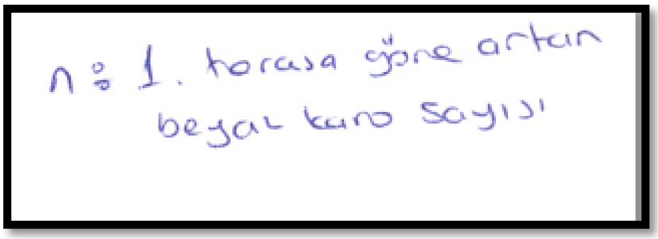
Araştırmacı: Evet.

Mine: Iıı 8'e göre gidiyorum şey 3'tü ya. İlk terasta uzun kenar 3'tü. Toplam 8 tane beyaz vardı. İkincide 1 arttı uzun kenar, yani n dedim o artan sayıya.

Araştırmacı: Hıı.

Mine: Ama "2" sabit hani. Hepsine "2" ekleyeceğimiz için. O, "2" de nerden geliyor… İkincide bir arttı. Yani birinciye göre 1 arttı. 8+2'den 10 geldi. İkincide birinciye göre 2 arttı. 2x2 den 4, 4+8'den 12 geldi. Böyle yapabiliriz.

Yaptığı çözümde Mine'nin sadece bir sonuç bulmaya odaklandığı görülmüş ve değişkenleri sonucu bulmasına yardımcı herhangi bir değere atadığı gözlenmiştir.

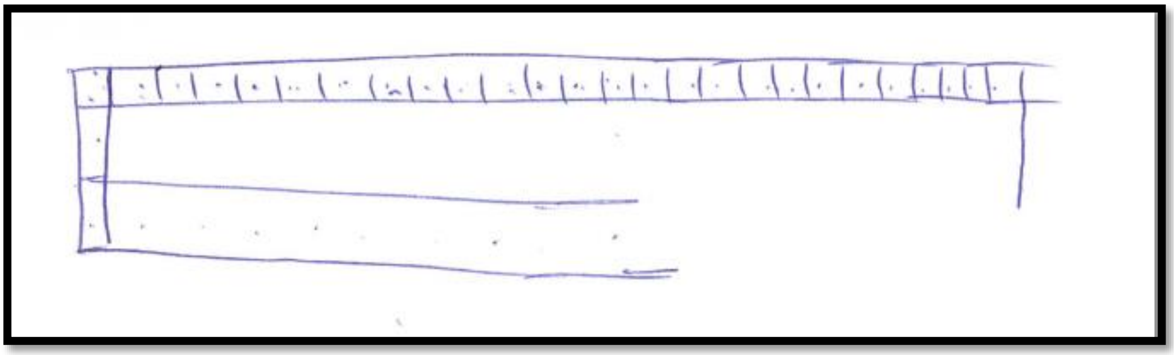



**Görsel 3.11.** *Mine'nin karo probleminde değişken kullanımı*

Problemde Mine, ilişkileri görebilmek için farklı yöntemlere yönlendirildiğinde bu kez tek tek çizip terasları sayma yoluna gittiği görülmüştür.

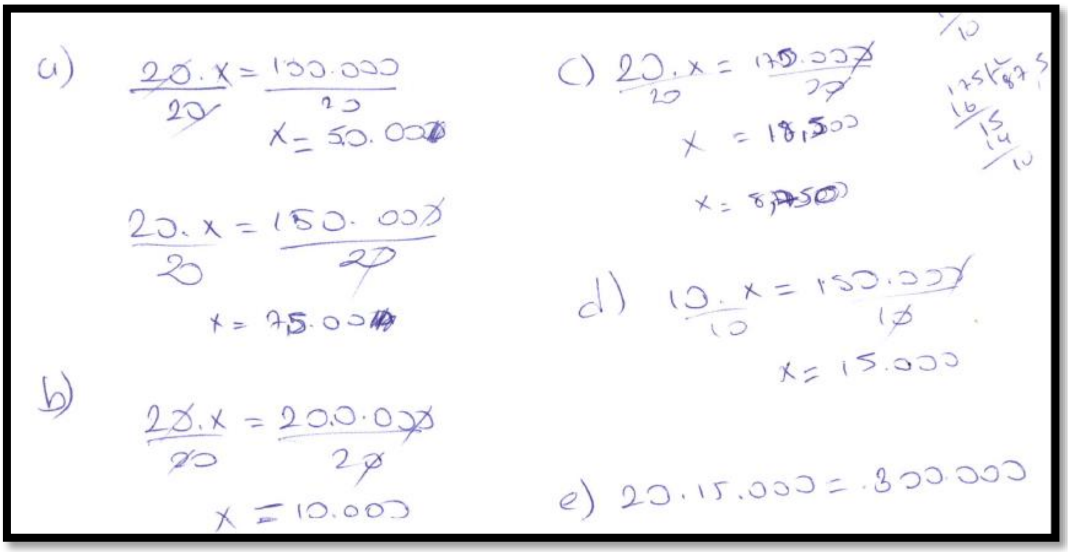
Araştırmacı: Peki f şıkkına bakalım.

Mine: Beyaz karo sayısını bulmaya yarayacak farklı bir kural bulabilir misiniz? Bulduğunuz kuralları karşılaştırabilir misiniz? (Soruyu okur) Bulamam. (Gülüşmeler) Yani bulurum da… Ya tek tek sayarız ya da çizerek bulunabilir.



**Görsel 3.12.** *Mine'nin karo problemindeki çizimi*

Araştırmanın son problemi olan konser sorusunda Mine'nin bu kez kendisine yöneltilen sorulara değişkeni bilinmeyen olarak kullanıp cevap verdiği görülmüştür.




**Görsel 3.13.** *Mine'nin konser problemindeki hesaplamaları*

Ancak bu problemde de Mine'nin değişkeni sadece bilinmeyen olarak kullanıp soruda verilenlere cevaplar aradığı görülmüş birden fazla değişken kullanması ya da birden fazla niceliğin değişeceğini düşünmesi gereken kısımlarda buna yönelemediği gözlenmiştir. Birbirine göre değişen iki niceliği cebirsel olarak gösterecek bir ikinci değişkeni yönlendirmelere rağmen atayamadığı, geliri sabit tutarak hesaplama yaptığı görülmüştür.

> Mine: İTÜ stadının kapasitesi, Jale Biber'in hedeflediği gelir, konser için yaptığı harcama ve konsere ödenen giriş ücretiyle ilgili bir bağlantı kurmak isteseniz neler söylersiniz? Hımm… Bir bağlantı… Bir şey söyleyemeyiz (Gülüyor)
>
> Araştırmacı: Şimdiye kadar elimizde sayılar varken bir şeyler söyledik hep. Şimdi neden söyleyemiyoruz?

Mine: Yani aslında söyleyebiliriz. Biri düşer biri artar mesela. Ters orantı mı var?

Araştırmacı: Ters orantı mı var? Ne ile ne arasında ters orantı var?

Mine: Bilet ücreti düştüğünde, mesela 20 liradan 10 liraya düştüğünde kişi sayısı 7500'den 15 bine çıktı. Yani…

…

Araştırmacı: Bilinmeyen kullanıyoruz. Bunları bilinmeyen kullanarak ifade edebilir misin Mine? Sen daha önce yaptın bir önceki soruda. Orada bilinmeyen dediğimiz şey ya da değişken diyelim "x"di. Burada birden fazla mı var onlardan?

Mine: Evet.

Araştırmacı: Nasıl ifade ederiz?

Mine: (Sessizlik) Şimdi Jale'nin hedeflediği gelir ve konser için yaptığı harcama sabit. Onlara bir şey diyemeyiz.

Araştırmacı: Sabit mi acaba? Ya onlar da değişirse? Soruda değişti çünkü.

Mine: Yani değişti aslında gelir de değişti. Ama harcama değişmedi. 50 bin harcamış… (Sessizlik)

Araştırmacı: Bilinmeyen kullanarak bunları gösterebilir miyiz?

Mine: Yani başkası gösterir de ben gösteremem. (Gülüyor) Oran-orantı yapacağımızı düşünüyorum.

…

Araştırmacı: Orada bir tane bilinmeyen vardı hemen buldun onları. Burada birden fazla bilinmeyen var ne yapacağız?

Mine: Iıı… Bunlar… Şimdi şu üçünü hedeflediği gelire eşitlesem bulabilir miyim ki? (Sessizlik ) ( "20 çarpı 15.000= 300.000" yazar )

Araştırmacı: Şimdi bunlar ne ve neye eşit?

Mine: Bilet, giriş ücreti ama…

Araştırmacı: Peki burada bilinmeyen var mı neyi bulacaksın?

Mine: Yok doğru.

Araştırmacı: Aklına bilinmeyen kullanarak denklem kurmak geliyor mu Mine?

Mine: Hııı… (Sessizlik) ( "K + Y.H + B = 100.000" yazar )

Araştırmacı: Ne yaptın?

Mine: Şimdi dedim ki hani stadın kapasitesi, giriş ücreti ve toplam yapılan harcama gelirine eşitlersek dedim belki oradan bir şey çıkar ama…

Araştırmacı: Kapasiteye "K" dedin, kapasiteye ne ilave ettin?

Mine: Yapılan harcama.

Araştırmacı: Kapasiteye yapılan harcamayı ilave ettin sonra ona da bileti mi ilave ettin?

Mine: Evet.

Araştırmacı: Eşittir ne yazdın? 100.000 mi dedin?

Mine: Evet. Çünkü kadın 100 bin istiyor.

Mine'nin problem çözme stratejilerini gösterir tablo aşağıda sunulmuştur.

**Tablo 3.2.** *Mine'nin problem çözme stratejileri*

| **Not Ortalaması:** 54,292 | | **Katılımcılar Arasındaki Not Ortalaması Sırası:** 8 | |
|---|---|---|---|
| Tahminde Bulunma | Diyagram Oluşturma | Tablo Yapma | Birden Fazla Değişkeni Bir Sabite Eşitleyip Cebirsel İfade Oluşturma |
| Anahtar Kelimeleri Kullanma | Rastgele Seçilmiş Özel Örnek Kullanma | | Tek Değişken Kullanıp Cebirsel İfade Yazma |

Tablo 3.2'de görüldüğü gibi Mine'nin klinik görüşmelerde tahminde bulunma, diyagram oluşturma, tablo yapma, birden fazla değişkeni bir sabite eşitleyip cebirsel ifade oluşturma, anahtar kelimeleri kullanma, rastgele seçilmiş özel örnekler kullanma ve tek değişkenle cebirsel ifade yazma problem çözme stratejilerini kullandığı görülmüştür. Mine'nin görüşmelerde verdiği cevaplardan; işlem hatalarını sıkça yaptığı, matematiksel sembol veya değişken kullanmada sorunlar yaşadığı, birden fazla değişkeni kullanmayı tercih etmediği, fonksiyon kavramında ilişkilere odaklanmayıp problemleri sonuç odaklı düşündüğü gözlenmiştir.

### 3.1.3. Yasir'in problem çözme stratejilerine yönelik bulgular

Yasir'in yapılan görüşmelerde problemlerin çözümlerine kendisi için anahtar olabileceğini düşündüğü kısımları yazarak başlamaya öncelik verdiği görülmüştür.

> Yasir: (Kâğıtlara yazmaya başlar.) Karalamak yoktu değil mi? (Kâğıda A= 3, altına B= 3, E= 3 yazar)
>
> …
>
> Yasir: (Çiçek baskı = 75: tişört başı 10 TL yazar) … ("75+= 8" ve altına da "150+= 5" yazar) Hocam… Hocam şimdi ilk 75 tişörte 10 lira diyorlar o da 750 lira para yapıyor. Aslında paralarını da yazsaymıştım.

Futbol probleminde Yasir'in problemi tekrar okuma ihtiyacı hissettiği ve kendi işaretlemelerini kullanarak problemi anlamlandırmaya çalıştığı gözlemlenmiştir.

Yasir: İçimden bir okuyayım hocam. (Soruyu içinden okumaya başlar) Buraya karalayabilir miyim?

Araştırmacı: Tabii zaten o kağıtlar senin.

Yasir: (Kağıtlara yazmaya başlar.) Karalamak yoktu değil mi? (Kağıda A= 3, altına B= 3, E= 3 yazar)

Araştırmacı: Böyle üstüne çarpı atıp üstü silinmeyecek şekilde devam edebilirsin.

Yasir: (Kağıtta az önce yazdıklarının hepsine birer birer çarpı atar)

Araştırmacı: Ha onlar yok yani, tamam.

Yasir, soruyu tekrar içinden okumasının ardından liste halinde takımları ve hesapladıkları puanları yazmaya başlamış, hesaplamasının sonunda bir puan eşitliği durumu görmüş bunun üzerine iki takım şampiyon olamayacağı için de iki takımdan birini listeden çıkarma ihtiyacı duymuştur. İlk hesaplamasında D takımını hiç yazmamıştır.

Yasir: Şimdi… Desem… Desek… 1. İkisinden birini atmam gerekiyor. (Kağıtta "A= 6, D= 3, 3= 6, C= 3, 3, 1= 7, E= 3, B= 1" yazar, daha sonra A= 6'nın üstüne çarpı atar ve "A= 7" yazar)

Araştırmacı: Neden ikisinden birini atman gerekiyor?

Yasir: İkisi de şampiyon olamaz.

Bu listeyi nasıl yaptığının sorulmasına üzerine ise yaptıklarını kontrol etmiş ve bu kez tüm takım isimlerinin bulunduğu farklı bir liste oluşturmuştur. İlkinde yanlışlık yaptığını belirtmiş ve şampiyonun C takımı olacağını ifade etmiştir.

Araştırmacı: Hı. Şimdi ne yaptın Yasir?

Yasir: Hocam yenilgilere göre şeyleri, puanları koydum.

Araştırmacı: Puanları koydun. Nasıl yaptın?

Yasir: Mesela A, E ve B'yi yeniyor. E ve B'yi 3 er puan atmam gerekiyordu, başta yanlış yaptım.

Araştırmacı: A, E ve B'yi yeniyorsa E ve B ye üçer puan mı atman gerek?

Yasir: Evet. Üçer puan değil mi ki?

Araştırmacı: Kim kazanmış?

Yasir: A, E ve B'yi yeniyor. A yeniyor. A'ya 3 puan atmam gerek.

Araştırmacı: Attın mı?

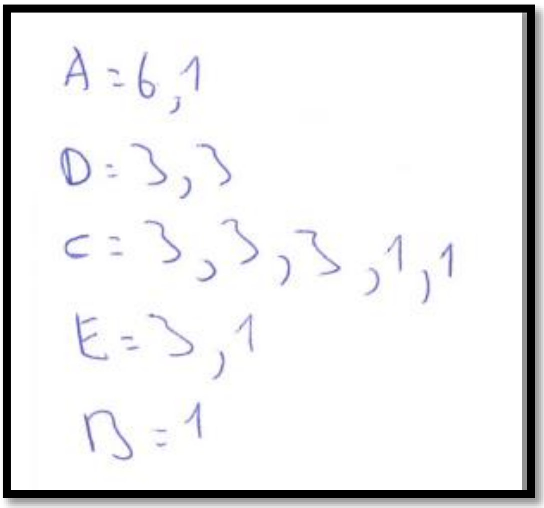
Yasir: Atmıştım.

Araştırmacı: Sonra ne yaptın? Bir daha yap.

Yasir: Her şeyi baştan yapayım o zaman.

Araştırmacı: Altına ilerleyebilirsin, illa küçük alana kendini sınırlama yani.

Yasir: Şimdi A, E ve B'yi yeniyor. O zaman 6 puan alacak iki tane takım yendi. A; 6. C ile berabere kalıyor. Bir tane daha. D ye de yeniliyor. D'ye… D'ye o zaman 3 puan yazacağız. A yenmiş. B,C ve D'yi. O zaman… 3. B, C ye yeniliyor 3. D'ye… (Kâğıtta yazarak devam ediyor.) (İçinden çok sessiz şekilde devam eder) C değil midir hocam? (Kâğıda "A= 6; D= 3, 3; C= 3, 3, 3, 1; E= 3, 1; B= 1" yazar)




**Görsel 3.14.** *Yasir'in futbol problemindeki ilk hesaplamaları*

Problemde takımların birbiriyle birer kez oynaması, yani birbirleriyle olan ilişkilerinde beraberliğin iki takım için de geçerli olduğu noktasında Yasir'in sorun yaşamadığı görülmüştür.

Araştırmacı: C midir şampiyon? Nasıl anladık?

Yasir: Hocam. A; E ve B'yi yeniyor demiş ya mesela A'ya 6 puan attım çünkü E ve B'yi yendi, iki takım. C ile berabere kalıyor demiş. Ama C'ye 1 tane daha atmam gerekiyordu hocam. ("C= 3, 3, 3,1" e bir tane daha 1 ekler ve "A= 6"ya da "1" ekler.)

Araştırmacı: Neden o 1? Her ikisine de 1 attın?

Yasir: Hocam çünkü beraberliğe ikisi de birer puan alıyor ya.

Maç sonuçlarını yazarken alınan beraberliklerde her iki takıma da "1" puan vermiş olmasına rağmen kaybeden takıma "0" puan vermediği ancak bu durumun onun çözümünde bir sorun yaratmadığı, kazanan kaybeden takımlar arasındaki ilişkilerin farkında olduğu görülmüş, kendisine farklı olarak nasıl bir yolla yapılabileceği sorulduğunda ise aklına ilk olarak formül kullanmak gelmiştir.

Araştırmacı: Yenildiğinde birine 3 puan veriyorsun ya biri diğerine yenildiğinde. Diğerine kaç puan vermen gerek? Puan vermen gerek mi ya da?

Yasir: Sıfır hocam. Diğerine vermemem gerekiyor. (Kâğıtta A sütunun altına “3, 3, 1”; B sütunun altına “1”; C sütunun altına “1, 3, 3”; D sütunun altına “3, 3” ve E sütunun altına “1” yazar)

…

Araştırmacı: Ne attın?

Yasir: 3 er puan attım. D, C ye yeniliyor. Bu sefer C’ye 3 puan attım yeniden. E, D’yi yeniyor demiş ya. D’ye 3 puan attım. B ve C ile berabere kalıyor demiş. Şimdi E, B, C üçüne de birer tane puan attım çünkü üçünde de beraberlik var. C’yi buldum, bir yerde de yanlışlık yaptım sanırım.

Araştırmacı: C’yi buldun. Peki. Bunu böyle yaparken tek tek kontrol ettin mi her birini?

Yasir: Hıhı.

Araştırmacı: Bunu yaparken zorlandın mı?

Yasir: Biraz zorlandım.

Araştırmacı: Daha kolay bir yolu var mıdır?

Yasir: Vardır mutlaka.

Araştırmacı: Senin yapabileceğin daha kolay bir yolu var mıdır? Böyle daha rahat hepsini görebileceğin?

Yasir: Formülle veya yöntemlerle falan…

Aklına gelen ikinci strateji olan formül kullanmayı sözel olarak ifade etse de Yasir’in bu yöntemi uygulamadığı ve ortaya çıkan verileri daha anlamlı görebilmek için bu kez de tablo kullanmayı ifade ettiği ancak uygulamaya koymadığı görülmüştür.

Araştırmacı: Hıh. Arada yanlışlık olabilir. Sen kendini daha kolay yaparım diyeceğin bir şekli var mı bunun?

Yasir: Hani bir tablo şeklinde yapardım bir de bu şekilde.

Futbol probleminde pek çok kez yeniyor, yeniliyor kelimelerini yanlış okumuş olmasına rağmen oluşturduğu şemada puanlamalarının neredeyse hepsinin doğru olduğu gözlenmiştir.

Yasir: Hocam buradan kontrol ettim. A; E ve B’yi ye… Ama yeniliyor.

Araştırmacı: Ne? Yeniliyor dememiş yeniyor demiş A.

Yasir: Evet, yeniyor. Buradan 1 yenilgisi var hocam. B; C ve D’ye yeniliyor. Buradan 1 galibiyeti var.

Araştırmacı: Galibiyeti mi var B’nin buradan?

Yasir: Ye... Yeniliyor pardon mağlubiyet. 2. 3 oldu.

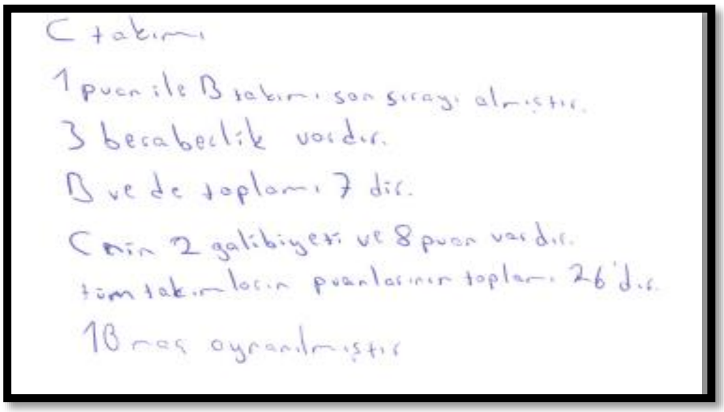
…

Araştırmacı: Hala şampiyon C gibi diyorsun. Bu sefer ne yaptın?

Yasir: Bu sefer sütun yaptım. Yine aynı şekilde ama tablo şeklinde yazdım mesela burada aynı yöntemle. A; E ve B’yi yeniyor dediğinde yine E ve B’ye 3 er puan, A’ya ikişer puan attım yani 6 puan. Yine C ile berabere kalıyor demiş. A ve C’ye birer puan attım. D’ye de yeniliyor demiş. D’ye 3 attım. B, C ve D’ye yeniliyor dediğinde de C ve D’ye 3 er puan attım. Buralarda da aynı şekilde hocam…


**Görsel 3.15.** *Yasir’in futbol probleminde puan hesaplamaları*

Takımların birbirlerine arasında yapılan maçlardaki ilişkilere odaklanılan futbol probleminde Yasir’in kaybedilen maçları çözümünde kullanmamasına rağmen diğer şıklarda sorulan soruların hemen hemen hepsine da hatasız cevap verdiği görülmüştür.




**Görsel 3.16.** *Yasir’in futbol problemindeki cevapları*

Yasir’in ifade ettiği ancak uygulamadığı tablo oluşturma yöntemi problemin şıklarında kendisinden istendiğinde ise, takımların birbirleriyle yaptıkları maçları anlamlandırmada sorun yaşamamış ve her takımın birbiriyle birer kez maç yapıyor olduğu cümlesini anlamlandırabilmiştir.

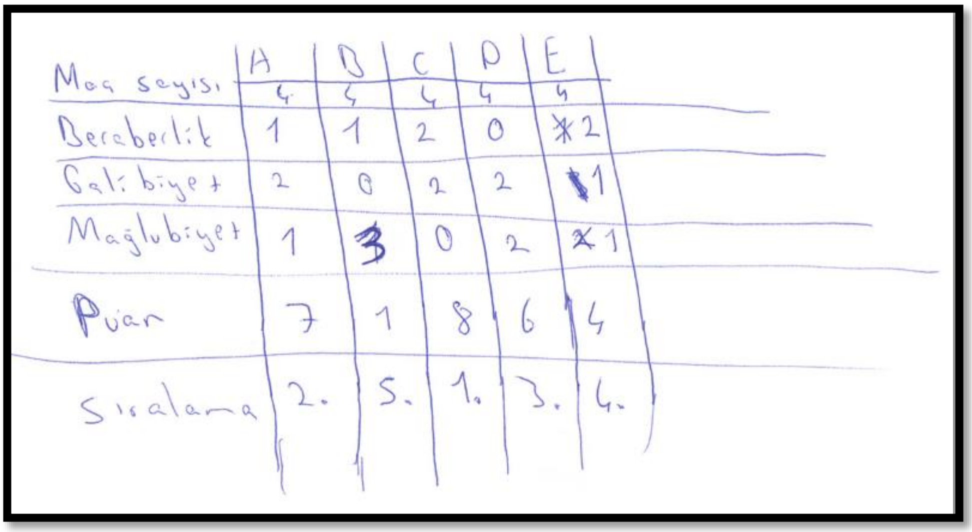
Yasir: Tamam buraya yapayım. Maç sayısı, galibiyet… (“Maç sayısı, Beraberlik, Galibiyet, Mağlubiyet”, şeklinde satırlar oluşturur ve daha sonra “A, B, C, D ve E” isminde sütunlar oluşturur ona karelere böler ve tam bir tablo haline getirir) Şimdi önce maç sayılarını bulalım. A’dan başlayalım A kaç maç yapmış? 2, 4. 4 maç oynamışlar. O zaman hepsi dörder oluyor.

Araştırmacı: Nasıl anladık hepsinin dörder olduğunu?

Yasir: Her biri biriyle birer defa maç yapabiliyor ya.

Araştırmacı: Yani nasıl olur? Her biri birbiriyle birer defa maç yaparlarsa dörder maç mı yaparlar? Nasıl?

Yasir: Ben bir de B'yi sayayım hocam. 4 çıktı.  Onun da 4 çıktı hocam hepsi dörder tane. Onun da 4.

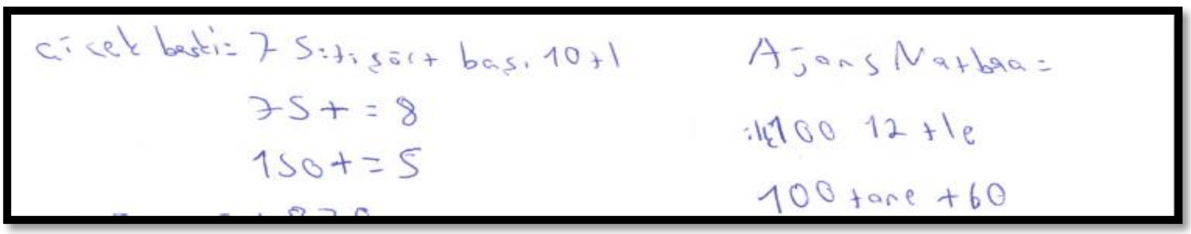


| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Maç sayısı | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Beraberlik | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 |
| Galibiyet | 2 | 0 | 2 | 2 | 1 |
| Mağlubiyet | 1 | 3 | 0 | 2 | 1 |
| Puan | 7 | 1 | 8 | 6 | 4 |
| Sıralama | 2. | 5. | 1. | 3. | 4. |

**Görsel 3.17.** *Yasir'in futbol problemindeki tablosu*

Yasir, futbol probleminde soruyu pek çok kez hatalı okumuş ve problemi baştan okumak durumunda kalmıştır. Problemde verilen yeniyor, yeniliyor gibi kelimeleri söylerken farklı, yazarken farklı kullandığı görülmüştür. Takımların birbiriyle birer maç yapması gerektiği cümlesini anlamakta zorlanmamış ve kendisine sorulan sorularda bunu ifade edebilmiştir. Takımlar arasında oynanan maçlarda ortaya çıkan ilişkilerin ve bu ilişkilerin yönünün sözel olarak olmasa da yazarak verdiği cevaplarda farkında olduğu görülmüştür. Oluşturduğu tabloda da yönlendirme olmadan takımların her birinin kaçar maç yaptığından faydalanıp düzeltmelerini yapmıştır. Son olarak oluşturduğu tabloda ise, sadece E takımına iki beraberlik yazmış olmasına rağmen bunu çözümüne yansıtmadığı gözlenmiştir.

Kendisine yöneltilen ikinci problem olan tişört probleminde Yasir'in yine anahtar olabilecek kelimeleri kullanmak istediği ve problemden anladıklarını kendine has kullandığı sembollerle göstererek çözümüne başladığı görülmüştür.




**Görsel 3.18.** *Yasir'in tişört problemindeki hesaplamaları*

Problemde 160 tişörtten fazla alım yapıldığı durumunu okuduktan sonra doğrudan iki matbaayı ilişkilendirme yoluna gitmiş ancak bunu her iki matbaa için 150 kişiden fazla tişört olması durumuna odaklanarak yaptığı ve buradan da çiçek baskı matbaanın daha uygun olduğunu ifade ettiği görülmüştür.

> Araştırmacı: Peki sonra?
>
> Yasir: Sonrasında 160 taneden fazla alım olur ise de sayıya bakılmaksızın tişörtlerin tanesini 6 TL'den vereceğini ifade etmiştir.
>
> Araştırmacı: Bu ne demek?
>
> Yasir: Hocam… ııı… Bu şekilde… Hem daha fazla tişört almamız gerekecek hem de 6 TL'den verecekler. Burada 150 tane almamıza rağmen 5 liradan veriyorlar çiçek baskı bence daha mantıklı olabilir.

Bunun üzerine hangi durumlarda çiçek baskıyı önereceği sorulmuş, Yasir de hesaplama yapmadan rastgele seçtiği 100 tişörte kadar ajans matbaa, sonrasında ise çiçek matbaanın avantajlı olduğuna yönelik bir tahminde bulunmuştur.

> Araştırmacı: Yani sen genel durumda çiçek baskıyı mı önerirsin?
>
> Yasir: Çiçek baskıyı… Evet, hocam.
>
> Araştırmacı: Kaç tişört alırsa alsın onu mu önerirsin?
>
> Yasir: … Iıı hocam… Şu şekilde olabilir. … Bunda tişört başı 12 liraya geliyor ilk 100 tişört. Yok, hocam daha az ise eğer şeyi öneririm ajans matbaayı. Mesela ilk 100'deyse eğer ajans matbaayı önerebilirim ama daha fazla büyük bir miktarsa çiçek baskı daha mantıklı olabilir.
>
> Araştırmacı: Daha azdan kastın ne mesela? Daha az tişört sayısı kaç olabilir ajansı önermen için?
>
> Yasir: Hocam 100'ün altında olmalı.

Seçtiği tişört sayısı olan 100'ün neden seçildiği sorgulandığında ise, yaptıklarının doğru olduğunu gösterebilmek için 100 tişörtten daha az başka bir özel örneğe yöneldiği ve 94 tişört için de yaptığı hesaplamada çiçek matbaanın avantajlı olduğunu gördüğünde tüm durumlarda çiçek matbaayı önerdiği görülmüştür.

> Yasir: Mesela diyelim ki 94 tane tişört alacaklar. 94 tane. Şimdi… ııı ilk 75'e kadar 10 liradan 750 lira para yaptı hocam. Biz kaç 90 demiştik değil mi? 80, 15 kaldı. 75+8'den. 15 lira etti. +8 de… 15 çarpı 8 yapmam gerekiyor burada da. 8 kere 5 40. 120 lira yapıyor. 750, 120 daha 870 lira para yapıyor.
>
> …
>
> Yasir: Bir dakika hocam kafam karıştı. 100 tişörte kadar 12 TL'ye. O zaman kaç 90 çarpı 12 diyeceğim burada da. 90 çarpı 12 dersem 1080. 2 kere 9 18, 18'in 8'i. Bir saniye… (90x12' den 1080 bulur)
>
> Araştırmacı: 1080 mi çıktı?

Yasir: 1080 çıktı hocam.

Araştırmacı: Hangisi ucuz?

Yasir: Hangisi ucuz? Çiçek baskı çok daha ucuz hocam. Hani fazla alım yapıldığında da çiçek baskı daha ucuza geliyor. Bence çiçek baskı daha mantıklı.

Problemde neden çiçek baskı matbaanın avantajlı olduğu sorulduğunda ise, matbaaların son indirimlerini nicelikler arasındaki ilişkiden bağımsız olarak aynı gibi düşündüğü ve birini 5 diğerini 6 liradan satacağı için çiçek baskıyı avantajlı gördüğü, diğer kısımlarda ise, seçtiği özel örneğin sonucunun O'na yettiği görülmüştür.

Araştırmacı: Her türlü çiçek baskı diyorsun. Nasıl vardık bu sonuca? Mesela bir tane denedin ya burada 90.

Yasir: Evet.

Araştırmacı: 90'dan sonuca nasıl vardık?

Yasir: Hocam bu bir nevi bu verdiği şeyler kampanya gibi mesela. Diyelim ki 100 tişörte kadar 12 TL'ye kampanyası var bunun bu şekilde, burada da bunun bir kampanyası var ilk 75 tişört. Hocam bu kampanyalara göre şey yaptım bir de en son sonuca baktığımızda tişört sayısı çok yüksek olduğunda da şey çok daha mantıklı çiçek baskı. Çünkü hocam burada daha fazla almamız gerekiyor 160 tane ve 6 liradan. Burada ise 150 liraya 5 liradan alabiliyoruz.

Matbaaların fazla tişört sayıları arasında yaptıkları kampanyalar arasındaki ilişkileri fark edebilmesi için araştırmacı tarafından Yasir'den 300 tişört sayısında oluşan durumu hesaplaması istenmiştir. Bunu hesaplarken de problemdeki indirimleri yanlış algıladığı görülmüştür. Yasir'in indirimlerin problem içerisinde farklılaşmasına dikkat etmeden çiçek baskı için tişörtlerin tanesini 5 liradan, ajans matbaa içinse ilk 160 tanesini 6 liradan hesapladığı ortaya çıkmış ve 300 tişörtü çiçek için hesaplayıp ajans için 160 tişört hesapladığı görülmüştür.

Araştırmacı: Ya da yoo şöyle deneyelim çok tişört alınca da böyle oluyor dediğin için 300 tişört alalım.

Yasir: 300 tişört alırsak çiçek baskı.

Araştırmacı: Bakalım, deneyelim. 300 tişörtü ikisinde de alalım.

Yasir: Tamamdır hocam. 300 tişört… Iıı 300 şu şekilde olur. 150 tişört, 300 tane tişört… 300 çarpı 5.

Araştırmacı: 300 çarpı 5 mi?

Yasir: Evet, o şekilde yapsam… Öbürünü de…

Araştırmacı: Nasıl 300 çarpı 6 mı diyeceksin?

Yasir: Yok hocam orası 160 taneden diyor ya, orada 160 çarpı bir 6 diyelim. Sonra… Iıı şu şekilde yaparım hocam. …

Fonksiyonun farklı tanım kümelerine ait görüntülere odaklanabilmesi için parçalı yapıda oluşan indirimleri bir kez daha kontrol etmesine doğrudan yönlendirilse bile iki matbaanın indirimlerinin aynı yöntemle hesaplanacağını söylemesi, ilişkilerden bağımsız düşündüğünü göstermiştir.

> Araştırmacı: Şimdi burada yazanla burada yazan, yani çiçek baskının kampanyasıyla ajans matbaanın kampanyası aynı şekilde mi devam ediyor yani şu 160 taneden fazla alım olur ise yazan yerden sonraki cümleyle 150'den sonraki cümle aynı şekilde mi devam ediyor?
>
> Yasir: Fiyat hariç aynı şekilde devam ediyor hocam.

Farklı bir yöntemle bütünsel olarak problemi nasıl göreceği sorulduğunda kampanyaların sınırlarının kendisini zorladığını belirtmiştir. İki matbaada ilişkileri görebilmek için aynı sınır değerlere bakma gereksinimini ifade etmiştir.

> Araştırmacı: Peki şöyle bir şey sorayım. Şimdi sayılardan bahsediyoruz bu sayılar için tişört fiyatlarını hesaplamaya çalışıyoruz ve her seferinde tek tek hesaplamaya çalışıyoruz. Bunu böyle her seferinde tek tek yapmak yerine genel olarak görebileceğimiz bir yöntemi yok mudur?
>
> Yasir: Vardır hocam mutlaka.
>
> Araştırmacı: Ne geliyor mesela aklına? Genel olarak yapsan nasıl yaparsın?
>
> Yasir: Ne yapardım ki? Hocam hani aynı miktar tişört yapmaya çalışırdım ama kampanyalar farklı…
>
> Araştırmacı: Seni zorlayan şeylerden birisi aynı miktar olmaması mı? Yani aynı miktara kampanya yapılmaması mı?
>
> Yasir: Aynen öyle hocam. Aynı kampanya aynı miktar aynı şey… Mesela aynı şey olsaydı demin yaptığım gibi bir tablo yapardım mesela sütun şeklinde işte... Iı bir şu kadar tişörte mesela… İlk dese ki mesela çiçek baskı ilk 100 tişörte 10 lira, ajans dese ki ilk 100 tişörte 15 lira…

Yasir'in problem boyunca herhangi bir değere değişken atama yoluna gitmemesi üzerine araştırmacı tarafından cebirsel bir ifade yazmaya yönlendirilmiştir. Ancak bu durumda bile değişken kullanmak yerine anlayabileceği bir sembolle problemi ifade etmeye çalıştığı, cebirsel gösterimi yapamadığı görülmüştür.

> Araştırmacı: Peki mesela denklemler var matematikte. İşte… 3 kilo elma alıp üzerine 2 lira para verdiğimizde toplam 20 lira para vermiş oluyorsak biz 1 kilo elmayı bulabiliyoruz bu denklemler sayesinde. Biz bir şey kullanıyoruz orada ne kullanıyoruz?
>
> Yasir: Formül.
>
> Araştırmacı: Formül mü o? Biz o elmanın kilosu yerine ne kullanıyoruz biz?
>
> Yasir: "x".

Araştırmacı: "x" kullanıyoruz, bilinmeyen yani. "x" olması şart değil herhangi bir bilinmeyen kullanıyoruz. Biz bu soruyu öyle o x i kullanarak bir bilinmeyen kullanarak ifade edebilir miyiz?

Yasir: Edebilir miyiz?

Araştırmacı: Ya da bilinmeyen kullanarak o 75 tişörte kadar ya da 75 tişörtle 150 tişört arasında cümlelerini ifade edebilir miyiz?

Yasir: Cümlelerini ifade… Edebilir miyiz? Hocam "+" yazmak benim aklıma geliyor mesela…

Araştırmacı: Yaz onu nasıl gösterirsin "+"yı? Böyle mi? (Kâğıtta daha önce yazdığını göstererek)

Yasir: Aynen öyle hocam. "75+" yani 75 ve üstü 150 ye kadar. Bu şekilde 150 ve üstü yine "+ 5". Bu şekilde göstermeye çalıştım. Hocam başka da bu soruda bilmiyorum da yapamadım.

Aynı zamanda Yasir'in matematiksel kavramlardan yüzde alma konusunda da sorunlar yaşadığı sorgulamalarla gözlenmiş ve problemde ilerleme kaydedememiştir.

Araştırmacı: İlk fiyattan alınacak toplam ücretin yüzde 25'i ne demek burada 160 tane alınırsa?

Yasir: 12'nin yüzde 25'ini bulmam gerekecek.

Araştırmacı: Bul bakalım. 160 tane tişört aldığını düşünelim ajans matbaadan.

Yasir: 12'nin yüzde 25'i. 10 desem ona ilk başta yüzde 25'i kaç yapar? 2,5. 2,5… 2 midir hocam? 12'nin yüzde yirmi beşi?

Karo probleminde ise, diğer problemlerde olduğu gibi Yasir'in problemi tekrar okuma ihtiyacı hissettiği ancak kendisine sorulanı anlayamadığı görülmüş kendisine sorulan terasların görsellerde bulunmadığını ifade etmiştir.

Yasir: Hocam içimden bir okuyayım.

Araştırmacı: Oku, oku sen oku.

Yasir: (Soruyu içinden okur.) Ya şunları sayacağız galiba değil mi?

Araştırmacı: Mesela? Ne anladın sorudan? Ne vermiş ne soruyor?

Yasir: Hocam işte topraklar var işte. İçinde bir de karolar var… İkisinin toplamını mı soruyor acaba burada?

Araştırmacı: Ne soruyor mesela a şıkkında?

Yasir: Kaç tane karo olduğunu bulunuz diyor bu. 9 deriz. 12 deriz. 15 deriz.

Araştırmacı: Yani? Düşün. İstediğin gibi yapabilirsin, soruyu anladıysan eğer. Ne soruyor beyaz ve siyah karoları soruyor.

Yasir: Aynen.

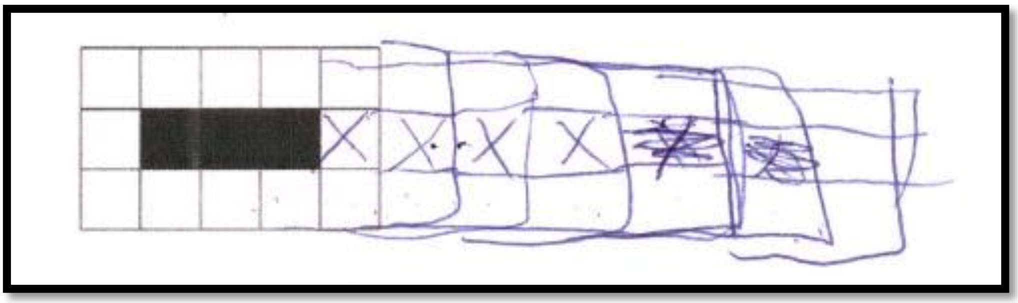
Araştırmacı: Ama kaçıncı terasları soruyor?

Yasir: Yani dördünü ve beşinci dedi ama bunları nasıl bileceğiz ki kaçıncı olduklarını?

Araştırmacı: Şu an sence elindekiler kaçıncı teraslar?

Yasir: İlk 3 sanırım.

Bunun üzerine karo sayılarını görebilmek için şekli kendisi devam ettirmeye karar vermiştir.



**Görsel 3.19.** *Yasir'in karo probleminde görsellerden faydalanması*

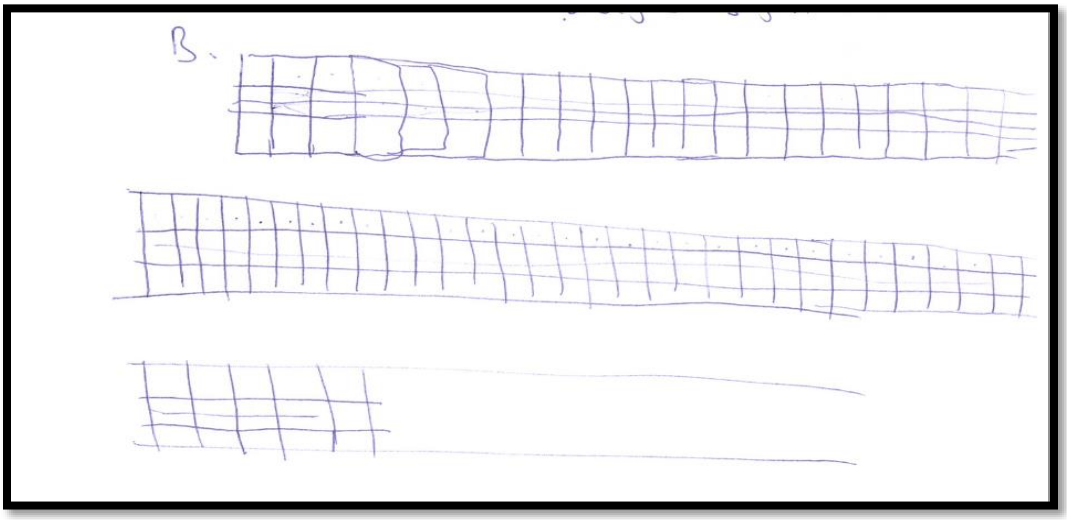
Dört ve beşinci teraslarda sorulan karo sayılarını bulmak için çizimini tamamlamış, devamında karoları tek tek sayarak ilgili teraslardaki beyaz ve siyah karoların kaçar tane olacağını cevaplamıştır.

Yasir: İşte şuna da siyah dersek yani bu 4.oluyor. Bir kere daha yaptığımızda şöyle… Bunları sayacak mıyım hocam?

Araştırmacı: Sana ne soruyor?

Yasir: Sayılarını… O zaman dördüncüde kaç taneymiş? 3,6, 12. 18 dersek. 18'in kaç tanesi? 5 tanesi siyahsa 13 tane beyaz, 5 tane siyah var dördüncü karoda. Yani toplam 18. Yazacak mıyım bunu?

Problemin diğer soru şıkkında kendisinden 60. teras için kaç beyaz veya siyah karo sorulduğunda yine herhangi bir değişken kullanma yoluna gitmemiş, bir genelleme yapma ihtiyacı hissetmemiş ve 60. adıma kadar terasları çizerek göstermiştir.




**Görsel 3.20.** *Yasir'in karo problemindeki çizimi*

Problemde siyah karo sayısıyla adım sayısı arasında da bir ilişki kuramadığı görülmüştür.

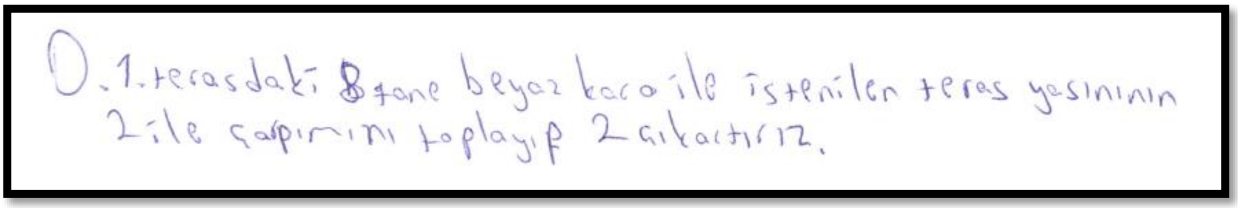
> Araştırmacı: Peki kaç tane siyah karo var 60. da?
>
> Yasir: Yani 61 tane desek…
>
> Araştırmacı: Ne?
>
> Yasir: 61 tane desek hocam, şöyle 60'a kadar tamamladığımızda ortadakiler oluyordu ya bir bir yükseliyor o da o 60 oluyor, bir de bunu alırsak yani…
>
> Araştırmacı: 61 diyorsun. Peki birinci…
>
> Yasir: 60. teras, ama bunlarla bu beraber oluyor sanırım değil mi?
>
> Araştırmacı: Yani?
>
> Yasir: Yani o da 60 oluyor.
>
> Araştırmacı: Yani 60 tane siyah karo mu olur?
>
> Yasir: 60 hatta ilkini de mi değiştirsem?
>
> …
>
> Araştırmacı: Ne farkı var mesela ilk ve ikinci arasında? Dedin ya aslında ilkini beraber mi alacağım ayrı ayrı mı alacağım? Şimdi birinci teras bu, birinci terasta kaç tane siyah karo var?
>
> Yasir: Bir tane.
>
> Araştırmacı: İkinci terasta?
>
> Yasir: İki tane.
>
> Araştırmacı: Yani bir eksiği mi?
>
> Yasir: Bir fazlası var.
>
> Araştırmacı: Fazlası mı?
>
> Yasir: İkinci terasta iki tane, aynı. Fazlası var.

Yasir'den problemde bir genelleme yapması istendiğinde ise, yine değişken atamayı düşünmemiş ve genellemesini görsellerden faydalanıp sayarak ana dilde yapmayı tercih etmiştir.

> Yasir: Diyelim ki 5. terasa geldiğimizde ikişer tane eklendiği için 10 tane kutucuk daha eklenmiş olacak yani 8'in yanına 10 tane daha ekleyeceğiz. Aynen 10 tane daha ekleyeceğiz. 18 eksi 2 yaptığımızda da 16.
>
> Araştırmacı: Neden eksi 2?
>
> Yasir: Hocam onu şimdi nasıl ifade edeceğim bilmiyorum ama bir şuradan saymaya başladım bir de şuradan saymaya başladım ya. Orada bir fark var arada ama… Şuradan itibaren saydığımızı düşünelim. Şunda da deneyelim bir de onu. Ben ne demiştim tam? 8 tane burada demiştik. 4,4 8 tane daha eklediğimizde 16. 2 düştüğümüzde yine 14 çıkıyor. Aynen bu yöntem… 60'ta yapabilirsek bunu…

…

Yasir: Birinci terastaki… Buradaki 8 tane beyaz karo ile… İstenilen teras sayısının 2 çarpımını toplarız. (1.terastaki 8 tane beyaz karo ile istenilen teras sayısının 2 ile çarpımını toplayıp 2 çıkartırız yazar.) İkiyi çıkartırız.




**Görsel 3.21.** *Yasir'in karo problemindeki genellemesi*

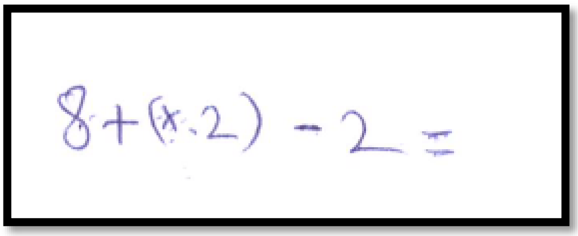
Problemde Yasir'den denklem kullanması doğrudan istendiğinde bir değişken kullanımına gitmiş ancak cebirsel ifadesini oluşturamadığı, değişkeni neyi bulmak için kullandığının farkında olmadığı görülmüştür.

Araştırmacı: Farklı bir yönteme geçmeden şunu da sorayım ondan sonra geçelim. Bu yazdığını denklem kullanarak ifade edebilir misin?

Yasir: "8 artı"…

Araştırmacı: Evet, nasıl olur o? Matematiksel olarak yani.

Yasir: "8 artı" desek… "x" çarpı 2 desek şöyle. Sonra eksi 2 deriz. Burada bize x i teras sayısı olarak vermiş olacak onu çarparız. Sonra bunların ikisi toplanacak sonra da eksi iki. ("8 + (x.2) – 2 =" yazar.)




**Görsel 3.22.** *Yasir'in karo probleminde değişken kullanması*

Araştırmanın son problemi olan konser sorusunda Yasir'in kar, gelir, gider gibi kavramları anlamlandırmakta sorun yaşadığı görülmüştür. Yapılan harcamayı düşünmeden hesaplama yapmaya çalışmıştır.

Yasir: Jale'nin konserden hedeflediği parayı kazanabilmesi için konsere gelecek kişi sayısıyla ilgili ne söyleyebilirsiniz? Hocam şimdi ben burada 20'yi bir sayıyla çarparım 100 bini bulurum mesela.

Araştırmacı: Hı. 20'yi bir sayıyla çarpıp 100 bini bulursun?

Yasir: Hıhı.

Araştırmacı: Nedir o 100 bin?

Yasir: Kazanacağı, hedeflediği para. O bulduğum bir sayı da kişi sayısıdır çünkü 20 TL giriş ücreti demiş.

Harcadığı para da araştırmacı tarafından hatırlatıldığında orantısal olarak sonuca gittiği görülmüştür.

Araştırmacı:5 bin kalıyor. Peki, yani 5 bin kişi gelirse bu stada bu adam 100 bin lira gelir mi elde edecek?

Yasir: Aynen öyle.

Araştırmacı: Harcadığı para ne olacak? Bir de harcadığı para var.

Yasir: Harcadığı para için bir 50'lik daha, ıı biz kaçta 50 bin ile çarpacaktık değil mi hocam?

Araştırmacı: 5 bin kişi dedin.

Yasir: Pardon pardon. Yani 5 bin kişide 100 bin lira kazanıyorsa 5 binin yarısı ne deriz? İki bin…

Araştırmacı: Neden yarısı?

Yasir: Hocam şeyin hepsini bulabilmek için.

Araştırmacı: Tamam onun yarısı 2500.

Yasir: Yani toplam 7500 kişi gelirse hocam hem karını kazanacak hem de harcadığı parayı kazanacak.

Problemin diğer şıklarında da sıklıkla işlem yapmadan orantısal olarak cevap verdiği görülmüştür.

Araştırmacı: Peki diğerine geçelim. B şıkkına.

Yasir: Jale'nin kazanmayı hedeflediği ücret 150 bin TL olsaydı stada gelecek kişi sayısıyla ilgili ne söylerdiniz? Bilet ücreti ve yapılan harcama aynı olmak üzere. Iı yani sayıyı artırırdık hocam yani 10 bin kişi yapalım derdim. Çünkü hani 2500 kişi, 50 bin…

Araştırmacı: Hı. 10 bin kişi bulurdun.

Yasir: Aynen. C ye geçiyorum. (B) 10000 yazar.)

…

Yasir: Jale'nin yaptığı harcama 75 bin TL olsaydı stada gelecek kişi sayısıyla ilgili ne söylerdiniz? Bilet ücreti ve hedeflenen para aynı olmak üzere. Karı aynı sanırım, hedeflenen para da aynı. Hocam 2500 kişi 50 bin kişi demiştik değil mi?

Araştırmacı: 50 bin lira, TL.

Yasir: Pardon 50 bin lira. Yani yine 2500'ün üzerine yine yarısını ekleyeceğiz 2500'ün yarısı ne kadar?

Araştırmacı: 1250.

Yasir: 2500 artı 1250 kaç yapıyor?

…

Yasir: Yani nasıl desem toplam 150 bin lira para kazanıyordu. 7500 den, 15 bin olunca buna bir bu kadar daha ekleyeceğiz yani 300 bin oluyor. 300 bin yalnız… Kazanacağı para…

Problemin son şıkkında kendisinden tüm niceliklerin değişken olduğu durumu yorumlaması istendiğinde ise, ilişki kurmakta zorlanmış, bazı değerleri sabit tutma isteğiyle hareket ettiği görülmüştür. Doğrudan değişken kullanımına yönlendirildiğinde ise, kişi sayısına "x" değişkenini atamış, yönlendirmelerle gelire "g" değerini atamış ve harcamaya "h" değerini atamış ancak bunları birbiriyle ilişkilendirmekte zorlanmıştır. Bilet ücretini sabit 20 TL olarak düşünmeye devam etmiştir.

Yasir: Hocam tam olarak neyi sordu ben onu anlamadım.

Araştırmacı: Nasıl bir bağlantı kurulabilir bunlar arasında?

Yasir: Yani kar-zarar var hocam. Nasıl desem ki… Soruyu bir daha okuyayım. (Soruyu içinden okur.) Jale şimdi hocam 50 bin TL harcama yaptığında 100 bin TL de gelir elde ediyor sanırım değil mi?

Araştırmacı: Hı.

Yasir: Yani parasını iki katına çıkartabiliyor.

Araştırmacı: İşte bu hep böyle midir?

Yasir: Yok bu değerlerle gidilirse eğer parasın iki katına çıkartabilir.

Araştırmacı: Hı.

Yasir: Daha da başka bir şey aklıma gelmedi bu soruda.

…

Araştırmacı: Denklem olarak yazabilir misin bunları bir bütün olarak Yasir?

Yasir: Iıı… Yani geliri… Nasıl desem ki hocam… Elindeki parası "x.2" olur yani. Nasıl desem? Şu baştaki yaptığımız şekilde olabilir ama… Nasıl desem ki… "20x" deriz mesela…

Araştırmacı: Hı.

Yasir: 20 çarpı deriz mesela, sonra "x" deriz. O bulduğumuz sayı mesela cevap diyelim. Sonra kar desek mesela buna. Bir dakika 20 ile ben kazanılan gelir derim pardon hocam. "20 çarpı x" ile biz gelirimizi bulabiliriz hocam.

Araştırmacı: O gelir yani bilet parası 20 iken diyorsun "x" kişi gelirse "20x" gelir olur.

Yasir: "x" kişi gelirse aynen hocam. ("20.x = g" yazar.)

Araştırmacı: "G" ne oradaki? Gelir mi?

Yasir. Aynen hocam. Karışık oldu.


**Görsel 3.23.** *Yasir'in konser probleminde değişken kullanması*

Yasir’nin problem çözme stratejilerini gösterir tablo aşağıda sunulmuştur.

**Tablo 3.3.** *Yasir’nin problem çözme stratejileri*

| **Not Ortalaması:** 33,600 | | **Katılımcılar Arasındaki Not Ortalaması Sırası:** 10 | |
|---|---|---|---|
| Liste Yapma | Tablo Yapma | Özel Örnekler Kullanma | Ana Dili Kullanma |
| Birden Fazla Değişken Kullanarak Cebirsel İfade Yazma | | | |

Tablo 3.3’ de görüldüğü gibi Yasir’in klinik görüşmeler boyunca liste yapma, tablo yapma, özel örnekler kullanma, ana dili kullanma ve birden fazla değişken kullanarak cebirsel ifade yazma problem çözme stratejilerini kullandığı görülmüştür. Yasir, fonksiyon kavramına dayanan problemlerde ilişkileri görmekte sorun yaşamış, genelleme yapması beklenen problemde uzun çizimlerle sonucu bulmaya odaklanmış, niceliklerin birbirini etkileyebileceğine odaklanmamış, değişken kullanımında tereddüt etmiş ve birden fazla değişken kullandığı problemde de değişkenlerin neyin yerini tuttuğuna ve birbirini nasıl etkilediğine yoğunlaşmamıştır.

### 3.1.4. Emrah’ın problem çözme stratejilerine yönelik bulgular

Araştırmanın katılımcılarından Emrah’ın problemlerde sonuca odaklandığı ve bu sebeple sık sık problemin cevabını hızlıca tahmin ederek çözümüne başladığı görülmüştür.

> Ama öbürlerine baktığımızda şeye A’ya en yakın olan E, D’yi yeniyor. B ve C ile berabere kalıyor bu durumda yine A daha önde gidiyor.
>
> …
>
> Araştırmacı: Ne anladın sorudan?
>
> Emrah: Hocam şimdi her biri belli bir öğrenci kitlesinden sonra, öğrenci sayısından sonra indirimlere başlıyor hani. Öğrenci fazlalığına bağlı olarak…
>
> …
>
> (Kâğıda “Çiçek 75’e 100”, “Ajans 100, 12” yazar) Hani şu ilk iki değerlendirmeme baktığımda şeyi değerlendiririm. Ajansı değerlendiririm hocam.

Futbol probleminde Emrah, hesaplamasında takımların puanlarına bakarak değil de aldıkları galibiyetlerin çokluğuna bakarak şampiyon olacak takımı tahmin etmeye çalışmıştır. İlk yaklaşımında da A takımının daha çok galibiyet aldığını söylemiştir.

> Emrah: A; E ve B'yi yeniyor. C ile berabere kalıyor. D'ye de yeniliyor. Tamam. B; C ve D'ye yeniliyor. Hımm tamam. D, C'ye yeniliyor. Şimdi hocam en çok galibiyeti alan takım bence kazanır. Buradan da baktığımızda 2 galibiyeti şey alıyor A alıyor. Tek bir takıma yeniliyor ve şeyle de berabere kalıyor, C ile de berabere kalıyor. Öbürlerine baktığımızda B; C ve D'ye yeniliyor. Zaten B'yi ben direkt elerim. Ondan sonra D; C'ye yeniliyor. Bu durumda B zaten tam, B zaten burada direkt kaybetti. Çünkü D, C'yi yendiğine göre burada D şeyi B'yi de yener o zaman şeyden. E de D'yi yeniyor, B ve C ile de berabere kalıyor. Ben A diyorum hocam çünkü dediğim gibi 2 takımı yeniyor ve biriyle berabere kalıyor tek bir tanesine de yeniliyor 4 takımdan. Ama öbürlerine baktığımızda şeye A'ya en yakın olan E, D'yi yeniyor. B ve C ile berabere kalıyor bu durumda yine A daha önde gidiyor.

Diğer katılımcılardan farklı olarak Emrah, soruda takımların birbirlerini yenmesine farklı bir boyut getirmiş ve problemde böyle bir bilgiye yer verilmemesine rağmen D takımının E takımını yeniyor olmasından aynı zamanda da C takımının D takımını yeniyor olması bilgisiyle birlikte düşünüp D ve C arasındaki maçın sonucuna bakmadan C takımının E'yi de yeneceğini ifade etmiştir. D ve C takımları arasındaki ilişkiyi bu şekilde kurduğu görülmüştür.

> Araştırmacı: Mesela şimdi sen A ile ilgili bir yorum yaptın. E ile ilgili yorum yaptın. Diğerlerine ne diyeceğiz? Mesela C ile ilgili ne diyebiliriz?
>
> Emrah: Mesela C'yi şöyle şey yapabiliriz hocam. C mesela burada kime… C mesela D'yi yeniyor. Hani D'yi yenmiş. Burada D'nin yendiği takımlar ne mesela? Diyelim ki C, D'yi yeniyor ya. Örneğin diyorum mesela D, E'yi yeniyor eee C, D'yi yendiğine göre E'yi de yener şey olarak düşündüğümüzde.

Araştırmacı tarafından tüm takımların maçları arasındaki ilişkiye odaklanması sağlanmaya çalışılmış ancak bu durumda da problemde sadece ismi geçen takımları hesaba kattığı, diğer takımların maç sonuç bilgisine ihtiyaç duymadığı gözlenmiştir.

> Emrah: Direkt puanlamayı şöyle yapayım size. Neyi yeniyor? E ve B'yi yeniyor hocam. Direkt buradan 6 puan geldi mi? A'ya 6 puan geldi.
>
> Araştırmacı: Kime 6 puan geldiğini yaz karışmasın.
>
> Emrah: (Kâğıda "A" yazar ve altına "6" yazar.) A ya buradan yendiği takımlardan 6 puan geldi. Biriyle… Şeye… C' ye berabere kaldığı için 1 puan, +1 puan. D' yi yeniliyor burada puan almıyor direkt 0 puan. 7 puana çıktı şey. A' nın puanı 7. Zaten bize şey buradan verdiği şeye göre gideriz hocam.(Kâğıtta A' nın altına "6" yazdığını "7" olarak değiştirir.)
>
> Araştırmacı: 6, 1. Üzerine karalama ki görelim onu. 6, 1 yani 7 puan.

Emrah: Evet, 6, 1. Bu yendiği takımlar.

Araştırmacı: Toplam?

Emrah: Toplam 7.

Araştırmacı: Yaz oraya toplam 7 puan diye.

Emrah: Tamam hocam. (Kâğıda A yazdığı yerin yanına Toplam sütunu açar ve 7 yazar.) Ondan sonra şey…

Araştırmacı: Peki şimdi tek tek bakacak mıyız?

Emrah: Yani öyle yapacağız hocam.

Araştırmacı: Tamam şimdi nereye geldik?

Emrah: Ondan sonra şey zaten sırayla verdiğine göre giderim. Dediğim gibi en yakın buna şey gibi geliyor. Hani E geliyor ya hocam. D'yi yeniyor, B ve C ile berabere kalıyor. Şey… Galibiyet 3 puandı… E, 3 + şey… 2 takımı yeniyor 2 takımla da berabere kalıyor. Bir takımı da yendiğine göre 3+ 1+ 1 oluyor.

Araştırmacı: Yani kaç puan oluyor?

Emrah: 4 puan oluyor hocam.

Araştırmacı: 4 puan mı oldu?

Emrah: Şey pardon 5 puan. Yaa (Kâğıtta E diye başka bir yere sütun açar ve altına 3, 1, 1 yazar ve yanına 5 yazar.) Ondan sonra…

Araştırmacı: Şimdi A'yı buldun, E'yi de buldun bitti mi?

Emrah: E'yi buldum, en yakın bu.

Emrah'a tahminde bulunduğu bilginin aksi bir durumun gerçekleşip gerçekleşemediği sorulduğunda ise takımların oynadıkları maç sayılarının birbirinden farklı olduğunu düşündüğü, B takımının iki, D takımının bir, E takımının iki maç yaptığını ifade ettiği ve tahminini de diğer maçlarının sonuçlarını bilmediğini düşündüğünden yaptığı ortaya çıkmıştır.

Araştırmacı: Peki bir şey soracağım.

Emrah: Buyrun.

Araştırmacı: Mesela A, E'yi yendi. E de B'yi yendi örneğin. B, A'yı yenemez mi?

Emrah: B yenebilir ama şöyle bir durum var hocam hani kimin ne kadar maç yaptığı önemli burada. Mesela A, 4 tane maç yapıyor.

Araştırmacı: A, 4 tane maç yapıyor. Peki. Diğerleri?

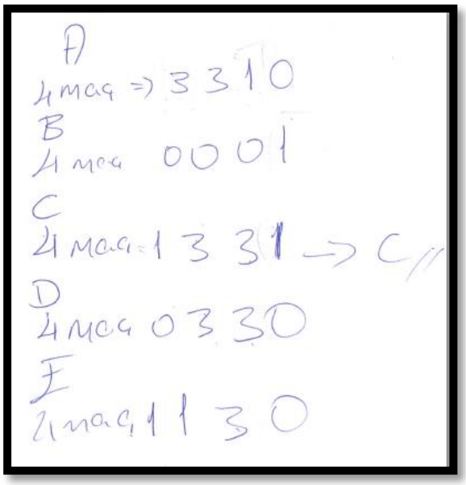
Emrah: Dördüyle de yapıyor. Diğerlerinin yaptığı maçlar… Zaten herhalde burada B, 2 maç yapıyor. D tek maç gösteriyor burada. Tek maç gösteriyor. E, 2 maç yapıyor hocam. B ve C ile berabere kaldığına göre 2 maç yapıyor. Burada fazlalık… Hani kim daha çok maç almış ve durumu ne ona baktığımızda bu çıkıyor hocam.

Takımların farklı sayıda maç yapıp bir takımın şampiyon olması durumu Emrah'la beraber sorgulandığında bu tarz bir turnuvanın adil olmayacağı sonucuna varılmış ve katılımcının takımların maç sayılarına yeniden odaklandığı ve takımların birbirleriyle sadece birer kez oynadığı, rövanş oynanmadığı cümlesinin ilgisini çektiği fark edilmiştir.

> Araştırmacı: Peki bir futbol turnuvasında takımların birbirlerinden farklı sayıda maçlar yapıp içlerinden bir şampiyon çıkartması adil olur mu?
> Emrah: O zaman olmaz hocam.
> Araştırmacı: Mesela öyle bir takım var ki 100 tane maç yapıyor. O, bir puan alıyor. Başka bir takım var 10 tane maç yapıyor. O, onu geçebilir mi? Geçebilir belki de geçmesi adil olur mu?
> Emrah: Geçmesi adil olmaz hocam.
> …
> Araştırmacı: Peki şurada ne yazıyor?
> Emrah: Her biri diğerlerinin her biriyle yalnız bir kez oynamaktadır. Haa... Yani her sadece 1 maç yapıyor takımlar arasında rövanş maçı yapılmıyor.

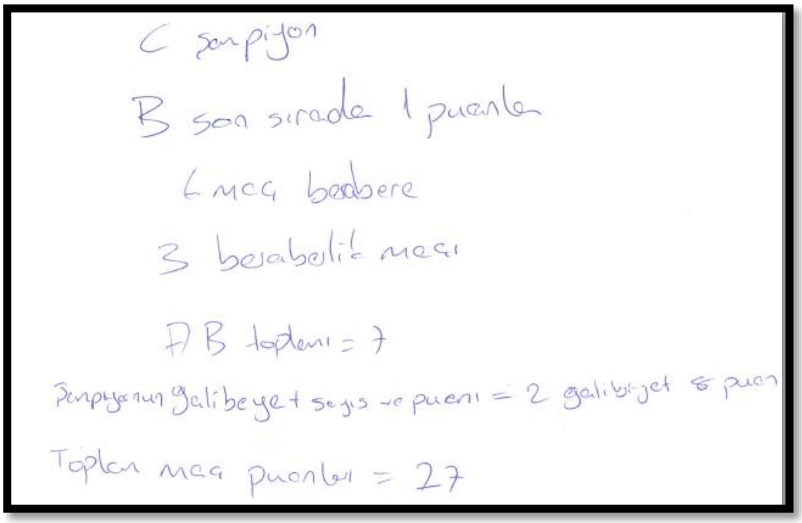
Bu hesaplamalarının ardından problemi yeniden incelediğinde kaybeden takımlara sıfır puan verdiği görülmüş ve oluşturduğu çizelgede bu kez C takımının şampiyon olacağını düşünmüştür.

> Emrah: A'nın maçlarına bakıyorum hocam. A, 4 maçında ne yapmış? A, 4 maçında da mesela 2 takımı yeniyor. 1 takımla berabere kalıyor. 1 takıma da yeniliyor. Eee puanlama yaptığımızda 2 maçta şey 3 puan aldığına göre artı bir de beraberlik var oradan da 1 puan 1. Bir tanesine de yeniliyor. D'ye de yeniliyor. Oradan da 0 puan alıyor. ("A" yazar altına "4 maç --- 3 3 1 0" yazar) Şeye baktığımızda B'ye baktığımızda… B de, B; C ve D'ye yeniliyor. 2 tane 0 aldı buradan. Ondan sonra ıı şey A'ya yine yenilmiş yine bir 0 puan alıyor buradan. Şeyle E ile berabere kalmış buradan 1 puan alır. ("B" yazar altına "4 maç --- 0 0 0 1" yazar) Sonra şeye geçelim C'ye geçelim C takımına. O da 4 maç yapmış değil mi? Aynen. 4 maç yapmış. Şimdi C'nin direkt olduğu yer yok hocam. Buradan bakalım. E ve D de. C şey ile berabere kalıyor. E ile berabere kalıyor +1 buradan geldi. Sonra… Şeyi yeniyor D'yi yeniyor +3 puan alıyor. Ondan sonra B'yi de yeniyor buradan bir artı 3 daha alıyor. Şeyle de berabere kalıyor. A ile de berabere kaldığına göre buradan da 1 puan alıyor hocam. ("C" yazar altına "4 maç --- 1 3 3 1" yazar) Şimdi soru tam bizim şeyimize göre ters çıkıyor. D, yine o da 4 maçtır. Maç yani… D'nin maçlarına bakıyorum hocam şu anda. D burada bir seferinde şeye E ye yeniliyor yani 0 puan aldı. Ondan sonra… Iı şeyi yeniyor B'yi yeniyor. Oradan 3 puan aldı. Şey A'yı yeniyor buradan +3. Burada maç sayısı ne oldu… Berabere kalıyor tamam bir de burada… Hııı C'ye yenildiğine göre bir eksiğimiz vardı o da 0 puan alıyor hocam. ("D" yazar altına "4 maç --- 0 3 3 0" yazar E'ye geçtik hocam. B ile C berabere kalıyor. 1, 1. Şeyi yeniyor D'yi yeniyor 3. Ondan sonra… Nerede E? A'ya da yeniliyor buradan 0 puan. Şimdi hesapladığımızda hocam şey galip C'dir.



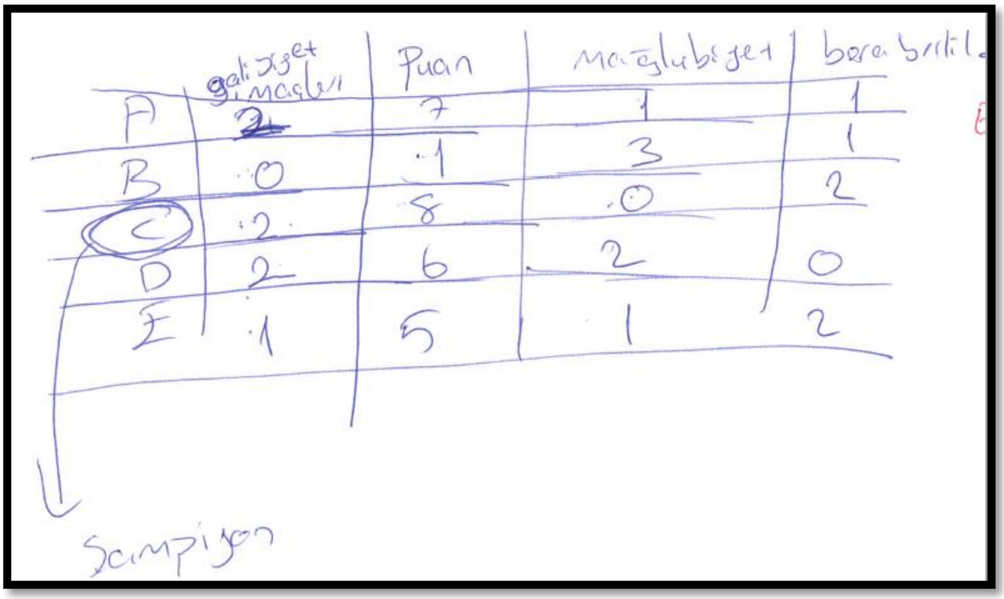

**Görsel 3.24.** *Emrah'ın futbol problemindeki ilk hesaplamaları*

Problemde kendisine yöneltilen diğer şıklardaki soruları cevaplarken de altı maçın berabere bittiğini ve toplamda 20 maç yapıldığını ifade ettiği görülmüştür. Bu durumda da sadece şampiyonu bulmaya odaklandığı ve diğer cevaplarının, takımların birbirleriyle yaptıkları maçlarının üzerine düşünmediği ortaya çıkmıştır.




**Görsel 3.25.** *Emrah'ın futbol problemindeki cevapları*

Takımların toplamda kaç maç yapmaları gerektiği ve bunların kaçının berabere bittiği sorusunda uzun süreli sorgulamalar yapılmış ve Emrah'tan takımların verilerinin yer aldığı bir tablo yapması istenmiştir. Bu tabloda ise takımların galibiyet, puan, mağlubiyet ve beraberliklerine yer vermiş ve şampiyon takımın C olacağını göstermiştir.



**Görsel 3.26.** *Emrah'ın futbol problemindeki tablosu*

Genel olarak Emrah'ın futbol probleminde verdiği cevapların, takımların birbiriyle yaptıkları maçlardaki ilişkiler üzerine değil sorularda kendisinden istenilenler üzerine şekillendiği görülmüştür.

Tişört problemine geçildiğinde ise, Emrah soruyu okuduktan sonra değerlendirme yapmak istemiş ancak matbaaların sınırlarının farklı olmasından dolayı bu değerlendirmesinde zorlanmış ve tıpkı ilk soruda olduğu gibi ajans matbaanın daha hesaplı olduğunu tahmin etmiştir.

> Araştırmacı: Ne anladın sorudan?
>
> Emrah: Hocam şimdi her biri belli bir öğrenci kitlesinden sonra, öğrenci sayısından sonra indirimlere başlıyor hani. Öğrenci fazlalığına bağlı olarak. İlk baktığımızda hani 75 tişört var. 12 TL… (düşünüyor) Şimdi ilk olaya şeyle başlayalım hocam yani. 100 tişörtten 12 TL. Ajans matbaa ile başlayalım hani. Başlangıç olarak ajans matbaa 12 TL'ye 100 tişörte 12 TL veriyor. Iıı… Öbür matbaa… Çiçek matbaa mıydı? O ise 75 tişörtten sonrakilerin tanesinde… Pardon 10 TL fiyat biçiyor hani… 75 tişörte 10, biri de 12 TL fiyat biçiyor. Şöyle yazayım Çiçek 75'ten, 75'e 10, öbürü 100'e ajans, 100'e 12 veriyor. (Kâğıda "Çiçek 75'e 100", "Ajans 100, 12" yazar) Hani şu ilk iki değerlendirmeme baktığımda şeyi değerlendiririm. Ajansı değerlendiririm hocam.

Bu problemde diğer katılımcıların sıkça kullandığı, bir özel örnek belirleyip soruyu anlamlandırmaya çalışma yolunu kullanmayan Emrah'ın sınırlara odaklandığı, ilişkileri fonksiyonun anlamlı sınır değerleri üzerinden kurmaya çalıştığı görülmüştür. Ancak bunu yaparken düşündüklerini yazmadığı ve yüzde kavramıyla karşılaştığı için kafasının karıştığı gözlenmiştir.

Emrah: O da 5. O da yarı fiyatına düşüyor. Yani pek bir fark yok. Burada yüzde 25…O zaman ortanca şeylere bakacağız. İlk ortak şeylere bakalım hocam. 2 TL'lik bir indirim. O da yüzde 25'lik, 75'lik kısmı 10 TL den 12'ye… Hemen birbirini tamamlıyor. Yüzde 25'ten 100'e... 75'ten 25 e 100, 2 TL arttırırsak yüzde 20'si de 2 TL gibi bir şey oluyor. Hocam ikisi de hemen aynı yani.

Araştırmacı: (Gülüyor) Yönlendirme yok. Hangisini alırsanız alın mı diyorsun?

Emrah: (Gülüşmeler) Aynen. Daha basit bir yolu yok mu yani? Bu kadar… Yüzde 25 falan… Şimdi yüzde 25'lik kısmı değerlendirildiğinde hocam… Ha. Iıı… Burada 75 var, burada da 100 var ya hani. Ben şöyle düşündüm. 75'ten 100'e hani 25 tamamlanıyor. Yüzdelik olarak hesapladığımda bu iki indirime baktığımda mesela bu diyor ki 2 TL'lik indirim yapacağım, bu da diyor ki yüzde 25'lik bir indirim yapacağım. 75'ten 100'e hani 25 olursa, 25; 2'ye denk gelir. Bu da yüzdelik olarak da 25, 2'ye denk gelir hani sayı olarak. O yüzdelik kısım o da sayı olarak. Öyle düşündüm ama biraz karıştı benim kafam da…

Katılımcı, araştırmacı tarafından problemi parçalara ayırabilmesi için cebirsel ifade kullanmaya yönlendirilmiş ve yönlendirmelerin sürmesi sonucu "n" değişkenini 75 ile 150 tişört arasında kullanmıştır. Sorgulamalar devam etmesine rağmen Emrah'ın değişken kullanımını çözümünde sıkça kullanmayı tercih etmediği düşünülmüştür.

Araştırmacı: Biz bu sayıları tek tek yazmıyoruz da bir şekilde gösteriyoruz ama biz biliyoruz ki o gösterdiğimiz şey 75 ile 150 arası demek. Bir şey kullanarak gösteriyoruz ne kullanarak gösteriyoruz?

Emrah: … Şey formüllerden birini…

Araştırmacı: Formül dediğin şey ne oradaki? Benim elimde öyle sayılar var ki bu sayılar 75 ile 150 arasında. Ben bunu göstermek istiyorum…

Emrah: Mesela ben bu söylediğinizi dizi olarak değerlendirirsem 75 diyelim ki burada yazdım ya… "75 + 1, 75 + 2, … 75 + n" diye gider.

Araştırmacı: Hııı. O zaman tam sayıları mı buluruz oradaki?

Emrah: Gibi. En son 150. Şu şekilde "75 + n"…150 diye gider. (Kâğıtta "75 + n"…"150" yazar)

Araştırmacı: Iıı 75 ile 150 arasındaki sayıları böyle ifade ederim diyorsun yani?

Emrah: Ben böyle ifade ederim. Başka belki vardır ama şuan aklıma gelmiyor yani (Gülüyor)

Araştırmacı: Peki sen göster onu. Devam et.

Emrah: Tamam. 75, 75. "75 + n" diyelim. 150. Şöyle. ("75 + n…150" yazar)

Araştırmacı: "n", ne oradaki?

Emrah: "n" değişken hocam. 1, 2, 3, tam sayı.

Araştırmacı: 75 ile 150 arasındaki sayıları bir değişken kullanarak ama tam sayıları demiyorum, tüm reel sayıları bir değişken kullanarak gösterebilir miyiz?

Emrah: Tek bir değişken kullanarak bütün reel sayıları gösterebilirim yani.

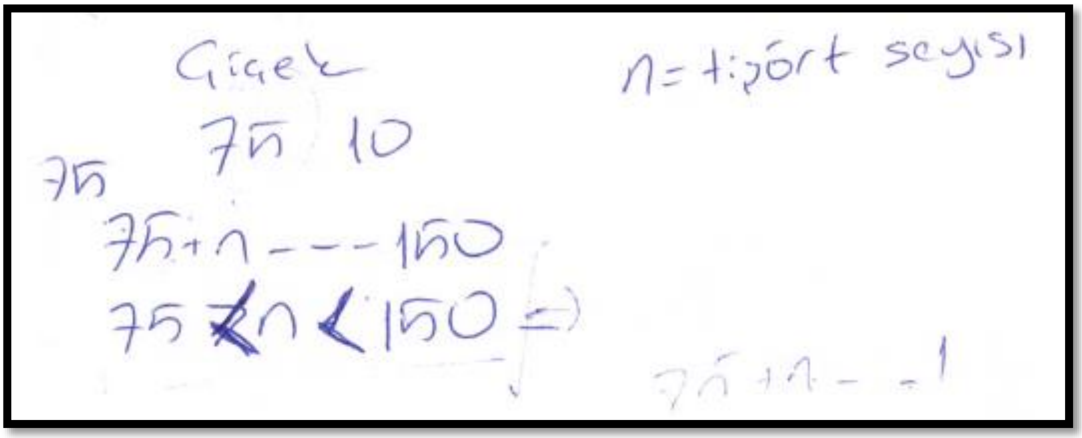
Araştırmacı: Nasıl gösteririz? 75 ile 150 arasındaki sayıları tek bir değişken kullanarak nasıl ifade ederiz matematiksel olarak?

Emrah: Haa matematiksel olarak n eşittir, elemanıdır reel derim. Bunu belirtirim ondan sonra da 75+n… 150’ye kadar derim. İkisinin arasındaki sayılar gibi…

…

Onu gösterebilir misin küçüktür olarak?

Emrah: Hee. Pardon özür dilerim. 75, mesela n derim. Arasındadır hani 75’ten büyük… Mesela 150 ile 75 arasında diyeceğim ya… 75’ten büyüktür “n”, “n”, 75’ten büyüktür, 150’den de küçüktür. Pardon böyle mi oldu? Bir dakika şöyle olacak… (“75<n<150” yazar)




**Görsel 3.27.** *Emrah’ın tişört problemindeki değişken kullanımı*

Emrah değişken kullanmadığı ve özel örneklerle problemi anlamlandırmaya çalışmadığı için matbaaların indirimlerini hesaplamakta ve matematiksel olarak göstermekte zorlanmıştır.

Araştırmacı: Şöyle sorayım o zaman. Benim elimde bir “n” kadar tişört var. Kaç kadar olduğunu bilmiyorum. “n” kadarlık tişörte gelene kadar ben kaç para ödeyeceğim?

Emrah: n tişörtüne gelene kadar kaç para ödeyeceğim? O şey… Burada verilen miktara göre ne kadar…

Araştırmacı: Miktarı bilmiyoruz. Miktarı biliyoruz ki 75 ile 150 arasında. Onu n cinsinden ifade edebilir misin orada ödeyeceğin parayı? İlk 75 tişört ne kadar?

Emrah: ilk 75 tişört, şey… 10 TL.

Araştırmacı: Yani? İlk 75 tişörte ne kadar para öderim?

Emrah: Haa şey… 75 çarpı 10, 750.

Araştırmacı: Bu kesin mi 75 tişörte ödeyeceğin para?

Emrah: 75 tişörte kesindir yani.

…

Araştırmacı: Peki bunu geçtim ben bu kısmı. Ajans matbaayı bilinmeyen kullanarak yazabilir misin? Onun tarifesini yine “n” değişkeni kullanarak yazabilir misin?

Emrah: “n” değişkeni… Kullanabilirim. Şimdi 75 TL’ye…

Araştırmacı: Ajansı.

Emrah: 75 tişörte 10 veriyor…

Araştırmacı: Ajansı. Bak çiçekteyiz hala çiçektesin. Ajans matbaayı soruyorum.

Emrah: Ajans tamam. Çiçek, ha çiçeği siz diyorsunuz.

Araştırmacı: Yok ilkinde zorlandın ya ikincisine bak dedim. İlkine bakmak istiyorsan devam edebilirsin yani.

Emrah: Onu nasıl gösteririm? Şey derim. Yine aynı bu yoldan giderim.

Araştırmacı: Mesela nasıl?

Emrah: Şey derim. 100 tişörte 12 TL ye basım yapacağını söylüyor.

Hesaplamalarını yaparken yüzde kavramının problemde bulunması da yine Emrah'ı zorlayan bir başka durum olmuş, bu sebeple de matbaa indirimlerinin birbirleriyle ilişkilerine odaklanmada sorunu yaşadığı görülmüştür.

Emrah: Bu, ıı şey… Yüzde 25'lik bir indirim yapılıyor hani… Normal fiyattan yüzde 25'lik kısmı çıkarırım, "n" ile çarparım.

Araştırmacı: Nasıl gösteririz onu?

Emrah: Gösterim olarak… Öncelikle yüzdeliği sayı olarak bulmak gerekiyor. Yoksa…

Araştırmacı: Ne demek yüzdeliği sayı olarak bulmak?

Emrah: Yani kesirli yapıyoruz ya genişletip tam sayı olarak hani bulmam gerekiyor.

Araştırmacı: Göster nasıl yapacağını Emrah.

Emrah: Tek tişört… Yüzde 25'lik. 1/25'ten o da kaç olur? Yüzde 2'lik olur değil mi? 25'i 4 ile çarpmam gerekiyor…

Araştırmacı: Bir sayının yüzde 25'i nasıl alınır?

Emrah: Bir sayının yüzde 25'i… Mesela 1… Bir sayının yüzde 25'i şey… Iıı… Sayı çarpı 25…

Araştırmacı: Mesela 100 sayısının yüzde 25'i kaçtır?

Emrah: 100 sayısının yüzde 25'i kesir olarak şu şekilde… ("25/100" yazar)

Araştırmacı: Bu, 25/ 100. Peki. Bu bir sayının yüzde 25'ini almaya yarayan durum. Benim sayım ne?

Emrah: Benim sayım burada… 1'i de alacağız. Direkt yüzde 25'lik fiyatı bulacağız.

Araştırmacı: Bu bilinmeyenin yüzde 25'i nasıl bulunur? "n"nin ya da?

Emrah: Onun şeyini bulmaya gerek var mı hani? Herhangi bir sayının değil de… Yok, bir sayı olması gerekiyor değil mi? Kafam karıştı hocam baya… Devreler yandı. (Gülüşmeler)

Karo probleminde ise Emrah, şekillerdeki alanları hesaplayıp toplam karo sayılarını belirtip artış miktarının üç olduğunu, siyah karo sayılarındaki artış miktarının da bir olduğunu ifade ederek çözümüne başlamıştır.

Bakalım hocam. 1, 2, 3. 3, 3 9. 2, 3, 4, 12 oluyor. 3'e 4, 5 15, 12 ve 9 hocam, tamam. 4.ve 5. Teraslara ait resimlerle ilgili neler söyleyebilirsiniz? Bu teraslarda kaç siyah ve beyaz karo olduğunu bulunuz. Hocam 12, 10, 9, 15 gidiyor yani 9, 4, 12… 12, 15, 3… Üçer üçer artmaktadır hocam.

Araştırmacı: Nedir üçer üçer artmakta olan?

Emrah: Bütün karelerin sayısı üçer üçer artmaktadır her birinde. Iıı ona paralel olarak siyah karoların sayısı da birer birer artmaktadır hocam ona paralel olarak.

Bu hesapladığı artış üzerinden 4 ve 5. adımlardaki karo sayısını hesaplamış ve bunları ana dilde ifade etmiştir.

Emrah: Şimdi öbürüne bakacak olursak o zaman en son karo 15'ti. O zaman bir 3 daha artacak bu durumda 18 olacaktır ve 4 tane siyah kare olacaktır. Yani 4 tane kare boyanacaktır bu durumda. Beşinci şey de ııı beşinci…

Araştırmacı: Teras da…

Emrah: Teras da… 18, 21 tane olacaktır. 21 tanesinden 5'i bu sefer karalanmış olacaktır. Bu şekilde…

Araştırmacı: Peki yazalım mesela a diyelim.

Emrah: Şimdi çizeyim mi buraya?

Araştırmacı: Yok yok istediğini yapabilirsin de a'nın cevabını verdiğini, yani a sorusu için ne diyebilirsin?

Emrah: Dördüncü teras 18 şey 18 kareden oluşacak. Bundan dördü şey taralı olacaktır hocam.

Araştırmacı: Dördü siyah…

Emrah: Dördü siyah... O zaman geriye kaç? 18,4 14'ü de beyaz olacaktır. ("a= 4.Teras 18 kareden oluşacak, 4 ü siyah 14'ü beyaz" yazar.)

Araştırmacı: 14'ü beyaz…

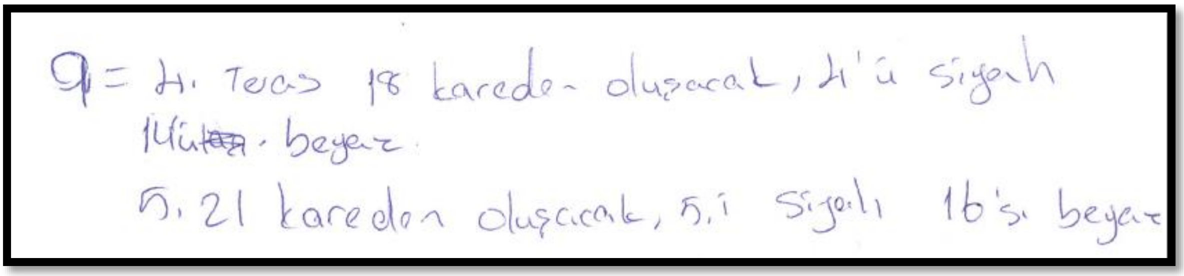
Emrah: Beyaz.

Araştırmacı: Peki beşinci?

Emrah: Beşinci toplam 21 kareden oluşacak. Bunun 5 i siyah öbürüne şey 4 demiştik, bu durumda beşi çıktığında 16'sı beyaz olacaktır. ("5. 21 kareden oluşacak, 5 i siyah 16'sı beyaz" yazar.)

Araştırmacı: 16'sı beyaz… Peki, birincinin cevabını vermiş oldun. İkinciye bakalım.

Bu başlangıç stratejisinin ardından kendisine sorulan ilk sorunun yanıtını yaptığı alan hesaplamalarına rağmen değişken kullanmadan ana dilde yazmıştır.


a= 4. Teras 18 kareden oluşacak, 4'ü siyah
14'ü beyaz.
5. 21 kareden oluşacak, 5.i siyah 16'sı beyaz

**Görsel 3.28.** *Emrah'ın karo problemindeki hesaplamaları*

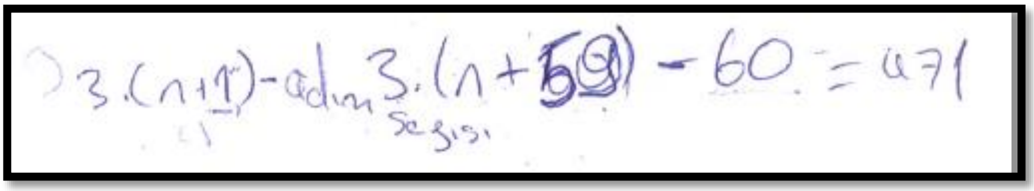
Kendisinden bir sonraki şıkta daha büyük teraslardaki karo sayısını nasıl hesaplayacağı istendiğinde ise, araştırmacı tarafından bir özel örnek olan 16. terası hesaplaması Emrah'tan istenmiştir. Bu durumda da özel örneği Emrah'ın denemediği ve bir kural bulması gerektiğini ifade ettiği görülmüştür.

> Emrah: Daha büyük teraslardaki karo sayılarını bulmak için nasıl bir yol izlersiniz? Mesela derse 16. teras falan derse…
>
> Araştırmacı: Hııı. Mesela 16. teras dedi.
>
> Emrah: Mesela birinci şeyde bire şöyle yaparız. Birinci teras diyelim. Birinci terasta 9 şey varsa, 9 kare varsa ikincisinde 12 nasıl bir şey yapabiliriz?
>
> Araştırmacı: Vaktimiz olduğunu biliyorsun. Yani rahat ol o açıdan işte çok zaman geçti diye falan düşünme. Kağıdımız şeyimiz de var.
>
> Emrah: Ya onu düşünmüyorum da bir formül mecburi oluşturacağız. Mesela ne yapabiliriz? Burada üç üç demiş mesela. Ya da şeylere göre gideriz kare hani alan hesaplamalarından.

Kural bulmaya yönlendirildiğinde ilk kez değişkeni kendiliğinden kullanmış, verilen şekilleri incelemiş, satır sayısının değişmediğini, sütun sayısının değiştiğini ifade edip ona "n" değişkenini atayıp alan hesabına yönelmiş ve bütün alanı "3 çarpı n" ile ifade etmiştir.

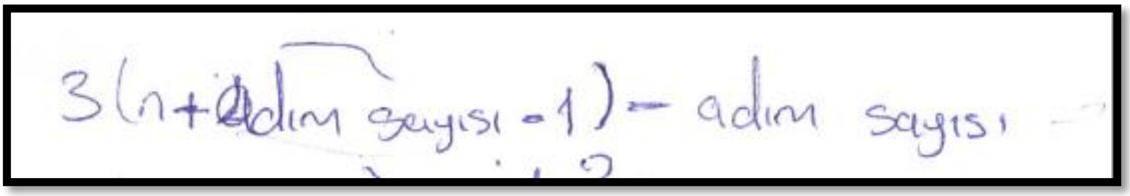
> Emrah: 3'e, 1, 2, 3, 4, 5. Hııı tamam. Şimdi şey değişmiyor üst kenar değişiyor dik kenar değişmiyor hocam. O zaman dik kenara 3 deriz direkt değişkene n derim ben.
>
> Araştırmacı: Hııı, "n" dedik.
>
> Emrah: n derim. "3 çarpı n" derim.
>
> Araştırmacı: Ne bu "3 çarpı n" dediğin?
>
> Emrah: "3 çarpı n" bütün terasın alanı.

Kuralını oluşturmaya çalışırken beyaz ve siyah karo sayılarının nasıl değişkenlik gösterdiğine odaklanmış ve "3.(n+1)" cebirsel ifadesine yani ilk genellemesine ulaşmış ve bu genellemeyi 60. adımda kullanmaya çalışmıştır.




**Görsel 3.29.** *Emrah'ın karo problemindeki ilk genellemesi*

Emrah'ın oluşturduğu cebirsel ifadeler sorgulandığında genellemesini değiştirdiği görülmüş ve yeni oluşturduğu ifadede hem bilinmeyen olarak kullandığı bir değişkeni hem de ana dilini kullanmıştır.




**Görsel 3.30.** *Emrah'ın karo problemindeki ikinci genellemesi*

Genellemesindeki değişken üzerine Emrah'a araştırmacı tarafından sorular sorulmuş siyah karoların sayısının adım sayısı ile aynı olduğunu ifade etmesine rağmen orada sabit olan 3 satır karosunu "n" değişkeni ile göstermiş olduğu, yönlendirme üzerine n yerine 3 yazdığı görülmüştür. Böylelikle oluşturduğu ifade "[3.(adım sayısı +2) - adım sayısı]" haline dönüşmüş ancak bunu cebirsel olarak bu şekilde hiç göstermemesi, işlemlerinde de bu durumu düşünmemesi dikkat çekmiştir.

Araştırmacı: Bu sabit 3 ben koyarım dedin. "n" demene gerek yok 3 sabit ise eğer…

Emrah: Gerçi doğru ya niye şey yapıyorum ki onu… 3 artı adım sayımız burada 2 oluyor. Ondan sonra 2 eksi 1 dedik. Adım sayısı eksi 1 formülünden. Şimdi beyazların formülünü bulacağız değil mi hocam? O da eksi adım sayısı.

Araştırmacı: Yani kaç burada şu an?

Emrah: Bu da ikinci adım olduğu için eksi 2 diyoruz hocam. ("3.(3 + 2 – 1) – adım sayısı" yazar.) Şimdi bir bakalım hocam. Parantez içinde burası 3 artı 1 den 4 oldu. 3 kere 4'ten 12. 12 eksi 2'den 10 oldu hocam. 10 tane beyaz olduğunu söylüyorum. Gerçekten öyle mi? Sayalım. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Araştırmacı: 10 tane var. Devam edelim kontrol etmeye. İkinci doğru diye doğru diyecek miyiz?

Emrah: Doğru demeyelim hocam. Üçüncü için kontrol edelim bakalım doğru çıkmış mı hocam? Üçüncüye baktığımızda üçünde şey… Yine sabit sayılarımız 3 çarpı 3 artı adım sayımız 3 eksi 1 dedik ondan sonra parantezi kapatıp eksi adım sayısı olan üçüncüyü alıyoruz. Doğru mu? Koyduk mu hepsini? Tamam. 3.adımdayız tamam. Şimdi 2, 5, 15 oldu. 15 eksi 3'ten 12. Burada 12 tane beyaz üçüncü adımda olması gerekiyor. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. ("3(3 + 3 – 1) -3" altına da "15 – 3 = 12" yazar.) Ve sağlıyor hocam. Şimdi öbürünü yapayım mı?

Araştırmacı: Şimdi 60 için yapalım ya da dördü de buldun onu da kontrol edelim.

Emrah: Tamam hocam… Şimdi 3 çarpı yine sabit sayımız olan 3 çarpı…

Araştırmacı: Bu 3 neden sabit? Ben orayı anlamadım. Şimdi bu 3 ü anladım. (Beyaz satırları gösterir.) Oradaki sabit olan 3'ü anlamadım.

Emrah: Buradaki üç birincinin şey ya… (İlk resimdeki üst kısımda yer alan 3 beyaz karenin üstüne "n" yazar ve orayı gösterir.)

Araştırmacı: Birincide 3 var üstüne adım sayısı tamam şimdi anladım.

Emrah: Birincide ne dedik? Üstüne adım sayısı 4'tü hocam. Yine eksi 1. "Adım sayısı eksi 1"di ya hani formülümüz.

Araştırmacı: O neden vardı? "Adım sayısı eksi 1"?

Emrah: Hocam çünkü şu yatay kenar adım sayısının 1 eksiği kadar. Hep böyle oluyor hocam.

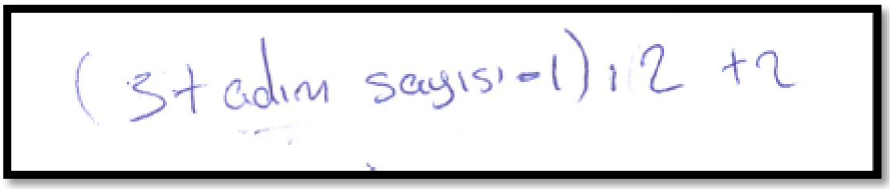
Araştırmacı: Peki bu yatay kenar dedin ya, burada yatay kenar 3, adım sayısı 1 değil mi burada? Birinci adım ya bu.

Emrah: Evet.

Araştırmacı: Ama sen o zaman sabit olan 3 ü dışarıya koyarak bu birinci adım olunca dışarıya da 3 koyunca 2 farkı da kapatmış oluyorsun yani?

Emrah: Aynen hocam.

Bütün karolardan beyaz sayısını alan yardımıyla bulduktan sonra kendisinden doğrudan beyaz karo sayısını bulmaya yarayacak bir kural istendiğinde ise bu kez yine şekil üzerinden doğrudan beyaz karo sayılarına odaklanıp bir genellemeye ulaştığı görülmüş ve bu genellemesini de ana dilde ifade etmiştir. Problemde Emrah, aslında iki defa “2. adım sayısı + 6” ifadesine ulaşmasına rağmen ifadelerinin cebirsel sorgulamasını ve sembolik manipülasyonu yapmadığından aradaki benzerliği görmemiştir.




**Görsel 3.31.** *Emrah’ın karo problemindeki üçüncü genellemesi*

Konser probleminde Emrah’ın harcama, kazanç, gelir kavramlarını sorgulayarak ve başladığı yine sonuç odaklı düşündüğü orantısal olarak sonucu bulmaya yöneldiği görülmüştür.

Emrah: Aynen. Onun iki katını kazanmak istiyor tekrardan. Yani bu şekilde de hem açığını kapatmış olacak hem de 50 bin TL kazanmış olacak hocam. Kazancı 50 bin TL kar yani. Gelecek kişi sayısıyla ilgili ne söyleyebiliriz hocam… Yani 20 TL’den gidiyor. 20 ile 5’ten şu sayı bulunuyor zaten. Yoo, bir saniye. 50 bin harcama… Konsere yani 50 bin kişinin gelmesi gerekiyor 100 bin TL kazanabilmesi için hocam.

Emrah, elde etmek istediği veriler belirli olmasına rağmen işlem becerisinde zorlandığı için değişken de kullanmayarak ilk sorunun cevabını vermekte zorlanmıştır.

Araştırmacı: Toplamda 50 bin lira harcamaya vereceği için 100 bin TL ona kalacak. Peki, 150 bin lira kazanması için biletler kaç para?

Emrah: Biletler 20 TL.

Araştırmacı: 20 liraysa acaba kaç kişi gelmeli? Ne yapmak lazım?

Emrah: Rasyonel bir sayı mı? Tam olarak şey yapamadım. Kaçla çarpmalı?

Araştırmacı: Ne yapmak lazım mesela? Neyi kaçla çarpmak lazım?

Emrah: Yani 20’yi öyle bir sayıyla çarpacağız ki şey çıksın 150 bin…

Araştırmacı: 150 bin çıksın. 20'yi neyle çarparsan 150 bin çıkar?

Emrah: İşte onu bulmak için…

Araştırmacı: 150 bini 20 ye mi böleceksin bu iş için?

Emrah: 150 bini 20 ye mi böleceğim? Mantıklı…

Araştırmacı: Çünkü 20'yi neyle çarparsan 150 bin yapar diyorsun.

Emrah: Aynen öyle yapacağım hocam.

…

Araştırmacı: Yani kaç para kazanmak istiyor?

Emrah: Bu sefer… 7500 TL olsaydı… Az önce yaptığımız olayda neydi? 100 bin TL kazanmak istiyor. Yani bu sefer 175 bin TL kazanmak istiyor…

Araştırmacı: Hııı…

Emrah: Buna göre kişi sayısının gelmesi gerekiyor…

Araştırmacı: Kaç kişi?

Emrah: 175 bin olabilmesi için 12,5 mu olması gerekiyor?

Araştırmacı: Kaça bölüyorsun?

Emrah: Yani 175 bin. 20'ye bölüyorum.

Araştırmacı: Nasıl kolay bölünür? Düşün. 175 bin nasıl 2'ye bölünür? Şey 20'ye bölünür? 10'a böldün. Kaç yaptı? 17 bin…

Emrah: 17 bin yaptı.

Araştırmacı: 17500 yaptı. 17500'ü ikiye böleceksin…

Emrah: 17500'ü şey… 16, 8…

Araştırmacı: 8 bin olursa 16, 9 bin olursa…

Emrah: 9 bin olursa 18. O zaman sekiz yüz… 8500…

Araştırmacı: 8500. 2 ile çarparsak…

Emrah: Evet…

Araştırmacı: 17 bin yaptı. 17500 olması lazım…

Emrah: 9 da, bir saniye… 8500 ile çarptığımızda…

Araştırmacı: Böl normal ya. 175 bini…

Emrah: ("c = 175 bin / 20 yazar".)

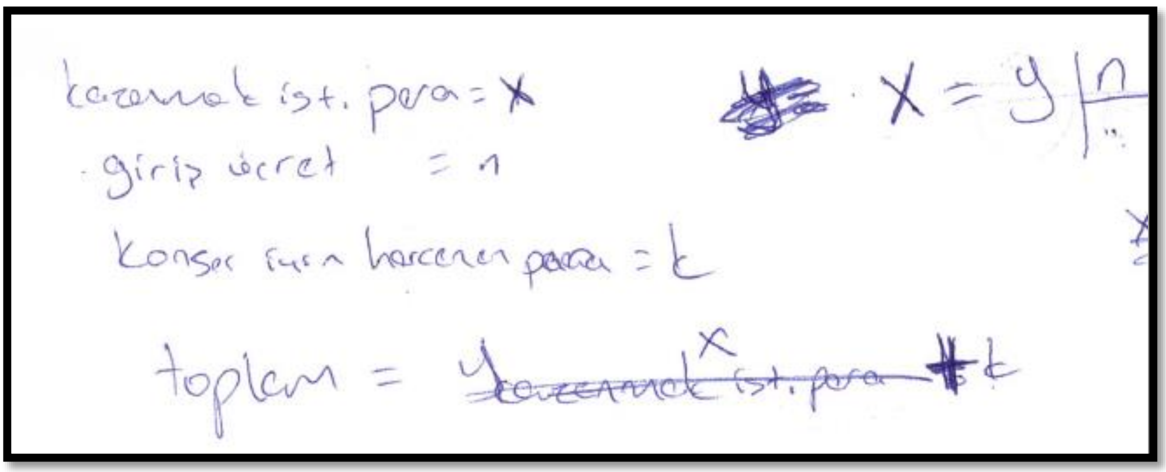
Problemde niceliklerin hepsinin değişebileceği kısmına gelindiğinde ise Emrah'ın birden fazla değişkeni doğrudan verebildiği ve bir kurala ihtiyacı olduğunu belirttiği görülmüştür.

Emrah: Ne söylersiniz? Şimdi hocam… Kazanmak istediği para olsun hocam. Bunlara şey vermek istiyorum. Bilinmeyen. Mesela "x" dedim. Formülden daha iyi görebilmek için bunları yapıyorum hocam. Ondan sonra giriş ücretini… Giriş ücreti de "n" olsun mesela. Şu an formüle döküp ondan sonra ne yapabileceğime bakacağım hocam.

Konser için harcanan paraya “k” değişkenini, kazanmak istediği paraya “x” değişkenini, giriş ücretine “n” değişkenini atayıp aralarındaki ilişkiyi bulması gerektiğini belirtmiş ve bunu ararken de zorlandığı görülmüştür.

> Emrah: Konser için harcanan para k olsun hocam. (“kazanmak istediğin para = x”, altına “giriş ücret = n”, onun da altına “konser için harcanan para = k” yazar.) Yani şimdi bu üç şey sürekli birbiriyle değişiyor hocam. Iıı biri arttığında biri azalıyor.
>
> Araştırmacı: Hangisi arttığında hangisi azalıyor?
>
> Emrah: Aynen. Onu bulalım hocam şimdi. Şöyle diyelim. Birinci şeyde yola çıkarsak kazanmak istediği para 100 bindi. Yani kazanmak istediği para eşittir toplam kazanılan para, şöyle yapalım x eşittir bir de toplam para diye bir şey yazsam?
>
> Araştırmacı: İstediğin gibi yapabilirsin. Bilinmeyenler sana ait.
>
> Emrah: Eşittir o da “y” olsun. Toplam para y olsun dedik hocam. (“toplam = y + k” yazar.)
>
> Araştırmacı: Sen toplam parayı buluyorsun yani?
>
> Emrah: Evet. Şu anda toplam para yolundan bir formül oluşturup bazı formüller oluyor ya birbiriyle değiştirip…
>
> Araştırmacı: Birbiriyle değiştireceksin, anladım.
>
> Emrah: O şekilde buluyorsun hocam. Toplam para buradaki 150 toplam paraydı. Bilet giriş ücreti bu da neydi hocam? Yani bir saniye, özür dilerim. Kazanmak istediği para, toplamda onu bulacağım. Özür dilerim, y olmayacak. (“toplam = kazanmak istediğin para + k” haline getirir.) Kazanmak istediği para “x” eşittir toplam para “y” bölü giriş ücreti neydi “n”, konser için harcanan para çarpı buraya da şey gelir herhalde kişi sayısı gelir. Kişi sayısı…
>
> Araştırmacı: Kişi sayısına bir şey demedin bu arada.
>
> Emrah: Aynen. Kişi sayısı da var olayda. Kişi sayısı… Hocam çok karıştı benim kafam yandı ya. (Gülüşmeler.)

Emrah, değişkenleri bilinmeyen olarak atamasına rağmen değişkenler arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade etmekte zorlanmıştır.

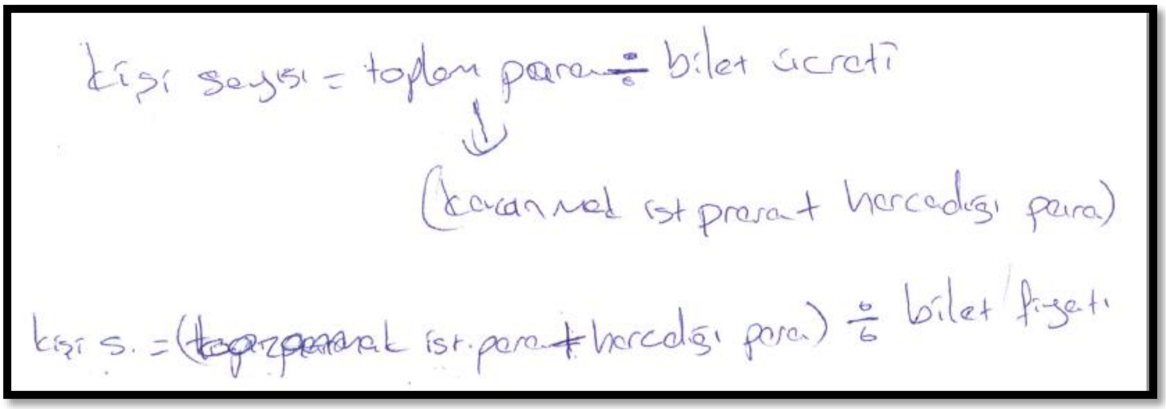



**Görsel 3.32.** *Emrah’ın konser probleminde değişken kullanımı*

Değişkenler arasında sembolik manipülasyon yapamayınca diğer problemlerde olduğu gibi kendisini ana dilde ifade etmeye yönelmiştir. Ana dilde yapmak istediklerini çok daha net biçimde gösterdiği görülmüştür.

> Emrah: Tamam hocam. Direkt şunlarla karıştırdım şuradan çıkayım. Sözel yazayım.
>
> Araştırmacı: Tamam sözel yaz.
>
> Emrah: Tamam. Şimdi ilk olarak mesela şey… Diyelim ki kişi sayısını bulmak istesem. Kişi sayısını bulmak istiyorum. Kişi sayısı eşittir toplam para… Bölü… Kişi sayısı hem buradan… Bölü şey olacak toplam para bölü bilet ücreti. Bu bize kişi sayısını verecek. Toplam paranın içinde de şey var. Toplam paranın kendisinin de bir formül olduğunu düşünürsek… Şey… Toplam para da şu şekilde elde ediliyor. Kazanmak istediği para artı şey oluyor. Kazanmak istediği para artı harcadığı para oluyor hocam. (“kişi sayısı = toplam para / bilet ücreti” yazar, onun da altına toplam paradan ok çıkartıp ((“kazanmak istediği para + harcadığı para”) yazar.))
>
> Araştırmacı: Yani ne oldu senin genel formülün? Altına böyle Türkçe yazabilirsin.
>
> Emrah: Tamam hocam. Yani genel formülüm daha doğrusu şu.
>
> Araştırmacı: Tamam şunun yerine şunu yazarak yaz bakalım formülü.
>
> Emrah: Kişi sayısı şöyle kısaltayım hocam. Toplam para… (“kişi s. = toplam para” yazar.)
>
> Araştırmacı: Onun yerine şunu yazacaktın ama. (toplam paradan çıkardığı okta görülen “kazanmak istediği para + harcadığı para”yı işaret eder.)
>
> Emrah: Ha, özür dilerim. Kazanmak istediği para hocam. Artı… Harcadığı para. Şu şekilde bir işlem, bölü bilet sayısı, fiyatı olacak aynen bilet fiyatı. Bu bize kişi sayısını verecek. ((“kişi s. = (kazanmak istediği para + harcadığı para) / bilet fiyatı” yazar.)

Buradaki değişkenleri de ana dilde belirtip bir eşitlik oluşturmuştur.




**Görsel 3.33.** *Emrah’ın konser problemindeki hesaplamaları*

Emrah'ın problem çözme stratejilerini gösterir tablo aşağıda sunulmuştur.

**Tablo 3.4.** *Emrah'ın problem çözme stratejileri*

| **Not Ortalaması:** 61,574 | | **Katılımcılar Arasındaki Not Ortalaması Sırası:** 6 | |
|---|---|---|---|
| Tahmin Etme | Diyagram Oluşturma | Problemde İstendiği için Tablo Yapma | Ana Dili Kullanma |
| Birden Fazla Değişken Kullanarak Cebirsel İfade Yazma | | | |

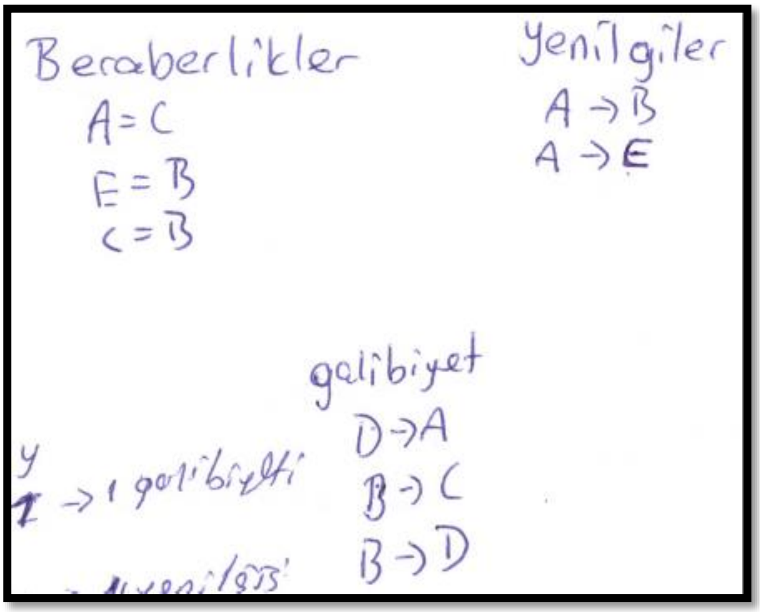
Tablo 3.4'ten anlaşılacağı gibi Emrah'ın klinik görüşmelerde tahmin etme, diyagram oluşturma, problemde istendiği için tablo yapma, ana dili kullnarak kendini ifade etme ve birden fazla değişkenle cebirsel ifade yazma problem çözme stratejilerini kullandığı görülmüştür. Emrah'ın problemlerde sık sık tahmin ederek sonuç bulmaya yöneldiği, değişken kullanımında sorunlar yaşadığı, birden fazla değişkeni bilinmeyen olarak kullansa bile değişkenler arasındaki ilişkileri ifade edemediği, problemi anlamlandırabilmek için özel örnek kullanmayı az tercih ettiği görülmüştür.

### 3.1.5. Saffet'in problem çözme stratejilerine yönelik bulgular

Takımların birbirleriyle olan ilişkisini ve bu ilişkinin yönünün katılımcıların göstermesinin beklendiği futbol sorusunda Saffet, problemdeki karışıklığı gidermek için problem çözme sürecine kendisi için anahtar olabilecek kelimeleri yazarak başlamıştır.

> Saffet: Bu yani karışık. Yani karışık değil de ıı analiz etmek gerekirse ben bunu tabloya dökebilirim.
>
> Araştırmacı: İstediğin gibi yapabilirsin. Ne olduğuna bakalım.
>
> Saffet: … Şimdi… (Sessizlik) (Soruyu içinden okuyor) Şimdi kim kime yeniliyordu? (Sessizlik) Bunlar yenilenler… Şurada birkaç tane daha kaldı… Bu şekilde hocam. ("Beraberlikler" yazar altına "A= C", onun altına "E= B", onun da altına "C= B" yazar. "Yenilgiler" yazar "A= B", altına "A= E" yazar. "Galibiyet" yazar altına "D= A", onun altına "B= C", onun da altına "B= D" yazar)
>
> Araştırmacı: Hıh. Ne yaptın?
>
> Saffet: Bakınca hani mesela A'nın C ile beraber kaldığını, E'nin B ile beraber kaldığını, C'nin B ile beraber kaldığını; A'nın B'yi yendiğini, A'nın E'yi yendiğini; D'nin A'yı yendiğini, ıı B'nin C'yi yendiğini, B'nin D'yi yendiğini görebiliyorum.

Beraberlik, yenilgi ve galibiyetleri alan takımları bir liste halinde yazmayı tercih etmiştir.




**Görsel 3.34.** *Saffet'in futbol problemindeki ilk hesaplamaları*

Saffet, problemde şampiyon takım deyince en fazla maç kazanan takıma bakmak gerektiğini belirtmiş ve takımların isimleriyle beraberlik, galibiyet ve yenilgileri gösterir bir diyagram oluşturma yoluna gitmiştir.

> Araştırmacı: Buradan şey demiş. Şampiyon hangi takım olmuştur?
>
> Saffet: Şampiyon hangi takım olmuştur? Onu bulabilmek için…
>
> Araştırmacı: Neye bakmak lazım?
>
> Saffet: … En fazla maç kazanana bakmak lazım…
>
> Araştırmacı: Maç kazanan... Nasıl anlayacağız onu?
>
> Saffet: Buradan anlayacağız onu da.
>
> Araştırmacı: Mesela?
>
> Saffet: Şimdi A'nın 1 beraberliği… 1 beraberliği, galibiyeti 2, yenilgiyse 1. B'nin ise… 2 yenilgi… D'nin ise… 1 yenilgi… E'nin… 1 yenilgi 2 beraberlik… Hıh. Şimdi C ile berabere kalıyorsa E, C ile bir kere berabere kalmış. Ondan sonra C ile berabere kalan bir kişi daha var. C'nin beraberliği 2. Iıı C'nin yenilgisine bakacak olursak… Yok… Berabere kalıyor, beraberlik 2. Yenilgi 0. Buraya da galibiyet 2 kalıyor. Aynen öyle. C bu… E de 4 maç yapacak. ("A, B, C, D, E" satırları ve "B G Y" sütunlarından oluşan bir tablo yapar. A'da B'nin altına "1", G'nin altına "2", Y'nin altına "1" yazar. B de B'nin altına "1", G'nin altına "1", Y'nin altına "2" yazar. D'de B'nin altına "0", G'nin altına "2", Y'nin altına "2" yazar. E'de B'nin altına "2", G'nin altına "1", Y'nin altına "1" yazar. C'de B'nin altına "2", G'nin altına "2", Y'nin altına "0" yazar.)

Diyagramını oluşturduktan sonra takımların birbiriyle olan ilişkisini gösteren her takımın birer kez maç yapması cümlesinde zorlanan Saffet, turnuvadaki tüm takımların dörder maç yapması gerektiğini yönlendirme olmaksızın ortaya koymuştur.

Araştırmacı: Nereden anladın 4 maç yapacağını?

Saffet: Çünkü geriye kalan 4 tane takım var.

Araştırmacı: Toplam kaç takım var?

Saffet: 5.

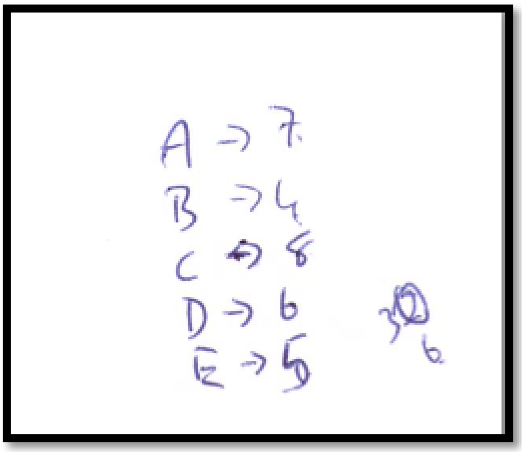
Araştırmacı: O yüzden her takım kaç maç yapıyor?

Saffet: Birer.

Araştırmacı: Yani bir takım kaç maç yapıyor?

Saffet: Bir takım dört maç yapıyor.

Takımların birbiriyle dört maç yapması gerektiğinde sorun yaşamayan Saffet, turnuvada alınan puanları da bir liste halinde göstermiştir.




**Görsel 3.35.** *Saffet'in futbol probleminde bulduğu takımların puanları*

Saffet, şıklara verdiği cevapları yazarken kaç maçın berabere bittiği sorusuna sayarak altı cevabını vermiş ancak toplam kaç maçın yapıldığı sorusunu ise güzel soru olarak düşünmüş ve takımları tek tek kontrol edip yanlarına yaptıkları maç sayılarını yazmıştır. Burada da E takımına hiç maç kalmamasını tüm takımlarla oynadı zaten diyerek yorumlamıştır. Bu durum da katılımcının bu problemde ilişkilerin farkında olduğunu düşündürmüştür.

Araştırmacı: Üçüncü soru turnuva sonunda kaç tane maç berabere bitmiştir?

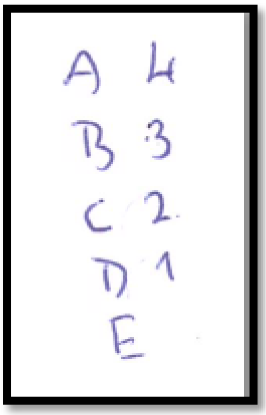
Saffet: Bir, iki, ü… 6. ("C 6 maç" yazar)

Araştırmacı: Peki. Diğerini şöyle soralım. Bu turnuvada toplam kaç maç yapılmıştır?

Saffet: Toplam kaç maç yapılmıştır? 24 mü? Bakalım. Ov... O biraz iyi soruymuş.

Araştırmacı: Neden öyle düşündün?

Saffet: Neden öyle düşündüm? Çünkü birbiriyle bağlantılı bütün takımlar bütün şeyleri de. Ama şöyle yapabiliriz A takımının 4 tane takımla A'sıyla B'siyle… B takımına A takımı hariç diğer takımlarla 3 takım düşüyor. Iıı C takımına B ve A hariç 2 takım kalıyor. D takımına C,B,A hariç 1 takım kalıyor. E takımıyla zaten hiç yazmasak bile olur yani hepsiyle maç yapıyor. ("A 4", altına "B 3", altına "C 2", altına "D 1", altına "E" yazar yanına bir şey yazmaz.)




**Görsel 3.36.** *Saffet'in futbol probleminde maç sayıları hesaplaması*

Problem sürecinin devamında 10 maçın altısının berabere bitip bitmediği araştırmacı tarafından sorulmuş, bunun üzerine Saffet puan hesaplaması yapmaya başlamış ve tıpkı bir önceki yönteminde bütünden parçaya geldiği gibi toplam puan üzerinden düşerek beraberlik sayılarının doğruluğunu kontrol etmiştir. Bu kontrolünün sonucunda ise sekiz galibiyet sayısı olması gerektiğini bulmuş ancak ortada dört galibiyet olduğunu görüp yeniden kontrollerini yapmıştır. Son kontrolünün ardından turnuvada üç beraberlik olduğu sonucuna varmıştır.

Araştırmacı: Peki 10 maç yapıldıysa 6 tane maç berabere mi bitmiş? Öyle yazdık ya C şıkkına?

Saffet: Bakıyorum. Iıı kaç puan var burada? 11… 32 puan var. 32 puandan 6 maç beraberliklere 1 veriliyorsa 6 tane beraberlik 6 puan ediyor. 32'den 6 çıkarırsak eğer 24… Değil. Zaten 30 puanmış 24 kalıyor. Ben toplama işlemini yanlış mı yaptım? 16. Tamam doğru. Iıı 24 puan kalıyor geriye. Bunun da doğrulamasını galibiyetlere bakarak görebiliriz. Galibiyetler de kaç galibiyet var? Üç, beş, altı, yedi. 7 çarpı 3 21. Evet. (Gülüşmeler) Üç, beş, yedi…

Araştırmacı: Yani? 6 beraberlik olunca toplam 24 puan kalıyor olması lazım geriye dedin.

Saffet: Evet.

Araştırmacı: Öyle hesapladın.

Saffet: Ve galibiyetlerde 8 tane galibiyet sayımız var.

Araştırmacı: 8 mi galibiyet sayısı?

Saffet: 8. İki, dört, altı, sekiz. O da 24 ediyor ve doğru 6 tane beraberlik var.

Araştırmacı: Peki 10 maç oynandı dedin ya öyle yazdın.

Saffet: 10 maç oynandı.

Araştırmacı: 6 tane maç da berabere dedin ya. Buradaki şu soruda 10 tane maç yapılmış toplamda. 6 tane beraberlik var. Geriye kalan birbirlerini yendikleri 4 maç oluyor. Bu şekilde söylediğinde 8 tane galibiyet dedin az önce hani…

Saffet: 8 tane maç yapılması gerekiyor…

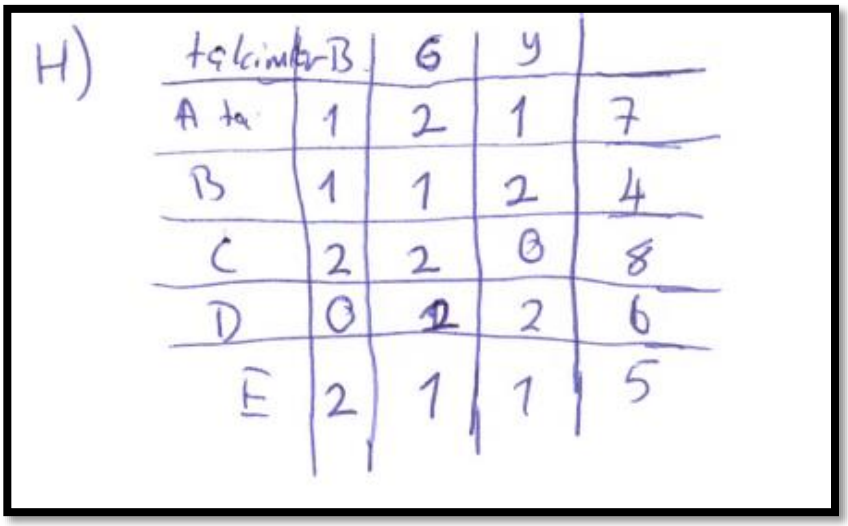
Araştırmacı: Yani maç sayısıyla şey birbirini tutuyor mu? Onu kontrol edebilir misin diye soruyorum.

Saffet: Edebilirim. Şimdi A takımı, E ve B'ye ye'iliyor. C ile berabere kalıyor. A'nın 1 beraberliği var. B takımı ise yeniliyor. D takımı C'ye yeniliyor. E takımı, B ile beraberlik. B'nin de beraberliği 1. E ile 1 kere beraberliğe kalıyor. C'nin ise beraberliği E ile kalıyor bir de A ile kalıyor 2 beraberlik yapar mı? Şimdi zaten A ile kaldığını saydık. Onu bir daha saymamıza gerek var mı? Yok. O zaman 1. Diğerlerine niye beraberlik koyduk? D'nin zaten beraberliği yok. Iıı… E'nin var mı beraberliği? Var. Onu da B ve C ile kalıyor. Zaten B ve C'ye de yazdık. 3 beraberlik var hocam burada.

Araştırmacı: 6 değil mi diyorsun?

Saffet: Değil. 3 beraberlik var.

Saffet, problem boyunca tablo çizme yöntemine yönelmemiş ancak son soruda kendisinden bir tablo çizmesi istendiğinde aşağıdaki tabloyu oluşturmuştur.



H)

| takımlar | B | G | Y | |
|---|---|---|---|---|
| A ta | 1 | 2 | 1 | 7 |
| B | 1 | 1 | 2 | 4 |
| C | 2 | 2 | 0 | 8 |
| D | 0 | 2 | 2 | 6 |
| E | 2 | 1 | 1 | 5 |

**Görsel 3.37.** *Saffet'in futbol problemindeki tablosu*

Fonksiyon kavramına dayanan ve farklı tanım kümelerinin farklı görüntü kümelerini oluşturduğu tişört problemine Saffet, kendisine iki tane sınır değer belirleyerek başlamış ve o sınır değerler için matbaaların ilişkilerine odaklanmaya çalışmıştır.

> Saffet: Aklıma ne geliyor? Aklıma ilkönce matbaaların sunduğu fiyatları tam halinde mesela 75 tişörte kadar 10 TL fiyat vermiştir diyor. İşte 750 lira işte 75 tane tişört 750 lira ediyor. 75 sonrasından da hesaplar bir sayı belirlerim kendime. Mesela burada 160 demiş. 160'a kadar çıkartabilirim fiyatı. 160 taneye kadar çıkartabilirim. İki matbaadan da verilmiş olan fiyatlarla yapabilirim.
>
> Araştırmacı: Peki o 75'i 160'ı neye göre seçiyorsun?
>
> Saffet: 75'i 160'ı neye göre seçiyorum? Diğer matbaa 160 taneden fazla alım satım olursa diyor. Yani 160'a kadar bir şey demiş. 160'tan sonrasını hesaplamaya gerek yok çünkü orada da bir şey var da… Hocam durun. (Gülüyor) Iıı neye göre belirledim o kişi sayısını… Matbaaların vermiş olduğu en fazla fiyatı bulabilmek için. Avantajları nelermiş onları öğrenebilmek için.

Matbaaların sınır değerlerinin farklı olması problemi anlamlandırabilmek için Saffet'i özel örnek aramaya yöneltmiş ve ilk hesaplamasını "200 tişört sayısı" için yapmıştır. Bu sırada çiçek baskı matbaada oluşan görüntü kümelerini doğru bir biçimde hesapladığı görülmüştür.

> Saffet: Çiçek baskı matbaasının ilkönce teklif ettiğini bir şey yapalım. 200 kişi üzerinden.
>
> Araştırmacı: 200'ü seçtin.
>
> Saffet: Iıı fuara katılacak öğrencilerin sayısı henüz kesin değildir diyor. Çiçek… ("Çiçek baskı Matbaası" yazar) 75 tişört başına diyor. 75 tane tişörtü, ilk 75 tişörtü 10 liraya satacak. O yüzden… 750 lira yapıyor o da toplamda. ("75.10=750" yazar ve 75'in üstüne ok çıkarıp "75 kişi" yazar) 75 tişörtten fazlası halinde sonrakilerin tanesinde 2 TL'lik indirim yapılacağını, tanesinde 2 TL'lik indirim yapacağını, 150 den fazla alım olması halinde ise ilk 150'den sonrasında, tişörtlerin tanesinde… Allah Allah burada çevirmeye başlamış (Gülüyor) 150 tişörtten sonraki tişörtlerin tanesinde ilk fiyatına göre 5 TL'lik indirim yapacağını söylemiştir… Iıı o zaman 200 kişi üzerinden hesaplayacak olursak şimdi bir 75 kişiyi hesapladık. Geriye kaldı bir 125 kişi. Iıı 150'ye kadar bir daha hesaplamamız gerekiyor. Yani aradaki 75 kişilik yerden… 75 tişörtten sonrakilerin tanesinde 2 TL'lik indirim yapacağını… Tanesinde 2 TL'lik indirim yapacağını… Yani sekizer lira olacak. 75 çarpı 8 eşittir ona döneriz ona. ("75.8=" yazar) O birazcık şey. 2 TL'lik indirim yapacağını, 150 den fazla alım olması halinde ise sonraki tişörtlerin tanesinde ilk fiyatına göre indirim yapacağını söylemiştir diyor. Yani geriye kalan 50 tişörtü de 5 liraya satacağını söylemiş bu adam 200 kişi üzerinden.

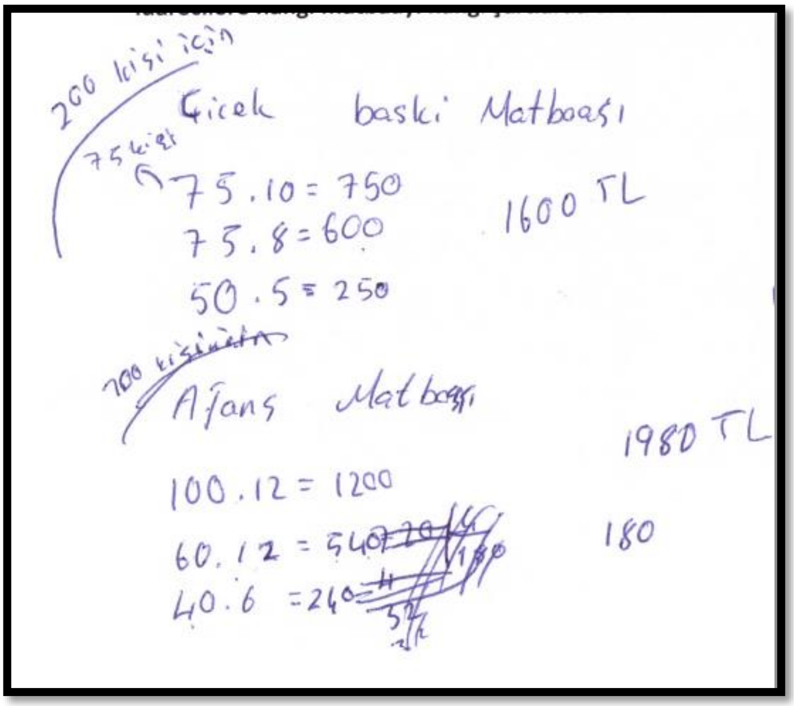
Saffet'in yüzde alma konusunda da sorun yaşamadığı görülmüş ve ajans matbaanın son indirimini de çiçek baskı matbaa gibi hesaplayarak farklı sonuca yönelmiştir.

> Saffet: Çiçek baskı 200 kişilik tişörte 1600 lira istiyor.

Araştırmacı: Hı.

Saffet: Tamam. Iıı… Ajans mıydı diğeri de? Ajans… (“Ajans matbaası” yazar) 200 kişi için. (Üstüne “200 kişi için” yazar) Iıı… O da diyor ki… İse 100 tişörte kadar 12 TL’ye basım… 100 kişiye kadar… 1200 etti şimdiden. (“100.12= 1200” yazar) 100 ile 160 tane arasında yapılacak satışta ilk fiyatından hesaplanacak toplam ücretten indirim yapacağını… Nasıl yani? 100 tişörte kadar 12 TL’ye basım yapacağını, 100 ile 160 tane arasında yapılacak satış… Hah. Yani diyor ki 60 kişiye diyor 12 ile çarp diyor… O cevabı diyor 4’e böl diyor 4’ün 3’ünü al diyor öyle yani.

Saffet, 200 tişört üzerinden hesaplamalarını tamamlamış ve bu hatalı hesaplamasının ardından çiçek baskı matbaayı önerdiğini ifade etmiştir.




**Görsel 3.38.** *Saffet’in tişört problemindeki hesaplamaları*

Saffet, hesaplamalarında ilişkileri gösterebilmek için ikinci özel durum örneği olarak 100 tişörtü belirlemiş bu durumda da avantajlı olan matbaanın çiçek baskı matbaa olduğunu hesaplamıştır.

Saffet: … Ajans matbaa kazıkçı ya. (Gülüyor)

Araştırmacı: Nasıl anladık bunu?

Saffet: Nasıl anladık? Iıı 200 kişiden sonrası ki hani 150 kişiden sonrası bile kazık. Hani başa baş gelebilirler onu hesaplamak lazım ve ajans başa baş gelebilir 150’ye kadar ama 150’den sonrası ajans kazıkçı nasıl çünkü orada yüzdeyi işin içine sokmuş. O yüzden okulun yönetimi de hani ney kimdi onlar? Hıh idareciler. İdarecilerin kafasını karıştırmış.

Araştırmacı: Peki yap devam et sonra neye bakacağız?

Saffet: Sonra… Eğer diyor hangi şartlarda dediğine göre 100 kişiyi hesaplamak gerekirse eğer… 75 kişiye çiçek baskı 750 lira alıyordu. Geriye kalan 25 kişiye ise yani 150'ye kadar dediği kısımda 8 liradan satıyor. 25 çarpı 8… 160, 200. 200 lira da buradan ilave edersek… (750+200= 950 bulur) 950 lira diyor. Yani 100 kişi bu şekilde. Yine ajans matbaa zaten 100 kişiye 12 liradan basarım dediği için 1200 lira ödüyordu. Yine çiçek baskı daha avantajlı. 100 kişi için de. 150 kişi olarak hesaplayacak olursak eğer… Evet… Şimdi… Şu 600'ü de eklersek oraya 1350. ("1350" yazar üstüne "150 kişi" yazar.) Çiçek baskı 1350 lira alıyor 150 tişört için. Ajans matbaa ise… 120 eksiltirsek buradan 420 kalır. Ajans matbaa ise 1620 lira alıyor. ("1620" yazar ve üstüne "150 kişi" yazar) Alıyor, evet. Ajans matbaa yine 150 kişi için bile fazla alıyor yani. Arada 350 liralık bir fark var yani. 370 liralık pardon.

Araştırmacı: Yani?

Saffet: Yani çiçek daha avantajlı.

Problem çözme sürecinde Saffet'in ilişkileri düşünmesi ve söylediklerini genellemeyebilmesi için yönlendirmeler yapılmış ancak Saffet herhangi bir değişken, sembol kullanarak genelleme yoluna gitmemiş sınır örnekler üzerinden yapacağı tavsiyeler üzerinde durmuştur. Değişken kavramı doğrudan verilmiş ancak bağımlı-bağımsız değişken ifadelerinden sonra Saffet, problemi o yöntemle sürdürememiştir.

Araştırmacı: Peki. Bu soruyu bilinmeyen kullanarak ifade edebilir misin?

Saffet: Bilinmeyen kullanarak ifade edebilir miyim? Evet.

Araştırmacı: Nasıl edersin?

Saffet: Nasıl ederim? Mesela yazarım 200 kişi yazarım. Toplam ücret yazarım. Ona da "x" derim toplam ücret "x" olur. ("200 kişi" yazar yanına da "Toplam ücret" deyip altına çizgi çeker ve "x" yazar)

Araştırmacı: Toplam ücret bilinmiyor mu şu an?

Saffet: Şuan biliyoruz ama ilk…

Araştırmacı: Şöyle sorayım 200 kişi için toplam ücret bilinmeyen mi? Yani biz kişi sayısını bildiğimiz zaman ücret bilinmeyen mi olur? Burada bilinmeyen nedir öyle sorayım.

Saffet: Bu soruda bilinmeyen kişi sayısı. Yani kesin değildir diyor.

Araştırmacı: O zaman biz ücrete mi "x" diyeceğiz yoksa kişi sayısına mı?

Saffet: O zaman kişi sayısına olur ama 200 kişi için daha… Neyse orayı karıştırmayalım.

…

Saffet: Soruda öğrenci sayısını bilmiyoruz ayrıyeten matbaaların getirdiği toplam ücretleri de bilmiyoruz.

Araştırmacı: Hangisi hangisine bağlı?

Saffet: Hangisi hangisine bağlı… Kişi sayısı ücrete bağlı.

Araştırmacı: Kişi sayısı mı ücrete bağlı?

Saffet: Ücret mi kişi sayısına… Ücret kişi sayısına bağlı.

Araştırmacı: Peki. Yani biz bilinmeyeni neye vermeliyiz ki diğerini onun cinsinden yazabilelim?

Saffet: Fiyat kişi sayısına bağlı olduğu için bilinmeyen kişi sayısı olur.

Araştırmacı: Hı. Kişi sayısına ne diyeceğiz yani biz burada?

Saffet: "x".

Genelleme becerisinin örüntü üzerinden incelendiği ve nicelikler arasındaki ilişkilere odaklanılan karo sorusunda Saffet, çözümüne karo sayılarındaki artış miktarlarını belirleyerek başlamış ve görselin bir örüntü içerdiğini ifade etmiştir.

Araştırmacı: Neyi bulmamızı istiyor peki oradaki?

Saffet: Siyah ve beyaz karoların sayısını, kaç tane olduğunu. Bulayım mı?

Araştırmacı: Bul. Nasıl yapacağız?

Saffet: Birinci adıma bakacağız. İkinci adımda ne kadar arttıysa ona bakacağız. Üçüncü adımda ne kadar arttıysa ona bakacağız. Yani bunlar bir örüntü içerisinde. O örüntüye bakılarak dördüncü ve beşinci adımı bulacağız.

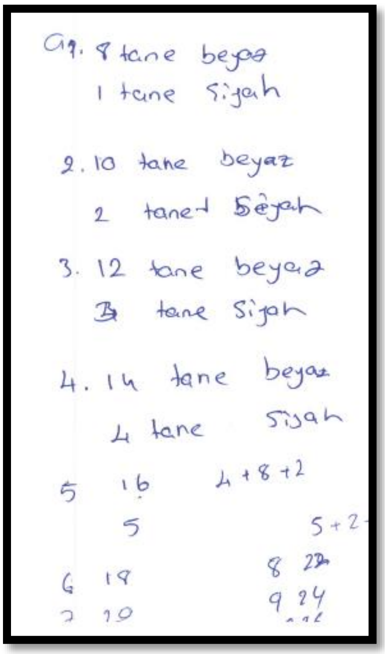
Saffet, şekillerdeki beyaz ve siyah karo sayılarını bir liste halinde alt alta yazmayı tercih etmiş ve sabit artış şeklinde düşünerek dördüncü ve beşinci teraslardaki karo sayılarını hesaplama yoluna gitmiştir.

Saffet: Birinci örüntüde 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 tane şey kullanmış. Beyaz karo. 8 tane beyaz ve bir tane de siyah. Yine ikinci adımda ise 10 tane beyaz, 2 tane de siyah kullanmış. Üçüncü adımda ise 1, 2, 3, 4, 5; 12 tane beyaz, 4 tane yo pardon 3 taneymiş. 3 tane de siyah karo kullanmış. Şimdi biz dördüncü adıma bakacak olursak; birinci adımla ikinci adım arasında beyaz karolarda 2, ikinci ile üçüncü örüntülerde 2 fark var beyaz karolarda yine. O yüzden dördüncüde de 3 ile 4 arasında 2 artarak…("(a) 1. 8 tane beyaz", altına "1 tane siyah"; "2. 10 tane beyaz", altına "2 tane siyah"; "3. 12 tane beyaz", altına "3" tane siyah yazar.)

Araştırmacı: Örüntü olduğu için diyorsun yani…

Saffet: Aynen öyle. Örüntü olduğu için. O da 14 tane beyaz, aynen öyle. 14 tane beyaz. Birinci adımda 1 tane siyah karo varken ikinci adımda 2 tane siyah karo var. Üçüncü adımda ise 3 tane. Yani birer birer artıyor. Dördüncüde de 4 tane siyah karo olur. Beşinci adımda da yine aynı şekilde 16 ya 5. ("4. 14 tane beyaz", altına "4 tane siyah"; "5. 16" altına da "5" yazar.)

Sayısal olarak bir örüntü olduğunun farkında olan Saffet, hesaplamalarını alt alta yazmıştır.




**Görsel 3.39.** *Saffet'in karo probleminde ilk hesaplamaları*

Daha büyük karo sayılarında nasıl bir hesaplama yapacağı sorulduğunda ise Saffet'in aklına bir formül yazmak gelmiş ancak değişken kullanımına geçerken tereddüt yaşayıp ilk aşamada bundan vazgeçmiştir.

Araştırmacı: Daha büyük sayılar yani sayması daha zor. İşte 4 ve 5'te iki iki arttırınca hemen cevabı söyleyebiliyorsun. Mesela b ve c şıkkını beraber düşünebilirsin. C şıkkında 60. teras demiş mesela. Ne yaparız 60. terası mesela?

Saffet: Biraz düşüneyim bunu.

Araştırmacı: Düşün tabii. İstediğin kadar düşünebilirsin.

Saffet: … (Sessizlik) Burada şimdi en mantıklı olan formül yazmak…

Araştırmacı: Nasıl bir formül?

Saffet: "x artı 2" işte şu kadar şu kadar. Şu adımda şu kadar. "n" falan o şekilde bir ortaya denklem koymak. Ama şu anda benim hiç denklem koyasım yok.

Değişken kullanmak yerine saymayı belirli bir sistematiğe oturtma yolunu seçmiş ve çoklukları orantısal artışlarla düşünerek nicelikler arasındaki ilişkileri dikkate almadan karo sayılarını hesaplamaya çalıştığı görülmüştür.

Saffet: 60'ı sormuşsa ıı 1 ile 10 arasında, şu daha demin 30'da gösterdiğimiz ikinci adımın... Ya da hiç orayı karıştırmayayım hocam. Şimdi 1 ile 5 arasında 8 fark artıyordu. O zaman 5 ile… Aynen öyle. 10. adım arasında da 8 fark arttığına göre 10. adım 24 tane beyaz karoya eşit oluyor. 24 tane beyaz karoya eşit olduğuna göre 60. adıma kadar 6 basamak ilerleriz yani 1, 2, 3, 4, 5 yine 6 adım ilerleriz. Birinci adımımız 24'ten başlıyor. Sonra 16, 16 arttığı için… Aynen öyle. 16, 16 artıyor. Bu 30, 40 olur. Sonra 56 olur. Sonra… Eklediğimizde 62, 72 olur. 78, 88 olur. Ondan sonra 92, 102. Mesela c şıkkı da 102 imiş. 102 tane beyaz karo. 60. adım dediğine göre siyahlar zaten adım sayısına göre yükseliyor. Yani doğru orantılı…

Yaptığı sayma işiyle 60. adımdaki karo sayılarını hesaplamış ve kendisinden net bir kural istenen d şıkkına geldiğinde ise denklem kurması gerektiğini düşünmüştür. Değişken kullanımına karşı ilk tereddüdünden sonra bu kez de değişkenin ismini vermeden doğrudan ‘beyaz karo sayısı’ ya da ‘siyah karo sayısı’ şeklinde ana dilini kullanarak bilinmeyen durumun ismi üzerinden düşünmeyi tercih etmiştir. Ancak daha sonradan adım sayısı değişkenine n demiştir.

Saffet: Bir kural yazabilir miyim?

Araştırmacı: Az önce söylediğin şeye karşılık geliyor aslında biraz.

Saffet: Evet, denklem kuracağız.

Araştırmacı: Nasıl bulursun mesela? Yaptığın şey de çok uzak değil ondan da.

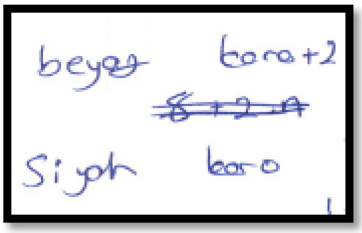
Saffet: Iı nasıl yaparız? (Sessizlik) (“beyaz karo + 2” yazar ve altına “8 + 2.n” yazar.)

Araştırmacı: 8 artı “2 çarpı n”. 8, birinci karolar mı?

Saffet: Evet.

Araştırmacı: “n”, ne orada?

Saffet: “n” ne? Adım sayısı. Hani şimdi adımların şeyini sayısıyla ikilerin sayısını çarptığımızda sekizi eklediğimizde hani bir ortaya bir şeyler çıkacak ama…




**Görsel 3.40.** *Saffet’in karo problemini genellemeye çalışması*

Saffet, genellemesini adım sayısına değişken atayarak bulmaya çalışmış ancak artış düzenli olsa bile ilk adımdaki durumun iki ve üçüncü adımlara tam uymamasından dolayı sorun yaşamış ve genellemede oluşan farklardan daha çok adım sayısına odaklanmaya karar vermiştir.

Araştırmacı: Burada da 1 de 8, 2 de 10, 3 de 12 gibi gidiyor. Senin kullanacakların 3, 2, 1 sayıları çıkaracağın sonuçlar 8, 10, 12 sayıları…

Saffet: … (Sessizlik)

Araştırmacı: Yani 1 sayısını ne yapıp ne yaparsan 8 çıkar ya da 2 sayısını ne yapıp ne yaparsan 10 çıkar gibi şeyler var ortada…

Saffet: Evet, hani onu yapmaya çalıştım şu anda. Mesela 1 ile 8 arasında 7, 2 ile 10 arasında 8, bu şekilde üçüncü adımda 9, dördüncü adımda 10 diye gidiyor. Yani fark gittikçe birer birer artıyor. Yani adımla beyaz karo sayısı arasındaki fark gittikçe artıyor… Şimdi bir örüntü var, birer birer artıyor şey aradaki fark. Adım sayısı şimdi 1 e göre yapsan 2 uymuyor. 2'ye göre yapsan 3 uymuyor. Adım sayısından gitmeyeceğiz yani…

Araştırmacı: Farktan mı gitmesen acaba adım sayısı yerine?

Saffet: Farktan gitmeliydim zaten…

Araştırmacı: Farktan gitmesen mi yani? Adım sayısından mı gitsen?

Saffet: Adım sayısından…

Adım sayısı ve karoların artış miktarlarından yola çıkıp ilk şekilde sabit sekiz beyaz karo olması gerektiği ve kendi genellemesini de buna göre oluşturacağını ifade etmiştir. Siyah karo sayılarının adım sayısıyla aynı olduğunu belirtmiş ve tamamen beyaz karoları bulmaya oluşturduğu listeler üzerinden odaklanmıştır.

Saffet: Şimdi burada birinci adımda bize şey veriyor. Bir siyah karo veriyor, yanında ekstradan 2 tane daha beyaz karo veriyor. Yine aynı şekilde üçüncü adımda…

Araştırmacı: Yani siyahlar bir artıyorken…

Saffet: Şeyler 2 artıyor…

Araştırmacı: Bunu nasıl gösterirsin?

Saffet: Bunu nasıl gösteririm?

Araştırmacı: Şey olarak yani matematiksel olarak yani cebirsel. Biri bir artıyorken diğeri iki artığında… Hep 2 artıyor yani. Biri 2 artıyorken diğeri 4 artar yani. Birisi bir fazlalaşıyor, diğeri 2 fazlalaşıyor hep…

Saffet: 8 sabit bir sayı olarak duracak. Birinci adımdan gelerek... İkinci adımda geçtiğimizde siyah karo, bir tane siyah karo verdiğinde bize 2 tane beyaz karo veriyor. Aynı şekilde üçüncü adımda da bu şekilde… O yüzden mesela hani daha demin demiştim 1701. adımda bize 1701 tane siyah karo veriyor. Hatta birinci adımın üstüne işte bir tane daha hani 1700. adımdan bir tane daha fazla siyah karo veriyor ve yine aynı şekilde 2 tane beyaz karo veriyor. Elimizde zaten 8 sayısı vardı beyaz karolarda. Şimdi 1701 tane siyah karomuz var ve bunun iki fazlası artı 8 eşittir beyaz karo…

Görsel şekiller üzerinde düşünüp hesaplamalarını yaptıktan sonra Saffet, siyah karoların sayısının adım sayısıyla aynı olduğunu ifade edip ona "n" değişkenini atamış, n'i görsellerin sağ ve solun sütunlarından birer beyaz karo geldiği için iki ile çarpmış ve ilk adımda boşta kalan üst, alttaki satırlardaki altı karoyu ilave ederek beyaz karo sayılarının formülüne yani "2n +6"ya ulaşmıştır.

Araştırmacı: Nasıl yazarsın?

Saffet: Beyaz karoları ifade etmek için, sayısını bulmak için adım sayısı yani "n" artı ya da direkt hiç artıya girmeyelim. "n çarpı 2 artı 6"…

Araştırmacı: Nasıl? Ne demek o? Nasıl geldi?

Saffet: n dediğimiz şey hem siyah karo sayısı hem de adım sayımız. O yüzden hani kaçıncı adımda olursak olalım mesela 635 diyelim. 635 şimdi bizim siyah karo ve adım sayımız.

Siyah karoların sağında ve solunda olmak üzere ikişer tane beyaz karolar var. 635'i ikiyle çarptığımızda 1200…

Araştırmacı: Yo, 635'e takılma sen. Ben özel örnekte değilim. 2'yi neden diye sordum ya? 2 ile neden çarpıyoruz?

Saffet: 2'yi neden çarpıyoruz? Siyah karoların sağında ve solunda olduğu için…

Araştırmacı: 6 ne oradaki?

Saffet: 6 da birinci adımdan gelen beyaz sayısı.

Araştırmacı: Böyle yazarım diyorsun yani?

Saffet: Evet.

Saffet, "2n+6" ile beyaz karoların sayısını şekillerden faydalanıp ifade ettikten sonra farklı bir yolla nasıl yapılacağı sorulduğunda yine şekillere odaklanmış ve bu kez alt satırlardaki beyaz karo sayılarının adım sayılarından iki fazla olduğunu görmüştür. Alt satırdaki karoların adım sayısından iki fazla olduğunu ifade ettikten sonra bunun gibi üç tane satır olduğunu görmüş ve bulduğu ifadenin toplam karo sayılarını gösterdiğini belirtmiş, bundan da adım sayılarının çıkartılıp beyaz karo sayılarına yine ulaşılabileceğini göstermiştir. Bu genellemeyi yaparken de yine en başta değişken kullanmamış kuralını doğrudan kendi bulduğu ana dildeki ifadelerle göstermiştir.

Araştırmacı: Tabii ki başka yerlerden de gidilebilir. Acaba şu an aklına gelen bu soru böyle de yapılır diyeceğin bir şey var mı?

Saffet: … (Sessizlik) Birinci adımda 1, 2, 3 tane şeklin alt kısmında 3 tane karemiz var. İkincide 4 tane, üçüncüde 5 tane. Bu şekilde gittiğinde birer birer artıyor. Hatta adım sayısı artı 2 şeklinde artıyor. Şimdi mesela ben daha demin 60. adım demiştik. 60. adımdayım. Artı 2 şeklinde beyaz karo yani alt kısımdaki beyaz karolar var. Bunu şimdi kaç tane karo oluyor orada? 62 tane karo oluyor. Yani tek şeyinde, sırasında... Bunu şeyle 3 tane yaparsak yani 62, 62, 62 topladığımızda 8, 6… 18… 188 tane…

Araştırmacı: 186 tane…

Saffet: 186 mı? … Tamam. Benim kafa karıştı biraz. 186 tane şeyimiz var 60. adımda.

Araştırmacı: Neyimiz var?

Saffet: Toplam karemiz. Siyah, beyaz ortalıkta ne varsa hepsinin toplamı 186. Şimdi 60. adımda olduğumuz için şeyimiz eşitti. Siyah karoyla adım sayımız. Ben buradan 60'ı çıkartırsam eğer yani 126 buluyorum.

Araştırmacı: O da ne?

Saffet: Beyaz karo sayısı.

Araştırmacı: Peki bunu matematiksel olarak gösterebilir misin?

Saffet: Matematiksel olarak gösterebilir miyim?

Araştırmacı: Az önce yaptığın gibi yani.

Saffet: Iıı…

Araştırmacı: Genelleyebilir misin yani öyle sorayım. 60 için böyle buluyorsun ya bunu.

Saffet: Genellemesi basit. Adım sayısı artı 2 mi? Evet, aynen. Çarpı 3 eksi adım sayısı eşittir beyaz karo.

Saffet'ten ifadesini denkleme dökmesi istendiğinde ise matematiksel işlem önceliğinde sorun yaşadığı görülmüş ve parantez kullanmadan bir ifade yazmış, yazdığını kontrol etmesi istendiğinde ise sonuca giderken parantez kullanması gerektiğini kendisi fark etmiştir.

Araştırmacı: Yaz.

Saffet: Yani adım sayısına "x" dersen artı 2 çarpı 3 eksi adım sayısı yani "x". Bu şekilde bulurum. ("x + 2. 3 – x" yazar.)

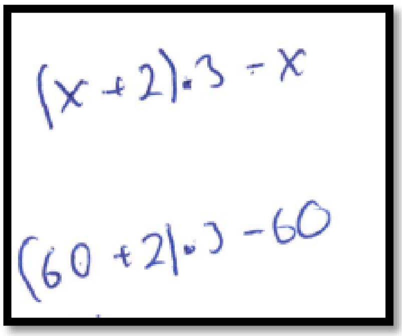
Araştırmacı: Şimdi x yerine 60 koyalım mesela?

Saffet: x yerine 60 koyalım. 60 artı 2 62 ediyor. Ben şöyle yapayım.

Araştırmacı: Peki bu yaptığın işlemde önce 60 ile 2 mi toplanır yoksa 2 ile 3 mü çarpılır?

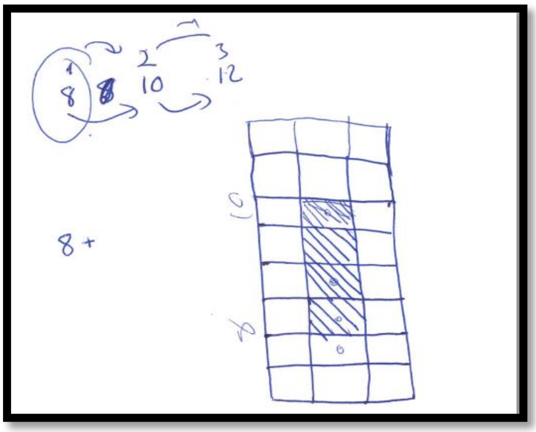
Saffet: … Onları şöyle parantez içerisine alalım. ("(x+2).3 – x" olarak düzeltir.) Sonra 60 işte. 62 çarpı 3 den eşittir 186. 186 eksi 60 ise eşittir beyaz karo sayısı. ("(60 + 2).3 – 60" yazar.)

Yönlendirmeler sonucu Saffet, "x" değişkenini kullanıp bir cebirsel ifade oluşturmuştur. Bunun işe yaradığını da 60 karo için denediği görülmüştür.




**Görsel 3.41.** *Saffet'in karo problemindeki genellemesi*

Böylelikle Saffet hem doğrudan beyaz karolara ulaşacağı hem de tüm karolardan siyah karo sayılarını çıkartıp beyaz karo sayılarına ulaşacağı iki farklı ifade yazarak problemin çözümünü devam ettirmiştir. Saffet'e tüm adımlardaki toplam karo sayılarını nasıl bulacağı sorulduğunda ise görseller üzerinden ve değişken kullanarak hesaplamaya kalksa da sonuca ulaşamadığı görülmüştür.




**Görsel 3.42.** *Saffet'in karo probleminde görsel ve sayısal verileri kullanması*

Konser sorusunda ise Saffet, gelir, kazanılan para, yapılan harcama kısmında 50 bin TL'yi gelirin içine dahil etmeden düşünmüş ancak araştırmacı tarafından sorgulandığında yaptığı işlemi düzelterek devam etmiştir.

> Saffet: A, Jale'nin konserden hedeflediği parayı kazanabilmesi için konsere gelecek kişi sayısı ile ilgili ne söyleyebilirsiniz? Hedeflediği parayı kazanmak için 20 TL imiş. 100 bini 20'ye bölersek kişi sayısını buluruz zaten.
>
> Araştırmacı: Neden 100 bini 20'ye bölüyoruz?
>
> Saffet: Çünkü bizden hedeflediği parayı şey yapması için kaç kişi… Kişi başı ücreti 20 TL olduğu için hani 100 bin TL'yi de kişi sayısıyla çarpıp 20 çarpı kişi sayısı eşittir 100 bin olması gerekiyor.
>
> Araştırmacı: Peki yaptığı harcama ne olacak?
>
> Saffet: Hedeflediği para diyor zaten hani. Hedeflediği para 100 bin lira.
>
> Araştırmacı: 100 bin lira gelir elde etmeyi hedefliyormuş.
>
> Saffet: Ha gelir elde etmeye çalışıyormuş. O zaman 150 bin TL'yi 20 ye böleriz.

Problemin b şıkkında hedeflenen ücretin 50 bin TL arttığını görünce ise, işlem yapmadan orantı kurarak gelmesi gereken kişi sayısının 10 bin kişi olduğunu belirtmiştir.

> Araştırmacı: Peki b şıkkına bakalım.
>
> Saffet: Jale'nin kazanmayı hedeflediği ücret 150 bin TL olsaydı stada gelecek kişi sayısıyla ilgili ne söyleyebilirdiniz? Şimdi biz burada 150 bin yani 50 bin TL başına yani 3 tane 50 bin TL'miz var yani 150 binde. 50 bin kazanmayı daha hedefliyor hani harcamanın haricinde 150 bin TL gelir hedeflediği için şimdi şöyle söyleyeyim 2500 lira 50 bin kişi yani pardon 2500 kişi 50 bin TL gelir sağlıyor. 150 bin TL eğer gelir sağlamak istiyorsa bunu 10 bin kişiye yükseltmesi lazım.

Kendisinden bir sonuç isteyen problemin şıklarında sorun yaşamayan Saffet, tek seferde kendisinden istenenleri ortaya koymuştur. F şıkkına gelinip değerler arasında bir ilişki kurması istendiğinde ise; işin içinde bir orantı olduğunu ifade etmiş, değerlerden bilet ücretini sabit tutmayı tercih etmiş ve soruyu kendisine göre yorumlamıştır.

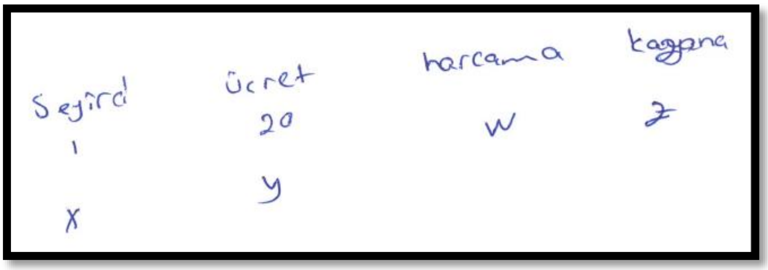
Kendisine mantıklı gelen yerleri anlatmış ve problemin onun mantığına göre olması gereken şeklini ifade etmiştir.

> Araştırmacı: Bunları hepsi değişebiliyorken acaba bunları beraber böyle bir bağlantı kurmak istesen nasıl kurarsın? Tamam değişebiliyor ama birbirleri arasında değişirken illa ki bir ilişki var. Var mı ya da?
>
> Saffet: Yani şimdi soruyu eğer güncel bir yorum yapacak olursam şimdi ben bir konsere 20 lira veririm ama 30 lira gayet pahalı geliyor. O yüzden gideni fazla olmayacağı için 20 lira sabit bir şekilde kalır. İyi güzel, Allah bereket versin. Stadı olduğu kadarıyla büyük seçerim çünkü hani hiç belli olmaz o gün işsiz çok olur. Ne bileyim canı sıkılan olur, farklı bir şey olur. Ve günü de değişken bunun. Gününü de güncel bir bayrama falan denk getiririm veya günümüzde şu anda zaten güncel olarak şehit haberleri falan geliyor şehit olmadığı bir güne denk getiririm artırmak için seyirci kitlesini veya saygınlığımı kaybetmemek için. Şehir merkezine yakın bir yer seçerdim. Öyle çok dışarıda bir yer seçmezdim. Hatta mümkünse stat değil açık alan böyle tellerle şey yapılmış…

Problemin bu haliyle hiç sabit olmaması ve bütün çoklukların değişebiliyor olması onu zorlamış, bilet fiyatını 20 TL olarak düşünmeye devam etmiştir.

> Saffet: Şimdi seyirci diyelim. Ücret diyelim. Harcama diyelim. Bir de kazanç. ("Seyirci Ücret harcama kazanç"; bunları yan yana yazar.) Seyirci, şimdi 1 kişi geldiğinde 20 lira…
>
> Araştırmacı: Ama ücretler falan değişken. Ücret 20 lira değil o da değişken.
>
> Bilinmeyen kullanmaya açık olarak yönlendirildikten sonra seyirci, ücret, harcama ve kazanca birer değişken atamış ve bir eşitlik yazmıştır.
>
> Saffet: Hııı… Bir bağlantı…
>
> Araştırmacı: Bilinmeyen kullanıp yapabilir misin Saffet?
>
> Saffet: Bilinmeyen…
>
> Araştırmacı: Hani az önce kullandın ya "x" kullandın, n kullandın öyle. Değişken ya da…
>
> Saffet: … Iıı (Sessizlik) Şimdi bir şeylerin belli olması gerekiyor yani eğer bir denklem falan kurmak istiyorsak…

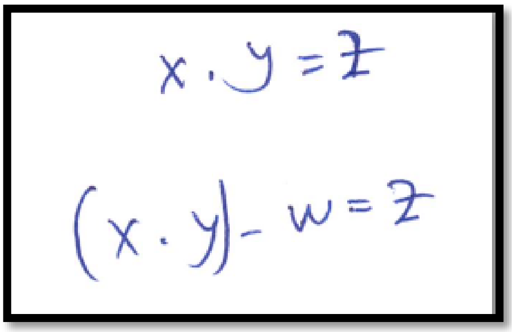
Problemde birden fazla değişken kullanımında sorun yaşamayan Saffet'in bilet ücretine "y" değişkenini atamış olmasına rağmen onu bir sabit olarak alma isteği çözümüne de yansımıştır.




**Görsel 3.43.** *Saffet'in konser probleminde değişken ataması*

Problemin son kısmında net yönlendirmeler ile Saffet'in değişkenleri kullanıp cebirsel bir eşitlik bulduğu görülmüş ancak değişkenler arasındaki ilişkiyi ifade edemediği gözlenmiştir.

> Araştırmacı: Diyelim ki bu da belli değil bu da belli değil, bu da belli değil. Yani "x, y, z, w, k, l, m, n" artık her neyse. O belli olmayan şeyler arasında bir bağlantı yok mu? Belli değil ama adı belli. Bilet ücretinin adı "x" mesela atıyorum bunu. Kişi sayısının adı "y" mesela bu "x" ve "y"yi bir şey yapınca başka bir şey bulamaz mısın yani? Bağlantı dediğim şey bu mesela. Ne olduğu belli. Kaç olduğu belli değil.
>
> Saffet: O zaman şöyle yapalım. Seyirciye "x" diyelim. Ücrete "y" diyelim. Kazanca "z" diyelim.) Seyircinin altına "x", Ücretin altına "y", kazancın altına "z" yazar.) Seyirci yani "x çarpı y" yani ücreti, "giriş ücreti eşittir z"… Yoo… Şöyle yapalım. Harcamaya da "w" diyelim. (Harcamanın altına "w" yazar.) "x çarpı y eksi x çarpı y parantez içinde eksi w eşittir kazanç" yani "z". ("x .y = z", onun altına da "(x.y) – w = z" yazar. ))




**Görsel 3.44.** *Saffet'in konser problemini genellemesi*

Saffet'in problem çözme stratejilerini gösterir tablo aşağıda sunulmuştur.

**Tablo 3.5.** *Saffet'in problem çözme stratejileri*

| **Not Ortalaması:** 38,234 | | **Katılımcılar Arasındaki Not Ortalaması Sırası:** 9 | |
|---|---|---|---|
| Diyagram Oluşturma | Anlamlı Özel Örnekler Kullanma | Ana Dili Kullanma | Birden Fazla Değişken Kullanarak Cebirsel İfade Yazma |
| Görsellerdeki Artıştan Faydalanıp Genelleme Yapma | | | |

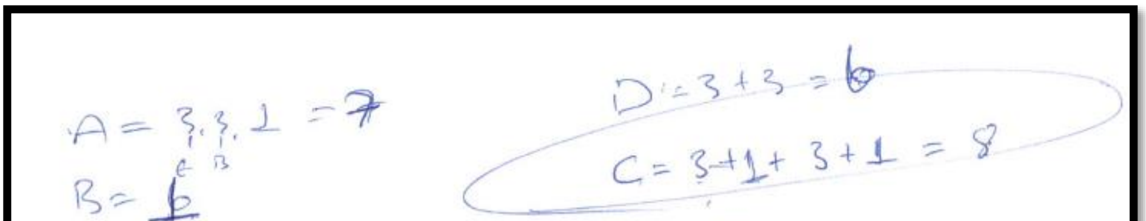
Tablo 3.5’ten görüldüğü gibi Saffet’in klinik görüşmeler boyunca diyagram oluşturma, diyagram oluşturma, anlamlı özel örnekleri kullanıp problemi anlamlandırmaya çalışma, ana dilde kendini ifade etme, birden fazla değişken kullanıp cebirsel ifade yazma ve görsellerdeki artıştan yola çıkıp genelleme yapma problem çözme stratejilerini kullandığı görülmüştür. Saffet, problemlerde sonuç odaklı düşünüp ilişkilere odaklanmamış, kesin bir değere göre problemi yorumlama ihtiyacı hissetmiş, cebirsel ifadeleri kullanmanın yanı sıra kendisini ana dilde de ifade edebilmiş, cebirsel ifade kullanımında sembolik manipülasyon yaparken zorlanmış ve birden fazla değişken kullanıp yazdığı ifadeyi de ilişkisel olarak yorumlama noktasında sorun yaşamıştır.

### 3.1.6. Abdi’nin problem çözme stratejilerine yönelik bulguları

Katılımcılardan Abdi’nin yapılan görüşmelerde problemi hatalı okuyabildiği ve bu yüzden tekrar okumak durumunda kalabildiği görülmüştür.

> Abdi: (Kağıda “A= , B=, C=, D= ve E=” yazar) Şimdi A, E ve B’yi yenip C ile berabere kalıyorsa toplamda 7 puanı olur. B, hıı D’ye de yeniliyorsa toplamda 7 puanı olur. (“A= 3, 3, 1=7” yazar) B; C ve D’yi yeniyor. O zaman 6 puanı olur.
>
> Araştırmacı: Öyle mi sence?
>
> Abdi: Durun tekrar okuyayım.

Futbol probleminde Abdi yenme, yenilme gibi kavramları hatalı olarak okusa bile bunu yazarken işlemlerine yansıtmadığı görülmüştür.




**Görsel 3.45.** *Abdi’nin futbol problemine ait ilk yöntemi*

Abdi’nin ilk stratejisi kendi diyagramını oluşturmak olmuş ve orada ayrıca ismi yazılmasa bile diğer takımların maçlarına da bakılması gerektiğinin farkında olarak hareket etmiştir. Her takım için oluşturduğu eşitliklerle takımların aldıkları puanları hesaplamış ve şampiyonun kim olacağını bu eşitlikler üzerinden belirtmiştir.

> Abdi: Şimdi A, E ve B’yi yenip C ile berabere kalıyorsa toplamda 7 puanı olur. B, hıı D’ye de yeniliyorsa toplamda 7 puanı olur. (“A=3, 3, 1= 7” yazar) B; C ve D’yi yeniyor. O zaman

6 puanı olur. D, C’ye yeniliyor. Toplamda 6 puanı olur. E, D’yi yenip B ve C ile berabere kalıyorsa… Kalıyorsa 5 puanı olur. Şimdi, bu sefer arada kalanlara bakmamız gerekiyor. D var. Şimdi D’ye bakarsak D, E’ye yeniliyor. B’ye bakalım. D; B’yi yeniyor. O zaman 3 puanı olur. D, A ya… D, eğer A’yı da yeniyorsa artı 3 puan daha gelir. Hepsine baktık mı? A’ya baktık. B’ye? B’ye de yeniliyor D. B; C’ye de yeniliyorsa toplamda 6 puan olur. C’ye bakalım. D, C’ye yeniliyorsa C’nin 3 puanı olur. C; A ile berabere kalıyorsa artı bir puan daha gelir. B; C ve D’ye yeniliyorsa artı üç puan daha gelir. E ve C berabere kalıyorsa artı bir puan gelir. A, B, C, D, E. Hepsine baktık galiba. Eğer yanlış hatırlamıyorsam… 8 puan olur, 7 puan, 6 puan. Toplamda yanlış hesaplamadıysam tabii A’nın 7 puanı, B’nin 6 puanı, E’nin 5 puanı, D’nin 6 puanı ve C’nin 8 puanı olur. (Kağıda A= 3, 3, 1= 7; B= 6, E= 5; D= 3+ 3= 6, C= 3+ 1+ 3+ 1= 8 yazar.) C turnuva birincisi olur.

Problemde geçen her takımın birbirleriyle birer maç yapması gerektiği cümlesinde bir sorun yaşamayan Abdi, C takımının ya da E takımının maçlarının tek başına hiç verilmese bile hesaplanması gerektiğini bilerek, ilişkilerin farkında olarak ilerlemiştir.

Araştırmacı: Peki ne yaptık? Nasıl yaptık?

Abdi: Burada A’nın, B’nin, D ve E’nin oynadıklarını vermiş yenip yenildiklerini, C’ninkini vermemiş. Önce A’ya baktım. A, E ve B’yi yeniyorsa 3, 3’ten 6 puan alır. C ile berabere kalıyorsa 7 puan alır.

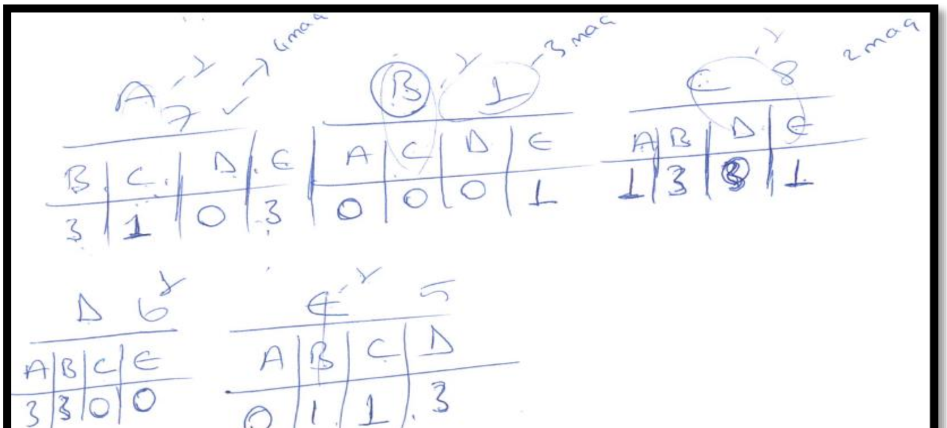
Araştırmacı: Yani bu 3, 3, 1?

Abdi: 3 puan E’den, 3 puan B’den, 1 puan da C’den alıyor.

Araştırmacı: D’den puan gelmiyor mu?

Abdi: D’den yenildiği için puan gelmiyor. Daha sonra B’ye baktım. B; C ve D’ye yeniliyorsa hiç puan alamaz. Fakat B’de bakmam gereken C ve D’nin dışında E ve A kalıyor. E ve A da… Hadi… Kafam karıştı…

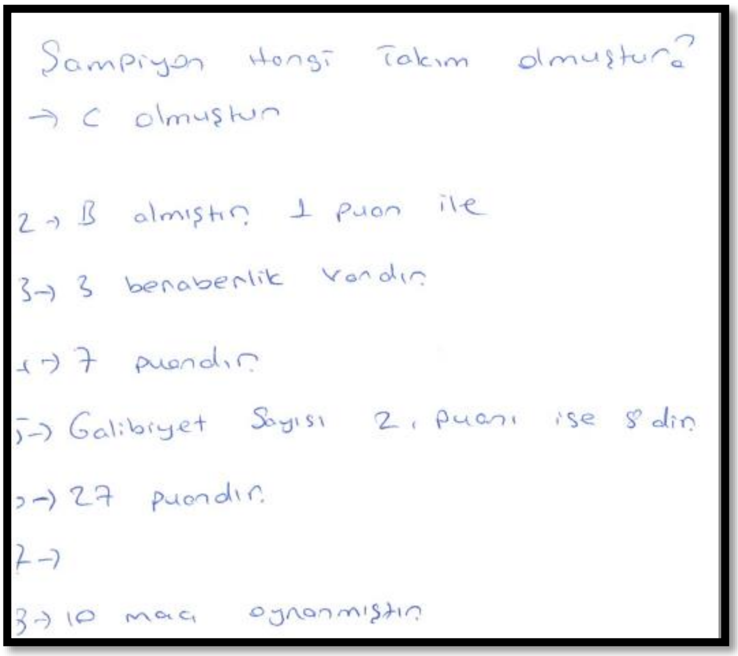
Abdi, takımlar arasında oynanan maçlara yönelik ilişkileri görmek için her takıma ait bir tablo oluşturmuş ve oynanan maçlarda alınan puanları bu tabloda tek tek göstermiştir.



**Görsel 3.46.** *Abdi’nin birden fazla tablo kullandığı stratejisi*

Problemde bilgilerini organize etmek için kullandığı tabloda kendisini daha iyi ifade ettiği görülmüştür. Problem boyunca virgül kullanımlarından dolayı okuma hataları yapmış ancak kendi yönergeleri ve kontrolleriyle çoğu kez hatalarını kendisi bulup düzeltmiştir. Takımların dörder maç yapması gerektiğinden yola çıkıp her takımın maçlarını gösteren diyagramları düzenli bir şekilde tamamlamış ve takımların kaçar puan alacaklarını, kimin şampiyon olacağını, turnuvada kaç tane maçın berabere bittiğini hatasız bir biçimde ifade etmiştir. Katılımcıların bazılarının zorlandığı berabere biten ve toplam maç sayılarını kendinden emin bir şekilde belirtmiş, burada da takımların birer kez maç yapmasının üstünde durmuştur.

> Araştırmacı: Turnuva sonunda kaç tane maç berabere bitmiştir?
>
> Abdi: Turnuva sonunda kaç tane maç berabere bitmiştir dersek, her takım birbiriyle oynarsa her takım… Şimdi A ile C berabere bitirmiş. Bu bir beraberlik. B ile C berabere bitirmiş. Bu ikinci beraberlik. A ile C'nin tekrar berabere bitirme şansı yok çünkü herkes birbiriyle bir maç oynuyor bu yüzden bu sayılmaz. Sonra C ile E berabere bitirmiş. Bu üçüncü beraberlik


Şampiyon Hangi Takım olmuştur?
→ C olmuştur
2 → B almıştır 1 puan ile
3 → 3 beraberlik vardır
4 → 7 puandır
5 → Galibiyet Sayısı 2, puanı ise 8 dir
→ 27 puandır
2 →
3 → 10 maç oynanmıştır

**Görsel 3.47.** *Abdi'nin ilk problemde bulduğu sonuçlar*

Problemde farklı yollarla nasıl yapılabileceği sorulduğunda aklına başka bir yöntem gelmemiş her seferinde tablo kullanacağını ifade etmiştir. Abdi'nin futbol problemi boyunca yaptıklarından emin olduğu, hatalarını kendisinin bulduğu ve ilişkileri yazarak ya da söyleyerek ifade edebildiği görülmüştür.

Parçalı fonksiyon içeriğine sahip ve katılımcıların nicelikler arasındaki ilişkileri belirleyebilmesine yönelik sorulan aynı zamanda katılımcılardan önerilerde bulunulması istenen tişört probleminde Abdi, çiçek matbaanın tüm indirimlerini tek seferde doğru bir biçimde ifade etmiş ajans matbaanın indirimlerinde ise toplam ücretten kısmını düşünmeden tişörtlerin tanesinde yüzde 25'lik bir indirime gitmiş, bu yüzde 25'lik indirimi uygularken de işlemsel olarak bir problem yaşamadığı görülmüştür. Soruyu bu şekilde okuduktan sonra da doğrudan çiçek baskı matbaayı idareye önermeyi tercih etmiştir. Bu önerisini de özel olarak seçtiği 100 tişört örneğinden açıklamaya çalışmıştır. 100 tişört örneğini de rastgele seçtiğini belirtmiştir.

> Abdi: Şimdi okulda fuara katılacak öğrenci sayısı henüz kesin değil. Şimdi ben olsam… Birinciyi çiçek baskı matbaa tişörtlerine, yani çiçek baskıya verilmesini öneririm.
>
> Araştırmacı: Neden?
>
> Abdi: Çünkü katılacak öğrencilerin sayısı belli değil. Örneğin; 100 öğrenci katılsa… Şöyle bir hesaplama yapmak istiyorum ortalama. 75 çarpı 10'dan 750 TL artı 75'ten 25 tanesi 8'er lira olacağından 25 çarpı 8'den 200 lira. O da eşittir 950 TL para yapar ortalama. Diğer matbaayı hesaplarsak…
>
> …
>
> Abdi: (Kağıda "950 TL"nin yanına ok çıkararak "Çiçek Baskı matbaa" yazar) Çiçek baskı matbaa. Şimdi 100, diğer matbaaya göre 100 tişörte kadar 12 lira ise 100 çarpı 12'den direkt olarak 1200 yapıyor zaten. Örnek veriyorum 100 öğrenciye göre (Kağıda "1200 TL"nin yanına ok çıkarıp "Ajans matbaa" yazar) eğer ortalama 100 öğrenciye göre baskı hesapladım. Eğer ikinci matbaayı seçerse yaklaşık bir 250 lira zarara girecek. Şimdi ben ortalama 100 hesapladım. Ne olur… 160, hatta 165 diyelim örnek olarak…
>
> Araştırmacı: Neden 100'ü seçtin örnek olarak?
>
> Abdi: Çünkü 75 ile başlamış, 150-160'tan devam etmiş. Bunun hani kafadan direkt rasgele verdim. Ama hani kafamda uygun olan nokta 100'dü yani. Bir de sonuçta rasgele bir hesaplama yapıyorum ve bir yerden başlamam lazım.

Problemde ajans matbaanın ikinci kısmındaki tişörtlerin satışında "100 ile 160 tane arasında yapılacak satışta ilk fiyattan hesaplanacak toplam ücretten %25 indirim yapılması" ifadesini pek çok kez okumasına rağmen anlamakta zorlanmıştır.

> Abdi: Şimdi 100 çarpı 12'den zaten direkt olarak 1200 TL geliyor. 100 den sonrasını ilk fiyattan hesaplanacak toplam ücretten yüzde 25 indirim. Yani bu soruda anlamadığım kısım şu: İlk fiyattan hesaplanacak toplam ücretten yüzde 25 indirim derken bu şu toplam ücret mi? Yoksa ilk satılan ücret mi? (1200 ü göstererek) O kısmı anlamadım.
>
> …
>
> Abdi: (Soruyu tekrar tekrar okur aynı kısmı.) Ben bu soruda anlamadığım nokta ne biliyor musunuz hocam?

Araştırmacı: Hı.

Abdi: Burada 100 tişörte kadar 12 TL'ye basım yapacağını söylüyor ya… Burada 100 tişörte kadar 12 TL verecek daha sonra mı yükseltecek alınması takdirinde? Yoksa 160 tane alınıyor diyelim. Hepsini 160 tanesi mi 6'şar liradan yüzde 25 indirimden verecek?

Araştırmacı: Ne diyor soruda? 100 ile 160 tane arasında yapılacak olan satışta oradan itibaren ne diyor?

Abdi: İlk fiyattan hesaplanacak toplam ücretten yüzde 25 indirim olacak.

Araştırmacı: Bu ne demek?

Abdi: Yani… (Sessizlik) Hıı…

Problemde zorlandığı ve bu sebeple tahminlerde bulunduğu görülmüştür. Tahminlerinin geçerliliği sorgulandığında ise yine özel örneklere yöneldiği gözlenmiştir.

Abdi: Ben öneride bulunursam öğrenciniz… (Sessizlik) 150'den fazlaysa ajans baskıya gidin. 150'den azsa çiçek baskıya gidin derdim.

Araştırmacı: Peki bu kanıya nasıl varırsın? 100'ü denemek, 150'den öncesi için yorum yapmak için; 170'i denemek de 150'den sonrasında yorum yapmakta yeterli mi?

Abdi: Yeterli mi?

Araştırmacı: Bundan nasıl emin oluruz?

Abdi: Soruyu bir daha okuyarak... (Soruyu tekrar okur) Şimdi bir de burada arada bir de 120'yi denemek istiyorum.

Yönlendirmelerle problemde bir genelleme yapılması istendiğinde ise değişkeni bilinmeyen olarak kullanmak aklına gelmiş ancak bilinmeyenin sınırlarını belirlemekte zorlanmıştır. Yaptığı işlem hataları onun problemdeki ilerleyişini yavaşlatınca herhangi bir bilinmeye değişken atayamamıştır.

Abdi: Denklem falan mı diyorsunuz?

Araştırmacı: Denklemde ne kullanıyoruz mesela biz?

Abdi: Bilinmeyen. "a, b, c" falan.

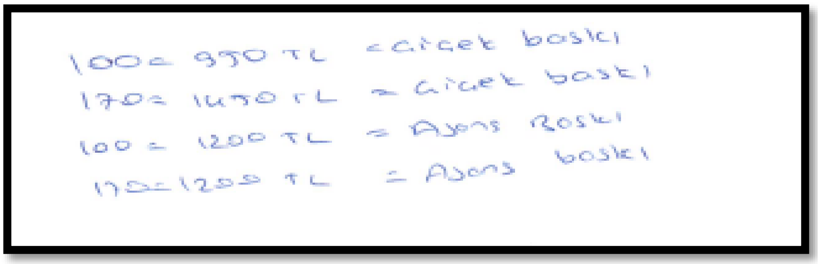
Araştırmacı: Hıh bilinmeyen. Bu şekilde bir bilinmeyen kullanarak bu problemi gösteremez miyiz?

Abdi: Gösteririz de...

Araştırmacı: Nasıl gösteririz Abdi? Zor mu sence? (Gülüşmeler)

Abdi: Ya hocam hava gece olduğu için benim için çok zor şu anda. (Gülüşmeler)

Problemde bir öneride bulunması istendiğinde sınır değerleri dikkate alıp seçtiği özel durum örneklerinde hangi matbaanın avantajlı olacağını yazarak çözümünü tamamlamıştır.




**Görsel 3.48.** *Abdi'nin tişört problemine ilk yaklaşımı*

Katılımcıların düşünme yollarının çeşitliliğine ve ilişkileri örüntüler üzerinden açıklama durumlarına odaklanılan karo sorusunda Abdi, problemdeki düzeni yönlendirme olmaksızın fark edip kendi cümleleriyle ifade edebilmiştir. Problemdeki düzeni ifade ederken şekillerdeki karo sayılarını kullanmıştır. Beyaz ve siyah karo sayılarının şekillerdeki alanlardan yola çıkarak görseli verilmeyen dört ve beşinci teraslar için kaçar karo bulunması gerektiğini hızlı bir biçimde yanıtlamıştır.

Abdi: 4. ve 5 terasa ait resimlerle ilgili neler söyleyebilirsiniz? Şekil bakımından mı?

Araştırmacı: Nasıl istersen... Şekil de çizebilirsin görebilirsin de. Altında yazıyor. Sorunun devamını oku bir.

Abdi: Kaç tane beyaz ve siyah karo olduğunu bulunuz. Ya şimdi belirli bir düzene göre gittiği belli yani. 3, 9. 9'a 1. 4, 3 12'ye 2. 1, 2, 3, 4, 5. 15'e 3 olacak. Yoo 15'e 3, 4, 5, 6. 6 çarpı 3 18'e 4 olacak.

Görseller arasında bir düzen olduğunu söyleyip artan her üç kareden birinin siyah ikisinin beyaz olduğuyla bu düzeni açıklamıştır. Bu problemde de örnek seçmesi gerektiğinde bunu rastgele bir teras olarak (11) belirlemiştir.

Araştırmacı: Daha büyük teraslarındaki karo sayılarını bulmak için nasıl bir yol izlersiniz? 5 demedi de… Onu c şıkkıyla beraber düşünebilirsin. B ve C'yi beraber düşünebilirsin.

Abdi: Mesela 11. Adımı mı dedi örnek veriyorum. Mesela ikinci adımda 1, 2, 3, 4 tane var. 3.adımda 1, 2, 3, 4, 5. 11.adımda 13 tane olur.

Araştırmacı: Hangisi o? Ne o?

Abdi: 13 karo olur dikdörtgende. Alt kısmında.

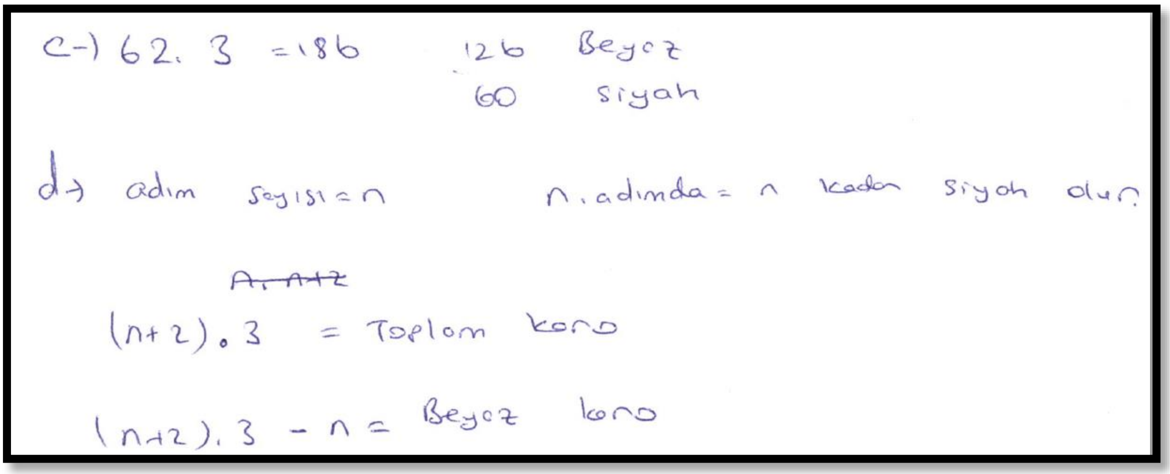
Araştırmacı: Hı.

Abdi: Alt kısmında 13 karo olur. Zaten dik tarafı her zaman 3 oluyor. İşte 13 çarpı 3 bölü yapmayız. 13 çarpı 3 olur.

Araştırmacı: Ne olur o 13 çarpı 3?

Abdi: Toplam karo 13 çarpı 3 olur. Ortasındaki karo sayısı da 2 de 2 taneyse 11'de 11 tanedir.

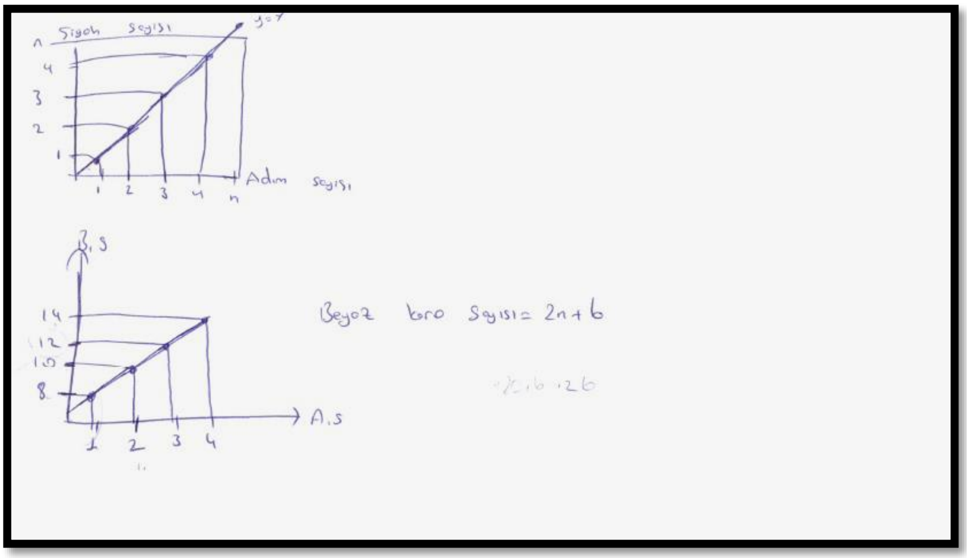
Abdi, daha fazla adım için ifade edilebilecek genellemeyi siyah karo sayısına "n" bilinmeyenini verip değişkeni bir örüntü genelleyici olarak kullanıp cebirsel bir eşitlik olacak şekilde beyaz karoları ayrı, toplam karoları ayrı göstermiştir. Tüm bu çözüm sürecinde değişken kullanma konusunda sorun yaşamadığı görülmüştür.




**Görsel 3.49.** *Abdi'nin karo problemindeki genellemesi*

Abdi, problemin belirli bir düzene göre gittiğini ifade etmiş ve örüntüdeki kuralı bulurken nicelikler arasındaki ilişkiden çok şekillerin alanlarındaki artış miktarlarından faydalanmıştır.

Kendisine farklı bir yöntemle nasıl yapabileceği sorulduğunda toplam sembolü ile gösterebileceğini ifade etmiş ancak bilgilerini geri çağıramamış sonrasında ise grafik çizimine yönelmiştir. Çizdiği grafiği analitik olarak yorumlayamamış ancak orantısal olarak bulduğu ve değişkeni bir etiket olarak kullandığı cebirsel eşitliğin parantezin içine dağıtılmış halini elde etmiştir.




**Görsel 3.50.** *Abdi'nin karo problemine alternatif sunduğu çözüm yolu*

Abdi, bulduğu cebirsel ifadelerdeki ilişkileri yorumlarken zorlanmış ve ifadeler arasında geçiş yapamamıştır.

> Abdi: İkinci adımda 10. Üçüncü adımda 12. Dördüncü adımda 14. (Grafik üzerinde yatayda 1, 2, 3, 4; düşeyde 8, 10, 12, 14 yazıp (1,8), (2,10), (3,12) ve (4,14) noktalarını birleştirir.)

Araştırmacı: Peki “n. adımda” ne olur acaba?

Abdi: (Sessizlik) Hıııı… Üçüncü adımda 12 imiş. İkinci adım… Birde 8’miş… (düşünür) “n+8” desem… 3+8 11 yapıyor. 4+8 12 yapıyor. Bunun bir kuralı yok ki. Yani var ama çok uzun…

Araştırmacı: Uzun mu acaba?

Abdi: Hocam birinci adımda 8, ikinci adımda 10. “n+8” oluyor. Ama o zaman şey olmaz. 1+8, 9 olur. Olmaz.

Araştırmacı: Hı. İkinci adıma göre “n+8” oluyor da birinci adıma göre olmuyor.

Katılımcıların birden fazla değişken kullanmayı ve bu değişkenler arasındaki ilişkiyi göstermelerini hedefleyen konser probleminde Abdi, problemde kendisini yönlendirici kısa notlar almış ve tek bir cevabı olan doğrudan işlem yaparak ulaşabileceği yanıtlara hızlı bir biçimde ulaşmıştır. Yanıtlarını verirken şıkların birçoğunda işlem dahi yapmamış ve orantısal olarak doğrudan cevaplayabilmiştir. Problemde sık sık kendi yönergeleriyle hatalarını görmüş ve geri dönerek onları düzeltmeye çalışmıştır.

Abdi: 150 bin TL kazanması için de… (Masanın üzerine “150” yazar) Hocam bir de bende böyle bir takıntı vardır.

Araştırmacı: Ne?

Abdi: Ben bir şeyi konuşurken yazarım.

Araştırmacı: İyi bir şey bu yazabilirsin sıkıntı yok.

Abdi: Bir de kağıda da yazmam biliyor musunuz?

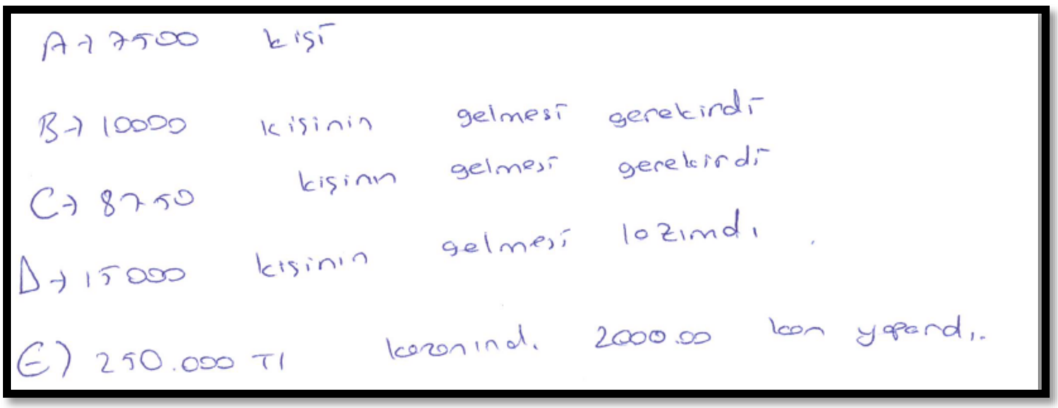
Araştırmacı: Hı. Tahtaya. (Gülüşmeler)

Abdi: Çok saçma sapan kelimeler bulabilirsiniz bazen. Sizle konuşurken bile yazıyorum yani oraya.

…

Abdi: Bir saniye… 250 bin TL kazanırdı ama 200 bin kar yapardı. (“250.000 TL kazanırdı 200.000 kar yapardı” yazar.) Doğru hesapladığıma emin değilim bir daha hesaplayayım.

Abdi, pek çoğunda işlem yapmadığı problemin şıklarında yer alan tek bir cevap isteyen şıklara verdiği yanıtları alt alta oluşturmuştur.




**Görsel 3.51.** *Abdi’nin konser problemine verdiği cevaplar*

Verilerin bir sayı olarak belirtilmediği f şıkkında ise bağlantı kurmak denildiğinde cebirsel bir ifadeye ihtiyaç duyulduğunu anlamış ve değişkeni bilinmeyen olarak kullandığı ifadesini oluşturmaya çalışmıştır.

Araştırmacı: Peki. f şıkkına bakalım.

Abdi: İTÜ Stadının kapasitesi, Jale Baber'in hedeflediği gelir, konser için yaptığı harcama ve konsere ödenen giriş ücretiyle ilgili bir bağlantı kurmak isterseniz… Yine mi şey yapacağız? Durun. Ben severim böyle şeyleri. (Gülüyor) İTÜ Stadının kapasitesi, Jale Baber'in hedeflediği gelir, konser için yaptığı harcama ve konsere giriş ücretiyle ilgili bağlantı kurmak isterseniz… Şimdi… Konsere gelmesi gereken kişi sayısına "x" dersek. Yani öyle mi bağlantı kurmamı istiyorlar?

Problemin çözümünde değişkenlerin birbirinden etkilendiğini, o yüzden hepsinin birer bilinmeyen olarak alınması gerektiğini, niceliklerin sürekli değişebileceğini ifade etmiştir.

Abdi: Şimdi buna ben 20.000 desem (İlk eşitlikte 50.000 yazan yerin üstüne "20.000" yazar) O zaman "a" değişecek ya da "x" değişecek herhangi biri değişecek. Buna da "z" diyeceğiz hocam. (İlk eşitlikte 100000 yazan yerin altına "z" yazar.) Ama şunla şunun arasında bir bağlantı olması lazım… "ax eksi y eşittir z" hocam böyle bir bağlantı oluyor anca. ("ax– y = z" yazar) ( Gülüyor )

Araştırmacı: Ne o? Anlat şimdi ne bulduğunu.

Abdi: Hocam şimdi… Harcanan para ile kazanılacak para arasında bir bağlantı kurmaya çalıştım da orada siz dediniz ki 150 bin TL de kar yapabilir dediniz. Şimdi bu bağlantıyı kuramam o zaman ben.

Araştırmacı: Tamam nasıl bir bağlantı kurdun?

Abdi: Yani ikisine de farklı bilinmeyenler verdim "y" ve "z" olarak.

Araştırmacı: Hı.

Abdi: Şimdi bilet paraları da değişebilir. "y"ye ve "z"ye göre bilet paraları da değişebilir. Hatta "x" de değişebilir. Hepsi değişebilir hocam.

Cebirsel ifadesini oluştururken birden fazla bilinmeyen kullanmakta tereddüt etmemiş ancak soruda sabit olan hiçbir şeyin bulunmamasının onu zorladığını ifade etmiştir. Hatta bu durumu uzun süre kabul etmemiş mutlaka belirli şeylerin sabit olarak verilmesi gerektiğini söylemiştir.

Araştırmacı: Buna "x" dersen burası 100.000 mi olur? Ya onlar da değişirse Abdi? Hep 100 bin mi gelir hedefleyecek?

Abdi: Ama hedeflediği gelir 100 bin.

Araştırmacı: Hep 100 bin mi gelir hedefleyecek? 200 de hedefleyemez mi yani? Burada değişti ya soruda.

Abdi: "y" mi diyeceğiz ona?

Araştırmacı: Nasıl istersen…

Abdi: “y” diyelim o zaman biz buna. (= 100.000 kısmının üstünü çizip oraya “y” yazar) Yaptığı harcama 50 bin. Bunu harcadı artık yani. (“yaptığı harcama = 50.000” yazar)

Araştırmacı: Eee ya o da değişirse?

Abdi: Bu nasıl değişecek hocam?

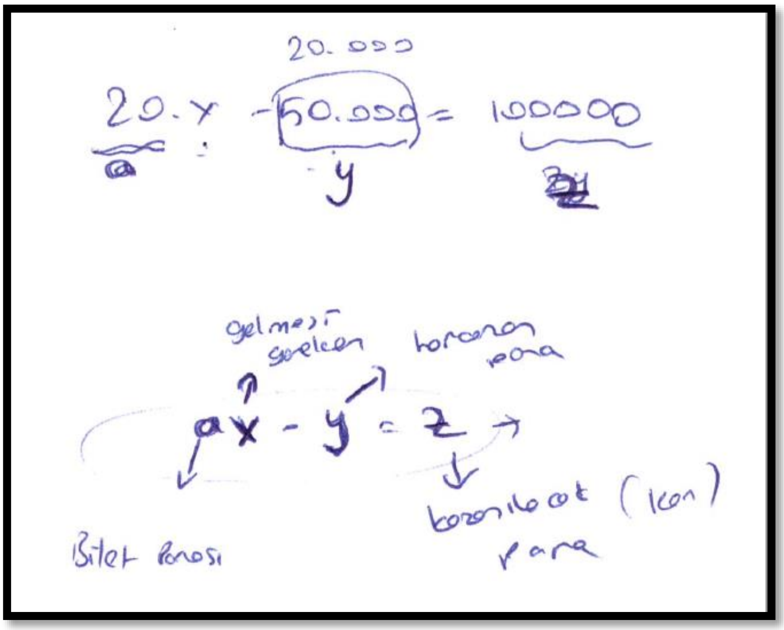
Araştırmacı: 75 olmuş burada mesela?

Abdi: O zaman bunla bunun bağlantısı var. Şu ikisinin. (50.000’in üstünü çizer, gelir ve harcamayı gösterir)

Araştırmacı: İşte bunları soruyor galiba soru biraz.

Abdi: Ben sanki buldum gibi. Yoo bulamadım. (Gülüyor) Bir saniye… (sessizlik) Ödenen giriş ücreti var bir de… (“Ödenen giriş ücreti =” yazar) Şimdi bunun yapması gereken kar 100 bin TL değil mi? … Yani…

Problemin son kısmında değişkenler arasında ilişki olması gerektiğini ifade ederek değişkenleri birer genelleştirilmiş sayı olarak kullanıp cebirsel bir eşitlik yazarak kendisini ifade etmiştir. Ancak bu ilişkilerin nasıl değişeceği ve yönlerinin nasıl olacağına dair derinlemesine açıklamalar yapamamıştır.




**Görsel 3.52.** *Abdi’nin birden fazla değişkeni kullanımı*

Abdi’nin problem çözme stratejilerini gösterir tablo aşağıda sunulmuştur.

**Tablo 3.6.** *Abdi’nin problem çözme stratejileri*

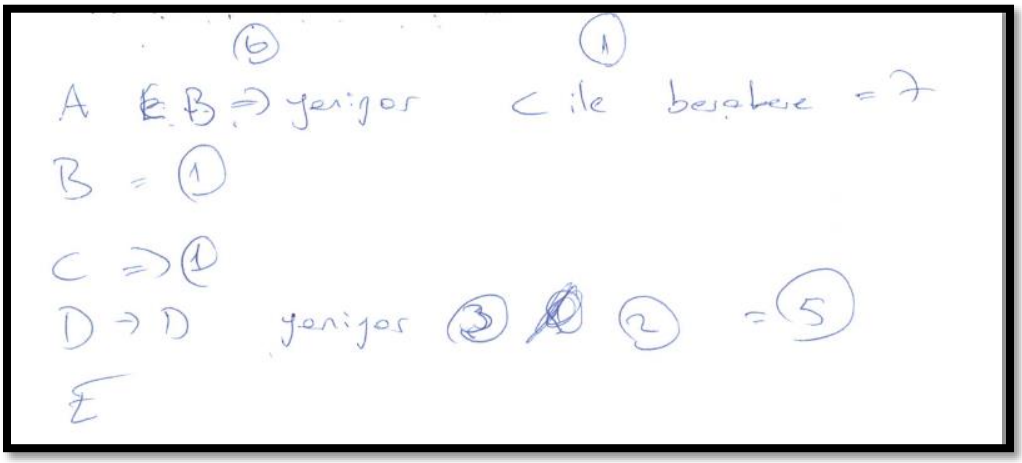
| **Not Ortalaması:** 64,434 | | **Katılımcılar Arasındaki Not Ortalaması Sırası:** 5 | |
|---|---|---|---|
| Tahminde Bulunma | Sistematik Liste Yapma | Problemde İstenildiği İçin Tablo Yapma | Anlamlı Özel Örnek Kullanma |
| Değişken Kullanıp Genelleme Yapma | Anahtar Kelimeleri Kullanma | | Birden Fazla Değişken Kullanarak Cebirsel İfade Yazma |

Tablo 3.6’dan anlaşıldığı gibi Abdi’nin klinik görüşmelerde tahminde bulunma, sistematik liste yapma, kendisinden istenildiğinde tablo yapma, anlamlı özel örnekler kullanıp problemi anlamlandırmaya çalışma, değişken kullanıp genelleme yapma, anahtar kelimeleri kullanma ve birden fazla değişkenle cebirsel ifade yazma problem çözme stratejilerini kullandığı görülmüştür. Abdi, problem çözüm süreci boyunca değişkenleri bilinmeyen olarak atayabilmiş ancak değişkenler arasındaki ilişkinin yorumlanması ve yönü kısımlarında sorun yaşamış, cebirsel gösterimi sonuç odaklı kullanmış, anlamlı özel örneklerle problemi anlamlandırmaya çalışmış, zaman zaman görsellerden de faydalanıp genelleme yapmaya çalışmış ancak sembolik manipülasyon yapmakta zorlanmıştır. Fonksiyon kavramına dayanan problemlerde nicelikler arasındaki ilişkileri ve bu ilişkilerin yönünü ifade etmede problem yaşamıştır.

### 3.1.7. Oğulcan’ın Problem Çözme Stratejilerine Yönelik Bulgular

Oğulcan’ın görüşmeler boyunca görsel stratejileri daha fazla kullandığı, içeriğinde görsel bulunan problemlerde kendisini daha iyi ifade ettiği ve görsel bulunmayan sorularda bile stratejisine yönelik kullandığı şekillerle düşünme biçimini aktardığı görülmüştür.

Bağlama yakın olmanın katılımcılar üzerinde bir etkisinin olup olmadığına odaklanılan futbol sorusunda Oğulcan, virgüllere dikkat etmeden problemi anlamlandırmaya çalışmış buna bağlı olarak da birkaç kez yazılanları okumak durumunda kalmıştır. Soruya, verilerden anladıklarını kısa kısa yazarak başlamış ve yaptığı değerlendirmenin ardından da kendi diyagramını oluşturup A takımının şampiyon olacağını söylemiştir.




**Görsel 3.53.** *Oğulcan'ın futbol problemindeki ilk yaklaşımı*

Daha sonra yönlendirme olmadan yazdıklarını kontrol etmiş ve E takımının kendi başına hiç yazılmadığını fark etmiştir. E takımını hiç yazmadığı için de bu takımın puan alamadığını düşünmüştür. Problemin devamında yine yönlendirme olmaksızın soruya bir kez daha odaklanıp yanlış yaptığını düşünmüş ve hesaplamalarını düzenlemiştir.

Oğulcan: Diğerleri hep yenilmiş hiç kazanmamış ya da berabere kalmışlar. Onları da yazdım. Aaa dur. A, E ve B'yi yeniyor C ile berabere kalıyor. C'nin de 1 puanı vardır o zaman. Bunu yeni şey ettim. B ve C berabere kalıyor. B'ye de 1 puan vereceğiz. (Kağıda B = 1 ve C= 1 yazar) O zaman E hiç puan almamış oluyor. (Gülüşmeler) (Kağıda E yazar, yanına bir şey yazmaz)

Araştırmacı: Şimdi, soruyu okudun ya galibiyete 3 diye anlattın. Takımlardan bahsediyorsun, takımların birbirini yenmesi falan… Diyorsun ki şimdi bir takım bir takımı yenerse…

Oğulcan: Aaa tamam tamam hocam bir şey daha var benim… Bunu ben bir tane daha yapayım.

Hesaplamaları sırasında yenme-yenilme kavramlarını çoğu kez doğru okusa bile çalışma kağıdında gösterirken 3 yerine 0 ya da 0 yerine 3 puan olarak söylediğini farklı yazdığı görülmüştür.

Oğulcan: Ondan sonra D, C'ye yeniliyor. 3 puan daha alır C. (C'nin yanına bir tane daha 3 yazar.) E, D'ye yeniliyor. 3 puan da bu alır yine. (D'nin yanına 3 puan daha yazar) B ve C berabere kalıyor. B'ye 1 puan, C'ye de 1 puan. (B ve C'nin yanına 1 yazar) Buna göre o zaman 7, 8 oldu bu. Yoo, 8 oldu. 7 oldu, 1 oldu, 9 oldu. (“A = 6, 1= 7”; “B = 1”; “C = 1, 3, 3, 1= 8”; “D = 3, 3, 3= 9”, “E= …”Yazar) D şampiyon çıktı bu sefer de.

Araştırmacı: E?

Oğulcan: E… A, E ve B’yi yeniyor. E yenilmiş burada E puan alamamış. B, C; E yok burada. E, D’ye yeniliyor. E, puan alamamış hiç. E, hep yenilmiş.

Araştırmacı: Orada yenilmiş mi E?

Oğulcan: E, D’yi hıı yeniyormuş. Ben yanlış okumuşum. O zaman ben yanlış hesapladım yine.

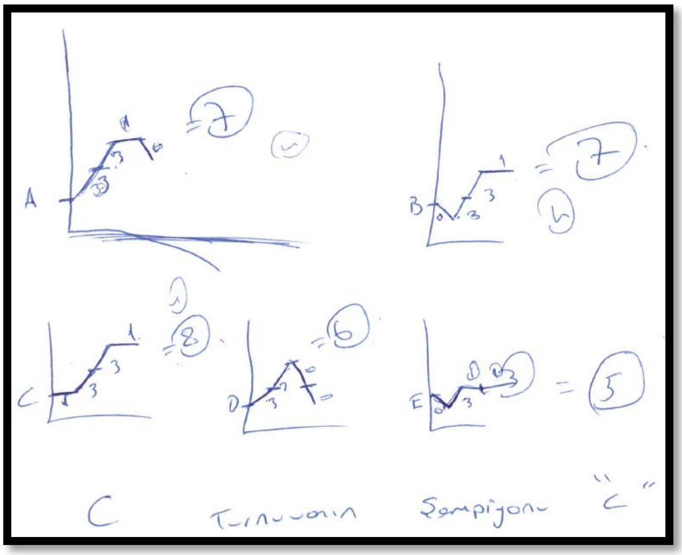
Yönlendirmeyle yenme-yenilme kavramlarını tekrar kontrol ettiğinde bu hatalarını düzeltmiş ancak bu kez de yenilen takımlara “0” puan vermek yerine, takım yenildiği için o veriyi önemsemeyip tekrar tekrar yaptıklarını kontrol etmek durumunda kalmıştır. Oğulcan ilk hesaplamalarında; A, E ve B’yi yeniyor cümlesinden A’ya iki defa 3 puan vermesine rağmen problemde açıkça belirtilse bile yenilen takımlara 0 puan vermemiştir. Takımlar arasında yapılan maçların sonuçlarına odaklanıp ilişkileri düşünmemiş ve bu şekilde hesapladığında kendinden emin bir biçimde bu kez de D takımının şampiyon olacağını ifade etmiştir.

Oğulcan: Tamam hocam. A, E ve B’yi yeniyor. A, E ve B’yi yeniyorsa üçer puan alır yendiği için. (Kağıda bir önceki yazdığının benzerini tekrar yazmaya başlar. “A = 3, 3” yazar.) Bu ikisi 0 alır. C ile berabere kalıyor. 1 puan bu alır, 1 puan da C alır. (Kağıtta B ve C’nin yanına “1” yazar) Ondan sonra ıı D yeniliyor. Yok, nerede kalmıştık. D’ye de yeniliyormuş. D de 3 puan alır haliyle. (Kağıtta D’nin yanına “3” yazar) B, C ve D ye yeniliyormuş. O zaman C ve D 3 er puan alır yine. (C ve D’nin yanına “3” yazar) D,C’ye yeniliyor. Yeniliyor, evet. D yeniliyorsa 3 puan da bu alır. (C’nin yanına “3” yazar) E, D’yi yeniyormuş. D’yi yenerse 3 puan da E alır burada. (E’nin ve D’nin yanına “3” yazar) B ve C ile de berabere kalıyor. O zaman hem E’ye 1, hem B’ye 1, hem de C’ye 1 puan veririm. Bu 4 olur, 9 olur, 5 olur. 1 ve 7 olur. (“A= 7, B= 1, C= 5, D= 9 ve E= 4” yazar) Şampiyon D çıktı yine.

Araştırmacı: D çıktı.

Oğulcan: Evet, bu son kararım.

Problemi başka şekilde nasıl yapabileceği sorgulandığında kendine güvenmeyerek de olsa grafik çizmeye başlamıştır. Grafiğinde galibiyetleri yukarı doğru eğimli bir çizgi (/), yenilgileri aşağı eğimli bir çizgi (\) ve beraberlikleri düz çizgi (-) ile göstermiştir.




**Görsel 3.54.** *Oğulcan'ın futbol problemine alternatif çözüm yolu*

Oğulcan'ın grafikte ne yaptığı sorgulandığında yaptığı grafiğin ilişkisel bir anlam taşımadığını, sadece görsellerden faydalandığını ifade ettiği görülmüştür.

Oğulcan: Ya, onu ben rastgele belirledim, eksenlerin ilişkilerine göre değil. Şöyle yapalım, açıklama yapalım. Çıkmak yenmek, düz berabere, aşağı da kaybetmek. (Kağıtta "/ = yenmek,- = berabere, \ = kaybetmek" yazar) A, bir çıktı çünkü E'yi yendi. Bir daha çıktı çünkü B'yi yendi. C ile berabere kaldı. Ondan sonra D'ye de yenildi. (Kağıtta iki kere üste çizgi, bir kere yana çizgi, bir kere de aşağı çizgi işaretini grafiğin üstüne yapar) Hepsini ayrı ayrı yapayım ben en iyisi burada karışır yoksa.

Oluşturduğu görsellerle birlikte hangi takımın kaç maç yaptığını, kaç puan aldığını, kaçar maçın berabere bittiğini, kimin şampiyon olduğunu daha rahat ifade edebilmiştir. Problem boyunca en çok takımların birbirleriyle birer maç oynaması gerektiği cümlesinde sorun yaşamış ve bunu anlamlandırabilmek için farklı sorular sormuş, çıkarımlar yapmıştır.

Oğulcan: Evet, 4 takımla maç yapmış.

Araştırmacı: Peki.

Oğulcan: B, C ve D'ye yeniliyordu. B bir ikisiyle yapmış. Aaa… Şöyle bir şey var.

Araştırmacı: Ne oldu?

Oğulcan: Mesela burada B, C ve D'ye yeniliyor demiş. Aynı şekilde C ve D, B'yi yendi gibisinden cümle kurmuş olabilir mi böyle?

…

Araştırmacı: Hı bunu anlıyorsun. Ekstradan, yani her takım birer maç yapmaktadır diyor ya bir daha maç yapacaklar mı?

Oğulcan: Aaa hayır. Tamam, o zaman. Aynı maçı bir daha söylemiş olabilirler o zaman.

Araştırmacı: Olabilir mi söylemiş? B, C ile bir maç yaptıysa…

Oğulcan: Bir daha yapamaz. C, B ile yaptı diyemez yani.

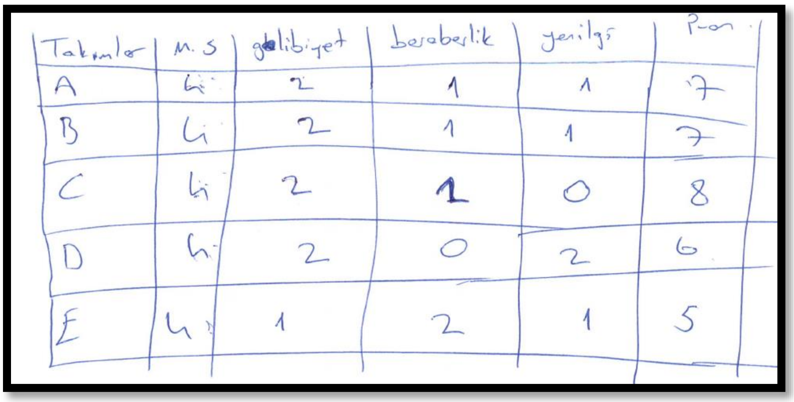
Araştırmacı: O zaman bir daha söylemiş olabilir mi?

Oğulcan: Olabilir. Bakalım bir ona bir.

…

Oğulcan: Ama şöyle bir şey var. Şimdi A, bütün takımlarla maç yapmak zorunda, eee B ile yaptı. B de bütün takımlarla maç yapmak zorunda. Bu B'nin ki A'dan sayılıyor. A'nın ki B'den sayılıyor. O zaman B, bir daha A ile oynamayacak.

Oğulcan'dan tablo çizmesi istendiğinde kendi tablosunu kendi düzeltmeleriyle oluşturarak problemdeki soruları tamamlamıştır. Çizdiği tabloda, görsellerinde ve diyagramında elde ettiği verilerden de faydalanarak, hata yapmadan kendisini ifade edebilmiştir. Yöntemleri arasında hangisinin daha kullanışlı olduğu sorulduğunda ise tablonun daha kolay olduğunu söylemiştir.



| Takımlar | M.S | galibiyet | beraberlik | yenilgi | Puan |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 4 | 2 | 1 | 1 | 7 |
| B | 4 | 2 | 1 | 1 | 7 |
| C | 4 | 2 | 1 | 0 | 8 |
| D | 4 | 2 | 0 | 2 | 6 |
| E | 4 | 1 | 2 | 1 | 5 |

**Görsel 3.55.** *Oğulcan'ın futbol probleminde oluşturduğu tablo*

Parçalı fonksiyon içeriğine sahip tişört sorusunda Oğulcan, problemin bir yüzde sorusu olduğunu ve kendisinin de bu konuda pek iyi olmadığını ifade ederek çözümüne başlamıştır. Problemin fonksiyonun tanım kümesindeki bölümlerine ayrıldığı ilk kısım olan ilk 75 tişörtten sonrakilerin fiyatının 8 TL'ye geleceğini hızlı bir şekilde söylemiştir. Çiçek matbaanın üçüncü tanım kümesi kısmı olan 150 tişörtten sonrakilerin fiyatının 5 TL olacağını ilk okuyuşta ifade edebilmiştir. Problemdeki bir diğer matbaa olan ajans matbaanın indirimini ise anlamakta zorlanmış ve toplam ücretten yüzde 25 indirim yapmak kısmını tane fiyatı 12 TL'den yüzde 25 indirim yapmak olarak yorumlamıştır.

Araştırmacı: Ne anladın sorudan Oğulcan?

Oğulcan: Hocam yüzde problemlerim pek iyi değil. Onu bir söyleyeyim.

…

Oğulcan: İki matbaadan fiyat almışlar. Çiçek baskı matbaa diyormuş ki 75 tişört var. Bunları 10 TL'ye, tişört başına 10 TL'ye veriyormuş. 75'den fazla tişört alınırsa ilk 75'den sonrakilerin tanesinde yani yine ilk 75 ini 10 TL'ye alınacak ama ondan sonrasında 8 TL alınacak. 2 TL indirim yapılacakmış. 150'den fazla alımda ise ilk fiyata göre 5 TL indirim yapılacak. İlk fiyat dediği 10 TL, yani 5 liraya gelecek.

Araştırmacı: Ne zamandan itibaren 5 TL?

Oğulcan: 150 tişörtten sonrasında.

Araştırmacı: Hı.

…

Oğulcan: 160 taneden fazla alım olursa sayıya bakılmaksızın tişörtlerin… Ama 125'ten sonra demiyor mu? Bir dakika. Ajans matbaa 100 tişörte kadar 12TL ye basım yapılacağını, 100 ile 160 tane arasında yapılacak satışta ilk fiyattan hesaplanacak toplam ücretten… Yüzde 25 indirim yapılacağını… Burada 100 tişörte kadar 12 TL demiş ama burada mesela şey demesi… Iıı… Tişörtlerin satışı… Tişört başına demiş. Burada da 100 tişörte kadar 12 TL demiş direkt.

Ajans matbaanın 160 tişörtten sonraki satışlarda tişörtleri 6 TL'ye satacağını da tek seferde kendi cümleleriyle ifade edebilmiş ancak 100 ile 160 tane arasında yapılacak ilk fiyattan hesaplanacak toplam ücretten yüzde 25 indirim yapmak kısmını defalarca okumuş, anlamlandırmaya çalışmış ve farklı şekillerde ifade etmiştir.

Oğulcan: Yani 160'dan sonra… (Sessizlik) fazla alım olur ise de sayıya bakılmaksızın tişörtlerin tanesini… Hıı mesela 170 tane tişört alacaksın her biri 6 TL. Yani burada mesela… 110 tane aldık diyelim. 100 tanesini 12 liraya verecek. 10 tanesini yüzde 25 indirimle verecek ama 170 tane alırsak hepsi 6 TL olacak.

Problemin çözüm sürecinde ilk olarak anlamlı sınır değerler için özel örnek kullanma yoluna gitmiş ve sorudaki ilk sınırı kullanacak şekilde kendisine 90 tişört sayısını belirlemiştir. Örneklerinde çiçek matbaayı tek taraflı düşünüp 70, 110 ve 200 ü seçerek hesaplamalar yapmıştır. İlk seçtiği özel örnek olan 90'ı ise hem ajans hem de çiçek matbaayı birlikte düşünebilmek için 110 ile değiştirmiş matbaalar arasındaki ilişkiyi belirlemeye çalışmıştır.

Araştırmacı: Peki bu tişört sayılarını neye göre belirledin?

Oğulcan: Onu daha belirlemedim. Ajansa göre değiştirebilirim yine. Ajans matbaa 100 tişörte kadar 12 TL. İlk fiyatına göre 70 tişörte kadar oluyor. Onu elemeye gerek yok. 100 tişört ile 160 tişört arasında… Bunu o zaman ben (90'ı kast ederek) 100'den fazla yapsam burası değişecek mi? 150'den fazla olması halinde olmayacak… Yoo oldu. Buna zaten niye 90 demişim ki? 90 mantıksız olmuş burada.

Araştırmacı: Neden mantıksız?

Oğulcan: 75 tişörte kadar 10 TL demiş. He he, tamam tamam… Buna 110 diyeyim ben.

Araştırmacı: Neden 90 mantıksız geldi de 110 dedin sen?

Oğulcan: İkisini de oranlı yapmaya çalıştım.

Araştırmacı: Neyi oranlamaya çalışıyorsun?

Oğulcan: 75 ten fazla olunca fiyat değişiyor. 75 ile 150 arasında fiyat başka çiçek matbaa için. Onun için 110 yaptım bunun sebebi de ajans matbaada 100 ile 160 arasında fiyat değişiyor yine. İkisinin ortak arasında olacak. O yüzden 110 tişört dedim. Iı bir de ne diyor? 150'den fazla. 200 tamam. 160'dan fazla 200 tamam bu şekilde oldu herhalde.

Problem boyunca indirimleri, sınırları kendi yönergeleriyle nasıl kullanması gerektiğini belirlemiş ve adımlarını buna göre atmıştır ancak yaşadığı işlemsel zorluklar fonksiyonun farklı tanım kümesi elemanlarında değişen kuralına odaklanmasını zaman zaman güçleştirmiştir. Hesaplamalarının ardından idareye ilk önerisi 150 tişörte kadar çiçek matbaayı, 150 tişörtten fazla alım olması halinde ise ajans matbaayı seçmeleri yönünde olmuştur. Bu önerisini seçtiği ve hesapladığı özel tişört sayılarından yola çıkarak yapmış, seçtiği tişört adetlerinin o aralıkları simgelediğini ifade etmiştir.

> Araştırmacı: Peki. Bunları idareye önerebilmek için bunu yapmak yeterli mi? 70 tişört ise çiçek matbaa demek yeterli mi yoksa diğer değerlere de bakmak gerek mi?
>
> Oğulcan: Diğer değerlerden kastınız ne hocam?
>
> Araştırmacı: Sonuçta tişört sayısını biz bilmiyoruz ya. 70 tişört olmak zorunda mı?
>
> Oğulcan: Yaa şöyle. Bu 70 tişört aslında 100 ile 0 arasını simgeliyor.
>
> Araştırmacı: Hı.
>
> Oğulcan: Bu 110 tişört de 100 ile 150 arasını simgeliyor. Bu 200 tişört ise 160'dan sonrasını, yani 150 den sonrasını simgeliyor. Yani eğer örnek veriyorum 60 tişört olursa yine çiçek matbaa daha ucuza gelir ajansa göre. Ama 200 tişört olursa ajans daha ucuza gelir.

Probleme başlarken kendisinin de ifade ettiği gibi bir sayının yüzde 25 ini almakta zorlanmış, işlemlerde kendisine yol gösterebilmek için orantı kurma yoluna gitmiştir.

> Araştırmacı: Yüzde problemi mi sence bu?
>
> Oğulcan: Yaa yok da onu anlatacağım şimdi bir saniye. Okulun idarecileri tişört basacaklarmış. İki matbaadan fiyat almışlar. Çiçek baskı matbaa diyormuş ki 75 tişört var. Bunları 10 TL'ye, tişört başına 10 TL'ye veriyormuş. 75'ten fazla tişört alınırsa ilk 75'ten sonrakilerin tanesinde yani yine ilk 75'ini 10 TL'ye alınacak ama ondan sonrasında 8 TL alınacak. 2 TL indirim yapılacakmış. 150'den fazla alımda ise ilk fiyata göre 5 TL indirim yapılacak. İlk fiyat dediği 10 TL, yani 5 liraya gelecek.
>
> …
>
> Oğulcan: Iı 160 taneden fazla yoo ne diyor (Soruyu içinden okur) yüzde 25 indirim yapacak. Kaç 110 yani 10 tane tişörtü yok hani 12'nin yüzde 25 i ne; 10 tane tişörte geri kalanını 12 TL'ye yapacak.
>
> Araştırmacı: Yani?
>
> Oğulcan: 10'un yüzde 25'ini alacağım. Ama onu nasıl alacağımı unuttum. Ben yüzdeleri unuturum hocam. (Gülüyor)

Problemi çözmek için farklı bir yöntem düşünmeye yönlendirildiğinde ise aklına ilk olarak tablo çizmek gelmiş ancak uygulamaya geçememiştir. Soruda genellemesine yardımcı olması için değişken kullanabileceği hatırlatıldığında ise, değişkeni tişört sayısına bilinmeyen olarak atayabilmiş ancak matbaaların sınır değerleri ve cebirsel ifadeler arasında geçiş yaparken zorlanmıştır.

Araştırmacı: Peki bu soruda bunu yapmaya kalksak bilinmeyen yani “x” kullanarak nasıl yaparız?

Oğulcan: Iıı… Nasıl yaparız? Mesela… Bir öğrenci sayısına “x” deriz. Ama bu “x”… Öğrenci sayısına “x” denilmez. Şöyle deriz.

Araştırmacı: Neye “x” denir?

Oğulcan: Tişört sayısına “x” denir. Hımm… Tişört sayısına x denilebilir.

Araştırmacı: İstediğin şeye diyebilirsin. Şuna ya da buna demek zorunda değilsin. Birden fazla bilinmeyen de kullanabilirsin.

Oğulcan: Yaa… Iıı... Ya hocam benim bu soruda aklım direkt şeye gidiyor. 0 ile 75 arasına x derim. Ben bu soruyu tek bu şekilde çözerim. Başka bir çözme yöntemi aklıma gelmiyor. Yani…

Araştırmacı: Tişört sayısı ya da başka bir şeye “x” diyerek yapmam mı diyorsun?

Oğulcan: Yani zor olur. Yani belki zor olmaz ama aklıma gelmez.

…

Araştırmacı: “x” kullanarak yazamaz mıyız bir sayının yüzde 25 ini?

Oğulcan: Yazılır.

Araştırmacı: Dene bakalım bir ajansta.

(Ajans ve “0<12x<1200” yazar) 0 ile şey arası 100 tişört arası. Ondan sonra 100’den 160’a kadar %25 indirim yapılacakmış. Yüzde 25 indirimli hali…

Araştırmacı: İşte bunu nasıl ifade ederiz?

Oğulcan: Onu nasıl ifade ederiz? 12 TL’nin yüzde 25’ini alırım. Aynen. Onun işte toplam ücretini bulurum ben. Örnek veriyorum işte 110 tane tişört var. Bunun ben toplam fiyatını bulurum yüzde 25’ini çıkarıp toplam sonucu veririm. Bunu bu şekilde gösteremiyoruz herhalde. Yani şöyle büyüktür küçüktür kullanarak… (Sessizlik) Hocam bunu gösteremiyorum.

Probleme ilişkisel olarak bakmamış sonuca odaklanmayı tercih etmiş, matematikte yüzde kavramında sorun yaşamış ve bu yüzden de bir öneride bulunamadan tişört probleminin çözüm sürecini tamamlamıştır.

Katılımcıların nicelikler arasındaki ilişkiyi nasıl ifade ettiklerine görsel yardımıyla oluşan örüntü üzerinden odaklanan karo sorusuna Oğulcan, problemde geçen teras sözcüğünün kavramına odaklanarak başlamış ve kavramı anlamlandırdıktan sonra ilk üç şekli verilen terasların dördüncü ve beşinci olanının şeklinin verilmeden karo sayısının bulunamayacağını söyleyerek çözümüne başlamıştır.

Oğulcan: Tamam. 4. ve 5.teraslara ait resimlerle ilgili neler söyleyebilirsiniz? 4.ve 5.resim hangisi hocam burada?

Araştırmacı: İşte yok şuan.

Oğulcan: O zaman hiçbir şey diyemem. (Gülüyor) Yani resim sayısı vermemiş. 1. resim, 2. resim, 3. resim…

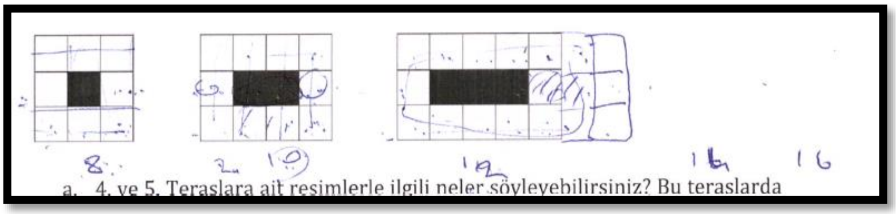
Araştırmacı: Vermesine gerek var mı onu? Burada 3 tane teras tasarladığını söylüyor.

Oğulcan: Belki buradan başlamıştır 1'e. (2.resmi göstererek)

Araştırmacı: Tamam oradan başlamış olsun.

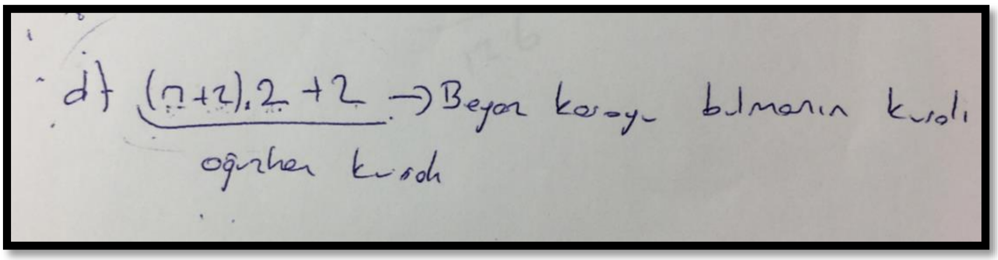
Oğulcan: 3 ama 4 ve 5 zaten yok yine.

Problemi anladığını düşündüğünde ilk adımı görsellerden faydalanarak üçüncü adımdaki şekli uzatmak ve dört-beşinci adımlardaki karo sayılarını hesaplamak olmuştur. Oluşturduğu görsel üzerinden dördüncü ve beşinci teraslardaki beyaz-siyah karo sayılarının kaçar tane olduğunu tek seferde hesaplayabilmiş bağlamın bir kurala yani örüntüye dayandığını ifade etmiştir. Örüntünün adımlarındaki artışlara odaklanarak siyah karo sayısıyla adım sayısının aynı olduğunu ifade etmiş ve kafasında hızlı bir biçimde oluşturduğu kuralla 60. teras için gerekli olan karo sayısını net bir biçimde tek seferde göstermiştir.




**Görsel 3.56.** *Oğulcan'ın karo probleminde görsellerden faydalanarak sonuç araması*

Oğulcan, genellemesini şekil üzerinde gördüğü satır-sütunlardaki karoların sayılarından faydalanarak görsel üzerinden ifade etmiş ve doğrulamalarını da yine görsellerden faydalanarak teker teker deneyerek yapmıştır. Problemde beyaz karo sayılarını bulmaya yarayacak bir kural sorulduğunda denklem kavramını çağırmış ve tek seferde görsellerden faydalanarak hızlı bir biçimde bulduğu kuralı yazmıştır.




**Görsel 3.57.** *Oğulcan'ın karo problemindeki beyaz karoyu gösterir genellemesi*

Kuralını, yani kendisinden istenen cebirsel genellemeyi oluştururken siyah karo sayısına "n" değişkenini bilinmeyen olarak atamış, siyah karo sayısıyla adım sayısı arasındaki ilişkiyi görsel artışlardan faydalanarak ifade etmiş ve beyaz karo sayılarını değişkeni bir örüntü genelleyici olarak kullanıp tüm karo sayılarına gitmeden doğrudan gösterebilmiştir.

Araştırmacı: “n+2”yi neden dedik?

Oğulcan: “n+2”yi şundan dedim. Hani şunun aynısını buraya indirdiğim zaman bir burada bir burada fazladan hani örüyor ya etrafını. Bir burada bir burada iki tane fazladan var. Sonra ben bunu iki ile çarptım burayı da ekledim sonra şuraları da ekledim. Oradan bu kuralı buldum. Oradan bu kural çıktı yani şöyle Oğulcan Kuralı. (“(n+2).2+2” yazan yerin altına “Oğulcan kuralı” yazar.) (Gülüşmeler) Böyle yaptım hocam.

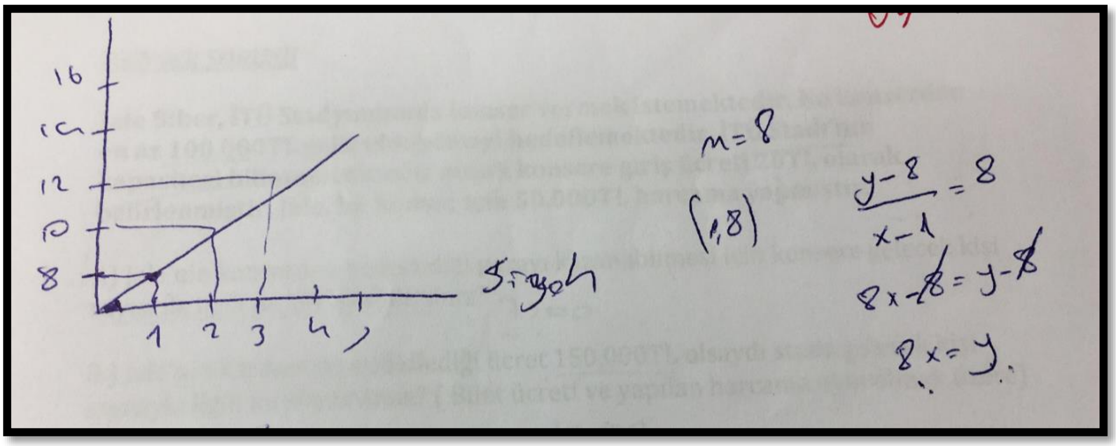
Yaptığı çözümü ve bulduğu ilişkiyi kendi cümleleriyle ifade ettikten sonra alternatif bir çözüm yolu sorulduğunda aklında tutmaya çalıştığı bilgileri dile getirip toplam sembolünden yapılabileceğini ancak bunu kendisinin pek iyi hatırlamadığından yapamayacağını söylemiştir. Bir başka çözüm yolu olarak ne düşünebileceği sorulduğunda ise grafik çizmeye yönelmiş ve yatay eksene siyah, düşey eksene beyaz karo sayılarını yerleştirip bir doğru grafiği oluşturmuştur. Yaptığı şeyin ne olduğu sorulduğunda da bir fonksiyon olduğunu belirtip yönlendirmeyle doğrunun denklemini yazmaya çalışmıştır.

Araştırmacı: Peki birleştir o grafiği sürdür.

Oğulcan: Bu sonsuza doğru artan bir grafik.((14,3) ü de çizip noktaları birleştirir.)

Araştırmacı: Ne bu? Artan bir sonsuza doğru giden bir ne?

Oğulcan: Grafik fonksiyon yani doğru.




**Görsel 3.58.** *Oğulcan’ın karo problemine alternatif çözüm önerisi*

Farklı bir kural bulup bulamayacağı ve bulabilirse de kurallarını karşılaştırması istendiğinde bu kez doğrudan toplam karo sayısından beyaz karo sayısına ulaşabileceği bir kural bulup kurallar arasında rahatlıkla karşılaştırmalar yapabilmiştir. Başlangıçta kuralının son kısmında “2” karo çıkarırken yönlendirmelerle soruya tekrar odaklandığında “n” kadar karo çıkartmayı uygun görmüştür.

Oğulcan: Hıı. Anladım. Şöyle derim hocam…(Sessizlik) Şöyle bir şey buldum. Şimdi mesela ikinci teras için konuşuyorum. n, 2. 2 artı 2, 4. Hani şuradan geldi bunlar yine. 4 çarpı 3 hani şuradan şöyle 12. Eksi 2 terasın siyah yeri 10.

Araştırmacı: 2 artı 2 nereden geldi?

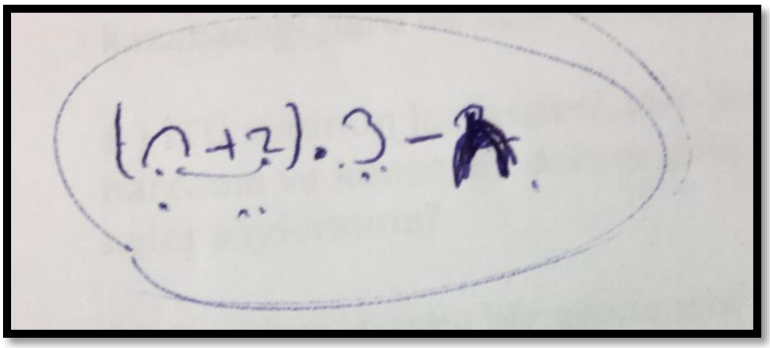
Oğulcan: Şu 2 ya mesela hocam.

Araştırmacı: Hı.

Oğulcan: Bir de 2 tane ekledim.

Araştırmacı: Ha yanları ekledin. Yaz onu, yine yazabilirsin bence.

Oğulcan: Yazayım. "n artı 2 çarpı 3". Çünkü hep ne kadar ileri giderse gitsin sonsuza doğru gideceğinden hep 3 olacak orası sabit olacağı için. Çarp 3 dedim, eksi 2 dedim. ("(n+2).3-2" yazar.)




**Görsel 3.59.** *Oğulcan'ın karo problemindeki ikinci genellemesi*

Katılımcıların değişken atayabilmesine, değişkenleri kullanırken kendini ifade edebilmesine ve problemdeki değişkenler arasındaki ilişkilere odaklanılan konser sorusunda Oğulcan, soruyu ilk okuyuşta anlayıp tekrar okuma gereği duymamış doğrudan kendisinden istenilenlere yönelmiştir.

Oğulcan: Jale Biber, İTÜ Stadyumunda konser vermek istemektedir. Bu konserden en az 100 bin TL gelir elde etmeyi hedeflemektedir. İTÜ Stadının kapasitesi bilinmemektedir ancak konsere giriş ücreti 20 TL olarak belirlenmiştir. Jale, bu konser için 50 bin TL harcama yapmıştır. Iıı bir kağıt alabilir miyim hocam? Şimdi ıı İTÜ Stadyumunda konser vermek istiyormuş. En az 100 bin TL gelir hedefliyormuş. Ama bu gelir hani gideri çıktığımız zamanki şeyi. İTÜ Stadı'nın kapasitesi bilinmemektedir ancak konsere giriş ücreti 20 TL imiş hani kişi başı 20 TL. Jale bu konserde 50 bin TL harcama yapmıştır. Yani 50 bin TL harcama yaptıysa toplam kazancı 150 bin TL olsun ki geliri 100 bin TL olsun. Bundan dolayı da yani 150 bin TL'lik bilet satması gerekiyor. 150 bin bölü 20 den kaç kişi gelmesi gerektiği en az oradan hesaplanabilir.

Probleme kendisi için önemli olan anahtar kelimeleri yazarak başlamış, hatasız ve tek seferde a şıkkından d şıkkına kadar kendisine sorulan soruları cevaplamıştır. Bazı şıklarda işlem dahi yapmamış ve orantısal olarak düşünüp cevaplarını vermiştir.

Araştırmacı: Ne kadar fazla kişi gelmesi gerekir mesela bul. Sen hani kapasite o kadar olmaz mı diyorsun? Olmazsa gelemez mi diyorsun?

Oğulcan: Yani o şuan aklıma geldi çünkü bunu burada boşuna vermemiştir illaki. Yani 150 bin bölü 10'dan o da 15 bin kişi gelmesi gerek yani en azından 2 katı yani zaten fiyat da yarıya düştü mantıken.

Problem boyunca tüm verilerin değişebileceğine bir şekilde ikna olmuş ancak kapasitenin değişiyor olması O'na mantıksız gelmiştir. Verdiği cevaplarda hep kapasiteyi sabitlemeye yöneldiği görülmüştür.

Oğulcan: Biletler 10 TL olsaydı Jale'nin kazanacağı para ve stada gelen kişi sayısıyla ilgili ne söyleyebilirsiniz? Biletler 10 TL olsaydı Jale'nin kazanacağı para ve stada gelen kişi sayısıyla ilgili ne söyleyebilirsiniz? (Hızlıca tekrar okur.) Hedeflenen para eğer 100 binse yine eğer ııı… Stada gelen kişi sayısıyla ilgili bir şey söylemem ki ben. Çünkü parayı tamam hedeflemiş ama hani stat kaç kişilik soruların içinde de geçerli stat kaç kişilik bilinmemektedir diyor. Biz burada dedik bunlar gelmesi gerekiyor ama…

Araştırmacı: Bir saniye... Stadın kapasitesi ne olursa ne olur? Bir de bu parayı kazanması için en az bu kadar insan gelmeli.

Oğulcan: Evet.

Araştırmacı: Yani daha fazla insan gelirse ne olur?

Oğulcan: Daha çok para kazanır.

Araştırmacı: Hedeflediğinden daha çok para kazanır. Burada daha çok insanın gelme ihtimali hangi şartta geçerli olabilir?

Oğulcan: Stadın daha büyük olması…

Araştırmacı: Stat daha alıyorsa daha fazla insan gelir.

Oğulcan: Evet.

…

Oğulcan: Biletler 10 TL olursa yine şey olur ya gelen sayısı çok olur ıı ama kazanacağı para az olur. O zaman sayının daha çok olması gerekiyor.

Düşündüklerini ifade ederken ve oluşturduğu ilişkileri yorumlarken orantı kavramını sıklıkla kullandığı ve ortaya koyduğu ilişkileri orantısal olarak ifade etmeye çalıştığı anlaşılmıştır.

Oğulcan: Evet. Bir de hani neyle ilgili var. Harcamayla ilgili var. Harcama artarsa hıı doğu orantı var, bilet artar.

Araştırmacı: Harcamayla ne arasında doğru orantı var?

Oğulcan: Bilet. Bilet de artar.

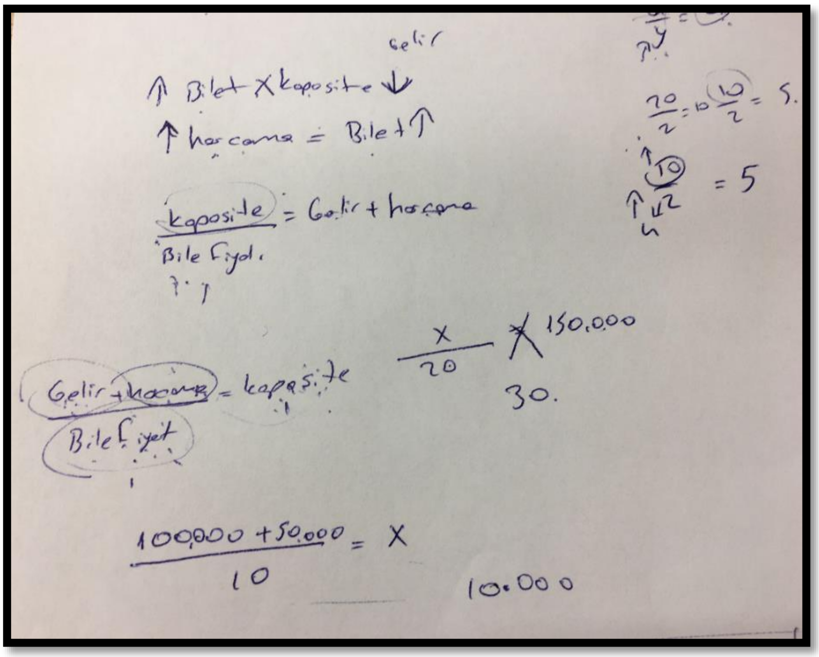
Araştırmacı: Biletin nesi o?

Oğulcan: Fiyatı. Yani bilet fiyatı ve harcama. Harcama çünkü ne kadar çok olursa diğerleri sabitse diye konuşuyorum…

Araştırmacı: Yani bu çokluklar arasında orantılar var.

Oğulcan: Evet orantılar var.

Oğulcan'ın ana dilini kullanarak yazdığı değişkenler arasındaki ilişki sorgulandığında kapasiteye eşitlediği bir ifade oluşturduğu, ilişkilerin yönü üzerine sorulan soruları da bu ilişki üzerinden cevaplamaya çalıştığı görülmüştür.




**Görsel 3.60.** *Oğulcan'ın konser problemindeki ilişkilere yönelik matematiksel ifadeleri*

Oğulcan'ın problem çözme stratejilerini gösterir tablo aşağıda sunulmuştur.

**Tablo 3.7.** *Oğulcan'ın problem çözme stratejileri*

| **Not Ortalaması:** 67,474 | | **Katılımcılar Arasındaki Not Ortalaması Sırası:** 4 | |
|---|---|---|---|
| Tahminde Bulunma | Grafik (Görsel) Oluşturma | Problemde İstenildiği İçin Tablo Yapma | Anlamlı Özel Örnek Kullanma |
| Değişken Kullanıp Genelleme Yapma | Görsellerden Yararlanıp Genelleme Yapma | Anahtar Kelimeleri Kullanma | Ana Dili Kullanarak Eşitlik Yazma |

Tablo 3.7'de görüldüğü gibi Oğulcan'ın görüşmeler boyunca tahminde bulunma, grafik (görsel) kullanma, problemde istendiği için tablo oluşturma, anlamlı özel örnekler kullanma, değişken kullanıp genelleme yapma, görsellerden yararlanıp genelleme yapma,

anahtar kelimeleri kullanma ve ana dilini kullanarak eşitlik yazma problem çözme stratejilerini kullandığı görülmüştür. Oğulcan, klinik görüşmelerde görsel üzerinden ilişkileri yorumlamaya çalışmış, değişken kullansa dahi değişkenler arasındaki ilişkileri yorumlamakta zorlanmış, sonuç odaklı düşünüp genellemelerini buna göre oluşturmuş ve kullandığı cebirsel ifadelerde sembolik manipülasyon yaparken zorluk yaşadığı görülmüştür.

### 3.1.8. Orhun'un problem çözme stratejilerine yönelik bulgular

Araştırmanın katılımcılarından Orhun, futbol probleminde ilk olarak soruyu virgül ve diğer noktalama işaretlerine dikkat etmeden okumuş diyagram ya da tablo kullanmadan sadece takımların aldığı puanları yazarak A takımının şampiyon olacağını belirtmiştir. Takımların birbirleriyle birer maç yaptığı kısmın üzerinde durmuş ve puanlamasının doğru olduğunu düşünerek A takımının şampiyon olacağını ifade etmiştir.

> Orhun: Hıı. Bakalım. Her biri diğeriyle yalnız bir kez oynuyor. Tamam. Yenilgi 3, ay galibiyet 3, yenilgiye 0, beraberliğe 1 puan. Tamam. A takımı E ve B'yi yeniyor. O zaman bir 6 puan alması lazım. C ile de berabere kaldığına göre 7. 7 puan aldı diyelim. Kaç takımla yapıyor? 4 takımla yapıyor. 1 takım boşta… 7 puan bir takım boşta.
>
> Araştırmacı: Bir takım boşta derken?
>
> Orhun: Yoo değil değil tamam. Hıı aynen. 7 puan aldı. B takımı C ve D'ye yeniliyor. Tamam. B'yi de A yenmişti. Tamam. O zaman B takımı birini yenmiş de olabilir, berabere de kalmış olabil… Ooo aynen. A takımı C ile berabere kalıyor. Tamam, 7 puan aldı. B takımı C ve D'ye yeniliyor. Tamam. A takımına yenilmişti. Tamam. O zaman sıfır. ("7" ve "0" yazar) D ve C'ye yeniliyor. Tamam, yenildi. E, D'yi yeniyor. 3 puan. B ve C ile berabere kalıyor 5 puan.(7 ve 0'ın yanına "5" yazar) A takımıyla ne yapmış? Yenilmiş o zaman 5 puan aldı. Birincisi ilk başta A takımı gibi görünebilir.
>
> Araştırmacı: İlk başta A takımı gibi ne o görünen?
>
> Orhun: A takımı şampiyon gibi görünüyor ama… Bir kurnazlık var mı ona bakıyorum… Hepsi yalnız bir kez oynamaktadır. Peki, diğer takımlarda diğer takımlarla…
>
> Araştırmacı: Ne demek mesela o?
>
> Orhun: Mesela A takımı, B, C, D ile yapıyor diyelim. B takımı tekrar B-A şeklinde olabilir mi?
>
> Araştırmacı: Olabilir mi? O yazıyor mu sence sorunun içinde?
>
> Orhun: Hayır.
>
> Araştırmacı: Açıklama kısmında ne demiş?
>
> Orhun: Her biri diğerlerinin her biriyle yalnız bir kez…
>
> Araştırmacı: Hıh. Ne demek o?
>
> Orhun: Yani olmaz.

Araştırmacı: Bir daha oynuyorlar mı birbirleriyle?

Orhun: Bir daha oynayamazlar, tamam. Öyleyse şampiyon takım A takımıdır.

Problemi ikinci kez kontrol ettiğinde bu kez takımların isimlerinin yanlarına eşittir yazarak alt alta sıralama yolunu seçmiş ancak yine de A takımının şampiyon olacağı fikrinden uzaklaşmamıştır.

Orhun: Bakalım. Şuraya yazayım da bir daha zaman kaybı olmasın. B eşittir ("A = 7" yazar) C ve D'ye yenilmiş. Tamam. Eksi altı. C, D. A'ya yenilmiş miydi? Evet, yenilmişti. Sıfır aldı. B takımı sıfır almış. Tamam. ("B = 0" yazar) C takımına bakalım. Önce D ye bakmamız gerek ki C'yi bulalım. D de C ye yeniliyor öyleyse C, 3 puan almış. O zaman C beş olur mu? ("C = 5" yazar) D, C ye yeniliyor. Bir dakika ama olmaz… Yanlış çözdük. (Oluşturduğu diyagramın üstüne çarpı atar)

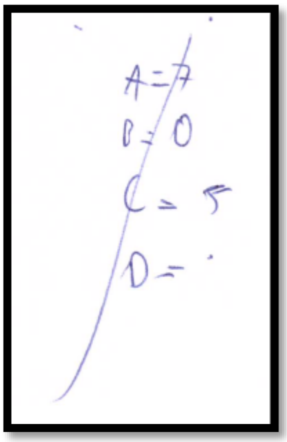
Araştırmacı: Nasıl yanlış çözdüğünü düşündün?

Orhun: … Bakalım… Yok, puanlamalarda yanlış var. A takımı yine galip olacak da sadece puanlamalarda yanlış yapmışım.

Araştırmacı: Hı. A takımı yine şampiyon olacak sadece puanlar hatalı diyorsun?

Orhun: Evet, puanlamaları yanlış yaptığımı düşünüyorum.

Orhun, takımlar arasındaki ilişkilere odaklanmadan sadece verilerden yola çıkarak yaptığı çözümünde A takımının 7, B takımının 0, C takımının ise 5 puan alacağını hesaplamış, D ve E takımlarını bu hesaba dahil etmemiştir.




**Görsel 3.61.** *Orhun'un futbol problemine yaklaşımı*

Orhun, problemde yenilen takımların "0" puan alacağının farkında olarak hareket etmiş ancak bilgilerini organize etmekte ve bulduğu verileri ifade etmekte zorlandığı görülmüştür.

Orhun: Yani yenilgi gibi düşündüm. Sıfır yani… Ne demiştik? A takımı D'ye yeniliyor ama… B'yi yeniyor tamam A takımından sıfır aldı. B takımı C ve D'ye de yeniliyor. Sıfır, sıfır tamam. E takımı D'yi yeniyor B ve C ile berabere kalıyor. Öyleyse B takımı 1 puan almıştır. Aynen öyle. (B = 1 yazar) Şimdi tekrar C takımına bakacağız. Böyle tek tek bakarsak bulunabilir. Soruyu her seferinde her takım için tekrar okuyup tekrar karşılaştırmak gerekiyor ki…

Araştırmacı: Bulabileyim diyorsun…

Orhun: Aynen öyle. Yoksa karışıyor sayılar.

Araştırmacı: Hı.

Orhun: Tamam. C ye bakalım. Yani iki takımı karşılaştırıp tek takıma odaklanmak gerekiyor. A takımı C ile berabere kalıyor tamam. C için A dan 1 aldı. B'ye bakalım. C'ye yeniliyor B takımı.

Araştırmacı: O, C mi?

Orhun: Evet. C.

Araştırmacı: Arada çizgi vardı sanki?

Orhun: Tabii çizgiler. (Gülüyor) Biraz karışık.

Problemi okurken tüm takımların maçlarını kontrol etmekte zorluk yaşamış ve bazı maçların sonuçlarını belirlerken verilere bakmak yerine tahmin etmeyi seçmiştir. Bu zorluğun da cümledeki virgül kullanımını kavrayamamasından kaynaklandığı görülmüş, gerekli yönlendirmeler yapıldığında doğrudan C takımının şampiyon olduğunu ifade etmiştir.

Orhun: Tamam. Altı, yedi. ("D = 7" yazar) Son takıma bakacağız… E ve B'yi yeniyor A'dan sıfır. Tamam. B takımı onlara yenildi. Ortalıkta E takımı yok. (Gülüyor) A takımından sıfır aldı E için. B takımı C ve D ye yeniliyor. Tamam. D, C'ye yeniliyor. E, D'yi yeniyor. Tamam. D için diyelim üç. Hı… Kaç takım var iki takım var? Eğer üçer puan alırlarsa 9 olur. Biri berabere kalırsa C galip olur o zaman en kritiği bu. A takımı E ve B'yi yeniyor sıfır. B takımı… C ve D'ye yeniliyor. O zaman B takımında E için berabere de olabilir. Galip de olabilir. B takımı... Bir dakika… B takımın olayı burada. B takımı C ve D'ye yeniliyor. Ama E takımına yenilmiyor…

Araştırmacı: Kim E takımına yenilmiyor?

Orhun: B takımı E takımına yenilmiyor sanırım.

Araştırmacı: Sanırım? O bilgiyi bilmiyor muyuz?

Orhun: Tamam da B takımı C ve D'ye yeniliyor demiş.

Araştırmacı: Hıhı. Sen şimdi ne bilgisini arıyorsun? Hangi iki takım arasındaki maçı arıyorsun?

Orhun: B takımıyla E takımı.

Araştırmacı: O yazıyor mu bu soruda?

Orhun: Bu soruda yazmıyor.

Araştırmacı: Yazmıyor mu?

Orhun: Hı. A takımı E… (İçinden okur) Yok yazmıyor.

Araştırmacı: E ve B arasında yazmıyor soruda?

Orhun: Aynen… Ya da ben bulamadım.

Araştırmacı: Orada ne diyor?

Orhun: E, D’yi yeniyor B ve C berabere kalıyor.

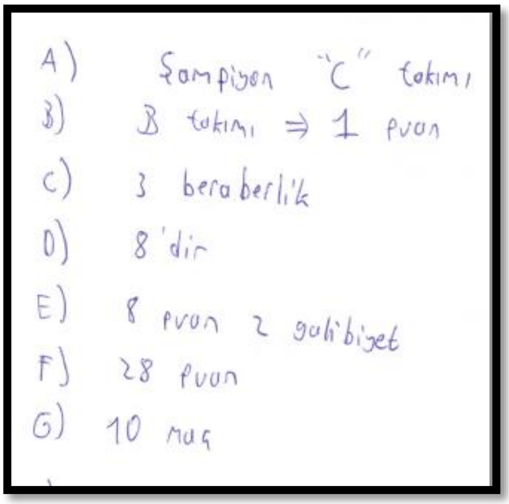
Araştırmacı: O cümleyi bir daha okur musun?

Orhun: E takımı D’yi yeniyor. B ve C berabere kalıyor.

Araştırmacı: B ve C mi berabere kalıyor?

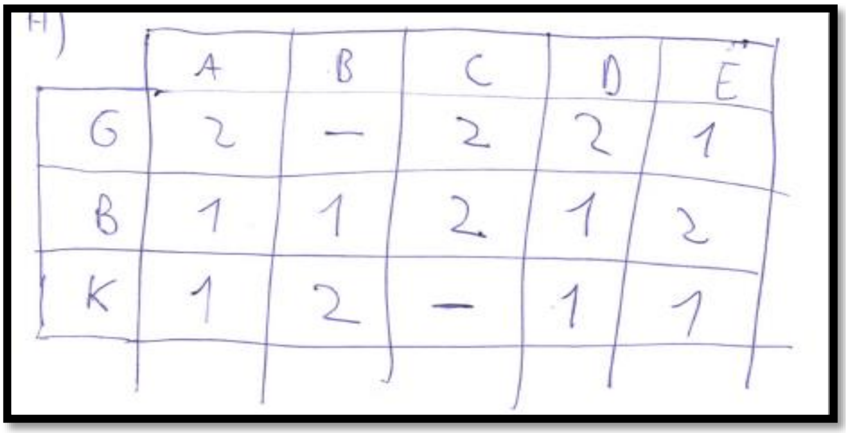
Orhun: Hııı. B ve C ile berabere kalıyor. Tabii Türkçe. O zaman 1 puan alır B’den. Ne dedik… A eşittir 0, B eşittir bir, D eşittir 3, C eşittir bir, üç dört, beş. Tamam. Bu sefer C takımı galip.

Orhun, Düzeltmelerinin ardından problemdeki tüm soruların cevaplarını hızlı bir biçimde vermiş, beraberlik veya maç sayılarını hesaplarken zorlanmamış ve hata yapmamıştır.




**Görsel 3.62.** *Orhun’un futbol problemindeki cevapları*

Orhun, problem boyunca farklı yöntemlere yönlendirilse de tablo yapmayı tercih etmemiş ve soruda kendisinden istendiği için oluşturduğu tablo futbolda kullanılan puan tablosundan farklı olmuştur. Tablosunu oluştururken yapılan maçlara tek tek bakmamış ve B takımının yenilgi sayısını eksik yazmıştır.




**Görsel 3.63.** *Orhun’un futbol problemindeki tablosu*

Fonksiyonun farklı tanım kümelerindeki görüntüler arasındaki ilişkileri içeren ve parçalı bir yapıya sahip olan tişört sorusunda Orhun, ilk okuyuşta problemi anladığını ifade etmiş ve ilk sorduğu soru problemde katılımcıların zorlandıkları kısım olan okulun kaç öğrenci bulundurduğu üzerine olmuştur.

Araştırmacı: Anladın mı soruyu?

Orhun: Soruyu anladım fakat şöyle bir durum var. Okulun boyutu ne kadar?

Problemin indirimlerini anlamlandırmaya çalışırken yüzde 25 ini alma kısmında zorlanmış ve yönlendirmelerle hareket edebilmiştir.

Araştırmacı: Basit bir mantık yine şey düşünelim. Iı bu indirim falan oluyor ya alışveriş merkezinde ya da herhangi bir yerde… Diyelim ki bir ürün var parfüm olsun 100 lira. Bazen yazıyor orada etiket fiyatının yüzde 25'i diye. 100 lira etiket fiyatı. Sen kasaya geldiğinde kaç para ödersin?

Orhun: … (Sessizlik) 12'de 100 ise 25'de?

Araştırmacı: Benim söylediğim şeyi anladın mı 100 liralık bir parfüm var.

Orhun: 75.

Araştırmacı: 75 lira ödersin. Yüzde 25'ini aldım?

Orhun: Sonra da toplamdan çıkıyor.

Araştırmacı: Peki şimdi ne yapıyorsun?

Orhun: … (Sessizlik) (12 de 100 ise "x" de 25 şeklinde bir orantı kurar ve 25 ile 12 çarpıp 100 e bölerek 2,9 bulur) 2,9.

Araştırmacı: 2,9 mu buldun 12'nin yüzde 25 ini?

Orhun: Evet.

Araştırmacı: Şöyle söyleyeyim. Bir sayının yüzde ellisi o sayının…

Orhun: Yarısı.

Araştırmacı: Demek ki bir sayının yüzde 25'i o sayının kaçta kaçıdır?

Dörtte biri. 12'nin dörtte biri 3. Ne yapar? 9. Tamam 9 oldu.

Problemde ilk olarak çiçek baskının her durumda karlı olduğunu tahmin etmiş ve tahminini ajans matbaa ile ilişki kurmadan sadece çiçek baskı matbaanın indirimine göre açıklamaya çalışmıştır.

Orhun: Burası 9. 10 dan 2 çıkarsak 8. 6, 5. Eee her türlü birinci olan karda ki.

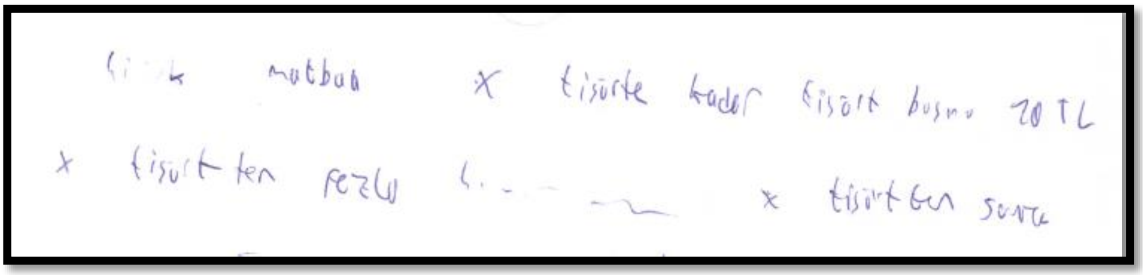
Araştırmacı: Nasıl vardın bu kanıya?

Orhun: Nasıl vardım? Şöyle vardım. Ajans matbaa 100 tişörte kadar 12 TL basım yapıyor. Eğer okulun sayısı az ise veya fuara katılacak kişinin sayısı… Çiçek baskı matbaaysa 75 tişörte kadar 12 TL'ye veriyor. Tamam. Buradan bir kar yaptı. Devam edelim. 75 tişörtten fazla olması halinde ilk tişörtten sonrakilerin tanesine 2 liralık indirim yapıyor. Yani öbüründe 100 tişörte kadar 12 iken öbüründe 75'ten sonraya 8'den veriyor 10'dan da vermiyor 8'den veriyor. Baya bir kar yaptık. Devam edelim. 100 ile 160 tane arasında ilk fiyattan hesaplanacak toplam ücretten yüzde 25 indirim yapıyor.

Orhun, matematiksel sayı veya sembol kullanımına yönlendirildiğinde 75 tişörte kadar olan tişörtlere “a” değişkenini vermeyi tercih etmiştir.

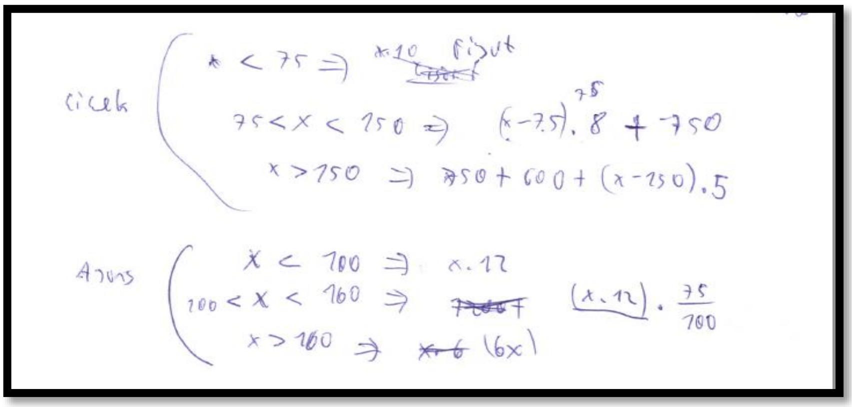
> Araştırmacı: Şunu soracağım mesela bu bahsettiğimiz değerleri tişört sayısı belli bir matematiksel ifadeyle gösterebilir miyiz matematiksel sembolle ifade edebilir miyiz biz?
>
> Orhun: Yani şu tişörtten şu tişörte kadar…
>
> Araştırmacı: Evet.
>
> Orhun: Tabii ki mesela “75 tişörte a” dedik diyelim. “a” dan sonra şu kadar olur…
>
> Araştırmacı: “a” dediğin şey ne artık orada?
>
> Orhun: 75 tişört mesela.
>
> Araştırmacı: “a” dediğin şey ne orada? Neyi temsil ediyor?
>
> Orhun: “a” dediğim şey oradaki bir sayıya kadar olan şeyi temsil ediyor.
>
> Araştırmacı: Yani bir bilinmeyen mi kullanıyorsun?
>
> Orhun: Evet.

Değişken kullanarak ilerleyebileceğini belirtmesinin ardından sınırları düşünerek soruyu nasıl yapabileceği sorulmuş, Orhun da ana dili kullanarak fonksiyonun parçalı yapısını ortaya koymaya çalışmıştır.



**Görsel 3. 64.** *Orhun’un tişört problemindeki değişken kullanımı*

Çeşitli yönlendirmelerle fonksiyonun tanım kümesini bölümlerine ayırabileceği ve bunları gösterebileceği Orhun’a ifade edilmiştir. Orhun’un da yönlendirmelerin ardından iki farklı matbaanın tanım kümelerinde oluşan farklı görüntü kümelerini matematiksel olarak ifade etmeye çalıştığı görülmüştür.



**Görsel 3.65.** *Orhun’un tişört problemindeki cebirsel ifadeleri*

Sorunun bu haliyle ve ilişki üzerinden katılımcının fonksiyon bilgisi sorgulanmış ancak fonksiyonel ilişki içerecek şekilde probleme yaklaşamadığı görülmüştür.

> Araştırmacı: Şimdi Orhun sen bir şey buldun ya böyle yazdın. Böyle belli sınır değerleri buldun. Bu sınır değerlerine göre fiyatlar buldun.
>
> Orhun: Evet.
>
> Araştırmacı: Bu neye benziyor? Matematikte hangi kavrama benziyor?
>
> Orhun: Bildiğimiz eşitsizl…
>
> Araştırmacı: Eşitsizlik içinde var.
>
> Orhun: Denklem mi?
>
> Araştırmacı: Böyle bir parçalı yapısı var bunun. Böyle parçalı yapısı olan bir şey var mı matematikte ilişkileri gösterdiğimiz? Birbirleriyle olan ilişleri gösterdiğimiz. Böyle parçalı bir yapıya sahip olduğunda belli başlı isimleri olan.
>
> Orhun: Mantık değil… Tam anlayamadım ama…
>
> Araştırmacı: Şöyle baştan alalım. Bir tişört sayısı var bir de ödenecek ücret var.
>
> Orhun: Tamam.
>
> Araştırmacı: Tişört sayısıyla ödenecek ücret arasında bir ilişki var mı?
>
> Orhun: Orantı gibi mi?
>
> Araştırmacı: Herhangi bir ilişki.
>
> Orhun: İlişki illa ki vardır.
>
> Araştırmacı: Peki bu ilişki varsa ve bu ilişkiyi biz böyle parçalı halde gösterebiliyorsak bu neye benziyor?
>
> Orhun: …
>
> Araştırmacı: Parçalı fonksiyonu hatırlıyor musun Orhun?
>
> Orhun: Fonksiyonları… Hatırlamıyorum.

Problemde tüm parçaları ifade edip sayıları belirlemiş olmasına rağmen idareye bir öneride bulunurken çiçek matbaanın daha küçük işleri yaptığı büyük öğrenci sayılarında ajans matbaanın kullanılabileceğini ifade etmiş, ilişkiler üzerine değil de her bir matbaanın tek başına sahip olduğu görüntü kümelerine odaklanmıştır. Son kısımda ise 160'tan sonrası için ajans matbaayı önerebileceğini söylemiştir.

> Araştırmacı: Peki şimdi bu iki parçalı fonksiyona bakarak hangi şartlarda hangi matbaayı önereceğini bulabilir misin? Denklemler belli. Her şey belli. Bu denklemleri açabilirsin de.
>
> Orhun: Ajans matbaa zaten başından beri belli. Büyük sayılarda kar yapıyor çünkü ortada bir belirli sayı olmuyor. Hep bir yüzdeli oynuyor.
>
> Araştırmacı: Hep mi yüzdeli oynuyor?
>
> Orhun: Hep oynamıyor. Ama yani büyük indirimler oluyor sayı arttığında yani adamlar büyük işle uğraşıyor tamam… Çiçek matbaa sayı küçük olursa yaparız diyorlar… İş küçük olsun bizim olsun demişler.
>
> Araştırmacı: Yani sen sayı büyük olduğunda ajans diyorsun öyle mi?

Orhun: Sayı büyük olduğunda tabii ki ajans. Sayı orta mevkide veya küçükse çiçek. Bu sayı kastımız 160 a kadar.

Karo sorusunda ise Orhun, problemi ilk okuduğunda ortada bir örüntü olduğunu saptamıştır.

Orhun: Dördüncü ve beşinci teraslarla ilgili neler söyleyebilirsiniz? Bu teraslarda kaç tane beyaz ve siyah karo olduğunu bulunuz. Hı.

Araştırmacı: Ne anladık?

Orhun: 4. ve 5. Burada örüntü var.

Araştırmacı: Örüntü var.

Örüntüyü ifade ederken görseller üzerinden karo sayılarının artışına odaklanmış, dört ve beşinci teraslar için ortaya çıkan siyah-beyaz karo sayılarını hızlı bir biçimde hesaplamıştır.

Orhun: Şöyle görüyorum. Siyah kısımlarda ilk terasta 1 tane, ikinci terasta 2 tane, üçüncü terasta 3 tane. E böyle gittiğini düşünürsek 4. ve 5.teraslarda 4 tane ve 5 tane siyah karo olacaktır. O zaman 9 tane siyah karo olduğunu söyleyebilirim. Sonra dışındaki beyaz karolara bakarsak 3, 6, 9 tane bunda var. 3, 6, 8, 10 tane bunda var. 4 artmış. 5, 10, 12. Bir dakika ya… 3, 6, 9… 4, 8, 10. Bir artmış. Beynim durdu ya.

Araştırmacı: Şey yapmana gerek yok rahat ol…

Orhun: Hıhı. 3, 6, 8. 4, 8, 10. İki artmış. 5, 10, 12. İkişer ikişer artmış. İkişer ikişer arttıysa bunda 14 tane. Yani dördüncüde 14 tane beyaz karo, beşincide ise 16 tane beyaz karo olacaktır. Siyah karo sayısına ne demiştik? 9 demiştik galiba.

Araştırmacı: Buraya a de, istersen oraya yaz.

Orhun: Tamam.4,5 aynen 9 tane siyah karo olacak.

Araştırmacı: Toplamda diyorsun.

Orhun: Hıhı, toplamda.

Araştırmacı: Ayrı ayrı da yazabilirsin. Dördüncüde bu kadar, beşincide bu kadar diye sen bilirsin.

Orhun: Tamam, öyle yapalım fark etmez. Dördüncü teras için 4 siyah, 14 de beyaz karo. Beşinci teras için 5 siyah, 2 fazlası 16 beyaz karo. Öyleyse toplamda dersek 9 siyah, 30 tane de beyaz karo olacaktır. (4.teras için 4 siyah 14 beyaz, altına 5.teras için 5 siyah 16 beyaz yazar. İkisinden birer ok çıkarıp birleştirir 9 siyah 30 beyaz karo yazar.)

Problemin bir örüntü içerdiğine ise artış miktarlarının hep sabit olmasından yola çıkarak karar verdiğini söylemiştir.

Araştırmacı: Ne yaptık? Örüntü olduğunu nasıl söyledin?

Orhun: Çünkü burada adım adım gitmiş. Adım adım gittiğini görürsek de hep bir şeyler eklenmiş. Sayılarına baktığımızda da hep belirli bir oranda eklenmiş. Yani belirli bir sayıda eklenmiş. Mesela 1 siyah karo için 2 tane beyaz karo eklenmiş fazladan gibi bir örüntü var.

Kendisine daha büyük karo sayılarını ifade etmek için nasıl bir yöntem kullanılması gerektiği sorulduğunda ise matematiksel sembollere ihtiyaç olduğunu orantısal artıştan etkilenerek bulduğunu belirtmiştir.

> Orhun: Tamam. B şıkkı. Daha büyük teraslardaki karo sayılarını bulmak için nasıl bir yol izlersiniz? Iıı ben bu soruyu okuduğumda aklıma direkt formül çıkartmak gelirdi.
>
> Araştırmacı: Ne gibi bir formül çıkartmak mesela? Nasıl bir formül?
>
> Orhun: Mesela ne diyebiliriz… Düşünüyorum… (Sessizlik) Nasıl bir yol… Birinci adımda 8 beyaz var, 1 siyah var… (1, 8 beyaz 10 beyaz; altına 1 siyah 2 siyah yazar.)
>
> Araştırmacı: Bu birinci adım…
>
> Orhun: … Üstüne… Her adımda fazladan 1 siyah ekleniyor, yani 2 siyah; 2 beyaz geliyor yani 10 beyaz. Her seferinde 3 fazla karo ekleniyor sanki.
>
> Araştırmacı: 3 karo, hı.
>
> Orhun: O zaman şey diyebiliriz. Adım başına artı 3 diyebiliriz. Başlangıçta 9 karoyla başlıyor. Sonraki ikinci adımda mesela artı 3 ekleniyor, 13 oluyor.

60. teras için oluşacak karo sayısını hesaplarken yöntemini oluşturmuş ancak değişken kullanmamıştır. İlk karoda bulduğu 9 sabit karo sayısından faydalanıp adım sayısının bir eksiğini her seferinde üç karo artışından yola çıkıp üç ile çarpmış buradan toplam karo sayısına ulaşmış ve siyah karoları toplamdan çıkartıp beyaz karoların sayısını 60. adımda ifade edebilmiştir.

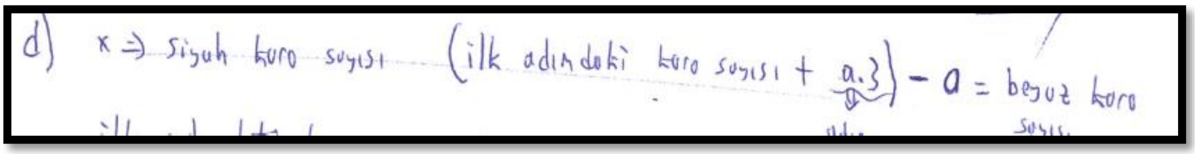

**Görsel 3.66.** *Orhun'un karo probleminde istenen beyaz karoyu hesaplaması*

Problemin d şıkkında kendisinden beyaz karo sayısını bulmaya yarayacak bir genelleme yapması istendiğinde ise değişken kullanmamış olsa da bir önceki şıkta 60. adımda zaten bir kural bulduğunu belirtmiş, bunu da "x" değişkeni kullanarak yapacağını ifade etmiştir.

> Araştırmacı: Peki o zaman d şıkkına bakarsak…
>
> Orhun: Yarayacak bir kural… Bunu zaten önceki soruda yapmıştım.
>
> Araştırmacı: Senin yazdığın kural mı o yaptığın şey?
>
> Orhun: Kural değil ama mantığı o.
>
> Araştırmacı: Peki nasıl onu kurallaştırabilirsin?
>
> Orhun: İşin içine "x" katacağız.

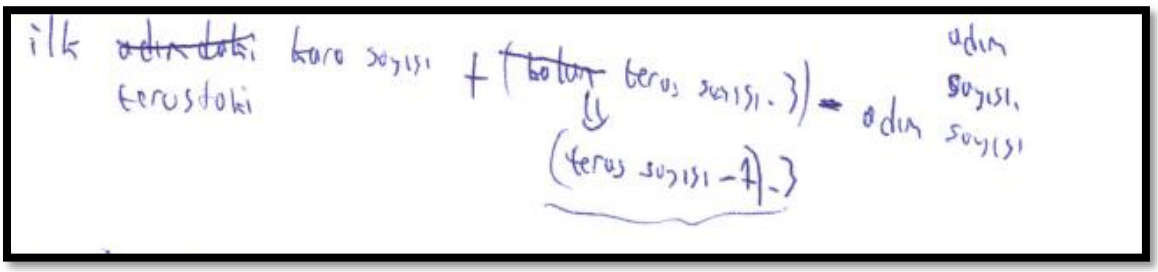
Kuralını oluştururken siyah karo sayılarına "x" değişkenini, adım sayısına "a" değişkenini atamış; ilk adımdaki karo sayısını 9 sabit sayısı ile göstermiş olmasına rağmen 9 rakamı yerine ana dilde ilk adımdaki karo sayısı yazmış ve bir kısmını değişken kullanarak bir kısmını ise Türkçe ifadelerle yazma yolunu tercih etmiştir. Kendisine sorulduğunda adım sayısıyla siyah karo sayısının aynı olduğunu ifade etmiş ancak ikisine farklı değişkenler kullanmıştır. Kuralda ise değişkenlerden sadece birini işlevsel kılmıştır. Kuralını ifade ederken bir önceki şıkta 60 karo üzerinden hesaplama yaparken kullandığı adım sayısından bir çıkarıp 3 ile çarpma işlemini ilk seferde uygulamamıştır.

> Orhun: Iıı… Ne diyebiliriz? Şöyle diyebiliriz. Siyah karo sayılarına “x” desek… (“x = siyah karo sayısı” yazar.) Şöyle desek olur mu? İlk adımdaki karo sayısı… Artı…
>
> Araştırmacı: Bunun karşılığını yazıyorsun yani öyle mi? 9 un karşılığını…
>
> Orhun: Hıhı. 9 un karşılığı ilk adımdaki karo sayısı. Ondan sonra kaç adım gitmişse. Mesela diyelim a adım kadar gitsin. “a” buradan adım sayısı olsun.
>
> Araştırmacı: Adım sayısı ile siyah karo sayısı arasında sence bir bağlantı var mı?
>
> Orhun: Tabii ki var. Çünkü adım sayısı kadar siyah karo oluyor. Mesela kaç diyelim… 10 adım gittik diyelim. O 100. adımda 100 tane siyah karo olacaktır. “a”ya adım sayısı dedik. Çarpı “a” çarpı her seferinde 3 artıyorsa çarpı 3 dememiz doğru olur. İlk adımdaki karo sayısı “+ a çarpı 3” dedik. Bunu parantez içinde yazdık. (“(ilk adımdaki karo sayısı + a.3”) yazar. “a.3” ün altına ok çıkarıp “adım sayısı” yazar.) Eksi, hım… O zaman yine a kadar çıkarırsak çünkü a yine adım sayısı olacağı için siyah karo sayısı da olacaktır. Eşittir beyaz karo sayısı. “(ilk adımdaki karo sayısı + a.3) – a = beyaz karo sayısı” yazar.)




**Görsel 3.67.** *Orhun’un karo problemindeki genellemesi*

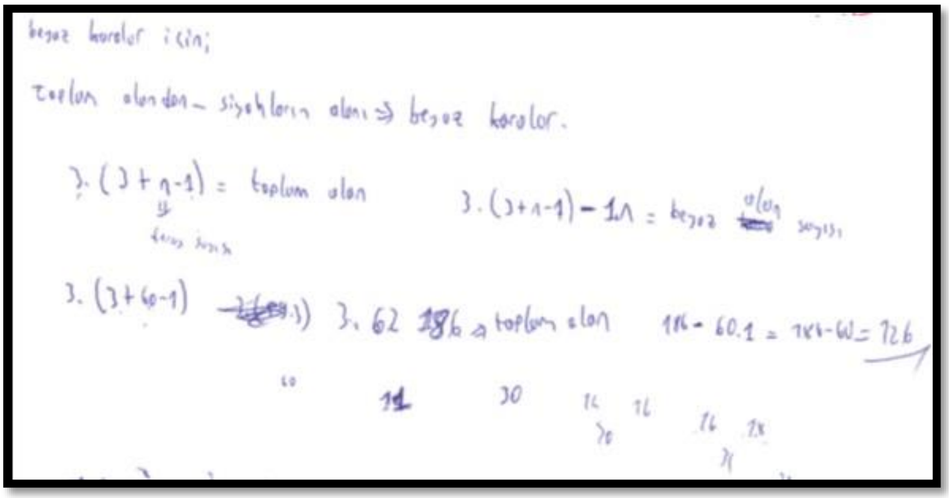
Orhun’un genellemesi sorgulandığında bu kez hata yaptığını düşündüğü kısımları değiştirip ilk yaptığı genellemeye benzer olarak ana dilde artış miktarlarını kullanarak bir genelleme daha yaptığı görülmüştür.




**Görsel 3.68.** *Orhun’un karo problemindeki ikinci genellemesi*

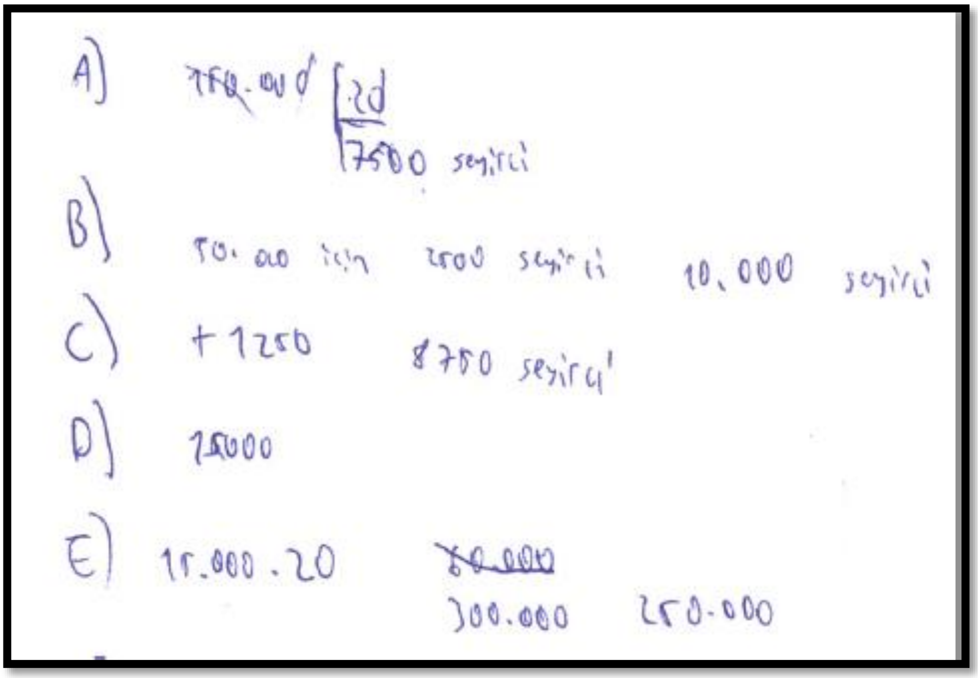
Yönlendirmeler sonucu daha farklı nasıl yapabileceği sorgulandığında yine görsel üzerinden bu kez artış miktarından değil de alan hesabından bir genelleme yoluna gidip dikey ve yatay karoları yine daha önce yaptığı gibi önce Türkçe ifadelerini yazmış, sonrasında da “n” değişkeni kullanıp genelleme yoluna gitmiştir. Bunu yaparken de yine önce tüm alanı bulmuş sonrasında bu alandan siyah karoları çıkartıp beyaz karoların kapladığı alana yönelmiştir.

Oluşturduğu cebirsel ifadede alandan faydalansa da kendisini doğrulayabilmek için sık sık o adımdaki bildiği beyaz karo sayılarını ve artış miktarlarını kullanmış, yaptığının doğruluğunu kontrol etmiştir.




**Görsel 3.69.** *Orhun’un karo problemindeki cebirsel ifadeleri*

Konser probleminde Orhun’un kendisinden sabit bir sonuç istenen tüm şıklara işlem yapmadan orantısal olarak düşünerek cevap verebildiği görülmüştür.




**Görsel 3.70.** *Orhun’un konser problemindeki cevapları*

Değişkenleri ataması ve kullanması gereken f şıkkına geldiğinde ise; ilk okuyuşta sorulmak isteneni anlamakta zorlanmış, verilerin hiçbirinin belli olmaması O'na farklı gelmiş ve bu durum Orhun'da bir şeyleri sabit tutma isteği uyandırmıştır.

Araştırmacı: Der diyorsun. Peki, f şıkkına bakalım.

Orhun: Okey. İTÜ Stadı'nın kapasitesi, Jale Biber'in hedeflediği gelir, konser için yaptığı harcama ve konsere ödenen giriş ücretiyle ilgili bir bağlantı kurmak isteseniz neler söylersiniz? Hı… (Sessizlik) Bu soruyu anlayamadım.

Araştırmacı: Bir daha oku. İçinden de okuyabilirsin.

Orhun: … (Sessizlik) Şöyle bir mantık kurabilirim. Aklıma başka bir şey gelmiyor. Stadyumdaki konser verecek… Kapasitesi bilinmiyor… Giriş ücreti belirli, yapılan harcama belirli, eğer…

Araştırmacı: Onlar burada belli mi?

Orhun: Efendim?

Araştırmacı: Onlar burada belli mi şuan? Hani bu soruda f şıkkı için söylüyorum. Diyorsun ya işte kapasite bilinmiyor ama giriş ücreti belli, şey belli… Burada belli mi? Yoksa değişirse ne yapacak diye mi soruyor? Hepsi değişebilir bunların. Kapasite belli değil, değişebilir.

Orhun: Hı, şöyle denilebilir. Kapasite değişirse hedeflenen gelir sabit diyelim. Giriş ücretleri değişecektir. Yani artacaktır veya azalacaktır duruma göre. Veya kapasite sabit diyelim. Hedeflenen gelir yüksek veya düşük. Buna göre yine giriş ücretleri değişecektir.

Araştırmacı: Hıhı.

Orhun: Başka ne diyebiliriz? Yapılan harcamaya göre tekrar giriş ücretleri artıp veya azalabilir. Kapasite ve kar sabit kalırsa… Başka bir şey… Belki de giriş ücretlerine göre yapacağı kar değişecektir.

Çoklukların birer sabit değil de değişen bir değer olduğunu yönlendirmelere rağmen anlayamadığı f şıkkının ardından g şıkkına geçilip başka bir yöntem sorulduğunda ise yine yönlendirmeler sonucu Orhun, birden fazla değişkeni ve ana dilini birlikte kullanıp cebirsel ifadeyi tek seferde elde etmeyi başarmıştır.

Araştırmacı: Nasıl bir yol olabilir başka?

Orhun: … (Sessizlik)

Araştırmacı: Yoldan kast ettiğim şey aynı zamanda şu. Yani sen öyle bir şey yapmalısın ki burada. Şimdi şunu bilen adam şunu söyler. Atıyorum bu şartları bilen adam. 100 bin lira kazanmak istediğini. 50 bin lira gideri olduğunu, ücretlerin 20 lira olduğunu bilen adam ama sen desen ki bugünkü konsere 10 bin kişi geldi. Adam direkt der ki o zaman bu kadar kar ettik. Değil mi?

Orhun: Hıhı.

Araştırmacı: Ama sen öyle bir şey söyleyebilirsin ki buna, şunu bile diyebilirsin. Stada bu kadar kişi geldi. Biz bilet fiyatlarını bu kadar belirledik. Iı harcamamız bu sefer şöyle oldu ve elimize bu kadar para geçti. Bunu anlayabiliyor musun söylediğim şeyi?

Orhun: Şimdi kurdum. “x, konsere gelen kişi sayısı” olsun. Iı değişken mi olsun giriş ücreti yoksa sabit mi olsun?

Araştırmacı: Değişken olabilir. Çünkü diyorum ya biz bugün fiyatları böyle belirledik…

Orhun: Tamam. “a” da giriş ücreti olsun. “y” de yapılan harcama olsun. Şimdi kişi sayısına “x” dedik. “x çarpı, giriş ücretine” “a” dedik. “x çarpı a” oldu. Bu toplam elde edilen para olacaktır. Toplam para dedik. (g şıkkına “x.20 – harcama” yanına da “(x.a)” yazar altına toplam para yazar.) Bunlardan yapılan harcamayı çıkartırsak yani y’yi çıkartırsak bize elde edilen kar kalacaktır. (“(x.a) – y = elde edilen kar” yazar.) Ben böyle düşünüyorum.

Araştırmacı: Elde edilen kara bir bilinmeyen vermeye gerek yok diyorsun yani?

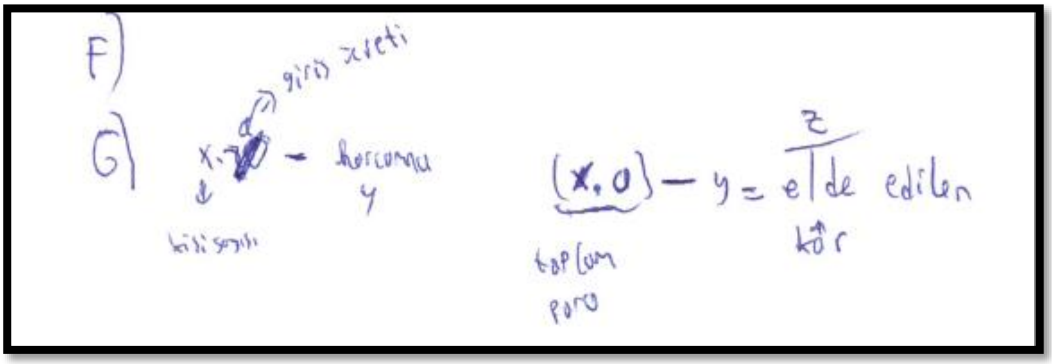
Orhun: Efendim?

Araştırmacı: Bilinmeyen vermeye gerek yok elde edilen kara?

Orhun: “z” olsun. Sizi mi kıracağım? (“elde edilen kar” yazan yerin üstüne “z” yazar.)

Araştırmacı: Nedir şimdi bu? Yani “x” ile “a”yı çarparak ne yapıyorsun?

Orhun: “x”e kişi sayısı dedim. “a”ya giriş ücreti dedim. İkisini çarpıp toplam elde edeceğim parayı bulurum ondan yapılan harcamayı çıkartırım ki ettiğim karı göreyim.




**Görsel 3.71.** *Orhun’un konser problemindeki genellemesi*

Orhun’un problem çözme stratejilerini gösterir tablo aşağıda sunulmuştur.

**Tablo 3.8.** *Orhun’un problem çözme stratejileri*

| **Not Ortalaması:** 57,380 | | **Katılımcılar Arasındaki Not Ortalaması Sırası:** 7 | |
|---|---|---|---|
| Tahminde Bulunma | Diyagram Oluşturma | Tablo Yapma | Ana Dili Kullanma |
| Birden Fazla Değişkeni Kullanarak Cebirsel Eşitlik Yazma | Tek Değişken Kullanıp Genelleme Yapma | Görsellerdeki Artıştan Faydalanıp Genelleme Yapma | |

Tablo 3.8’den anlaşılacağı gibi Orhun’un görüşmeler boyunca tahminde bulunma, diyagram oluşturma, tablo yapma, ana dili kullanma, birden fala değişken kullanarak cebirsel eşitlik yazma, tek değişkenle genelleme yapma ve görsellerdeki artıştan faydalanıp genelleme yapma problem çözme stratejilerini kullandığı görülmüştür. Orhun, yapılan görüşmelerde değişken kullanımında sorun yaşamamış, değişkenleri nasıl kullandığının farkında olacak hareket etmiş, birden fazla değişkeni de etiket ya da bilinmeyen olarak atayabilmiş ancak atadığı değişkenlerin arasındaki ilişkiyi sonuca gidebilmek için kullandığı görülmüştür. Problemlerin içeriğinde bulunan yüzde alma ya da matematiksel işlem becerilerinde zorlanmadığı gözlenmiş ancak kullandığı değişkenleri cebirsel ifadelerde sembolik manipülasyon yapma noktasında sorunlar yaşadığı görülmüştür.

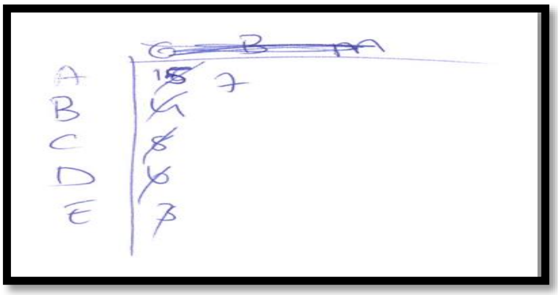
### 3.1.9. Habibe’nin problem çözme stratejilerine yönelik bulgular

Habibe yapılan iki görüşme ve dört problem boyunca genel anlamıyla soruyu ilk okuyuşunda zorluklar yaşamış ve alternatif yöntemlere her soruda yönelememiştir.

Katılımcıların bağlam bilgilerinin problem çözmede bir etkisinin olup olmadığına odaklanılan futbol sorusunda Habibe, virgüllere dikkat etmeden problemi hızlı bir şekilde aynı zamanda da birçok yeri tekrar ederek okuyup bir tahminde bulunarak çözümüne başlamıştır. Tahminini C takımı olarak yapmasının sebebini de C’nin hiç yenilmemesi olarak açıklamıştır.

> Araştırmacı: Birinci soru: Bu turnuvanın şampiyonu hangi takım olmuştur? Önce bir kez daha kendin de okuyabilirsin anladıysan ne anladığını da konuşabiliriz.
>
> Habibe: (Soruyu içinden okur) Şimdi… (Sessizlik) (İçinden tekrar etmeye devam ediyor) Şampiyon C mi?
>
> Araştırmacı: Nasıl anladın?
>
> Habibe: Çünkü… C ile ya berabere kalın… C, 1 kere yenil... Iı C hep yenmiş ya da berabere kalmış hiç yenilmemiş…
>
> Araştırmacı: Peki başka takım yok mu C den başka öyle hiç yenilmeyen?
>
> Habibe: Şimdi burada B yenilmiş. D yeniliyor. B, C, D yeniliyor. B ve C ile berabere kalıyor… Bana C gibi geldi ya.

Problemi bir kez daha okuduğunda ise yine virgül kullanımlarına dikkat etmeyerek galibiyet, beraberlik ve mağlubiyetlerin baş harflerinin olduğu bir tablo oluşturmuş ve bu tabloda okuduğu tüm maçları A takımı yapmış gibi düşünmüş sonucunda da A takımının 18 puanının olduğu bir sonuca varmıştır.



**Görsel 3.72.** *Habibe'nin futbol problemine ilk yaklaşımı*

Yaptıklarını anlatması istendiğinde ise, ilişkilere odaklanmadan problemdeki verileri tekrar okuyarak ve A'nın 18 değil 15 puan olması gerektiğini düşünerek tablosunu düzenlemiştir.

> Araştırmacı: Peki bir bak bakalım nasıl bakarsın bunlara?
>
> Habibe: Takımları… (Bir tablo oluşturmaya başlar ve satırlara alt alta A, B, C, D, E yazar) Galibiyet, mağlubiyet ve beraberlik olsa… A, B, C, D, E takımlarının her biri yalnız bir… A; E ve B'yi yeniyor. Yani 3, 6, 9, 10 puan aldı. 3, 6, 9, 10. D'ye yeniliyor. B, C, D yeniliyor. Yeniliyor… 10, 13, 16. Bunlar da 17, 18. Şöyle yapayım ben en iyisi. Toplam puan olsun 18 olsun. Iıı (Sütuna yazdığı "G", "B" ve "M"yi karalar) C ile berabere kalıyor… 3, 4, C, bir dört, yedi, sekiz. (Gülüyor) (İçinden defalarca okur) üç, altı… Üç. (A satırının yanına 18, B satırına 4, C satırına 6, E satırına 3 yazar)
>
> Araştırmacı: Ne bu bulduğun?
>
> Habibe: A'nın daha yüksek puan aldığını.
>
> Araştırmacı: Nasıl yaptın?
>
> Habibe: Iıı zaten başta da belirtmiş beraberliğe 1, galibiyete 3 puan veriliyor diye. Hani hangi takımları yendiklerine baktım. Yendi mi berabere mi kaldı mağlubiyete mi uğradı? Ona göre puanlarını yazdım.
>
> Araştırmacı: Mesela 18'i nasıl buldun?
>
> Habibe: Mesela… Diyor ki A; E ve B'yi yeniyor diyor. E'yi ve B'yi yendiğine göre oradan 6 puan geldi. C ile berabere kalıyor dedi 7 puan oldu. Yeniliyor, buradan puan gelmiyor. Buradan da puan gelmiyor. E ve D'yi yeniyormuş. 7 puan olmuştu. 10, 13 puan oldu. B ve C ile berabere kalıyormuş. 14,15 puan oldu. Yanlış hesaplamışım. (Yazdığı 18'i 15 olarak değiştirir) Öyle yani…

Yönlendirmelerle birlikte soruya bir kez daha odaklandığında virgüllere dikkat etmeden hatalı bir şekilde soruyu anladığını kendisi fark etmiş ancak hatasını oluşturduğu tabloda düzeltememiş bunun üzerine de diyagramını oluşturmaya başlamıştır. Oluşturduğu diyagramda takımların birbirleriyle oynadığı maçları göstermiş ve kazanan takımları halka içine almıştır.

> Araştırmacı: O birinciyi okudun ya A; E ve B'yi yeniyordan sonrası ne olmuş? A'dan sonraki noktayı bitirdin.
>
> Habibe: B, C ve D yeniliyor. Kime yenildikleri belli değil. D, C yeniliyor. A, D yeniyor. B, C ile berabere kalıyor. Buna göre… D, C'ye yeniliyor. Hıı… B, C ve D'ye yeniliyor. Soruyu yanlış okumuşum.

Araştırmacı: Yani?

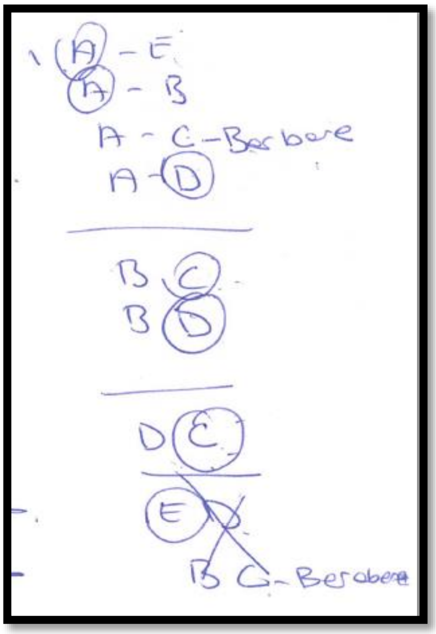
Habibe: Yani aslında hepsinde ben A'yı düşündüm ama aslında öyle değilmiş.

Araştırmacı: Nasılmış?

Habibe: B, C ve D'ye yeniliyormuş. D, C'ye yeniliyormuş. E, D'ye yeniyormuş. B ve C berabere kalıyormuş.

Araştırmacı: Yani?

Habibe: Yani tamamen farklı. (Gülüyor)




**Görsel 3.73.** *Habibe'nin futbol probleminde takımların birbirleriyle yaptıkları maçları gösterdiği diyagram*

Takımların birbirleriyle birer maç yapması gerektiği cümlesini okurken takımlar arasında oynanan maçlardaki ilişkileri anlamakta zorlanmış ve diyagramını da bu cümleye uygun olarak oluşturmadığı görülmüştür.

Araştırmacı: Peki şöyle bir bakalım. Kaç tane takım var?

Habibe: Beş.

Araştırmacı: Beş. Bu takımlar birbirleriyle kaç tane maç yapıyorlar?

Habibe: Bir tane yapıyor… Hayır, bir tane yapmıyorlar. Daha fazla olması lazım…

Araştırmacı: Mesela?

Habibe: Mesela A, dört tane yapmış. B kaç tane yapmış? Bir, iki üç tane yapmış B. Değişik değişik.

Problemi yeniden gözden geçirdiğinde hesaplamalarını yenilediği, bir yerde de hesaplama hatası yaptığı için A ve C'yi 7 şer puanla eşit hesapladığı ve bu yüzden de şampiyonun olamayacağını ifade ettiği görülmüştür. Bu durumda Habibe, şampiyonun belli olabilmesi için problemde yer almasa bile gollere bakılması gerektiğini söylemiştir.

Habibe: O zaman… E kaç tane maç yapmış oluyor? Şunları atarsak… Bir, iki, üç, dört tane. Bir, iki, üç, dört tane. Yani şunlar gidecek. (Kağıtta E D ve B C berabere yazdığı kısmın üstünü çizer) E kazanacak. Berabere olacak berabere olacak. (Kağıtta E D yazar, E'yi halka içine alır. E B ve altına da E C yazar yanlarına – yapar) O zaman… Üç, dört beş. E'nin 5 puanı oluyor. (Tekrar hesaplar) Evet, E'nin 5 puanı oluyor. D ye baksam… D de bir değişiklik yok. C, bir… Iı dört, yedi. C, 7 puan oldu. ("C = 8" yazdığı yeri "7" olarak değiştirir) B için bir… B 1 puan. Böyle oluyor en son.

Araştırmacı: Peki son durumda şampiyon kim?

Habibe: Şampiyon yok. (Gülüşmeler) A ve C şey.

Araştırmacı: Beraber mi şampiyon olurlar?

Habibe: Yani gollere bakılır. (Gülüşmeler)

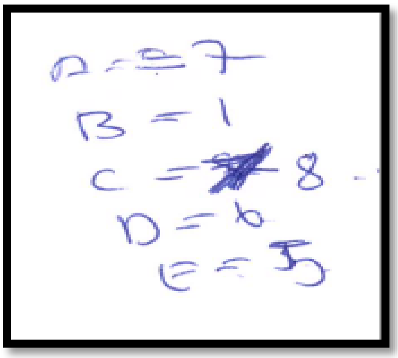
Araştırmacı: Eee peki biz burada biliyor muyuz golleri?

Habibe: Hayır.

Araştırmacı: Nasıl karar vereceğiz?

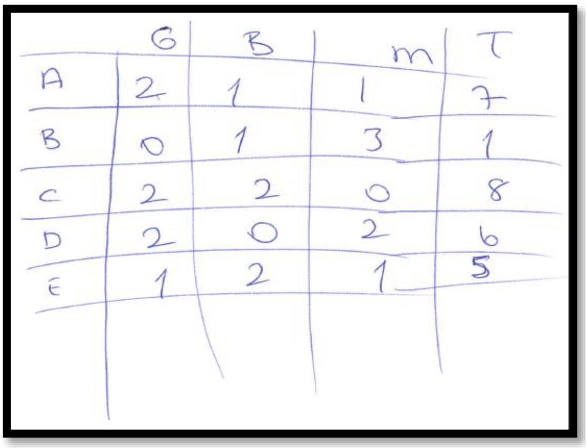
Habibe: Onun söylenmesi lazım herhalde.

Habibe, problemin devamında C'yi yanlış hesapladığını görmüş ve 7 puan olarak hesapladığı C'yi 8 olarak düzelterek şampiyonun C olması gerektiğini ifade etmiştir.




**Görsel 3.74.** *Habibe'nin futbol problemindeki puanlamaları*

Problemin içinde yer alan diğer sorulardan olan turnuvadaki toplam maç sayısı, berabere biten maç sayısı, tüm yapılan maçların sayısı ya da son sırayı alma ifadesinde Habibe sorun yaşamamış ve bunlara hızlı, net cevaplar verebilmiştir. Problemdeki tüm sorulanlara cevap verdikten sonra kendisinden bir tablo çizmesi istendiğinde ise rahatlıkla bir tablo oluşturabildiği gözlemlenmiştir.

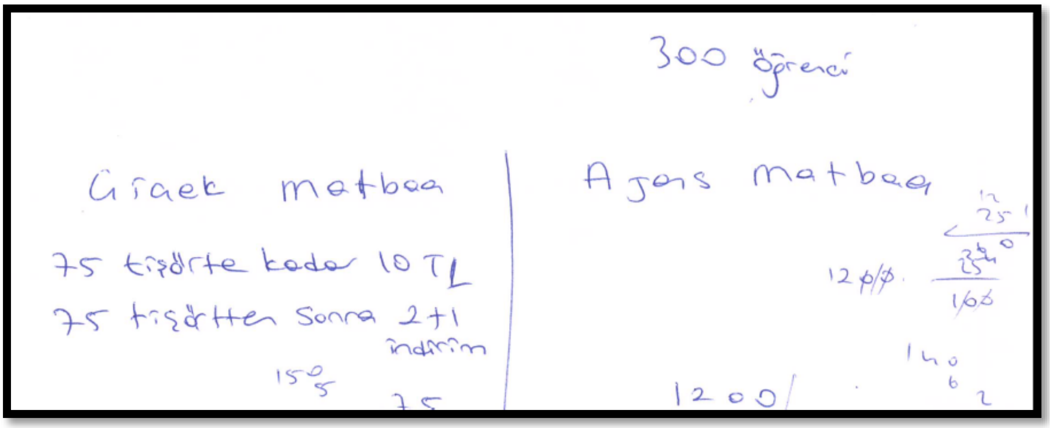



**Görsel 3.75.** *Habibe'nin futbol problemi tablosu*

Fonksiyonun parçalı yapısını içinde barındıran tişört sorusuna Habibe, ilk problemde olduğu gibi soruyu tam olarak okumadan kafasında anlamlandırmadan bir tahminde bulunarak başlamıştır.

> Habibe: Bir fuar var. Bu fuar için tişörtler basılacak ve iki tane matbaa var ve bu iki matbaanın ayrı ayrı şeyleri var… Iıı fiyatları var… Iıı… (Sessizlik) İndirimler var. Belli bir alımdan sonrası için indirimler var.
>
> Araştırmacı: Hıhı.
>
> Habibe: İkisi de aynı indirimi yapıyor sanırım.

İndirimlerin nasıl yapıldığına odaklanırken ilk olarak işine yarayacağını düşündüğü cümleleri ajans ve çiçek matbaalar için ayrı ayrı yazmaya başlamıştır.




**Görsel 3.76.** *Habibe'nin tişört probleminde sınır değerlere yaklaşımı*

Habibe, çiçek baskının yapmış olduğu indirimleri ilk seferde küçük bir yönlendirmeyle de olsa tam ve net olarak ifade edebilmiştir.

> Araştırmacı: Ne demek bu Habibe?
>
> Habibe: İndirim. Yani 75 tişörtten sonrası 8 TL'ye alınıyor yani… Kaça… 75'e… 75'den… İlk 75 tişörtü 10 TL'ye vermesi gerekiyormuş. Eğer 75'den fazla alınırsa 2 TL'lik indirim yapılacağını söylüyorlarmış. Yani 8 TL olur. 150 tişörtten sonrası... Sonra eğer 150'ye

ulaşırsa bu sayı 150'den sonrasını… 5 TL'lik indirim yapacağını söylemiş. Yani 150'den sonra 8 TL olmuştu…

Araştırmacı: Kaçtan sonra 8 olmuştu?

Habibe: 75'den sonra 8 olmuştu. 150'ye kadar. 150'den sonra 5 TL indirim yapacağını söylüyor ama ilk fiyata göre 5 TL'lik. 150 den sonra 5 TL ödeyecekler.

Araştırmacı: Hıhı. 150'ye kadar ne kadar ödüyorlar?

Habibe: 8 TL.

Araştırmacı: Hep mi 8 TL?

Habibe: …

Araştırmacı: Yani ilk 150 tişörtün tamamını 8 liraya mı alıyor?

Habibe: 150 tişörtün tamamını… (Sessizlik) (İçinden düşünür) İlk 75 tişörtten sonrakilerin tanesinde 2 TL'lik indirim yapılacağını söylüyor. Yani 75 tişört 10 TL'ye alındı, yani 75 tişörtle 150 tişört arasındakilere 8 TL verilmiş. Sonra 150'yi geçenlere 5 TL verilmiş. Yani farklı farklı fiyatlar…

Bir diğer matbaa olan ajans matbaanın indirimlerini ise tek seferde doğru olarak ifade etmiştir. Matematiksel konu veya kavramlarda hesaplamalar yaparken bu problemde sorun yaşamadığı görülmüştür.

Araştırmacı: Hı. Diğeri?

Habibe: Diğeri ajans matbaa 100 tişörtü 10 TL'ye basım yapacağını söylemiş 100 tişörte kadar. 100 ile 160 arasındaki yapılacak satışta toplam ücretten… Hı yüzde 25 indirim yapacağını söylemiş. 160 taneden fazla alım olursa da tişörtlerin tanesini sayıya bakılmaksızın 6 TL'den verecek. Şimdi 100 tişörte kadar 12 TL normal fiyatını veriyor. 100 ile 160 arasında… İlk 100 tişörte kadar 12 TL'yi vermişler. 100 ile 160 tişört arasında yapılacak fiyatta… Eğer 100 ü geçerse 160'a kadar olursa… O ilkönce aldığı 100… Nasıl açıklasam bilmiyorum… (Gülüyor) Şimdi 100 tane tişört aldı mesela o 100 tişört için her biri için 12 TL ödeyecek. Eğer 100 ü geçerse yani 100 ile 160 arasında olursa hani o 100 tişört için 12 TL vermişti ya onun toplam fiyatı hesaplanacak yüzde 25'i bulunacak. Yüzde 25'lik bir indirim yapılacak. 160 taneden fazla bir alım olur ise tanesini 6 TL'den verecekmiş.

Problemde Habibe, kendisini ifade ederken özel örnek kullanmamış ve sınır değerler üzerinden genellemelerle sembol, değişken kullanmadan tişörtlerin toplam fiyatları üzerinden matbaaları karşılaştırmaya çalışmıştır. Matbaaların sınır değerlerine odaklanmış öğrenci sayısı bilgisinin verilmemesi ise onu zorlayan kısım olmuştur. Ancak yine de fonksiyonun sınır değerlerini anlamaya çalışmış ve herhangi bir öğrenci sayısı varsayımıyla anlamlı özel örnek kullanarak hesaplama yapmamıştır.

Habibe: 75 tişörte kadar olan… Yani çiçek matbaa için 75 tişörte kadar olan fiyat. Sonrası 75 tişörtten sonra 2 TL'lik indirim yapılacakmış. 8 TL oluyor. 150 tişörte kadar oluyordu. Yani 75 çarpı 8 ("75x8" yazar ve 600 bulur) 600 oluyor. 75 ile 150 arası. Sonrakilerin ise fiyatı 5 TL'lik indirim yapılacağını söylemiş. Sonraki okul öğrenci sayısına ihtiyaç var burada. Öğrenci sayısını bilmemiz gerekli. Çünkü hani sonrakilere 5 TL'lik indirim yapılacağını söylüyor. Diğeri için… Iıı ajans 100 tişörte kadar 12 TL'ye basım yapacağını söylüyor. Yani ilk 100 tişört için 1200 TL alacak. Sonra… 100 ile 160 arasında alım olur ise ilk fiyattan hesaplanacak… 1200'ün yüzde 25'ini bulmamız gerekiyor. (12 ile 25 i çarpar ve 300 bulur) 300 lira yapıyor. Yüzde 25 indirim yapacağını… Yapılacak ilk fiyattan… Toplam ücretten… Hııı… 1200 liradan 300 liralık bir indirim yapılacak sanırım… Evet, ilk fiyattan 300 liralık bir indirim yapılacak. Yani 900 lira. Diğer kalan tişörtlerin de tanesini 6 liradan satacakmış.

Problem yönelik ilk önerisini aslında 150 tişört sınırına göre iki matbaada hesapladığı fiyatlara göre yapmış, matbaaların sınırlarını ortak belirlemeye çalışmış ancak oluşan diğer tanım ve görüntü kümelerine odaklanmadan bir öneride bulunduğu görülmüştür.

Habibe: Şuan çiçek matbaa daha ucuz gibi görünüyor.

Araştırmacı: Bunu nasıl anladın?

Habibe: Eğer bu çıkardığım fiyat doğruysa buradan… 1350 lira geliyor.

Araştırmacı: Ne o 1350 lira?

Habibe: Hani 150 tişörte kadar olan fiyat. Buradaysa 2100 lira geliyor. Bu da 160'a kadar olan fiyat… 160'a kadar olan tişörte kadar olan fiyat…

Araştırmacı: O yüzden çiçek baskı diyorsun.

Habibe: Çiçek daha ucuz gibi.

Matbaaları karşılaştırırken yaşadığı zorluk üzerine değişken kullanımına gitmiş ve "x" değişkenini öğrencilere atamış ancak devamında onu yorumlamakta zorlanmıştır.

Habibe: … Şurayı buluyorum bunda sıkıntı yok burayı da buluyorum. Bundan sonrasını bulamıyorum… Yani 75-150'yi biliyorum. 150 den sonrasını bilmiyorum. Iıı o zaman öğrenci sayısı "x" olsa, "x-150" onun için olsa…

Araştırmacı: İlk 75 tanesini ifade et.

Habibe: "75x" olur sanırım.

Araştırmacı: "75x"? Şimdi sen şuraya bir şey yazdın.

Habibe: 75 tişörte kadar 10 TL.

Araştırmacı: Biz bunu matematiksel olarak gösterebilir miyiz? Matematikte 75 tişörte kadar ne demek?

Habibe: Kadar… Aklıma bir şey gelmiyor.

Habibe için problemde öğrenci sayısının verilmemesi bir sorun olup bu sorun fonksiyonun farklı tanım kümesi elemanları hakkında yorum yapmasını güçleştirmiştir. Habibe, sonuç odaklı düşünerek mutlaka öğrenci sayısının bilinmesi gerektiğini ifade etmiştir.

Araştırmacı: Bir de idareye nasıl bir öneride bulunabiliriz biz?

Habibe: İdareye, hani şuan elimde olan şeylere bakarak öneride bulunabilirim.

Araştırmacı: Ne dersin mesela?

Habibe: … Öğrenci sayısını isterim. (Gülüyor)

İlk problemde olduğu gibi farklı bir yol ya da yöntemle nasıl yapabileceği sorgulandığında ise Habibe, farklı bir çözüm denemesine yapamayacağını belirtmiş bu durumun ilişkileri gösterememesine bağlı olarak oluştuğu düşünülmüştür.

Araştırmacı: Bu soruyu grafik çizerek, tablo yaparak ya da denklem kullanarak yapabilir miyiz herhangi biri ile?

Habibe: Denklem kullanarak yapılabilir. Grafikle… Tabloyla yapılabilir.

Araştırmacı: Hangisi senin daha rahatına gelir?

Habibe: Denklem.

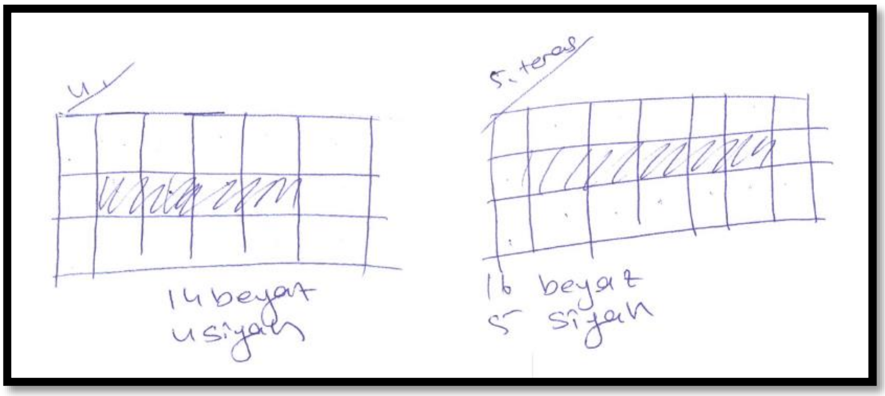
Araştırmacı: Denklem rahatına gelir. Öyle yapmak istersin yani?

Habibe: Yani denklem daha kolay olur sanırım.

Araştırmacı: Bunu denklem gibi yazabilir miyiz?

Habibe: Yazabiliriz ama ben yazamam.

Karo sorusunda Habibe, problemin içerisindeki örüntüyü fark etmiş, bunu kendi cümleleriyle ifade ederek çözümüne başlamıştır. Çözümünde ise sorulan ancak görseli verilmeyen dört ve beşinci terasları görsellerden faydalanıp üçüncü terası uzatarak oluşturmuş ve karo sayılarına sayarak kaçar tane olacağına karar vermiştir.




**Görsel 3.77.** *Habibe'nin karo probleminde görselleri kullanması*

Problemde, kendisine ne yaptığı sorulduğunda ise görsellerdeki artış miktarlarından sonuca gittiğini ifade etmiştir.

Habibe: Şimdi Enver Usta, teras tasarlamış. Bu terasın toprak olan kısımlarını siyahla sınırlarını ise beyazla göstermiş. Beyaz karoları kullanarak göstermiş. İlk soruda da 4 ve 5. teraslara ait resimlerle ilgili neler söyleyebilirsiniz diyor… Hı… 3, 4, 5. Demek ki diğeri 6 ya çıkacak. (İlk 3 karodaki satır sayılarını sayar.) 3, 4, 5, 6… Hep 3, 3 kalmış. Tamam. Iı ilkinde bir tane kare, ikincisinde 2 tane, o zaman bunda 4 tane kare kalacak. 1, 2, 3, 4… 4.teras olur. (6 satır3 sütun şeklinde 4.terası çizer ve orta-iç kısımdaki 4 kareyi siyaha boyar.) 5'te de aynı şekilde burada 6 taneydi diğerinde 7 tane olacak. 3, 4,5, 6, 7… Aynı şekilde 3 tane. 5 taneyi tarayacağız. (7 sütun, 3 satır çizer ve iç kısımdaki 5 siyah kareyi tarar.) Bu da 5.teras.

…

Habibe: Ne yaptım? Bu teraslar belirli bir örüntüyle gitmiş. İlkinde 2 tane, ikincisinde 4 tane, şeyler ama dikey sıralar… İlkinde 2 tane, ikincisinde 4 tane, üçüncüsünde 5 tane. Demek ki dördüncüsünde 6 tane olur diye düşündüm. 5'te de 7 tane. Yatay sütunlar ise üçer tane kalmış. Onları üçer tane çizdim. İlkinde bir tane boyanmış içi toprak olan kısım. İkincisinde iki tane, üçüncüsünde üç tane, dörtte dört tane, beşte de beş tane.

Problemde daha büyük terasların sorulduğu b şıkkı ile 60. terasın sorulduğu c şıkkını birlikte düşünebileceği bilgisi verilmiş ve Habibe dikey-yatay sütunların sayısından yola çıkıp önce 60. teras için ne olacağına karar vermeyi tercih etmiştir. Bu hesaplamasını da diğer katılımcılardan farklı olarak tüm karolardan beyazlara gelecek şekilde yapmıştır.

Habibe: Daha büyük teraslardaki karo sayılarını bulmak için nasıl bir yol izlersiniz? Hıh. Şöyle… 3, 4, 5, 6… Ya mesela daha büyük mesela birincisinde 3 tane, hani 2 fazlası, dörtte 6 tane 2 fazlası, dikey sütunlar daha büyük mesela atıyorum 50. sinde de yine 2 tane fazlası olur…

Araştırmacı: Bu arada c ve b'yi beraber düşünebilirsin örneklendirirken…

Habibe: 60. teras için gereken beyaz karo sayısını yarayacak bir yöntem bulabilir misiniz? Dediğim gibi dört tanede 6 tane çizmişse dikey sütun 60 tanede 62 tane dikey sütun çizilecek. Yine yatay sütunlar aynı şekilde kalacak.

…

Habibe: Sonra 4 te 4 tane siyah karalanmış, 5 te 5 tane, o zaman 60 da 60 siyah…

Araştırmacı: 60 da bir kere 60 siyah olur diyorsun…

Habibe: Evet. 60 siyah olur. Iıı ne kadar beyaz olur? (Sessizlik) 1, 2, 3, 4, 5, 6… kaç fazlası? 9 fazlası, 10 fazlası, 11 fazlası…

…

Araştırmacı: Nasıl bulduk?

Habibe: Onu şey şunları bulmuştum 62 tane dikey sütun 3 tane yatay sütun diye. Oradan hani onları çarparak toplam kare sayısını…

Araştırmacı: Ne ile neyi çarptın toplam kare sayısını bulmak için?

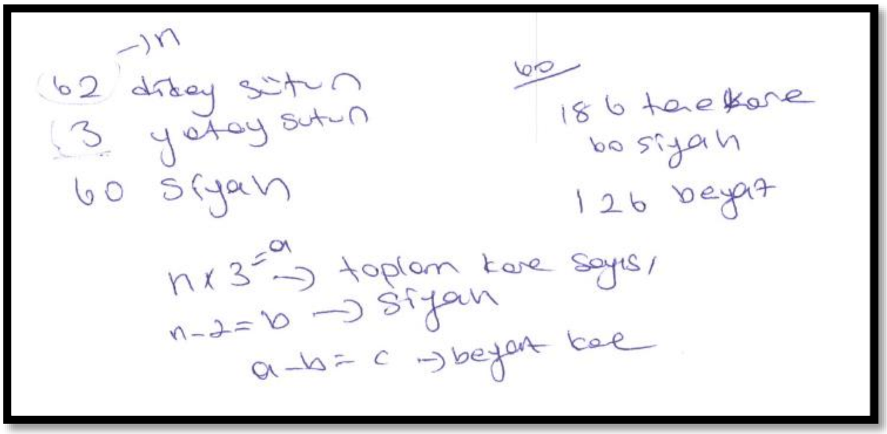
Habibe: 62 ile 3 ü.

Araştırmacı: 62 ile 3 ü çarpınca 186 yaptı.

Habibe: 186 çıktı. 60 tane siyah olduğunu zaten bulmuştum. 60 tane siyahsa 126 tane de beyaz.

Habibe, kendisine d şıkkında sorulan beyaz karo sayısını ifade edecek bir kuralı düşündüğünde üç yatay sütunun her seferinde tekrar edeceğini ifade etmiş, 60. adım için hesapladığı 62 dikey sütuna "n" değişkenini atamıştır. Dikey sütuna "n" değişkenini atadıktan sonra görselden faydalanıp onun 2 eksiğinin siyah karo sayısı olacağını ifade etmiştir. Dikey sütunu 3 ile çarpıp buna başka bir değişken olan “a”yı atamış, aynı zamanda dikey sütunun 2 eksiği olarak düşündüğü siyah karo sayısına b değişkenini atamış ve kendisinden istenen beyaz karo sayısını da “a” değişkeninden “b” değişkenini çıkartıp bir “c” değişkenine eşitleyip göstermiştir. Burada sabit değerleri kullanıp onlara değişken ataması bağımlı, bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiden çok sadece bir genelleme yapmaya odaklandığı sonucunu düşündürmüştür.

> Habibe: Bunu nasıl ifade ederim? (Sessizlik) Şöyle diyebilirim belki ama… Şimdi 3 yatay sütun zaten o kesin olacak. Buna n dersem mesela…
>
> Araştırmacı: 62’ye “n” dedin.
>
> Habibe: Aynen. “n çarpı 3” toplam kare sayısı olur… 62 ye “n” demiştim, 2 eksiği siyahsa “n-2” siyah olur. Mesela bunun sonucu atıyorum a olsun. “n-2” tane siyah olur. Bununki de atıyorum “b” olsun.
>
> Araştırmacı: “n-2”nin ne olduğunu yaz yine de…
>
> Habibe: Tamam. Siyah. (“n x 3 = a – toplam kare sayısı”, altına da “n – 2 = b siyah” yazar.) “a eksi b” de çıkan sonuç, “c” olsun, bu da beyaz sayısı olur. (“a – b = c beyaz kare” yazar.)




**Görsel 3.78.** *Habibe’nin karo problemindeki genellemesi*

Habibe’ye bu problemde kullanabileceği alternatif bir yol sorulduğunda ise diğer katılımcılardan farklı olarak toplam sembolüne yönelmiştir. Araştırmacının da birkaç yönlendirmesiyle toplam sembolüyle kendini ifade edebilmiştir. Yazdığı ifadenin tam olarak ne olduğu sorgulandığında da aslında o adıma kadar tüm beyaz karo sayılarının toplamını bulduğunu yönlendirmelerle de olsa gösterebilmiştir. İfadeleri sorgulandığında buradaki sayıların belirli bir örüntüye göre gittiği için bir aritmetik dizi olduğu sonucuna vardığı da görülmüştür. Toplam sembolünü kullanırken de eski bilgilerini geri çağırmaya çalışarak bir sonuç bulmaya çalıştığı gözlenmiştir.

> Araştırmacı: Acaba bu örüntüyü ifade edebileceğimiz başka bir yöntem ne olabilir?

Habibe: Hı… Hımm şey diye gidiyor. “n+2” diye mi gidiyor? 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10… (işlem yapar.) Şöyle eğer örüntü yani beyaz kare için mesela burada 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 tane var. Burada 10 tane var. Yani her adımda bir öncekinin 2 fazlası şeklinde gidiyor.

Araştırmacı: Beyaz karolar…

Habibe: Evet, beyazlar. Siyahlar da aynı şekilde bir fazlası, bir öncekinin bir fazlası şeklinde gidiyor. Bunu nasıl ifade edebilirim? Hım… Toplam sembolü kullanabilir miyim?

…

Habibe: “2k+6”, 8 oluyor. İkinci adımda 2 koyarsam 10 oluyor. 4, 8, 9, 10. Evet, “2k+6” oluyor. Yani şuraya tekrar yazarsam k eşittir (“1 den n e kadar 2k+6”yazar.) 1 koyduğum zaman 8, 2 de 10, 3 de 12. Evet, bu.

Araştırmacı: Peki şunu sorayım. Sigma ’da yazmayı denedin.

Habibe: Hıhı.

Araştırmacı: Toplam sembolünde buraya 2 koyduğunda sadece “k” yerine 2 koyup mu yazılıyor yoksa toplam sembolü olmasının ne anlamı vardı?

Habibe: Toplam sembolü olmasının… Şeydi toplam sembolünde her çıkan sonucu topluyorduk.

Araştırmacı: Yani “k eşittir 2” için nasıl yaparız mesela?

Habibe: Mesela “k eşittir 2” için 1 koyduğumda 8 çıkıyorsa 2 koyduğumda 10 çıkıyorsa toplam 18 oluyor. Yani bu da demek oluyor ki birinci ve ikinci terasta toplam 18 tane beyaz var.

Araştırmacı: Yani sen bunu sigmayla göstererek neyin cevabını vermiş oldun?

Habibe: Toplamda hani bir örüntü varsa bu örüntüde hani kaç tane beyaz var toplam?

Araştırmacı: Toplam mesela örneklendir.

Habibe: Mesela 5’e kadar gitse…

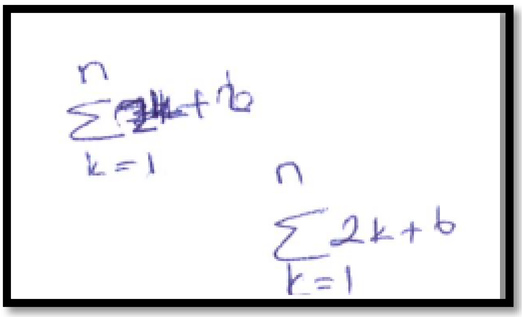
Araştırmacı: 5 tane teras yapmış bu adam.

Habibe: Bu 5 tane terastaki toplam beyaz sayısını bulmak için, toplam kaç tane beyaz var onu bulmak için kullanabiliriz.

…

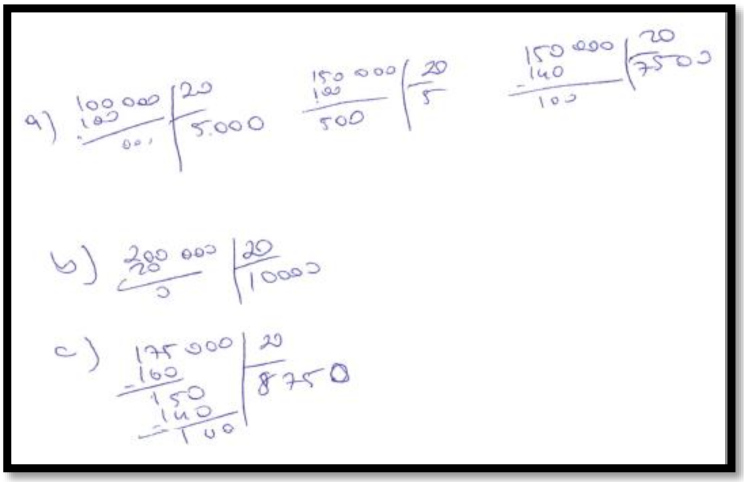
Araştırmacı: Ne demiştin?

Habibe: Belirli bir örüntüyle gittiği için aritmetik dizidir.




**Görsel 3.79.** *Habibe’nin karo problemine alternatif çözüm yolu*

Konser sorusunda ise Habibe'nin kendisinden doğrudan istenen sonuçları hızlı ve net bir biçimde cevapladığı görülmüştür.

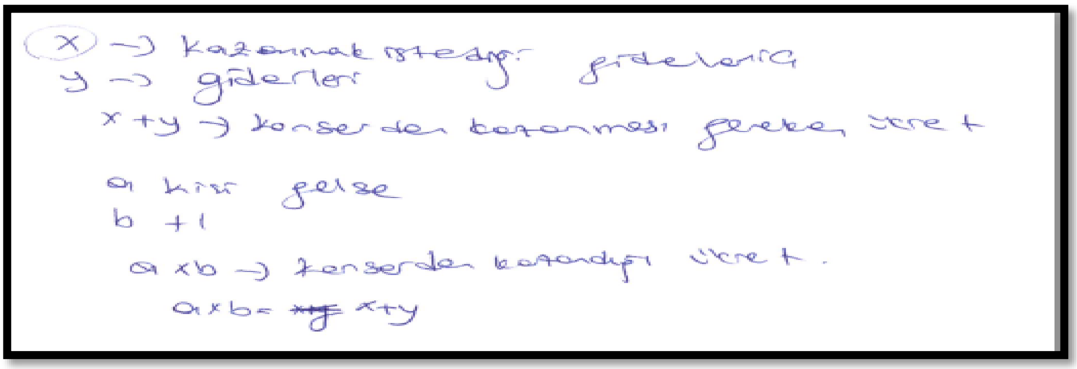


**Görsel 3.80.** *Habibe'nin konser problemindeki işlemleri*

f şıkkında sorulan stadın kapasitesi, hedeflenen gelir, yapılan harcama ve ödenen giriş ücretlerinin hepsinin aynı anda değişebileceğini düşünüp nasıl bir bağlantı kurarsınız sorusuna Habibe, birden fazla değişken kullanması gerektiğini düşünmüş ve değişken kullanımında tereddüt etmemiştir.

> Araştırmacı: Çünkü şimdi şöyle işlemleri yaparken diyorsun ki 100 bin TL kazanacağı para olursa bunu yaparım. Harcayacağı 50 bin değil de 75 bin TL olur diyorsa bunu yaparım. Bilet fiyatı 10 lira değil de 20lira olursa bunu yaparım diyorsun. Peki, hepsi değişirse? Hepsinin değişme ihtimali var. Bu değişimleri görebileceğimiz ne diyebilirsin? Bu değişimleri nasıl görebiliriz?
>
> Habibe: Yani birden fazla bilinmeyen vermem gerekir.
>
> Araştırmacı: Mesela?
>
> Habibe: Mesela atıyorum… "x" kazanmak istediği para olsun toplamda kendisinin gider hariç kazanmak istediği para…

Habibe, giderler hariç kazanmak istenen paraya "x" değişkenini, giderlerine "y" değişkenini, stada gelecek kişi sayısına "a" değişkenini, bilet fiyatlarına da "b" değişkenini atayarak aşağıdaki gibi bir eşitlik elde etmiştir.




**Görsel 3.81.** *Habibe'nin konser problemindeki değişken kullanımı*

Bu eşitliği yazarken de olmuş olanları ve olduktan sonra ortaya çıkacakları hesapladığını ifade etmiştir. Eşitliğin bir tarafında hedeflenen şartlar bir tarafında ise onun olması gerekenler bulunduğunu ifade edip hepsine bir değişken atadığını anlatmıştır.

> Araştırmacı: Peki şimdi bu yazdığın eşitliği açıkla bize ne yazdın Habibe?
>
> Habibe: Ben burada ne yazdım? Iı şöyle düşündüm. Iı istediği şeyleri ilk önce istediği şeyler için farklı bilinmeyenler verdim ve olan şeyler için farklı bilinmeyenler verdim. İstediği şey "x TL" para kazanmak istiyor giderler hariç. "y TL" sini giderlerine veriyor ve "x + y" kadar kazanması gerekiyor "x"i elde etmek için. Bu istediği şey gerçekte olansa "a" kişi geliyor ve biletlerin fiyatları "b" TL oluyor. "a çarpı b" de konserde kazandığı ücret. "x + y" kazanması gerekiyordu. "a çarpı b" de gerçekten konserden kazanmak istediği ücret. Eğer bunlar eşit olursa istediği parayı kazanabilir.

Habibe'nin problem çözme stratejilerini gösterir tablo aşağıda sunulmuştur.

**Tablo 3.9.** *Habibe'nin problem çözme stratejileri*

| **Not Ortalaması:** 70,268 | | **Katılımcılar Arasındaki Not Ortalaması Sırası:** 3 |
|---|---|---|
| Tahminde Bulunma | Sistematik Liste Yapma | Tablo Oluşturma |
| Rastgele Özel Örnekler Seçme | Birden Fazla Değişkeni Kullanarak Cebirsel Eşitlik Yazma | Görsellerdeki Artıştan Faydalanıp Genelleme Yapma |

Tablo 3.9'dan anlaşılacağı gibi Habibe'nin klinik görüşmelerde tahminde bulunma, sistematik liste yapma, tablo oluşturma, rastgele özel örnekler seçme, birden fala değişken kullanarak cebirsel eşitlik yazma, ve görsellerdeki artıştan faydalanıp genelleme yapma problem çözme stratejilerini kullandığı görülmüştür. Habibe, problem çözme sürecinde soruları ilk okuyuşta anlamakta zorlandığı anlar olmuş ve bu durumlarda

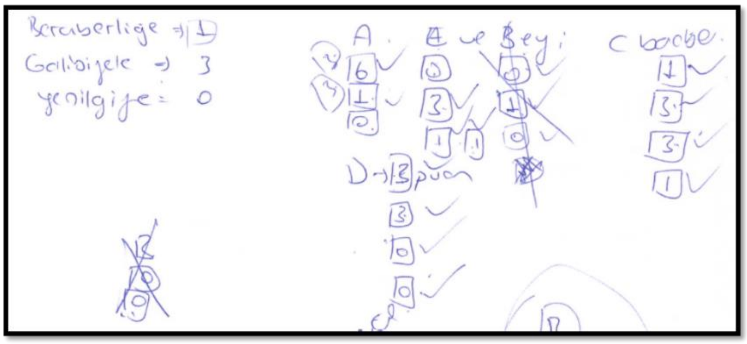
tahmin etme yoluna gittiği görülmüştür. Habibe'nin bir ya da birden fazla değişken kullanmakta sorun yaşamadığı, matematiksel işlem becerisinin onu çözüm sürecinde yavaşlatmadığı ve sembolik manipülasyonu zaman zaman yapabildiği görülmüştür. Habibe'nin birden fazla değişkeni ilişkileri kullanarak kendisini ifade edebilmek için değil sonucu gösterebilmek için kullandığı ve değişkenlerin birbirini nasıl etkilediğini ifade edemediği düşünülmüştür.

### 3.1.10. Şerife'nin problem çözme stratejilerine yönelik bulgular

Bağlam bilgisinin katılımcılarda bir etki yaratıp yaratmadığı üzerine odaklanılan futbol sorusunda Şerife, problemde kendisi için anahtar olabilecek kelimeleri yazarak soruyu anlamlandırmaya çalışmış ve puanların önemli olduğunu belirtip çözüm sürecine başlamıştır. Şerife, problemde kendi diyagramını oluştururken kazanan takımlara 3, beraberliklerde her iki takıma 1 ve yenilgiye uğrayan takımlara 0 puan vermiştir.

> Şerife: Hımm… Şimdi beraberliğe… Ama şey bir şey diyeceğim.
>
> Araştırmacı: Hı?
>
> Şerife: Puanlar önemli o zaman.
>
> …
>
> Şerife: Puanlarla… (Kağıda beraberliğe---1, altına galibiyete---3, onun altına da yenilgiye---0 yazar) Evet, başlayalım. A takımı E ve B'yi yeniyor. E'yi ve B'yi yendiğine göre 2 tane galibiyet aldı, yani 6 puanı var. C ile beraber kalıyor. C ile de beraber kalmış. O zaman 1 puan da oradan geldi. Aynı zamanda C'ye de 1 puan geldi. E ve B de 0 puan aldı. (Kağıda A E ve B'yi yazar, daha sonra devamına "C beraber" yazar. A'nın altına 6 ve 1, E ve B'nin altına 0, C'nin altına 1 yazar) D'yi de yeniyormuş. Yok, D'yi de yeniliyormuş. D, 3 puan aldı. ("D---3 puan" yazar) Bu da 0 puan aldı. (A'nın altına 0 ilave eder.) Tamam… B, C ve D ye yeniliyor. B takımı da C ve D'ye yeniliyormuş. D o zaman 3 puan daha aldı. Az önce D, A ile yapmıştı tamam. C ve D'ye, 3 puan daha aldı. Bu yine 0, 0. (D'nin altına 3 ilave eder, C'nin altına da 3 puan daha ekler ancak B'nin altına 1 tane 0 ekler) C ye yeniliyor. Bu sefer D, C ye yenilmiş. O zaman bu 0. C, 3 puan daha aldı. (D'nin altına 0, C'nin altına 3 ekler) E, D'yi yeniyor. E de D'yi yeniyormuş. O zaman bu 3 puan daha aldı, bu da 0 puan aldı. (E'nin altına 3, D'nin altına 0 ekler) B ve C ile beraber kalıyor. B, 1 puan aldı. C, 1 puan aldı. Aynı zamanda E, 1 puan daha aldı. Tamam. (B,C ve E'nin altına 1 puan daha ekler)

Yöntemini anlatması istendiğinde kendisini ifade ederken yazdığı A, B, C, D ve E takımlarına verdiği puanları önce dikdörtgen içerisine aldığı, sonrasında ise yanlarına tik koyduğu, anlatımına devam ederken de 'tamam', 'sonra', 'şimdi' gibi kendisini yönlendiren cümleler kullandığı görülmüştür.




**Görsel 3.82.** *Şerife'nin futbol problemindeki ilk yaklaşımı*

Yaptığı hesaplamanın ardından C takımının şampiyon olacağını ifade etmiş ve doğru cevabın ne olduğunu bilmek istemiştir. Şerife, kendisiyle yapılan görüşmelerde problemlerde başarılı olup olmadığını ve cevapların neler olduğunu ısrarla merak etmiştir.

> Şerife: Aynen. Bir dakika. B'ye 1 yazdıysam demek ki B 1. Tamam. A, B, C, D, E. E'de kaç puan almış? 5 puan almış. O zaman galip C.
>
> Araştırmacı: Şampiyon C olur diyorsun.
>
> Şerife: Evet. Cevap ne?
>
> …
>
> Şerife: Kaç aldım?
>
> Araştırmacı: Burada puanlama yok Şerife. Konuşmuştuk sadece şunları numaralandırıyorum. Birinci kağıdın şu, ikinci kağıdın şu diye.
>
> …
>
> Şerife: Bir dakika. Cevaplarını çok merak ettim.
>
> Araştırmacı: Cevaplarını konuştuk ya burada cevaplar önemli değil diye.
>
> Şerife: Hayır ya C takımı mı yeniyor?

Yaptığı yöntem sorgulandığında kendisini rahat ifade ettiği, kutucuk, tik koyma gibi sembolleri ilişkilerin farkında olarak ve yaptıklarını kontrol edebilmek için bilinçli kullandığı ortaya çıkmıştır.

> Araştırmacı: Peki. Bu kutucuklar içerisine aldın ya puanları?
>
> Şerife: Evet.
>
> Araştırmacı: Bütün takımların ııı kutucuk sayıları ne olmalı? Senin yaptığın yönteme göre söylüyorum.
>
> Şerife: 4.
>
> Araştırmacı: 4 neyi ifade ediyor yani orada?
>
> Şerife: Yapılan maçları.
>
> Araştırmacı: Bir takımın yaptığı maçı mı yoksa…
>
> Şerife: Birbirleriyle yaptıkları maç.

Yönteminde ne yaptığını ifade ederken yaptığı hatayı kendisinin fark ettiği ve çözümü aramaya başladığı görülmüştür.

Araştırmacı: Peki. Bir takım kaç maç yapmalı?

Şerife: 4.

Araştırmacı: Peki her takım 4 maç yapmış mı?

Şerife: B, 3 tane yapmış. Burada 2 tane 3 var. (“A” yazdığı “6”yı göstererek)

Araştırmacı: A, tamam diyorsun.

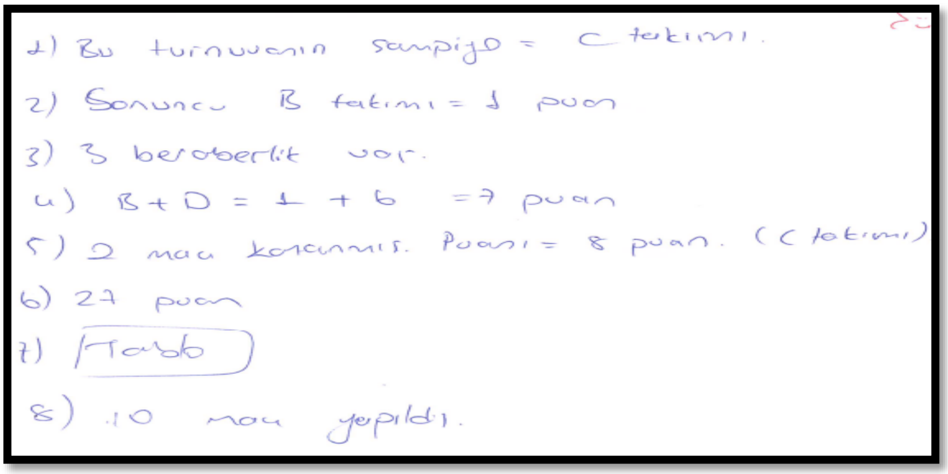
Şerife: Evet. E’de de 4 tane. B’de 1 tanesini eksik yazdım büyük ihtimalle.

Araştırmacı: Ne olabilir o?

Şerife: Bir daha deneyelim mi?

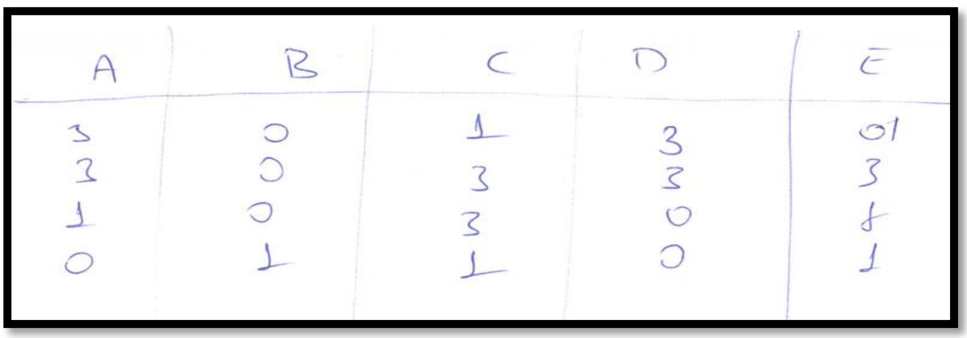
Araştırmacı: Deneyebilirsin.

Problemin devamında takımların puanlarını, toplam maç ve beraberlik sayılarını yorumlamakta zorlanmadığı ve tüm yanıtları hızlı bir biçimde tek seferde verdiği görülmüştür. Sadece son sırayı almak ifadesinde bir an duraksamış, sorgulamış ve probleme öyle devam etmiştir. Problemdeki cevaplarını tek seferde ve net bir biçimde verdiği gözlenmiştir.


1) Bu turnuvanın şampiyo = C takımı.
2) Sonuncu B takımı = 1 puan
3) 3 beraberlik var.
4) B + D = 1 + 6 = 7 puan
5) 2 maç kazanmış. Puanı = 8 puan. (C takımı)
6) 27 puan
7) Tablo
8) 10 maç yapıldı.

**Görsel 3.83.** *Şerife’nin futbol problemine verdiği cevaplar*

Farklı bir yöntemle nasıl düşüneceği sorulduğunda bir tablo çizmeye yönelmiş ve buradan hepsine bir bütün olarak bakabileceğini ifade etmiştir. Çizdiği tabloda problemde şimdiye kadar bulduğu sonuçları takımların altına kendine göre düzenleyerek yazdığı görülmüştür.



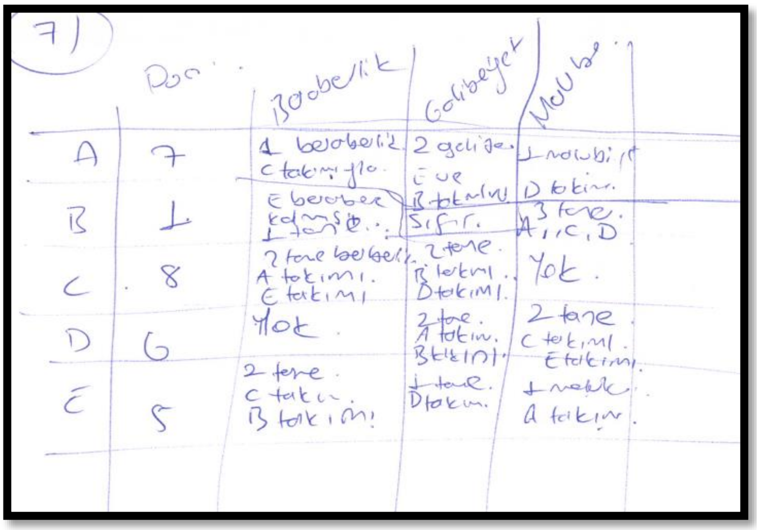
| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 1 | 3 | 01 |
| 3 | 0 | 3 | 3 | 3 |
| 1 | 0 | 3 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

**Görsel 3.84.** *Şerife’nin futbol problemindeki ilk tablosu*

Bu çözümünde de kendisini net bir biçimde ifade etmiş ve buradan sonra problemin alternatif bir yöntemle nasıl çözebileceği sorulduğunda aklına bilinmeyen kullanmak gelmiştir. Bir sorunun çözümünün bilinmeyen kullanılarak daha pratik hale getirip getirilemeyeceğine emin olmadığını ifade etmişt ve bu durum Şerife'nin matematiksel sayı ve sembolleri kullanarak çözüm yapmaya yatkın olduğunu düşündürmüştür.

> Araştırmacı: Matematikte yolu deyince, farklı yöntem deyince, matematikte de olmasına gerek yok. Genel olarak aklına ne geliyor nasıl yapılır soru?
>
> Şerife: Daha pratik şekli geliyor aklıma. Mesela uzun yoldansa şak diye söylemek geliyor. (Parmağını şaklatır) Bence o da kişiye göre değişir yani ben mesela bunu yazarak çözerim. Başkası kafasından şak diye gözünde denk getirir çözer. Diğeri de "x, y, z" diyerek çözer.
>
> Araştırmacı: "x, y, z" demek ne demek?
>
> Şerife: Yani bu soru için konuşursak… "x, y, z" yani bilinmeyen vererek çözer. Bu soruda böyle bir şey… Mümkün mü bilemiyorum.

Problemin soruları içerisinde tablo yapması istendiğinde ise ayrıntılarıyla tüm problemde yaptıklarını tek bir tablonun içerisine sığdırmış, hangi takımın hangi takımı yendiğini, kimin kiminle maç yaptığını kaçar puan aldığını gösterir bir tablo çizimine gitmiştir.



**Görsel 3.85.** *Şerife'nin futbol problemindeki tablosu ve doğrulama yöntemi*

Problemde kaç maç yapılmıştır sorusuna ise takımların yaptığı maçları tek tek saymadan ilişkileri düşünüp toplam maç sayısı üzerinden akıl yürüterek bir cevap vermiş, diğer şıklardaki soruların cevaplarını da hızlıca tamamlayıp çözümünü bitirmiştir.

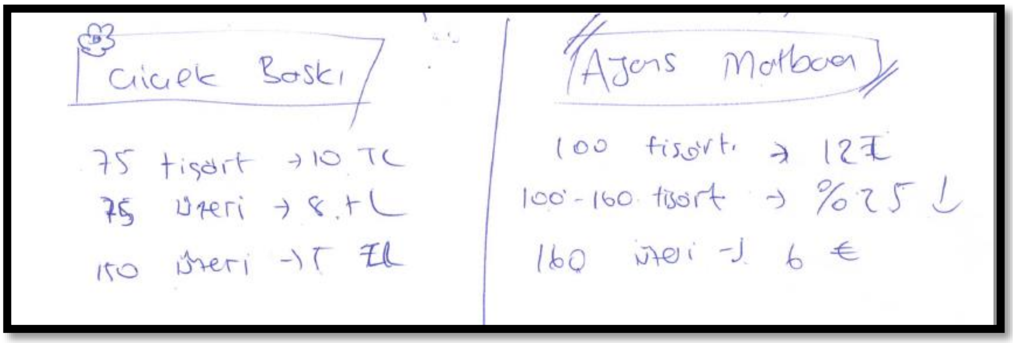
> Araştırmacı: Iı... Turnuvada toplam kaç maç yapılmıştır?
>
> Şerife: Çok güzel soru… (Gülüyor) Şimdi şöyle düşünelim. Hıh. 2, 3 ya da şimdi… 2 çift 1 maç yapıyorsa eğer bunlar da toplam 4, 8, 12, 16, 20. 10 maç yapılır. Şimdi 1 maç için 2

takım lazım. E burada toplam saydığımızda 20 tane maç görünüyor. Eee 2 tanesi 1 maç yapacaksa... 10 tane maç dedim.

Parçalı fonksiyon yapısına sahip tişört sorusunda Şerife, problemi okullarında daha önce gerçekleştirilen bir organizasyona benzeterek anlamlandırmıştır.

Şerife: Tamam. İlçede bir matematik fuarı için hazırlık yapılıyor. Okulun idarecileri fuar için öğrencilere tişört basılmasını uygun görmüşlerdir. TÜBİTAK. (Gülüyor)

Problemi ikinci kez okurken kendisi için önemli olduğunu düşündüğü yerleri not ederek okumasını tamamlamış ve bunun ardından da çiçek matbaanın daha avantajlı olduğuna yönelik bir tahminde bulunmuştur.




**Görsel 3.86.** *Şerife'nin tişört problemine ilk yaklaşımı*

Bu tahminini ise çiçeklerin güzel olmasına dayandırmıştır. Gösterimlerinden problemlerdeki indirimlerin hemen hemen hepsini anlamlandırabildiği ve sorunun parçalı yapısını aklında şekillendirebildiği görülmüştür. 100 tişörtün üzerindeki indirimi anlayabilmek için iki matbaanın sınır değerleri arasında kalan 110 tişörtü özel olarak seçmiş ve indirimi ona uygulayacağını belirtmiştir.

Çiçek baskı… (Kağıda çiçek baskı yazar çiçek resmi de çizer) Bir tane de çiçek koyayım. Tamam… Şimdi 75 tişörte kadar tişört basımına 10 TL. ("75 tişört ---10 TL" yazar) Çok sinir oldum bu tişört şeysine hocam. 10 TL. 75 üzeri… 8 TL imiş. ("75 üzeri --- 8 TL" yazar) Sonra ne diyordu? 100 üzeri miydi? 150 den fazla alım olması halinde… 150 üzeri… 5 TL ye verecekmiş. ("150 üzeri --- 5TL" yazar)Tamam. Tamam, ajans matbaa… (Ajans matbaa yazar kağıdı ortadan ikiye ayırır) Bunun bir işareti yok. 100 TL'den 100 tişört 12 TL demiş. ("100 tişört --- 12 TL" yazar) 100 ile 160 arası… 160 tişört… 160'dan yüzde 25… Yani şimdi diyor ki 100 tişörtün üstünde mesela 110 alacağım 12 TL den hesaplayacağım buna yüzde 25 indirim uygulayacağım diyor. Yüzde 25 indirim yazalım biz buna. (100-160 tişört --- %25 ↓ yazar) 160 dan fazla alım olursa ise tanesini 6 TL'ye satacakmış. Bence çiçek daha mantıklı neyse… (160 üzeri --- 6 TL yazar)

…

Araştırmacı: Niye öyle düşündün?

Şerife: Bir dakika. Okulda fuara katılacak… Çünkü çiçekler güzeldir…

Problemi anlamasını kolaylaştıracak diyagramı oluşturduktan sonra sınır değerleri anlamlandırabileceği özel örnekler seçip bunları bir tablo üzerinde göstermeye çalışmıştır.

> Şerife: … Tamam ya 50'den başlayalım biz. 50 öğrenci var. Tamam mı? Şimdi çiçek için deneyelim. "A" diyelim çiçeğe. Şimdi 50 öğrenci olacaksa eğer 10 TL'den 50 TL olacak. Ama şimdi ajansa bakarsak ona da "B" dersek 12 den 60 mı oluyor? 60 mı oluyor hocam?
>
> Araştırmacı: 50 öğrenci 10 liradan…
>
> Şerife: 500, 600 mü oluyor? Tamam. Yani A burada daha avantajlı geliyor. (Kağıda 50 öğrenci A = 500 TL, B = 600 TL yazar)
>
> Araştırmacı: Dedin.
>
> Şerife: Evet. Sonra 100 öğrenci olursa "A takımında" ne olacak bu sefer? 8 TL üzerinden olacak. 800, "A". Şimdi 100-160 arası yüzde 25 i gidecek, 120'nin yüzde 25 i… Yok 100,100 1000. 1000 in yüzde 25 ini alacağız değil mi? (100 öğrenci, "A = 800 TL" yazar)
>
> Araştırmacı: 10 lira mı bunun tanesi?
>
> Şerife: 12 idi değil mi? Bekleyin o zaman… Çok mu abarttım? Yok, 100 olacak değil mi hocam? Aynen. Tamam. 1200 ün yüzde 25'ini alacağız. Bunlar gitti. 12 ile 25'i çarpalım. (12 x 25 işlemini yapar ve sonucu 300 bulur) 300.

Anlatımından ve görselinden hesapladığı özel örneklere bakılarak ajans matbaanın indirimini anlayabildiği ancak çiçek matbaanın ilk 75 tişörtten sonraki kısmını ifade ederken hata yaptığı görülmüştür. Yönlendirme üzerine problemi tekrar okumuş, hatasını kendisi fark etmiş ve düzeltme yoluna gitmiştir.


**Görsel 3.87.** *Şerife'nin tişört probleminde seçtiği özel değerleri hesaplaması*

Seçtiği özel örneklere göre bulduğu sonucu 50 öğrenci için çiçek, 100 öğrenci için ajans matbaa olarak yorumladığı görülmüştür.

> Araştırmacı: Neyi önerirsin?
>
> Şerife: Şunu öneririm. 50 öğrencin varsa "A" ya git. 100 öğrencin varsa da "B" ye git.

Problemde birbirine fonksiyonel yapının görüntü kümesindeki farklılıkların sayısı arttıkça bunlar arasındaki ilişkiyi anlamak zaman zaman Şerife için kolay olmamış ve problemdeki ilişkileri yorumlarken farklı sınırlardan dolayı zorlandığı görülmüştür.

Şerife: 150’den fazla alım olması halinde ise… İlk 150 tişörtten sonraki tişörtlerin tanesini ilk fiyata göre 5 TL’lik indirim yapacağını söylemiştir.

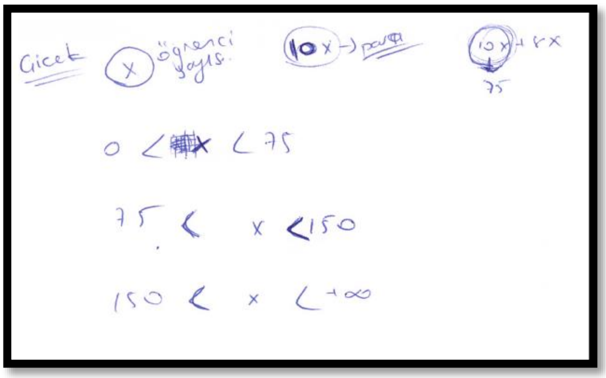
Araştırmacı: Ne demek yani bu?

Şerife: Yani… İlk 150 tişört 10 TL, sonrası 5 TL’ye mi indirilecekmiş?

Araştırmacı: Onu mu anlıyoruz? Bir bütün halinde oku istersen yine. Bir bütün halinde bak.

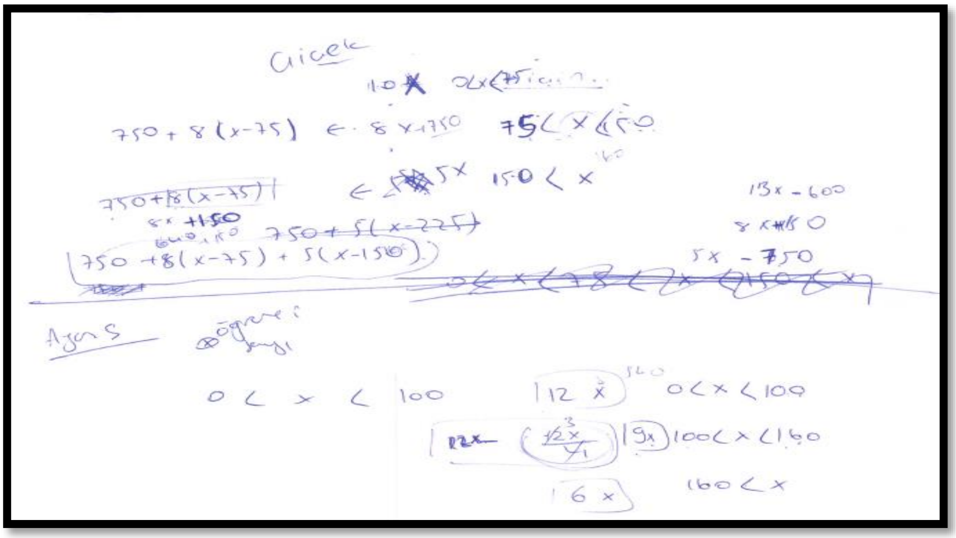
Şerife: 75 alıp… Tişörtlerin sayısı için 75 tişörte kadar tişört başına 10 TL fiyat vermiş, 75 tişörtten fazla tişört alınması halinde ilk 75 tişörtten sonraki tişörtlerin tanesine 2 TL’lik indirim yapacağını, 150 den fazla alım olması halinde ise ilk 150 tişörtten sonraki tişörtlerin tanesinde ilk fiyata göre 5 TL’lik indirim yapılacağını söylemiştir. Yani ilk 150 tişört 10 TL üzerinden daha sonrakiler 5 TL üzerinden gidilecek…

Şerife, bilinmeyeni tişört (öğrenci) sayısı olarak belirleyip fonksiyonun parçalı yapısını yönlendirmelerle ifade etmeye çalışmıştır. Bunları yaparken bilinmeyeni kullanabildiği, yüzde alma kavramına uzak olmadığı ve çok sık işlem hatası yapmadığı görülmüştür. Katılımcının verdiği bilinmeyenin neyi temsil ettiği ve neyi aradığını matematiksel semboller yardımıyla gösterebildiği görülmüştür.




**Görsel 3.88.** *Şerife’nin tişört probleminde değişken kullanımı ve cebirsel gösterimine başlaması*

Problemde fonksiyonun sınırları farklı iki tanım kümesi içermesi, yani parçalı yapısı ilişkileri yorumlamaya çalışan Şerife’yi zorlamış ancak yorumlayabildiği cebirsel ifadeler üzerine araştırmacı tarafından fonksiyona yönelik bir yönlendirme gelmiştir. Bu yönlendirme üzerine Şerife’nin iki matbaaya yönelik sınır değerler için ilişki aramaya başladığı görülmüştür.

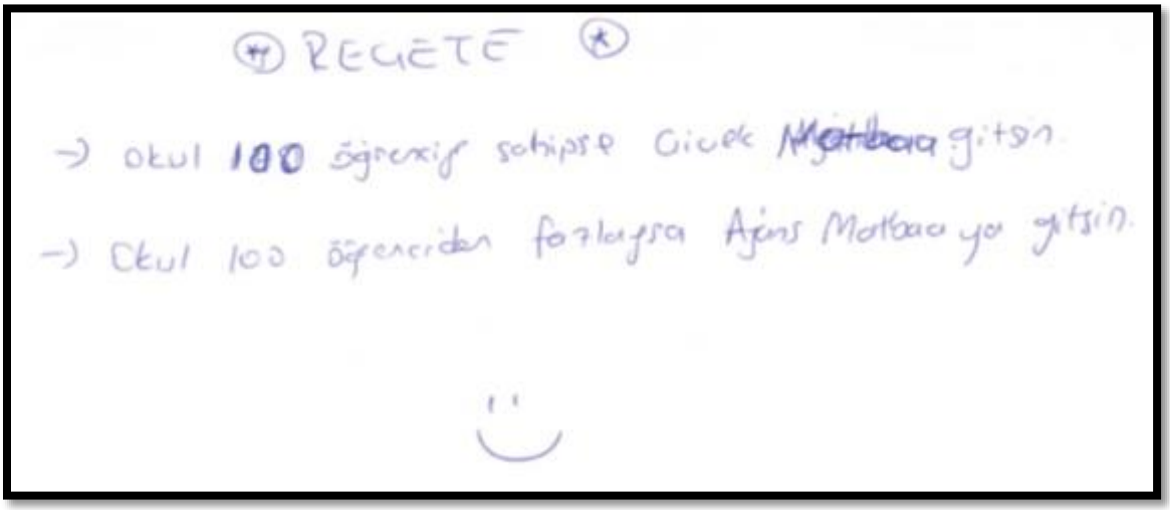


**Görsel 3. 89.** *Şerife'nin karo probleminde sınır değerlere yönelik cebirsel hesaplamaları*

Bu sınır değerler üzerine iki matbaanın farklı tişört sayılarını hesapladığı ve bunları bir tablo haline getirdiği gözlenmiştir.

**Görsel 3.90.** *Şerife'nin tişört problemindeki öneri tablosu*

Şerife, oluşturduğu görüntü kümelerini birbiriyle ilişkilendirebilmiş bunun sonucunda da tam ve net doğru olmasa da iki matbaayı birbirleriyle görüntü kümeleri üzerinden ilişkilendirebilen bir öneri sunduğu görülmüştür.




**Görsel 3.91.** *Şerife'nin tişört problemine genel önerisi*

Karo probleminde ise Şerife, soruyu okuduğunda görsel bir düzene göre artışın gerçekleşeceğini ifade ederek çözümüne başlamıştır.

> Şerife: Enver Usta, bir teras tasarlamıştır. Her bir terasın ortasında dikdörtgen bir bahçe yer almaktadır. Enver Usta, bahçenin toprağını gösterebilmek için siyah karoları, sınırlarını gösterebilmek içinse beyaz karoları kullanmıştır. Aşağıda ilk üç terasa ait resimler gösterilmiştir. Dördüncü ve beşinci terasa ait resimlerle ilgili neler söyleyebilirsiniz? Bu teraslarda kaç tane beyaz ve siyah karo olduğunu bulunuz. Şimdi siyah karolar 1, 2, 3 diye gitmiş. Büyük ihtimalle dörtte 4, beşte de 5 siyah karo olacak. Beyaz karolar da onun etrafında döşenecek gayet normal bir şekilde. (Gülüyor.) Yeterli bir cevap mı acaba?

Dört ve beşinci şekillerde kaçar karo olacağını hesaplarken siyah karoların doğrudan istenen adım sayısı kadar olduğunu ifade etmiş, beyaz karoları da sayarak şekillerin üstüne kaçar tane olduklarını yazmış ve buradan sabit artışla istenen şekillerdeki 14 ve 16 sayılarına ulaşmıştır.

> Şerife: Nasıl döşenecek? Şimdi… Birinci şekilde 1 tane siyah var, ikinci şekilde 2 tane siyah, üçüncü şekilde 3 tane siyah. Dördüncü bahçede de 4 tane siyah, beşinci bahçede de 5 tane siyah karo olacak.
>
> Araştırmacı: Beyaz?
>
> Şerife: Beyazlar da… Zaten beyazlar sınırları belli etmiş ya… O yüzden 4.şekilde 4 siyah karo olduğunda beyazlar da onu örtecek şekilde… Yani o kadar olacak. Ama sayı istiyorsanız… Mesela hesaplayalım… 1, 2, 3, 4 (Kalemle kağıda vurarak içinden sayar.) 14 tane olacak mesela 4 de. Ama bunda kaç tane var? 12 tane mi var bunda? Yok. 13,19, dur

11. Burada kaç tane var? 3, 5, 7, 9, 3 daha 12 tane var. Evet, bir dahakinde 14 olacak. O zaman bunda 8 tane olabilir. 3, 6, 7, 8 aynen. 6, 8, 10, 12, 14 diye gidecek…

…

Araştırmacı: Neden öyle düşündün? 16 olacağını?

Şerife: Çünkü şekilde 1 tane siyah arttığında onunla birlikte 2 tane daha beyaz geliyor. Ben şuraya 1 tane siyah koysam yanına 2 siyah gelmek zorunda. Zaten şu kapak hep var. Yani bu şekil üstünden düşünürsek…

Kendisine daha büyük teraslardaki karo sayıları sorulduğunda ise her bir artan siyah karoya karşılık iki beyaz karo arttığını ilişkisel olarak fark etmiş ve siyahları bildiği takdirde beyazlara ulaşabileceğini söylemiştir.

Şerife: Tamam. Daha büyük teraslardaki karo sayılarını bulmak için nasıl bir yol izlersiniz? Hım… Nasıl bir yol izlerim? Ama şimdi daha büyük teraslardaki karo sayısı diyor ya hocam o terastaki bir şeyi bir bilgiyi bilmem gerekiyor. Ona göre söyleyeceğim değil mi?

Araştırmacı: Hiçbir bilgi bilmiyor musun peki şu an?

Şerife: Hah. Şimdi evet. Birinci şekil üzerinden gidersem 1 tane siyah karo olduğunda 3, 6, 8 tane beyaz oluyor. Ama bundan sonrakilerin hepsinde her bir siyah karo arttığında 2 tane beyaz olacak. Her bir siyah karo arttığında 2 tane beyaz olacak. Yani mesela o daha büyük teraslardaki karo sayılarını bulmamda eğer siyahları biliyorsam beyazları da rahatlıkla söylerim.

Daha büyük terasları yorumlarken aritmetik artış kelimelerini kullandığı için aklına ilk olarak aritmetik dizi gelmiş, devamında ise ilk beş adımda bulduğu siyah ve beyaz karo sayılarından yola çıkarak cebirsel genelleme yoluna gitmiştir.

Araştırmacı: Peki nasıl bunu yorumlayabiliriz? Ne demek istemiş soruda?

Şerife: … Hı… İşte bunlar aritmetik olarak artıyorlar. (Gülüyor.) Daha büyük bir şey olsa yani mesela 4 ve 5'i sormuştu birinci soruda. Ama bundan sonra işte 10'u, 15'i 20'yi sorsa herhalde aritmetik dizi olarak yazarız bunu bir şekilde…

…

Şerife: Nasıl yazarız? Çok güzel soru. Iı şey… Iı… Şimdi… 3 tanesi kesin bir tane olacak 8, iki tane olursa ama üç tanesi kesin ay 6 tanesi kesin pardon. Şey yapsak… (Sessizlik) Ya bir şey deneyebilir miyim bir yere?

Araştırmacı: Her şeyi her yere deneyebilirsin.

Şerife: Tamam. Bir dakika… 6 bu kesin olacak ama karo sayısına göre siyah artacak. Eğer bir tane karo olursa iki tane beyaz olur ama iki tane karo olursa yine iki tane olmaz. Onun da artması lazım. Böyle yapsak "k" parantezinde… Yok, "3k" olur o zaman mantıksız olur. Hım… Ne diyelim? O… Eğer "3k" olduğunda… Şimdi eğer 1 verirsem… Hıh tamam. "3k+6" diye bir şey uydurursam ben şu an mesela bu tüm fayansları ay karoları verir. Yani mesela "k"ya 1 verdiğimde kaç geldi ha olmadı, pardon pardon. ("(k+ 2k) + 6" yazar.)

Araştırmacı: Tüm karoları vermiyor mu "k"ya 1 verdiğinde?

Şerife: Veriyor mu? Ay veriyor pardon pardon. Bir an kafa gitti. Tamam. Mesela "k"ya 1 verdiğimde buradan kaç geldi? 9. "k"ya 2 verdiğimde 2 kere 3, 6; 6 6 daha 12, evet. 3 verdiğimde 3 kere 3, 9, 6 daha… Hı… 15 oldu ama olmadı… Hayır, 15 oldu, oldu. Oluyormuş yani.(Gülüşmeler.) Hocam ilk hesapladığımızda sadece beyazları hesapladım ya o yüzden kafam şey oldu. Şimdi bu "3k+6" var ya hocam bu bizim tüm karoları bulmamızı sağlayacak.

Şerife, genellemesini doğrudan tüm karoları bulabileceği ve siyah karolara değişken verip örüntünün ilk verilerini de kullanarak ulaşmıştır. Bu işlemleri görsel şekillerin alanlarını kullanarak yaptığını, şeklin alanını hesaplarken üç karodan oluşan satır sayısının birinden yola çıktığını ve siyah sütunların olduğu karolar dışındaki hiç siyah olmayan altı karoyu sabit olarak ilave ettiğini ifade etmiştir. Bu işlemleri yaparken de siyah karoların sayısı "k" değişkenini kullanmıştır.

Araştırmacı: Nasıl bulduk bunu? Nasıl düşündük? "3k+6" nereden geldi?

Şerife: Nasıl düşündüm biliyor musunuz? Şimdi şu sonuçta şurada ne kadar siyah karo olursa olsun 3 tane var kareden…

Araştırmacı: Eni 3 oluyor…

Şerife: Hıh eni 3 birim olarak alayım. Her zaman siyah karolar ortadan sağa doğru kayıyorlar ya şu o siyah karoların başı ile sonundaki 6 tane kare hiç değişmiyor, sabit kalıyor… (Şekil üzerinden ilk ve son sütundaki 3 beyaz karoyu gösterir.)

Araştırmacı: Ha şu 6? 3,3; 6. Yanlara eklenenler…

Şerife: Evet şu yanlara eklenenler. 3,3; 6. Sonra şu içindeki siyahı düşündüm. Ama hani tümünü hesapladığımda burada da zaten şunlara "k" dediğimi düşünürsem "3k". Eğer "k"ya 2 verirsem iki tane "3k" olacak. Hani 3 verirsem "k"ya 3 tane "3k" olacak yani 3 tane… Ya siz anladınız aslında beni. (Gülüyor.)

Araştırmacı: Ben son kısmı hiç anlamadım. Eğer "k"ya 1 verirsem 1 tane "3k", 2 verirsem 2 tane "3k"…

Şerife: Şimdi 6'yı anladık değil mi buradaki artı 6'yı?

Araştırmacı: Artı 6 şu beyazlar dedik tamam.

Şerife: Buradaki "3k" da şu aradaki şu üçü sürekli değişecek ya ben sonuçta buraya sürekli bir şeyler ekliyorum…

Araştırmacı: Şöyle sorayım bu "k" neyin sayısı? Bu "k" ne burada yani bilinmeyen kullanıyorsun ya.

Şerife: Bu "k" neyin sayısı biliyor musunuz? Bu k aslında yani bana göre siyah karoların kaç tane olduğunu söylüyor.

…

Araştırmacı: "3k+6" tümü olduğunu nasıl bulduk? Orası hala… Tamam, bilinmeyene dedik ki tamam "k" şey karolardaki toprak sayısı. Peki, "3k+6"yı nasıl düşündük? Tamam, bu artı 6'yı da anladım. Artı 6 yanlara 3,3. Ama "3k" ne ifade ediyor?

Şerife: Bu "3k" ne biliyor musunuz hocam? Şimdi bu "k" benim değişkenim. Değişkenim de bendeki toprak sayısını belli ediyor. Yani eğer bende 1 tane toprak varsa 1 olacak, 2 tane toprak varsa 2 olacak, 3 tane toprak varsa 3 olacak.

Araştırmacı: Tamam.

Şerife: 3 ile çarptım çünkü o toprağın yanında 2 tane beyaz kısım var ya kendiyle beraber 3 birim oluyor.

Araştırmacı: Kendiyle beraber 3 birim olur diyorsun peki diğer taraf? İkincide nasıl onu açıklayacaksın?

Şerife: Tamam. Şimdi burada k ya burada 2 tane siyah var. "k"ya 2 koyduğumda ne oldu burası? 3 kere 2 den 6 oldu.

Araştırmacı: Dışarıdaki 6 hariç içeridekilerin sayısını mı veriyor 3k?

Şerife: Evet. Onlar hariç.

Doğrudan beyaz karoları bulması istendiğinde ise daha önceden bulduğu "3k+6" ifadesinden ilişkinin farkında olarak siyah karoyu ifade ettiğini düşündüğü k kadarını çıkartmış ve beyazları "2k+6" şeklinde ifade etmiştir.

Şerife: Beyaz karolar… Beyaz karolarda ne olurdu biliyor musunuz hocam? Beyazlar da "2k+6" olurdu.

Araştırmacı: Bunu nasıl bulduk?

Şerife: Şimdi bunu nasıl bulduk biliyor musunuz? Iıı… Şu benim tümü vardı ya hocam ben şimdi buradakileri "3k" almamın nedeni 3 tane birim 3 tane birim olmasıydı hani 1 toprak 2 tane sınır diye. Şimdi bir tane toprağımı eksiltmem lazım benim.

Araştırmacı: Ne için o neden? Ha, siyahları çıkarttığın için tamam.

Şerife: Sadece beyazlar için o yüzden "2k" kalacak burada. "2k+6". Mesela deneyelim. Birincisinde kaç tane beyaz var? 1 koyduğumuzda 8 tane beyaz var burada…

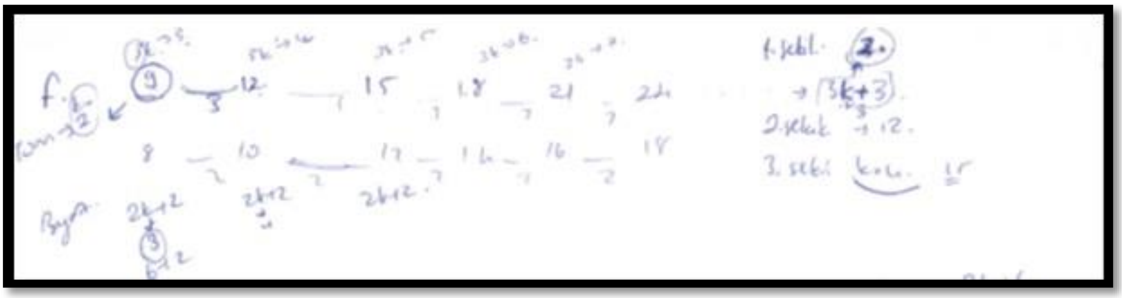
Araştırmacı: Şeyi anlamadım. Iıı… Birincisinde "3k"yı anladım. Siyah karo için dedin 3 birim, 2 tane olursa 6, peki beyazda nasıl düşünüyorsun bu iç kısmı? Bu artı 6 aynı artı 6 mı?

Şerife: Evet.

Araştırmacı: Sağ ve soldan gelen beyazlar?

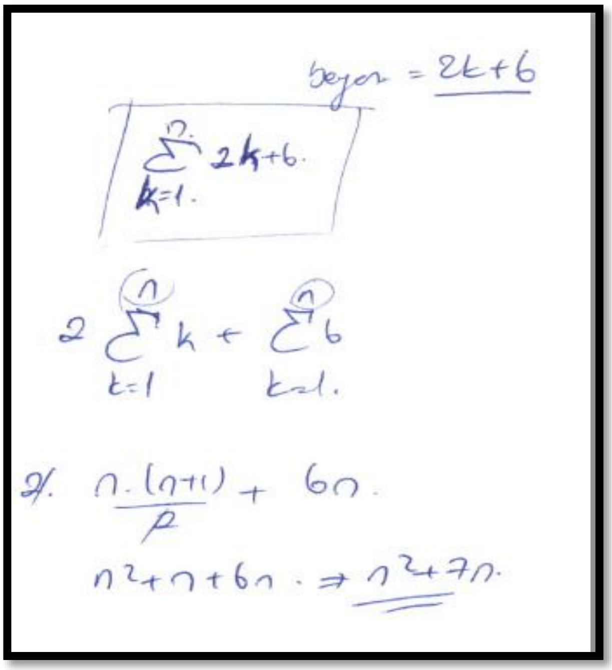
Şerife: Evet. Tümünden ben sadece şu "k"yı çıkardığımı düşündüm. Oradan sadece "k"yı çıkarırsam "2k" kalacak. 2 beyaz kalacak o yüzden tüm beyazlar böyle bulunur.

Şerife'nin görseller yardımıyla ilişkilere dayanarak bulduğu genellemesinden sonra farklı bir yönteme yönlendirildiğinde karo sayılarını diyagram halinde yazarak başka bir genelleme arayışı içerisine girdiği gözlenmiştir.



**Görsel 3.92.** *Şerife'nin karo probleminde sayısal verilerden genellemeye başlaması*

Bu diyagram halinde yazdığı ve artışa odaklandığı karo sayılarından o adımdaki tüm karo sayılarının toplamına yönelik bir sonuca ulaştığı görülmüştür

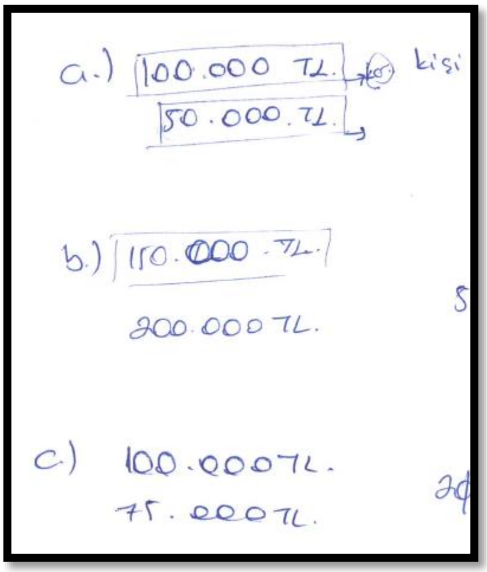


**Görsel 3.93.** *Şerife'nin karo problemindeki genellemeleri*

Konser probleminde Şerife, problemi ilk okuyuşunda gelir kelimesinin kavramını sorgulamış ve kişinin cebine giren para olarak yorumlayıp probleme başlamıştır.

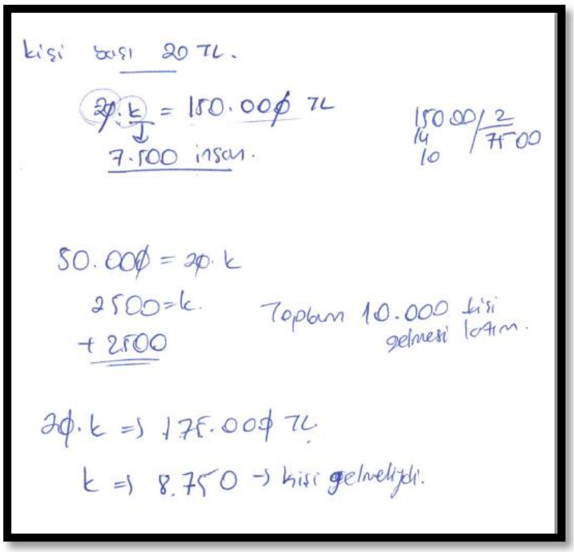
> Şerife: Jale'nin konserden hedeflediği parayı kazanabilmesi için konsere gelecek kişi sayısıyla ilgili ne söyleyebilirsiniz? Şimdi… 100 bin gelir diyor ya hocam 50 bin de harcamış ya 100 bin gelir derken 100 bin cebe giren mi yoksa kar mı?
>
> Araştırmacı: Sence?
>
> Şerife: Cebe giren bence... Cebe girendir ya, değil mi? Yaa benim bunlar hep kafamı karıştırıyor hocam ya. Bilmiyorum ben bunları kar mı cebe giren mi? (Gülüşmeler.)

Bu problemde daha önceki problemlerde yaptığı gibi kendisi için önemli olarak gördüğü kavramları yazarak çözümüne başlamıştır.




**Görsel 3.94.** *Şerife'nin konser problemindeki cevapları*

Problemde kendisine doğrudan sonucun sorulduğu sorularda da bilinmeyen kullanıp bir eşitlik yazarak cevap verdiği görülmüştür.




**Görsel 3.95.** *Şerife'nin konser problemindeki hesaplamaları*

Şıklarda kendisine rakamsal olarak verilen tüm verileri ve sorulan soruları hızlı bir biçimde yanıtlamış ve yaptığı işlemleri orantısal olarak da yorumlayabilmiştir. Tüm veriler arasında bir ilişki kurması istendiğinde önce anahtar olarak gördüğü verileri yazmış, sonra da oklarla birbirlerine nasıl etkileyebileceklerini açıklamaya çalışmıştır. Çoklukları birbirleri arasında ilişkilendirirken orantı kavramını kullandığı görülmüştür. Bu ilişkileri kurarken stadın kapasitesi ile gelen kişi sayısı arasındaki ilişkiyi de ifade etmiştir.

Şerife: Hı… Burada yapabilir miyim öyle bir şey? Mesela gelire "a" dersem harcamaya da "b" dersem benim cebime giren miktar "a + b" olmalı değil mi? Sonra bu "a + b" de buradan toplanacak kişi başı parayı simgeleyecek yani “a + b” de mesela “k çarpı TL” desem olmaz mı?

Araştırmacı: Çarpı derken? “k çarpı TL”?

Şerife: Yani çarpı değil “k TL”. Yani şöyle…

Araştırmacı: Bir şey eksik kaldı bu yazdığında…

Şerife: Bu insan sayısı. Şu “TL” dediğim de aslında parayı simgeliyor ama “a TL” olsun yok “a” olmasın. “D TL” olsun. Yani kişi başı kaç TL olduğunu bilmiyorum. “D” o. Kaç tane insan olduğunu da bilmiyorum. O da “k”. Toplam para “a + b” zaten. Kapasite de şu “k” kişi. Aha kapasiteye de “k” dersem şöyle bir şey olur.

Araştırmacı: Temiz bir yere yaz istersen.

Şerife: Tamam. Şimdi kapasite… Tabii stadın tamamen dolduğunu düşünerek yazıyorum bunları.

Araştırmacı: Normalde stat dolmazsa? Gerçi stadın dolması seni ne kadar ilgilendiriyor? Sen kapasiteyle mi ilgileniyorsun yoksa stada gelen kişi sayısıyla mı?

Şerife: Stada gelen kişi sayısıyla ama kapasite de engelleyici yani şimdi.

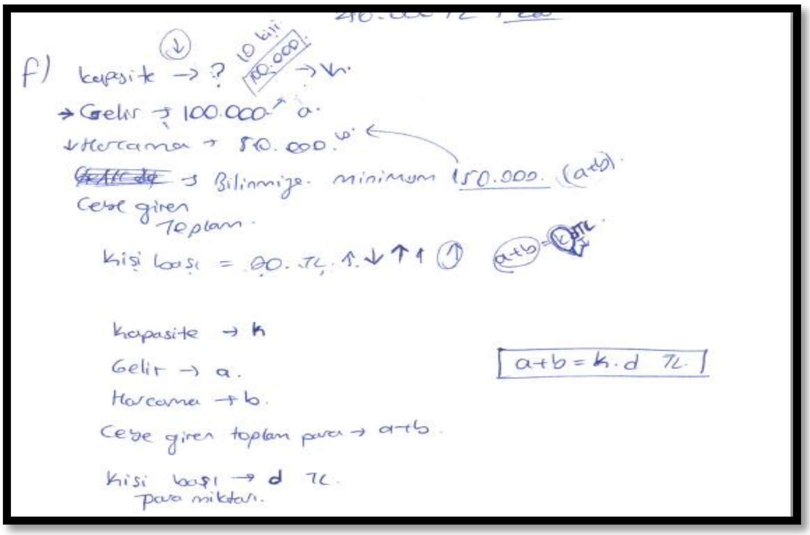
Araştırmacı: Yani öyle bir harcama yapabilir ki kapasiteyi aşacak kadar insan gelmesi gerekebilir yani stada.

Şerife: Biz şimdi kapasiteye “k” dedik, elde edilen gelire “a” dedik. Harcamaya “b” dedik. Cebe girene de toplam paraya “a + b” dedik. (“kapasite – k”, altına “gelir – a”, altına “harcama – b”, altına “cebe giren toplam para – a + b” yazar.) Iıı… Kişi… Bir şey söyleyeceğim hocam.

Araştırmacı: Hı. Ne diyeceksin?

Şerife: Kişi başı düşen parayı da “d” dedik. (“Kişi başı para miktarı – d TL” yazar.) Cebe giren toplam para… “k çarpı d” diyelim. (“a + b = k. d TL” yazar. )

Bu ilişkileri ararken birden çok değişken kullanabildiği, sembolik manipülasyon yapabildiği ve ilişkilerin yönüne de odaklanabildiği görülmüştür.




Görsel 3.96. *Şerife’nin konser probleminde ilişki araması*

Şerife'nin yazdığı ifadeleri ilişkilendirirken orantısal ilişkileri sık sık kullandığı ve ilişkinin yönüne dair de yorumlar yapabildiği görülmüştür.

Şerife: Bir tanesi için değil. Ay üzerini de çizdim. Neyse, bu toplam. (Üzerine çizdiği yerin altına "Cebe giren toplam" yazar.) Kişi başı da… Kişi başı da bize mesela 20 TL demişlerdi. ("Kişi başı = 20 TL" yazar.)Şimdi diyoruz ki hocam şimdi bunun mesela 10 kişilik kapasitesi olsaydı ve kadın hala bu parayı istiyor olsaydı bu sefer kişi başı 20 lira değil de daha fazla bir miktar artardı. Yani kapasite azalıp da gelir sabit kalırsa kişi başı düşen para miktar artacaktı. Ama mesela kapasitesi 10 değil de mesela 100 bindir. Şimdi… Bunun kapasitesi 100 bin olduğunda kişi başı verilen fiyat da o zaman azalacak. Millet 100 lira verip değil 20 lira verip de girecek.

Araştırmacı: Tabii şeyi sabit tutarak geliri…

Şerife: Gelir sabit aynen. Ama kadın gelip de gelir sayısını artırırsa bu sefer ya kişi başına düşen fiyatı artırır ya da kapasiteyi azaltır tekrar bunu artırır. Yani her türlü kişi başına düşecek parayı artırır ya da harcamasını kısar.

Şerife'nin problem çözme stratejilerini gösterir tablo aşağıda sunulmuştur.

**Tablo 3.10.** *Şerife'nin problem çözme stratejileri*

| **Not Ortalaması:** 87,714 | | **Katılımcılar Arasındaki Not Ortalaması Sırası:** 1 |
|---|---|---|
| Anahtar Kelimeleri Kullanma | Diyagram Oluşturma | Tablo Oluşturma |
| Anlamlı Özel Örnekler Seçme | Girdi – Çıktı Kavramlarını Çağırıp İlişki Arama | Birden Fazla Değişken Kullanıp Cebirsel İfade Oluşturma |

Tablo 3.10'dan anlaşılacağı gibi Şerife'nin problem çözme sürecinde anahtar kelimeleri kullanma, diyagram oluşturma, tablo oluşturma, anlamlı özel örnekler seçme, girdi-çıktı kavramlarını çağırıp ilişki arama ve birden fazla değişken kullanıp cebirsel ifade oluşturma problem çözme stratejilerini kullandığı görülmüştür. Şerife, görüşmeler süresince problemlerdeki değişkenleri kendisi belirleyebilmiş, değişkenler arasındaki ilişkilere odaklanıp sonuç aramış, sembolik manipülasyon yapabilmiş ve matematiksel kavram veya konuların onu çözüm sürecinde zorlamadığı görülmüştür.

## 3.2. Katılımcıların Doğrulama Yollarına İlişkin Bulgular

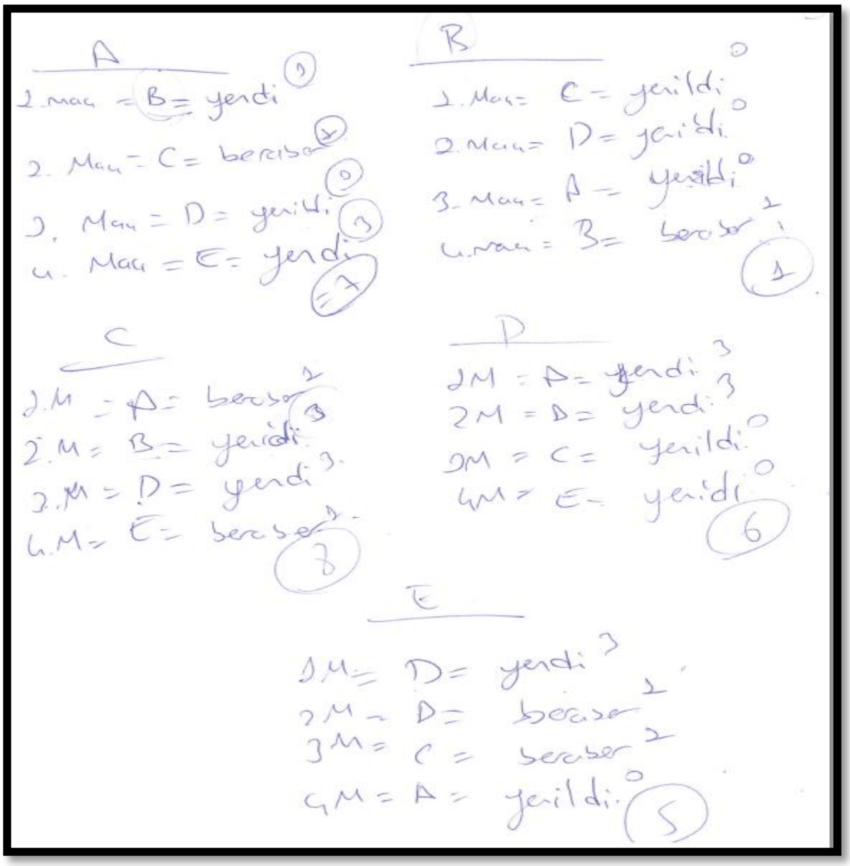
Bu bölümde araştırmanın katılımcılarının problem çözme sürecindeki fonksiyonel kavramlara dayanan problemlerdeki çözümlerini ve kullandığı ifadeleri nasıl doğruladıklarına yer verilmiştir.

### 3.2.1. Celile'nin doğrulama yollarına ilişkin bulgular

Celile'nin problem çözme sürecinde kendiliğinden yaptıklarını doğrulama ihtiyacı duymadığı, araştırmacı tarafından yaptıklarının doğru olup olmadığını kontrol etmesi istendiğinde de bu kontrolü yapma konusunda kendisine güvenmediği görülmüştür.

> Araştırmacı: Peki bu yaptığın işlemler, buraya yazdığın puanları kontrol etsen nasıl kontrol edersin? Doğru mu yaptım diye bir sağlamasını yapsan?
>
> Celile: Hıı. ( Sessizlik ) Bilmem. … Yani bir sağlamasını yapamam ama tekrar…

Problemlerde Celile'nin sık sık okuma hataları yapmasından kaynaklı problemi tekrar okumaya yöneldiği, yaptıklarını kontrol etmesi istendiğinde ise bulduğu sonuçları bir liste halinde yazma yönelimi olabildiği ortaya çıkmıştır.




**Görsel 3.97.** *Celile'nin futbol probleminde yönlendirme üzerine uyguladığı doğrulama yolu*

Celile'nin görüşmelerde kullandığı ifadelerden kendisine ait olmayan yönergeler doğrultusunda hareket ettiği ve onları hatırlamaya çalıştığı görülmüştür.

Celile: … Toplam ücretin yüzde 25 indirim yapılacakmış. İlk fiyattan, ilk fiyat neydi? Iıı mesela 120 öğrenci var 12 TL ile çarparsak, ajans, 12 öğrenci 120 ile çarparsak ama bunun yüzde 25'i alınacakmış. (12x12 yazıp sıfır ekleyerek çarpmanın sonucunu 1440 bulur) 1440'ın yüzde 25'i. Yani… 25/100 le mi çarpıyorduk?

…

Araştırmacı: Biz bir sayının yüzde 25i'ni almak için ne yapmalıyız?

Celile: 25 ile çarpıp yüze mi bölüyorduk? Öyle hatırlıyorum.

…

Celile: 60'a kadar gidecek. Şöyle miydi? Şey vardı…

Araştırmacı: Sigma mı?... (Celile'nin çizmeye çalıştığı toplam sembolünü gösterir.)

Celile: Evet, sigma. 1 den 60 a kadar 2 formülü vardı, iki çift sayının…

Araştırmacı: İkişer ikişer artıyorsa…

Celile: "n artı"… "n çarpı n artı bir bölü iki" idi galiba…

Araştırmacı: O neydi "n çarpı n artı bir bölü iki"?

Celile: Çift gidince olmuyor muydu sanırım bu?

Farklı problemlerde ise rastgele özel örnekler seçtiği ve onların yaptıklarını doğrulaması halinde çözümünün doğru olacağını ifade ettiği gözlenmiştir.

Araştırmacı: Şimdi e'de ne soruyor?

Celile: Bulduğunuz kuralın her adımda işe yaradığını nasıl gösterirsiniz? Yani sağlama alabilirim.

Araştırmacı: Mesela neyi sağlarsın?

Celile: Iıı… Rastgele bir teras sayısı deneyelim mesela. 160. terası sorsun atıyorum. Iıı… n benim için teras zaten. 162 çarpı 2 artı 6 yaparım.

…

Araştırmacı: Denemeden yapamaz mıyız bu soruyu? Denemeden değerleri bir bütün halinde göreceğimiz bir şey oluşturamaz mıyız?

Celile: Yani denememiz lazım o şekilde şey yapamayız sağlamasını yapmalıyız sürekli.

Problem çözme sürecinde Celile'nin sık sık onaylanma ve yönlendirilme ihtiyacı hissettiği anlaşılmıştır.

Celile: Ha yeniliyor. Ay pardon. O zaman sıfır. Bir anlamı yok. D, C'ye yeniliyormuş. E, D'yi yeniyor. 6, 7. O zaman… Bu D, değil mi?  Eşit olur. Şampiyon da ikisi mi oluyor? Şampiyon olamaz o zaman?

…

Celile: Burada beraberliği 1, galibiyeti 3, yenilgiyi 0 vermiş ya mesela. A takımı için konuşuyor. E'yi B'yi yenmiş. E'yi B'yi yenince 6 puanı oldu mu? Yenildiği zaman puan kaybediyor mu? Etmiyor değil mi?

Genel anlamda Celile'nin problemlerde onaylanma ihtiyacı hissettiği, yaptıklarının doğruluğuna kendiliğinden bakma gereksinimi duymadığı ve zaman zaman da seçtiği birkaç örnekle yaptıklarını doğrulamanın yeterli olacağını düşündüğü görülmüştür.

### 3.2.2. Mine'nin doğrulama yollarına ilişkin bulgular

Araştırmanın katılımcılarından Mine'nin problemlerde sık sık okuma hataları yaptığı ve problemi tekrar okumak durumunda kaldığı ve okumalarının ardından bir tahminde bulunabildiği görülmüş bu durumun da yaptıklarını kontrol etmesine etkisi olduğu düşünülmüştür.

Mine: Beraberliğe 1, galibiyete 3, yenilgiye 0 puan verilen bir futbol turnuvasında A, B, C, D ve E takımları mücadele etmektedir. Her biri diğerlerinin her biriyle yalnız bir kez oynamaktadır. A, E ve B'yi… A; E ve B'yi yeniyor C ile berabere kalıyor D'ye de yeniliyor. B,C ve D'ye yeniliyor…

Araştırmacı: Virgüllere dikkat ederek oku daha rahat olacak senin için.

Mine: Tamam. B; C ve D'ye yeniliyor. D, C'ye yeniliyor. E, D'yi yeniyor B ve C ile berabere kalıyor. Buna göre…

Araştırmacı: Birinci soru bu turnuvanın şampiyonu hangi takım olmuştur? Öncelikle soruyu anlamadıysan tekrar kendi içinden de okuyabilirsin. Anladıysan da ne anladın?

Mine: Tamam bir kendim okuyayım.

Araştırmacı: Oku.

Mine: (Soruyu içinden okumaya başlar) A kazanmıştır o zaman.

Mine'nin yapılan klinik görüşmeler boyunca yaptıklarını kontrol etme sürecine tek başına girmediği, ortaya koyduğu çözümlerin doğru olup olmadığını sorgulamadığı ve ancak yaptıklarını kontrol etmesi istendiğinde buna yönelebildiği görülmüş ve bu yönlendirmeler sonucunda bulduğu sonuçların değişebildiği gözlenmiştir.

Araştırmacı: Peki yazarak ifade etsen daha rahat olmaz mı?

Mine: Olur.

Araştırmacı: Bir yaz bakalım nasıl ifade edeceksin?

Mine: ("A--, B yeniyor – 6", altına "C berabere --- 1" ve onun altına da "D'ye yeniliyor 0" yazar) ("B—C D'ye yeniliyor --- 0" yazar) D, C ye yeniliyorsa yani diğerlerini yenmiş mi? … (Sessizlik) ("D--- C'yi yeniliyor --- ?" yazar) ("E—D'yi yeniyor --- 3", altına da "B, C 'ye berabere kalıyor--- 2" yazar) Böyle yazıp hesapladığımda A şampiyon görünüyor ama

D’yi bilemiyorum çünkü sadece C’ye yeniliyor demiş. E, D ve B ye yenilmiş mi berabere mi kalmış bilmiyorum…

…

Mine: (D’nin sağına ok çıkarıp 1 yazar) C’ye bakıyorum A ile berabere kalmış 1. Galip gelmiş 3. Bu da 3. Burada da berabere kalmış. 1. 8 puan geliyor. (“C”nin sağ tarafına ok çıkarır “8” yazar) D galip 3. 0. 0. 6 puan. (“D”nin sağına ok çıkarır “6” yazar) 1, 3, 4 puan. (“E”nin sağına ok çıkarır “4” yazar) O zaman puanlama sistemine göre C galip gelir.

…

Araştırmacı: Peki 10 maç mı 20 maç mı ne diyeceğiz bu konuda? Bir yandan diyorsun ki 5 takım var, dörder maç yapıyorlar. 5 kere 4’ten 20 maç diyorsun. Bir yandan tek tek sayıyorsun…

Mine: 10 maç.

Araştırmacı: 10 maç buluyorsun. Ne diyeceğiz?

Mine: … 10 maç derim.

Araştırmacı: Nasıl? Neden?

Mine: Burada her takım için baktığımda B için mesela. B’nin ayrıca A ile maçını da yazdım. Burada da yazmış oldum. iki kere saydım maçı. O yüzden burada yanlış oluyor buradan baktım.

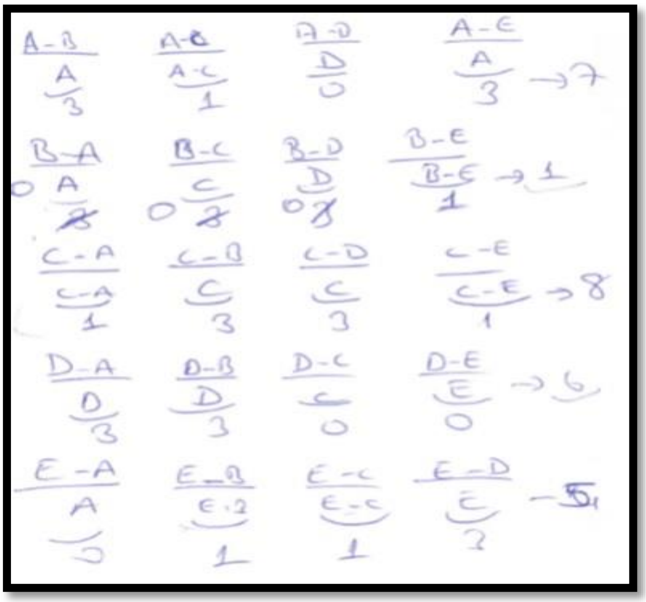
Araştırmacı: Peki yaz 10 maç diye.

Mine: (Toplam 10 maç yazar)

Araştırmacı: O zaman 10 maç yapıldıysa bu 10 maçın 6’sı berabere mi bitti?

Mine: 3 olur o zaman.

Yaptıklarını doğrulaması kendisinden istendiğinde problemi tekrar okuyarak bir diyagram halinde verileri birbiri ile ilişkilendirip kontroller yapabildiği görülmüştür.



**Görsel 3.98.** *Mine’nin futbol problemindeki kontrolü*

Problemde genelleme oluşturmuş olmasına rağmen yaptıklarını doğrulaması istendiğinde zaman zaman adım sayısına ya da yaptığı işlemin ne kadar uzun süreceğine bakmaksızın çizerek sonucu doğrulamaya yönelmiştir.

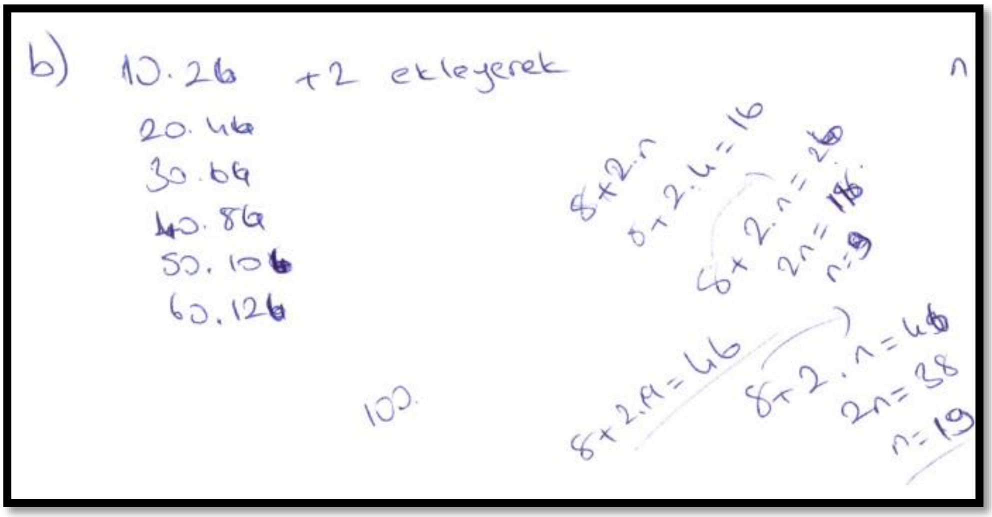
Araştırmacı: Peki f şıkkına bakalım.

Mine: Beyaz karo sayısını bulmaya yarayacak farklı bir kural bulabilir misiniz? Bulduğunuz kuralları karşılaştırabilir misiniz? (Soruyu okur) Bulamam. (Gülüşmeler) Yani bulurum da… Ya tek tek sayarız ya da çizerek bulunabilir.

Araştırmacı: Tek tek çizerek derken?

Mine: Çizerek gösterebilirim yani. (Satır sayısı 3, sütun sayısı 27 olacak şekilde bir dikdörtgen çizer ve karoları sayar.)

Farklı problem durumlarında ise rastgele seçeceği bir özel örneğin problemi sağlaması halinde yaptıklarının doğru olacağına inandığı ortaya çıkmıştır. Seçeceği örneğin de kendisine işlem kolaylığı sağlayacak ya da belirli bir düzene göre incelemesine sebep olacak bir örnek olmaması dikkat çekmiştir.




**Görsel 3.99.** *Mine'nin karo probleminde 60. terasın doğruluğunu kontrol etmesi*

Problemlerde kendine güvenmediği ve onaylanma ihtiyacı hissettiği ifadelerinden anlaşılmıştır.

Araştırmacı: Formül bulmaya çalışıyorsun… 100 teras için formül bulmaya çalışıyorsun.

Mine: Hıhı. Zamanım olsaydı tek tek çizerdim. (Gülüyor)

Araştırmacı: Formülü bilmesem bile yapardım diyorsun yani.

Mine: Yani çizince çıkar bence. Çünkü belli. Siyahlar hep 1 artıyor, beyazlar 2 artıyor. İşte buradan bir şeyi bulabilirsek… O gelmiyor aklıma benim.

Araştırmacı: b ve c yi birlikte düşün. b ve c şıklarını.

Mine: Daha büyük teraslardaki karo sayılarını bulmak için nasıl bir yol izlersiniz? (b şıkkını tekrar okur) ( Sessizlik ) Boş bırakabiliyor muyum?

…

Araştırmacı: 25'e mi bölmek lazım?

Mine: Yüzde 25… Yüzde 25 demek 25 bölü 100 ise 1800 bölü 25 olmaz mı?

…

Mine: Şimdi konser varmış… Iı ve bu konserden 100 bin TL gelir elde etmeyi hedeflemiş ama stadyumun kapasitesi bilinmiyor. Hani kaç kişi gelir kaç kişiyi alır bilinmiyor ve biletler hani giriş ücreti 20 liradan hesaplanacak. Iı 50 bin TL harcama yapmış derken hani kazandığı mı kendi…

Mine, problemlerde sık sık okuma hataları yapmış ve yeniden problemi okuduğunda bulduğu sonuçları değiştirebilmiş, değişken kullanmaya yönelmemiş, yaptıklarını kontrol etme ihtiyacı hissetmemiş, kendisinden yaptıklarını doğrulaması istendiğinde ise zaman zaman belirtilen adım sayısına kadar çizerek, zaman zaman da rastgele özel örnekler kullanarak ve diyagram oluşturarak doğrulamalarını gerçekleştirmiştir.

### 3.2.3. Yasir'in doğrulama yollarına yönelik bulgular

Yasir, kendisiyle yapılan görüşmelerde problemlerde okuma hataları yapmış ve pek çok kez yazılanları tekrar okumak durumunda kalmıştır.

Yasir: Okuyayım bir tekrar. Evet, hocam. Mağlubiyetlerine bakacak olursak. Sıfırları yazmamıştım. Buradan kontrol et… Bunun 1... C'nin şeyi yok hocam mağlubiyeti. D'ye bakacak olursam… 2. D'nin 2 mağlubiyeti var. Hocam ben B'de bir yanlışlık yapmışsam sanırım… (Mağlubiyet satırına A'ya 1, B'ye 1, C'ye 0, D'ye 2 ve E'ye 2 yazar)

Araştırmacı: Nereden anladın yanlışlık yaptığını?

Yasir: Hocam puan sayısı…

Araştırmacı: Kimden bahsediyoruz?

Yasir: B'den.

Araştırmacı: Hı.

Yasir: Hım. Demek ki mağlubiyet alamadığına göre galibiyeti 0, 0. Yani 3 tane şeyi var demek ki.

Araştırmacı: 4 maç yaptığı için mi öyle söylüyorsun?

Yasir: Hıhı.

Araştırmacı: Peki sen ne buldun şimdi?

Yasir: Ben de 1 demişim. Ben bir daha bakayım. (Diğer yazdıklarını kontrol eder) Burada B, ben buna 3 yazacakmıştım. (Mağlubiyet satırında B'yi 3 olarak değiştirir)

Yöntemler arasında geçiş yaparken Yasir'in yaptıklarını kendiliğinden kontrol etmediği ve araştırmacı tarafından tekrar bakabileceği söylendiğinde de kontrol ederken zorlandığı ve cevaplarının kesin olmadığı görülmüştür.

> Araştırmacı: Şu ne? E yazdın bir tane.
>
> Yasir: Pardon hocam. Burada E, D'yi yeniyor 3 diyecektim. (E sütunun altındaki 1'i 3 yapar ve son olarak da C sütununa C ve E sütununa 1 ekler) Şimdi bir yanlışlık var mı diğeriyle bir fark?
>
> Araştırmacı: En alttaki sayı kaç? (C sütunundaki C'yi kast ederek)
>
> Yasir: Hocam kafam gitti ya (Gülüyor) Oraya da 1 yazacaktım. (C'nin en altındaki C'yi 1 olarak değiştirir)
>
> Araştırmacı: Hı.
>
> Yasir: Sayılar da oluyor ya aklım… Hocam bir fark var mı ki? D ise E, C, D farklılık var.
>
> Araştırmacı: Burada kaçtı burada kaç?
>
> Yasir: Hocam burada 11'di burada kaç… 8 olmuş.
>
> Araştırmacı: 8 olmuş. Başka?
>
> Yasir: C gitti. D'ye bakalım. D aynı. E de aynı. C'de niye yanlışlık? Burada o zaman çok yazmışım. Ama hala C gibi hocam.
>
> …
>
> Araştırmacı: Bu turnuvada B ve D takımlarının puanları toplamı kaçtır?
>
> Yasir: Bu turnuvada B ve D takımlarının… 7 değil midir?
>
> Araştırmacı: 7 düşünüyorsan yaz.
>
> Yasir: Kontrol etse miydim ki ama?
>
> …
>
> Araştırmacı: Turnuva sonunda takımların aldığı puanların toplamı kaçtır?
>
> Yasir: Tüm takımların aldığı... 7, 8, 9, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 24. Bir daha saysam mı ki?

Yasir, problemlerin çözüm süreci boyunca değişken kullanımını kendisinden istenmedikçe tercih etmemiş ve doğrulama yapması gerektiğinde verilenleri tek tek sayma ya da çizme yoluna gidebildiği gözlenmiştir.

> Araştırmacı: Peki şeye bak. D şıkkına.
>
> Yasir: Beyaz karo sayısını bulmaya yarayacak bir kural bulabilir misiniz? Yani hocam verilen sayıyla ikinin çarpılması yani kaçıncı teras isteniyorsa onla ikinin çarpılması sonra eksi iki diyorum. Ama artı iki mi yapmalıydım şurada? Yok ama. Hocam bir dakika ben bir kontrol yapacağım. 5 te yapayım bir de mesela. Şimdi kaç tane beyaz varmış? 5 tane. Şuradan baktım. 1, 2, 3, 4, 5 dedik. 5 tane burada etti 7. 7 de burada 14. 15,16. Şuradan da oluyor. Hocam ben şimdi bunu cümleye mi çevireceğim? Tamam, yaptığım şey yani kendimce doğru…
>
> …
>
> Araştırmacı: Peki e şıkkına bak.

Yasir: İşe yaradığını nasıl gösterebilirsiniz? Hocam şurada en garanti yöntem çizerek gidiyorduk. Diyelim kaçıncı şey diyelim? Sekizinci şey diyelim. Ben sekizinci şeyi nasıl bulurum yöntemi nasıl bulurum 8 buradan ekleriz, 8 de buradan ekleriz. 16. 16 dersek 19, 22, 24 deriz. Yani 24 tane beyaz karo varadır sekizincide. Bir yere yazalım. Şuradan da şey yaparak gidiyorduk hocam üçüncü, dördüncü, beşinci, altıncı… Bu kaçıncı adım oldu acaba? Üçten sonrasını sayarsak dört, beş pardon… Beş, altı, yedi, sekiz, dokuz. Sekiz şurada bitiyor. Hocam şu dersek eğer şuraya kadar hocam. (İlk kağıda 8 terasın uç uca eklenmiş halini yeniden çizer.)

Farklı problem durumlarında ise Yasir'in rastgele seçtiği bir özel örneği deneyerek yaptıklarının doğruluğunu gösterme eğilimi olduğu da görülmüştür.

Yasir: Mesela diyelim ki 94 tane tişört alacaklar. 94 tane. Şimdi… ıı ilk 75 e kadar 10 liradan 750 lira para yaptı hocam. Biz kaç 90 demiştik değil mi? 80, 15 kaldı. "75+8"den. 15 lira etti. +8 de… 15 çarpı 8 yapmam gerekiyor burada da. 8 kere 5 40. 120 lira yapıyor. 750, 120 daha 870 lira para yapıyor.

Araştırmacı: Yaz onu. Kaç tişört dendiğini de buraya yaz.

Yasir: 90 tişört. Kaç demiştim ben? 870 demiştim. ("90 tişört 870" yazar)

Araştırmacı: Bu bulduğun hangi matbaa?

Yasir: Çiçek baskı hocam.

Araştırmacı: Şimdi diğerine mi bakalım?

Yasir: Iı diğerine bakacak olursak 90 tane tişört. 900. İki kere 9 kaç. 16. 916 mı oluyor?

Araştırmacı: Neyle neyi çarpıyorsun?

Yasir: Bir dakika hocam kafam karıştı. 100 tişörte kadar 12 TL'ye. O zaman kaç 90 çarpı 12 diyeceğim burada da. 90 çarpı 12 dersem 0. İki kere 9 18, 18'in 8'i. Bir saniye… (90x12 den 1080 bulur)

Araştırmacı: 1080 mi çıktı?

Yasir: 1080 çıktı hocam.

Araştırmacı: Hangisi ucuz?

Yasir: Hangisi ucuz? Çiçek baskı çok daha ucuz hocam. Hani fazla alım yapıldığında da çiçek baskı daha ucuza geliyor. Bence çiçek baskı daha mantıklı.

Araştırmacı: Her türlü çiçek baskı diyorsun. Nasıl vardık bu sonuca? Mesela bir tane denedin ya burada 90.

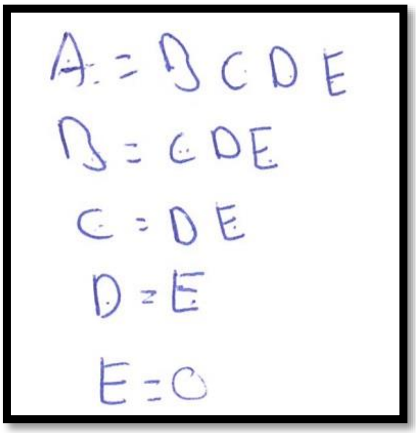
Yasir: Evet.

Araştırmacı: 90'dan sonuca nasıl vardık?

Yasir: Hocam bu bir nevi bu verdiği şeyler kampanya gibi mesela. Diyelim ki 100 tişörte kadar 12 TL'ye kampanyası var bunun bu şekilde, burada da bunun bir kampanyası var ilk 75 tişört. Hocam bu kampanyalara göre şey yaptım bir de en son sonuca baktığımızda tişört sayısı çok yüksek olduğunda da şey çok daha mantıklı çiçek baskı. Çünkü hocam burada daha fazla almamız gerekiyor 160 tane ve 6 liradan. Burada ise 150 liraya 5 liradan alabiliyoruz.

Sadece futbol probleminde Yasir'in yaptıklarını doğrularken bütünden parçaya gidecek şekilde takımlar arasındaki ilişkileri gösterip dörder maç yaptıklarından yola çıkıp kontrollerinde kendinden emin bir şekilde ilerlediği görülmüştür.

> Yasir: Tamam buraya yapayım. Maç sayısı, galibiyet, … (Maç sayısı, Beraberlik, Galibiyet, Mağlubiyet, şeklinde satırlar oluşturur ve daha sonra A, B, C, D ve E isminde sütunlar oluşturur ona karelere böler ve tam bir tablo haline getirir) Şimdi önce maç sayılarını bulalım. A'dan başlayalım A kaç maç yapmış? 2, 4. 4 maç oynamışlar. O zaman hepsi dörder oluyor.
>
> Araştırmacı: Nasıl anladık hepsinin dörder olduğunu?
>
> Yasir: Her biri biriyle birer defa maç yapabiliyor ya.




**Görsel 3.100.** *Yasir'in futbol probleminde takımların maç sayılarını doğrulaması*

Araştırma sürecinde Yasir'in problemleri tekrar okuduğunda cevaplarını değiştirebildiği, problemlerde yaptıklarının doğruluğunu gösterme ihtiyacı hissetmediği, işlemlerine devam ederken onaylanma ihtiyacı hissettiği, zaman zaman çizerek belirli adımlarda kendisinden istenileni bulma eğilimi olduğu ve rastgele özel örnekler seçip yaptıklarını doğrulamaya çalışabildiği gözlenmiştir.

### 3.2.4. Emrah'ın doğrulama yollarına ilişkin bulgular

Katılımcılardan Emrah'ın problemlere ilk yaklaşımında genellikle işlem yapmadan tahmin etmeyi tercih ettiği görülmüş ancak araştırmacının yönlendirmeleriyle problemi tekrar okuduğunda çözümünde değişiklikler yapabildiği ortaya çıkmış, Emrah yaptıklarının doğru olduğunda görüşmeler boyunca bir şüphe duymamıştır.

> Araştırmacı: Buna göre bu turnuvanın şampiyonu hangi takım olmuştur? İlk soru. Soruyu anladın mı? Anlamadıysan bir kez daha içinden de okuyabilirsin sonra konuşalım.

Emrah: A; E ve B'yi yeniyor. C ile berabere kalıyor. D'ye de yeniliyor. Tamam. B; C ve D'ye yeniliyor. Hm. tamam. D, C'ye yeniliyor. Şimdi hocam en çok galibiyeti alan takım bence kazanır. Buradan da baktığımızda 2 galibiyeti şey alıyor A alıyor.

…

Araştırmacı: Ne anladın sorudan?

Emrah: Hocam şimdi her biri belli bir öğrenci kitlesinden sonra, öğrenci sayısından sonra indirimlere başlıyor hani. Öğrenci fazlalığına bağlı olarak... İlk baktığımızda hani 75 tişört var. 12 TL… (Düşünüyor) Şimdi ilk olaya şeyle başlayalım hocam yani. 100 tişörtten 12 TL. Ajans matbaa ile başlayalım hani. Başlangıç olarak ajans matbaa 12 TL'ye 100 tişörte 12 TL veriyor. Iıı… Öbür matbaa… Çiçek matbaa mıydı? O ise 75 tişörtten sonrakilerin tanesinde… Pardon 10 TL fiyat biçiyor hani… 75 tişörte 10, biri de 12 TL fiyat biçiyor. Şöyle yazayım Çiçek 75 den, 75'e 10, öbürü 100 e ajans, 100 e 12 veriyor. (Kağıda "Çiçek 75'e 100", "Ajans 100 12" yazar) Hani şu ilk iki değerlendirmeme baktığımda şeyi değerlendiririm. Ajansı değerlendiririm hocam.

Araştırmacı: Neden ajans?

Emrah: Ya da 2TL'lik bir artış var. 75'e… Ya da devam edeyim hocam en iyisi…

Emrah, farklı problem durumlarında rastgele seçtiği özel örneklerle yaptıklarını deneme yolunu tercih etmiş ve bazen denemeye de ihtiyaç duymadan yaptıklarının doğru olduğunu ifade etmiştir.

Araştırmacı: Peki bunun böyle olduğunu göstermeye kalksan? Bir tane formül yazdın şu an 60'ta böyle buldun. Bu formül her zaman işe yarıyor mu ya da 60tanede işe yarıyor mu diye göstermeye kalksan yani bize formülün çalıştığını göstersen?

Emrah: En kısa örnek şeyin üzerinden bulabiliriz. Birincisi üzerinden deneyebiliriz…

…

Emrah: Evet, onu buldum.

Araştırmacı: Bu bulduğun doğru mu ama? Bana bunu gösterir misin? Bakın çalışıyor diyeceksin yani…

Emrah: Bunun çalıştığını size göstereceğim. Tamam, anladım. O zaman bunu küçük olan örneklerden birini…

Araştırmacı: Birinciyi üçüncüyü uyguladın…

Emrah: Aynen. 3.olan oldu…

Araştırmacı: 4'e uyguladın…

Emrah: O da olur yani olacaktır.

Problemlerin çözüm sürecinde Emrah özel örnekleri seçip problem durumunu kendisine göre anlamlandırmayı fazla tercih etmemiş ancak değişken kullanımında da problem yaşadığı için doğrulama yapmaya da yönelmemiştir.

Araştırmacı: Başka özel örneğe ihtiyaç duymuyorsun herhalde.

Emrah: Özel örnek derken?

Araştırmacı: Beşincide böyle, altıncıda böyle, yedincide böyle yazmak yerine ben bunu doğrudan cebirsel olarak göstermek istiyorum diyorsun yani…

Emrah: Aynen hocam bu şekilde. Yani daha rahat olur. Öbür türlü şekillerle çok uğraşırız bundan dolayı sıkıntı olur. Bu durumda “x artı 1” olur. “x artı 2” olur. “x” artı ııı “x” artan sayısı olacak. Onu nasıl ilişkilendirebiliriz onu çözemedim ben. 2’ye kaç oluyor burası 12’ye 10. 8, burası kaçtı 1, 2, 3, 4, 5. Burası 15’di. 12 oluyor yani. Beyazlar… 4… Şurası da ikişer ikişer…

…

Araştırmacı: Peki bu şeyin çalışıp çalışmadığını nasıl test edersin?

Emrah: Test ederiz. Burada mesela a’daki soruda Jale’nin konserden hedeflediği parayı kazanabilmesi için konsere gelecek kişi sayısıyla ilgili ne söyleyebilirsiniz diyor. Direkt buradan uygularsak zaten direkt kişi sayısını istiyor.

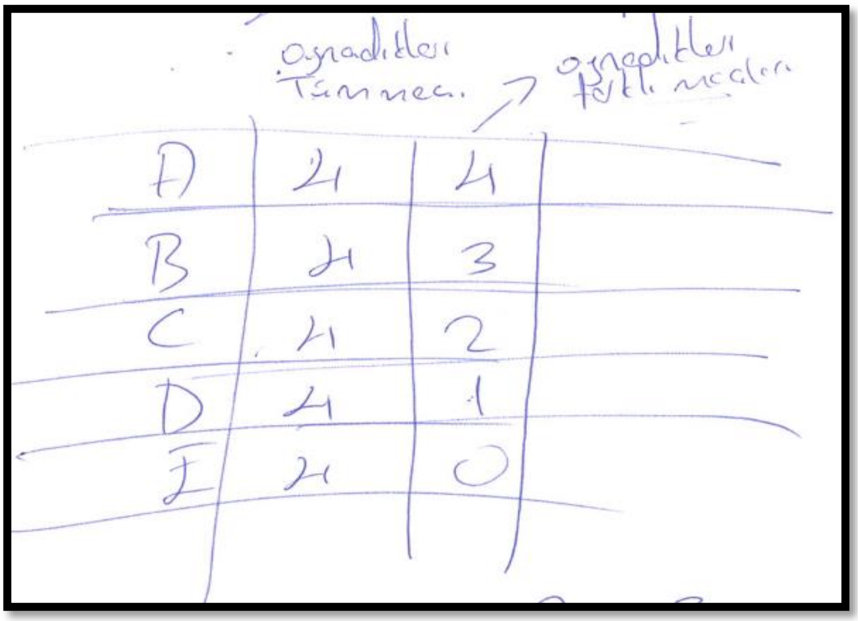
Araştırmacı: Hııı.

Emrah: Bu durumda bu formülü hiç değiştirmeden şu şekilde başlıyorum. Kazanmak istediği para şey 100 bin TL idi. 100 bin TL hocam. Artı harcadığı para 50 bindi. Bölü bunda bilet fiyatı da 20 TL idi hocam. (“(100.000 + 50.000 ) / 20” altına da “150.000 / 20 = 7500” yazar.)

Araştırmacı: Yani?

Emrah: Şimdi burayı topladığımızda 150 bin bölü şey olacak 20 olacak. Buradan da biz 7500’ü bulacağız.

Emrah’ın araştırmada kullanılan problemlerden sadece futbol sorusunda takımların birbiriyle oynadıkları maç sayılarından yola çıkarak yaptığı doğrulamada tablo üzerinden anlamlı bir bütün halinde çözümünü ifade edebildiği görülmüştür.




**Görsel 3.101.** *Emrah’ın futbol probleminde maç sayıları hesabı*

Emrah'ın yapılan görüşmelerde problemlerin cevaplarına yönelik tahminlerde bulunarak başladığı, değişken kullanmayı tercih etmediği ve yaptıklarını doğrulama sürecine girmediği gözlenmiştir.

### 3.2.5. Saffet'in doğrulama yollarına ilişkin sonuçlar

Saffet'in problem çözme sürecinde yaptıklarını kendiliğinden doğrulama ihtiyacı hissetmediği ancak problemde kendisinden böyle bir durum istendiğinde belirlenen sınırlara yönelik anlamlı örnekler üzerine denemeler yaptığı görülmüştür.

> Araştırmacı: Ne gibi mesela 2 fazlası artı 8? 1701 in 2 fazlası 1703 artı 8 tane de beyaz karo mu var diyorsun?
>
> Saffet: Aynen.
>
> Araştırmacı: Bu hep sağlıyor mu? 1701 daha yüksek onu deneyemezsin de 4 ve 5'te görebilirsin belki. Sağlar mı bu?
>
> Saffet: Şimdi 4 tane siyah karomuz var. Artı 8 birincide vardı. 2 de şeyden geldi siyah karonun üzerine 2 eklediğimizde geldi. Bu da 14 etti ve doğru.
>
> Araştırmacı: Beşe bakalım.
>
> Saffet: Beşe bakalım. Beşinci adımda 5 tane bize şey verdi. Üstüne 2 ekledik artı 8 verdi. 15 etti. Olmuyormuş. Hepsinde olmuyormuş. Çift sayılarda oluyor demek ki… Aynen altıncı adımda…
>
> Araştırmacı: Şimdi dördüncü adımda sen ne bulmuştun? 8, 10, 14 tane beyaz bulmuşsun. Dedin ki evet öyle gerçekten 14 tane beyaz. Beşinci adımda ne bulmuştun? 5 tane siyah dedin, 2 tane artırdın 7 tane oldu. 8 tane de elimizde vardı, 15 etti. Kaç olması gerekiyordu?
>
> Saffet: 16.

Katılımcının neyi kontrol etmesi gerektiği noktasında da problemler yaşadığı, doğrulama sürecine yönlendirmeler yoluyla girdiği gözlenmiştir.

> Araştırmacı: Toplam 15 tane buldun yani?
>
> Saffet: Toplam 15.
>
> Araştırmacı: Öyle mi gerçekten?
>
> Saffet: Öyle.
>
> Araştırmacı: Peki diğerleri için kontrol et.
>
> Saffet: Beşi mi?
>
> Araştırmacı: İstediğin herhangi birisini.
>
> Saffet: 5 yanlış çıkıyordu hani 4 doğru çıkıyordu da.
>
> Araştırmacı: Hı, 5'e bak.
>
> Saffet: 5'e baktığımızda ise… Şimdi beşinci adımın sağında ve solunda olmak üzere 10 tane beyaz, 6 tane birinci adımdan gelen ekstradan şeyimiz vardı o da 16 tane beyaz, 5 tane siyah karo ediyor. O da toplamda 21 ediyor ve doğru.

Araştırmacı: Peki 60'a bakalım sağlıyor mu?

Saffet: 60'a bakalım. 60. adımda 60 tane siyah karo var. Sağında ve solunda olmak üzere 120 tane beyaz karo var. İlk adımdan gelen 6 beyaz karoyu da eklersek 126 tane beyaz karomuz var. ("186 – 60 = 126" yazar.)

Araştırmacı: Burada ne bulmuşsun?

Saffet: Orada 106 bulmuşum.

Araştırmacı: Hangisi doğru?

Saffet: Bu. Matematiksel işlemle gösterdiğim. (Gülüşmeler.)

Araştırmacı: Sayarak yaptığımdan emin değilim diyorsun yani?

Saffet: Sayarak yaptığımdan bir anlık oldu o. (Gülüyor.) Onu da doğru yapabilirim aslında yani birazcık daha düşünsem…

Araştırmacı: Ama bundan daha eminsin yani?

Saffet: Aynen bundan daha eminim.

Yönlendirmelerle doğrulama sürecine girdiğinde de yaptığı iki denemenin problemde bulduğu sonucu doğrulayacağı düşüncesinde olduğu ortaya çıkmıştır.

Araştırmacı: Peki, bu bulduğumuz kural her adımda işe yarar mı?

Saffet: Yarar.

Araştırmacı: Nasıl? Denedim oldu mu diyorsun yani?

Saffet: Aynen. Daha demin beşinci adımda denedik, 60. adımda denedik…

Saffet'in problemlerin çözüm sürecinde kendi yönergeleriyle hareket ettiği ve deneyeceği özel örneklere ilişkinin oluşabileceği sınır değerler üzerinden ulaştığı görülmüştür.

Saffet: Bir kural yazabilir miyim?

Araştırmacı: Az önce söylediğin şeye karşılık geliyor aslında biraz.

Saffet: Evet, denklem kuracağız.

Araştırmacı: Nasıl bulursun mesela? Yaptığın şey de çok uzak değil ondan da.

Saffet: Iıı nasıl yaparız? (Sessizlik) ("beyaz karo + 2" yazar ve altına "8 + 2.n" yazar.)

Araştırmacı: 8 artı "2 çarpı n". 8, birinci karolar mı?

Saffet: Evet.

Araştırmacı: "n", ne orada?

Saffet: "n" ne? Adım sayısı. Hani şimdi adımların şeyini sayısıyla ikilerin sayısını çarptığımızda sekizi eklediğimizde hani bir ortaya bir şeyler çıkacak ama…

…

Araştırmacı: Peki o 75'i 160'ı neye göre seçiyorsun?

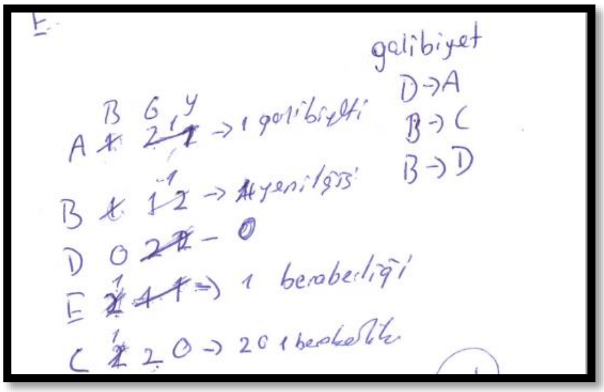
Saffet: 75'i 160'ı neye göre seçiyorum? Diğer matbaa 160 taneden fazla alım satım olursa diyor. Yani 160'a kadar bir şey demiş. 160 dan sonrasını hesaplamaya gerek yok çünkü orada da bir şey var da… Hocam durun. (Gülüyor) Iıı neye göre belirledim o kişi sayısını…

Matbaaların vermiş olduğu en fazla fiyatı bulabilmek için. Avantajları nelermiş onları öğrenebilmek için.

Futbol probleminde de Saffet'in problemdeki doğrulamasını tümdengelim yoluyla yaptığı görülmüş ve takımların aldıkları puanları düşerek hepsinin nötr kalması durumunda yaptıklarının doğru olacağına inandığı ortaya çıkmıştır.

Saffet: Nasıl anladım? Iı galibiyetlerle yenilgileri çıkarttım ilk önce. Hepsinin ama. Mesela E'nin 1 yenilgi 1 galibiyet nötr. D'nin 2 galibiyet 2 yenilgi nötr. B'nin 1 galibiyet 2 yenilgi var eksi bir. A'nın 2 galibiyet 1 şeyi var yenilgisi o da 1 yapıyor. Ondan sonra şuradan A'nın beraberliğini silecek olursak bir, bir. Diğerlerinden de birer çıkartmamız gerekiyor E ve C. Onlara da bir, bir kalıyor. Onların 2 beraberliği vardı. Bir bir kaldı. Şimdi bu nötr, nötr 0. Bir beraberliği var E'nin sonuç olarak. 1 beraberliği… (Tabloda A satırına ok çıkarır "1 galibiyet" yazar, B satırına "1 yenilgi" yazar, D satırına "0" yazar, E satırına "1 beraberlik" yazar, C satırına "2 0 1 beraberlik" yazar. A'da G'nin altındaki 1 ile G'nin altındaki 1 götürüyor geriye 1 galibiyet kalıyor, B'de 1 G den 2 Y çıkıyor -1 kalıyor. D'de 2 G ile 2 Y birbirini götürüyor 0 kalıyor. E'de 1 G ile 1 Y birbirini götürüyor 1 beraberlik geriye kalıyor. C deki 1 B ile A'daki 1 B birbirini götürüyor geriye sadece C'de 1 beraberlik kalıyor.)

Saffet, oluşturduğu liste üzerinde problem içerisinde geçen takımların alacağı puanları dikkate almadan galibiyet sayılarından yenilgi sayılarını düşerek bir kontrol gerçekleştirmiş, geriye kalan beraberlik sayıları da kazananın hangi takım olacağı konusunda kendisine yardım etmiş ve C takımını şampiyon ilan etmiştir.




**Görsel 3.102.** *Saffet'in futbol problemindeki sonucu kontrol etmesi*

Saffet'le yapılan görüşmelerde katılımcının onaylanma ihtiyacı hissetmeden de çözümüne devam edebildiği, kendi yönergelerini kullanmasına rağmen doğrulama sürecine kendisinin girmediği, deneyerek yaptığı doğrulamalarda ise özel örneklerini ilişkileri gösterebilecek şekilde seçmeye çalıştığı görülmüştür.

### 3.2.6. Abdi'nin doğrulama yollarına ilişkin bulgular

Araştırmanın katılımcılarından Abdi'nin problemlerin çözüm sürecinde yaptıklarının doğrulanması istendiğinde değişken kullanımına yöneldiği görülmüştür.

> Araştırmacı: Peki bunu nasıl doğrularsın? Doğrulamaktan kasıt biri sana dedi ki bunun her adımda doğru olduğunu nereden bileceğiz? Sen nasıl gösterirsin? Hep aynı adımda doğru çıkar mı?
>
> Abdi: … (Sessizlik) Adım sayısına "n" dersek… Bir kural bulmamızı istiyorsak…

Problemler boyunca kendi yönergeleriyle hareket eden Abdi'nin deneyerek de yaptıklarını doğrulayabildiği ve bu örnekleri ilişkileri gösterebilecek şekilde seçmeye çalıştığı belirlenmiştir.

> Araştırmacı: Daha büyük teraslarındaki karo sayılarını bulmak için nasıl bir yol izlersiniz? 5 demedi de… Onu c şıkkıyla beraber düşünebilirsin. B ve C'yi beraber düşünebilirsin.
>
> Abdi: Mesela 11. Adımı mı dedi örnek veriyorum. Mesela ikinci adımda 1, 2, 3, 4 tane var. 3.adımda 1, 2, 3, 4, 5. 11.adımda 13 tane olur.
>
> …
>
> Araştırmacı: Soru şu işte. Bunun doğru olduğunu nasıl gösterirsin? Bu formül çalışıyor mu acaba?
>
> Abdi: Bu formülün çalışıp çalışmadığını deneyerek buluruz.
>
> Araştırmacı: Mesela neyi denersin?
>
> Abdi: Mesela 20.adımı denerim.
>
> …
>
> Abdi: Ben öneride bulunursam öğrenciniz… (Sessizlik) 150 den fazlaysa ajans baskıya gidin. 150 den azsa çiçek baskıya gidin derdim.
>
> Araştırmacı: Peki bu kanıya nasıl varırsın? 100'ü denemek, 150 den öncesi için yorum yapmak için; 170'i denemek de 150 den sonrasında yorum yapmakta yeterli mi?
>
> Abdi: Yeterli mi?
>
> Araştırmacı: Bundan nasıl emin oluruz?
>
> Abdi: Soruyu bir daha okuyarak. (Soruyu tekrar okur) Şimdi bir de burada arada bir de 120'yi denemek istiyorum.
>
> …
>
> Abdi: Bir saniye. 250 bin TL kazanırdı ama 200 bin kar yapardı. (250.000 TL kazanırdı 200.000 kar yapardı yazar.) Doğru hesapladığıma emin değilim bir daha hesaplayayım.

Abdi'nin problemlere tahminlerde bulunarak da başlayabildiği ancak daha sonra bu tahminin doğrulamaya çalıştığı görülmüştür.

> Abdi: Şimdi okulda fuara katılacak öğrenci sayısı henüz kesin değil. Şimdi ben olsam… 1.yi çiçek baskı matbaa tişörtlerine, yani çiçek baskıya verilmesini öneririm.

Araştırmacı: Neden?

Abdi: Çünkü katılacak öğrencilerin sayısı belli değil. Örneğin; 100 öğrenci katılsa… Şöyle bir hesaplama yapmak istiyorum ortalama. 75 çarpı 10 dan 750 TL artı 75 den 25 tanesi sekizer lira olacağından 25 çarpı 8 den 200 lira. O da eşittir 950 TL para yapar ortalama. Diğer matbaayı hesaplarsak…

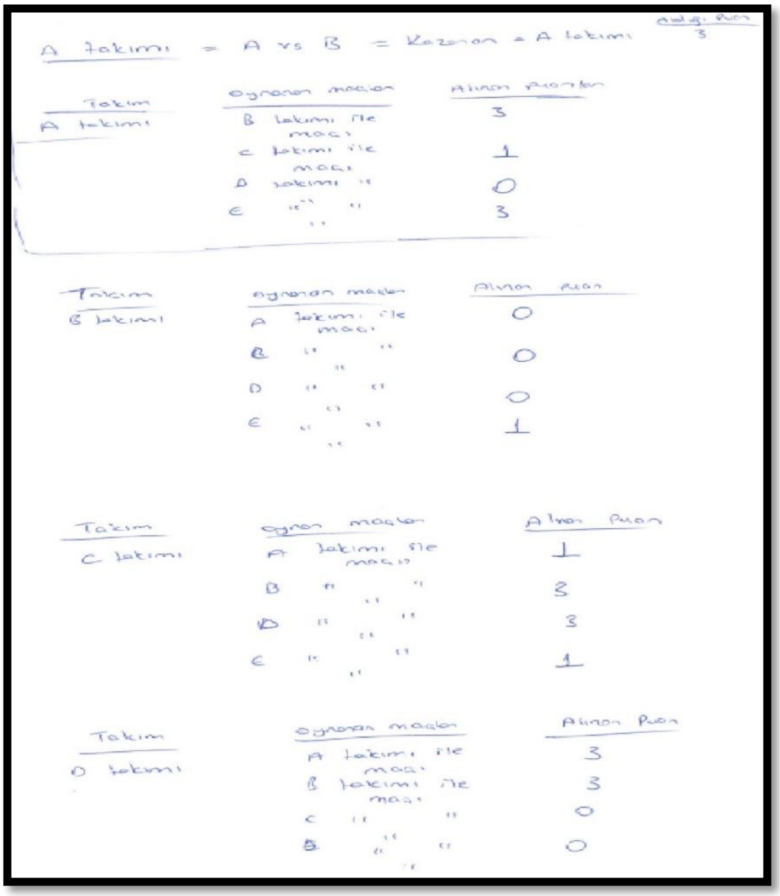
…

Abdi: (Kağıda 950 TL'nin yanına ok çıkararak "Çiçek Baskı matbaa" yazar) Çiçek baskı matbaa. Şimdi 100, diğer matbaaya göre 100 tişörte kadar 12lira ise 100 çarpı 12'den direkt olarak 1200 yapıyor zaten. Örnek veriyorum 100 öğrenciye göre (Kağıda 1200 TL'nin yanına ok çıkarıp Ajans matbaa yazar) eğer otalama 100 öğrenciye göre baskı hesapladım. Eğer ikinci matbaayı seçerse yaklaşık bir 250 lira zarara girecek. Şimdi ben ortalama 100 hesapladım. Ne olur… 160, hatta 165 diyelim örnek olarak…

Araştırmacı: Neden 100'ü seçtin örnek olarak?

Abdi: Çünkü 75 ile başlamış, 150-160'dan devam etmiş. Bunun hani kafadan direkt rasgele verdim. Ama hani kafamda uygun olan nokta 100'dü yani. Bir de sonuçta rasgele bir hesaplama yapıyorum ve bir yerden başlamam lazım.

Araştırmada kendisine yöneltilen futbol probleminde ise Abdi'nin tüm takımların maçlarını tek tek görebileceği bir liste oluşturduğu ve bu listeden kontrollerini anlamlandırdığı gözlenmiştir.



**Görsel 3.103.** *Abdi'nin futbol problemindeki cevaplarını kontrol etmesi*

Genel anlamda Abdi problemlere tahmin ederek başladığında bile tahminlerini doğrulamaya çalışmış, doğrulamalarını değişken kullanarak da ifade etmeye çalışmış, ilişkileri görebileceği özel örneklerle deneyerek de doğrulama yaklaşımında bulunmuş ve bunları kendi yönergelerini kullanarak yapmıştır.

### 3.2.7. Oğulcan'ın doğrulama yollarına ilişkin bulgular

Katılımcılar arasından görselleri en çok kullanan isim olarak öne çıkan Oğulcan'ın doğrulamaları sırasında ya da alternatif yöntemlere yönlendirildiğinde de görsel kullanmaya çalıştığı görülmüştür. Örneğin futbol probleminde Oğulcan'dan yaptıklarını doğrulaması istendiğinde takımlara verdiği puanları geri alarak kontrol edebileceğini söylemiştir. Takımların eksi puana düşmesi durumunda hata yapmış olabileceğini ifade etmiş ve doğrulaması sırasında kendi hatasını kendisi fark etmiştir. Oğulcan'ın, bu doğrulaması sırasında ilk stratejisi olarak belirlediği takımların puanlarını çizgiler ile göstermeyi devam ettirdiği görülmüştür.

> Araştırmacı: Peki, bunu kontrol etsen gözden geçirsen nasıl kontrol edersin?
>
> Oğulcan: Nasıl kontrol ederim… Puanlarını ıı mesela A'ya 7 puan derim düşerek yaparım mesela.
>
> Araştırmacı: Nerden düşerek?
>
> Oğulcan: A, E ve B'yi yeniyormuş. 6 puan düşerim.
>
> Araştırmacı: Hıı düşüp sonra?
>
> Oğulcan: Yani "0"a düşerse ya da eksiye düşerse…
>
> Araştırmacı: Yap yap nasıl yapacaksın?
>
> Oğulcan: A, 7 imiş. B 1, C 5, E 9, E 4. (Kağıda eşittir kullanıp takımların puanlarını yazar) A, E ve B'yi yeniyor. 3 er puan alıyor 6 puan gitti geriye kaldı 1. Ondan sonra C ile berabere kalıyor 1. A'nın maçı olmaması lazım bir daha ya da yenilmesi lazım. Başka puan alırsa eksiye düşer. A, 0 şu anda. D'ye de yeniliyormuş. Yenilince zaten A ya puan gelmiyor 0 yine. B, C ve D'ye yeniliyor. B'nin 1'di yenildiği için yine sıfırda durdu. D, C'ye yeniliyor yine 0. E, D'yi yeniyor. E, D'yi yeniyorsa yine… Yoo... Şu an B'ye bakıyorduk ya. B'ye bakalım sadece. B ve C ile berabere kalıyormuş. B'ye 1 puan buradan gitti yine. Bu 0 oldu. ("B = 0" yazar) Tamam B de gitti. Şimdi en baştan yine…
>
> Araştırmacı: C'ye mi bakacaksın?
>
> Oğulcan: Aynen. A, E ve B'yi yeniyor C ile berabere kalıyor. C'nin 1 puanı gitti 4. Iıı D ye yeniliyor. B, C ve D'ye yeniliyor. D, 3 puan alacaktı buradan. Yine C'nin 1 puanı kaldı, 3 ü gitti. (C'yi kağıtta 1 e düşürür) D, C ye yeniliyor. O zaman D…1 puanı vardı.3. Yanlış hesaplamışız o zaman. Bir hata çıktı.

Oğulcan, görseller üzerinden artış miktarları yoluyla da doğrulamalarını ifade edebilmiştir.

> Oğulcan: Şöyle yaparım hocam. Şimdi şunun iki fazlası oluyor genelde hani siyah karonun iki fazlası alt kısımda oluyor sadece. Şimdi 60'sa 62 tane burada var, 62 tane burada var. O da 124 yapar. 125 ve 126. 126 tane beyaz karo var derim ben buna. Anladınız mı bir daha söyleyeyim mi nasıl yaptığımı?

Oğulcan'ın problemlerde kendi yönergelerini kullanmış olmasına rağmen alternatif yöntemlere yönlendirildiğinde kendine ait olmayan yönergeleri geri çağırmaya çalıştığı görülmüştür.

> Araştırmacı: Şimdi bak şöyle düşün. Bir tane doğru var. Sorudan biraz bağımsız söylüyorum bunu. Bu doğrunun denklemini yazman isteniyor. Ne yaparsın?
>
> Oğulcan: Evet, yazdım ama şuanda hatırlamıyorum. (Gülüyor.)
>
> …
>
> Oğulcan: Bunu fonksiyonlarda falan görmüştüm ben bunu. … Şey diyorduk "x-(x-1)"…

Problemlerde değişkenleri kullanabildiği görülen Oğulcan, doğrulamaları sırasında da değişkenlerle oluşturduğu cebirsel ifadeleri özel örnekler üzerinden kontrol etmiştir.

> Araştırmacı: İki üç tanede oluyorsa her adımda işe yarıyordur diyebilir miyiz?
>
> O : Iıı… deriz ya herhalde. Yani nereden bileyim yazdığım kuralda hepsi de tesadüf olacak değil ya herhalde ya da bir beş altı tane denerim ama doğru çıkıyorsa hani hiçbir tane bile şey çıkmıyorsa… Ha bir de olayın şu kısmı düşünülebilir mi? İşte matematikte işte mesela sayılarda karmaşık sayılar giriyor işin içine bunlar rasyonel olmuyor doğal sayı olmuyor falan ya hani irrasyonel sayılar falan ama bu görüntü olduğu için bunda pek böyle bir boyut olacağını düşünmüyorum. O yüzden bu konu üzerinde bir dört beş tane denesem yeterli olacağını düşünüyorum.

Oğulcan'ın doğrulama yolundaki denemeleri sırasında rastgele örneklere yöneldiği de görülmüştür.

> Araştırmacı: Belirle. Nasıl öğrenci sayısı belirleyeceksin bakalım.
>
> Oğulcan: İşte o biraz karışık. (Gülüyor) … Diyelim ki 75 tişört demeyelim de 70 tişört diyelim direkt. (Kağıda 70 tişört yazar)
>
> Araştırmacı: 70 tişört diyorsun. O sayıların ne olduğunu yaz ki biz bilelim daha sonra baktığımızda ne olduğunu.
>
> Oğulcan: Iıı… 70 tişörtten fazla tişört alınması halinde… Bir de 75'ten fazla olsun. 90 tişört diyelim. 150 de… 150 ne diyor (Soruyu içinden okur) Bir de 200 tişört olsun. Bu çiçek matbaa şeyi… Aynı şekilde ajans matbaayı da aynı sayılara göre yapmamız lazım.
>
> Araştırmacı: Neye göre belirledin 70 tişörtü?
>
> Oğulcan: Rastgele deniyorum şu an hangisi avantajlı diye.

Oğulcan'ın problem çözme sürecinde doğrulamalarında değişken kullanabildiği, normalde kendi yönergeleriyle hareket ediyor olmasına rağmen alternatif çözümlere yöneldiğinde ve bunları doğrulaması gerektiğinde kendisine ait olmayan yönergeleri geri çağırdığı, rastgele seçtiği özel örnekleri doğrulamalarında kullanabildiği, oluşturduğu cebirsel ifadesini doğru olduğunu göstermek için de birkaç denemenin yeteceğini ifade ettiği görülmüştür.

#### 3.2.8. Orhun'un doğrulama yollarına ilişkin bulgular

Araştırmanın katılımcılarından Orhun'un problemlerde matematiksel sayı, sembol veya ana dilini kullanarak ifadeler yazabildiği görülmüş, ana dilde yazdığı ifadelerin de birkaç denemenin sağlaması durumunda doğru olacağını belirttiği ortaya çıkmıştır.

> Araştırmacı: Peki. E şıkkında da şey demiş. Bulduğumuz bu kuralın her adımda işe yarayıp yaramadığını nasıl kontrol edersiniz?
>
> Orhun: Mesela hocam bir sayı söyleyin.
>
> Araştırmacı: Ama doğrulayabileceğin bir şey olması lazım bir yandan da. Yani şimdi örnek veriyorum. Şöyle dediğin zaman yeterli gelecek mi? Atıyorum 100 karo için konuşuyorsak bu elindekileri uyguladın ve bu kadar beyaz karo vardır dediğinde; karşıdakine bunu söylemek yeterli mi? Yani tek bunda gösterdiğinde o zaman bu formül çalışıyor demek doğru olur mu? O sayılar tutuyor mu yani? En kolayı sayarak baktığında…
>
> Orhun: Tamam.
>
> Araştırmacı: O yüzden yüksek bir sayı vermek mi avantajlı senin için yoksa sonucunu bildiğin şeyleri denemek mi?
>
> Orhun: Iıı… İspat söz konusuysa büyük bir sayı vermek saçma olur…
>
> Araştırmacı: Ya da şöyle söyleyelim. Sen bunu kendince nasıl ispatlarsın?
>
> Orhun: Bu çalışıyor çünkü biraz önceki yaptığımız işlemi aslında formüle döktük. Yani bulduğumuz sonuç da muhtemelen doğru.
>
> Araştırmacı: Bunu nasıl gösteririz?
>
> Orhun: Bunu nasıl gösteririm? En basitinden şekli çizip sayarak gösterilebilir veya örüntü üzerinden bir şeyler yapılabilir. Nasıl bir şey yapılabilir?
>
> Araştırmacı: Mesela bu uyguladığın kural bu karo sayıları için oluyor mu? Önce onları deneyebilirsin.
>
> Orhun: Mesela ilk adımdan deneyelim. İlk adımı tutarsam... İlk adımdaki karo sayısı ne olacak? 9 olacak. Artı adım sayısı… Buraya normalde doğru olan şey 1 vermek ama 1 çarpı 3 dersek formül patlar…
>
> Araştırmacı: Neden bitmedi daha?
>
> Orhun: Hı. Eksi 3. Tutuyor. Eşittir 9. 12 eksi 3 ten, yoo 12 eksi 1 den…
>
> Araştırmacı: 11 tane beyaz karo mu çıktı?

Orhun: Aynen öyle.

Araştırmacı: İkinci adım için doğru mu acaba?

Orhun: İkinci adımı deneyelim. 9 artı ikinci adım, 2 çarpı 3 eksi 2 eşittir… 9+6 eksi 2, 13. Bu da yanlış. (“9+ (1.3)- 3 = 12 – 1 = 11”; altına “9 + (2.3) – 2 = 9 + 6 – 2 = 13” yazar.)

Orhun, doğrulamalarını görselleri kullanarak da yapabilmiş ve nasıl hesaplamalar yaptığını kendi cümleleriyle ifade etmiştir.

Araştırmacı: Ne yaptık? Örüntü olduğunu nasıl söyledin?

Orhun: Çünkü burada adım adım gitmiş. Adım adım gittiğini görürsek de hep bir şeyler eklenmiş. Sayılarına baktığımızda da hep belirli bir oranda eklenmiş. Yani belirli bir sayıda eklenmiş. Mesela 1 siyah karo için 2 tane beyaz karo eklenmiş fazladan gibi bir örüntü var.

Orhun, klinik görüşmeler süresince doğrulamalarında ana dilini ve değişkenleri kullanabilmiş ve birkaç denemenin yaptıklarını doğrulamak için yeterli olacağını belirtmiştir. Kendisine verilen nicelikler arasındaki ilişkilerden bir doğrulama arama yoluna gitmemiş yeteri kadar denemenin yaptıklarını sağlamasının doğrulaması için yeterli olacağını düşünmüştür.

### 3.2.9. Habibe’nin doğrulama yollarına ilişkin bulgular

Habibe, yaptıklarının doğrulanması istendiğinde problemleri tekrar okumaya yönelebilmiş ve alternatif yöntemlere yönelmekte zorluk yaşamıştır.

Araştırmacı: Nasıl kontrol edersin Habibe?

Habibe: Nasıl kontrol ederim? … (Sessizlik) Üç, altı… Gözden geçirirsem yine aynı şey oluyor.

…

Araştırmacı: Peki. Önce şöyle bir şey yaptın. A, B, C, D, E diye yazdın. Galibiyet, beraberlik, mağlubiyet diye. Sonra vazgeçtin ondan. Sonra tek tek maçları yazayım dedin onu yazdın. Peki, acaba senin bu soruyu daha iyi görmeni sağlayabilecek bir yöntem var mı? Şöyle yapsam daha rahat yaparım dediğin. Bu arada kağıt ve zaman sınırımız yok.

Habibe: Başka ne tür yöntem kullanılabilir…

Araştırmacı: Bu aklına geldi yaptın.

Habibe: Hıhı.

Araştırmacı: Buradan devam da edebilirsin tabii ki bunun doğru olduğunu düşünüyorsan.

Habibe: Başka da yöntem olmaz herhalde diye düşünüyorum.

Araştırmacı: Buradan devam edeceksin yani.

Habibe: Evet.

Araştırmacı: Peki burada seni sıkıntıya sokan ne?

Habibe: Burada beni sıkıntıya sokan maç… Hani daha fazla maç yapması.

Problemlerde Habibe, görsellerdeki artışın yardımıyla değişkenlerle genelleme oluşturabilmiş ve oluşturduğu genellemeler üzerinden rastgele seçtiği birkaç özel örneklerle yaptıklarını doğrulamanın yeterli olacağını düşünmüştür.

Araştırmacı: Peki. Bulduğun bu yöntemin çalışıp çalışmadığını nasıl denersin?

Habibe: Denerim. Bir tane işte 60'tan daha farklı mesela…

Araştırmacı: Mesela dene. Neyi deneyeceksin?

Habibe: Kaç olsun? 100 olsun. Iıı "n" 100 olacak. O zaman 100 çarpı 3 toplam kare sayısıydı. 100 çarpı 3'ten 300 tane toplam kare sayısı var. 300 demiştim "n-2" tane "b" demiştim. "n" 100 olduğuna göre 100-2, 98. 98 tane siyah. Iıı "a-b" de beyaz, yani 300-98… Toplam 202 tane de beyaz olur. Eğer yaparsam…("n = 100", altına "100 x 3 = 300 toplam kare", "100 – 2 = 98" tane siyah, altına "300 – 98 = 202" tane beyaz yazar.)

Araştırmacı: Şimdi bu denediğin şey kaçıncı teras?

Habibe: 100.

Araştırmacı: 100. terasta "n"i 100 mü aldın? n dediğimiz şey nedir?

Habibe: "n" dediğimiz şey 100 değil, 102 alacağım.

Araştırmacı: Şöyle sorayım. 100. terastaki beyaz kare sayısını senin yazdığın kuralla nasıl buluruz?

Habibe: Ben orada "n"e şey demiştim. 60. terasta 62 tane oluyordu. 100. terasta "n" 102 olacak buna göre gidersem.102 çarpı 3 olacak. Bu da 306 yapacak. Iıı… Siyah "n-2" idi, yani 102- 2, 100 tane kareydi.

Araştırmacı: 306 toplam kare.

Habibe: Evet. 100 tane siyah, "n-2"ye siyah demiştim. "a-b"de yani 306-100 de beyaz kareyi verecekti o da 206 yapar. ("n = 102", altına "102 x 3 = 306 toplam", "102 – 2 = 100 siyah", "206 beyaz" yazar.)

Araştırmacı: Yani 100. terasta 206 beyaz, 100 tane siyah vardır diyorsun. Orada ben sana 100. teras diye söylediğimde aldığın 102 nedir?

Habibe: 102 ben burada n e şey demiştim. 60. terastı 62 tane dikey sütun vardı…

Araştırmacı: Neden öyle dedin?

Habibe: Neden öyle demiştim? Burada mesela 4.terasta 1, 2, 3, 4, 5, 6 tane dikey vardı. Yani 2 fazlası. Mesela 5.terasta da 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 tane vardı. Yine 2 fazlası. Hep 2 fazlası olduğu için 100. terasta da 102 tane olur.

Araştırmacı: Sütun sayısı mı yani n?

Habibe: Evet, sütun sayısı.

Problemde 100 özel örneğinin kuralın çalışması için yeterli olup olmadığı sorulduğunda ise Habibe, karo sayılarının kaçar tane olduğunun anlaşılabilmesi için onları çizip saymak gerektiğini belirtmiş ve daha önce çizilenler üzerinden tek tek kontrol etmiştir.

Araştırmacı: Hı. Bu formülle bulabilirim diyorsun. Peki, bu formülün doğruluğunu sadece 100 de denemek formülün, kuralın çalıştığını gösterir mi yoksa başka bir şey yapman gerekir mi?

Habibe: Başka bir şey tabii hani kanıtlamak için bunu çizmek gerekir.

Araştırmacı: Çizersem daha rahat görürüm diyorsun yani?

Habibe: Çizince hani doğruluğunu ya da yanlışlığını…

Araştırmacı: Ki 100 taneyi çizmen uzun sürer ya da çizemezsin. Burada çizdiklerin var.

Habibe: Hıhı.

Araştırmacı: Bunlarda çalışıp çalışmadığına bakabilir misin?

Habibe: Bakabilirim. Burada mesela "n"e 2 fazlası diye söylemiştim. 4. teras için mesela bakayım. O zaman n burada 6 olur. 6 çarpı 3 bu toplam, hayır pardon. 6 çarpı 3 toplam sayısı olur yani 18. "n-2" tane beyaz yani 4 tane beyaz. Evet, 4 tane beyaz. 18 eksi 4 ten de 14 tane siyah. ("4" yazar, altına "n = 6", "6 x 3 = 18", "4 beyaz, 14 siyah" yazar.) Evet.

…

Araştırmacı: Nasıl bulduk?

Habibe: Onu şey şunları bulmuştum 62 tane dikey sütun 3 tane yatay sütun diye. Oradan hani onları çarparak toplam kare sayısını…

Araştırmacı: Ne ile neyi çarptın toplam kare sayısını bulmak için?

Habibe: 62 ile 3 ü.

Araştırmacı: 62 ile 3 ü çarpınca 186 yaptı.

Habibe: 186 çıktı. 60 tane siyah olduğunu zaten bulmuştum. 60 tane siyahsa 126 tane de beyaz.

Habibe'nin problemleri anlamlandırmak için özel örnek kullanma yöntemine yönelmemiş ve yaptıklarının doğru olup olmadığını zaman zaman araştırmacının yönlendirmeleriyle görebilmiştir.

Araştırmacı: 300 tane öğrencide hangi matbaa?

Habibe: Şimdi 300 tane öğrenci… Şimdi tekrar gözden geçiririm. Çiçek baskı matbaa 75 tişörte kadar 10 TL vermişti. 750 TL geldi. 75 tişörtten halinde sonrasına 2 TL'lik indirim yapacağını söylüyor. Iıı oradan 600 geldi. 150'den fazla alım halinde... İlk fiyata göre 5 TL'lik indirim yapacağını, 300 öğrenci var. 150 sini burada hesapladım. 150. 150 çarpı 5 olacak. (150x5 = 750 bulur) 750 TL geldi. Bunun için buna tekrar bakayım. İlk 100 tişörte kadar 12 TL'ye basım yapacağını, 1200 TL. 100 ile 160 arasında hesaplanacak toplam ücretten yüzde 25 indirim yapacağını, 900 TL. 160'tan fazla alım olur ise de tişörtlerin tanesini 6 TL'den. 160 taneden sonrası… Iıı… 40, 140 tane. (140x6= 840 bulur.) 840 TL. Yani şimdi toplam fiyatı çıkarırsam… Yine çiçek matbaa.

Araştırmacı: Peki. Ajans matbaada ilk 100 tişörte kadar 12 lira demiş. 100 ile 160 arasında yapacaksak başka bir şey demiş.

Habibe: Hıhı.

Araştırmacı: Son kısımda ne demiş?

Habibe: 160 taneden fazla alım olursa sayıya bakılmaksızın…

Araştırmacı: Bu ne demek?

Habibe: 160 tane fazla… Sayıya bakılmaksızın… Hııı… 160 taneden fazla alınırsa eğer bütün tişörtlerin tanesini 6 liradan verecekmiş. 300 çarpı 6 1200 TL. Yani ajans matbaa.

Habibe'nin birden fazla değişken kullanıp kendisini ifade edebildiği ve yaptıklarını anlatabildiği görülmüştür.

Araştırmacı: Peki şimdi bu yazdığın eşitliği açıkla bize ne yazdın Habibe?

Habibe: Ben burada ne yazdım? Iıı şöyle düşündüm. Iıı istediği şeyleri ilk önce istediği şeyler için farklı bilinmeyenler verdim ve olan şeyler için farklı bilinmeyenler verdim. İstediği şey "x TL" para kazanmak istiyor giderler hariç. "y TL"sini giderlerine veriyor ve "x + y" kadar kazanması gerekiyor "x"i elde etmek için. Bu istediği şey gerçekte olansa "a" kişi geliyor ve biletlerin fiyatları "b TL" oluyor. "a çarpı b" de konserde kazandığı ücret. "x + y" kazanması gerekiyordu. "a çarpı b"de gerçekten konserden kazanmak istediği ücret. Eğer bunlar eşit olursa istediği parayı kazanabilir.

Genel anlamda problem çözme sürecinde Habibe, problemlerde yaptıklarının doğru olup olmadığına emin olmak için tekrar problemi okuma yoluna gidebilmiş, görsellerdeki artışlardan oluşturduğu genellemesini birkaç denemenin sağlaması durumunda doğru olacağını düşünmüş, özel örneklerle yaptıklarını doğrulamayı sıklıkla tercih etmemiş ve zorlanacağını düşündüğü durumlarda yaptıklarını doğrulama ihtiyacı hissetmemiştir.

### 3.2.10. Şerife'nin doğrulama yollarına ilişkin bulgular

Şerife, kendisiyle yapılan klinik görüşmeler boyunca tüm problemlerde kendi sayı, sembollerini problemleri doğrulaması sırasında bilinçli bir şekilde kullanmıştır.

Şerife: Tamam. Şimdi soruyu okudum. Ondan sonra ilkönce verilen puanları yazdım. Daha sonra sorunun sırasına göre gitmeye başladım. A, B, C, D, E takımlarını yazdım. Şimdi A; E ve B'yi yeniyormuş. E ve B'ye 0,0 yazdım. A da iki tane takım kazandığı için 3, 3 oluyor. 6 puan. Sonra C ile berabere kalıyor. O zaman C'ye de A'ya birer puan gelecek. D'ye de yeniliyormuş. O zaman A, 0 alacak. D, 3 alacak. B takımına geliyoruz. B; C ve D'ye yeniliyormuş. C ve D, o zaman üçer puan olacak… (Problemde ne yaptığını anlatırken verdiği puanları dikdörtgen içerisine almaya başlar. Daha sonra da geriye dönüp puanlamasını kontrol ederken doğru yaptığını düşündüklerine tik koyar.)

…

Araştırmacı: Peki. Bu kutucuklar içerisine aldın ya puanları?

Şerife: Evet.

Araştırmacı: Bütün takımların ııı kutucuk sayıları ne olmalı? Senin yaptığın yönteme göre söylüyorum.

Şerife: 4.

Araştırmacı: 4 neyi ifade ediyor yani orada?

Şerife: Yapılan maçları.

Araştırmacı: Bir takımın yaptığı maçı mı yoksa…

Şerife: Birbirleriyle yaptıkları maç.

Kullandığı sayı veya sembollerle kendi hatasını kendisinin gördüğü görülmüş ve düzeltme yoluna gitmiştir.

Şerife: B, 3 tane yapmış. Burada 2 tane 3 var. (A yazdığı 6'yı göstererek)

Araştırmacı: A, tamam diyorsun.

Şerife: Evet. E'de de 4 tane. B'de 1 tanesini eksik yazdım büyük ihtimalle.

Araştırmacı: Ne olabilir o?

Şerife: Bir daha deneyelim mi?

Araştırmacı: Deneyebilirsin.

Şerife, problemlerde kendi yönergelerini kullanmış ve yaptıklarını doğrulamayı özel örnekler üzerinden yaptığında bile ilişkilere odaklandığı görülmüştür.

Şerife: Puanlarla… (Kağıda "beraberliğe---1", altına "galibiyete---3", onun altına da "yenilgiye---0" yazar) Evet, başlayalım. A takımı E ve B'yi yeniyor. E'yi ve B'yi yendiğine göre 2 tane galibiyet aldı, yani 6 puanı var. C ile beraber kalıyor. C ile de beraber kalmış. O zaman 1 puan da oradan geldi. Aynı zamanda C'ye de 1 puan geldi. E ve B de 0 puan aldı. (Kağıda "A E ve B"yi yazar, daha sonra devamına "C beraber" yazar. A'nın altına "6" ve "1", E ve B'nin altına "0", C'nin altına "1" yazar) D'yi de yeniyormuş. Yok, D'yi de yeniliyormuş. D, 3 puan aldı. ("D---3 puan" yazar) Bu da 0 puan aldı. (A'nın altına "0" ilave eder.) Tamam… B, C ve D'ye yeniliyor. B takımı da C ve D'ye yeniliyormuş. D, o zaman 3 puan daha aldı. Az önce D, A ile yapmıştı tamam. C ve D ye, 3 puan daha aldı. Bu yine 0, 0. (D'nin altına "3" ilave eder, C'nin altına da "3" puan daha ekler ancak B'nin altına 1 tane "0" ekler) C'ye yeniliyor. Bu sefer D, C'ye yenilmiş. O zaman bu 0. C, 3 puan daha aldı. (D'nin altına "0", C'nin altına "3" ekler) E, D'yi yeniyor. E de D'yi yeniyormuş. O zaman bu 3 puan daha aldı, bu da 0 puan aldı. (E'nin altına "3", D'nin altına "0" ekler) B ve C ile beraber kalıyor. B, 1 puan aldı. C, 1 puan aldı. Aynı zamanda E, 1 puan daha aldı. Tamam. (B,C ve E'nin altına "1" puan daha ekler)

…

Şerife: … Tamam ya 50 den başlayalım biz. 50 öğrenci var. Tamam mı? Şimdi çiçek için deneyelim. A diyelim çiçeğe. Şimdi 50 öğrenci olacaksa eğer 10 TL'den 50 TL olacak. Ama şimdi ajansa bakarsak ona da B dersek 12'den 60 mı oluyor? 60 mı oluyor hocam?

Araştırmacı: 50 öğrenci 10 liradan…

Şerife: 500, 600 mü oluyor? Tamam. Yani A burada daha avantajlı geliyor. (Kağıda "50 öğrenci A == 500 TL, B == 600 TL" yazar)

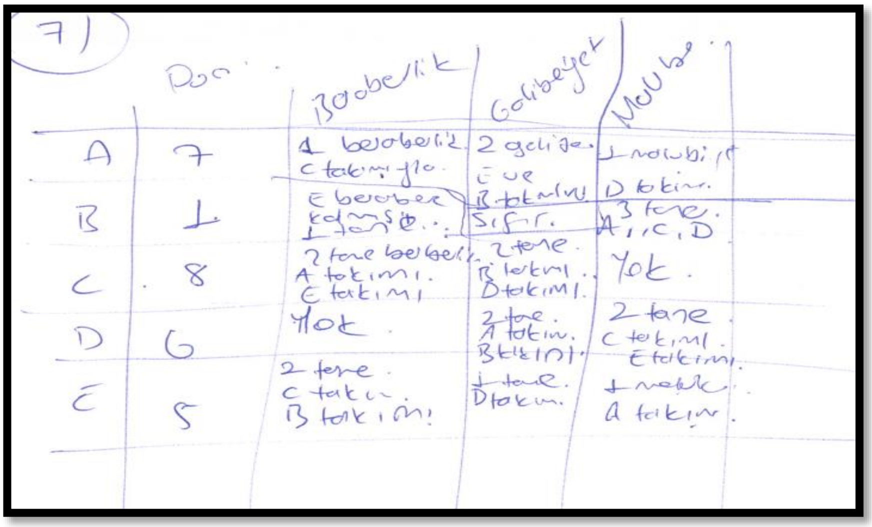
Araştırmacı: Dedin.

Şerife: Evet. Sonra 100 öğrenci olursa A takımında ne olacak bu sefer? 8 TL üzerinden olacak. 800, A. Şimdi 100-160 arası yüzde 25'i gidecek, 120'nin yüzde 25'i… Yok 100,100 1000. 1000 in yüzde 25 ini alacağız değil mi? ("100 öğrenci A == 800 TL" yazar)

Araştırmacı: 10 lira mı bunun tanesi?

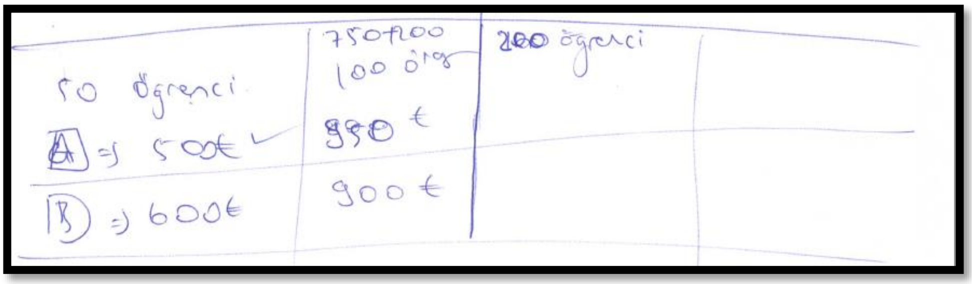
Şerife: 12 idi değil mi? Bekleyin o zaman… Çok mu abarttım? Yok, 100 olacak değil mi hocam? Aynen. Tamam. 1200 ün yüzde 25 ini alacağız. Bunlar gitti. 12 ile 25 i çarpalım. (12 çarpı 25 işlemini yapar ve sonucu 300 bulur) 300.

Futbol probleminde ise Şerife'nin yaptıklarını doğrularken tüm takımların birbirleriyle oynadıkları maçları ve puan ilişkilerini gösterir bir tablo oluşturduğu görülmüştür.



**Görsel 3.104.** *Şerife'nin futbol problemindeki tablosu ve doğrulama yöntemi*

Şerife, seçtiği özel örnekleri kullanırken de yaptıklarını doğruladığı işaretlerini kullanmaya devam etmiştir.




**Görsel 3.105.** *Şerife'nin tişört probleminde seçtiği özel değerleri hesaplaması*

Problemlerde Şerife, deneyerek kendisini ikna etmeye çalıştıktan sonra başkalarını da ikna etmek gerektiği cümlesini kullanan tek katılımcı olmuştur.

Araştırmacı: Peki ispat dediğin şey deneyerek mi yapılır?

Şerife: İspat dediğimiz şey… İlk önce denemek lazım. Ondan sonra denediğinde doğru olduğuna inanıyorsan bunu millete ispatlarsın.

Genel olarak görüşmeler boyunca Şerife'nin yaptıklarıyla kendisini ve karşısındakini ikna etme çabası içerisinde olduğu, problemlerde kendi yönergelerini yaptıklarını açıklamaya çalıştığı, deneyerek ifade ettiği doğrulamalarında da ilişkilere ve nicelikler arasındaki değişime odaklandığı görülmüştür.

### 3.3. Problem Çözme Sürecindeki İnançlara İlişkin Bulgular

Araştırmanın bu bölümünde katılımcıların probleme dair neler hissettiklerine, problemleri hangi matematiksel konu veya kavramlara benzettiklerine, problemin bağlamı ile geçmiş yaşam deneyimlerini nasıl anlamlandırdıklarına ilişkin bulgulara yer verilmiştir.

#### 3.3.1. Celile'nin problem çözme sürecindeki inançlarına ilişkin bulgular

Araştırmanın katılımcılarından Celile'nin problemlerde ilişkileri görmekte zorlandığı, problemleri yapamadığını düşündüğü ve yapamadığını düşündüğü problemlere karşı olumsuz tutum içerisinde olduğu görülmüştür.

Araştırmacı: Peki işin şu kısmına gelelim sence bu problem nasıl bir problemdi ne hissettin çözerken?

Celile: Yani karmaşık mesela tek tek vermiyor da A, B ve E üzerinden değerlendirme yapıyor bu sefer C ve D'yi kendin bulmak zorunda kalıyorsun o yüzden karmaşık oluyor.

Araştırmacı: Kişinin kendisi bulması gerekiyor o yüzden karmaşık oluyor.

Celile: Evet tek tek vermiyor.

Araştırmacı: Peki ne hissettin çözerken?

Celile: Yani kafam karıştı biraz.

Araştırmacı: Soruyu sevdin mi sevmedin mi?

Celile: Hayır sevmedim. (Gülüyor)

…

Araştırmacı: Peki ne hissettin bu problemi okuduğunda ya da çözerken Celile?

Celile: Bilmem. Stres oldum. (Gülüyor)

Araştırmacı: Stres oldun. Neden?

Celile: Çünkü bilmem. Çözemedim. Bir de hep indirimlerde falan kafam karışıyor. Hep işlem hatası yaptım.

…

Araştırmacı: Sevdin mi sevmedin mi problemi ne hissettin?

Celile: Sevmedim. Ben hiç sevmem zaten böyle şeyleri. (Gülüşmeler)

…

Araştırmacı: Peki bu soruyu çözerken ne hissettin Celile?

Celile: Yani… Bilmem… Düşündüm sadece. (Gülüyor.)

Araştırmacı: Peki sevdin mi sevmedin mi? Soruya karşı ne hissettin?

Celile: Siyahları bulurken çok kolay oldu. (Gülüyor.) Beyazlarda sadece düşündüm yani. Kaçırdığım bir yer var mı acaba diye… Sonuçta siyahlar giriyor ve her seferinde satır aynı kalıyor, sütun artıyor. Hani düşündürüyor. Bu kadar.

Araştırmacı: Soruyu sevdin mi sevmedin mi?

Celile: Sevmedim.

Yapılan görüşmelerde Celile'nin problem çözme sürecinde kendine güvenmediği, süreçte ilerleyebilmek için de onay alma ihtiyacı hissettiği gözlenmiştir.

Celile: 60'a kadar gidecek. Şöyle miydi? Şey vardı…

…

Celile: Alan hesabından aklıma bir şey gelmiyor. Buradan geliyor ama 8, 10, 12 diye ama onu da hani hatırlamadım…

…

Celile: n artı… "n çarpı n artı bir bölü iki" idi galiba…

Araştırmacı: O neydi "n çarpı n artı bir bölü iki"?

Celile: Çift gidince olmuyor muydu sanırım bu?

Celile, problemlerde kullanılan matematiksel konu veya kavramlarda kendisini eksik hissetmiş ve problemleri bu yüzden yapamadığını ifade etmiştir. Araştırmacı tarafından kendisine günlük hayatta problemin bağlamında bulunan matematiksel kavramları kullanıp kullanılmadığı sorulduğunda da bu kavramları kullanmadığını ifade ettiği görülmüştür.

Araştırmacı: Iıı sen markete gittin. Markette her zaman 100 liraya aldığın bir tane ürün var. Bir kampanya oldu. O ürün %25 indirime girdi. Sen o ürünü kaç paraya alırsın?

Celile: %25 indirime girdi. Yani 40 mı oluyor?

Araştırmacı: Yani 100 liralık bir ürün vardı. %25 indirime girdi. O ürünü kaç paraya alırsın artık?

Celile: … Yani… (Gülüyor) Üff benim yüzdelerim kötü galiba. … (Sessizlik)

Araştırmacı: 40 liraya mı alırsın?

Celile: Yani. ¼ ünü alacağız ya.

Araştırmacı: Yani?

Celile: 40 oluyor.

Araştırmacı: 100 liranın ¼ ü 40 mı?

Celile: Evet.

Araştırmacı: 40 liraya alırız? Yani indirim oranı neyse o paraya alırız ürünü?

Celile: Evet.

…

Araştırmacı: Alışveriş yapıyor musun?

Celile: Yapıyorum. (Gülüyor)

Araştırmacı: İndirimli Alışveriş yapıyor musun?

Celile: Evet.

Araştırmacı: Alışveriş yapmadan önce indirimli halinin ne kadara geleceğini hesaplıyor musun?

Celile: Yok.

Celile'nin problemlerde zorlandığı kısımlarda kendisine ait olmayan yönergeleri geri çağırmaya çalıştığı ve kendi yönergelerini uygulayamadığı görülmüştür.

Araştırmacı: Peki devam edelim çiçeği bulduk, 120'yi deniyordun sen.

Celile: … Toplam ücretin yüzde 25 indirim yapılacakmış. İlk fiyattan, ilk fiyat neydi? Iı mesela 120 öğrenci var 12 TL ile çarparsak, ajans, 12 öğrenci 120 ile çarparsak ama bunun yüzde 25'i alınacakmış. (12x12 yazıp sıfır ekleyerek çarpmanın sonucunu 1440 bulur) 1440'ın yüzde 25'i. Yani… 25/100 le mi çarpıyorduk?

…

Araştırmacı: Biz bir sayının yüzde 25i'ni almak için ne yapmalıyız?

Celile: 25 ile çarpıp yüze mi bölüyorduk? Öyle hatırlıyorum.

…

Araştırmacı: Mesela ne geliyor aklına? Nasıl bir kolaylık geliyor?

Celile: Hı… (Sessizlik) Beyazlar da 8, 10, 12, 14, 16 diye gidiyor. Burada kaç tane saymıştık 8, 10, 12 birincisi, ikincisi, üçüncüsü, dördüncüsü ve beşincisi… Iıı… İkişer tane gittiği için…

Araştırmacı: İkişer tane artıyor beyazlar…

Celile: Toplam/fark formüllerinden yazabiliriz.

Araştırmacı: Mesela nasıl yazarız?

Celile: 60'a kadar gidecek. Şöyle miydi? Şey vardı…

…

Celile: n artı… "n çarpı n artı bir bölü iki" idi galiba…

Araştırmacı: O neydi "n çarpı n artı bir bölü iki"?

Celile: Çift gidince olmuyor muydu sanırım bu?

…

Celile: 18 bölü 2… 9 mu oluyor, evet? Yani 8 den mi başlayacağız? 9 gelirse yani, hım evet olmadı. Sağlamadı. (Toplam sembolünün altına "k = 9" üstüne "60" yazar. İç kısmına da "n.(n+1)/2" yazar.) … (Sessizlik)

Problem çözme sürecinde Celile'nin kendi anlayacağı şekilde problemi ifade etmesinin onun problem çözme sürecini olumlu yönde etkilediği de görülmüştür.

Araştırmacı: Ne oluyor burada? Şu kısımda? (Problemdeki her biri bir diğeriyle bir maç yapacaktır kısmını göstererek)

Celile: Her biri diğer birbiriyle yapamaz diyor. Ha bir kez oynanıyormuş.

Araştırmacı: Yani ne demek bu?

Celile: O zaman beşi de birbiriyle maç yapıyormuş.

Araştırmacı: Yani? Nasıl o zaman? Her takım kimle maç yapmış olur?

Celile: O zaman A hem B ile hem D ile hem C ile hem E ile yapıyor.

Araştırmacı: Maç yapmış oluyor.

Celile: B de A, C, D, E ile yapmış olur. C de A, B, D, E ile yapmış olur. D'de A, B, C, E ile yapmış olur. Her biri birbiriyle… İnsan tokalaşması gibi…

Celile, ayrıca problemi değiştirme önerilerinde bulunurken ilişkileri ifade etmekte zorlandığı ya da matematiksel kavramlarda sorun yaşadığı kısımları problemden çıkarmanın işleri kolaylaştıracağını belirtmiş ve alternatif yöntemleri denemeyi tercih etmemiştir.

Araştırmacı: Peki sen bu soruya bir şeyler ilave edecek olsan ya da bir şeyler çıkartacak olsan ne ilave ederdin ne çıkarırdın neyi değiştirirdin soruda?

Celile: %25 indirimi atardım. Diğerleri kalabilir. Ya da mesela ıı hepsi için aynı değeri verirdim. İkisinin sınırlarını aynı değer verirdim.

Araştırmacı: Daha anlaşılır daha kolay olurdu diyorsun. Peki soruyu sorarken yine böyle hangi şartlarda hangisini önerirsiniz diye mi sorardın öğrenci sayısı verir miydin?

Celile: Öğrenci sayısı verirdim. Ama o zaman da sorunun bir önemi kalmazdı. Ama ben verirdim.

…

Araştırmacı: 100 öğrenciye kadar. Peki Celile bu soruda biz, yine sen kendini ifade etmek için başka bir yöntem kullansan nasıl bir yöntem kullanırsın daha rahat edebileceğin?

Celile: Yani… Yine rakamlar verirdim yani.

Araştırmacı: Hep denerdin yani?

Celile: Evet, denerdim.

Araştırmacı: Denemeden yapamaz mıyız soruyu?

Celile: Nasıl yapacağız ki? Yapamayız bence yani.

Araştırmacı: Denklem kurabilir miyiz?

Celile: Denklem mi? Hıh. (Sessizlik)

Araştırmacı: Kuramaz mıyız?

Celile: Yani şu an bilmem kurabilir miyiz?

…

Araştırmacı: Peki başka bir yöntem aklına geliyor mu yapılabilecek?

Celile: Gelmiyor. Yani bir rakam söylese direkt 50 koyup ne ile çarparsan o yani. Normal direkt matematik işlemi kalıyor geriye. Bunun için de bir kural gerektiğini düşünmüyorum. Kurala gerek yok yani. Normal o işlemleri halledip yapabilirsin diye düşünüyorum soruda.

Celile, araştırmada kullanılan problemlerin genel anlamda matematikte problemler konusuyla ilişkili olduğunu, karo probleminin ise örüntü veya alan konusuna benzediğini ifade etmiştir.

> Araştırmacı: Sence bu soru matematikte hangi kavramla ilgili?
>
> Celile: Problemler olabilir.
>
> …
>
> Araştırmacı: Peki sence bu soru matematikte hangi kavramla alakalı, ilgili?
>
> Celile: Örüntüyle alakalı.
>
> Araştırmacı: Örüntüyle alakalı. Örüntünün yanına ekleyebileceğin bir şey var mı?
>
> Celile: Alan soruları da olabilir. Alandan gidilebilir. Toplam/fark soruları da bu şekilde olabilir.

Celile'nin problem çözüm sürecinde yaptıklarından emin olmadan ve kendine güvenmeden ilerlediği, sık sık eski bilgilerini geri çağırmaya çalıştığı, çözemediğini düşündüğü problemleri sevmediği, matematiksel kavram veya konularda kendisini eksik hissettiği, süreçte onaylanma ihtiyacı duyduğu görülmüştür.

### 3.3.2. Mine'nin problem çözme sürecindeki inançlarına ilişkin bulgular

Mine'nin problem çözme sürecinde problemin çözümüne ilişkin bir plan oluşturamadığı, kendi yönergelerini kullanamadığı ve yönlendirmelerle hareket edebildiği görülmüştür.

> Araştırmacı: Sen şuan ne yapmak istiyorsun neyi göstermek istiyorsun bu panoda?
>
> Mine: Kimin kiminle maç yaptığını göstermeye çalışıyorum. Aynı şekilde buraya da takımları yazsam…
>
> Araştırmacı: Hııı… Yaz bakalım.
>
> Mine: (Tabloda satır ve sütundaki A, B, C, D, E'leri tamamlar.)
>
> Araştırmacı: Peki.
>
> Mine: A, B ile maç yapmış o zaman…
>
> Araştırmacı: Hıı. Nasıl yapacaksın mesela oraya?
>
> Mine: Çarpı atsam veya tik atsam…
>
> Araştırmacı: Tik neyi ifade edecek, çarpı neyi ifade edecek?
>
> Mine: Tik maç yaptıklarını… Ama galibiyetini…
>
> Araştırmacı: İşte onu ifade edecek bir şey yapabilir misin?
>
> Mine: …
>
> Araştırmacı: Mesela A, A ile maç yapacak mı?
>
> Mine: Yapamaz.
>
> Araştırmacı: O zaman orayı ne yapacaksın?
>
> Mine: Boş bırakacağım.

Araştırmacı: Sonra? A ile B'nin maçından ne olmuş?

Mine: B galip gelmiş.

Araştırmacı: Nasıl ifade edersin onu? Mesela burada yazıyor A ile B'nin maçından ne olduğu.

Mine: A, B'yi yenmiş.

Araştırmacı: Nasıl yazarsın onu? Buraya öyle bir şey yapmalısın ki B, A'yı yenmiş. Nasıl gösterirsin? Kendine göre de gösterirsin yani bunun bir gösterimi yok. Sen nasıl ifade edersin?

Mine: … (Sessizlik) Çok zor… (Gülüyor)

Araştırmacı: Çok mu zor?

Mine: Kafa karıştırıcı anlamadım.

…

Araştırmacı: Hıh. Toplam karoların. Peki, şimdi a şıkkına tekrar bak.

Mine: Şimdi düşünecek olursak… Sınırlar ve topraklar var. İlkinde sınırlar 3, diğerinde… 4, bunda da 5 tane. Dördüncüde de 6 tane olacak demek ki. (4.de yazıp ok çıkarıp "Sınırları 6" yazar) Toprakları da 5. ("Toprakları 5 karoyla gösterir" yazar) 5. De ("5.de" yazar ok çıkarır) Sınırları o zaman 7, ("Sınırları 7", yazar ) toprakları 6. ("Toprakları 6 karoyla gösterir" yazar) Evet, böyle.

Araştırmacı: Yani şimdi ne diyorsun sorunun cevabına?

Mine: 4.terasta 6 sınır karosu, 5 toprak karosu var. Beşincide de 7 sınır 6 toprak olur.

Araştırmacı: Yani toplam karo sayıları?

Mine: Bunda 11 diğeri 7, 6 daha 13 olur.

Araştırmada kullanılan problemlerin içeriğinde yer alan matematiksel kavramlarda ve nicelikler arasındaki ilişkileri ifade etmekte Mine'nin zorlandığı gözlenmiştir.

Mine: 150… Yine 150 kişiye 12 liradan satacak ama yüzde 25 indirim olacak toplam fiyattan…

Araştırmacı: Hıı. Ne olacak yani?

Mine: Yani 150 ile 12'yi çarpsam önce… (150x12 yazar ve 1800 bulur) 1800 lira yapıyor. Onun da yüzde 25'ini alacağız. (Gülüyor)

Araştırmacı: Bilmiyorsun. Bir sayının yüzde 25 i nasıl alınır Mine?

Mine: 25'e mi böleceğim? Hayır, 25 bölü 100.

…

Mine: Yüzde 25… Yüzde 25 demek 25 bölü 100'se 1800 bölü 25 olmaz mı?

Araştırmacı: 1800 bölü 25 olur diyorsun. Peki, şöyle diyelim. 100 sayısının yüzde 25'i kaç?

Mine: 1 bölü 4. (Gülüyor)

Araştırmacı: Nasıl buldun? Nasıl yaptık onu Mine?

Mine: Sadeleştirdim. (Gülüyor)

Araştırmacı: Neyle neyi sadeleştirdin ama?

Mine: 25 ile 100'ü.

…

Araştırmacı: 2 mi?  2 lira indirim var.

Mine: Çarpı 8. 8 kere 5 40. Bulmuştuk galiba… 280. (25x8 =200 bulur) Evet yanlış çarptık. 284. 28 değil mi 7 kere 8?

Araştırmacı: 7 kere 8 28 mi?

Mine: Hocam benim devreler yanıyor.

Araştırmacı: 7 kere 8 kaç Mine?

Mine: (Gülüyor) 32. (Gülüyor) 7 kere 8 mi? Şey… Bilmem. (56 yazar)

Problemlerin çözüm sürecinde kendi yönergeleriyle hareket edemeyen Mine, çözüm sürecinde kendine güvenmemiş ve onaylanma ihtiyacı hissederek çözümlerine devam etmiştir.

Mine: (Takım, Puan, Galibiyet, Mağlubiyet ve Beraberlik sütunları ve maç sayıları; A, B, C, D, E satırları oluşturur.) A'nın puanını yazabilirim. 7 demiştik. B'ye 1. C 8. D 6. E 5. Galibiyet, A'nın 2 tane galibiyeti var. 1 tane mağlubiyeti var 2 tane de beraberlik maçı var. (Galibiyet kısmına "2", mağlubiyet kısmına "1", beraberlik kısmına "1" yazar) B'nin de… Hiç galibiyet maçı yok. O zaman sıfır… Ya da boş mu bıraksam?

…

Araştırmacı: B ve C'yi birlikte düşün. B ve C şıklarını.

Mine: Daha büyük teraslardaki karo sayılarını bulmak için nasıl bir yol izlersiniz? (B şıkkını tekrar okur) ( Sessizlik ) Boş bırakabiliyor muyum?

…

Mine: İTÜ stadının kapasitesi, Jale Biber'in hedeflediği gelir, konser için yaptığı harcama ve konsere ödenen giriş ücretiyle ilgili bir bağlantı kurmak isteseniz neler söylersiniz? Hımm… Bir bağlantı… Bir şey söyleyemeyiz (Gülüyor)

Görselleri içeren teras sorusunda Mine'nin probleme ilk yaklaşımında bir örüntü mantığıyla hareket etmediği ve görmediği terasın karo sayısını bilemeyeceğini ifade ettiği görülmüştür.

Araştırmacı: Tamam şimdi anladığını düşünüyorsan ilk soruyu bir oku.

Mine: 4. ve 5. Teraslara ait resimlerle ilgili neler söyleyebilirsiniz? Bu teraslarda kaç tane beyaz ve siyah karo olduğunu bulunuz demiş. Nasıl yani şimdi? 4. ve 5. yok ki burada.

Problemler Mine'ye zor gelmiş, zorlandığı kısımları problemlerden çıkartmak istemiş ve problemlere karşı olumsuz tutum içerisinde olduğu görülmüştür.

Araştırmacı: Bilgin yok. Futbol bahis oyunlarında ne yapıldığını bilmiyorsun. Peki… Bu problem nasıl bir problemdi Mine? Çözerken ne hissettin?

Mine: … Düşündüren bir problem. Bir ara dondu beynim gerçekten dondu. (Gülüşmeler)

Araştırmacı: Sonra?

Mine: Ama düşününce şey oynar gibi… Biraz daha satranç oynar gibi bir şeydi…

Araştırmacı: Mesela satranç oynar gibi derken?

Mine: Düşündürüyordu.

…

Araştırmacı: Hııı. Sevdin mi soruyu ya da sevmedin mi?

Mine: Sevdim de şu yüzde 25 olmasaydı… (Gülüyor)

…

Peki. Senin bu probleme ilave edecek bir şeylerin olsaydı ya da bu problemden bir şeyler çıkartacak olsaydın ne yapardın?

Mine: Yüzde 15 indirimi çıkarır yüzde 50 yapardım.

…

Araştırmacı: Peki bunu çözerken ne hissettin Mine?

Mine: Hımm… f'ye kadar her şey güzeldi.

Araştırmacı: Orada sorun oldu diyorsun.

Mine: Evet. Burada denklem kurmak ya da cebirsel ifade kurmak biraz zor geldi. Yani birden fazla bilinmeyen olduğu için…

Araştırmacı: Hııı…

Mine: Onları bağdaştırmak biraz zor oldu. Bir de problem sorusu olduğu için gıcık kaptım.

Mine, görüşmelerde değişken kullanmakta zorlanmış ve bu sebeple alternatif çözüm önerilerine yönelemediği gözlenmiştir.

Araştırmacı: Bu bilinmeyenleri kullanarak bu soruyu yapabilir miyiz? Ya da bu soruda bilinmeyen kullansan bilinmeyeni neye verirdin Mine?

Mine: O zaman 10 lira yerine "x" desem 2 lira indirim olduğundan "x-2" yapsam onla da "x-5" yapsam bu şekilde…

Araştırmacı: Nasıl olur o zaman? Bizim bu soruda bilmediğimiz şey ne?

Mine: Öğrenci sayısı.

Araştırmacı: Hııı. O zaman 10 liraya mı x diyeceğiz?

Mine: Hayır öğrenci sayısına "x" deriz.

…

Araştırmacı: Peki f şıkkına bakalım.

Mine: Beyaz karo sayısını bulmaya yarayacak farklı bir kural bulabilir misiniz? Bulduğunuz kuralları karşılaştırabilir misiniz? (Soruyu okur) Bulamam. (Gülüşmeler) Yani bulurum da… Ya tek tek sayarız ya da çizerek bulunabilir.

Mine, tişört problemine matematikte denklem konusuna benzetirken problemi değiştirme önerisi olarak da anlamakta zorlandığı ilişkiler üzerine değişiklik yapmayı düşünmüştür.

Araştırmacı: Neye benziyor o? Matematikte?

Mine: Denklemlere benziyor.

…

Araştırmacı: Bu tarz soru geliyor ama böyle soru ilk kez gördüm diyorsun. Peki, sen bu soruya bir şeyler ilave edecek olsaydın ya da bir şeyleri çıkartacak olsaydın sorudan nasıl değiştirirdin?
Mine: Mesela hangi takımın hangi takımla maç yaptığını kimin galip gelip kimin yenildiğini falan biraz daha dolaylı yolla anlatmaya çalışırdım.
Araştırmacı: Mesela?
Mine: Mesela D,C ye yeniliyor dediğinde hani… A; E ve B'yi yenmiş deyip D, C'yi yenmiş desem… Biraz daha düşündürücü yapardım.

Klinik görüşmelerde Mine, yaptıklarını kontrol etme gereksinimi duymamış, matematiksel konu veya kavramlarda zorluk yaşamış, çözüm süreci boyunca kendisine güvenmemiş ve problemlerde kendisine zor gelen kısımları çıkartmak istemiştir.

### 3.3.3. Yasir'in problem çözme sürecindeki inançlarına ilişkin bulgular

Katılımcılardan Yasir'in problem çözme sürecinde kendi yönergelerini oluşturamadığı ve ne yapması gerektiğini ifade etmiş olsa bile bunu uygulayamadığı sık sık görülmüştür.

Yasir: 3'er puan attım. D, C ye yeniliyor. Bu sefer C'ye 3 puan attım yeniden. E, D'yi yeniyor demiş ya. D'ye 3 puan attım. B ve C ile berabere kalıyor demiş. Şimdi E, B, C üçüne de birer tane puan attım çünkü üçünde de beraberlik var. C'yi buldum, bir yerde de yanlışlık yaptım sanırım.
Araştırmacı: C'yi buldun. Peki. Bunu böyle yaparken tek tek kontrol ettin mi her birini?
Yasir: Hıhı.
Araştırmacı: Bunu yaparken zorlandın mı?
Yasir: Biraz zorlandım.
Araştırmacı: Daha kolay bir yolu var mıdır?
Yasir: Vardır mutlaka.
Araştırmacı: Senin yapabileceğin daha kolay bir yolu var mıdır? Böyle daha rahat hepsini görebileceğin?
Yasir: Formülle veya yöntemlerle falan…
…
Yasir: Daha büyük teraslardaki karo sayılarını bulmak için nasıl bir yol izlersiniz? Hocam bunun tabii ki de güzel bir yöntemi var ama bunu ben bilmiyorum. (Gülüşmeler.)
…
Araştırmacı: Peki şeye bak. D şıkkına.
Yasir: Beyaz karo sayısını bulmaya yarayacak bir kural bulabilir misiniz? Yani hocam verilen sayıyla ikinin çarpılması yani kaçıncı teras isteniyorsa onla ikinin çarpılması sonra eksi iki diyorum. Ama artı iki mi yapmalıydım şurada? Yok ama. Hocam bir dakika ben bir kontrol yapacağım. 5 te yapayım bir de mesela. Şimdi kaç tane beyaz varmış? 5 tane. Şuradan

baktım. 1, 2, 3, 4, 5 dedik. 5 tane burada etti 7. 7 de burada 14. 15,16. Şuradan da oluyor. Hocam ben şimdi bunu cümleye mi çevireceğim? Tamam, yaptığım şey yani kendimce doğru…

Yasir'in problemlerde kendine güvenmediği görülmüş ancak içerisinde futbol bağlam bilgisini barındıran problemde Yasir'in kendi yönergelerini oluşturarak ve kendine güvenerek çözüm sürecinde ilerlediği gözlenmiştir.

Araştırmacı: Peki bu problemi çözerken ne hissettin Yasir?

Yasir: Ne hissettim? Açıkçası çok şey yaptım ıı hissetmekten ziyade hocam hani hep aklım bunlarda olduğu için hep yazarken bunları yazdım çok yanlışlık yaptım. Hala da yanlış vardır diye tahmin ediyorum orada da. Zorlandım birazcık çünkü yöntemini bilmiyordum hani rastgele gittim.

…

Yasir: Hocam mutlaka getirilir ama ben kendime güvenemiyorum.

…

Yasir: C'nin hiç yenilgisi yok. E ye gelelim. E, 1. (İçinden kontrol eder) Hocam aslında ben şu şeklide de bulabilirmiştim.

Araştırmacı: Ne şekilde?

Yasir: Hocam mesela bakın. (İlk oluşturduğu tabloyu göstererek) Burada 3 tane sayı yazmışım. 3 tane maçın sonucunu. Sıfırları yazmadım hani yapmadı olarak göründü ya. Mesela bakın burada 1 tane eksik var 4'e tamamladığımızda, burada 3 tane eksik var 4'e tamamladığımızda, burada tamamen dolu şeyler, sıfır o yüzden. Burada iki tane eksik var, 2. Burada da iki tane eksik var, 2.

…

Araştırmacı: Onun gibi doğrulasan nasıl yaparsın?

Yasir: Hocam kontrol ederim mesela maç sayısı 4, 4, 4 iken.

…

Araştırmacı: Yani?

Yasir: Hepsinin 4 çıkması gerekiyor. Bu şekilde 4, A tamam. B, 4 o da tamam. C'de 4. D 4. E'de ben bir yanlışlık yapmışım. (Tabloya bakarak kontrol eder)

Araştırmacı: Nerede acaba yanlışlık?

Yasir: Hocam kontrol edeyim mesela. Beraberlik sayısı demiş. E, D ye yeniliyor. E, D'ye yeniliyor demiş mağlubiyete 0. E, D'yi yeniyor pardon pardon. Galibiyeti 1. … Bunlar şey ya kaç kere oynadıkları değil bir dakika hocam benim kafam gitti. E'de yanlışlık yapmışım hocam şu şekilde. E'de şeyleri yazmışım kaç defa yendiklerini değil puanlarını yazmışım.

Araştırmacı: Yani oradaki 3 puan mı aslında?

Yasir: Evet. 3 puanı yazmışım.

Araştırmacı: Neyi yazman gerekiyormuş?

Yasir: 1 yazmam gerekiyordu oraya. (Galibiyette E sütununda “3” yazdığı yeri “1” olarak değiştirir) Şimdi bir yanlışlık yok diye… Ama şurası bir dakika hocam… Yoo, orası da tamam. 4 puan. Tamamdır hocam bir yanlışlık yoktur diye tahmin ediyorum.

Yasir’in matematiksel kavramlarda ve fonksiyon kavramına dayanan problemlerde değişken kullanıp ilişkileri görmekte zorlandığı durumlarda sorun yaşadığı görülmüş ve bu durum onun problem çözme sürecinde ilerlemesini güçleştirmiştir.

Araştırmacı: Peki şöyle bir şey sorayım. Şimdi sayılardan bahsediyoruz bu sayılar için tişört fiyatlarını hesaplamaya çalışıyoruz ve her seferinde tek tek hesaplamaya çalışıyoruz. Bunu böyle her seferinde tek tek yapmak yerine genel olarak görebileceğimiz bir yöntemi yok mudur?

Yasir: Vardır hocam mutlaka.

Araştırmacı: Ne geliyor mesela aklına? Genel olarak yapsan nasıl yaparsın?

Yasir: Ne yapardım ki? Hocam hani aynı miktar tişört yapmaya çalışırdım ama kampanyalar farklı…

Araştırmacı: Seni zorlayan şeylerden birisi aynı miktar olmaması mı? Yani aynı miktara kampanya yapılmaması mı?

Yasir: Aynen öyle hocam. Aynı kampanya aynı miktar aynı şey. Mesela aynı şey olsaydı demin yaptığım gibi bir tablo yapardım mesela sütun şeklinde işte... Iı bir şu kadar tişörte mesela… İlk dese ki mesela çiçek baskı ilk 100 tişörte 10 lira, ajans dese ki ilk 100 tişörte 15 lira…

Araştırmacı: Peki sen o sınırları aynı hale getiremez misin? Çünkü soruda sınırlar farklı ama o tişört sayısından alındığında yapılacak işlemler belli.

Yasir’in değişken kullanmakta zorlanması kendisinden alternatif yöntemler istendiğinde de değişkeni ifade edip uygulamaması şeklinde de ortaya çıkmıştır.

Araştırmacı: Peki mesela denklemler var matematikte. İşte… 3 kilo elma alıp üzerine 2 lira para verdiğimizde toplam 20 lira para vermiş oluyorsak biz 1 kilo elmayı bulabiliyoruz bu denklemler sayesinde. Biz bir şey kullanıyoruz orada ne kullanıyoruz?

Yasir: Formül.

Araştırmacı: Formül mü o? Biz o elmanın kilosu yerine ne kullanıyoruz biz?

Yasir: “x”.

Araştırmacı: “x” kullanıyoruz, bilinmeyen yani. “x “olması şart değil herhangi bir bilinmeyen kullanıyoruz. Biz bu soruyu öyle o “x”i kullanarak bir bilinmeyen kullanarak ifade edebilir miyiz?

Yasir: Edebilir miyiz?

Araştırmacı: Ya da bilinmeyen kullanarak o 75 tişörte kadar ya da 75 tişörtle 150 tişört arasında cümlelerini ifade edebilir miyiz?

Yasir: Cümlelerini ifade… Edebilir miyiz? Hocam “+” yazmak benim aklıma geliyor mesela…

Araştırmacı: Yaz onu nasıl gösterirsin "+"yı? Böyle mi? (Kağıtta daha önce yazdığını göstererek)

Yasir: Aynen öyle hocam. "75+" yani 75 ve üstü 150 ye kadar. Bu şekilde 150 ve üstü yine "+ 5". Bu şekilde göstermeye çalıştım. Hocam başka da bu soruda bilmiyorum da yapamadım

Yasir, yüzde alma ve dört işlem konularında da problemler yaşamış, bu durum da onun problem çözme sürecini olumsuz yönde etkilemiştir.

Araştırmacı: İlk fiyattan alınacak toplam ücretin yüzde 25'i ne demek burada 160 tane alınırsa?

Yasir: 12'nin yüzde 25'ini bulmam gerekecek.

Araştırmacı: Bul bakalım. 160 tane tişört aldığını düşünelim ajans matbaadan.

Yasir: 12'nin yüzde 25'i. 10 desem ona ilk başta yüzde 25'i kaç yapar? 2,5. 2,5… 2 midir hocam? 12'nin yüzde yirmi beşi?

Araştırmacı: 2 midir? Bir sayının yüzde yirmi beşi ne demek?

Yasir: 3'tür pardon.

Araştırmacı: 3'tür yani ne olur?

Yasir: Kalan 60 taneyi 9 liradan hesaplayacağız.

Araştırmacı: 60 taneyi 9 liradan hesaplayacağız.

Yasir: Aynen öyle hocam.

Araştırmacı: Hesapla.

Yasir: 60 çarpı 9. (60 x 9 510 bulur) 51 mi yapıyor hocam 9 kere 6 51 desek 510? O zaman bu şekilde oldu.

Süreç içerisinde hesaplamalarını yaparken Yasir'in sık sık onaylanma ihtiyacı da hissettiği görülmüştür.

Yasir: Pardon hocam. Burada E, D'yi yeniyor 3 diyecektim. (E sütunun altındaki "1"i "3" yapar ve son olarak da C sütununa C ve E sütununa 1 ekler) Şimdi bir yanlışlık var mı diğeriyle bir fark?

Araştırmacı: En alttaki sayı kaç? (C sütunundaki C'yi kast ederek)

Yasir: Hocam kafam gitti ya (Gülüyor) Oraya da 1 yazacaktım. (C'nin en altındaki C'yi 1 olarak değiştirir)

Araştırmacı: Hı.

Yasir: Sayılar da oluyor ya aklım… Hocam bir fark var mı ki? D ise E, C, D farklılık var.

Araştırmacı: Burada kaçtı burada kaç?

Yasir: Hocam burada 11'di burada kaç… 8 olmuş.

Araştırmacı: 8 olmuş. Başka?

Yasir: C gitti. D'ye bakalım. D aynı. E'de aynı. C'de niye yanlışlık? Burada o zaman çok yazmışım. Ama hala C gibi hocam.

…

Araştırmacı: Peki kaç tane siyah karo var 60. da?

Yasir: Yani 61 tane desek…

Araştırmacı: Ne?

Yasir: 61 tane desek hocam, şöyle 60 a kadar tamamladığımızda ortadakiler oluyordu ya bir bir yükseliyor o da o 60 oluyor, bir de bunu alırsak yani…

Araştırmacı: 61 diyorsun. Peki birinci…

Yasir: 60. teras, ama bunlarla bu beraber oluyor sanırım değil mi?

Araştırmacı: Yani?

Yasir: Yani o da 60 oluyor.

Araştırmacı: Yani 60 tane siyah karo mu olur?

Yasir: 60 hatta ilkini de mi değiştirsem?

Yasir, problemlere karşı ne hissettiğini ifade ederken yapabildiğini düşündüğü futbol sorusunu sevdiğini ancak diğer problemleri ancak cevapları doğru ise sevmiş olabileceğini belirtmiştir. Bu durum da Yasir'in problemlerin sonucuna göre bir yargıya vardığı şeklinde düşünülmüştür.

Araştırmacı: Hı. Oradan yapılabilirdi diyorsun. Onu bilmediğim için zorlandım diyorsun. Sevdin mi soruyu?

Yasir: Sevdim hocam yine de hani uğraşılacak bir soru ama yine de hiç bulunmayacak bir şey değil.

…

Araştırmacı: Ne hissettin sen bu soruyu çözerken?

Yasir: Hocam açıkçası çok zorlandım bu soruda. Çünkü yüzdeliğini almam gerekiyor bir de fiyatları farklı onları dengelemem gerekiyor.

Araştırmacı: Orada zorlandın? Peki, sevdin mi soruyu sevmedin mi?

Yasir: Sevmedim. Hani hocam hani okulun alacağı tişört sayısını da vermemiş. O yüzden hani hepsini bulmamız gerekiyor. Hani ikisinde de kaç tişörte ne kadar para verilecekse hepsini tek tek bulmamız gerekiyor. Okul diyelim ki 500 tane dese 500 tane buluruz hesaplarız ama ne aradığımızı bile tam olarak bilmediğimiz için soruda zorlandım.

…

Araştırmacı: Peki sence bu soru nasıldı Yasir?

Yasir: Hocam bu soru öbürüne bakılarak biraz daha bilgi isteyen bir soruydu. Hani…

Araştırmacı: Sevdin mi soruyu?

Yasir: Öbürünü daha çok sevmiştim.

…

Araştırmacı: Peki Yasir bu soruyu çözerken ne hissettin?

Yasir: Nasıl geldi? Matematikten daha çok biraz daha bilmece gibiydi.

Araştırmacı: Sevdin mi soruyu sevmedin mi?

Yasir: Sonuçlarım doğru ise sevdim. (Gülüşmeler.)

Yasir’in konser probleminde problemin bağlamının dışındaki verileri yani geçmiş yaşantısında karşılaşmış olduğu durumları problemin bağlamına dahil ettiği ve problemde yer almasa bile gerçek hayat durumlarını kendi çözümünde kullandığı görülmüştür.

> Yasir: Yani nasıl desem toplam 150 bin lira para kazanıyordu. 7500’den, 15 bin olunca buna bir bu kadar daha ekleyeceğiz yani 300 bin oluyor. 300 bin yalnız… Kazanacağı para…
>
> Araştırmacı: Harcama aynı harcama.
>
> Yasir: Harcama da aynı harcama. O zaman kazanacağı para 2 katı olacağı için 200 bin oluyor.
>
> Araştırmacı: 300 bin lira nereye gitti?
>
> Yasir: 300 bin liranın 100 bin lirası şeylere harcamalara…
>
> Araştırmacı: Harcama iki katına mı çıkar diyorsun?
>
> Yasir: Aynen hocam.
>
> Araştırmacı: Neden?
>
> Yasir: Şimdi 7500 kişiden 50 bin TL harcadığında karıyla zararıyla her şeyi tamamlıyordu. 15 bin kişide de…
>
> Araştırmacı: Peki sence kişi sayısının artması harcamayı artırır mı?
>
> Yasir: Yani.
>
> Araştırmacı: Nasıl arttırır mesela?
>
> Yasir: Ya bunun harcama dediği organizasyon değil mi?
>
> Araştırmacı: Organizasyon. İçinde ne varsa artık biz onu bilmiyoruz. Şimdi stadın kapasitesi belli bu soruda. O kapasite ha dolmuş ha yarıda kalmış. 15 bin kişi olursa yapılan harcama değişecek mi? Burada yazmamış da yapılan harcama aynı başlangıçtaki gibi…
>
> Yasir: Hocam şimdi bunun harcaması acaba stat içi mi yoksa hani…
>
> …
>
> Y asin: Benim kafa gitti biraz daha parti tarzı bir şey düşündüm biliyor musunuz? O zaman harcamalar artacaktı.

Tişört ve futbol problemini matematikte mantık konusuyla ilişkilendiren Yasir, karo probleminin denklemler, konser probleminin de problemler konusuyla ilgili olabileceğini belirtmiştir.

> Araştırmacı: Zorlandın. Peki, bu soru okulda çözülen sorulardan farklı mıydı ya da benziyor muydu?
>
> Yasir: Benziyor muydu? Mantık sorularına benziyor ama daha zoru.
>
> …
>
> Araştırmacı: Peki bu soru matematik derslerindeki çözdüğünüz problemlerden farklı mıydı benziyor muydu?
>
> Yasir: Mantığa benziyordu hocam.
>
> …

Araştırmacı: Peki sence bu soru matematik bir kavramla falan ilişkili mi? Hangi kavramla ilişkili?

Yasir: Tabii hocam illa ki bir şeyle alakası var ama denklemlerle olabilir. Çünkü bunun illa ki daha farklı bir yöntemi vardır.

…

Araştırmacı: Peki sence bu soru matematikte neyle ilgili bir şeyle ilgili mi?

Yasir: Hocam bu da bir problem yani bildiğimiz.

Yasir'in yapılan görüşmelerde yönlendirme olmadan yaptıklarını kontrol etmeye yönelmediği ve problemlere verdiği cevapların bir kesinlik içermediği, hatalarını kendisinin görememesinden kaynaklı sık hata yapmış olabileceğini düşündüğü ve verdiği cevaplar doğru ise problemi sevmiş olabileceğini belirttiği görülmüştür.

### 3.3.4. Emrah'ın problem çözme sürecindeki inançlarına ilişkin bulgular

Katılımcılardan Emrah'ın problem çözme sürecinde kendi yönergelerini oluştururken zorlandığı ve odak noktasının dağıldığı zamanlar olduğu görülmüştür.

Araştırmacı: (Gülüyor) Yönlendirme yok. Hangisini alırsanız alın mı diyorsun?

Emrah: (Gülüşmeler) Aynen. Daha basit bir yolu yok mu yani? Bu kadar… Yüzde 25 falan… Şimdi yüzde 25'lik kısmı değerlendirildiğinde hocam… Ha. Iıı… Burada 75 var, burada da 100 var ya hani. Ben şöyle düşündüm. 75'den 100'e hani 25 tamamlanıyor. Yüzdelik olarak hesapladığımda bu iki indirime baktığımda mesela bu diyor ki 2 TL'lik indirim yapacağım, bu da diyor ki yüzde 25'lik bir indirim yapacağım. 75 den 100 e hani 25 olursa, 25; 2'ye denk gelir. Bu da yüzdelik olarak da 25, 2 ye denk gelir hani sayı olarak. O yüzdelik kısım o da sayı olarak. Öyle düşündüm ama biraz karıştı benim kafam da…

Emrah, yüzde alma ya da dört işlem gibi bazı matematiksel kavramlarda zorlandığını, bu durumun da onun problem çözme sürecini ve matematiğe olan inancını olumsuz etkilediğini ifade etmiştir.

Emrah: Bu, ıı şey… Yüzde 25'lik bir indirim yapılıyor hani… Normal fiyattan yüzde 25'lik kısmı çıkarırım, "n" ile çarparım.

Araştırmacı: Nasıl gösteririz onu?

Emrah: Gösterim olarak… Öncelikle yüzdeliği sayı olarak bulmak gerekiyor. Yoksa…

Araştırmacı: Ne demek yüzdeliği sayı olarak bulmak?

Emrah: Yani kesirli yapıyoruz ya genişletip tam sayı olarak hani bulmam gerekiyor.

Araştırmacı: Göster nasıl yapacağını Emrah.

Emrah: Tek tişört. Yüzde 25'lik. 1/25'den o da kaç olur? Yüzde 2'lik olur değil mi? 25'i 4 ile çarpmam gerekiyor…

Araştırmacı: Bir sayının yüzde 25'i nasıl alınır?

Emrah: Bir sayının yüzde 25'i… Mesela 1… Bir sayının yüzde 25'i şey… Iıı… Sayı çarpı 25…

Araştırmacı: Mesela 100 sayısının yüzde 25'i kaçtır?

Emrah: 100 sayısının yüzde 25'i kesir olarak şu şekilde… (25/100 yazar)

Araştırmacı: Bu, 25/100. Peki. Bu bir sayının yüzde 25'ini almaya yarayan durum. Benim sayım ne?

Emrah: Benim sayım burada… 1'i de alacağız. Direkt yüzde 25'lik fiyatı bulacağız.

…

Araştırmacı: Soruda ne hissettin? Bu soru sana kolay mı geldi zor mu?

Emrah: Ya hocam hani şey olarak… Direkt sözel olarak bir yandan birine anlatmak olarak hani zor geliyor. Çünkü tam neyi neyle ifade ettiğimi kafamda dönen şeyleri karşıya ifade edemedim bir durum var. Ondan sonra hani… Iıı belli eksikliğim olduğu için hani matematikte temel bazı şeyler bilmediğim için hani nasıl ifade edebileceğimi de bu bilgisizlikten dolayı da yapamıyorum ondan dolayı. Bu, ondan dolayı biraz ifade eksikliği oluyor hocam.

Emrah'ın yapılan klinik görüşmelerde değişken kullanmakta ve cebirsel ifade oluşturmakta zorlandığı, bu sebeple de alternatif çözüm önerilerine yönelemediği görülmüştür.

Araştırmacı: Biz bu sayıları tek tek yazmıyoruz da bir şekilde gösteriyoruz ama biz biliyoruz ki o gösterdiğimiz şey 75 ile 150 arası demek. Bir şey kullanarak gösteriyoruz ne kullanarak gösteriyoruz?

Emrah: … Şey formüllerden birini…

Araştırmacı: Formül dediğin şey ne oradaki? Benim elimde öyle sayılar var ki bu sayılar 75 ile 150 arasında. Ben bunu göstermek istiyorum…

Emrah: Mesela ben bu söylediğinizi dizi olarak değerlendirirsem 75 diyelim ki burada yazdım ya… "75 + 1", "75 + 2", … "75 + n" diye gider.

Araştırmacı: Hııı. O zaman tam sayıları mı buluruz oradaki?

Emrah: Gibi. En son 150. Şu şekilde "75 + n"…150 diye gider. (Kâğıtta "75 + n…150" yazar)

Araştırmacı: Iıı 75 ile 150 arasındaki sayıları böyle ifade ederim diyorsun yani?

Emrah: Ben böyle ifade ederim. Başka belki vardır ama şuan aklıma gelmiyor yani (Gülüyor)

Futbol probleminde Emrah'ın problemin içeriğinde verilmeyen bir bilgiyi takımlar arasındaki ilişkiyi görmekte zorlandığı için probleme dahil ettiği ve soruyu ona göre yorumlamaya çalıştığı gözlenmiştir.

Araştırmacı: Mesela şimdi sen A ile ilgili bir yorum yaptın. E ile ilgili yorum yaptın. Diğerlerine ne diyeceğiz? Mesela C ile ilgili ne diyebiliriz?

Emrah: Mesela C'yi şöyle şey yapabiliriz hocam. C mesela burada kime… C mesela D'yi yeniyor. Hani D'yi yenmiş. Burada D'nin yendiği takımlar ne mesela? Diyelim ki C, D'yi yeniyor ya. Örneğin diyorum mesela D, E'yi yeniyor eee C, D'yi yendiğine göre E'yi de yener şey olarak düşündüğümüzde.

Emrah'ın görüşmeler süresince kendisine güvenmediği, kendisini yetersiz hissettiği ve söylemek istediklerini ifade edemediğini belirttiği görülmüş bu durum da matematiksel sayı, sembol kullanmakta zorlanmasıyla ilişkili olarak düşünülmüştür.

Araştırmacı: Anladım. Peki, bu soruyu çözerken ne hissettin Emrah?
Emrah: Soruyu… İlkönce tedirginlik hissettim. (Gülüyor) Biraz ne bileyim kendimi ifade edemedim galiba çünkü bundan biraz rahatsızlık duydum. Emin olun yani nasıl yapmam gerektiğini tam olarak aktaramadığımı düşünüyorum da yani kendimi ifade edemedim. Doğru kelimeleri bulamamaktan kendimi biraz stres altında hissettim.
…
Araştırmacı: Peki, o zaman şey kısmına geçelim. Bu problem sende ne hissettirdi?
Emrah: Valla şuan baya bir eksiklik hissettirdi hocam yani. Kendimden utanıyor gibiyim yani.
Araştırmacı: Yok kendinden utanmana gerek yok.
Emrah: Hiç temelim yokmuş onu anladım.
…
Araştırmacı: Peki ben sana şeyi sorayım. Bu soruyu çözerken ne hissettin?
Emrah: Çözerken ne hissettim hocam? Biraz korktum hani ne bileyim gerçekten basit bir soru baktığımız zaman. Bilgiye sahip olmadığım için bulamayacağım için kendimi kötü hissettim.
…
Emrah: Şekillerle yani görsel zekâm kafamda ne bileyim geometrik şekilleri oturtabiliyorum daha rahat. Ama hani sıkıntı şurada bazı bilgilere sahip olamadığım için onu hani size anlatamıyorum yani.
Araştırmacı: Anladım.
Emrah: Bir de hani insan eksik hissediyor çünkü bazı şeyleri size anlatamıyorum hani evet bunda bile fakat aktaramıyorsun karşı tarafa gerçekten bazı şeyleri bilmek gerekiyor.

Problemlerde ilişkileri anlamakta güçlük çektiği kısımları net bir biçimde probleme dahil etme önerilerinde bulunduğu görülmüştür.

Araştırmacı: Peki sen soruya ilave edecek bir şeylerin olsaydı ya da bu sorudan bir şeyleri çıkartacak olsan yani değiştirecek olsan nasıl değiştirirdin?
Emrah: Nasıl değiştirirdim… Yani ne yapabilirim ki… Mesela… Rövanş maçlarını da ekleyebilirdim hocam. Ondan sonra…
Araştırmacı: O zaman soru daha mı kolay olurdu daha mı zor?
Emrah: O zaman daha basit olurdu hani şurada kesişim olayı olmasına artık gerek olmazdı.

…

Araştırmacı: Peki, sen bu soruya bir şeyler ilave edecek ya da çıkartacak olsan neyi ilave ederdin?

Emrah: Ben direkt öğrenci sayısını ilave ederdim mesela.

Araştırmacı: Öğrenci sayısını ilave ederdim diyorsun direkt. O zaman daha mı kolay olurdu her şey?

Emrah: Yani direkt olayı çıkarırdık yani.

Emrah, yapabildiğini düşündüğü problemleri sevdiğini ancak yapamadıklarını sevmediğini ifade etmiştir.

Araştırmacı: Sevdin mi peki soruyu?

Emrah: Soruyu sevdim yani sizle birlikte muhabbet şeklinde gittiği için sıkıntı yok. Güzel sorular, basit sorular ama yani.

…

Araştırmacı: Peki sevdin mi soruyu sevmedin mi ne hissettin?

Emrah: İlk soruyu sevdim, bunu pek sevmedim hocam yapamadım çünkü.

Problemlerin içeriğine ise Emrah, genel olarak matematikte yorum becerisiyle ilişkilendirmiştir.

Araştırmacı: Peki bu soru mesela sence hem birinci hem ikinci soru için sorayım. Bu soru matematikte neyle ilişkili sence hangi kavramla?

Emrah: Hangi kavramla ilişkili? Yani problemler.

…

Emrah: Dört işlem demeyeyim de size şöyle diyeyim. Matematikteki yorum becerisi…

Emrah'ın problem çözme sürecinde geçmiş yaşam deneyimlerini problemin bağlamıyla birleştirebildiği, kendisini matematiksel konu veya kavramlarda eksik hissettiği için söylemeye çalıştıklarını tam ifade edemediğini belirttiği ve sorularda en çok zorlandığı kısımları problemin içeriğine dahil etme önerilerinde bulunduğu görülmüştür.

### 3.3.5. Saffet'in problem çözme sürecindeki inançlarına ilişkin bulgular

Saffet'in problem çözümlerine odaklanırken içerisinde genelleme ya da cebirsel ifade oluşturmasını gerektirmeyen problemlerde kendi yönergelerini oluşturup bu doğrultuda hesaplamalarını sürdürdüğü gözlenmiştir.

Saffet: Bu yani karışık. Yani karışık değil de ıı analiz etmek gerekirse ben bunu tabloya dökebilirim.

Araştırmacı: İstediğin gibi yapabilirsin. Ne olduğuna bakalım.

Saffet: … Şimdi… (Sessizlik) (Soruyu içinden okuyor) Şimdi kim kime yeniliyordu? (Sessizlik) Bunlar yenilenler… Şurada birkaç tane daha kaldı… Bu şekilde hocam. ("Beraberlikler yazar" altına "A= C", onun altına "E= B", onun da altına "C= B" yazar. Yenilgiler yazar "A= B", altına "A= E" yazar. "Galibiyet" yazar altına "D= A", onun altına "B= C", onun da altına "B= D" yazar)

Araştırmacı: Hıh. Ne yaptın?

Saffet: Bakınca hani mesela A'nın C ile beraber kaldığını, E'nin B ile beraber kaldığını, C'nin B ile beraber kaldığını; A'nın B'yi yendiğini, A'nın E'yi yendiğini; D'nin A'yı yendiğini, ıı B'nin C'yi yendiğini, B'nin D'yi yendiğini görebiliyorum.

…

Saffet: Aklıma ne geliyor? Aklıma ilkönce matbaaların sunduğu fiyatları tam halinde mesela 75 tişörte kadar 10 TL fiyat vermiştir diyor. İşte 750 lira işte 75 tane tişört 750 lira ediyor. 75 sonrasından da hesaplar bir sayı belirlerim kendime. Mesela burada 160 demiş. 160'a kadar çıkartabilirim fiyatı. 160 taneye kadar çıkartabilirim. 2 matbaadan da verilmiş olan fiyatlarla yapabilirim.

Ancak Saffet'in genelleme yapmakta ya da ana dilde kendisini ifade etmekte zorlandığı ve değişken kullanması gerektiğini düşündüğü problemlerde alternatif yöntemlere yönelemediği, aynı zamanda kendi yönergelerini oluşturmakta zorlandığı görülmüştür.

Araştırmacı: Peki. Bu soruyu bilinmeyen kullanarak ifade edebilir misin?

Saffet: Bilinmeyen kullanarak ifade edebilir miyim? Evet.

Araştırmacı: Nasıl edersin?

Saffet: Nasıl ederim? Mesela yazarım 200 kişi yazarım. Toplam ücret yazarım. Ona da "x" derim toplam ücret "x" olur. ("200 kişi" yazar yanına da "Toplam ücret" deyip altına çizgi çeker ve x yazar)

Araştırmacı: Toplam ücret bilinmiyor mu şuan?

Saffet: Şu an biliyoruz ama ilk…

Araştırmacı: Şöyle sorayım 200 kişi için toplam ücret bilinmeyen mi? Yani biz kişi sayısını bildiğimiz zaman ücret bilinmeyen mi olur? Burada bilinmeyen nedir öyle sorayım.

Saffet: Bu soruda bilinmeyen kişi sayısı. Yani kesin değildir diyor.

Araştırmacı: O zaman biz ücrete mi x diyeceğiz yoksa kişi sayısına mı?

Saffet: O zaman kişi sayısına olur ama 200 kişi için daha… Neyse orayı karıştırmayalım.

…

Saffet: … (Sessizlik) Burada şimdi en mantıklı olan formül yazmak…

Araştırmacı: Nasıl bir formül?

Saffet: "x artı 2" işte şu kadar şu kadar. Şu adımda şu kadar. "n" falan o şekilde bir ortaya denklem koymak. Ama şu anda benim hiç denklem koyasım yok.

Saffet, yapabildiği problemleri sevmiş ve kolay olarak düşünmüş ancak yapamadığı problemde kendine güvenmediği ve soruyu sevmediği ortaya çıkmıştır.

> Araştırmacı: Ne hissettin çözerken?
>
> Saffet: Ne hissettim? Iıı… Pek bir şey hissetmedim yani. Birkaç duygumu uyandırmadı.
>
> Araştırmacı: Yani zor ya da kolay diyebilir misin? Ne diyebilirsin?
>
> Saffet: Durup düşündüğümüz zaman birazcık gayet kolay bir soru ama durup düşünmek lazım başta.
>
> …
>
> Araştırmacı: Peki sevdin mi soruyu? Sevmedin mi ne hissettin?
>
> Saffet: Soru güzel. Düşündürüyor.
>
> …
>
> Araştırmacı: Peki. Bu soruyu okuduğunda ne hissettin?
>
> Saffet: Bu soruyu okuduğumda ne hissettim… Çok dolandırmışlar. Lafı dolandırmışlar yine. Şu kadardan sonrasını şu kadar… İşlem kalabalığı ya.
>
> Araştırmacı: Çözerken ne hissettin?
>
> Saffet: Çözerken ne hissettim… Çözemeyeceğime inandım.

Konser probleminde ise, Saffet'in problemin bağlamında yer almayan günlük hayat yorumunu soruya katarak bilet ücretinin farklı değişkenlerle ilişkisini incelediği görülmüştür.

> Araştırmacı: Bunları hepsi değişebiliyorken acaba bunları beraber böyle bir bağlantı kurmak istesen nasıl kurarsın? Tamam değişebiliyor ama birbirleri arasında değişirken illa ki bir ilişki var. Var mı ya da?
>
> Saffet: Yani şimdi soruyu eğer güncel bir yorum yapacak olursam şimdi ben bir konsere 20 lira veririm ama 30 lira gayet pahalı geliyor. O yüzden gideni fazla olmayacağı için 20 lira sabit bir şekilde kalır. İyi güzel, Allah bereket versin. Stadı olduğu kadarıyla büyük seçerim çünkü hani hiç belli olmaz o gün işsiz çok olur. Ne bileyim canı sıkılan olur, farklı bir şey olur. Ve günü de değişken bunun. Gününü de güncel bir bayrama falan denk getiririm veya günümüzde şu anda zaten güncel olarak şehit haberleri falan geliyor şehit olmadığı bir güne denk getiririm artırmak için seyirci kitlesini veya saygınlığımı kaybetmemek için. Şehir merkezine yakın bir yer seçerdim. Öyle çok dışarıda bir yer seçmezdim. Hatta mümkünse stat değil açık alan böyle tellerle şey yapılmış…

Problemi değiştirme önerisi olarak Saffet'in ilişkileri anlamakta zorlandığı kısmı probleme dahil etme önerisinde bulunduğu görülmüştür.

> Saffet: … Kolaylaştırmak açısından kişi sayısını belirlerdim öğrenci sayısını veyahut ta öğrencilerin işte şu kadar öğrenci katılım yapacaktır şu kadar öğrenci daha gelebilir şu kadar öğrenci daha da gelebilir. Bunu da zorlaştırmak açısından yuvarlak sayılar vermezdim.

Mesela 46 öğrenci eklenebilir, 185 kişiye diyerekten tek bir tişörtün hesabını bile düşürebilirdim ama.

Saffet, futbol sorusunu matematikte kombinasyon konusuyla; tişört, ve konser sorularını problemlerle, karo sorusunu ise örüntü konusuyla ilişkilendirmiştir.

Araştırmacı: Peki matematik derslerinde çözülen sorulardan farklı mı yoksa benzer mi?

Saffet: Farklı mı benzer mi konusuna göre değişiyor.

Araştırmacı: Mesela?

Saffet: Kombinasyona benzeyebilir.

Araştırmacı: Kombinasyona benzeyebilir?

Saffet: Aynen öyle. Bana göre yani.

…

Araştırmacı: Peki bu soru okulda çözülen problemlerden farklı mı? Ya da benziyor mu?

Saffet: Benziyor.

Araştırmacı: Neye benziyor daha çok?

Saffet: Problemlere.

…

Araştırmacı: Peki sence matematikte hangi kavramlarla ilgili?

Saffet: Örüntüyle ilgili bence.

…

Araştırmacı: Peki bu soru sence matematiksel olarak neyle alakalı?

Saffet: Problemlerle veya oran/orantıyla…

Saffet'in yapılan klinik görüşmelerde zorlandığı problemlerde kendisine güvenin azaldığı ve geçmiş yaşam deneyimlerini problemin bağlamına dahil edebildiği görülmüştür.

### 3.3.6. Abdi'nin problem çözme sürecindeki inançlarına ilişkin bulgular

Abdi, görüşmelerde çok kez soruyu hatalı okumuş, konser sorusunda ise, kelimelerin kavramlarını (gelir/kar ilişkisi) yanlış yorumladığından soruyu anlamlandırabilmekte zorlanmıştır. Problemleri ilk kez okuduktan sonra yönelimi doğrudan soruyu çözmeye odaklanmak olup, eldeki verilerden çok cevaba gitmeye çalıştığı görülmüş ve görüşmeler boyunca problemlerde fikir yürütürken kendi yönergelerini oluşturmuştur.

Abdi: E, D'yi yenip B ve C ile berabere kalıyorsa… Kalıyorsa 5 puanı olur. Şimdi, bu sefer arada kalanlara bakmamız gerekiyor. D var. Şimdi D'ye bakarsak D, E'ye yeniliyor. B'ye bakalım. D; B'yi yeniyor. O zaman 3 puanı olur. D, A'ya… D, eğer A'yı da yeniyorsa +3 puan daha gelir. Hepsine baktık mı? A'ya baktık. B'ye? B'ye de yeniliyor D. B; C'ye de yeniliyorsa toplamda 6 puan olur. C'ye bakalım.

…

Abdi: Ha yine 100 bin TL kar yapması lazım. Yine 100 bin TL kar yapacaksa bu sefer biz 1000'i 10 a böleceğiz. Yani 100. 100 çarpı 150 yapacağız. 10 çarpı 15 yine 150. 15 bin kişinin gelmesi gerekiyor.

…

Abdi: Bir saniye. 250 bin TL kazanırdı ama 200 bin kar yapardı. (250.000TL kazanırdı 200.000 kar yapardı yazar.) Doğru hesapladığıma emin değilim bir daha hesaplayayım.

Problemlerde sık sık kendi yönergeleriyle ne yapması gerektiğini ifade etmiş ve soruyu tekrar okuduğunda hata yaptığını düşündüğü yerleri kendisi fark etmiştir.

Abdi: Şimdi A'nın B, C, D ve E ile olan maçlarını göstereceğim. (A başlıklı bir tablo yapar. Altına B, C, D ve E sütunları açar.) Şimdi A; E ve B ile oynuyormuş. B'yi yeniyormuş öncelikle. 3 puan alır. Daha sonra E'yi yeniyormuş E den de 3 puan alır. C ile berabere kalıyormuş 1 puan alır. D ye de yeniliyormuş 0 puan alır. (Tabloda B'nin altına "3", C'nin altına "1", D'nin altına "0" ve E'nin altına "3" yazar) B; A, C, D ve E ile maç yapacağı için. Şimdi B; A'ya yenilmiş o zaman "0" puan alır. C ve D'ye de yeniliyorsa onlardan da 0 puan alır. O zaman B bu durumda 6 puan almaz. (Kağıtta B de "6" yazan yeri gösterir.) Daha sonra burada E ile olan kısmını göstermiyor. O yüzden burada E'nin B ile olan kısmına bakacağız. E; B ile berabere kaldığı için 1 puan alıyor.

…

Abdi: Yani ben karıştırdım. Ben tek tek hesaplama yaptığım için karıştırdım. Yani o zaman burada da karıştırmış oluyorum. (Çiçek için yaptığı hesaplamayı göstererek) Burada da burada da ooo hepsini karıştırmış oluyorum o zaman.

…

Abdi: Tablo yapmadan çözebileceğimi düşünüyordum. Sonra baktım olmuyor tablo yaptım yani. Mecbur kaldım. Aslında yine yapardım da doğru yaptığıma inanıyorum sadece şurada B de yanılmışım.

Abdi, problemlerde nicelikler arasındaki ilişkileri yorumlamakta zorlandığında kesin bir sonuç bulma ihtiyacı hissetmiş ve problemi değiştirme önerisini de bu doğrultuda vermiştir.

Abdi: Bu problem okulda çözülen problemlere benziyordu, çok benziyordu hatta. Da bu önerme mönerme değil de yani daha çok problemlerde biz kesin cevap aldığımız için.

Araştırmacı: Ne olsa kesin cevap alırdı burada?

Abdi: İşte çıkan öğrenci sayısını verse kesin cevap alırdık.

Araştırmacı: Peki bu soruda öğrenci sayısı belli değil ve ona göre değişkenlik gösteriyor ya hani böyle bir yapı matematikte var mı?

Abdi: Yok.

…

Araştırmacı: Peki bu soruya sen bir şeyler ilave edecek olsaydın ya da bir şeyleri çıkartacak olsaydın nasıl müdahale ederdin?

Abdi: Bu soruya öğrenci sayısını ilave etsem çok basit olurdu. Gerçekten zor bir soruydu yani. Çok beyin yorucu bir soruydu.

Problemlerde değişkenleri kullanmakta sorun yaşamayan Abdi'nin birden fazla değişkenin sürekli değişebileceğini düşündüğünde zorlandığı görülmüş ve bir şeyleri sabit tutma gereksinimi hissettiği gözlenmiştir.

Araştırmacı: Buna "x" dersen burası 100.000 mi olur? Ya onlar da değişirse Abdi? Hep 100 bin mi gelir hedefleyecek?

Abdi: Ama hedeflediği gelir 100 bin.

Araştırmacı: Hep 100 bin mi gelir hedefleyecek? 200 de hedefleyemez mi yani? Burada değişti ya soruda.

Abdi: "y" mi diyeceğiz ona?

Araştırmacı: Nasıl istersen.

Abdi: y diyelim o zaman biz buna. ("= 100.000" kısmının üstünü çizip oraya "y" yazar) Yaptığı harcama 50 bin. Bunu harcadı artık yani. ("yaptığı harcama = 50.000" yazar)

Araştırmacı: Eee ya o da değişirse?

Abdi: Bu nasıl değişecek hocam?

Araştırmacı: 75 olmuş burada mesela?

Abdi: O zaman bunla bunun bağlantısı var. Şu ikisinin. (50.000'in üstünü çizer, gelir ve harcamayı gösterir)

Araştırmacı: İşte bunları soruyor galiba soru biraz.

Abdi: Ben sanki buldum gibi. Yoo bulamadım. (Gülüyor) Bir saniye… (Sessizlik) Ödenen giriş ücreti var bir de… ("Ödenen giriş ücreti =" yazar) Şimdi bunun yapması gereken kar 100 bin TL değil mi? … Yani…

Abdi, zorlandığını düşündüğü tişört problemini zor bir problem olarak betimlerken yapabildiğini düşündüğü karo ve konser sorularını sevdiğini ifade etmiştir.

Abdi: Bu soruya öğrenci sayısını ilave etsem çok basit olurdu. Gerçekten zor bir soruydu yani. Çok beyin yorucu bir soruydu.

…

Araştırmacı: Peki. Ne hissettin bu soruyu çözerken Abdi? Sana göre nasıl bir soruydu?

Abdi: Güzeldi. Hoşuma gitti. (Gülüşmeler)

…

Araştırmacı: Peki bunda ne hissettin Abdi?

Abdi: Hocam bu yorucuydu. (Gülüyor)

Araştırmacı: Yorucu geldi. Sevdin mi soruyu?

Abdi: Sevdim hocam, soruyu sevdim.

Abdi, araştırmada kullanılan problemlerin matematikte de problemler genel anlamda problemler konusuyla bağlı olduğunu belirtmiş konser sorusunu denklemler konusuyla ilişkilendirmiştir.

> Abdi: Bu 9. sınıf problem sorusu gibi yani.
>
> …
>
> Araştırmacı: Peki şeyi de sorayım. Bu iki soru matematiksel bir kavram olarak birinci soru neyle ilişkili? İkinci soru neyle ilişkili?
>
> Abdi: İkinci soru denklemlerle ilişkili. Oran-orantı da var.

Yapılan görüşmelerde Abdi'nin tek bir cevaba göre yorum yapma isteğinde olduğu, süreçte kendi yönergelerini kullanıp hareket edebildiği ve kendi hatalarını kendisinin görebildiği ve yapabildiğini düşündüğü problemleri sevdiği görülmüştür.

### 3.3.7. Oğulcan'ın problem çözme sürecindeki inançlarına ilişkin bulgular

Problemlerde genel anlamda Oğulcan'ın kendi yönergelerini takip ettiği ve çözüm yolunu ararken ne yapması gerektiğinin farkında olduğu görülmüştür.

> Oğulcan: Ya, onu ben rasgele belirledim. Şöyle yapalım, açıklama yapalım. Çıkmak yenmek, düz berabere, aşağı da kaybetmek. (Kağıtta "/ = yenmek","- = berabere", "\ = kaybetmek" yazar) A, bir çıktı çünkü E'yi yendi. Bir daha çıktı çünkü B'yi yendi. C ile berabere kaldı. Ondan sonra D'ye de yenildi. (Kağıtta iki kere üste çizgi, bir kere yana çizgi, bir kere de aşağı çizgi atar grafiğin üstüne) Hepsini ayrı ayrı yapayım ben en iyisi burada karışır yoksa.
>
> …
>
> Araştırmacı: Peki bu tişört sayılarını neye göre belirledin?
>
> Oğulcan: Onu daha belirlemedim. Ajansa göre değiştirebilirim yine. Ajans matbaa 100 tişörte kadar 12 TL. İlk fiyatına göre 70 tişörte kadar oluyor. Onu elemeye gerek yok. 100 tişört ile 160 tişört arasında… Bunu o zaman ben (90'ı kast ederek) 100'den fazla yapsam burası değişecek mi? 150'den fazla olması halinde olmayacak… Yoo oldu. Buna zaten niye 90 demişim ki? 90 mantıksız olmuş burada.
>
> Araştırmacı: Neden mantıksız?
>
> Oğulcan: 75 tişörte kadar 10 TL demiş. He he, tamam tamam. Buna 110 diyeyim ben.
>
> Araştırmacı: Neden 90 mantıksız geldi de 110 dedin sen?
>
> Oğulcan: İkisini de oranlı yapmaya çalıştım.
>
> Araştırmacı: Neyi oranlamaya çalışıyorsun?
>
> Oğulcan: 75 ten fazla olunca fiyat değişiyor. 75 ile 150 arasında fiyat başka çiçek matbaa için. Onun için 110 yaptım bunun sebebi de ajans matbaada 100 ile 160 arasında fiyat değişiyor yine. İkisinin ortak arasında olacak. O yüzden 110 tişört dedim. Iıı bir de ne diyor? 150 den fazla. 200 tamam. 160'tan fazla 200 tamam bu şekilde oldu herhalde.

Oğulcan, genel anlamda problemde yer almasa bile görsel üzerinden problemleri anlamlandırmaya çalışan bir katılımcı olmuş görselleri içinde bulunduran karo probleminde ilişkiler üzerine daha detaylı açıklamalar yapabildiği gözlenmiştir.

> Araştırmacı: “n+2”yi neden dedik?
>
> Oğulcan: “n+2”yi şundan dedim. Hani şunun aynısını buraya indirdiğim zaman bir burada bir burada fazladan hani örüyor ya etrafını. Bir burada bir burada iki tane fazladan var. Sonra ben bunu iki ile çarptım burayı da ekledim sonra şuraları da ekledim. Oradan bu kuralı buldum. Oradan bu kural çıktı yani şöyle Oğulcan Kuralı. (“(n+2).2+2” yazan yerin altına “Oğulcan kuralı” yazar.) (Gülüşmeler) Böyle yaptım hocam.
>
> …
>
> Oğulcan: Hıı. Anladım. Şöyle derim hocam…(Sessizlik) Şöyle bir şey buldum. Şimdi mesela ikinci teras için konuşuyorum. “n,2”. 2 artı 2 4. Hani şuradan geldi bunlar yine. 4 çarpı 3 hani şuradan şöyle 12. Eksi 2 terasın siyah yeri 10.
>
> Araştırmacı: 2 artı 2 nereden geldi?
>
> Oğulcan: Şu 2 ya mesela hocam.
>
> Araştırmacı: Hı.
>
> Oğulcan: Bir de 2 tane ekledim.
>
> Araştırmacı: Ha yanları ekledin. Yaz onu, yine yazabilirsin bence.
>
> Oğulcan: Yazayım. “n artı 2 çarpı 3”. Çünkü hep ne kadar ileri giderse gitsin sonsuza doğru gideceğinden hep 3 olacak orası sabit olacağı için. Çarp 3 dedim, eksi 2 dedim. (“(n+2).3-2” yazar.)

Tişört problemini ise anlamlandıramamış ve normalde değişken kullanabilen bir katılımcı olmasına rağmen bu problemde değişkenleri yönlendirmeyle dahi olsa kullanamamış ve yorumlayamamıştır.

> Araştırmacı: Peki bu soruda bunu yapmaya kalksak bilinmeyen yani “x” kullanarak nasıl yaparız?
>
> Oğulcan: Iıı… Nasıl yaparız? Mesela… Bir öğrenci sayısına “x” deriz. Ama bu “x”… Öğrenci sayısına “x” denilmez. Şöyle deriz.
>
> Araştırmacı: Neye “x” denir?
>
> Oğulcan: Tişört sayısına “x” denir. Hımm… Tişört sayısına “x” denilebilir.
>
> Araştırmacı: İstediğin şeye diyebilirsin. Şuna ya da buna demek zorunda değilsin. Birden fazla bilinmeyen de kullanabilirsin.
>
> Oğulcan: Yaa… Iıı... Ya hocam benim bu soruda aklım direkt şeye gidiyor. 0 ile 75 arasına x derim. Ben bu soruyu tek bu şekilde çözerim. Başka bir çözme yöntemi aklıma gelmiyor. Yani…
>
> Araştırmacı: Tişört sayısı ya da başka bir şeye x diyerek yapmam mı diyorsun?
>
> Oğulcan: Yani zor olur. Yani belki zor olmaz ama aklıma gelmez.

Yine tişört probleminde matematiksel kavram veya konularda eksik hissettiğini, problemi çözemediğini düşündüğü için ifade etmiştir.

> Araştırmacı: Ne anladın sorudan Oğulcan?
>
> Oğulcan: Hocam yüzde problemlerim pek iyi değil. Onu bir söyleyeyim.
>
> …
>
> Oğulcan: Iıı 160 taneden fazla yoo ne diyor (Soruyu içinden okur) yüzde 25 indirim yapacak. Kaç 110 yani 10 tane tişörtü yok hani 12'nin yüzde 25 i ne; 10 tane tişörte geri kalanını 12 TL ye yapacak.
>
> Araştırmacı: Yani?
>
> Oğulcan: 10'un yüzde 25 ini alacağım. Ama onu nasıl alacağımı unuttum. Ben yüzdeleri unuturum hocam. (Gülüyor)
>
> …
>
> Oğulcan: Ya şu konuda çok bilgisiz olduğumu hissettim. (Analitik düzlemdeki çizimini gösterir.) (Gülüşmeler.)

Oğulcan, yapamadığını düşündüğü tişört probleminde ilişkileri bulmaktan çok sonucu bulmaya odaklanmış ve önerisini de sonucu bulabilmek için vermiştir.

> Araştırmacı: Gösteremiyorum diyorsun peki. Bu problem sende ne hissettirdi?
>
> Oğulcan: Hocam bu baya bir karışık problem. Uzun uzun uğraşılması gereken bir problem. Bu problemin çözülmesi için öğrenci sayısının bilinmesi gerekir yani. Yani en karlısı için.

Alternatif yöntemlere yönlendirildiğinde sık sık "nasıl yapıyorduk, hatırlamıyorum" gibi cümleler kurmuş ve bilgilerini geri çağırmakta zorlandığı için yöntemde ısrarcı olmamıştır.

> Araştırmacı: Peki birleştir o grafiği sürdür.
>
> Oğulcan: Bu sonsuza doğru artan bir grafik.("(14,3)"ü de çizip noktaları birleştirir.)
>
> Araştırmacı: Ne bu? Artan bir sonsuza doğru giden bir ne?
>
> Oğulcan: Grafik fonksiyon yani doğru.
>
> …
>
> Araştırmacı: Şimdi bak şöyle düşün. Bir tane doğru var. Sorudan biraz bağımsız söylüyorum bunu. Bu doğrunun denklemini yazman isteniyor. Sen daha önce böyle doğruların denklemlerini hep yazdın.
>
> Oğulcan: Evet, yazdım ama şuanda hatırlamıyorum. (Gülüyor.)
>
> …
>
> Oğulcan: Bunu fonksiyonlarda falan görmüştüm ben bunu. … Şey diyorduk "x-x-1"…

Oğulcan, karo probleminde ise, tüm niceliklerin değişebileceği noktasında problemde nicelikler arasında olmayan bir ilişkiyi ifade etmeye çalışmış ve bilet fiyatının artması halinde stada gelecek kişi sayısının azalacağını belirtmiştir.

Araştırmacı: Peki bu yaptığın ne işe yarıyor Oğulcan? En son yaptığın, yazdığın?

Oğulcan: Bu yaptığım işte mesela ya da adam diyor ki benim kapasitem işte sınırsız tamam mı? Ya da çok fazla sen kendi çapına göre harcama yap ona göre biletini şey yap diyor. O zaman da Jale diyor ki ben diyor gelirimi bu kadar hedeflesem harcamamı da bu kadar hedeflesem işte bilet de hani ne kadar yapsam kaç kişi gelir gibisinden, mesela hani başta bir 10 yapar kapasite işte çok çıkar. Sonra der ki bu kadar insan gelmez bileti biraz daha artırayım.

…

Oğulcan: Biletler 10 TL olursa yine şey olur ya gelen sayısı çok olur ıı ama kazanacağı para az olur. O zaman sayının daha çok olması gerekiyor.

Karo probleminin devamında Oğulcan'ın stadın kapasitesi ile stada gelecek kişi sayısını aynı olarak düşündüğü, yapılan sorgulamalara rağmen bu düşüncesinden uzaklaşmadığı ve kapasitenin sabit olması gerektiğini ifade ettiği görülmüştür.

Araştırmacı: Bilet ile kapasite ters orantılı mı diyorsun? Yani ne demek bu?

Oğulcan: Bilet artarsa kapasite azalır hani 100 bin için konuşuyorum ben.

Araştırmacı: Geliri sabit tutarak…

Oğulcan: Ha geliri sabit tutarak. Gelir sabitse eğer bilet artarsa kapasite azalır ıı çünkü biletin parası artarsa yani fiyatı 30 TL ise daha az kişi gelmiş olur.

…

Oğulcan: Biletler 10 TL olsaydı Jale'nin kazanacağı para ve stada gelen kişi sayısıyla ilgili ne söyleyebilirsiniz? Biletler 10 TL olsaydı Jale'nin kazanacağı para ve stada gelen kişi sayısıyla ilgili ne söyleyebilirsiniz? (Hızlıca tekrar okur.) Hedeflenen para eğer 100 binse yine eğer ıı… Stada gelen kişi sayısıyla ilgili bir şey söylemem ki ben. Çünkü parayı tamam hedeflemiş ama hani stat kaç kişilik soruların içinde de geçerli stat kaç kişilik bilinmemektedir diyor. Biz burada dedik bunlar gelmesi gerekiyor ama…

Araştırmacı: Bir saniye. Stadın kapasitesi ne olursa ne olur? Bir de bu parayı kazanması için en az bu kadar insan gelmeli.

Oğulcan: Evet.

Araştırmacı: Yani daha fazla insan gelirse ne olur?

Oğulcan: Daha çok para kazanır.

Araştırmacı: Hedeflediğinden daha çok para kazanır. Burada daha çok insanın gelme ihtimali hangi şartta geçerli olabilir?

Oğulcan: Stadın daha büyük olması.

Araştırmacı: Stat daha alıyorsa daha fazla insan gelir.

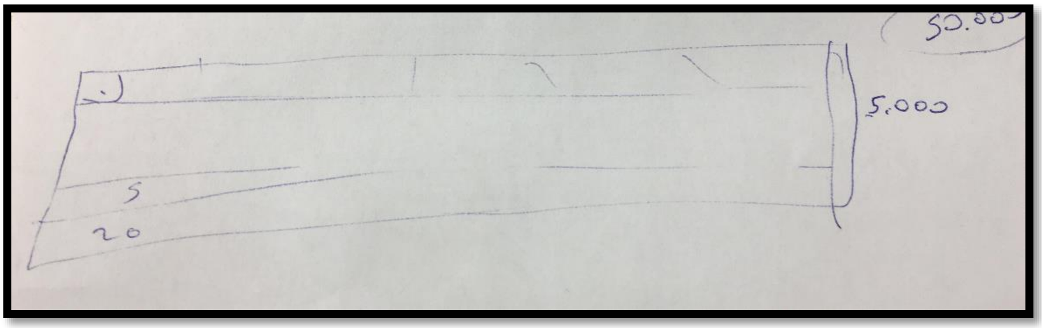
Oğulcan: Evet.

Klinik görüşmelerde Oğulcan'ın bu gerçek hayat durumundan ayrılamadan neden ilişkileri kurmaya çalıştığı sorgulandığında ise, bir akrabasının ticaretle uğraşmasının bu duruma sebep olduğu ortaya çıkmıştır.

Araştırmacı: Peki bu soru sence nasıl bir soruydu soruya karşı ne hissettin?

Oğulcan: Bu gerçek hayatta çok karşılaştığımız bir şey yani. Çok büyük rakamlar olarak değil tabii de ıı özellikle bir akrabalarınızdan biri bir ticaretle uğraşıyorsa onun yanına gitmişsinizdir. Mesela ben çok gittim. Bu tarz şeylerle çok karşılaşıyorum yani bu kadar yüksek rakam olmasa da…

Geçmiş yaşam deneyiminden etkilenen Oğulcan'ın problemde alternatif çözüm yaklaşımı sorgulandığında da yine görsel kullanarak daha önce karşılaştığı sahneye yakın ve uzaklığa göre bilet fiyatlarının oluşturulduğu bir alanı çizmeye çalıştığı görülmüştür.




**Görsel 3.106.** *Oğulcan'ın konser problemindeki alternatif çözüm yolu*

Problemlerin genelinde Oğulcan'ın yapabildiğini düşündüğü soruları sevdiği ve kolay bulduğu ancak yapamadığını düşündüğü tişört probleminde problemi karmaşık bulduğu görülmüştür.

Araştırmacı: Peki soruyu sevdin mi sevmedin mi?

Oğulcan: Soruyu sevdim. Aslında uzun uzun düşünülmesi gereken bir problem. Yani ilk okuyan biri hemen kolay der. Beş dakikada da yapılır der. Ancak okudukça okudukça başka şeyler görüyor insan.

Araştırmacı: Sen okudukça başka şeyler mi gördün?

Oğulcan: Yani. Şu yenilgilere 0 demiştim direkt. C yenildi diye A'ya puan vermemiştim mesela. Direkt C'ye sıfır verip geçmiştim. Onu gördüm. Sonrasında da ıı aynı maçı iki üç kere saydığımı fark ettim. O şekilde…

Araştırmacı: Peki. Bu soruyu çözerken ne hissettin Oğulcan?

Oğulcan: Ya şu konuda çok bilgisiz olduğumu hissettim. (Analitik düzlemdeki çizimini gösterir.) (Gülüşmeler.) Onun haricinde bir de çok ilk başta dördüncü beşinci teras şeylerinde çok büyük bir akıl oyunu oynayacak bir soru falan zannetmiştim de olayı farklı boyutta düşünmüştüm. Sonra siz ilk 3 teras deyince ıı gerçek boyuta döndüm öyle diyeyim. Yani pek de onun haricinde bir şey hissetmedim yani.

Araştırmacı: Zor mu sence soru?

Oğulcan: Yok öyle pek bir zorluğu yok yani.

…

Araştırmacı: Peki sevdin mi soruyu? Kolay mıydı zor muydu?

Oğulcan: Çok kolaydı hocam ya açık olayım. (Gülüşmeler.) Çok bir zorluğu yoktu.

…

Oğulcan: Hocam bu baya bir karışık problem. Uzun uzun uğraşılması gereken bir problem.

Oğulcan, araştırmada kullanılan problemleri genel olarak matematikte problemler konusuyla ilişkilendirmiş, sadece konser problemini oran/orantı kavramıyla ilgili bulmuştur.

Araştırmacı: Problemler matematikte hangi kavramla ilgili olabilir Oğulcan?

Oğulcan: Bunlar problem sorusu hocam.

…

Araştırmacı: Peki şeyi de sorayım. Bu iki soru; karo sorusu ve konser sorusu sence matematikte birisi hangi konuyla daha çok ilişkili konu ya da kavramla?

Oğulcan: Iı bu soru biraz daha oran/orantıyla ilgili ya hocam.

Problem çözüm sürecinde Oğulcan'ın kendi yönergeleriyle hareket edebildiği, tek ve net bir sonuca göre yorum yapma isteğinde olduğu, yapabildiğini düşündüğü problemleri severken zorlandıklarını sevmediği, farklı yöntemlere yönlendirildiğinde kendisine ait olmayan yönergeleri kullanabildiği ve geçmiş yaşam deneyimlerini problemin bağlamına dahil edebildiği görülmüştür.

### 3.3.8. Orhun'un problem çözme sürecindeki inançlarına ilişkin bulgular

Orhun'la yapılan klinik görüşmelerde katılımcının problemlerde kendi yönergelerini kullanabildiği, nasıl ilerlemesi ya da ne yapması gerektiğini kullandığı sözlü ifadelerde belirttiği görülmüştür.

Orhun: Yani yenilgi gibi düşündüm. Sıfır yani… Ne demiştik? A takımı D'ye yeniliyor ama… B'yi yeniyor tamam A takımından sıfır aldı. B takımı, C ve D'ye de yeniliyor. Sıfır, sıfır tamam. E takımı D'yi yeniyor B ve C ile berabere kalıyor. Öyleyse B takımı 1 puan almıştır. Aynen öyle. ("B = 1" yazar) Şimdi tekrar C takımına bakacağız. Böyle tek tek bakarsak bulunabilir. Soruyu her seferinde her takım için tekrar okuyup tekrar karşılaştırmak gerekiyor ki…

Araştırmacı: Bulabileyim diyorsun…

Orhun: Aynen öyle. Yoksa karışıyor sayılar.

…

Orhun: Çünkü burada adım adım gitmiş. Adım adım gittiğini görürsek de hep bir şeyler eklenmiş. Sayılarına baktığımızda da hep belirli bir oranda eklenmiş. Yani belirli bir sayıda eklenmiş. Mesela 1 siyah karo için 2 tane beyaz karo eklenmiş fazladan gibi bir örüntü var.

Nicelikler arasındaki ilişkileri katılımcıların nasıl ifade edeceğine odaklanılan araştırma problemlerinden futbol probleminde Orhun'un ilk soruyu ilk okumasında ilişkiler üzerine değil de sonuç üzerine düşünmesi kaynaklı verilerin eksik olduğunu belirttiği görülmüştür.

> Araştırmacı: Senin ne düşündüğün önemli. O yüzden tükenmez kalem vereceğim. Yanlış yaptığın yeri böyle karalama, çiz ki görelim diye.
>
> Orhun: Tamam yalnız bu soru tam değil.

Orhun, tüm problemlerde kendisinden istenen sonucu bulmaya odaklanmış ve hesaplamalarını da bu doğrultuda sürdürmüştür.

> Araştırmacı: Anladın mı soruyu?
>
> Orhun: Soruyu anladım fakat şöyle bir durum var. Okulun boyutu ne kadar?
>
> …
>
> Araştırmacı: Kesin cevap olmaması seni rahatsız ediyor yani. Peki, soruyu çözdüğünü düşünüyor musun?
>
> Orhun: Soruyu çözdüğümü düşünmüyorum.
>
> Araştırmacı: Bir öneri getirdiğini düşünmüyorsun yani?
>
> Orhun: Bir öneri getiremem çünkü sayı yok.
>
> Araştırmacı: Ama öneri getiriyor musun diyorum. Hani adamlara şu sayıda bunu yapın dediğin şey bir öneri değil mi?
>
> Orhun: İşte kesin bir öneri veremem.
>
> Araştırmacı: Sayı olmadan kesin bir öneri verebilir misin zaten?
>
> Orhun: İşte veremem.

Tişört probleminde Orhun, kendisinden tek bir sonuç istenmemesi üzerine probleme kendi yorumunu katmış, ilişkileri gerçek hayat durumlarına göre yorumlamaya çalışmış ve problemin bağlamında olmayan verilere göre sorgulamalar yapmıştır.

> Orhun: Sayıya bakılmaksızın. Tişörtlerin hepsi mi 6 TL oluyor? Olabilir… Aynen hepsini 6 TL'den veriyor. Fakat şöyle bir durum var. Eğer ben bir idareci olsaydım biraz mantıklı düşünürdüm. Nasıl mantıklı düşünürdüm. Ne kadar öğrencinin nasıl katılacağını düşünmek gerek baştan. Eee bunu öğrenci sayısı olmadan tahmin edemem. Veya öğrencilerin davranışlarını falan da düşünmeden tahmin edemem. Çünkü… Bakalım… Başka ne yapabiliriz? Şöyle bir şey yapabiliriz o zaman. Ben yine çiçek matbaa derdim. Eğer sayı az olursa her türlü karda olurdum. Eğer sayı yine orta bir sayı olursa 160'a kadar bir sayı oldu diyelim. Yine karda olurdum. Ama 500… 1000'lerde bir sayı olursa tabii ki ajans matbaa karda olacak…
>
> …

Orhun: Buna yorum yapmak için okuldaki öğrenci sayısı diyorum ben hala. Çünkü gerçekten bir idareciyse zaten oradaki öğrencilerin kaçının fuara katılacağını, kaç öğrenci olduğunu ne kadarının katılabileceğini tahmin edebilir bir idareci. Soruda bir yanlışlık olduğunu düşünüyorum yani.

Orhun, problemlerde birden fazla değişkeni kullanabiliyor olduğu görülmesine rağmen konser problemindeki tüm niceliklerin değişebileceğini ve nicelikler arasındaki ilişkileri yorumlamakta zorlanmış, eldeki verilerden en azından birinin sabit olması gerektiğini düşünmüştür.

Araştırmacı: Der diyorsun. Peki, f şıkkına bakalım.
Orhun: Okey. İTÜ Stadı'nın kapasitesi, Jale Biber'in hedeflediği gelir, konser için yaptığı harcama ve konsere ödenen giriş ücretiyle ilgili bir bağlantı kurmak isteseniz neler söylersiniz? Hı… (Sessizlik) Bu soruyu anlayamadım.
Araştırmacı: Bir daha oku. İçinden de okuyabilirsin.
Orhun: … (Sessizlik) Şöyle bir mantık kurabilirim. Aklıma başka bir şey gelmiyor. Stadyumdaki konser verecek… Kapasitesi bilinmiyor… Giriş ücreti belirli, yapılan harcama belirli, eğer…
Araştırmacı: Onlar burada belli mi?
Orhun: Efendim?
Araştırmacı: Onlar burada belli mi şuan? Hani bu soruda f şıkkı için söylüyorum. Diyorsun ya işte kapasite bilinmiyor ama giriş ücreti belli, şey belli… Burada belli mi? Yoksa değişirse ne yapacak diye mi soruyor? Hepsi değişebilir bunların. Kapasite belli değil, değişebilir.
Orhun: Hı, şöyle denilebilir. Kapasite değişirse hedeflenen gelir sabit diyelim. Giriş ücretleri değişecektir. Yani artacaktır veya azalacaktır duruma göre. Veya kapasite sabit diyelim. Hedeflenen gelir yüksek veya düşük. Buna göre yine giriş ücretleri değişecektir.
Araştırmacı: Hıhı.
Orhun: Başka ne diyebiliriz? Yapılan harcamaya göre tekrar giriş ücretleri artıp veya azalabilir. Kapasite ve kar sabit kalırsa… Başka bir şey… Belki de giriş ücretlerine göre yapacağı kar değişecektir.

Orhun'un çözüm sürecinde alternatif yöntemlere yönlendirildiğinde kendisine ait olmayan yönergeleri geri çağırmaya çalıştığı görülmüştür.

Orhun: Iı… Nasıl yapabiliriz?
Araştırmacı: 1'den 5. terasa kadar, 1'den 60. terasa kadar…
Orhun: Yine burada örüntü mevcut. Çünkü hepsinde ikişer ikişer beyaz karo sayıları artıyor mesela. O zaman ne yapabiliriz? Burada eğer toplam sembolünü hatırlasaydım çok rahat çözebilirdim.
Araştırmacı: O olmadan yapılmaz mı?
Orhun: Yapılır tabii ki. Yapılır ama çok uzun sürer.

Araştırmacı: Peki bu toplamın toplam sembolü olmadan bir gösterimi yapılamaz mı? 1'den "n"e kadar olan sayıların toplamı? Mesela siyah karolar… En kolay düşünebileceğin şey o.

Orhun: Ha siyah karodan…

Araştırmacı: 1'den 60'a kadar olan ya da 1'den 5'e kadar olan fark etmez. Siyah karoların sayısını görebileceğimiz bir yöntem var mıdır?

Orhun: Doğru hatırlıyorsam "n çarpı n artı 1 bölü iki"ydi.

Araştırmada kullanılan problemlerde yapabildiğini düşündüğü karo problemini sevdiğini belirten Orhun, yapamadığını düşündüğü tişört problemini sevmediğini ifade etmiştir.

Araştırmacı: Ne hissettin soruyu çözerken?

Orhun: Iıı… (Gülüyor.) Soru çok sevdim, o da beni pek sevmemiş gibi görünüyor ama olsun. Matematik sonuçta bulmaca gibi…

Araştırmacı: Bulmaca gibi hissettin…

Orhun: Ne kadar başım ağrısa da eğlendim.

…

Araştırmacı: Bu problemi okuduğunda ne hissettin ya da çözerken ne hissettin?

Orhun: Bir camdan atlama hissi oldu. (Gülüşmeler)

Araştırmacı: Niye sevmedin mi soruyu?

Orhun: Ben soruyu sevmedim soru da beni sevmedi. Bakışıyoruz öyle.

Görüşmelerdeki problemleri matematikte genel anlamda problemlere benzeten Orhun, karo probleminin örüntü kavramıyla ve konser probleminin de oran/orantı kavramlarıyla ilişkili olduğunu belirtmiştir.

Araştırmacı: Peki hangi konuyla alakalı sence matematikte ya da hangi kavramla?

Orhun: Iıı… Örüntü olabilir. Alan hesaplama diyebiliriz. Bunu bir sürü şeyle bağdaştırabiliriz. Problem diyebiliriz. Ki yani problem sorusu bu normalde…

…

Araştırmacı: Peki sence bu problem matematikte hangi kavramla alakalı?

Orhun: Oran/orantıyla alakalı. Cebirsel ifadeyle zaten problem sorularının çoğu cebirsel ifadelerle çözülebiliyor. Onun için cebirsel ifadeleri katmayacağım. Bu oran/orantıyla alakalı daha çok.

Orhun yapılan görüşmelerde kendi yönergeleriyle hareket etmiş, problemde kendisinden net bir cevap istenmediğini düşündüğünde rahatsızlık duymuş, alternatif yöntemlere yönlendirildiğinde kendisine ait olmayan yönergeleri kullanabilmiş ve tüm niceliklerin değişebileceğini düşünmekte zorlanıp bir şeylerin sabit olması gerektiğini düşünmüştür.

### 3.3.9. Habibe'nin problem çözme sürecindeki inançlarına ilişkin bulgular

Habibe ile yapılan görüşmelerde katılımcının okuma hataları yapabildiği ancak bunu tekrar kendisinin kontrol ederek düzelttiği görülmüştür.

> Araştırmacı: O birinciyi okudun ya A; E ve B'yi yeniyordan sonrası ne olmuş? A'dan sonraki noktayı bitirdin.
>
> Habibe: B, C ve D yeniliyor. Kime yenildikleri belli değil. D,C yeniliyor. A, D yeniyor. B, C ile berabere kalıyor. Buna göre… D, C'ye yeniliyor. Hııı… B, C ve D'ye yeniliyor. Soruyu yanlış okumuşum.
>
> Araştırmacı: Yani?
>
> Habibe: Yani aslında hepsinde ben A'yı düşündüm ama aslında öyle değilmiş.
>
> Araştırmacı: Nasılmış?
>
> Habibe: B, C ve D'ye yeniliyormuş. D, C'ye yeniliyormuş. E, D'ye yeniyormuş. B ve C berabere kalıyormuş.

Problemlerde okuma hatalarının ardından tekrar yazılanları kontrol ettiğinde işlem yapmadan tahminlerde bulunabildiği gözlenmiştir.

> Araştırmacı: Birinci soru: Bu turnuvanın şampiyonu hangi takım olmuştur? Önce bir kez daha kendin de okuyabilirsin anladıysan ne anladığını da konuşabiliriz.
>
> Habibe: (Soruyu içinden okur) Şimdi… (Sessizlik) (İçinden tekrar etmeye devam ediyor) Şampiyon C mi?
>
> …
>
> Habibe: Bir fuar var. Bu fuar için tişörtler basılacak ve iki tane matbaa var ve bu iki matbaanın ayrı ayrı şeyleri var… Iı fiyatları var… Iı… (Sessizlik) İndirimler var. Belli bir alımdan sonrası için indirimler var.
>
> Araştırmacı: Hıhı.
>
> Habibe: İkisi de aynı indirimi yapıyor sanırım.

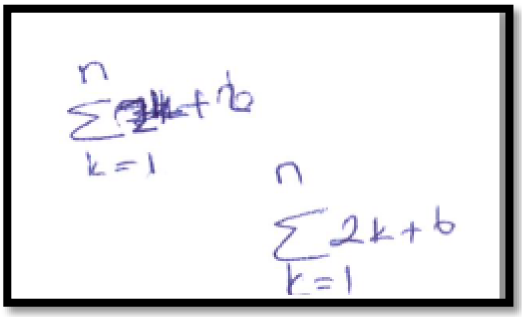
Habibe, problemler boyunca kendi yönergelerini kullanabilmiş, hata yaptığı yerleri genellikle kendisi fark etmiş ve hatalarını düzeltme yolunu aramıştır.

> Habibe: 75 tişörte kadar olan… Yani çiçek matbaa için 75 tişörte kadar olan fiyat. Sonrası 75 tişörtten sonra 2 TL'lik indirim yapılacakmış. 8 TL oluyor. 150 tişörte kadar oluyordu. Yani 75 çarpı 8 ("75x8" yazar ve 600 bulur) 600 oluyor. 75 ile 150 arası. Sonrakilerin ise, fiyatı 5 TL'lik indirim yapılacağını söylemiş. Sonraki okul öğrenci sayısına ihtiyaç var burada. Öğrenci sayısını bilmemiz gerekli. Çünkü hani sonrakilere 5 TL'lik indirim yapılacağını söylüyor. Diğeri için… Iı ajans 100 tişörte kadar 12 TL'ye basım yapacağını söylüyor. Yani ilk 100 tişört için 1200 TL alacak. Sonra… 100 ile 160 arasında alım olur ise ilk fiyattan hesaplanacak… 1200 ün yüzde 25 ini bulmamız gerekiyor. (12 ile 25'i çarpar ve 300 bulur)

…

Habibe: Ne yaptım? Bu teraslar belirli bir örüntüyle gitmiş. İlkinde 2 tane, ikincisinde 4 tane, şeyler ama dikey sıralar… İlkinde 2 tane, ikincisinde 4 tane, üçüncüsünde 5 tane. Demek ki dördüncüsünde 6 tane olur diye düşündüm. 5'te de 7 tane. Yatay sütunlar ise üçer tane kalmış. Onları üçer tane çizdim. İlkinde 1 tane boyanmış içi toprak olan kısım. İkincisinde 2 tane, üçüncüsünde 3 tane, dörtte 4 tane, beşte de 5 tane.

Araştırmada kullanılan problemlerde Habibe, ilişkileri ifade edebilmek için görsellerdeki artıştan faydalandığı karo probleminde kendi oluşturduğu yönergeler yardımıyla alternatif bir yöntem kullanabilmiş ve hesaplanmak istenen herhangi bir teras sayısına kadar olan toplam karo sayısını gösterecek bir matematiksel ifade oluşturmuştur.



**Görsel 3.107.** *Habibe'nin karo problemine alternatif çözüm yolu*

Katılımcıların genel olarak zorlandığı tişört probleminde ise, Habibe'nin normalde değişkenleri kullanıp genelleme yapabiliyor olmasına rağmen değişken kullanamadığı için ilişkilere odaklanamadığı ve alternatif yöntem olarak gördüğü denklem kurma konusunda bu problemde kendisine güvenmediği görülmüştür.

Araştırmacı: "75x"? Şimdi sen şuraya bir şey yazdın.

Habibe: 75 tişörte kadar 10 TL.

Araştırmacı: Biz bunu matematiksel olarak gösterebilir miyiz? Matematikte 75 tişörte kadar ne demek?

Habibe: Kadar… Aklıma bir şey gelmiyor.

…

Araştırmacı: Bu soruyu grafik çizerek, tablo yaparak ya da denklem kullanarak yapabilir miyiz herhangi biri ile?

Habibe: Denklem kullanarak yapılabilir. Grafikle… Tabloyla yapılabilir.

Araştırmacı: Hangisi senin daha rahatına gelir?

Habibe: Denklem.

Araştırmacı: Denklem rahatına gelir. Öyle yapmak istersin yani?

Habibe: Yani denklem daha kolay olur sanırım.

Araştırmacı: Bunu denklem gibi yazabilir miyiz?

Habibe: Yazabiliriz ama ben yazamam.

Habibe için bir başka alternatif yönteme geçiş konusunda sorun yaşadığı problem futbol problemi olmuş ve takımların birbirleri arasındaki maçlardaki ilişkiyi tam olarak anlamlandıramadığından problemde kendisini farklı bir şekilde ifade edememiştir.

Araştırmacı: Peki. Önce şöyle bir şey yaptın. A, B, C, D, E diye yazdın. Galibiyet, beraberlik, mağlubiyet diye. Sonra vazgeçtin ondan. Sonra tek tek maçları yazayım dedin onu yazdın. Peki, acaba senin bu soruyu daha iyi görmeni sağlayabilecek bir yöntem var mı? Şöyle yapsam daha rahat yaparım dediğin. Bu arada kağıt ve zaman sınırımız yok.

Habibe: Başka ne tür yöntem kullanılabilir…

Araştırmacı: Bu aklına geldi yaptın.

Habibe: Hıhı.

Araştırmacı: Buradan devam da edebilirsin tabii ki bunun doğru olduğunu düşünüyorsan.

Habibe: Başka da yöntem olmaz herhalde diye düşünüyorum.

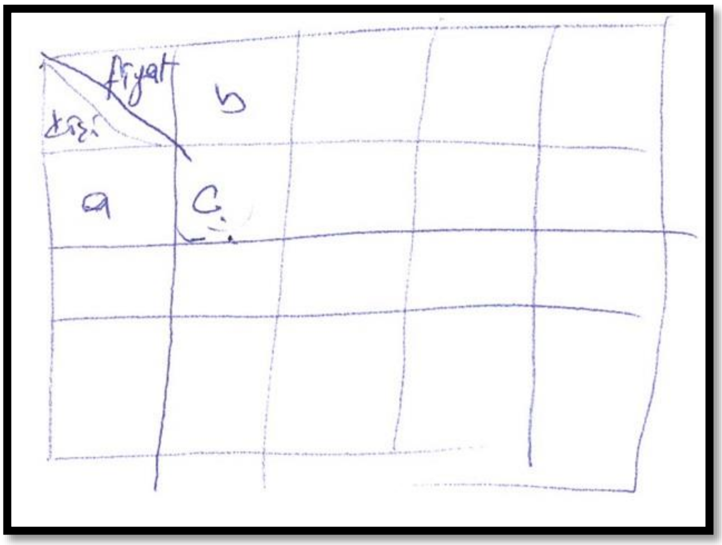
Araştırmacı: Buradan devam edeceksin yani.

Habibe: Evet.

Araştırmacı: Peki burada seni sıkıntıya sokan ne?

Habibe: Burada beni sıkıntıya sokan maç… Hani daha fazla maç yapması.

Habibe'nin konser probleminde ise, alternatif yöntemlere yöneldiğinde kendisine ait olmayan yönergelerle birlikte bir tablo oluşturmaya çalıştığı ancak bu yöntemini sürdüremediği gözlenmiştir.




**Görsel 3.108.** *Habibe'nin konser probleminde alternatif yöntem denemesi*

Yapılan görüşmelerde birden fazla değişken kullanabildiği gözlemlenen Habibe'nin değişkenler arasındaki ilişkiyi incelerken zorlandığını ve bir şeylerin sabit olmasının işini kolaylaştıracağını ifade ettiği görülmüştür.

Araştırmacı: Peki bu soruyla ilgili ne hissettin Habibe çözerken?

Habibe: Bu soru şöyle hani belirli bir rakam verilince yapılabilir ama hani rakamlar olmasa hani dediğiniz gibi farklı bilinmeyenler olsa onun için belirli bir kural bulmak lazım. Onu ben bulamadım.

Araştırmacı: Bulamadığını mı düşünüyorsun?

Habibe: Yaa bunu buldum. Hani "x kazanmak istediği para" gider hariç falan filan ama belirli bir örüntü gibi hani farklı bir şey olsa…

Araştırmacı: Ne mesela örüntüden kast ettiğin?

Habibe: Mesela… İşte artış miktarı… Ama burada hani artış miktarı falan olmaz da… Ya bu soruda hepsi birbiriyle bağlantılı hani işte mesela atıyorum 5 kişi gelirse bu kadar para kazanır 6 kişi gelirse bu kadar para kazanır. Tamam, belki belirli bir artış miktarı olabilir ama bilet fiyatını da bilmek lazım. Kazanacağı para için artış miktarını çünkü bilet fiyatı da etkiler.

Problemlerin çözüm sürecinde ilişkilerden çok sonuç odaklı ilerlediği düşünülen Habibe, problemde kendisinden tek bir sonuç istenmesinin kendisini rahatlatacağını belirtmiş ve problemi değiştirme önerisinde tek bir sonuca göre yorum yapma isteğini ifade etmiştir.

Araştırmacı: Bir de idareye nasıl bir öneride bulunabiliriz biz?

Habibe: İdareye, hani şuan elimde olan şeylere bakarak öneride bulunabilirim.

Araştırmacı: Ne dersin mesela?

Habibe: … Öğrenci sayısını isterim. (Gülüyor)

…

Araştırmacı: Benzer. Peki, sen bu soruya bir şeyler ilave edecek olsan ya da bir şeyler çıkartacak olsan ne yapardın?

Habibe: Tabii ki ilk başta öğrenci sayısını ilave ederdim. Başka bir şey ilave etmezdim ya da çıkartmazdım sanrım.

Habibe, yapabildiğini düşündüğü karo problemini kolay bulduğunu ancak ilişkileri görmekte zorlandığı futbol ve tişört problemlerini karmaşık bulduğunu belirtmiştir.

Araştırmacı: Peki soru sana göre nasıl bir soruydu? Zor muydu kolay mıydı?

Habibe: Kolaydı.

…

Araştırmacı: Ne hissettin kolay mı zor mu nasıl bir soruydu?

Habibe: Aslında zor değil ama karışık. O yüzden biraz fazla zamanımı aldı.

…

Habibe: İlk hani diğeri kadar karmaşık değil. Iı… Sadece öğrenci sayısı beni zorladı. Başka bir şey yok bu problem için. Kolay bir problem ama bilinmeyenli kullanılarak çok daha rahat yapılabilir ama ben bilmiyorum. Yapamıyorum ya da.

Problemlerin içeriğinin matematikte hangi kavramlarla ilişkili olduğu sorgulandığında ise Habibe, konser problemini oran/orantı kavramıyla, diğer problemleri ise matematikte problemler konusuyla ilişkilendirmiştir.

> Araştırmacı: Peki şeyi sorayım. Sence bu iki sorudan birincisi ve ikincisi yani konser ve karo soruları sence matematikte bir konu ya da kavramla ilişkili mi? İlişkiliyse hangi konu ya da kavramla ilişkili?
>
> Habibe: İlişkili. Diğeri zaten şeylerle aritmetik dizilerle alakalı. Bu da işte ters orantı, orantı…
>
> …
>
> Araştırmacı: Peki bu soru matematik derslerinde çözdüğünüz problemlerden farklı mıydı ya da benziyor muydu?
>
> Habibe: Yani belki biraz benziyor olabilir.
>
> Araştırmacı: Nesi benziyordu mesela?
>
> Habibe: Mesela hani problem sorularında…
>
> …
>
> Araştırmacı: Ya da bu soru okulda çözülenlerden farklı mıydı benzer miydi ya da?
>
> Habibe: Benzer. Yani bir problem sorusuna benziyor.

Problemlerin çözüm sürecinde Habibe, kendi yönergeleriyle hareket etmiş, anlamlandıramadığı sorularda sorunun cevabına yönelik tahminler yapabilmiş, problemlerde net ve tek bir cevaba göre yorum yapmak istemiş, zorlandığını düşündüğü sorularda verdiği cevaplara emin olamamış ve kendine güven problemi yaşamıştır.

### 3.3.10. Şerife'nin problem çözme sürecindeki inançlarına ilişkin bulgular

Katılımcılardan Şerife'nin problem çözme sürecinde kendi yönergelerini oluşturup onları takip edebildiği ve hatalarını kendisinin fark ettiği görülmüştür.

> Şerife: Aynen. Bir dakika. B'ye 1 yazdıysam demek ki B, 1. Tamam. A, B, C, D, E. E de kaç puan almış? 5 puan almış. O zaman galip C.
>
> Araştırmacı: Şampiyon C olur diyorsun.
>
> Şerife: Evet. Cevap ne?
>
> …
>
> Şerife: Bu insan sayısı. Şu TL dediğim de aslında parayı simgeliyor ama "a TL" olsun yok "a" olmasın. "d TL" olsun. Yani kişi başı kaç TL olduğunu bilmiyorum. "d" o. Kaç tane insan olduğunu da bilmiyorum. O da "k". Toplam para "a + b" zaten. Kapasite de şu "k kişi". Aha kapasiteye de "k" dersem şöyle bir şey olur.
>
> …
>
> Araştırmacı: Hani şurada bir cümle var. Eee satışı için 75 tişörte kadar tişört başına 10 lira, ondan sonra ne diyor bir orayı okur musun? Şuradan itibaren yani 75 tişörtten fazla…

Şerife: 75 tişörtten fazla alım olması halinde ilk 75 tişörtten sonrakilerin tanesinde 2 TL… Hıı…

Araştırmacı: Ne demek bu?

Şerife: Yanlış okumuşum demek. (Gülüyor)

Araştırmacı: Ne demek yani sonuç olarak?

Şerife: 75 tane tişörtü kendi fiyatından daha sonrakileri 8 TL üzerinden…

Araştırmacı: Yani nasıl hesaplarız 100 tişörtü?

Şerife: Yani şöyle olacak 100 tişört varsa 75'i 10 TL üzerinden olacak yani 750 +… Geriye 25 tane kalacak. 25 ile de 8'i çarparsam (Kağıtta "25x8" yapar ve 200 bulur) 200. Yani 200 ekledik mi 950 olacak.( Kağıtta "800" yazdığı yeri "950" olarak değiştirir)

Şerife, kendi oluşturduğu yönergeleri takip ederken kendine has semboller oluşturmuş ve yaptığı hesaplamaları geri dönüp kontrol ettiğinde bu semboller üzerinden işlem yapmıştır.

Şerife: Tamam. Şimdi soruyu okudum. Ondan sonra ilkönce verilen puanları yazdım. Daha sonra sorunun sırasına göre gitmeye başladım. A, B, C, D, E takımlarını yazdım. Şimdi A; E ve B'yi yeniyormuş. E ve B'ye 0,0 yazdım. A da iki tane takım kazandığı için 3, 3 oluyor. 6 puan. Sonra C ile berabere kalıyor. O zaman C'ye de A'ya birer puan gelecek. D'ye de yeniliyormuş. O zaman A, 0 alacak. D, 3 alacak. B takımına geliyoruz. B; C ve D'ye yeniliyormuş. C ve D, o zaman üçer puan olacak… (Problemde ne yaptığını anlatırken verdiği puanları dikdörtgen içerisine almaya başlar. Daha sonra da geriye dönüp puanlamasını kontrol ederken doğru yaptığını düşündüklerine tik koyar.)

Şerife ile yapılan görüşmelerde problemlerdeki çözümlerini tamamladıktan sonra cevapları merak ettiği ve kendi sonuçlarının doğru olup olmadığını sorduğu görülmüştür.

Şerife: Kaç aldım?

Araştırmacı: Burada puanlama yok Şerife. Konuşmuştuk sadece şunları numaralandırıyorum. Birinci kağıdın şu, ikinci kağıdın şu diye.

…

Şerife: Bir dakika. Cevaplarını çok merak ettim.

Araştırmacı: Cevaplarını konuştuk ya burada cevaplar önemli değil diye.

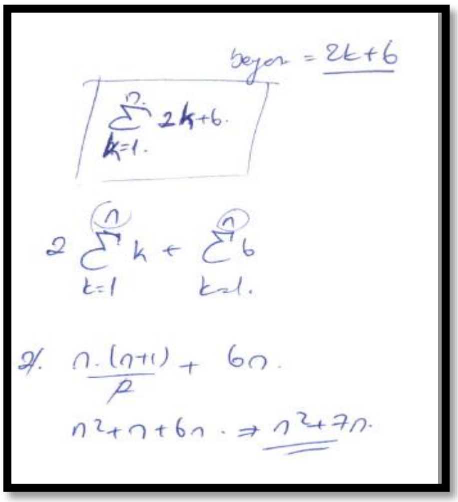
Şerife: Hayır ya C takımı mı yeniyor?

Problemlerde Şerife'den alternatif çözümler istendiğinde katılımcının aklına ilk olarak değişken kullanmak gelmiş ancak futbol sorusunun yapısının buna uygun olmadığını düşünerek bu yöntemi bu problemde denememiştir.

Araştırmacı: Matematikte yolu deyince, farklı yöntem deyince, matematikte de olmasına gerek yok. Genel olarak aklına ne geliyor nasıl yapılır soru?

Şerife: Daha pratik şekli geliyor aklıma. Mesela uzun yoldansa şak diye söylemek geliyor. (Parmağını şaklatır) Bence o da kişiye göre değişir yani ben mesela bunu yazarak çözerim. Başkası kafasından şak diye gözünde denk getirir çözer. Diğeri de “x, y, z” diyerek çözer.
Araştırmacı: “x, y, z” demek ne demek?
Şerife: Yani bu soru için konuşursak… “x, y, z” yani bilinmeyen vererek çözer. Bu soruda böyle bir şey… Mümkün mü bilemiyorum.

Karo probleminde de alternatif çözüm önerisi kendisinden istendiğinde toplam sembolü ile istenen terasa kadar olan tüm beyaz ve siyah karoları hesaplayabileceği bir ifade yazmış, hesaplamalarında sembolik manipülasyon yapabilmiş ve bu ifadesini oluştururken de kendi yönergelerini kullanıp kendine has oluşturduğu sembollerle kontrollerini yaptığı görülmüştür.



**Görsel 3.109.** *Şerife'nin karo problemindeki alternatif çözüm önerisi*

Şerife'nin tişört probleminde problemin içeriğinde geçen fuarı okullarında yakın zamanda yapılan bir fuara benzeterek problemin çözümüne başladığı gözlenmiştir.

Şerife: Tamam. İlçede bir matematik fuarı için hazırlık yapılıyor. Okulun idarecileri fuar için öğrencilere tişört basılmasını uygun görmüşlerdir. TÜBİTAK. (Gülüyor)

Çözüm sürecine bu benzetmeyle başlamasının ardından problemin doğrudan bir sonuç istemediğini, bir öneri istediğini fark eden Şerife, durumu önce kendi okulu için değerlendirmiş ve kendi okulundaki öğrenci sayısına göre bir hesaplama yapmaya başlamıştır.

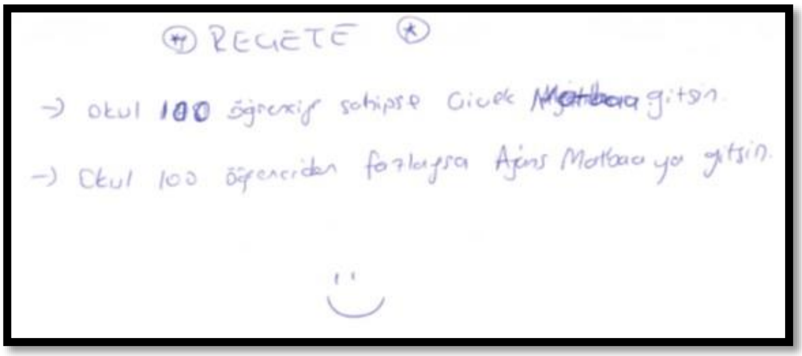
Şerife: Ama şimdi hocam… Bu bizim okul için geçerliyse mesela şu 100 kişilik var ya o daha mantıklı ama…
Araştırmacı: Neden öyle düşündün?

Şerife: Ama mesela benim elimde 75 kişi var. 75 kişilik bastıracağım ben gidip de şimdi bu daha ucuz diye 100 kişilik bastırırsam zararı yine bana olur yani.

Araştırmacı: İşte burada sayı belli değil ya şuan.

Şerife: İşte sayının belli olması lazımdı.

Yapılan klinik görüşmelerde Şerife'nin en çok zorlandığı problem olarak görünen tişört probleminde diğer katılımcıların aksine Şerife, sonuç odaklı düşünmeyip ilişkileri göz önünde bulundurup yaptığı hesaplamalarının ardından probleme genel bir öneri getirebilmiştir.




**Görsel 3.110.** *Şerife'nin tişört problemine genel önerisi*

Yine tişört problemde Şerife'nin problemi değiştirme önerisi sonuç bulma odaklı kişi sayılarının verilmesi yerine ilişkileri daha rahat görebileceği sınır değerlerin birbirinin aynısı olması ve problemde çözüm sürecini yavaşlattığını düşündüğü yüzde kısmını ortadan kaldırması şeklinde olmuştur.

Araştırmacı: Sen bu soruya bir şey ilave edecek olsan ya da bu sorudan bir şey çıkartacak olsan ne yapardın?

Şerife: Ne ilave ederdim biliyor musunuz? Nerede o soru? İlk 75 tişört 10 TL, daha sonra 8TL üzerinden derdim.

Araştırmacı: Hı. Hiç ilk 75 tişörtü karıştırmazdın yani.

Şerife: Ya da şöyle yapardım. Hiç onu karıştırmazdım. Eğer 75 tişörtten fazlaysa 8 TL, her biri 8TL derdim.

Şerife, daha rahat yapabildiğini düşündüğü futbol, karo ve konser sorularını sevdiğini, tişört probleminde ise çok zorlanmasına rağmen parçalı fonksiyon kavramını çağırdıktan sonra soruda ilerleme kaydedebildiğini ifade etmiştir.

Araştırmacı: Peki. Sence bu problem nasıl bir problemdi Şerife? Ne hissettin çözerken?

Şerife: Çözülmesi gereken bir problemmiş gibi hissettim. (Gülüşmeler)

Araştırmacı: Sen ne hissettin?

Şerife: Yani ben seviyorum öyle şeyleri çözmeyi.

Araştırmacı: Soruyu sevdin mi?

Şerife: Evet. Mesela bunun gibi bir sürü problem çözüyorum ben.

…

Araştırmacı: Peki sence bu soru nasıl bir soruydu Şerife? Sevdin mi sevmedin mi?

Şerife: Sevdim, mantıklı. Gayet normal, örüntü.

…

Araştırmacı: Ne hissettin problemi çözerken?

Şerife: Güzel bir soruydu, sevdim.

…

Araştırmacı: Peki bu soruda... Bu soruyu çözdüğün süre boyunca neler hissettin Şerife?

Şerife: Aptalın teki gibi hissettim hocam neyse. Bence soru düzgün yazılmalıydı. Yeterince açık net değildi yani. Eğer olsaydı anlardım. Çünkü orada 75'e bir sınır koydu mu koymadı mı insan iki defa düşünüyor.

Araştırmacı: İki defa düşününce yeterince net olmuyor mu?

Şerife: İki defa düşündüm üçüncüde kafayı yedim o yüzden. Çünkü bir ara cidden artık ne yapsam ki falan dedim.

Araştırmacı: Peki senin için zor mu yoksa kolay bir soru muydu?

Şerife: Kafa karıştırıcı ama parçalı fonksiyonu yazdıktan sonra çok net görüldü. Önemli olan şunu yazmak yani.

Şerife'nin araştırmada kullanılan futbol probleminin matematikte problemler konusuyla, tişört probleminin fonksiyon kavramıyla, karo probleminin örüntü ve dizi kavramlarıyla, konser probleminin ise orantı kavramıyla ilişkili olduğunu belirttiği görülmüştür.

Araştırmacı: Peki problem matematik derslerinde çözdüğünüz problemlere benziyor mu?

Şerife: Evet.

Araştırmacı: Benziyor. Nesi benziyor mesela?

Şerife: Mesela… Hangi konu hatırlamıyorum problemler konusu olması lazım orada da var.

…

Araştırmacı: Peki bu sorunun yapısı matematikteki bir kavramla ilişkili mi?

Şerife: Nasıl bir kavram?

Araştırmacı: Konu da diyebilirsin sen.

Şerife: Fonksiyon.

…

Araştırmacı: Matematikte hangi kavramlarla ilişkili?

Şerife: Örüntü ve dizi derdim. Toplam yaptık, sigma derdim.

…

Araştırmacı: Peki bunu matematikte bir kavramla ilişkilendirecek olsan?

Şerife: Bu soruda bize verilen şeylerin birbirleriyle olan ilişkisi istenmiş. Verilen şeyler değişse bile yeni durumun ne olduğu sorulmuş. Orantısal durumlar yani… Matematikte de orantı kavramıyla ilişkilidir herhalde.

Problem çözme sürecinde Şerife'nin yaptıklarının doğruluğunu ve soruların cevabını merak ettiği, tüm problemlerde kendi yönergeleriyle hareket ettiği, kendisinden bir öneri istenen probleme yakın olduğu bir durum olan kendi okulunu düşünerek başladığı ve genel olarak problemleri sevdiği ancak zorlandığı problemde yorulduğu gözlenmiştir.

### 3.4. Problemlerin Bağlamına İlişkin Bulgular

Araştırmanın bu kısmında katılımcılarla yapılan klinik görüşmelerde kendilerine yöneltilen 'futbol' probleminde bağlama yakınlık dereceleri tespit edilmeye çalışılmış ve bu bağlama yakınlığın katılımcıların cevaplarına, nicelikler arasındaki ilişkileri yorumlamalarına bir etki edip etmediği analiz edilmiştir. Araştırmada kullanılan bir diğer problem olan 'tişört' probleminde de katılımcılar problemin bağlamıyla ilgili yorumlarda bulunmuş ve bulgularda bu yorumlara da her katılımcı için ayrı ayrı yer verilmiştir.

Araştırmada kullanılan futbol probleminde katılımcıların bağlama yakınlığı aşağıdaki tabloya göre belirlenmiştir.

**Tablo 3.11.** *Bağlama yakınlık derecesi*

| Bağlama Yakınlık Derecesi | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|

***Bağlama Yakınlık Derecesi:** Katılımcının futbol bağlamına yakınlığını puanlama kapsamında daha önceden biliyor olma durumunu göstermektedir.

**0.Düzey:** Katılımcının futbola ya da futbolda puanlama kavramına önceki deneyimlerinden yakın olmadığını göstermektedir.

**1.Düzey:** Katılımcının futbola ilgisi olsa dahi futbolda puanlama kavramına yakın olmadığını göstermektedir.

**2.Düzey:** Katılımcının futbol olmasa dahi diğer spor dallarındaki puanlamaya dair bilgisinin olduğunu ancak futbolda puanlamaya tam hâkim olmadığını gösterir.

**3.Düzey:** Katılımcının futbolda puanlamayı problemle karşılaşmadan önce biliyor olduğunu gösterir.

### 3.4.1. Celile'nin problemlerin bağlamına ilişkin bulguları

Bağlama yakınlığın katılımcılar açısından bir etkisi olup olmadığına odaklanılan futbol sorusunda Celile; virgüllerin kullanımında sorun yaşamış, problemi tekrar okumak durumunda kalmış, kimin kimi yendiğinde kaç puan alacağını anlamakta zorlanmış ve puanlamasını oluştururken sık sık değişiklik yapmak durumunda kalmıştır.

> Celile: Okuyayım çünkü hiçbir şey anlamadım. (Gülüyor) (Soruyu içinden tekrar okur) Hııı. B ve… B, C ile berabere kalıyor. Hııı. E, D. Hıhı… O zaman D birinci şampiyon olmaz mı D?
>
> …
>
> Celile: A, 7 olur. (Kağıda "A= 7" yazar) C ile berabere kalıyor. Onu hesapladık. D'ye de yeniliyormuş. Yenilgi 0. Bir önemi yok. B; C, D'yi yeniyormuş 6 geldi.
>
> Araştırmacı: B, C ve D'yi yeniyor mu?
>
> Celile: Ha yeniliyor. Ay pardon. O zaman sıfır. Bir anlamı yok. D, C'ye yeniliyormuş. E, D'yi yeniyor. 6, 7. O zaman… Bu D değil mi? Eşit olur. Şampiyon da ikisi mi oluyor? Şampiyon olamaz o zaman?
>
> Araştırmacı: Şampiyon olamaz. İki tane olunca şampiyon olamaz mı?
>
> Celile: Olamaz.

Celile'nin verdiği cevaplarda daha önce futbolla bir ilgisinin olmadığı, futbolda puanlamayı daha önceden bilmediği görülmüş ve problemde açıkça verilmesine rağmen takımların puanlamalarını anlamlandırmakta zorlandığı fark edilmiştir. Aynı zamanda katılımcı problem boyunca yaptıklarından emin olamadan çözümünü sürdürmüştür.

> Araştırmacı: Peki şöyle diyelim. Bunları nasıl hesaplıyorsun? Böyle hesapladın ya hepsini tek tek birdenbire yaptın. Daha açık yapmaya kalksan nasıl anlatırsın? Ben nasıl hesapladığını anlamadım. Bana anlat istersen.
>
> Celile: Burada beraberliği 1, galibiyeti 3, yenilgiyi 0 vermiş ya mesela. A takımı için konuşuyor. E'yi B'yi yenmiş. E'yi B'yi yenince 6 puanı oldu mu? Yenildiği zaman puan kaybediyor mu? Etmiyor değil mi?
>
> Araştırmacı: Yenildiği ama burada da yenilgi yazıyor? (Kağıtta yazdıklarını gösterir. Açtığı gruplarda yenildiği, b ve yenilgi yazar)
>
> Celile: Yenildiği, yendiği bu… E tamam doğru yapmışım galiba.
>
> …
>
> Araştırmacı: Ne demek berabere bitmesi?
>
> Celile: Yani mesela skorları mı yoksa yapılan maçta mı?
>
> Araştırmacı: Sence?
>
> Celile: Maçlar galiba. C ile berabere kalıyor 1 maç. 3 maç berabere kalıyor.
>
> …
>
> Araştırmacı: Şimdi?

Celile: C şampiyon oldu. Burada niye böyle oldu?

Her bir takımın aralarındaki ilişkileri gösteren birbirleriyle birer maç yapması gerektiği cümlesini defalarca okumuş ancak bu bilgiyi yaptığı işlemlere yansıtmakta zorlanmıştır. Takımların birbirleriyle birer maç yaptığı bilgisi verilmesine rağmen sadece soruda geçen A, B ve D takımlarına odaklanmış diğer takımların da aynı sayıda maç yapacağını ilk aşamada düşünmeyerek diğer takımların maçlarının verilmemiş olabileceğini belirtmiştir.

Araştırmacı: Peki sen hangi takımların puanlarını buldun?

Celile: Ben mi? A, B, D'nin.

Araştırmacı: Peki kaç takım var?

Celile: Beş.

Araştırmacı: Diğerleri?

Celile: Diğerlerini vermemiş çünkü. (Gülüyor) B, yani tek tek şey yapmış ya.

Araştırmacı: Vermemiş mi diğerlerini?

Problemde bir futbol terimi olan beraberliğin cümlede yer aldığı bir soruda "kaç tane maç berabere bitmiştir?" cümlesini ilk turnuva sonunda eşit puan almak olarak yorumlamış ancak yönlendirme ile maç üzerinden berabere kalınması olduğu sonucuna varmıştır.

Celile: Kaç tane maç berabere bitmiştir? Haa biz şunlardan hiç takım berabere bitmemiştir.

Araştırmacı: Ne demek berabere bitmesi?

Celile: Yani mesela skorları mı yoksa yapılan maçta mı?

Araştırmacı: Sence?

Celile: Maçlar galiba. C ile berabere kalıyor 1 maç. 3 maç berabere kalıyor.

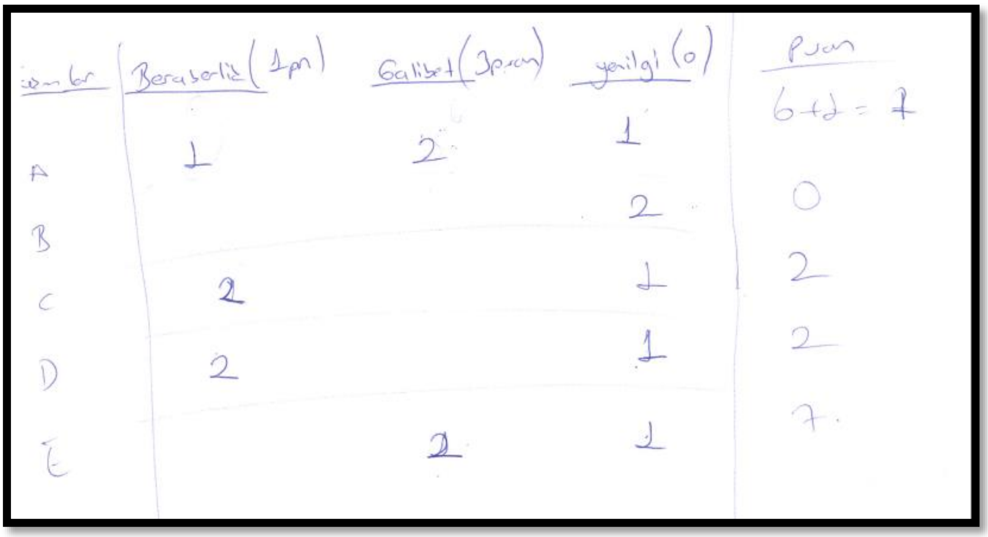
Araştırmacı: Nasıl anladın?

Celile: C ile berabere kalıyormuş.

Araştırmacı: Kim o?

Celile: A takımı. Onu 1 diye kabul ederiz. E, hem B ile hem C ile berabere kalıyormuş üç maç da berabere oluyor. (Kağıda 3, 3 maç berabere yazar)

Kendisinden bir tablo istendiğinde futbolda kullanılan puan tablosuna pek benzemeyen ve takımların birbirleriyle yaptıkları maç sayılarının farklı olduğu bir tablo oluşturmuştur.



| Takımlar | Beraberlik (1pn) | Galibet (3puan) | yenilgi (0) | Puan |
|---|---|---|---|---|
| | | | | 6+1 = 7 |
| A | 1 | 2 | 1 | |
| B | | | 2 | 0 |
| C | 2 | | 1 | 2 |
| D | 2 | | 1 | 2 |
| E | | 2 | 1 | 7. |

**Görsel 3.111.** *Celile'nin futbol problemindeki tablosu*

Tabloyu oluştururken sözel olarak ifade ettiğinden farklı sonuçlar bulmuş ve bunları kıyaslarken yine takımların birbiriyle birer maç yapması cümlesinde zorlanmıştır. Ancak bu cümleyi kendi ifadesini oluşturduğunda anlamlandırabilmiştir.

Araştırmacı: Ne oluyor burada? Şu kısımda? (Problemdeki her biri bir diğeriyle bir maç yapacaktır kısmını göstererek)

Celile: Her biri diğer birbiriyle yapamaz diyor. Ha bir kez oynanıyormuş.

Araştırmacı: Yani ne demek bu?

Celile: O zaman beşi de birbiriyle maç yapıyormuş.

Araştırmacı: Yani? Nasıl o zaman? Her takım kimle maç yapmış olur?

Celile: O zaman A hem B ile hem D ile hem C ile hem E ile yapıyor.

Araştırmacı: Maç yapmış oluyor.

Celile: B de A, C, D, E ile yapmış olur. C de A, B, D, E ile yapmış olur. D'de A, B, C, E ile yapmış olur. Her biri birbiriyle… İnsan tokalaşması gibi…

Futbola olan ilgisi sorulduğunda da futbolu pek bilmediğini, fazla maç izlemediğini, futbolun kurallarına da uzak olduğunu ifade etmiştir.

Araştırmacı: Peki o zaman şuna geçelim. Futbolla aran nasıl?

Celile: Kötü.

Araştırmacı: Ne kadar kötü?

Celile: Yani severim ama böyle çok oynamam.

Araştırmacı: Çok oynamazsın ama bilgi durumun nasıl? Bilir misin futbolun kurallarını?

Celile: Hayır.

Araştırmacı: Bilmezsin.

Celile: Öyle yani zevk için hani birkaç atışlık olur ya öyle bir şey.

Araştırmacı: Yani kimin birbiriyle maç yaptığında kaç farklı durum ortaya çıkabilir falan onlarla ilgili bilgin var mıydı?

Celile: Iıı.

Araştırmacı: Bilgin yoktu. Futbol maçlarını izleme sıklığın nedir? İzler misin Futbol maçlarını?

Celile: Yani… Şampiyonluk maçlarında falan birkaç bakarım yani öyle takip etmem.

Araştırmacı: Peki futbol programları hakkında bir bilgin var mı?

Celile: Iıı hiç izlemedim.

Celile, soruya bir şeyler eklemek istese takımların maçlarını tek tek vereceğini ve açıklama kısmında puanlama verilmesine rağmen futbolda puanlamayı bilmenin bu problemde çözümü değiştireceğini düşündüğünü belirtmiştir.

Araştırmacı: Peki bunu bilmek, yani futbolda puanlamayı bilseydin sence bu soruda işin daha kolay olur muydu?

Celile: Yani bilmem. Onun nasıl bir katkısı olduğunu bilmediğim için bilmiyorum belki faydası olurdu.

Araştırmacı: Peki şu futbolda puanlama mı? (Sorunun puan verilen kısmını gösterir)

Celile: Yani büyük ihtimal öyledir mesela acaba şey düşündüm hani yenilgiden de puan kaybediliyor mu diye düşündüm öyleyse çok fark yaratır.

Celile'nin araştırmada kullanılan futbol bağlam bilgisi içeren problemde futbola ya da futbol bağlamında kullanılan kavramlara ve futbolda puanlamaya geçmiş yaşam deneyimlerinden yakın olmadığı düşünülmüş ve bağlama yakınlık derecesi '0' olarak belirlenmiştir.

### 3.4.2. Mine'nin problemlerin bağlamına ilişkin bulguları

Mine'nin futbol probleminde çözüm sürecine başlarken problemi içinden okuduktan sonra ise, hiçbir veriyi ilişkilendirmeden A takımının şampiyon olacağını tahmin ettiği görülmüştür.

> Araştırmacı: Birinci soru bu turnuvanın şampiyonu hangi takım olmuştur? Öncelikle soruyu anlamadıysan tekrar kendi içinden de okuyabilirsin. Anladıysan da ne anladın?
>
> Mine: Tamam bir kendim okuyayım.
>
> Araştırmacı: Oku.
>
> Mine: (Soruyu içinden okumaya başlar) A kazanmıştır o zaman.

Mine'ye bu sonucun sebebi sorulduğunda ise problemdeki yenme, yenilme kavramlarını hatalı yorumladığı gözlenmiştir.

> Mine: Nasıl bu sonuca vardım. A; E ve B'yi yenmiş. Yani üçer puandan 6 puan geliyor. C ile de berabere kalmış. Oradan da 1 puan geliyor. 7 puan almış oluyor.
>
> Araştırmacı: Hıı.

Mine: B de C ve D’yi yeniyor, 6 puan geliyor. D de C’ye yeniliyormuş oradan sıfır…

Araştırmacı: B, C ve D’yi yeniyor mu Mine?

Mine: Yeniliyor. O zaman B hiç puan almıyor.

Yapılan görüşmede Mine’nin takımlar arasındaki ilişkilere yönelik ne düşündüğü sorgulandığında sadece harflerini gördüğü takımlara odaklandığı ve ismi geçmeyen takımların maç sayısının diğer takımlar kadar olmadığını ifade ettiği görülmüştür.

Mine: (“A--, B yeniyor – 6”, altına “C berabere --- 1” ve onun altına da “D’ye yeniliyor 0” yazar) (“B—C D ye yeniliyor --- 0” yazar) D, C ye yeniliyorsa yani diğerlerini yenmiş mi? … (Sessizlik) (“D--- C’yi yeniliyor --- ?” Yazar) ( “E—D’yi yeniyor --- 3”, altına da “B,C ‘ye berabere kalıyor--- 2” yazar) Böyle yazıp hesapladığımda A şampiyon görünüyor ama D’yi bilemiyorum çünkü sadece C’ye yeniliyor demiş. E, D ve B ye yenilmiş mi berabere mi kalmış bilmiyorum…

Araştırmacı: Şimdi sen oraya hangi takımları yazdın?

Mine: A, B, C, D’yi.

Araştırmacı: C’yi nereye… A’yı yazıp ok çıkarttın, B’yi yazıp ok çıkarttın, D ve E’yi yazıp ok çıkarttın…

Mine: C’yi yazmadım.

Mine’den takımların yaptıkları maç sayılarını ve puanlarını göstermesi istendiğinde takımların maçlarda aldığı sonuçlara ilişkin birer sembol atamaya çalışmış ancak bu yöntemde ilerlemeyince çözümünü sürdürmemiştir.

Araştırmacı: Tabloda takımları yazdın.

Mine: Takımları yazdım ama maç sıralamasını nasıl yazabilirim?

Araştırmacı: Sen şuan ne yapmak istiyorsun neyi göstermek istiyorsun bu panoda?

Mine: Kimin kiminle maç yaptığını göstermeye çalışıyorum. Aynı şekilde buraya da takımları yazsam…

Araştırmacı: Hıı… Yaz bakalım.

Mine: (Tabloda satır ve sütundaki A, B, C, D, E’leri tamamlar.)

Araştırmacı: Peki.

Mine: A, B ile maç yapmış o zaman…

Araştırmacı: Hıı. Nasıl yapacaksın mesela oraya?

Mine: Çarpı atsam veya tik atsam…

Araştırmacı: Tik neyi ifade edecek, çarpı neyi ifade edecek?

Mine: Tik maç yaptıklarını… Ama galibiyetini…

Araştırmacı: İşte onu ifade edecek bir şey yapabilir misin?

Mine: …

Araştırmacı: Mesela A, A ile maç yapacak mı?

Mine: Yapamaz.

Araştırmacı: O zaman orayı ne yapacaksın?

Mine: Boş bırakacağım.

Araştırmacı: Sonra? A ile B’nin maçından ne olmuş?

Mine: B galip gelmiş.

Araştırmacı: Nasıl ifade edersin onu? Mesela burada yazıyor A ile B’nin maçından ne olduğu.

Mine: A, B’yi yenmiş.

Araştırmacı: Nasıl yazarsın onu? Buraya öyle bir şey yapmalısın ki B, A’yı yenmiş. Nasıl gösterirsin? Kendine göre de gösterirsin yani bunun bir gösterimi yok. Sen nasıl ifade edersin?

Mine: … (Sessizlik) Çok zor… (Gülüyor)

Araştırmacı: Çok mu zor?

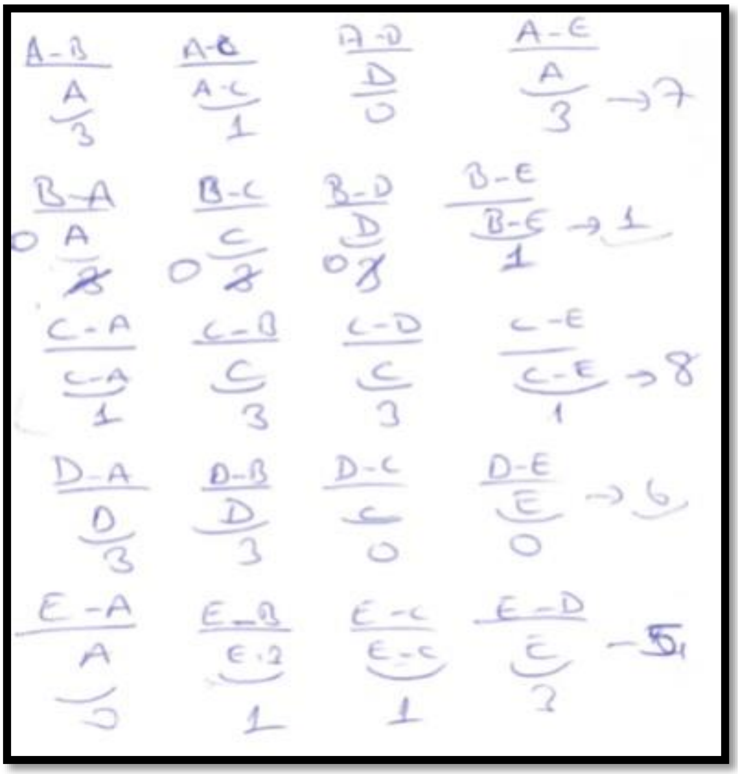
Mine: Kafa karıştırıcı anlamadım.

…

Araştırmacı: A kazanmış nasıl ifade edersin A’nın kazandığı şekli?

Mine: A ya tik atsam, tik attığımda hem maç yapmış hem kazanmış olarak göstersem tikte. Çarpıda maç yapmış yenilmiş.

Mine, takımların maçlarını ilk stratejisinde gösteremeyince takımların yaptıkları maçları tek tek yazmayı tercih etmiş ve bir diyagram oluşturmuştur.



**Görsel 3.112.** *Mine’nin futbol problemindeki maçları tek tek yazarak oluşturduğu diyagramı*

Maçları tek tek yazdığında kendisine doğrudan verilmeyen takımların maçlarına da bakmış ve bu kez C'nin şampiyon olacağını ifade etmiştir.

> Mine: (D'nin sağına ok çıkarıp "1" yazar) C'ye bakıyorum A ile berabere kalmış 1. Galip gelmiş 3. Bu da 3. Burada da berabere kalmış. 1. 8 puan geliyor. (C'nin sağ tarafına ok çıkarır "8" yazar) D galip 3. 0. 0. 6 puan. (D'nin sağına ok çıkarır "6" yazar) 1, 3, 4 puan. (E'nin sağına ok çıkarır "4" yazar)O zaman puanlama sistemine göre C galip gelir.

Mine, problemin şıklarında kaç tane maçın berabere bittiğini sorgularken sorun yaşaması üzerine problemde yer almayan bir veriyi problemin bağlamına dahil etmiş ve maç sayılarının tutarlı olması adına elenen takım olabileceğini ifade etmiştir.

> Araştırmacı: Peki 10 maç mı yapılmış 20 maç mı nasıl bileceğiz Mine?
>
> Mine: 10 maç mı 20 maç mı? Onu elenen takıma göre bilebiliriz.
>
> Araştırmacı: Elenen takım dediğimiz?
>
> Mine: Eğer hiç puan almadıysa elenmiştir.
>
> Araştırmacı: Var mı öyle hiç puan almayan takım?
>
> Mine: Yok.
>
> Araştırmacı: Turnuvada bir de öyle bir bilgi var mı? Elenen takım hiç puan almamıştır elenmiştir diye.
>
> Mine: Öyle bir bilgi de yok.

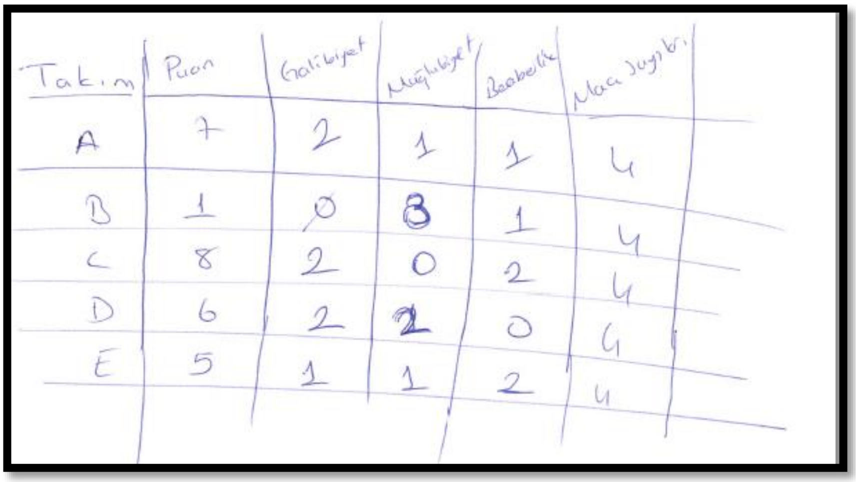
Problemde Mine, ancak yönlendirmeler yardımıyla kaç maç yapıldığını ve bunlardan kaçının berabere bittiğini görebilmiş ve beraberlikleri iki kez saydığını fark etmiştir.

> Araştırmacı: Peki 10 maç mı 20 maç mı ne diyeceğiz bu konuda? Bir yandan diyorsun ki 5 takım var, dörder maç yapıyorlar. 5 kere 4 den 20 maç diyorsun. Bir yandan tek tek sayıyorsun…
>
> Mine: 10 maç.
>
> Araştırmacı: 10 maç buluyorsun. Ne diyeceğiz?
>
> Mine: … 10 maç derim.
>
> Araştırmacı: Nasıl? Neden?
>
> Mine: Burada her takım için baktığımda B için mesela. B'nin ayrıyeten A ile maçını da yazdım. Burada da yazmış oldum. İki kere saydım maçı. O yüzden burada yanlış oluyor buradan baktım.
>
> Araştırmacı: Peki yaz 10 maç diye.
>
> Mine: (Toplam 10 maç yazar)
>
> Araştırmacı: O zaman 10 maç yapıldıysa bu 10 maçın 6'sı berabere mi bitti?
>
> Mine: 3 olur o zaman.
>
> Araştırmacı: Neden 3 olur?
>
> Mine: Bu da 20 ise 10, bu da 6 ise 3 olur.

Araştırmacı: Nasıl anlamadım. 10 maç yapılmış. Buna karar verdin. Ama berabere biten maçı sorduğumuzda 6 maç dedin. 10 maçın 6'sı berabere mi bitmiş dediğimiz zaman 3 dedin. Nasıl bakacağız ona?

Mine: … Onla da aynı şekilde hani burada A ile B'yi ayrı ayrı yazdığımda berabere kalan maçları da ikişer kez saymış oldum o yüzden 6 oldu.

Problemde takımlar arasındaki ilişkileri görebileceği takımların oynadıkları maç sayılarına ancak yönlendirmelerle yönelebilen Mine, elde ettiği verileri bir tabloda göstermiştir.



| Takım | Puan | Galibiyet | Mağlubiyet | Beraberlik | Maç sayısı |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 7 | 2 | 1 | 1 | 4 |
| B | 1 | 0 | 3 | 1 | 4 |
| C | 8 | 2 | 0 | 2 | 4 |
| D | 6 | 2 | 2 | 0 | 4 |
| E | 5 | 1 | 1 | 2 | 4 |

**Görsel 3.113.** *Mine'nin futbol problemindeki ikinci tablosu*

Problemin son kısmında ise Mine; futbol oynamışlığı olduğunu, kurallara fazla hakim olmadığını, puan durumunu daha önce görmediğini ifade etmiş, futboldaki istatistiki verilerin puan durumu olabileceğini belirtmiş ve buradan da katılımcının futbol bağlamına yakın olmadığı düşünülmüştür.

Araştırmacı: Peki futbolla aran nasıl Mine?

Mine: 8.sınıfta futsal takımındaydım.

Araştırmacı: Hııı. Oynamışlığın var yani.

Mine: Evet.

Araştırmacı: Sonra?

Mine: Genelde pek maç izlemem ama denk geldi mi Fenerbahçe ile Beşiktaş maçlarını izlerim.

Araştırmacı: Futbolun kurallarını falan biliyor musun? Puanlamasını…

Mine: Pek bilmiyorum. Ofsayt, penaltı falan o tür şeyler…

…

Araştırmacı: Peki futbol programlarında bu senin yaptığın şeylerden var mı hiç? (Yaptığı tabloyu göstererek)

Mine: Var.

Araştırmacı: Bunun bir adı var mı?

Mine: Var mıdır? Şeydir…

Araştırmacı: Neydir?

Mine: Şey… Maç sonuçları.

Araştırmacı: Maç sonuçları. Peki, futbolda puan durumuyla ilgili fikrin var mı? Puan durumu nedir biliyor musun?

Mine: Maçlarda mı?

Araştırmacı: Futbolda puan durumu dediğimiz şey.

Mine: Şey... Mesela şut atma sayısını hani şut çekiyorlar ya o sayıya göre falan puan veriyorlar.

Araştırmacı: Daha önce puan durumu gördün mü?

Mine: Görmedim.

Araştırmacı: Karşılaşmadın.

Mine: Maç izlerken mesela şey çıkıyor arada bir şut sayısı işte Galatasaray gibi…

Araştırmacı: O olduğunu düşünüyorsun yani.

Mine, problemi değiştirme önerisi olarak da kendisini en çok zorlayan kısım olan takımların birbirleriyle yaptıkları maçları tek tek vermeyi tercih etmiştir.

Araştırmacı: Bu tarz soru geliyor ama böyle soru ilk kez gördüm diyorsun. Peki, sen bu soruya bir şeyler ilave edecek olsaydın ya da bir şeyleri çıkartacak olsaydın sorudan nasıl değiştirirdin?

Mine: Mesela hangi takımın hangi takımla maç yaptığını kimin galip gelip kimin yenildiğini falan vermeye çalışırdım.

Mine'nin araştırmada kullanılan futbol bağlam bilgisi içeren problemde daha önceden futbol oynamış olsa da futbol bağlamında kullanılan kavramlara ve futbolda puanlamaya geçmiş yaşam deneyimlerinden yakın olmadığı düşünülmüş ve bağlama yakınlık derecesi '0' olarak belirlenmiştir.

### 3.4.3. Yasir'in problemlerin bağlamına ilişkin bulguları

Yasir'in, futbol problemini ilk sesli okumasının ardından takımların isimlerini yazıp yanlarına eşittir yazarak bir başlangıç yaptığı ancak problemi anlamadığını düşündüğünden tekrar içinden sessiz bir şekilde okuduğunda başlangıçta yazdığı takım isimleri ve puanlarına çarpı attığı görülmüştür.

Yasir: İçimden bir okuyayım hocam. (Soruyu içinden okumaya başlar) Buraya karalayabilir miyim?

Araştırmacı: Tabii zaten o kağıtlar senin.

Yasir: (Kağıtlara yazmaya başlar.) Karalamak yoktu değil mi? ("Kağıda A= 3", altına "B= 3", "E= 3" yazar)

Araştırmacı: Böyle üstüne çarpı atıp üstü silinmeyecek şekilde devam edebilirsin.

Yasir: (Kağıtta az önce yazdıklarının hepsine birer birer çarpı atar)

Araştırmacı: Ha onlar yok yani, tamam.

Yasir, kendi düzeltmelerinin ardından takımların puanlarını tekrar hesapladığında kendi hatalarını kendisi görmüş ve C takımının şampiyon olacağını belirtmiştir.

Yasir: Şimdi A, E ve B'yi yeniyor. O zaman 6 puan alacak iki tane takım yendi. A; 6. C ile berabere kalıyor. Bir tane daha… D'ye de yeniliyor. D'ye… D'ye o zaman 3 puan yazacağız. A yenmiş. B, C ve D'yi. O zaman… 3. B, C'ye yeniliyor 3. D'ye… (Kağıtta yazarak devam eder.) (İçinden çok sessiz şekilde devam eder) C değil midir hocam? (Kağıda "A= 6; D= 3, 3; C= 3, 3, 3,1; E= 3, 1; B =1" yazar)

Yasir'in takımların birbirleriyle yaptıkları maçlarda maçın berabere bitmesi durumunda bunun her iki takıma da bir puan getireceği konusunda sorun yaşamadığı görülmüştür.

Araştırmacı: Neden o 1? Her ikisine de 1 attın?

Yasir: Hocam çünkü beraberliğe ikisi de birer puan alıyor ya.

Problemde kendisinden bir tablo istenmeden yaptıklarını bütün halde görebilmek için tablo yöntemine yönelebildiği gözlenmiştir.

Araştırmacı: Hıh. Arada yanlışlık olabilir. Sen kendini daha kolay yaparım diyeceğin bir şekli var mı bunun?

Yasir: Hani bir tablo şeklinde yapardım bir de bu şekilde.

Yasir, tablosunu oluşturduktan sonra takımların birbirleriyle dörder maç yapması gerektiğinden faydalanıp hatalarını görmüş ve bunları kendisi düzeltmiştir.

Yasir: Evet, hocam. Mağlubiyetlerine bakacak olursak. Sıfırları yazmamıştım. Buradan kontrol et… Bunun 1... C'nin şeyi yok hocam mağlubiyeti. D'ye bakacak olursam… 2. D'nin 2 mağlubiyeti var. Hocam ben B de bir yanlışlık yapmışsam sanırım… (Mağlubiyet satırına A'ya 1, B'ye 1, C'ye 0, D'ye 2 ve E'ye 2 yazar)

Araştırmacı: Nereden anladın yanlışlık yaptığını?

Yasir: Hocam puan sayısı…

Araştırmacı: Kimden bahsediyoruz?

Yasir: B'den.

Araştırmacı: Hı.

Yasir: Hım. Demek ki mağlubiyet alamadığına göre galibiyeti 0, 0. Yani 3 tane şeyi var demek ki.

Araştırmacı: 4 maç yaptığı için mi öyle söylüyorsun?

Yasir: Hıhı.

Araştırmacı: Peki sen ne buldun şimdi?

Yasir: Ben de 1 demişim. Ben bir daha bakayım. (Diğer yazdıklarını kontrol eder) Burada B, ben buna 3 yazacakmıştım. (Mağlubiyet satırında B'yi "3" olarak değiştirir)

Futbol problemine Yasir'in verdiği cevapların görülmüş ve bağlamla ilgili sorgulamalara geçilmiştir.

Yasir, futbolla arasının iyi olmadığını, izlemeyi sevmediğini ifade etmiştir. Puan durumunu daha önce görüp görmediği sorulduğunda ise, bir sosyal mecrada oynadığı oyun sayesinde bu duruma aşina olduğunu ve kendi yaptığı ile gördüğü puan durumu arasındaki farklılıkları net bir biçimde ifade edebildiği görülmüştür.

Araştırmacı: Peki. O zaman şeye geçelim. Senin futbolla aran nasıl Yasir?

Yasir: Pek iyi değildir, sevmem pek.

Araştırmacı: Futbol maçlarını izleme sıklığın nedir?

Yasir: Hiç.

Araştırmacı: Futbol programları hakkında bir ilgin, bilgin var mı? Orada ne konuşuluyor ne yapılıyor?

Yasir: Hocam izlemem ama hani futbol tartışıldığını iyi kötü bilirim.

…

Araştırmacı: Peki puan durumu kavramıyla ilgili bir fikrin var mıydı soruyu çözmeden? Puan durumu senin için ne ifade ediyor?

Yasir: Puan durumu, takımların sıralamalarını gösteren şey.

Araştırmacı: Sıralamalarını. Daha önce puan durumu gördün mü?

Yasir: Hani bu şekilde bir tablo mu?

Araştırmacı: Sen gördün mü? Bu şekilde bir tablo mu? Senin yaptığın gibi bir şey mi puan durumu?

Yasir: Facebook'ta oynadığım bir oyun vardı, futbol menajerliği orada vardı.

Araştırmacı: Nasıl benziyor mu senin yaptığın tabloya?

Yasir: O tersindeydi hocam. Burada isimler vardı. Ve en üstte olan 1.liğe oluyordu. Burada da "M", "G", "B" o şekilde gidiyordu. Haa maç sayısı yani, "G galibiyet" gibi altlarında da böyle kareler işte kareler şeklinde şeyleri yazıyordu.

Araştırmacı: Kareler dediğimiz?

Yasir: Yani bu şekilde çizgilerin arasında.

Araştırmacı: Görmüştün yani puan durumu. Bunla bunun arasındaki fark da satır ve sütunların değişik olması mı diyorsun?

Yasir: Evet, satır ve sütunların değişik olması. Bir de hocam ben hani sorunun bana verdiği şeye göre sıraladım takımların isimlerini. Ama orada takımların isimleri puanlarına göre sıralanıyordu.

Yasir'in problemle karşılaşmadan önce futbolda puanlamayı oynadığı menajerlik oyunu sayesinde biliyor olduğu ve bu problemde de bunun işine yaradığını belirttiği gözlenmiştir.

> Araştırmacı: Peki futbolda puanlamayı biliyor muydun bu soruyu çözmeden önce?
> 
> Yasir: Bu şekilde yapmayı mı?
> 
> Araştırmacı: Onun gibi ya da puanlamayı.
> 
> Yasir: İyi kötü biliyordum işte hocam oynadığım oyun sayesinde.
> 
> Araştırmacı: Bu işine yaradı mı senin oynadığın oyun senin bu soruyu çözmende?
> 
> Yasir: Yani yaradı yine de hocam.

Yasir, futbola ilgisi olmamasına rağmen oynadığı futbol oyunu bilgisiyle problemde ilişkileri görebileceği maç sayılarına odaklanmış, diğer problemlere göre kendisini daha rahat ifade edebilmiş ve bu problemin çözüm süreci araştırmada kullanılan diğer problemlere göre onun için daha kendine güvenli olacak şekilde ilerlemiştir. Tüm bunlar birlikte düşünüldüğünde Yasir'in oynadığı oyun bilgisiyle futbolun kurallarına ve puanlamasına hakim olduğu düşünülmüş ve bağlama yakınlık derecesi '2' olarak belirlenmiştir.

Araştırmadaki bir diğer problem olan konser probleminde ise Yasir, stat tamamen dolarsa Jale'nin kazanacağı para sorulduğunda diğer bileşenleri düşünmeden bir konser sırasında kişi sayısı arttıkça harcamanın da artacağı düşüncesini ifade etmiş ve problemde olmayan ancak kendi düşüncesini içeren değişkenleri anlatmıştır. Düşüncesinin nedeninin de geçmiş yaşam deneyimlerinden miting tarzı siyasal bir toplantıyı hayal etmesi olarak ifade etmiştir.

> Araştırmacı: Peki sence kişi sayısının artması harcamayı artırır mı?
> 
> Yasir: Yani.
> 
> Araştırmacı: Nasıl arttırır mesela?
> 
> Yasir: Ya bunun harcama dediği organizasyon değil mi?
> 
> …
> 
> Yasir: Benim kafa gitti biraz daha parti tarzı bir şey düşündüm biliyor musunuz? O zaman harcamalar artacaktı.

### 3.4.4. Emrah'ın problemlerin bağlamına ilişkin bulguları

Araştırmanın katılımcılarından Emrah'ın futbol probleminde problemin bağlamında verilmeyen bir bilgiyi düşündüklerini ifade ederken kullandığı görülmüştür. Emrah, soruda takımların birbirlerini yenmesine farklı bir boyut getirmiş ve problemde böyle bir bilgiye yer verilmemesine rağmen D takımının E takımını yeniyor olmasından aynı zamanda da C takımının D takımını yeniyor olması bilgisiyle birlikte düşünüp D ve C arasındaki maçın sonucuna bakmadan C takımının E'yi de yeneceği tahminine ulaşmıştır.

> Araştırmacı: Mesela şimdi sen A ile ilgili bir yorum yaptın. E ile ilgili yorum yaptın. Diğerlerine ne diyeceğiz? Mesela C ile ilgili ne diyebiliriz?
> Emrah: Mesela C'yi şöyle şey yapabiliriz hocam. C mesela burada kime… C mesela D'yi yeniyor. Hani D'yi yenmiş. Burada D'nin yendiği takımlar ne mesela? Diyelim ki C, D'yi yeniyor ya. Örneğin diyorum mesela D, E'yi yeniyor eee C, D'yi yendiğine göre E'yi de yener şey olarak düşündüğümüzde.

Emrah'ın problemde puanlama kısmına geçtiğinde sadece kendisine verilen takımların maçlarına baktığı ve o takımların ilişkili olduğu diğer maç sonuçlarını dikkate almadığı görülmüştür.

> Araştırmacı: Şimdi A'yı buldun, E'yi de buldun bitti mi?
> Emrah: E'yi buldum, en yakın bu.
> Araştırmacı: Peki diğer takımlar?
> Emrah: Onların maçları verilmemiş.

Emrah ile bu durum sorgulanmış ve farklı sayıda maç yapılmaması gerektiği sonucuna varılmıştır. Emrah'ın problemde en çok takımlar arasında yalnız bir maç oynandığı cümlesini anlamlandırmakta sorun yaşadığı gözlenmiştir.

> Araştırmacı: Peki bir futbol turnuvasında takımların birbirlerinden farklı sayıda maçlar yapıp içlerinden bir şampiyon çıkartması adil olur mu?
> Emrah: O zaman olmaz hocam.
> Araştırmacı: Mesela öyle bir takım var ki 100 tane maç yapıyor. O, bir puan alıyor. Başka bir takım var 10 tane maç yapıyor. O, onu geçebilir mi? Geçebilir belki de geçmesi adil olur mu?
> Emrah: Geçmesi adil olmaz hocam.
> …
> Araştırmacı: Peki şurada ne yazıyor?
> Emrah: Her biri diğerlerinin her biriyle yalnız bir kez oynamaktadır. Haa... Yani her sadece 1 maç yapıyor takımlar arasında rövanş maçı yapılmıyor.
> Araştırmacı: Yapılmıyor demek. Peki, takımlar arası 1 maç yapılıyor demek dedin ya?
> Emrah: Evet.
> Araştırmacı: Peki her takımın kendisiyle oynadığı 1 maç yapıldığı sonucuna varabilir miyiz? Yoksa takımlar sadece ben C ile oynadım sen A ile oynuyorsun falan mı yapıyorlar?
> Emrah: Hayır, hepsi birbiriyle oynamıştır.

Emrah, problemlerin cevaplarında berabere biten maç sayısına altı, toplam oynanan maç sayısına ise 20 cevabını vermiştir. Bu durum kendisiyle sorgulandığında yine problemin bağlamında olmayan takımların rövanş maçları üzerinde durduğu görülmüştür.

> Araştırmacı: Bir kere. Her biri birer kez maç yaparak 20 maç nasıl oynar?
>
> Emrah: Değişerek hocam mesela. A; B, C, D, E ile oynar.
>
> Araştırmacı: Mesela A; B, C, D, E ile oynadı. Kaç maç yaptı?
>
> Emrah: 4 maç yaptı.
>
> Araştırmacı: Beşinciyi kimle yapacak?
>
> Emrah: Beşinciyi yapacağı kimse yok.
>
> Araştırmacı: Peki A bitti.
>
> Emrah: B ye geçeriz. B; A, C, D, E ile oynar.
>
> Araştırmacı: A ile oynar yani yine.
>
> Emrah: Evet, A ile. Pardon A ile oynamaz.
>
> Araştırmacı: A ile oynar mı oynamaz mı?
>
> Emrah: Oynamaz hocam. Çünkü o rövanş maçı olur. Biz rövanş maçına yok dedik.
>
> …
>
> Araştırmacı: Nerede çelişkiye düşüyoruz?
>
> Emrah: Çelişkiye düşüren şey sadece tek maç yapılacak. Rövanş maçı yok.
>
> Araştırmacı: Burada rövanş maçı yazıyor mu? Rövanş maçının yapıldığını sana söylüyor mu?
>
> Emrah: Direkt söylemiyor. Her biri diğerlerinin her biriyle yalnız bir kez oynamaktadır diyor.
>
> Araştırmacı: Bu bilgiyi vermesine rağmen rövanş maçını yaptırıp da verebilir mi sana?
>
> Emrah: … Yaptırıp da veremez.
>
> Araştırmacı: Yani bu bilgiyi veriyor hem tak maç oynanacağını söylüyor hem de rövanş maçını yaptırıp da verebilir mi soruya?
>
> Emrah: Onu yazamaz.

Emrah'ın takım sayısı ile maç sayısını çarpıp çıkardığı 20 sonucu ile takımların birbiriyle birer kez oynaması gerektiğinden rövanş maçı oynanmaması durumu çelişkiye düşmesine sebep olmuş, bu durumu aşmak için de takımların yaptıkları maçları göstermeye çalıştığı görülmüştür.

> Araştırmacı: Peki çelişki nerede?
>
> Emrah: Çelişki dediğim gibi hocam. Her biri diğerlerinin her biriyle yalnız bir kez oynamaktadır. Bu da demek oluyor ki rövanş oynanır. Ama mesela her birini direkt tek tek ele aldığımızda azalan bir durumun olması gerekiyor.
>
> Araştırmacı: Nasıl azalan bir durum mesela? Azalandan kasıt nedir oradaki?
>
> Emrah: Hee. Bir dakika hocam.

Araştırmacı: Yazabilirsin de düşüncelerini, rahat ol yani.

Emrah: Mesela… Hee tamam hocam rövanşa gerek yok. Mesela tek bir takım A takımı oynadı şeyle B, C, D, E ile oynadı. B de öbür takımlarla oynayacak.

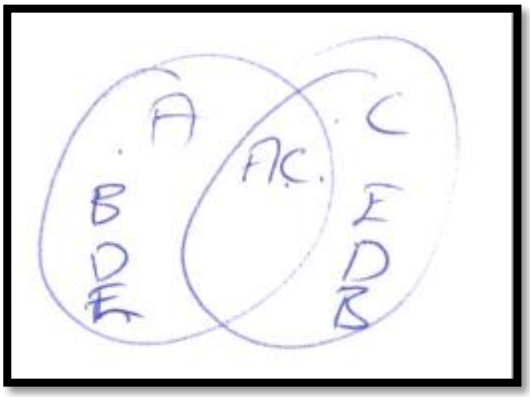
Araştırmacı: Yaz onu.

Emrah: A dedim. B, C, D ve E ile oynadı.( Kâğıda “A, B, C, D, E = 4 maç” yazar ) Tamam mı? Şimdi ben B’yi alıyorum ele. Bu A ile oynadı. A’yı zaten oynamıştı. Geriye oynayacağı takımlar C, D ve E kalıyor.

Araştırmacı: Bu ne?

Emrah: Şöyle diyeyim hocam size. O zaten A, B ile oynadı ya. Şu ikisi kesişen durumlar.

Uzun süren sorgulamalara rağmen Emrah’ın takımların birbirleriyle birer kez maç yapması düşüncesinden uzaklaşamadığı, kendisini ifade etmek için küme kavramıyla birlikte düşündüğü ve söylediklerini desteklemeye çalıştığı gözlenmiştir.




**Görsel 3.114.** *Emrah’ın maç sayıları hesabına başka bir yaklaşımı*

Çizdiği küme ve tablonun ardından yine kaç maçın berabere bittiği sorgulandığında ısrarla üç lig maçı berabere bitmiştir demesine rağmen kendisini ikna edememiş ve ilk hesaplamasına göre altı maçın berabere bitmesi gerektiğini ifade etmiştir.

Araştırmacı: Beraberliğe ne diyorsun şimdi? Kaç maç berabere bitmiştir?

Emrah: Kaç maç berabere bitmiştir…

Araştırmacı: Sayabilir miyiz buradan direkt beraberlikleri?

Emrah: Sayabiliriz hocam. B’yi yeniyor, C ile berabere kalıyor. 1. 1 tane maç geldi. Ondan sonra… Tamam… Iıı… Burada yenilgi var. Yine yenilgi. C ile berabere kalıyor. D… Yani burada da üç var. Şey var iki takım var.

Araştırmacı: Yani?

Emrah: Yani üç takım hocam.

Araştırmacı: Üç takım ne?

Emrah: Üç beraberlik maçı var yani.

Araştırmacı: Yaz.

Emrah: Üç lig maçı. Böyle hesapladığımızda üç beraberlik maçı ama…

Araştırmacı: Ama?

Emrah: Normalde şey var. altı tane berabere maç var. Puanlamaya baktığımızda altı tane.

Araştırmacı: Peki orası niye üç çıktı?

Emrah: Çünkü ben şeyi hesapladım az önce sadece A'yı hesapladım ondan. O zaman öbür takımlara da bakacağız hocam. Şimdi…

Araştırmada Emrah'ın futbol bağlam bilgisi sorgulandığında ise; çok fazla kurallarını bilmediği, puanlamasını ve programlarını bildiğini, puan durumunu daha önceden gördüğünü ifade etmiştir. Futbolda puanlamayı bilmesinin bu soruda O'na bir fayda sağlamadığını da belirtmiştir.

Araştırmacı: Anladım. Peki, futbolla aran nasıl?

Emrah: Futbolla aram hani… Çok bilgim yok hani akademik bilgim yok sadece halı sahada oynadım biraz.

Araştırmacı: Kurallarını falan?

Emrah: Kurallarını falan az çok biliyorum yani.

Araştırmacı: Puanlamasını?

Emrah: Puanlamasını… Yani…

Araştırmacı: Peki futbol maçlarını izleme sıklığın ne Emrah?

Emrah: İzleme sıklığım hani… Iıı düzenli bir izleme sıklığım yok. Denk gelirse özellikle Süper Lig maçlarını işte denk gelirse izlerim mesela.

Araştırmacı: Futbol programlarını biliyor musun?

Emrah: Futbol programları… Özellikle NTV Spor'da yayınlanan çoğu program var ama ismini bilmiyorum hocam.

Araştırmacı: Ne konuşulduğunu biliyor musun?

Emrah: Iıı ne konuşulduğu… Şöyle hani… Türkiye'de de şey olarak konuşuluyor. Daha çok eleştirisel olarak bakılıyor. Mesela işte oyuncuların yetenekleri demeyeyim de en iyi pozisyonları değerlendirilemeyen pozisyonlar…

Araştırmacı: Biliyorsun yani. Peki, puan durumu kavramıyla ilgili bir fikrin var mı?

Emrah: Puan durumu kavramı…

Araştırmacı: Puan durumu ne ifade ediyor sende?

Emrah: Puan durumu bende hani bilgim şu sadece. Oynanan her maç kazanan takım 3 puan alıyor, berabere yine 1 puan alıyor, yenilen takım 0 puan alıyor. Bu şekilde bir şey durumu var hocam. Puanlama sistemi var. Ondan sonra…

Araştırmacı: Puan durumu ne peki?

Emrah: Puan durumu…

Araştırmacı: Herhangi bir yerde gördün mü hiç puan durumunu?

Emrah: Puan durumunu gördüm hani…

Araştırmacı: Nerede gördün?

Emrah: Iıı şampiyonluğa yaklaşırken bazı şeylerde veriliyor. Televizyonda gördüm.

…

Araştırmacı: Peki futbolda puanlamayı biliyor muydun bu soruyu çözerken?

Emrah: Futbolda puanlamayı biliyordum hani.

Araştırmacı: Bu işine yaradı mı futbolda puanlamayı bilmek?

Emrah: Yoo direkt hocam sadece soruya odaklı ben baktım hocam.

Araştırmacı: Soruda vermiş diyorsun.

Emrah: Evet, vermiş.

Emrah, daha önceden rövanşlı turnuvalara aşina olduğunu ve bu turnuvada da bu durumun olmasını beklediğini ifade etmiş ve probleme rövanş maçları eklenmesi önerisinde bulunmuştur.

Emrah: Ben daha önce rövanşlı olarak iki maç yapılan turnuvaları biliyordum. Ondan…

Araştırmacı: Peki sen soruya ilave edecek bir şeylerin olsaydı ya da bu sorudan bir şeyleri çıkartacak olsan yani değiştirecek olsan nasıl değiştirirdin?

Emrah: Nasıl değiştirirdim… Yani ne yapabilirim ki… Mesela… Rövanş maçlarını da ekleyebilirdim hocam. Ondan sonra…

Araştırmacı: O zaman soru daha mı kolay olurdu daha mı zor?

Emrah: O zaman daha basit olurdu hani şurada kesişim olayı olmasına artık gerek olmazdı.

Emrah ile yapılan görüşmede katılımcının futbola fazla ilgili olmamasına rağmen geçmiş yaşam deneyimlerinden farklı tarzda oynanan turnuvalarla ilgili bilgisi olduğu anlaşılmış ve bağlama yakın olduğu düşünülmüştür. Bu sebeple bağlam bilgisi '2' olarak belirlenmiştir.

### 3.4.5. Saffet'in problemlerin bağlamına ilişkin bulguları

Futbol probleminde Saffet, problemi virgüllere dikkat etmeden okumuş ve probleme ilk yaklaşımı sorunun karışık olduğu yönünde olmuştur.

Saffet: Beraberliğe 1, galibiyete 3, yenilgiye 0 puan verilen bir futbol turnuvasında A, B, C, D ve E takımları mücadele etmektedir. Her biri diğerlerinin her biriyle yalnız bir kez oynamaktadır. A… E, B…

Araştırmacı: A takımı.

Saffet: A takımı E ve B'yi yeniyor C ile beraber kalıyor. D'ye de yeniliyor. B-C ve D'ye…

Araştırmacı: B takımı.

Saffet: B takımı. Öyle bir şey mi oluyor hocam?

…

Saffet: Herkes birbirini yeniyor, yeniliyor. Ortalık çok karışık hocam. (Gülüşmeler) Bu 5 arasında…

Saffet'in takımların arasında oynanan maçlardaki ilişkilere dair her takımın dörder maç yapması gerektiği cümlesinde zorlanmadığı görülmüştür.

Araştırmacı: Nereden anladın 4 maç yapacağını?

Saffet: Çünkü geriye kalan 4 tane takım var.

Araştırmacı: Toplam kaç takım var?

Saffet: 5.

Araştırmacı: O yüzden her takım kaç maç yapıyor?

Saffet: Birer.

Araştırmacı: Yani bir takım kaç maç yapıyor?

Saffet: Bir takım dört maç yapıyor.

Saffet'in çözüm sürecinde futbol bilgisini de ölçen birkaç bağlam sorusu sorulmuş ve cevaplarını kontrol etmesi sağlanmıştır. Sorulara verdiği yanıtlarda Saffet'in bağlama yakın olduğu düşünülmüştür.

Araştırmacı: Iı bir şeyde turnuvada son sırayı birden fazla takım alabilir mi?

Saffet: Alır.

Araştırmacı: Yani ikisi de sonuncu olabilir.

Saffet: Olabilir.

Araştırmacı: Peki ıı herhangi bir şeyde diyelim ki küme düşmenin ne olduğunu biliyor musun?

Saffet: Evet.

Araştırmacı: Hani liglerde küme düşme…

Saffet: Evet.

Araştırmacı: Bir takımın küme düşmesi lazım. Aynı puana sahipse 2 takım.

Saffet: Tamam.

Araştırmacı: İkisi birden mi küme düşüyor?

Saffet: Evet, düşebilir.

Araştırmacı: Ama birinin küme düşmesi gerekiyor.

Saffet: O zaman avantaj durumu var. Ama bu soruda avantaj şeyi yok. Hani attığı gole falan bakılıyor.

Saffet, şıklara verdiği cevapları yazarken kaç maçın berabere bittiği sorusuna sayarak altı cevabını vermiş ancak toplam kaç maçın yapıldığı sorusunu ise güzel soru olarak düşünmüş ve takımları tek tek kontrol edip yanlarına yaptıkları maç sayılarını yazmıştır. Burada da E takımına hiç maç kalmamasını tüm takımlarla oynadı zaten diyerek yorumlamış ve E takımın diğer takımlarla olan ilişkisini ifade etmiştir.

Araştırmacı: Üçüncü soru turnuva sonunda kaç tane maç berabere bitmiştir?

Saffet: Bir, iki, ü… 6. ("C, 6 maç" yazar)

Araştırmacı: Peki. Diğerini şöyle soralım. Bu turnuvada toplam kaç maç yapılmıştır?

Saffet: Toplam kaç maç yapılmıştır? 24 mü? Bakalım. Ov... O biraz iyi soruymuş.

Araştırmacı: Neden öyle düşündün?

Saffet: Neden öyle düşündüm? Çünkü birbiriyle bağlantılı bütün takımlar bütün şeyleri de. Ama şöyle yapabiliriz A takımının 4 tane takımla A'sıyla B'siyle… B takımına A takımı hariç diğer takımlarla 3 takım düşüyor. Iıı C takımına B ve A hariç 2 takım kalıyor. D takımına C, B, A hariç bir takım kalıyor. E takımıyla zaten hiç yazmasak bile olur yani hepsiyle maç yapıyor. ("A, 4", altına "B, 3", altına "C, 2", altına "D, 1", altına "E" yazar yanına bir şey yazmaz.)

Saffet'e problem hakkındaki düşünceleri sorulduğunda ise, futbolda puanlamayı bildiğini ve bu bilgisinin bu problemde işine yaradığını belirtmiş ve takımların attıklarını golleri probleme ilave edebileceğini ifade etmiştir.

Araştırmacı: Peki senin bu soruya ilave edecek bir şeylerin olsaydı ya da bir şeyleri çıkartacak olsan yani soruyu değiştirecek olsan ne yapardın? Bir şeyler yapar mıydın?

Saffet: Attıkları golleri yazardım. O daha zevkli hale getirirdi soruyu. B'ye mesela A'ya şu kadar gol attı, C'de D'ye şu kadar gol attı diyerekten avantaj durumunu da ortaya koymasını isterdim.

Araştırmacı: Peki bu soruyu çözmeden evvel futbolda puanlamayı biliyor muydun?

Saffet: Futbolda puanlamayı biliyor muydum? Kazandıkları maçlara falan o şekilde yani.

Araştırmacı: Biliyor muydun?

Saffet: Yani.

Araştırmacı: Onu bilmek bu soruda işine yaradı mı?

Saffet: Iıı… Evet.

Saffet'in futbol problemine verdiği cevaplardan futbol bağlamına, futbolun kurallarına yakın olduğu gözlenmiş ve bağlama yakınlık derecesi '2' olarak düşünülmüştür.

### 3.4.6. Abdi'nin problemlerin bağlamına ilişkin bulguları

Abdi, futbol probleminin çözüm sürecinde takımların birbirleri arasındaki ilişkileri diğer problemlere göre daha rahat bir biçimde ifade edebilmiş ve kendisine bunu sağlayan şeyin futbol bilgisi olduğunu belirtmiştir.

Araştırmacı: Peki Abdi, bunu nasıl kontrol ediyorsun? Neye bakıyorsun? Kontrol etmeni sağlarken sana yardımcı olan şey ne?

Abdi: Futbol bilgim. (Gülüyor)

Araştırmacı: Futbol bilgin? İşe yarıyor mu bu soruda?

Abdi: Yarıyor yani. Ya bir de mesela böyle… Anlıyorum yani. Nasıl anladığımı bilmiyorum ama anlıyorum…

Futbol problemindeki sorulara hızlı ve net cevaplar verdiği görülen Abdi, kendisinden yaptıklarını doğrulaması istendiğinde turnuvadaki takımlar için futbol bağlam bilgisi içerisinde yer alan fikstür kavramını kullanıp gösterebileceğini ifade etmiştir.

Araştırmacı: Peki bu yaptıklarının doğru olduğunu nasıl gösterirsin?

Abdi: Takımların fikstürlerini oluşturabilirim mesela…

Abdi'nin futbol bağlam bilgisi sorgulandığında ise; futbola ilgisinin olduğunu ve hatta futbolcu olmak istediğini, puan tablosunu daha önceden gördüğünü problemin son kısmında belirtmiş ve soruyu farklı hale getirme kısmında C takımını ayrıca verdiğinde sorunun daha kolay olabileceğini, zorlaştırma anlamında ise, maç sonuçlarını verip futbol bilgisi içeren "averaj, deplasman" gibi kavramların kullanılabileceğini ifade etmiştir. Futbol bilgisinin işe yarayıp yaramadığı sorulduğunda ise, soruda zaten hangi takıma hangi durumda kaç puan verileceğini belirttiği için çok da bu bilgilerin işe yaramadığını, bunları bilmeyen birinin de bu problemi yapabiliyor olması gerektiğini söylemiştir.

Araştırmacı: Peki futbolla aran nasıl Abdi?

Abdi: Futbolla aram… Yani… Futbolcu olmayı düşünüyordum. Yani en azından hayalim olsa da gerçekleştirmeye çalışacağım. Futbolu seviyorum. Elimden gelen her şeyi yapmaya çalışıyorum.

Araştırmacı: Hıhı. Oynuyorsun?

Abdi: Evet, oynuyorum. Yetenekli olduğumu da düşünüyorum. Sadece elimden tutan birisi olması gerektiğini düşünüyorum.

…

Araştırmacı: Peki daha önce bu soruyu görmeden konuşmuştuk ama puan durumuyla ilgili bir fikrin var mıydı? Görmüş müydün?

Abdi: Ya fikstür şeye puan durumuna bakmıştım.

Araştırmacı: Nerede görmüştün onu?

Abdi: İnternette. İnternette de görmüştüm televizyonda da görmüştüm. Puan durumuna bakmıştım. Orada üç bilgi vardı, üç veya dört bilgi vardı hatırladığım kadarıyla. İşte en başta puanı, en sonunda da averajı var diye biliyorum. Arada da bir veya iki fazladan bilgi var. Ne olduğunu çok ilgimi çekmedi de.

…

Araştırmacı: Ha ona takıldın. C takımının neden şeylerini vermemiş…

Abdi: Hepsini vermiş. A'yı, B'yi, D'yi ve E'yi vermiş. C'yi vermeyince ortalık karışıyor. Gerçi hepsini yazınca kimle kimin oynadığı belli oluyor ama…

Araştırmacı: Sence orada C'yi vermesine gerek var mıydı?

Abdi: Aslında gerek yoktu ama böyle düzenli bir şekilde yaptığın zaman C'yi hatta bir takımı daha vermesine gerek yoktu herhalde.

Araştırmacı: Öyle de yapılabilirdi diyorsun yani?

Abdi: Evet. Yani ama şimdi C'yi verirse daha kolaylaştırıcı olurdu.

…

Araştırmacı: İstediğin gibi. Açıklama da olabilir soru olarak da olabilir. Diyebilirsin mesela şöyle bir soru ilave ederdim…

Abdi: Ben ne yapardım güzel bir soru olması için? … Takımların averajlarını da veririm. Oynana fikstürlerdeki yenilgiyi; 3-2'dir, 1-0'dır onları da verirdim averajları da sorardım. En çok averajı kim almış gibi.

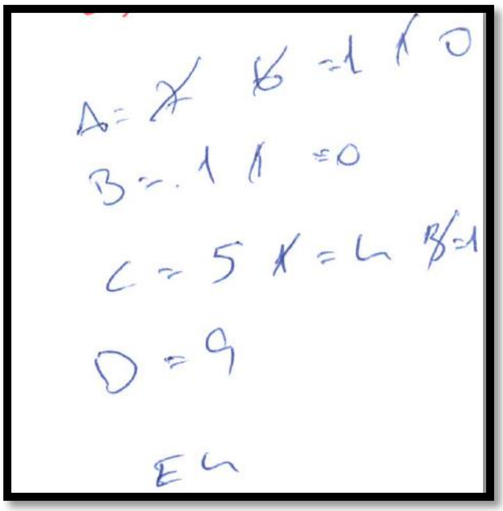
Abdi'nin problemde ortaya koyduğu ifadelerden ve problem bağlamında yer almamasına rağmen futbol kavramına dayanan terimleri de kullanmasından bağlama yakın olduğu görülmüş ve bağlama yakınlık derecesi '2' olarak belirlenmiştir.

### 3.4.7. Oğulcan'ın problemlerin bağlamına ilişkin bulguları

Bağlam bilgisinin nicelikler arasındaki ilişkileri etkileyip etkilemediğinin incelendiği futbol problemine Oğulcan, takımların maçları arasındaki ilişkilere odaklanmadan başlamış ancak daha sonra bu durumu kendiliğinden fark ederek yaptıklarını kontrol etmiştir.

Oğulcan: Diğerleri hep yenilmiş hiç kazanmamış ya da berabere kalmışlar. Onları da yazdım. Aaa dur. A, E ve B'yi yeniyor C ile berabere kalıyor. C'nin de 1 puanı vardır o zaman. Bunu yeni şey ettim. B ve C berabere kalıyor. B'ye de 1 puan vereceğiz. (Kağıda "B = 1" ve "C= 1" yazar) O zaman E hiç puan almamış oluyor. (Gülüşmeler) (Kağıda E yazar, yanına bir şey yazmaz)

Oğulcan takımları birer liste halinde oluşturmuş ve bu listeden yaptıklarının doğru olup olmadığını kontrol ettiği görülmüştür.



**Görsel 3.115.** *Oğulcan'ın futbol problemindeki doğrulama yolu*

Oğulcan, problemde şıklardaki sorulanları okurken b şıkkında sorulan turnuvada son sırayı hangi takım kaç puanla almıştır cümlesini anlamakta da sorun yaşamış ve son sırayı almak ifadesini kafasında anlamlandıramamış ve bunun son maç olabileceğini düşünmüştür.

Araştırmacı: Peki, ikinci soru. Bu turnuvada son sırayı hangi takım kaç puanla almıştır?

Oğulcan: Son sıra derken?

Araştırmacı: Ne demek son sıra?

Oğulcan: Burada son sırayı… Soruyu bir daha okur musunuz?

Araştırmacı: Bu turnuvada son sırayı hangi takım kaç puanla almıştır?

(Sessizlik)

Araştırmacı: Sıra almak ne demek mesela?

Oğulcan: Son maç mı demek istiyor?

Bu durum araştırmacı tarafından sorgulandığında Oğulcan, voleybolla ilgisi olduğunu ifade etmiş ve eleme usulü turnuvayı önceden bildiğini söylemiştir. Bu problemde ise, içerik lig usulü oynan bir turnuvaya dayanmış ve bu durum Oğulcan'ın bildiklerini gözden geçirmesine sebebiyet vermiştir.

Oğulcan: Bu turnuvada son sırayı hangi takım kaç puanla almıştır? (Sessizlik)

Araştırmacı: Turnuvalar yapılıyor yani.

Oğulcan: Hıhı

Araştırmacı: Ne oluyor turnuva bittiğinde?

Oğulcan: Eşleşmeler oluyor turnuva usulü. Iıı yapan eleniyor. Kazanan bir üst finale yükseliyor.

Araştırmacı: Her turnuvada kaybeden hep eleniyor mu? Bir maç kaybettiği için?

Oğulcan: Yoo. Turnuvaya göre değişiyor.

Araştırmacı: Mesela hangi turnuvada farklı?

Oğulcan: Yaa mesela şöyle ağaç kökü gibi şey yapıyorlar. En genişten. Mesela D ve C var. Burada A ve B var. Bu ikisi eleniyor. Bu ikisi karşılaşıyor. (Kağıda "A" ve "D"nin karşılaşacağını gösterir) Üst tarafta karşılaşıyor. Bunun kazanan şampiyon oluyor.

Araştırmacı: Peki hiçbir maçla elenilmeyen…

Oğulcan: Ya oluyor.

Araştırmacı: Nasıl oluyor var mı aklına gelen?

Oğulcan: Mesela burada tek sayı. Burada muhtemelen olur. Direkt üst finale yükselen oluyor.

Araştırmacı: Hangi sporla daha ilgilisin?

Oğulcan: Ben mi? Voleybol.

Problemin bağlamına ilişkin Oğulcan futbol maçlarını pek takip etmediğini sadece kendi tuttuğu takımla ilgilendiğini, futbol programlarına ilişkin ise bilgisi olmadığını ifade etmiştir.

Araştırmacı: Peki futbolla aran nasıl Oğulcan?

Oğulcan: (Gülüşmeler) Hocam ya maçları takip ederim de Galatasaray yüzünden pek takip edesim gelmiyor. Battı bu aralar o yüzden.

Araştırmacı: Peki kim şampiyon oldu?

Oğulcan: Galatasaray şampiyon oldu yine ama…

Araştırmacı: Ama sen sevmedin?

Oğulcan: Evet ben sevmedim.

Araştırmacı: Futbolla aran Galatasaray yüzünden iyi değil?

Oğulcan: Evet, takip ederim yoksa.

Araştırmacı: Peki futbol maçlarını izleme sıklığın ne?

Oğulcan: Yaa şimdi yatılı okuduğum için etütlerden izlenmiyor bazen. Ama açıldığı zaman yurtta yine izliyorum. Maç olduğu zaman izlerim.

Araştırmacı: Peki ya evde?

Oğulcan: Evde de izlemek isterim ama annem izletmiyor.

Araştırmacı: Peki futbol programları hakkında bir fikrin var mı?

Oğulcan: Onları sevmem sıkıcı geliyor. Dinlemişliğim vardır ama çok da uzun süreli dinlemem sıkıcı gelir bana.

Problemi nasıl değiştirmek istediği kendisine sorulduğunda ise bir takım daha ekleyebileceğini belirtmiştir.

Araştırmacı: Peki sen bu soruya bir şeyleri ilave edecek olsaydın ya da bu sorudan bir şeyleri çıkaracak olsaydın ne ilave ederdin ne çıkartırdın?

Oğulcan: Ya bu soruya bir şey ilave edilmek için… Değiştirilebilir ama ilave edilmek istiyorsak bir takım daha eklemek lazım buraya. Yani çünkü herkes 4 maç yapmak zorunda.

Oğulcan'ın futbol probleminde de diğer problemlerde yaptığı gibi görseller oluşturup problemi oradan anlamlandırmaya çalıştığı, futbolun içeriğine ilişkin bir fikrinin olmadığı ancak turnuva formatına ilişkin voleybol maçlarından gelen bir birikimi olduğu görülmüş ve bildiklerini net biçimde aktarabilmiştir. Bu durum göz önünde bulundurularak futbolun kurallarına, kavramlarına yakın olmasa da turnuva formatına ilişkin net bilgilerinden dolayı Oğulcan'ın bağlama olan yakınlık seviyesi '1' olarak belirlenmiştir.

Klinik görüşmelerde kullanılan konser probleminde ise Oğulcan, bilet fiyatıyla konsere gelecek kişi sayısı arasında problemin bağlamında yer almayan bir ilişki kurmuş ve bilet ücreti azalırsa gelecek kişi sayısının çok olacağını ve belirtmiştir. Oğulcan'ın aynı zamanda yine problemin bağlamında olmamasına rağmen bilet ücretlerinin oturulan yere göre değişebileceği ve bunun da nicelikler arasındaki ilişkiyi etkileyebileceği bilgisini de problemde kullanmak istediği görülmüştür.

Oğulcan: Biletler 10 TL olursa yine şey olur ya gelen sayısı çok olur ııı ama kazanacağı para az olur. O zaman sayının daha çok olması gerekiyor.

…

Oğulcan: Genelde konserlerde ve maçlarda öyle oluyor hani bu problemde de Jale, ön koltukları pahalı, arka koltukları ucuz yapar böylelikle gelecek kişi sayısı değişir.

Bu kurduğu ilişki sorgulandığında ise, bir akrabasının ticaretle uğraşmasından dolayı geçmiş yaşam deneyimlerinden elde ettiği verileri problemin bağlamına yansıttığı düşünülmüştür.

Oğulcan: Bu gerçek hayatta çok karşılaştığımız bir şey yani. Çok büyük rakamlar olarak değil tabii de ııı özellikle bir akrabalarınızdan biri bir ticaretle uğraşıyorsa onun yanına gitmişsinizdir. Mesela ben çok gittim. Bu tarz şeylerle çok karşılaşıyorum yani bu kadar yüksek rakam olmasa da…

Araştırmacı: Günlük hayatta olan bir soru diyorsun yani bu.

Oğulcan: Yani yani. Her insan için olmaz ama hani…

Araştırmacı: Karşılaşılabilen bir durum. Peki ne hissettin?

Oğulcan: Büyük rakam olduğu için sanki böyle bir tuzağa düşüyormuşum gibi oldu ama bilmiyorum.

### 3.4.8. Orhun'un problemlerin bağlamına ilişkin bulguları

Orhun, futbol probleminde kazanan takımların üç puan almasını belirttiği gibi kaybeden takımların da sıfır puan alması gerektiğinin farkında olarak çözüm sürecine girmiştir.

Orhun: Yani yenilgi gibi düşündüm. Sıfır yani… Ne demiştik? A takımı D'ye yeniliyor ama… B'yi yeniyor tamam A takımından sıfır aldı. B takımı C ve D'ye de yeniliyor. Sıfır, sıfır tamam. E takımı D'yi yeniyor B ve C ile berabere kalıyor. Öyleyse B takımı 1 puan almıştır. Aynen öyle. ("B = 1" yazar) Şimdi tekrar C takımına bakacağız. Böyle tek tek bakarsak bulunabilir. Soruyu her seferinde her takım için tekrar okuyup tekrar karşılaştırmak gerekiyor ki…

Problemde kendisine yöneltilen soruları doğru bir biçimde cevaplayan Orhun, takım sayısını artırmayı ya da futbolda pek de kullanılmayan bir puanlama usulüyle puanlamaları değiştirmeyi düşünmüş ancak bunları çözüm aşamasında uygulamamıştır.

Orhun: Şöyle bir şey yapılabilir belki… Eğer soru biraz daha uzun olsaydı takım sayısı biraz daha fazla olsaydı hani beraberliğe 1, galibiyete 3 falan deniyor ya bu sayılar biraz daha galibiyet 2 puan olabilirdi. Sayı açısından biraz daha kolaylık sağlanabilirdi mesela diyeceğim ama sayılar zaten küçük yeterince bakalım başka nasıl yapılabilir? (İçinden okur) Aklıma şu anda başka bir şey gelmiyor.

Orhun’un takımların maç sayılarını ya da berabere biten maç sayılarını cevaplarken zorlanmadığı görülmüştür.

> Araştırmacı: Üçüncü soru. Turnuva sonunda kaç tane maç berabere bitmiştir?
> Orhun: Hı. Bunun için tekrar bakmak gerekecek. E takımı için iki tane. D takımı için kaç tane?... Hımm… D takımı için yok. C takımı için… Bir… Bundan bir olsa… B ile berabere var mı? Ortak… Başka beraberlik A takımıyla yok zaten. Tamam onla yaptık. Doğru saydıysam 3 beraberlik.

Problemin bağlamına yönelik Orhun ile sorgulamalar yapıldığında ise; futbolla arasının olmadığı, futbolda kullanılan kavramlardan ise sadece puan durumuna yakın olduğu ve puan durumunu daha önce gördüğü için yaptıklarını ona benzettiği görülmüştür.

> Araştırmacı: Öyle gösteririm diyorsun yani. Peki, senin futbolla aran nasıl?
> Orhun: Futbolla aram yok gibi bir şey
> Araştırmacı: Futbol maçlarını izleme durumun?
> Orhun: Denk gelirse ayda yılda bir.
> Araştırmacı: Peki futbol programlarıyla ilgili bir fikrin var mı?
> Orhun: Futbol programları, bu yorum programları falan mı?
> Araştırmacı: Hıhı.
> Orhun: Kesinlikle gereksizler.
> …
> Araştırmacı: Peki. Şeye gelelim. Sence bu problem nasıl bir problemdi? Ne hissettin çözerken?
> Orhun: … (Sessizlik) Hımm… Adamlar işlerini iyi yapıyor.
> Araştırmacı: Ne demek bu?
> Orhun: Bu puan durumunu yapan adamlar yani baya bir uğraşıyorlar. (Gülüyor)
> …
> Araştırmacı: Biliyorsun yani futbol programlarının nasıl olduğunu. Peki bu soruyu yapmadan evvel puan durumu diye bir şey duydun mu hiç?
> Orhun: Puan durumu tabii ki duydum.
> Araştırmacı: Nedir puan durumu?
> Orhun: Yani… Lig gibi bir şey… Şöyle oluyor takımların yaptığı maçlar… Bu sorudaki gibi yani puanlama yapılıyor.
> Araştırmacı: Hı. Peki o puan durumunu daha önceden nerede gördün?
> Orhun: Televizyonda görmüşümdür lig durumu falan.
> Araştırmacı: Peki bu puan durumu dediğin şey bu yaptığın tabloya benziyor mu?
> Orhun: Tabii ki benziyor.
> Araştırmacı: Benziyor. Senin yaptığın şey puan durumu mu acaba?

Orhun: Olabilir.

Orhun, futbolda puanlamayı bu problemden önce de bildiğini ancak bu problemde bu bilgisini kullanmadığını ifade etmiştir.

Araştırmacı: Peki bu soruyu okumadan evvel futbolda puanlamayı biliyor muydun?

Orhun: Derken yani puanlamanın ne olduğunu mu nasıl yapıldığını mı?

Araştırmacı: Ne olduğunu ya da nasıl yapıldığını...

Orhun: Tabii yani tahminen biliyordum.

Araştırmacı: O işine yaradı mı sence bu soruda bunu bilmek? Yoksa bilmesem de olurdu mu dedin?

Orhun: Bilmesem de olurdu. Zaten futbolla aram olmadığı için puanlama durumuyla da pek aram olmayacaktı. Yani biraz mantıkla çözdüm.

Futbol bağlamında sorulan probleme ilişkin Orhun'un cevaplarından futbol bağlamına yakın olmadığı ancak futbolda kullanılan puan durumunu daha önceden gördüğü ve probleme alternatif çözüm önerisinde futbolda puanlamaya ilişkin pek de kullanılmayan bir öneri getirdiği görüldüğünden bağlama yakınlık derecesi '1' olarak kabul edilmiştir.

### 3.4.9. Habibe'nin problemlerin bağlamına ilişkin bulguları

Problemde bağlam bilgisine odaklanılan futbol sorusunda Habibe, virgüllerin kullanımına dikkat etmemiş ve tüm maçları A takımının yaptığını düşünerek ilk okuyuşta A takımının 15 puan alarak şampiyon olduğu bir sonuç bulmuştur.

Araştırmacı: Peki bir bak bakalım nasıl bakarsın bunlara?

Habibe: Takımları… (Bir tablo oluşturmaya başlar ve satırlara alt alta "A", "B", "C", "D", "E" yazar) Galibiyet, mağlubiyet ve beraberlik olsa… A, B, C, D, E takımlarının her biri yalnız bir… A; E ve B'yi yeniyor. Yani 3, 6, 9, 10 puan aldı. 3, 6, 9, 10. D'ye yeniliyor. B,C,D yeniliyor. Yeniliyor… 10, 13, 16. Bunlar da 17, 18. Şöyle yapayım ben en iyisi. Toplam puan olsun 18 olsun. Iıı (Sütuna yazdığı "G", "B" ve "M"yi karalar) C ile berabere kalıyor… 3, 4, C, bir dört, yedi, sekiz. (Gülüyor) (İçinden defalarca okur) üç, altı… Üç. ("A" satırının yanına "18", "B" satırına "4", "C" satırına "6", "E" satırına "3" yazar)

Araştırmacı: Ne bu bulduğun?

Habibe: A'nın daha yüksek puan aldığını.

Araştırmacı: Nasıl yaptın?

Habibe: Iıı zaten başta da belirtmiş beraberliğe 1, galibiyete 3 puan veriliyor diye. Hani hangi takımları yendiklerine baktım. Yendi mi berabere mi kaldı mağlubiyete mi uğradı? Ona göre puanlarını yazdım.

Araştırmacı: Mesela 18'i nasıl buldun?

Habibe: Mesela… Diyor ki A; E ve B'yi yeniyor diyor. E'yi ve B'yi yendiğine göre oradan 6 puan geldi. C ile berabere kalıyor dedi 7 puan oldu. Yeniliyor, buradan puan gelmiyor. Buradan da puan gelmiyor. E ve D'yi yeniyormuş. 7 puan olmuştu. 10, 13 puan oldu. B ve C ile berabere kalıyormuş. 14,15 puan oldu. Yanlış hesaplamışım. (Yazdığı 18'i 15 olarak değiştirir) Öyle yani…

Habibe, problemde maç sayılarının farklı olabileceğini ifade etmiş, bu durum kendisiyle sorgulandığında ise, futbola dair eleme usulüne dayanan farklı formatta bir turnuvayı bildiği ve o turnuvadaki gibi takımların farklı maçlar yapabileceğini düşündüğü anlaşılmıştır.

Araştırmacı: Hı. Peki, bir turnuvada bir takım 4 maç bir takım 3 maç bir takım farklı sayıda maç yaparsa ve bu turnuvadan bir şampiyon çıkarsa sence bu adil bir turnuva mı olur? Ya da turnuvalarda böyle mi oluyor?

Habibe: Hayır.

Araştırmacı: Nasıl oluyor?

Habibe: Hani herkes eşit sayıda maç yapar eşit sayıda puan alır.

Araştırmacı: Eşit sayıda mı puan alır?

Habibe: Hani galibiyet, beraberlik, mağlubiyete göre… O zaman bu turnuva adil bir turnuva değil ya da elenen bir turnuva mı ki?

Araştırmacı: Elenen bir turnuva mı? Elenen turnuva ne?

Habibe: Mesela maç yapılır kim yenilmişse o çıkar oyundan. Sonra galibiyetlerle devam edilir en son kim kalırsa final maçı oynar.

Araştırmacı: Peki elenen turnuvalarda senin söylediğin turnuvalarda puan sistemi olur mu?

Habibe: Olmaz.

Araştırmacı: Ne oluyor orada?

Habibe: Orada galibiyet, mağlubiyete bakılır.

Araştırmacı: Galibiyet mi turu geçiyor?

Habibe: Evet, galibiyet turu geçiyor.

Araştırmacı: O zaman bu elenen bir turnuva mı?

Habibe: Hayır.

Habibe, problemde A ve C takımlarını eşit puan olarak hesaplamış ve bir şampiyon isteniyorsa problemde yer almasa bile atılan gollere bakılması gerektiğini ifade etmiştir.

Habibe: O zaman… E kaç tane maç yapmış oluyor? Şunları atarsak… Bir, iki, üç, dört tane. Bir, iki, üç, dört tane. Yani şunlar gidecek. (Kağıtta "E D ve B C berabere" yazdığı kısmın üstünü çizer) E kazanacak. Berabere olacak berabere olacak. (Kağıtta "E D" yazar, "E"yi halka içine alır. "E B" ve altına da "E C" yazar yanlarına "–" yapar) O zaman… Üç, dört beş. E'nin 5 puanı oluyor. (Tekrar hesaplar) Evet, E'nin 5 puanı oluyor. D'ye baksam… D'de bir değişiklik yok. C, bir… Iıı dört, yedi. C, 7 puan oldu. (“C = 8” yazdığı yeri “7” olarak değiştirir) B için bir… B 1 puan. Böyle oluyor en son.

Araştırmacı: Peki son durumda şampiyon kim?

Habibe: Şampiyon yok. (Gülüşmeler) A ve C şey.

Araştırmacı: Beraber mi şampiyon olurlar?

Habibe: Yani gollere bakılır. (Gülüşmeler)

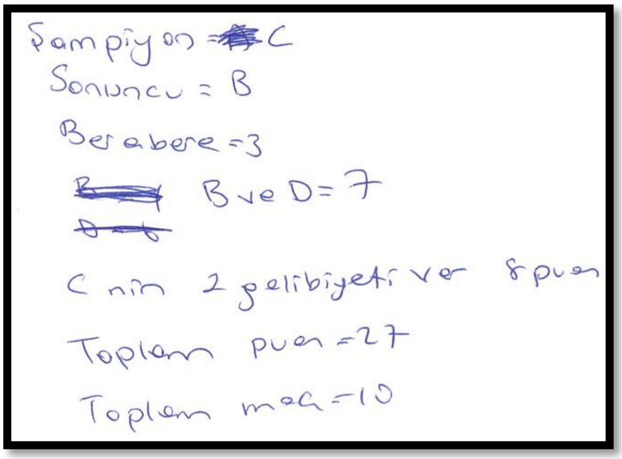
Araştırmacı: Eee peki biz burada biliyor muyuz golleri?

Habibe: Hayır.

Araştırmacı: Nasıl karar vereceğiz?

Habibe: Onun söylenmesi lazım herhalde.

Problemin içinde yer alan diğer sorulardan olan turnuvadaki toplam maç sayısı, berabere biten maç sayısı, tüm yapılan maçların sayısı ya da son sırayı alma ifadesinde Habibe sorun yaşamamış ve bunlara hızlı, net cevaplar verebilmiştir.




**Görsel 3.116.** *Habibe’nin futbol probleminde sorulara verdiği cevaplar*

Habibe’nin problemdeki futbol bilgisi sorgulandığında ise, birçok kavrama yakın olduğu, futbolu sevdiği, futbolda puanlamayı ve puan durumunun ne olduğunu önceden bildiği, kendi tablosunun da puan durumu tablosuna yakın olduğu ve puan durumlarında averaj hesabının da yapılabileceği gibi şeylerin farkında olduğu verdiği cevaplarda ortaya çıkmıştır.

Araştırmacı: Öyle kontrol edersin. Peki, futbolla aran nasıl Habibe?

Habibe: Severim, yani izlemeyi severim.

Araştırmacı: Kurallarını ve puanlamasını biliyor musun?

Habibe: Evet, puanlamasını bilirim.

Araştırmacı: Peki futbol maçlarını izleme sıklığın ne?

Habibe: İzlerim. Çoğu zaman evde olduğum zaman izlerim.

Araştırmacı: Futbol programları hakkında bir fikrin var mı?

Habibe: Birkaç kere izledim.

Araştırmacı: Ne konuşuyorlar orada?

Habibe: Şey yapıyorlar mesela… O maçın görüntülerini falan seyrediyorlar. Hakemlerin verdiği sarı kartlara, kırmızı kartlara falan bakıyorlar. Doğruluğuna yanlışlığına… Saha içinde olan olaylara bakıyorlar.

Araştırmacı: Peki böyle şeyler var mı senin yaptığın gibi? (Son yaptığı tabloyu gösterir.)

Habibe: Programlarda oluyor.

Araştırmacı: Ne oluyor mesela?

Habibe: Bu haftanın puan durumu deyip verilebiliyor.

Araştırmacı: Puan durumu diye bir şey biliyorsun yani?

Habibe: Hıhı.

Araştırmacı: Puan durumu nedir peki sence?

Habibe: Puan durumu, o takımların o dönem içerisinde ne kadar maç kazandıklarını ne kadar puan topladıkları hakkında bilgi verir.

Araştırmacı: O puan durumu dediğin şey senin bu yaptığın tabloya benziyor mu?

Habibe: Hıhı

Araştırmacı: Neresi benziyor mesela?

Habibe: Mesela galibiyet, beraberlik, toplam bunlar da oluyor. Orada ayrıyeten sanırım averaj oluyor. Başka da bir şey yok sanırım.

Problemi değiştirme önerisi sorulduğunda ise Habibe, atılan gol sayılarını ilave edebileceğini belirtmiş, problemi görmeden önce futbolda puanlamayı bildiğini ve bu durumun da sorunun çözümünde işe yaradığını belirttiği görülmüştür.

Araştırmacı: Peki senin bu soruya ilave edecek bir şeylerin olsa ya da çıkartacağın bir şeyler olsaydı neleri ilave ederdin ya da neleri çıkarırdın?

Habibe: Neleri ilave ederdim? Iıı… Gol sayılarını ilave ederdim. Başka bir şey ilave etmezdim ya da çıkartmazdım.

Araştırmacı: Gol sayılarını ilave ettiğinde nasıl bir soru olurdu?

Habibe: Yani daha düzgün hani… Iıı… Daha belirgin olurdu neyin ne olduğu…

Araştırmacı: Daha belirgin olurdu. Sen bu soruyu çözmeden evvel futbolda puanlamayı biliyor muydun?

Habibe: Hıhı, evet.

Araştırmacı: Bu puanlamayı bilmek soruda işine yaradı mı?

Habibe: Hıhı, yaradı.

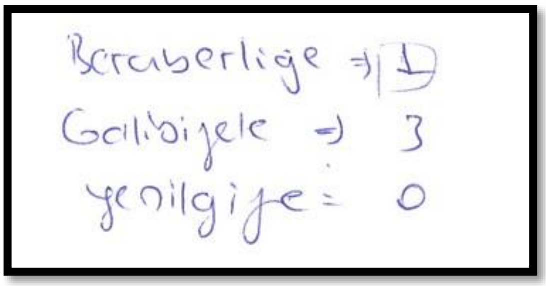
Araştırmacı: Mesela nerede işine yaradı?

Habibe: Mesela hani burada da belirtmiş ama galibiyete 3 puan verildiğini bilmem benim için iyi oldu. Direkt yazabildim, direkt hesaplayabildim gibi.

Habibe'nin futbol probleminin çözüm sürecinde vermiş olduğu cevaplardan futbolda eleme usulü turnuva ve averaj hesabı gibi kavramlara yakın olduğu, futbola ilgisinin olduğu, futbol programlarına ilişkin de bilgisinin olduğu beraber düşünüldüğünde katılımcının futbol bağlamına yakınlık seviyesi ‘2’ olarak düşünülmüştür.

### 3.4.10. Şerife’nin problemlerin bağlamına ilişkin bulguları

Futbol probleminde Şerife’nin problemde sorulan soruları cevaplarken bir zorluk yaşamadığı ve problemin bağlamında verilen puanlamayı kendi sembolleriyle beraber kullanabildiği görülmüştür.




**Görsel 3.117.** *Şerife’nin futbol probleminde puanlama ve işaretlemeleri*

Şerife, problemde kendisine yöneltilen tüm sorulara net cevaplar verdikten sonra yaptıklarını nasıl doğrulayacağı sorulmuş bunun üzerine de tüm ilişkileri gösteren futbol terimleri olan fikstür ile puan tablosunun birleşimi olarak düşünülebilecek bir tablo yapmaya başladığı görülmüş ve bu tablosunu kendi yönergeleriyle duraksamadan tamamlayabilmiştir.

> Şerife: Şey yapardım puan sırasına göre… Ay A burada olmayacak bu burada olacak. Neyse… Puan sıralamasını yapardım işte. 8, 7. Pardon şöyle yapalım. Çizdiği tablonun üstünü karalar. Tamam. Şimdi aynı şekilde A, B, C, D, E yapardım. Ondan sonra bunları böyle çekerdim. Sonra böyle… Şimdi burada puan sıralamaları, şey puanlarını söylerdim. Mesela C 8, A 7, B 1, D 6, E de 5. (Yine bir tablo oluşturur ve “A, B, C, D, E” satırları ve “Puan” sütunu ilave eder. “A”nın yanına “7”, “B”nin yanına “1”, “C”nin yanına “8”, “D”nin yanına “6” ve “E”nin yanına “5” yazar) Ondan sonra beraberlik hani kaç tane maçta beraber kalmışlar ve kimle kalmışlar onu yazardım. Mesela A, 1 tane beraberlik yapmış. Kimle yapmış? E ve B ile. Mesela… 1 beraberlik yazardım. 2 beraberlik mi oluyor? Tamam. C takımıyla… (Tabloya bir tane de “Beraberlik” sütunu ekler. O sütunda “A” kısmına “1 beraberlik C takımıyla” yazar) Böyle yapardım.
>
> Araştırmacı: Yap.
>
> Şerife: Ondan sonra galibiyet yazardım. Buradan A kaç tane galibiyet almış? 2 galibiyet yazardım. Bu da kim? A; E ve B takımlarını yenmiş. (“Galibiyet” sütunu ilave eder. “A” satırına “2 galibiyet E ve B takımı” yazar) Sonra mağlubiyet yazardım. Oraya da 1 tane yenilgisi varmış. D’ye yeniliyormuş. 1 mağlubiyet bu da D takımı. (“Mağlubiyet” sütunu ilave eder. “A” satırına “1 mağlubiyet D takımı” yazar)

Şerife'nin bağlama yakınlığı sorgulandığında ise; futbolu sevdiği, oynamaya meraklı olduğu ancak doğrudan kurallarına hakim olmadığı görülmüştür. Puan durumunu daha önce duymuş ancak ne olduğunu bilmediğini ifade etmiştir. Puan durumu olarak belirttiği şeyin futbolcu kartlarındaki oyuncuların yetenek puanlarını gösterir sayıları ifade ettiği görülmüştür. Futbolda farklı kavramları da bildiğini belirtmiştir. Futbolda farklı kavramları da bildiğini belirtmiştir.

> Araştırmacı: Peki. Futbolla aran nasıl Şerife?
> Şerife: İyidir ya güzel şut çekerim yani öyle diyorlar.
> Araştırmacı: (Gülüyor) Futbol bilgin ne durumda? Aran nasıl derken genel olarak?
> Şerife: Yaa biraz karışık. İzliyoruz ama işte…
> Araştırmacı: İzliyorsun. Futbolla aran fena değil yani öyle mi?
> Şerife: Mesela ofsaytı tam olarak bilemiyorum.
> Araştırmacı: Hı. Ofsayt genel bir sorun zaten. (Gülüyor)
> Şerife: Evet, tam olarak bilemiyorum çünkü bana açıklayamıyorlar.
> Araştırmacı: Hı açıklayamıyorlar.
> Şerife: Ama röveşata atarım.
> Araştırmacı: Röveşata atarsın. Peki, futbol maçlarını izleme sıklığın ne?
> Şerife: Ya özellikle derbileri izlerim yani derbileri kaçırmam.
> …
> Araştırmacı: Peki puan durumu diye bir şey biliyor musun?
> Şerife: Duydum ama bilgim yok.
> Araştırmacı: Puan durumu sende bir şey çağrıştırıyor mu?
> Şerife: Şey çağrıştırıyor hani kaç kaç aldılar maçı.
> Araştırmacı: Kaç kaç aldılar maçı çağrıştırıyor.
> Şerife: Evet. Mesela bir takım vardır şunla şunu yaptı bunla bunu yaptı gibisinden. Ama şey de olabilir mesela. Tek oyuncu üstünden de olabilir. Çok gol atmıştır onun puanı daha çoktur gibi.
> Araştırmacı: Hı. Peki, daha önce hiç puan durumu gördüğünü düşünüyor musun?
> Şerife: Nasıl bir puan durumu? Futbolla ilgili mi?
> Araştırmacı: Futbolla ilgili evet…
> Şerife: Şey görmüştüm böyle oyuncular vardı. Mesela küçükken oynadığımız kartlar vardı ya hocam. Onların arkasında puan şeyleri vardı.
> Araştırmacı: Hı. Onu çağrıştırıyor.

Şerife'ye problemi değiştirme önerisi sorulduğunda ise, takımların isimlerinin değiştirilmesini önerdiği ve futbolda puanlamayı biliyor olsa bile soruda verildiği için problemin bağlamına bunu dahil etmeyeceğini belirttiği görülmüştür.

Araştırmacı: Peki bu soruya bir şeyler ilave edecek olsan ya da çıkartacak olsan nasıl değiştirirdin soruyu?

Şerife: Hangi takımların maç yapmasını isterdiniz?

Araştırmacı: Nasıl?

Şerife: Yani C takımı bence Galatasaray olmalıydı.

Araştırmacı: Ha isimlerini değiştirirdin.

Şerife: Evet, sonra B takımı da Fenerbahçe olmalıydı.

…

Araştırmacı: Olurdu. Peki. Futbolda puanlamayı biliyor muydun soruyu çözmeden önce?

Şerife: Soruda verilenlere göre yaptık işte.

Araştırmacı: Yani futboldaki bilgin bunda pek işine yaramadı?

Şerife: Sanmıyorum. Yani soruda verilenlere göre yaptık. Yorumumu katamam o kadar öznel olmamalı.

Araştırmacı: Öznel olmamalı. Peki.

Şerife: Şimdi ben kalkıp da hayır galibiyet 1 olamaz 2 olmalı diyemem. (Gülüyor)

Araştırmacı: Hı diyemezsin. Peki.

Problemde Şerife'nin verdiği cevaplardan futbolu sevdiği, maç skorlarına yönelik fikrinin olduğu görülmüştür. Puan durumuna ve futbolda kullanılan kavramlara fazla yakın olmaması birlikte düşünüldüğünde katılımcının bağlama yakınlık derecesi '1' olarak belirlenmiştir.

# 4. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

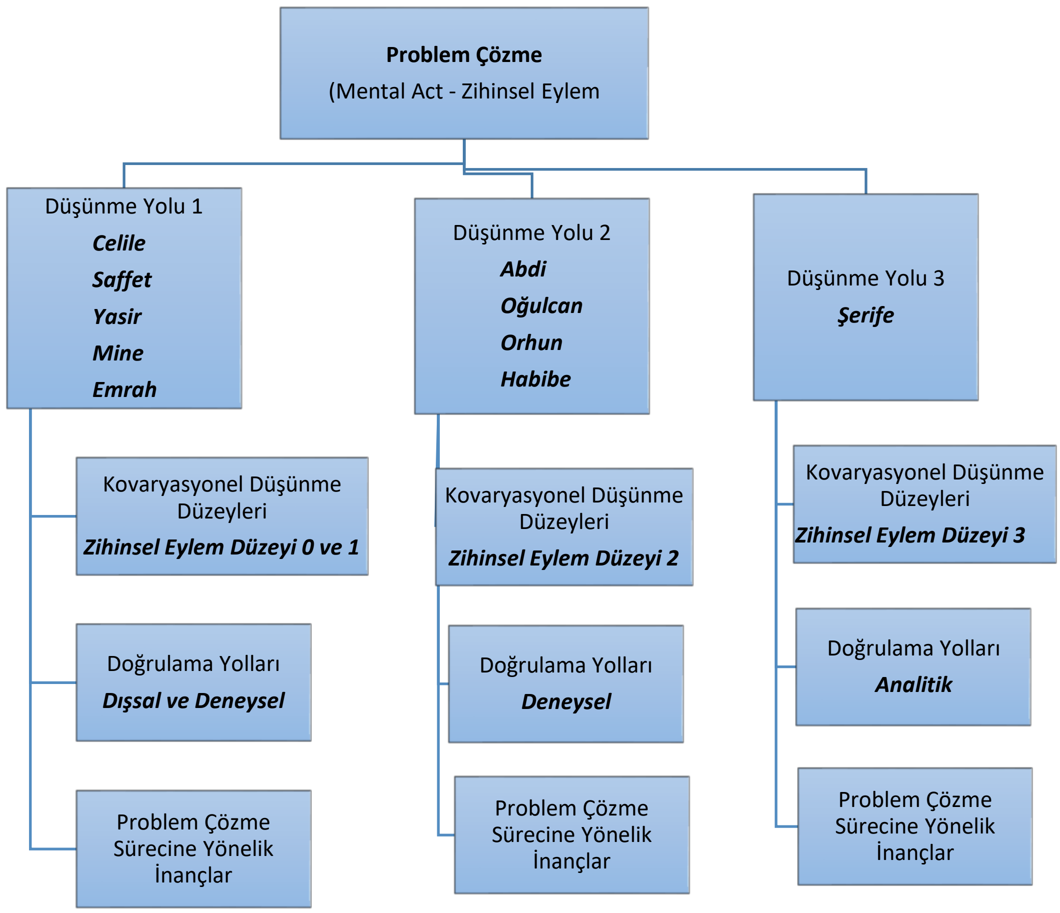
Araştırmada elde edilen veriler iki araştırma problemi kapsamında incelendiğinde 11.Sınıf öğrencilerinden elde edilen bulgu ve yorumlardan elde edilen sonuçlar aşağıda açıklanmıştır.

## 4.1. Sonuç

Araştırmanın bu bölümünde, 11.sınıf öğrencilerinin problem çözme sürecinde ortaya koydukları düşünme yollarına ve problemin bağlamı ile öğrencilerin düşünme yolları arasında nasıl bir ilişki olduğuna yer verilmiştir.

### 4.1.1. Düşünme yollarına ilişkin sonuçlar

Katılımcılara yöneltilen problemlerde verdikleri cevaplardan ortaya koydukları düşünme yolları; doğrulama yolları, inançlar ve problem çözme stratejilerine bağlı kovaryasyonel muhakemeyle ilişkili üç zihinsel eylem kategorisi altında az istendikten daha fazla arzu edilene göre aşağıdaki gibi sınıflandırılmıştır.




**Şekil 4. 1.** *Katılımcıların düşünme yollarının sınıflandırılması*

Araştırmada zihinsel eylem (mental act) olarak problem çözme alınmış ve bu zihinsel eyleme bağlı düşünme yolları; problem çözme stratejileri, doğrulama yolları ve problem çözmeye ilişkin inançları kapsamında incelenmiştir. Araştırma için seçilen problemler fonksiyon bağlamına dayanmakta olup çözüm stratejisi kovaryasyonel düşünmeyi gerektirmektedir. Dolayısıyla problem çözme stratejileri bileşeni Carlson ve diğerleri (2002) tarafından geliştirilmiş olan çerçeveye göre yorumlanmıştır. 10 farklı katılımcıdan yedisinin, kovaryasyonel düşünme seviyeleri olarak 3 temel düzeye (1, 2 ve 3.zihinsel eylem düzeyleri) ait davranışlar sergilediği görülürken geriye kalan üç katılımcının herhangi bir kovaryasyonel düşünme düzeyine ait davranış sergilemediği tespit edilmiştir. Bu katılımcıların kovaryasyonel düşünme becerilerinden ilkine ait olan bir veri setinin sonuçlarını diğer verilere olan etkisini belirtemedikleri ve iki değişkenin farklı değerlerinde ortaya çıkan sonuçları temel düzeyde ilişkilendiremedikleri görüldüğü için bu katılımcıların zihinsel eylem düzeyleri, Zihinsel Eylem Düzeyi 0 olarak kabul edilmiştir.

Katılımcılar doğrulama yolları bakımından dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç farklı kategoride beceriler gösterirken problemler boyunca soruya, sorunun çözümüne ve matematiğe dair inanışları bakımından da farklı sonuçlar ortaya koymuşlar ve bu sonuçların da Düşünme Yolu 1, 2 ve 3 düzeyine göre anlamlı farklılıklar gösterdiği görülmüştür.

Genel anlamda kovaryasyonel düşünme düzeyine ait Zihinsel Eylem Düzeyi 0 ve 1 olarak düşünülen beş katılımcının dışsal ve deneysel doğrulama yollarını kullandığı görülmüştür. Probleme dair inançlarının da; yapamadıklarını düşündükleri soruları sevmeme, kendilerine problemlerin çözüm süreci boyunca güvenmeme, yapamadıklarını düşündükleri kısımları değiştirme önerilerinde bulunma, matematiksel kavram veya terimlerde kendilerini eksik hissetme, zaman zaman problemde onaylanma ihtiyacı hissetme gibi benzerlikler gösterdiği görüldüğü için bu katılımcılar, “Düşünme Yolu 1”e sahip katılımcılar olarak sınıflandırılmıştır.

Zihinsel Eylem Düzeyi 2’ye ait davranışları ortaya koyan dört katılımcının da doğrulama yolu olarak deneysel bir bakış açısına sahip olduğu görülmüştür. Problemlere dair inançlarının da problemler boyunca kendi yönergelerini kullanma ve hata yapmış olabileceklerini düşündükleri yerleri kendilerinin bulması, farklı yöntemlere yönlendirildiklerinde kendilerine ait olmayan yönergeleri geri çağırmaya çalışma, tüm değerlerin bir değişken olması noktasında zorlanma ve problemde tek bir sonuca göre yorum yapma isteğinde bulunma gibi benzerlikler göstermesinden dolayı bu katılımcılar, “Düşünme Yolu 2”ye sahip katılımcılar olarak gruplandırılmıştır.

Çalışmada yalnızca bir katılımcı (Şerife) kovaryasyonel eylem düzeyi 3’e ait davranışlar sergileyip analitik doğrulama yapmaya çalışmış ve problemler boyunca verdiği dönütlerden inançlarının da yaptıklarının doğruluğunu ve sorunun cevabını merak etme, problemlerdeki değişkenler arasındaki ilişkilere odaklanıp yorumlarını bu duruma bağlı yaptığını ifade etme, kendi yönergelerini kullanıp hata yaptığını düşündüğünde alternatif çözüm yollarına kendiliğinden yönelme gibi farklılıklar içerdiği görüldüğünden bu katılımcı, “Düşünme Yolu 3”e sahip katılımcı olarak isimlendirilmiştir.

Düşünme Yolu 1’de görülen katılımcıların kovaryasyonel düşünme düzeyi olarak 0 ve 1 zihinsel eylem düzeylerinde oldukları ve doğrulamalarını yaparken dışsal veya deneysel olarak kendilerini ifade ettikleri görülürken problemlere dair inançlarının da genel anlamda olumsuz olarak şekillendiği, kendilerine ve matematik bilgilerine güvenmedikleri ortaya çıkmıştır.

Kovaryasyonel düşünme düzeyi 0 ve 1 olan katılımcıların problemlerde nicelikler arasındaki ilişkilerden çok sonucu bulmaya odaklandıkları, matematiksel sayı/sembol ve değişken kullanımını sıklıkla tercih etmedikleri, problemlerdeki içeriğin fonksiyon kavramını onlara çağrıştırmadığı ve bu durumu da çözümlerine yansıttıkları görülmüştür.

Katılımcıların, problemler boyunca bir değişkenin varlığının problemdeki diğer değişkenlerin varlığına etki edebileceğinin farkında olacak davranış sergilemediği ve kendilerine açıklanan veri/veri setlerini bağımlı ya da bağımsız oldukları değişkenlere bakmak yerine doğrudan sorudaki bilgileri organize edip sonucu bulma eğiliminde davrandıkları görülmüştür. Kendilerinden bir genelleme yapmaları istendiğinde de ilişkilere odaklanmayıp belirli adım sayısına göre zaman zaman tamamen çizerek/sayarak zaman zaman da görseller üzerinden ekleme yaparak bir kural arayışı içerisine girdikleri gözlenmiştir. Bu süreçte değişken kullanımından kaçındıkları, kullandıkları değişkenleri de kovaryasyonel ilişkiyi gösterecek şekilde açıklayamadıkları görülmüştür. Kullandıkları değişkenleri sözel olarak ifade etseler dahi sembolik olarak değişkenler arasındaki ilişkileri göstermeleri gerektiğinde zorlandıkları anlar olmuş ve bu anlarda da ana dili kullanarak kendilerini ifade etmeye çalıştıkları gözlenmiştir. Birden fazla değişken kullanmalarının beklendiği problemlerde ise tüm değişkenlerin değişebileceğini anlamlandırmakta zorlandıkları, bazı değişkenleri sabit tutma eğiliminde oldukları ve değişkenlerden hangisinin bağımlı hangisinin bağımsız olduğunu düşünmeye çabalamadıkları görülmüştür.

Bu gruptaki katılımcıların aynı zamanda problemin sınırlıklarına uymayıp günlük yaşam durumlarını, gerçek hayattaki deneyimlerini çözümlerine dahil edebildikleri ve problemin bağlamına uygun hareket edemedikleri görülmüştür. Bu durumun sebebi olarak da farklı değişkenleri ve onlar arasındaki kovaryasyonel ilişkileri düşünmekte zorlandıklarından uygun stratejileri seçemedikleri için çözümü, bağlamı değiştirmekte bulmaları olarak düşünülmektedir. Düşüme Yolu 1'e sahip katılımcıların birden fazla değişken kullanımında çokluklar arasındaki ilişkiyi ifadeye etmeye bağlı olarak sorunlar yaşadıkları ve bu yüzden birden fazla değişken kullanımına yatkın olmadıkları görülmüştür. Problemlerde değişkenler arasındaki ilişkileri, bu ilişkilerdeki kovaryasyonel yapıyı ve ilişkinin yönünü belirleyemediklerinden dolayı sonuç odaklı düşünmelerinin de bir sonucu olarak şartlara göre değişebilen problem durumlarında zorlandıkları ve bu durumu değiştirme önerilerinde bulundukları ortaya çıkmıştır. Katılımcıların verdikleri cevaplarda sabit bir duruma göre problemi yorumlama ihtiyacı duydukları ve cevabın tek olmasını bekledikleri görülmüştür. Fonksiyonun tanım kümesinin belirli sınırlardaki farklı değerleri için kuralının değiştiği ve görüntü kümesinin sonuçlarının farklılaştığı kısımları anlamakta, bu kısımlardaki ilişkileri görmekte, ifade etmekte, yorumlamakta zorlandıkları görülmüş ve bu yüzden problemin tek bir değer için verilmesinin kendi işlerini kolaylaştıracağını ifade ettikleri ortaya çıkmıştır.

Bu düşünme düzeyinde yer alan katılımcıların sonucun doğruluğunu merak etmeme ya da yaptıklarından emin olma gereği duymama gibi problem çözme zihinsel eylemini harekete geçirmesi beklenen entelektüel ihtiyacı karşılayamadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bu durumun, problemlerde inançların sorgulandığı kısımlarda katılımcılardan gelen cevaplarda kendisini daha iyi gösterdiği anlaşılmıştır. Katılımcılar, problemlerde kendilerini yetersiz hissettiklerini ve cevapların doğru olmayabileceğini belirttikleri halde uygun stratejileri seçip seçmediklerinden emin olmadıkları için alternatif çözüm önerilerinde bulunamamışlar ve kendilerini problemde en çok zorlayan kısımları problemden çıkarma önerilerinde bulunmuşlardır.

Düşünme Yolu 1 olarak düşünülen katılımcıların problemlerdeki çözümlerini doğrulama ihtiyacı duymadıkları, doğrulamalarını yaparken kendilerine ait olmayan yönergeleri kullandıkları ve birtakım kendilerine ait olmayan bilgileri geri çağırmaya çalıştıkları görülmüştür. Bu durum da yine katılımcının entelektüel ihtiyacının problemin çözümünde onu doğrulama yapmaya veya yaptıklarının doğru olduğuna kendini veya karşısındakini ikna etme eylemine götürememesi olarak değerlendirilmiştir. Katılımcılardan yönlendirme üzerine yaptıklarının doğru olduğunu göstermeleri istendiğinde ise, rastgele seçtikleri özel örnekler üzerinden birkaç denemenin sonucu doğrulaması halinde çözümlerinin doğru olacağını ifade ettikleri görülmüştür. Aynı katılımcılar fonksiyonun tanım kümesinin belirli sınır değerler için değiştiği problemlerde çözümlerine problemin sınır değerlerinden veya ilişkileri görebilecekleri kritik değerlerden bağımsız olarak rastgele özel örnekler seçerek strateji belirlemeleri de bu durumu destekler nitelikte ortaya çıkmıştır. Bu kategoride düşünülen katılımcıların problemlerin çözüm süreci boyunca kendi yönergelerini oluşturamadıkları, bilgilerini organize edemedikleri ve yaptıkları hataları yönlendirmeler üzerine gördükleri gözlenmiştir.

Düşünme Yolu 2'de görülen katılımcıların ise kovaryasyonel düşünme düzeylerinin 2.Zihinsel Eylem Düzeyinde olduğu ve doğrulamalarını deneysel olarak gerçekleştirdikleri gözlenmiştir. Aynı katılımcıların probleme dair inançları sorgulandığında ise kendi yönergelerini kullanabildikleri, problemlerin çözümünde net ve tek bir cevap beklentisi içerisinde oldukları, birbirini etkileyen birden fazla değişken kullanımının ise onları zorladığı sonuçları ortaya çıkmıştır.

Düşünme Yolu 2 olarak düşünülen ve kovaryasyonel eylem düzeyleri ikinci seviye olan katılımcıların birinci seviyedekilerden farklı olarak nicelikler arasındaki ilişkileri görebilecekleri anlamlı özel örnekler kullanabildikleri, ilişkileri gösterebilecek sınır değerlere odaklanabildikleri görülse de bu ilişkinin yönünü ve yorumlamasını matematiksel sayı/sembol kullanarak yapmakta zorlandıkları ortaya çıkmıştır. Katılımcıların değişken kullanmayı yöntem olarak kendiliğinden uygulayabildikleri ancak bu değişkenlerin fonksiyonel yapıda neyi ifade ettiğini, bağımlı-bağımsız olacak şekilde nasıl farklılıklar gösterebildiklerini ve birbirlerini etkileme durumlarını anlamlandırmada zorlandıkları görülmüştür. Nicelikler arasındaki kovaryasyonel ilişkiye ve bu ilişkinin yönüne problemde değinmemeleri fonksiyonel yapının zihinlerinde canlanmadığı sonucunu ortaya çıkarmıştır. Bu durum da problem çözme zihinsel eyleminin bir entelektüel ihtiyaç olarak bu eylem düzeyindeki katılımcılar tarafından da karşılanmadığını göstermiştir.

Bu düşünme yoluna sahip katılımcıların da tıpkı Düşünme Yolu 1'deki katılımcılar gibi problemlerde sonuç odaklı düşünüp fonksiyon kavramına dayanan çözüm sürecine girmeyip, değişkenler arasındaki sebep sonuç ilişkilerine odaklanmayıp sadece değişkenleri kullanıp bir cevap verme, soruyu yanıtlama ihtiyacı hissettikleri görülmüştür. Katılımcılar zaman zaman kendiliğinden zaman zaman da problemlerin yönergelerine göre değişken kullanımına girebilmiş, matematiksel sayı/sembollerle kendilerini ifade edebilmiş ve birinci düzeydeki katılımcılar gibi kendilerini matematiksel olarak ifade edemeyecekleri problem durumlarında ana dili kullanmaya yönelmişlerdir. Tek değişkenin yeterli olmayacağını düşündükleri durumlarda birden fazla değişken kullanımına geçişte sorun yaşamadıkları ancak kullandıkları değişkenin bir başka niceliği nasıl ve ne yönde etkileyeceğini ifade ederken zorlandıkları da görülmüştür. Nicelikler arasındaki kovaryasyonel ilişkiyi göremeseler bile, görsellerden ya da problemdeki belirli bir düzene göre artıştan faydalanıp genellemelerini yapabildikleri gözlenmiştir. Ancak fonksiyonun ilişkilere dayalı düşünme becerilerini daha fazla gerektiren problemlerde bilinmeyen olarak kullandıkları değişkenlerin de onları çözüme götürmeye yetmediği ve ilerleyemediklerini düşündükleri bu problem durumunda tek ve net bir değere göre yorum yapmanın daha kolay olacağını ifade ettikleri ortaya çıkmıştır. Bu düzeydeki katılımcılardan sadece birinin bir problemdeki ilişkileri göstermek için değişken kullanımına yöneldiği ve bu durum yönlendirmelerle desteklenmiş olsa dahi katılımcının değişkeni sonuca gitme amaçlı bir bilinmeyen olarak görmesinden, fonksiyondaki anlamlı sınır değerleri belirleyip bilinmeyeni de bu değerler için atamış olmasına rağmen farklı sınır değerlerdeki bulduğu farklı sonuçlarla bir ilişki kurmadan çözümünü sonlandırdığı görülmüştür. Bu durum da yine katılımcının entelektüel ihtiyacının sadece problemin cevabını vermeye yetecek bir problem çözme zihinsel eylemini içerdiği ve kovaryasyonel ilişkileri bulmaya, göstermeye, tartışmaya ihtiyaç hissetmediği şeklinde yorumlanmıştır.

Düşünme Yolu 2'ye sahip olan katılımcıların problemlerde kendi yönergelerini takip edebildikleri, hatalı olduklarını düşündükleri kısımlara geri dönerek hatalarını kendilerinin bulup düzeltebildikleri ve çoğunlukla bilgilerini organize edebildikleri görülmüştür. Ancak alternatif çözüm önerileri kendilerinden istendiğinde kendilerine ait olmayan yönergeler üzerinden çözüm önerilerinde bulundukları ve bu yöntemleri sürdüremedikleri ortaya çıkmıştır. Alternatif çözüm önerileri sırasında eski bilgilerini geri çağırmaya çalıştıkları ve neyi nasıl yaptıklarını hatırlamaya çalıştıkları sırada yaptıklarının doğruluğundan emin olamadıkları için onaylanma ihtiyacı hissettikleri ifadelerinden anlaşılmıştır. Bu düzeydeki katılımcıların birinci düzeydekilerden farklı olarak problemler boyunca kendilerine daha fazla güvendikleri ve neyi yapıp neyi yapamadıklarının farkında oldukları geri dönütlerinden ortaya çıkmıştır. Birden fazla değişkenin gerekli olduğunu hissettikleri problemlerde değişken kullanabilirken bu değişkenlerin hepsinin değişebilir olma durumunun onları zorladığı, bazı değişkenleri sabit tutma ve problemi ona göre yorumlama ihtiyacı hissettikleri görülmüştür. Bu düzeydeki iki katılımcının değişkenleri sabit tutma eğilimini gerçek hayat durumlarıyla birleştirdikleri de çözümlerinden anlaşılmıştır. Bu katılımcılar problemin bağlamında yer almayan verileri çözümlerine dahil etmiş ve ilişkileri bu gerçek hayat durumuna göre arama eğilimi içerisine girmiş olsalar dahi birinci düzeydeki katılımcılardan farklı olarak birden fazla değişken kullanıp matematiksel sayı/sembolle kendilerini ifade edebildikleri, matematiksel eşitlikler üzerinden düşünebildikleri için Düşünme Yolu 2'de düşünülmüşlerdir.

Bu düzeydeki katılımcılar; kendiliğinden yaptıklarını doğrulama ihtiyacını, tüm sorularda olmasa da görüşmeler boyunca zaman zaman hissetmiş ve bu durumda fonksiyonun anlamlı sınır değerleri için birkaç örneğin doğru olduğunu göstermenin yöntemlerinin doğruluğu için yeterli olacağını ifade etmişlerdir. Doğrulamalarını yaparken değişken kullanabildikleri ve bu değişkenleri anlamlı sınır değerler için seçtikleri görülmüştür. Ancak fonksiyonun tanım kümesini farklı değerler için farklı görüntülere götüren sınır değerler arasında bir ilişki aramadan sadece belirli bir sınırda tanım kümesindeki tek değer için seçtikleri özel örneklerin sonucunu doğrulamayı yeterli gördükleri ortaya çıkmıştır.

Düşünme Yolu 3 olarak görülen katılımcının ise (Şerife) ; kovaryasyonel düşünme düzeyinin zihinsel eylem 3 düzeyinde olduğu ve analitik doğrulama yoluna sahip olduğu gözlenmiştir. Bu katılımcı, problemler boyunca yaptıklarının doğruluğunu merak etmiş, kendine özgü kullandığı sayı ve sembollerle oluşturduğu yönergelerini takip etmiş, hatalı olduğunu düşündüğü yerlere çoğunlukla kendiliğinden dönüş yapmış ve her problemi kendi bağlamında düşünerek geçmiş yaşam deneyimlerini çözümlerine yansıtmamış olmasıyla inançları bakımından da diğer katılımcılardan farklılık gösterdiği için Düşünme Yolu 3'e sahip tek katılımcı olarak öne çıkmıştır.

Bu düzeyde yer alan Şerife'nin araştırma boyunca problemlere, kendine özgü işaretlemeler ve sembol/simge kullanımıyla başladığı görülmüştür. Problemi anlamlandırabilmek adına bu işaretleri kullandığını belirtip çözüm sürecine yönlendirme olmaksızın kendiliğinden girdiği gözlenmiştir. Kullandığı sembol veya simgeler problemlerin yapısına göre farklılık göstermiş ve katılımcının bu işaretlemelerin ne anlama geldiğini açıklayabildiği görülmüştür. Problemler boyunca katılımcı, ilişkiler üzerinden değerlendirmeler yapmaya çalışmış ve bunu kendi ifadelerinde de açıkça belirtmiştir. Katılımcının çözüm sürecini tamamladığını düşündüğü anlarda cevabın ne olduğunu merak ettiği ve bunu sıklıkla araştırmacıya sorduğu gözlenmiştir. Bu durum da katılımcının problem çözmeyi bir ihtiyaç olarak gördüğü ve çözüm sürecinin içerisine girmek için hevesli olduğu durumunu ortaya çıkarmıştır.

Şerife'nin araştırma sürecinde kovaryasyonel düşünme düzeylerinden zihinsel eylem düzeylerine ait olan bir veri setinin sonuçlarını diğer verilerle birlikte düşünüp onlara olan etkisini sözel veya matematiksel olarak ifade edebildiği, iki değişkenin farklı durumlarda ortaya çıkan sonuçlarını ve bu sonuçların yönünü birbirleriyle ilişkilendirip yorumlayabildiği, bağımsız değişkendeki değişimin yönünü ve belirli sınırlar dahilinde bağımsız değişkene olan etkisini sayı/sembol kullanarak ifade edebildiği ve değişkenler arasındaki ilişkiyi ifade etmek için kullandığı sayı/sembolleri manipüle edebildiği görülmüştür. Araştırmaya katılan diğer katılımcılardan farklı olarak bu katılımcının sonuç bulmaya yönelirken bunu fonksiyon kavramındaki girdi-çıktı kavramlarını da geri çağırarak ilişkiler üzerinden yapmaya çalıştığı gözlenmiştir. Katılımcının, problemlerin çözüm süreci boyunca değişkenlerin neyi temsil ettiğini ifade ettiği, neye değişken ataması gerektiğini belirttiği ve ortaya çıkan değerleri yorumlayabilmek adına fonksiyonun hangi tanım kümesinin görüntülerine bakması gerektiğinin farkında olduğu görülmüştür. Alternatif çözüm yolları kendisinden istendiğinde ise yine kendine ait yönergeleri kullanıp farklı çözümlere yöneldiği ortaya çıkmıştır. Şerife'nin, problemler boyunca önceliğini cebirsel ifadeler kullanıp çözüme değişkenler ve onlar arasındaki ilişkiyi kullanarak başladığı, cebirsel ifadelerin fonksiyonun hangi sınır değerleri içerisinde nasıl değişkenlik göstereceğini anlamaya çalıştığı durumlarda seçtiği özel örneklerle sınır değerleri belirlemeye çalıştığı gözlenmiştir. Fonksiyonun, kovaryasyonel ilişkiyi belirli sınırlar ve değişkenler üzerinden gösterilebileceği problemde tam ve doğru sonuca ulaşamamış olsa dahi bu süreçte değişkenleri bilinçli olarak atayabilmesi, farklı sınır değerleri üzerinden ilişkilendirme yapıp bu ilişkinin yönüyle birlikte önerilerde bulunabilmesi ve kullandığı cebirsel yapıdaki matematiksel ifadelerle sembolik manipülasyon yapabilmesi Şerife'yi araştırmadaki diğer katılımcılardan ayıran özellikler olarak öne çıkmıştır. Katılımcının birden fazla değişken kullanımında sorun yaşamadığı ve kullandığı bağımlı-bağımsız değişkenlerin kurduğu eşitlikte birbirlerini nasıl etkileyebileceğini anlamlı bir biçimde gösterebildiği görülmüştür. Çözüm sürecinde katılımcılara zor gelen problemde ise diğer katılımcılardan farklı olarak tek ve net bir sonuç için yorum yapmak yerine tanım kümesinin sınır değerlerini birbirleriyle ilişkilendirmesi daha kolay olacak şekilde vermenin işleri kolaylaştıracağı önerisinde bulunarak entelektüel ihtiyacının nasıl karşılandığını problem çözme zihinsel eylemi üzerinden ortaya koymuştur.

Düşünme Yolu 3'e sahip olan Şerife'nin, problemleri kendi bağlamında düşündüğü ve geçmiş yaşam deneyimlerini sorunun bağlamına dahil etmediği gözlenmiştir. Bu durumu, bağlamın katılımcıların çözümlerini etkileyip etkilemeyeceğine odaklanılan problemde de her şeyin açık bir şekilde verildiğini ve bunun dışında ekstra bir şeyler biliyor olmasının çözümü kolaylaştırmayacağını belirterek ortaya koyduğu görülmüştür.

Şerife'nin yaptıklarını doğrulamaya yönlendirilme olmadan yöneldiği görülmüş, bu süreçte de ilişkiler üzerinden yaptığı doğrulamalarında kendiliğinden düzeltmeler yaptığı gözlenmiştir. Çalışmada, doğrulamalarını yaparken anlamlı özel örnekleri kullanarak deneme yanılmadan da faydalanıp nicelikler arasındaki ilişkileri belirterek analitik doğrulamalarını tamamladığı görülmüştür.

#### 4.1.1.1. *Kovaryasyonel düşünme düzeylerine yönelik sonuçlar*

Araştırmadaki katılımcıların kovaryasyonel düşünme düzeyleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

**Tablo 4. 1.** *Kovaryasyonel düşünce düzeyi tablosu*

| Katılımcı | Kovaryasyonel Düşünme Düzeyi |
|---|---|
| **Celile** | Zihinsel Eylem 0 Düzeyi |
| **Mine** | Zihinsel Eylem 0 Düzeyi |
| **Yasir** | Zihinsel Eylem 0 Düzeyi |
| **Emrah** | Zihinsel Eylem 1 Düzeyi |
| **Saffet** | Zihinsel Eylem 1 Düzeyi |
| **Abdi** | Zihinsel Eylem 2 Düzeyi |
| **Oğulcan** | Zihinsel Eylem 2 Düzeyi |
| **Orhun** | Zihinsel Eylem 2 Düzeyi |
| **Habibe** | Zihinsel Eylem 2 Düzeyi |
| **Şerife** | Zihinsel Eylem 3 Düzeyi |

Tablo 4.1'den görüldüğü gibi katılımcıların kovaryasyonel ilişkiyi görme, bunların yönünü belirleyebilme, genellemelerinde cebirsel ifadeyi oluşturabilme, bağımlı-bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi sınırlarıyla beraber koordine edebilme, kullandıkları sayı/sembolleri manipüle edebilme açılarından sınıflandırıldığında 10 katılımcıdan yalnızca birinin istenen zihinsel eylem düzeyine ulaşabildiği, buna karşılık üç katılımcının ise herhangi bir Zihinsel Eylem Düzeyinde bulunmadığı görülmüştür. Zihinsel eylem 1 ve 2 düzeyindeki katılımcıların ise; farklı problem türlerinde cebirsel ifadeler kullandıkları ve hatta genellemeleri de bazen yapabilmiş olmalarına rağmen değişkenlerin kullanımında ve değişkenler arasındaki ilişkileri belirleyebilmekte sorunlar yaşadığı ortaya çıkmıştır.

Zihinsel Eylem Düzeyi 0 olarak düşünülen katılımcıların (Celile, Mine, Yasir) problemlerde değişken atama ve onları kullanabilmekte zorlandıkları, problemlerin çözümüne dair seçtikleri özel örnekleri rastgele belirledikleri, problemde kendisinden istenen soruların cevaplarını verebilmiş olsalar dahi veriler arasındaki kovaryasyonel ilişkiyi göremedikleri, matematiksel sembol ve bilinmeyen kullanımına yönlendirme olmadan geçmedikleri, verdikleri cevapları açıklamaları istendiğinde bunu sıklıkla problemi tekrar okuyup yazdıklarını kontrol ederek yaptıkları ve çoklukların birbirlerini etkileyip etkilemeyeceğine odaklanmadıkları görülmüştür. Bu durumdaki katılımcıların Zihinsel Eylem Düzeyi 1'deki davranışları ortaya koyamadığı görüldüğü için Düşünme Yolu 1'de yer almalarına rağmen zihinsel eylem düzeyleri 0 olarak belirlenmiştir.

Bu düzeydeki katılımcıların yaptıklarını doğrulamaları istendiğinde kendisinden istenen belirli bir adım sayısına ya da değere kadar ilişkileri göz önünde bulundurmadan uzun çizimler ve gösterimler üzerinden sonuç odaklı düşündükleri gözlenmiştir. Katılımcılardan açıkça bir kural/gösterim istenen problemde genellemeye adım sayıları ve ortaya çıkan değerler üzerinden ulaştıkları, adım sayısının etki edebileceği başka değerler ve bunlar arasındaki ilişkiye odaklanmadıkları ortaya çıkmıştır. Kendilerini matematiksel olarak ifade edemeyeceklerini düşündükleri kısımlarda da yine sonucu bulmaya odaklı ana dilde cümleler yazdıkları ve kendilerine matematiksel ifadeleri organize etmede güvenmediklerini sık sık söyledikleri görülmüştür. Birden fazla değişken kullanımı ve bunlar arasındaki ilişkinin gözlendiği problemde de iki katılımcının tüm yönlendirmelere rağmen birden fazla değişkeni kullanmadığı, kullanan katılımcının ise değişkenlerin ne anlam taşıdığını ifade edemediği ortaya çıkmıştır.

Zihinsel Eylem Düzeyi 0 olarak düşünülen katılımcılardan birinin (Yasir) araştırmanın ilk problemi olan futbol sorusunda geçmiş yaşam deneyimlerinden yola çıkarak daha üst eylem düzeyi davranışları sergilediği, ilişkileri ifade etme noktasında anlamlı veriler sunduğu görülmüştür. Katılımcıya problemin bağlamıyla ilgili sorular yöneltildiğinde ise bu durumun daha önce futbol bağlamına yakın olmasından kaynaklanabileceği ihtimali üzerinde durulmuş ve araştırmanın diğer üç probleminde kovaryasyonel ilişkiye dair hiçbir söylem veya gösterimde bulunmamış olması bu durumu destekler nitelikte ortaya çıkmıştır.

Zihinsel Eylem Düzeyi 1 olarak düşünülen iki katılımcının (Emrah, Yasir) düzeyi 0 olarak görülen katılımcılara göre problemlerde seçilen örnekleri ilişkileri görmelerine yardımcı anlamlı olarak seçmeye çalıştıkları, değişken kullanımında ve onları manipüle etmede sorunlar yaşadıkları, matematiksel sayı/sembol kullanımında zorlanacaklarını düşündükleri problemde ana dille kendini ifade etme yoluna başvurdukları, genellemeye ise ilişkiler üzerinden değil sonuç odaklı gitmeye çalıştıkları görülmüştür.

Zihinsel Eylem Düzeyi 1'de yer alan katılımcıların, birden fazla değişken kullanım yöntemine geçmede sorun yaşamadıkları ancak değişkenler arasındaki kovaryasyonel ilişkiyi de ifade edemedikleri ortaya çıkmıştır. Kendilerinden kesin bir sonuç değil de yorum isteyen problemde katılımcıların sınır değerleri seçerken zorlandıkları ve problemi değiştirme önerisinde de kesin bir değer için yorum yapmanın daha kolay olduğunu ifade ettikleri görülmüştür. Bu durum katılımcıların sonuç odaklı düşündüklerini ve problemde bağımlı-bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiye odaklanmamaları durumunu ortaya çıkarmıştır. Her iki katılımcı da yapamadıklarını düşündükleri problemlerin ardından kendilerini yetersiz hissettiklerini ve problemi çözmek için gerekli bilgiye sahip olmadıklarını belirtmişlerdir. Yine bu durum da araştırmada sonuca ulaşamamanın getirdiği yetersizlik duygusu olarak düşünülmüştür.

Zihinsel Eylem Düzeyi 2 olarak düşünülen katılımcıların (Abdi, Oğulcan, Orhun, Habibe) ise araştırmada bir veri setini oluştururken burada ortaya çıkan değerlerin diğer değerlerle olan ilişkilerine bakmaya çalıştıkları, değişkenlerin değerlerine odaklandıkları sorularda problemde verilen sınırlarla anlamlı olabilecek özel örnekler kullandıkları görülmüştür.

Bu düzeydeki katılımcılardan ikisi (Oğulcan, Orhun) verilen değerlerle anlamlı ilişki kurabildikleri problemlerde kendilerine özgü farklı çözüm önerilerinde bulunabilirken, kovaryasyonel ilişkiyi ve onun yönünü net olarak ortaya koymaları beklenen problemlerde matematiksel sayı/sembol kullanımında ve onları manipüle etmekte zorlandıkları görülmüştür. Bu eylem düzeyinde düşünülen diğer iki katılımcı (Abdi, Habibe) ise problemleri ilk okuyuşta anlamakta zorlanmış ve bu katılımcıların farklı okuyuşlarda farklı sonuçlar çıkardıkları ortaya çıkmıştır. Tüm eylem gruplarında olduğu gibi bu grupta yer alan katılımcıların da kendilerinden kesin bir sonuç değil de belirli ilişkileri içinde barındıran bir yorum istenen problemlerde oldukça zorlandıkları, problemleri ilişkiler üzerine kurgulayamadıkları ve kesin bir sonuca göre yorum yapma eğiliminde oldukları net bir biçimde görülmüştür.

Zihinsel Eylem Düzeyi 2'deki katılımcıların cebirsel gösterim yolunu tercih etmede tereddüt etmedikleri ancak süreç içerisinde matematiksel işlem becerilerinde ve sembolik manipülasyon yapmada sorun yaşadıkları ortaya çıkmıştır. Katılımcıların genellemeye ulaştıkları soruda bile bağımlı-bağımsız değişkeni atarken, onları yorumlarken ve ilişkileri gösterirken bir anlam bütünlüğü içerisinde ilerlemedikleri görülmüştür. Genellemelerini kendilerinden istenilen sonuç üzerine inşa ettikleri ve problemdeki şıkların cevaplarına odaklandıkları belirlenmiştir. Bu düzeydeki tüm katılımcıların kendilerinden açıkça genelleme istenen karo probleminde verilen görsellerden faydalandıkları ve hatta bu görsel üzerinden alternatif çözüm önerilerinde bulunabildikleri de görülmüştür. Katılımcıların tamamının ise alternatif çözüm önerilerinde eski bilgilerini geri çağırmaya çalıştıkları ve bunu yaparken de kendilerine ait olmayan yönergeler üzerinden hareket ettikleri ve sonuç olarak çözüm önerilerinin genel anlamıyla yarıda kaldığı ortaya çıkmıştır. Katılımcılardan yaptıklarını doğrulamaları istendiğinde de deneme-yanılma yolunu sıklıkla tercih ettikleri ve ilişkiler üzerine yorum yapmadıkları gözlenmiştir.

Zihinsel Eylem Düzeyi 2'deki katılımcıların üçünün (Abdi, Orhun, Habibe), birden fazla değişken kullanımı ve onlar arasındaki ilişkiye odaklanılan problemde değişken kullanımında sorun yaşamadığı ve değişkenlerin neyi temsil ettiğini, birbirlerini nasıl etkilediklerini açıklayabildikleri görülmüştür. Katılımcılardan birinin (Oğulcan) ise, birden fazla değişken kullanımı gerektiren soruda tek değişken kullanarak çoklukların birbiri arasındaki ilişkiyi ana dille ifade etmeye çalıştığı belirlenmiştir. Aynı katılımcının konser probleminde geçmiş yaşam deneyimlerden bağımsız düşünemeyerek çoklukların değişimini anlamlandırabilmesine rağmen kapasitenin değişmesini mantıksız bulduğu ve sürekli onu sabitleme çabasında bulunduğu gözlenmiştir.

Bu düzeydeki üç katılımcının (Abdi, Oğulcan, Habibe) belirli sınırlar içerisinde ilişkiyi ifade etmeleri beklenen tişört sorusunda değişken ve matematiksel sayı/sembol kullanımlarında oldukça zorlandıkları ve tüm yönlendirmelere rağmen ilişkileri ana dille veya cebirsel olarak ifade edemedikleri görülmüştür. Bir katılımcının (Orhun) ise, yönlendirmeler yardımıyla cebirsel olarak tişört sorusunu ifade etmeye çalıştığı, bunu yaparken sınır değerleri de göz önünde bulundurduğu ancak yazdığı cebirsel ifadelerin neyi temsil ettiği noktasında sorunlar yaşadığı ve ilişkiler üzerine herhangi bir karşılaştırma yoluna gitmediği görülmüştür. Bunun sonucunda da probleme dair herhangi bir öneri getiremediği ve cebirsel ifadelerini anlamlandıramadığı ortaya çıkmıştır. Düzey 2'deki katılımcıların ilişkilere odaklanabilseler dahi farklı durumlar ve sınırlar içinde yorum yapmakta zorlandıkları, geçmiş yaşam deneyimleri ve probleme ait olmayan durumları problemlerle birleştirebildikleri, sembolik manipülasyon yapmakta sorun yaşadıkları ilişkilerdeki ve değişimin yönünü ifade edemedikleri sonuçları genel anlamıyla belirlenmiştir.

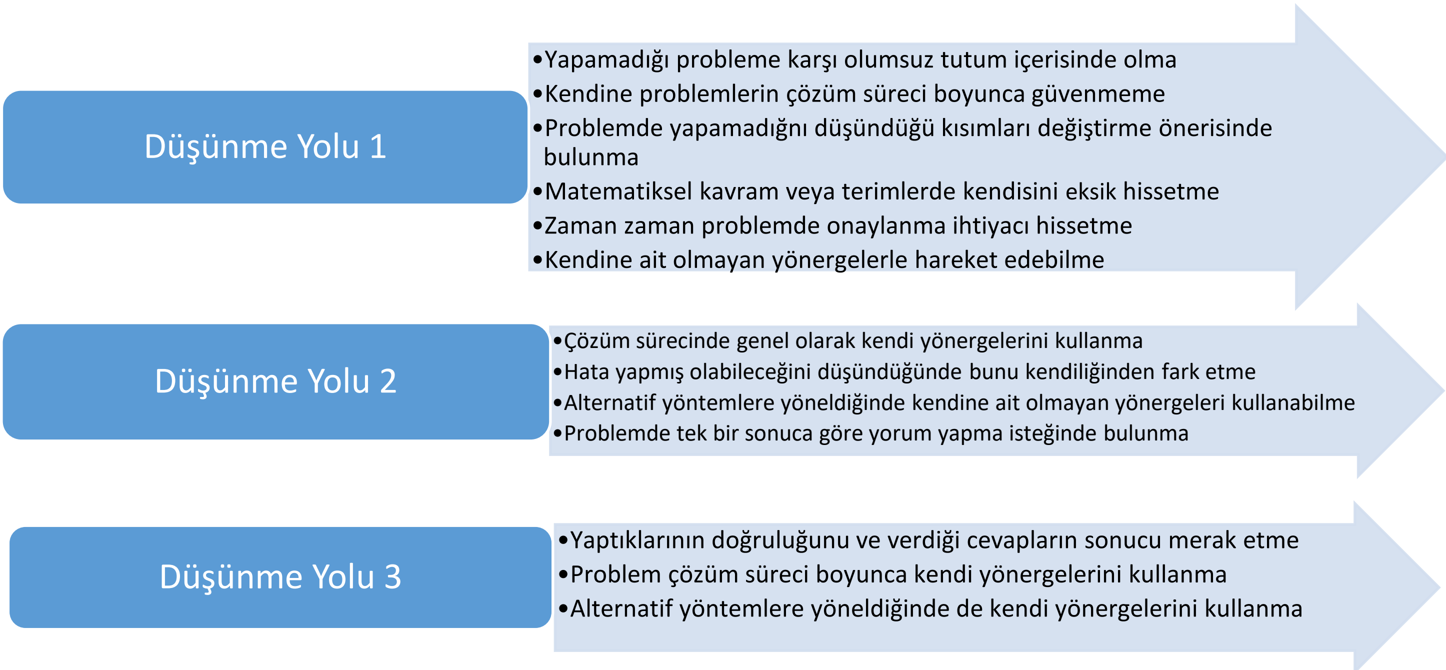
Araştırmada Zihinsel Eylem 3 düzeyinde düşünülen sadece bir katılımcı (Şerife) yer almış ve bu katılımcının bir veri setinin sonuçlarını bağlamdan bağımsız olarak diğerlerinin sonuçlarıyla bir bütün olarak ilişkilendirebildiği, bu ilişkinin yönünü sözel ve sayısal olarak ifade edebildiği, bağımlı ve bağımsız değişkenlerin arasındaki ilişkileri anlamlı değerler için seçip kullanabildiği ve bunların yönünü de sayı/sembol kullanarak ifade edebildiği, tüm cebirsel ifadelerinde de sembolik manipülasyon yapabildiği gözlenmiştir.

Şerife, kontrol sürecinde kendi yönergelerini oluşturmuş, kendine özgü sembol ve simgeleriyle ilerleyip hata yaptığı yerlere sıklıkla kendiliğinden geri gelmiştir. Farklı problemlerde farklı doğrulama yollarını kullandığı, deneme-yanılma yöntemini de sıklıkla uyguladığı ama analitik olarak sözel de olsa yaptıklarını doğrulamaya çalıştığı görülmüştür. Problemleri kendi bağlamında düşünebildiği ve geçmiş yaşam deneyimlerini çözüm yollarına yansıtmadan kendisinden ne isteniyorsa ona odaklanabildiği gözlenmiştir. Tüm problemler boyunca katılımcının yaptıklarının doğru olup olmadığını merak ettiği ve bunu sık sık dile getirdiği görülmüştür.

Zihinsel Eylem Düzeyi 3 olarak düşünülen Şerife'nin araştırmanın ilk problemi olan futbol sorusunda bağlama yakın olmadığı görülmesine rağmen problemde bağlama yakın olarak düşünülen katılımcılar gibi futbol terimlerini isimlerini bilmeden kontrol sürecinde oluşturabildiği, problem boyunca net cevaplar verdiği ve cevaplarını kendisinin kontrol ettiği gözlenmiştir. Kovaryasyonel ilişkiyi ifade etmesi beklenen tişört sorusunda da anlamlı özel örnekler kullanıp ilişkileri fark etmeye çalıştığı, sonrasında ise fonksiyon kavramının da geri çağırılmasıyla sınır değerler için cebirsel ifadeler oluşturabildiği ve bu ifadelerden anlamlı sınır değerler için ilişkileri yorumlayabildiği görülmüştür. Süreç içerisinde sembolik manipülasyon yaparak kendisini net bir biçimde ifade edebildiği, bağımlı ve bağımsız değişkenleri nelere atadığını ve bunlardan neleri bulmak istediğini gösterebildiği gözlenmiştir. Şerife de tıpkı diğer katılımcılar gibi fonksiyonun tanım kümesindeki farklı değerler için oluşan görüntü kümelerindeki ilişkiyi tam ve net biçimde ifade edememiştir. Ancak kullandığı değişkenler ve kendisini zaman zaman sözel zaman zaman cebirsel olarak ifade etme şekliyle birlikte problemin görüntü kümelerini karşılaştırması beklenen kısımda ilişkiye dayalı önerilerde bulunabiliyor olması, araştırma boyunca genellemelerini değişkenlerden yola çıkıp ilişkiler üzerine oluşturabiliyor olması, farklı değişkenler arasındaki ilişkilerin yönünü de ifade edebiliyor olması, doğrulamalarını yaparken ilişkiler üzerine anlamlı sonuçlar çıkarabiliyor olması onun Zihinsel Eylem Düzeyi 3'te değerlendirilmesine neden olmuştur.

#### 4.1.1.2. *Problem çözüm sürecindeki inançlara yönelik sonuçlar*

Katılımcıların yapılan görüşmelerde ortaya çıkan düşünme yollarıyla problemlerin çözüm sürecine ilişkin inançlarını gösterir sonuçlar aşağıda belirtilmiştir.




**Şekil 4.2.** *Katılımcıların düşünme yolları ve problemlerin çözüm sürecine ilişkin inançları*

Katılımcıların araştırma boyunca verdikleri cevaplardan problem çözüm sürecindeki inançlarına bakıldığında hemen hemen hepsinin yapamadıklarını düşündükleri problemleri sevmediklerini ve bu problemlerin de zor olduğunu ifade ettikleri görülmüştür. Hatta katılımcılardan birine (Yasir) problemde ne hissettiği sorulduğunda verdiği cevaplar doğru ise soruyu sevmiş olabileceğini söylediği görülmüş, bu da katılımcıların sonuç odaklı düşündükleri ve matematiğe karşı olan tutumlarının matematiği yapıp yapamaması sonucuyla orantılı olması durumuna bir işaret olmuştur. Katılımcıların problemlerde zorlanma sebeplerini zaman zaman matematiksel bilgi ve kavramlardaki eksikliklerine dayandırdığı da görülmüştür. Bu durumun katılımcılarda olumsuz bir tavra yol açtığı ve problemi çözmeye isteksiz olma, soruya karşı umutsuzluk hissetme, kendisini ifade edemediğini düşünme gibi sonuçlar ortaya çıkardığı görülmüştür.

Katılımcılardan zihinsel eylem 2 ve 3.düzeyde olanların genellikle sorularda kendi yönergelerini kullandıkları ve problemde çözüm arayışına gittikleri görülürken Zihinsel Eylem Düzeyi 1 ve 0 olanların kendilerine ait olmayan yönergeleri geri çağırmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Kendi yönergelerini kullanıp problemde ilerlemeye çalışan katılımcıların hatalarını daha kısa sürede bulduğu ve bilgilerini daha rahat biçimde organize ettiği görülmüştür. Kendilerine ait olmayan yönergeleri kullanan katılımcıların ise yönlendirilme ve onaylanma ihtiyacı duyduğu aynı zamanda da bu süreçte kendilerine güvenmedikleri ortaya çıkmıştır. Bununla bağlantılı olarak katılımcılara problemi daha farklı nasıl yapabilecekleri sorulduğunda da yine geçmiş bilgilerini geri çağırmaya çalışarak çözüm üretmeye çalıştıkları, bu süreçte kendilerine ait olmayan yönergelere yöneldikleri görülmüş ve çoğunlukla alternatif çözüm önerileri yarıda kalmıştır.

Katılımcılara problemde neleri değiştirmek istedikleri sorulduğunda gelen cevaplar ikiye ayrılmış ve katılımcının problemi yapıp yapamadığı durumuna göre farklılık göstermiştir. Problemi çözebildiklerini düşündüklerinde katılımcılar, soruyu nasıl zorlaştırabileceklerine odaklanırlarken çözemediklerini düşündükleri sorularda bu durum zorlandıkları kısmı ortadan kaldırma şeklinde değişkenlik göstermiştir. Katılımcılardan; problemin sınırlarını eşitlemek, yüzde kısmını ortadan kaldırmak, bir şeyleri sabit olarak vermek, verilerin tamamını açıkça belirtmek gibi öneriler, yapamadıkları sorularda gelmiştir. Problemlerde kovaryasyonel ilişkiyi göremediklerinde, onların bu ilişkiyi görmesini sağlayacak şartları yerine getirmek için soruyu değiştirme önerilerinde bulunduğu ortaya çıkmıştır. Araştırmada kullanılan bir problemde (tişört) katılımcılardan kesin bir sonuç yerine bir öneride bulunmaları istenmiş ve tüm katılımcıların bu durumda zorlandıkları görülmüştür. 10 katılımcıdan hemen hemen hepsinin soruda bir kesinlik olmaması durumundan rahatsızlık duyduğu ve soruyu kesinleştirecek şekilde bir öneri getirdikleri görülmüştür. Bu durum da katılımcıların birbirlerine göre değişen durumları düşünmekte zorlandıkları, ilişkiyi sabit bir değer veya aralık üzerinden yapma eğiliminde oldukları sonucunu ortaya çıkarmıştır. Probleme kesin ve tek bir cevap verilemiyor olması, cevabın farklı değerler için değişebiliyor olması araştırmada en çok zorlanılan kısım olarak ön plana çıkmıştır.

Katılımcılardan dördünün (Yasir, Saffet, Emrah, Oğulcan) problemde olmayan bir gerçek hayat durumuyla problemi beraber düşündüğü ve çözümüne bu gerçek hayat durumunu dahil ettiği görülmüştür. Bu katılımcılardan ilki (Emrah) kendisine yöneltilen futbol sorusunda problemin içeriğinde böyle bir bilgi olmamasına rağmen bir takım diğerini yenerse, yenilen takım da üçüncü başka bir takımı yenerse ilk takım üçüncüyü yenmiştir düşüncesine ulaşmış ve onların aralarında maç yapılıp yapılmadığına bakmaya gerek duymamıştır. Katılımcılardan diğer üçü (Yasir, Saffet, Oğulcan) de gerçek hayatta bildiği bir durumdan yola çıkıp sorulan konser sorusunda farklı inançları problemin bağlamına dahil etmişlerdir. Katılımcılardan biri (Saffet) bilet fiyatının konsere gelecek kişi sayısını doğrudan etkileyeceğini düşünmüş ve bir şeyleri sabit tutma eğiliminde bulunmuş, diğeri (Yasir) kişi sayısı arttıkça yapılacak olan harcamanın da artacağına odaklanmış ve iki değişken arasında bu durumu göz önünde bulundurup bir ilişki arama yoluna gitmiş, sonuncusu (Oğulşcan) ise bir konserde alan belirli olacağından kapasitenin değişemeyeceği düşüncesinden yola çıkıp ilişkileri ararken kapasiteyi sabitleme yoluna gitmiştir. Bu durum günlük hayat durumlarının katılımcıların çözümlerine olan etkisini ortaya koymuş ve problemin bağlamından farklı durumları çözümlerine dahil ettiklerini göstermiştir.

#### 4.1.1.3. *Doğrulama yollarına yönelik sonuçlar*

Katılımcıların doğrulama yollarının nasıl farklılaştığını gösterir tablo aşağıda sunulmuştur.

**Tablo 4. 2.** *Doğrulama yolları tablosu*

| Katılımcı | Doğrulama Yolları |
|---|---|
| **Celile** | Dışsal Doğrulama Yolu |
| **Mine** | Dışsal Doğrulama Yolu |
| **Yasir** | Dışsal Doğrulama Yolu |
| **Emrah** | Dışsal Doğrulama Yolu |
| **Saffet** | Deneysel Doğrulama Yolu |
| **Abdi** | Deneysel Doğrulama Yolu |
| **Oğulcan** | Deneysel Doğrulama Yolu |
| **Orhun** | Deneysel Doğrulama Yolu |
| **Habibe** | Deneysel Doğrulama Yolu |
| **Şerife** | Analitik Doğrulama Yolu |

Tablo 4.2'den görüldüğü gibi katılımcıların doğrulama yolları incelendiğinde, kovaryasyonel düşünme düzeyi olarak 0.düzeyde olanların tamamının dışsal doğrulama yoluna sahip oldukları, 1.düzeyde olanlardan da birinin (Emrah) dışsal doğrulama yoluna sahip olduğu, 2.düzeyde olanların ise deneysel doğrulama yolunu kullandığı ve katılımcıların sadece birinin (Şerife) analitik doğrulama yoluna sahip olduğu görülmüştür. Yalnızca kovaryasyonel düşünme düzeyi 3 olarak belirlenen katılımcının istendik doğrulama yolu olan analitik doğrulamaya sahip olduğu gözlenmiştir.

Araştırma boyunca katılımcıların verdiği cevaplar göz önünde bulundurulduğunda dışsal doğrulama yoluna sahip olanların genellikle yaptıklarını doğrulama ihtiyacı hissetmediği, çözüm sürecinde kendi yönergelerini sıklıkla kullanmadığı, hata yapmış olma ihtimallerine karşı bir kontrol süreci geliştirmediği görülmüştür. Katılımcıların problemleri okuduktan sonra herhangi bir kavrama dayandırmadan çözüme sıklıkla tahmin ederek başladıkları da gözlenmiştir. Aynı katılımcılardan alternatif bir çözüm istendiğinde eski bilgilerini geri çağırmaya çalışarak bir yöntem aradıkları, bunu yaparken de kendilerine ait olmayan yönergeleri kullandıkları ortaya çıkmıştır. Dışsal doğrulama yoluna sahip katılımcıların deneme-yanılmayı da kullandıkları ancak seçtiği örneklerin rasgele olacak şekilde belirlediği görülmüştür. Katılımcıların ortak olarak değişken kullanımında ve değişkenlerin birbiri arasındaki ilişkileri görme ve ifade etme noktalarında sorunlar yaşadığı tespit edilmiştir. Çözümlerini nasıl doğrulayacakları sorgulandığında ilk olarak verileri tekrar okuyup yaptıkları çözümlerde hata olup olmadığına odaklandıkları ve hata görememeleri halinde doğru çözmüş olduklarına inandıkları görülmüştür.

Deneysel doğrulama yoluna sahip katılımcıların ise, kendilerinden yaptıklarını doğrulamaları istendiğinde anlamlı olabilecek örnekleri seçip belirli aralıklarda çözümü kontrol ettikleri ve çözümün belirli aralıklarda doğru olduğu takdirde her zaman doğru olacağına inandıkları görülmüştür. Bu katılımcılar dışsal doğrulama yolundan farklı olarak genellikle kendi yönergelerini kullanmışlar ancak doğrulama yaparken ilişkileri ifade etmekte zorlanmışlardır.

Analitik doğrulama yoluna sahip olduğu düşünülen katılımcının ise; problemler boyu kendi yönergelerini düzenli bir şekilde takip ettiği, kendisine özgü sembol ve işaretlemelerle problemlerin farklı kısımlarını kontrol ettiği ve ilişkileri gösterir doğrulamaları ifade edebildiği görülmüştür. Bu katılımcının problemlerin başından sonuna kadar yaptıklarının doğru olup olmadığını merak ettiği ve farklı yöntemlere yöneltilse dahi kendi yönergelerinden ayrılmadığı gözlenmiştir. Katılımcı, farklı problemlerde deneme-yanılma yöntemiyle doğrulamaya yönelse dahi kullandığı ifadelerde ortaya çıkan değişime odaklandığı ve neyi aradığının farkında olduğu görülmüştür. Katılımcının ayrıca farklı problem bağlamlarından etkilenmeden tüm sorularda problemi kendi bağlamıyla düşünüp analitik olarak yorum yapabildiği tespit edilmiştir.

Tüm katılımcıların doğrulama yolları beraber düşünüldüğünde, kovaryasyonel düşünme düzeyleri ile anlamlı bir ilişki olduğu ortaya çıkmıştır. Katılımcılardan sadece birinin bağlamına yakın olduğu futbol sorusunda analitik çerçeveden probleme bakabildiği ancak diğer problemlerde ilişkileri ifade etmekte zorlanıp belirli örnekler için gösterilmesinin doğrulama açısından yeterli olduğuna inandığı görülmüştür.

#### 4.1.2. Bağlamın öğrencilerin düşünme yollarına olan etkisi

Bu kısımda ikinci araştırma sorusu olan problem çözme sürecinde problemin bağlamının öğrencilerin düşünme yolları ile arasında bir ilişki olup olmadığına ve varsa nasıl bir ilişki olduğu sonuçlarına yer verilmiştir.

Araştırmada yapılan görüşmelerin sonucunda 10 katılımcının problemin bağlamına yakınlık derecesi aşağıdaki gibi kategorilere ayrıldığı görülmüştür. Katılımcıların bağlama yakınlık derecelerini gösterir tablo aşağıda sunulmuştur.

**Tablo 4. 3.** *Bağlama yakınlık derecesi tablosu*

| **Öğrenci** | **Bağlama Yakınlık Derecesi (0-1-2)** |
|---|---|
| **Celile** | 0 |
| **Mine** | 0 |
| **Yasir** | 2 |
| **Emrah** | 2 |
| **Saffet** | 2 |
| **Abdi** | 2 |
| **Oğulcan** | 1 |
| **Orhun** | 1 |
| **Habibe** | 2 |
| **Şerife** | 2 |

Tablo 4.3'ten anlaşılacağı gibi araştırmanın katılımcılarından ikisinin bağlama yakınlık düzeyinin '0', iki tanesinin '1', ve beşinin '2' düzeyinde olduğu görülmüştür. Araştırmanın ilk problemi olan futbol sorusu katılımcıların bağlamdan etkilenip etkilenmediği ve böyle bir etki varsa da bunun yönünü belirleme açısından önemli bir veri toplama aracı olarak ön plana çıkmıştır. Futbol sorusunda katılımcılardan gelen cevaplar incelendiğinde 10 katılımcıdan ikisinin bağlama yakın olmadığı, üçünün ise futbolun kuralları, futbolda puanlama biçimi, futbol bilgisi içeren şans veya bilgisayar oyunlarını, güncel futbol maçlarını ve programlarını takip etme sıklığı kavramlarından en az bir tanesine yakın olduğu, geriye kalan beşinin ise futbol bağlamına tamamen yakın olduğu sonucu ortaya çıkmıştır.

Bağlama yakın olmadığı gözlenen iki katılımcının (Celile, Mine) futbol sorusuna verdiği cevaplara bakıldığında aynı zamanda problem içerisindeki ilişkinin de görülebileceği takımların birbirleriyle birer maç yapması ve beş takımın maçlarını bir bütün halinde görme noktalarında sorunlar yaşadıkları ortaya çıkmıştır. Eldeki verileri bir bütün olarak görme ve birbirleriyle olan ilişkilerine odaklanma noktasında futbol bağlamına yakın olan (2.derece) öğrencilerin daha anlamlı veriler ortaya koydukları ve çözümlerini daha hızlı tamamladıkları görülmüştür. Tüm verilerin birbirleriyle ilişkilerini göstermesi açısından problemin metninde geçen tüm takımların birbirleriyle birer maç yapması cümlesi belirleyici etken olarak ön plana çıkmıştır. Verilerin birbirlerini etkiliyor olması ve hangi yönde etkilediklerini belirleyebilme noktasında bağlama yakın olmadığı düşünülen (0.derece) öğrencilerin zorlandıkları, cevaplarını net olarak veremedikleri ve zaman zaman tahmin etmeye dayalı çözümler ortaya koydukları görülmüştür.

Bağlama yakın olmadığı düşünülen katılımcıların ikisinin de Düşünme Yolu 1 düzeyine sahip olması dikkat çekmiştir. Bağlama yakınlık düzeyi 0 olan iki katılımcının (Celile, Mine) bağlam bilgisi içeren problemde de, fonksiyon bilgisi içeren problemlerle de ilişkilere odaklanamadıkları, yaptıklarının kontrol etme ihtiyacı duymadıkları ve sadece problemlerde kendilerinden istenen cevabı bulabilme çabasına girdikleri, bunu yaparken de hiçbir veriyi kullanmadan doğrudan problemi okuyarak cevabı tahmin ederek işe başladıkları görülmüştür. Her iki katılımcının da verilerin birbirleriyle ilişkisini görmeleri beklenen takımların birbiriyle birer maç yapması cümlesinde zorlandıkları ve öneri olarak da takımların tüm maçlarını tek tek vermeyi sundukları görülmüştür. Katılımcıların yaptıklarını doğrulama yoluna gitmedikleri ve bunu yönlendirmeyle yaptıklarında da problemdeki verileri tekrar okuyup kontrol etme davranışında bulundukları gözlenmiştir.

Araştırmada bağlama yakınlık derecesi 1 olarak düşünülen üç katılımcının (Oğulcan, Orhun, Şerife) yer aldığı görülmüştür. Bunlardan ilki olan Orhun'un verdiği cevaplardan; futbolu izlemeyi sevmediği, güncel olarak takip etmediği ancak futbol programları hakkında bilgisinin olduğu ve futbolda puan durumunu daha önce görmüş olduğu sonucuna varılmıştır. Bağlama yakınlık derecesi 1 olan bir diğer katılımcı Oğulcan'ın da futbol bağlamına ve terimlerine yakın olmadığı, ancak voleybol bağlamında puanlama ve eleme usulü oynanan turnuva bilgisine sahip olduğu görülmüştür. Bağlama yakınlık derecesi 1 olan son katılımcı olan Şerife'nin ise futbol oynamayı sevdiği, kavramlardan bazılarını bildiği, sık olmasa da maçları izlediği ancak futbolda puanlama ve kurallara dair bir fikrinin olmadığı ortaya çıkmıştır. Bağlama yakınlık derecesi 1 olan katılımcılardan Düşünme Yolu 2 olarak görülen Orhun ve Oğulcan'ın problemdeki ilişkiyi içinde barındıran takımların birbirleriyle birer kez maç yapması gerektiği cümlesini anlamakta zorlandığı ve bunu anlamlandırabilmek için farklı çabalar içerisine girdiği görülmüştür. Bağlama benzer yakınlık derecesinde yer alan ancak Düşünme Yolu 3'e sahip olan Şerife'nin ise her verinin birbiriyle ilişkilendirilmesi noktasında sorun yaşamadığı, kendi yönergelerini takip edebildiği, ilişkileri kendi sayı ve sembolleriyle ifade edebildiği ve problemde puanlamanın açıkça verilmiş olmasından, futbolda puanlama bilgisini önceden biliyor olmanın bu soruda işe yaramayacağını belirttiği görülmüştür. Bu düzeydeki katılımcılardan Düşünme Yolu 2 düzeyine sahip olanların doğrulamalarını deneysel ya da verileri kontrol ederek yaptıkları, bağlama yakın olmasa bile Düşünme Yolu 3 düzeyine ait olan katılımcının ise, analitik doğrulama yolunu futbol bağlamında sık kullanılan fikstür ve puan tablosu terimlerini kendince birleştirip ortaya koyarak oluşturduğu gözlenmiştir.

Oluşturduğu tabloda ilişkilerin hepsini net bir biçimde ortaya koyması ve yazdıklarını ifade edebiliyor oluşu dikkat çekmiştir. Bu düzeydeki tüm katılımcıların problemi değiştirme önerileri de bağlama olan yakınlıkları bakımından fikir vermiştir. Katılımcılardan biri (Oğulcan) bir takım daha eklemeyi, diğeri (Orhun) puanlamayı galibiyete üç puan değil de iki puan olacak şekilde düzenlemeyi, bir diğeri de (Şerife) takımlarının isimlerinin değiştirilmesini önererek problemdeki futbol bağlamının detaylarına hakim olmadıklarını göstermişlerdir.

Katılımcılardan beşinin futbol bağlamına yakın olduğu görülmüştür. Bu katılımcıların düşünme yolu düzeylerinde ise üç katılımcının 1.düzey, iki katılımcının 2.düzey olacak biçimde farklılaştığı gözlenmiştir. Bu katılımcıların futbol probleminde diğer problemlere göre kendilerini daha kolay ifade ettikleri, ilişkileri problemdeki terim ve kavramlara yakın olmalarından dolayı daha net gösterebildikleri görülmüştür. Ancak kendilerini net ifade etmiş olsalar bile beş bağlama yakın katılımcının hepsinin bağlamdan olumlu olarak etkilenmedikleri ortaya çıkmıştır.

Düşünme Yolu 1 düzeyine sahip katılımcılardan Saffet ve Yasir'in bağlamdan olumlu olarak etkilendikleri, araştırmanın diğer problemlerinde göstermekte zorlandıkları ilişkileri ve o ilişkilerin yönünü bağlamın etkisiyle daha kolay ifade edebildikleri görülmüştür. Düşünme Yolu 1 ve hatta Kovaryasyonel Zihinsel Eylem Düzeyi 0 olarak düşünülen Yasir'in; futbolda puanlamayı içerir oyunlar oynamasından, şans oyunlarına dair fikrinin olmasından ve bağlama yabancı olmamasından dolayı araştırmadaki diğer problemlerde ortaya koyamadığı ilişkileri hızlı bir biçimde futbol sorusunda ortaya koyabildiği, daha üst düzey Kovaryasyonel Eylem Düzeyi davranışları sergilediği gözlenmiştir.

Düşünme Yolu 2'ye sahip oldukları düşünülen ve bağlama yakınlık derecesi 2 olan diğer iki katılımcının (Abdi, Habibe) da problemde kendilerini daha net ve hızlı ifade edebildikleri, ilişkileri göstermekte daha az zorlandıkları görülmüştür. Bağlama yakın katılımcılardan dördünün problemi tekrar okumaya ve verilerini kontrol etmeye ihtiyaç duyduğu, okumalarının ardından çeşitli düzenlemeler yaptığı gözlenirken birinin (Abdi) ise, verileri tek seferde anlamlandırıp problemde çözüm sürecine başladığı ve hatasız bir şekilde puanlamaları da tek seferde oluşturabildiği görülmüştür. Abdi'ye problemin son kısmında bağlama yönelik sorular sorulduğunda futbolu çok sevdiği, kurallarını iyi bildiği ve hatta futbolcu olmayı istediğini belirttiği ortaya çıkmıştır. Diğer problemlerde ilişkileri görmekte ve kendi yönergelerini takip etmekte zorlanmasına karşın bu problemde hatalarını kendisinin gördüğü ve hiçbir yönlendirme olmadan bu hataları düzeltme girişiminde bulunduğu görülmüştür. Futbolcu olmak isteyen katılımcı olan Abdi'nin problemde yaptıklarını doğrulaması istendiğinde ise takımların tek tek fikstürünü oluşturduğu ve puanlamalarını bu fikstür üzerinden hızlıca kontrol ettiği yani analitik doğrulama yoluna yöneldiği gözlenmiştir. Araştırmanın diğer problemlerinde ise Abdi'nin ilişkileri bu tarz net bir biçimde ortaya koyamadığı, cebirsel ifadeleri kullanabiliyor olmasına rağmen kovaryasyonel ilişkilere odaklanmadığı ortaya çıkmıştır. Bu da katılımcının bağlama yakın olmasının, problemin çözümünde ve ilişkileri otaya koymasında olumlu etkisinin bir sonucu olarak ön plana çıkmıştır.

Bağlama yakın olan bir diğer katılımcı Emrah'ın ise problemin çözüm sürecinde takımların maçlarının rövanşlı olarak verilmemesinin etkisi altında kaldığı gözlenmiştir. Katılımcı, soruda olmamasına rağmen geçmiş yaşam deneyimlerinden takımların birbirleriyle birer kez daha maç yapması düşüncesini probleme ilave etmiştir. Bunun nedenleri sorgulandığında ise takımların mutlaka ikişer maç yapması gerektiğini ifade ettiği görülmüştür. Aynı katılımcının yine problemde verilmemiş olmamasına rağmen bir A takımı, B takımını yeniyorsa B takımı da C takımını yeniyorsa o zaman A takımı, C takımını da yenmiştir düşüncesini ifade ettiği gözlenmiştir. Öğrencinin A takımıyla C takımının maç yapıp yapmamış olması durumundan bağımsız olarak bu düşüncesini ifade ettiği görülmüştür. Emrah'ın problem çözüm süreci takımların birbirleriyle sadece bir maç yapıyor olması durumundan fazlasıyla etkilenmiş ve tek maçlık bu turnuvada fikirlerini ortaya koymasını zorlaştırmıştır. Bu durum da öğrencinin takımların birbirleriyle ikişer maç yapıyor olması durumuna aşina olduğundan ve bu bağlamı sorunun bağlamıyla birleştirmesinden dolayı geçmiş yaşam deneyimlerinin problem çözümüne olumsuz bir etkisi olarak araştırmada dikkat çekmiştir.

Araştırmanın son problemi olan konser sorusunda da yine katılımcıların soruda olmayan durumları geçmiş yaşam deneyimlerinden etkilenerek çözümlerine ilave ettikleri görülmüştür. Bu katılımcılardan birinin (Yasir), geçmişte böyle bir durumu yaşadığı için bireyin bir miting alanında konuşma yaparken kişi sayısının artıyor olmasının yapılacak harcamaları da artıracak olması düşüncesiyle hareket ettiği ve bu sebeple kişi sayısı değişkenini diğer değişkenlerle tam olarak ilişkilendiremediği ortaya çıkmıştır. Problemde birden çok değişken kullanabiliyor olmasına rağmen bu değişkenlerin birbirleriyle olan ilişkilerinde problemde olmayan bir gerçek hayat durumunu da beraber düşündüğü ve bilet ücretini bir değişken değil de sabit olarak kullandığı görülmüştür. Yasir'in ilk problemde de bağlamdan etkilenen bir katılımcı olması dikkat çekmiştir. Yine bağlamdan etkilendiği görülen farklı iki katılımcının (Saffet, Oğulcan) da gerçek hayat durumlarını konser sorusunda problem bağlamına ilave edip çözümlerinde kullandıkları gözlenmiştir. Katılımcılardan biri (Saffet) geçmiş yaşam deneyimlerinden yola çıkıp bilet fiyatının gelecek kişi sayısını etkileyeceğini ifade etmiş ve bilet ücreti değişkenini bağımsız, stada gelecek kişi sayısını ise bu durumdan etkilenen bir bağımlı değişken olarak kullanma eğiliminde olduğu gözlenmiştir. Benzer şekilde, geçmiş yaşam deneyimlerinden etkilenen bir başka katılımcının (Oğulcan) da konser sorusunda farklı bir durumu tecrübe ettiği için çözümünde stadın kapasitesini bir değişken olarak düşünmekte zorlandığı gözlenmiş ve kapasitenin değişmeyeceğini düşünüp çözümünü bu duruma göre şekillendirdiği görülmüştür.

Sonuç olarak, katılımcıların düşünme yollarının, problemin bağlamından ve problemde olmayan kendilerine ait gerçek yaşam durumlarından etkilendiği ortaya çıkmıştır. Ancak bu etkinin her zaman katılımcının çözümüne olumlu olarak yansımaması dikkat çekmiştir. Bu durumun, problemin bağlamında yer almayan şartları probleme ilave etme ya da geçmiş yaşam deneyimlerinden etkilenip problemin ne istediğini tam olarak anlamlandıramama gibi olumsuz durumları ortaya çıkabiliyorken aynı zamanda problemin bağlamına yakın olduğu için kovaryasyonel ilişkileri daha hızlı ve net ifade edebilme gibi olumlu durumları da beraberinde getirdiği görülmüştür. Bunların da dışında tüm araştırma boyunca problemleri sadece kendi bağlamında düşünen ve geçmiş yaşam deneyimlerini de çözüme ilave etmeyen, sorudaki bağlama yakın olmasa da ilişkileri görüp ifade edebilen Düşünme Yolu 3'e sahip olan katılımcının (Şerife) da olması araştırmanın çeşitliliği açısından önemli bir sonuç olarak ortaya çıkmıştır.

#### 4.1.3. Katılımcıların matematik not ortalamalarının düşünme yollarıyla ilişkisi

Araştırmanın katılımcılarının 9 ve 10.sınıflardaki matematik not ortalamalarıyla düşünme yolları arasındaki ilişki tabloda gösterilmiştir.

**Tablo 4.4.** *Katılımcıların matematik not ortalamaları ve düşünme yolları*

| Katılımcı Adı | Matematik Not Ortalaması | Düşünme Yolu |
|---|---|---|
| **Şerife** | 87,714 | Düşünme Yolu 3 |
| **Celile** | 75,252 | Düşünme Yolu 1 |
| **Habibe** | 70,268 | Düşünme Yolu 2 |
| **Oğulcan** | 67,474 | Düşünme Yolu 2 |
| **Abdi** | 64,434 | Düşünme Yolu 2 |
| **Emrah** | 61,574 | Düşünme Yolu 1 |
| **Orhun** | 57,380 | Düşünme Yolu 2 |
| **Mine** | 54,292 | Düşünme Yolu 1 |
| **Saffet** | 38,234 | Düşünme Yolu 1 |
| **Yasir** | 33,600 | Düşünme Yolu 1 |

Tablo 4.4'ten de görüldüğü gibi katılımcıların düşünme yollarıyla matematik not ortalamalarına bakıldığında en yüksek ortalamaya sahip katılımcının (Şerife) Düşünme Yolu 3 düzeyinde bulunduğu ancak en yüksek ikinci ortalamaya sahip katılımcının (Celile) Düşünme Yolu 1 düzeyinde, Kovaryasyonel Eylem Becerisinin ise 0 düzeyinde olduğu görülmektedir. En düşük not ortalamasına sahip katılımcının (Yasir) Düşünme Yolu 1 düzeyinde bulunduğu da görülürken lise matematik not ortalamaları ile araştırmada ortaya çıkan düşünme yolları arasında doğrudan anlamlı bir ilişki bulunmadığı sonucu görülmüştür. Bu durumun nedenleri arasında farklı ortalamalardaki katılımcıların bağlamdan etkilenip etkilenmeme durumları, matematik derslerini bilgileri akılda tutma ve ilişkileri anlamlandırmadan sonuç odaklı düşünme gibi gerekçeler gösterilebilir. Öğrencilerin doğrulama yolları ve matematiğe olan inançları arasında da matematik not ortalamalarıyla doğrudan bağlantılı bir durum olmadığı gözlenmiştir.

### 4.2. Tartışma

Araştırmada, katılımcıların problem çözme zihinsel eylemi açısından problem çözme stratejileri, doğrulama yolları ve probleme dair inançları kapsamında üç kategoriye ayrılmaktadır. Bu kategorilerden Düşünme Yolu 1 ve Düşünme Yolu 2'de görülen katılımcıların entelektüel ihtiyaç olarak kendilerine problemin sonucunu bulabilmeyi gördükleri, Düşünme Yolu 3 olarak görülen katılımcının ise problemin çözümünü ve bu çözüm sırasında ortaya çıkan ilişkileri ifade edebilmeyi bir entelektüel ihtiyaç olarak gördüğü ortaya çıkmıştır. Entelektüel ihtiyacı, problemin sonucunu belirleme olarak gören katılımcıların yaptıklarının doğru olduğundan emin olma gereği hissetmedikleri, Park (2006) ve Li, Peng ve Song (2011)'in çalışmalarında da olduğu gibi, farklı çözüm yollarına yönelmeyi tercih etmedikleri ve farklı stratejileri üretmekte zorlandıkları görülürken, entelektüel ihtiyacı ortaya koyduğu çözüm stratejilerini açıklamak ve değişkenler arasındaki ilişkileri göstermek olarak gören katılımcının yaptıklarının sonucunu merak ettiği, kendiliğinden farklı çözüm yollarına yönelebildiği gözlenmiştir. Araştırmanın bu sonucu, çalışmaya dahil edilen 10 katılımcı olduğu düşünüldüğünde, bunlardan sadece birinin istendik düşünme yolu olarak kabul edilebilecek Düşünme Yolu 3'e sahip olması, dokuz katılımcının ise daha az istendik düşünme yolu olarak kabul edilebilecek Düşünme Yolu 1 ve 2'ye sahip olmaları durumuyla birlikte genel anlamda katılımcıların problem çözme süreçlerinde beklendik sonuçlara ulaşamadıkları çalışmaları destekler niteliktedir (Mills ve Holloway, 2013).

Bu araştırmada problem çözme zihinsel eylemine bağlı olarak katılımcıların problem çözme stratejileri incelenirken seçilen problemler fonksiyon kavramına dayanmakta olduğundan çözüm stratejisi kovaryasyonel düşünmeyi gerektirmiş ve sonuçlar Carlson vd.'nin (2002) geliştirdiği kovaryasyonel düşünme eylem düzeylerine göre yorumlanmıştır. Carlson ve arkadaşları, 2002 yılında yaptıkları araştırmada üniversite öğrencileriyle çalışarak zihinsel eylem düzeylerini beş kategoride incelerken, bu çalışmada katılımcıların lise düzeyleri de göz önüne alınarak eylem düzeyleri üç temel kategori altında toplanmıştır. Katılımcılar iki niceliğin eş zamanlı değişimini keşfetmeye başladıklarında, bu değişkenlerden birinin diğeri üzerinde nasıl bir etkiye sahip olacağını Carlson ve Oehrtman (2005) ve Carlson ve ark. (2002) çalışmalarında olduğu gibi düşünmeye ihtiyaç duymaktadırlar. Bu entelektüel ihtiyaç, çalışmada belirleyici unsur olarak kabul edilmiş ve katılımcıların kovaryasyonel zihinsel eylem düzeyleri buna göre üç kategoriye ayrılmıştır. Araştırmaya katılan üç katılımcının verdikleri cevaplardan

Zihinsel Eylem Düzeyi 1'deki davranışları da uygulamadıkları anlaşıldığından bu katılımcılar Zihinsel Eylem Düzeyi 0 olarak kabul edilmiştir. Warren'in 2005 yılında yaptığı çalışmada da katılımcılardan herhangi bir cevap alamadığı durumları farklı bir kategoride değerlendirdiği görülmektedir. Çalışmadaki diğer katılımcıların kovaryasyonel düşünme sürecinde ortaya koydukları davranışlara göre ikisinin Zihinsel Eylem Düzeyi 1'de, dördünün Zihinsel Eylem Düzeyi 2'de ve yalnızca birinin Zihinsel Eylem Düzeyi 3'te olduğu görülmüştür.

Katılımcıların kovaryasyonel düşünme düzeylerini belirlemede, genellemeye ilişkiler ve bağımlı bağımsız değişkenler üzerinden gidebilme, sabit artışlardan ya da görseldeki alan hesaplamalarından faydalanıp değişken kullanarak genelleme yapabilme, matematiksel sayı ve sembolleri manipüle edip bunları anlamlı kullanabilme gibi belirleyicilerden faydalanılmıştır. Kovaryasyonel Düşünme Düzeyi 0 olan katılımcıların kendilerinden istenen yakın adımdaki sonucu bulabilmek adına verilen şekli devam ettirme eğiliminde oldukları ve uzak pozisyondaki şeklin durumunu tahmin etmekte zorlandıkları görülmüştür. Araştırmanın bu sonucu Becker ve Rivera'nın 2005 yılında yaptıkları çalışmayla paralellik göstermektedir. Kovaryasyonel Düşünme Düzeyi 1 ve 2 olan katılımcıların ise, Warren (2005), Becker ve Riviera'nın (2005) çalışmalarında tek varyasyonel düşünme olarak isimlendirdiği öğrenci gruplarında olduğu gibi ilişkileri görüp anlamlı bir şekilde kullanmak yerine şekil ve şeklin pozisyonuna örüntü içerisindeki sabit bir artıştan faydalanarak genelleme yapabildikleri görülmüştür. Bu düzeydeki katılımcıların değişken kavramını Usiskin'in (1998) problem çözmedeki bilinmeyen gibi kullandıkları, Kovaryasyonel Düşünme Düzeyi 3'teki katılımcının ise, fonksiyonel ilişkideki bağımlı bağımsız değişken olarak değişkeni görebildiği ortaya çıkmıştır. Bu şekilde değişkeni bilinmeyen olarak kullanma durumunun, katılımcıların genellemeyi yapabilseler dahi araştırmada onlardan istenen niceliklerin birbirlerine göre anlık değişmelerini yorumlayabilmelerini zorlaştırdığı gözlenmiştir. Bu sonucu destekler nitelikte alanyazında çeşitli araştırmalar bulunmaktadır (Confrey ve Smith, 1994; Moss vd., 2008)

Araştırmada, veri setlerinin toplu halde verildiği ve içlerinden anlamlı olarak bağlantı kurabilecekleri durumlar ile birden fazla değişken kullanımı ve bu değişkenlerin aralarındaki ilişkileri görebilecekleri durumlar da katılımcılara sunulmuş ve kendilerinden bu durumu matematiksel olarak ifade etmeleri beklenmiştir. Veri setlerindeki nicelikler arasındaki ilişkinin birbirlerine bağlı olarak değişimlerini incelemesinde katılımcının kovaryasyonel düşünmesinin başlayacağı düşüncesi hedeflenmiştir (Kabael, 2016). Tek değişkenli problem çözümünün dışında birden fazla değişken kullanarak problemde verilen tüm değişkenlerin değişebileceği düşüncesinin katılımcıların tamamını zorladığı, bazı katılımcıların ise birden fazla değişkeni hiç kullanmadığı görülmüştür. Bu durum da Blanton ve Kaput (2004)'un tek değişkenli veri kümeleriyle genelleme yapmanın kovaryasyonel düşünmeyi olumsuz yönde etkilemesi durumunu destekler niteliktedir. Böyle bir sonuç da katılımcıların birden fazla bağımsız değişkeni düşünmek yerine bilişsel yüklerini azaltmak adına değişkenlerden yalnızca birinin nasıl değiştiğini anlama yoluna gittiği şeklinde de açıklanabilir (Carlson ve ark., 2002). Kovaryasyonel Düşünme Düzeyi 2'de yer alan katılımcıların değişken kullanımında sorun yaşamadıkları, gerektiğinde birden fazla değişkeni de probleme uygulayabildikleri görülmüş ancak Bezuska ve Kenney'nin (2008) çalışmasında olduğu gibi değişkenlerin neyi temsil ettiklerini oluşturdukları cebirsel ifadelerde açıklayamadıkları ya da kullandıkları ilk adımdaki sabiti de zaman zaman değişken sembolüyle gösterdikleri gözlenmiştir. Bunun sebebi olarak da katılımcıların sonuç odaklı düşünmesi ve süreç içerisinde kullandığı stratejileri ilişkileri kurmadan inşa etmesi olarak görülmektedir. Harel (2008a) de değişkenler arasındaki ilişkilerden yola çıkarak kural bulmayı süreç odaklı genelleme (process pattern generalisation) olarak tanımlamış ve katılımcıların odağının kuralı sonuçta istendiği şekline göre bulmaktan çok ilişkileri yorumlayarak bulma şeklinde olması gerektiğini belirtmiştir.

Katılımcıların doğrulama yollarına bakıldığında ise, Harel ve Sowder'in 1998 yılında yaptığı çalışmada olduğu gibi dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç farklı kategoriye ayrıldıkları görülmektedir. Kovaryasyonel Düşünme Düzeyi 0 olarak görülenlerin tamamının dışsal, 1 ve 2.düzeyde olanların neredeyse tamamının deneysel, 3.düzeyde olan katılımcının ise analitik doğrulama yoluna sahip olduğu gözlenmiştir. Dışsal doğrulama yoluna sahip olan katılımcıların problemin çözüm sürecinde onaylanma ihtiyacı hissettiği, yaptıklarına ve buldukları sonuçlara güvenmedikleri görülmüştür. Bu katılımcıların ilişkilendirmelerini daha çok otoritenin açıklamalarına göre yaptıkları ve ilişkilerin nedenini nasılını sorgulamadıkları ortaya çıkmıştır. Bu sonucun Gambrill'in 1999 yılında yaptığı araştırmasının bir sonucuyla benzerlik gösterdiği görülmektedir. Dışsal doğrulama yoluna sahip katılımcıların yaptıklarının doğru olup olmadığını merak etmediği ve kontrol sürecine kendilerinin girmediği gözlenmiştir. Çalışmada en çok (5) deneysel doğrulama yoluna sahip katılımcı olduğu ve bu katılımcıların doğrulamalarını yaparken özel olarak seçtiği örneklerin problemin şartlarını sağlaması halinde birkaç denemenin ardından yaptıklarının doğru olacağını düşündüğü anlaşılmıştır. Deneysel doğrulama yapan katılımcılar yönlendirmeler üzerine yaptıkları doğru birkaç denemenin ardından kendilerini ikna etmenin yeterli olacağını düşünüp karşıdakini ikna etmeye gereksinim duymamışlardır. Bu durum da Harel ve Sowder (1998)'in aslını öğrenme ve karşıdakini ikna etme süreçlerinin eksik geliştiğini gösterir niteliktedir. Deneysel doğrulama yapan katılımcılar, sonuçlarının doğru olduğunu birkaç hatta bazen sadece bir örnekle açıklamayı yeterli görmüş ve cebirsel ifadelerindeki değişkenlerin yerlerine belirli sayıları koyarak ya da sezgilerine dayanıp problemi tekrar okuyarak yaptıklarının doğru olduğunu Yıldız ve Şengül'ün (2017) çalışmasında olduğu gibi ifade etmişlerdir. Analitik doğrulama yoluna sahip katılımcı da zaman zaman doğrulamalarında özel örnekleri kullanmış olsa da örneklerinde bir bütünü ya da fonksiyonun tanım kümesindeki değerleri anlamlı bir şekilde seçtiği, belirli bir amaca yönelik bir yol izlediği ve tanımlarını sembolleştirdiği görülmüştür. Bu sonuç da yine Harel ve Sowder'in 1998 yılında öğrencilerin doğrulama yollarına üzerine yaptıkları araştırma sonuçlarıyla paralellik göstermektedir. Araştırmadaki 10 katılımcının dokuzunun dışsal veya deneysel doğrulama yoluna sahip olması ve yalnızca birinin analitik doğrulama şemasını kullandığı düşüldüğünde bu durum katılımcıların çoğunun dışsal veya deneysel doğrulama yollarını kullandığını gösteren geçmişte yapılan araştırmalarla benzerlik göstermektedir (Harel ve Sowder, 1998; 2003, İskenderoğlu, 2010).

Problemler boyunca katılımcılardan gelen cevaplara bakıldığında, katılımcıların Düşünme Yollarıyla probleme dair inançları arasında anlamlı farklılıklar olduğu gözlenmiştir. Bu durum Düşünme Yolu 1,2 ve 3'deki katılımcıların entelektüel ihtiyacının farklı olmasıyla birlikte düşünüldüğünde matematiksel inançların düşünme yollarında önemli bir yere sahip olduğu sonucunu ortaya çıkarmaktadır (Harel, 2008a; Schoenfeld, 1985). Schoenfeld (1985)'in öğrencilerin problem çözmelerini etkileyen faktörleri kaynaklar, heuristikler, kontrol ve inanç sistemi olarak incelediği çalışmasında olduğu gibi bu çalışmada da katılımcıların yapamadıklarını düşündükleri problemleri zor buldukları ve yapılamayan yerleri değiştirme önerilerinde bulundukları görülmüştür. Katılımcıların tamamının, sonucu tek ve net bir değer içermeyen problem durumlarına karşı zorlandıkları, olumsuz bir tutum içerisine girdikleri ve bu durumu değiştirmek için önerilerde bulundukları gözlenmiştir. Bu durum, Kızıltoprak'ın (2017) çalışma sonuçlarından birini destekler niteliktedir. Katılımcılardan Düşünme Yolu 1'e sahip olanların kendi yönergelerini takip etmediği, dışsal bir takım geri çağırmaya çalıştığı yönergelerle hareket edebilmeyi hatırlama gereksinimi duyduğu görülmüş ve bu katılımcıların problemlerde diğerlerine oranla daha fazla zorlandıkları, ilerleyemedikleri ortaya çıkmıştır. Düşünme Yolu 2'deki katılımcıların çoğunun ve Düşünme Yolu 3'teki katılımcının kendi yönergeleriyle hareket ettiği, hatalarını kendilerinin gördüğü, bilgilerini organize edebildiği gözlenmiştir. Schoenfeld'in (1985) de çalışmasında belirttiği gibi bu katılımcıların problemlerde kendilerine güvenli olduğu ve daha fazla ilerleyebildiği görülmüştür. Araştırmaya dahil olan katılımcılardan bir kısmının ise problemleri geçmiş yaşam deneyimleriyle ve gerçek hayat durumlarıyla beraber düşündüğü ve sorunun bağlamına dahil olmayan bilgileri soruya dahil edip cevaplarını bunlara göre şekillendirdiği görülmüştür. Bu durumda katılımcılar problem durumunu anlamakta zorlandıklarında ya da geçmiş yaşam deneyimleriyle birleştirdiklerinde Lim, Morera ve Tchoshanov'un (2009) ve Park'ın (2006) çalışmalarında olduğu gibi kişisel tercihlerini referans alıp problemi buna dayalı olarak yapma girişiminde bulunmuştur. Problemin sınırlılıklarına uymayıp gerçek yaşam deneyimleriyle birlikte düşünen katılımcıların doğrulama yollarında geri çağırmaya dayalı dışsal yöntemi de kullanıyor olması Lim ve arkadaşlarının (2009) çalışmasıyla benzer bu sonucu ortaya çıkarmıştır.

Araştırmanın ikinci alt probleminde bağlamın düşünme yollarına bir etkisinin olup olmadığı incelenmiştir. Katılımcılardan gelen cevaplara bakıldığında ise, bu durumun olumlu etki, olumsuz etki ve bir etkinin olmaması şeklinde üçe ayrıldığı görülmektedir. Katılımcılardan Düşünme Yolu 1 ve Düşünme Yolu 2'de yer alanlardan bağlamdan etkilenenler olduğu görülmüştür. Problemin bağlamının, iki katılımcıda kovaryasyonel ilişkileri sözel olarak ifade etmeyi ve doğrulama yolunu analitik olarak yapmayı olumlu yönde etkilediği görülmüştür. Bu sonucu destekler nitelikte araştırmalara alanyazında rastlanmaktadır (Hurst, 2007; Sáenz, 2009; Yanık, 2017). Ancak araştırmanın diğer problemlerinde katılımcıların zihinsel eylem düzeylerine bakıldığında ait oldukları eylem düzeylerinden daha üst düzey davranışları sadece bağlam bilgisinden faydalanarak çözebildikleri soruda sergiledikleri, diğer problemlerde kovaryasyonel ilişkiler ve nicelikler arasındaki anlık değişimle ilgili kendilerinden beklenen davranışları sergileyemedikleri görülmüştür. Bu durum, Carlson ve diğerlerinin (2002) sözde analitik davranış (psuedo-analytical behaviors) kavramıyla uyumluluk göstermektedir. Araştırmada yer alan bir katılımcının ise, diğerlerinden farklı olarak bağlamdan olumsuz etkilendiği görülmüştür. Katılımcı, geçmiş yaşam deneyimleri ve aşina olduğu futbol bağlamından etkilenerek problemde kendisinden isteneni uzun bir süre yapmayı reddetmiş ya da geçmiş yaşam deneyimlerinden aşina olduğu şekilde problemin çözümünü yapmaya devam etmiştir. Düşünme Yolu 1'de yer alan bu katılımcının araştırma süresince probleme ait olmayan geçmiş yaşam deneyimlerine bağlı verileri problemlere dahil edebildiği ve çözümünü bu duruma göre şekillendirdiği gözlenmiştir. Bu durum, katılımcının problemde kendisinden beklenen entelektüel ihtiyacın karşılanamamasının bir sonucu olarak çözüme kendisinin oluşturduğu ve aşina olduğu farklı bir problem durumundan gitmeye çalışması şeklinde yorumlanmıştır. Düşünme Yolu 3'te görülen katılımcı ise bağlama uzak olmamasına rağmen problemde bağlam bilgisine ihtiyaç duymadığını ve her şeyin kendisine açıkça verildiğini belirtip bağlamdan olumlu ya da olumsuz bir şekilde etkilenmeden kovaryasyonel ilişkileri ortaya koyabilmiştir. Bu sonuçlar da Pfannkuch ve Wild'in (2004) sadece bağlam bilgisiyle problemleri çözebilen katılımcılar olduğu gibi Langrall, Nisbet ve Mooney'in (2006) bağlam bilgisinden etkilenmeden doğrudan matematik bilgisiyle sonuca gidebilen katılımcılar olabileceği sonuçlarıyla paralellik göstermektedir.

### 4.3. Öneriler

Bu bölümde araştırma sonuçlarına dayalı olarak ileride yapılacak araştırmalara yönelik olarak geliştirilen öneriler sunulmaktadır.

- Bu çalışma, katılımcıların fonksiyon kavramın kapsamında düşünme yollarının ortaöğretim düzeyinde beklendik sonuçlara ulaşmadığını, nicelikler arasındaki ilişkilere odaklanılmadığını ve sonuca bağlı bir yaklaşımın izlendiğini ortaya koymaktadır. DNR tabanlı öğretimin sürece bağlı yaklaşımının ilköğretim ve ortaöğretim programlarında öğrencilerin ilişkileri sezebileceği, yorumlayabileceği ve fonksiyonlara geçiş yapabileceği bir şekilde uygulanması faydalı olabilir.
- Öğrencilerin problem çözmeyi bir ihtiyaç olarak görmemesi ya da problem çözmeyi sorunun çözümünü bulma olarak düşünmesi bu araştırmada olduğu gibi en sık karşılaşılan durumlardan biridir. Problem çözmenin sadece matematiksel bir olgu olmadığı, hayatın tamamında bireylerin kullanması gereken bilimsel bir yöntem olduğu matematik derslerinde ya da uygulamalı bir seçmeli ders olarak düşünülüp öğrencilere problem çözme sürecinin öğretilmesi önerilmektedir.
- Bireylerin yaptıklarını doğrulama gereksinimi duymaması, çözümlerini kendiliğinden kontrol sürecine girmemesi onların analitik düşünme yolunda karşılarına

çıkan en büyük problemlerden biri olarak düşünülmektedir. Analitik düşünmenin öğretilmesi ve uygulanması açısından öğretici, öğrenci düzeyinde hizmet içi eğitim, kurs vb. çalışmalar yapılması fayda sağlayabilir.

- Araştırmada katılımcıların düşünme yolları ortaöğretim müfredatının en temel kavramlarından biri olan fonksiyon kavramı kapsamında incelenmiştir. Benzer düzeydeki katılımcılarla geometri öğrenme alanı ya da olasılık gibi kavramlarla da düşünme yolları incelenebilir.
- Bağlamın öğrencilerin düşünme yollarını etkilediği düşünüldüğünde deney ve kontrol grupları oluşturulup bağlama yakın ve uzak olan öğrencilerden yapılacak bir araştırma sonucunda ortaya çıkan düşünme yollarının tartışılması bağlamla ilişkilendirebilmek için fayda sağlayabilir.
- Türkiye'de kovaryasyonel düşünmeyle ilgili az sayıda çalışma yapıldığı düşünüldüğünde kovaryasyonel zihinsel eylem düzeyleri ve öğrencilerin düşünme yolları çalışmaya açık bir alan olarak görülmektedir. Kovaryasyonel zihinsel eylem düzeyleri üzerine yapılacak araştırmalar matematik eğitim programlarında fonksiyon kavramının öğretiminin şekillendirilmesine yardımcı olabilir.

## KAYNAKÇA


Altun, M. (2004). *Matematik öğretimi*. İstanbul: Alfa Yayınları.

Altun, M. ve Memnun, D.S. (2008). Mathematics teacher trainees' skills and opinions on solving non-routine mathematical problems. *Journal of Theory and Practice in Education*, 4 (2), 213-238.

Asman, D. and Markovits, Z. (2001). The use of real world knowledge in solving mathematical problems. In Marja Van den Heuvel-Panhuizen (ed). *Proceedings of the 25nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Utrecht, 2, 65-72.

Baki, A. (2006). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. (Genişletilmiş 3. basım). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.

Bakar, M. and Tall, D. (1991). Students' mental prototypes for functions and graphs. *Proceedings of PME 15,* Asisi, 1, 104-111.

Balcı, A. (2005). *Sosyal bilimlerde araştırma: Yöntem teknik ve ilkeler*. (Genişletilmiş 5. basım). Ankara: Pegema Yayıncılık.

Baykul, Y. (1999). *Primary mathematics education*. Ankara, Turkey: Ani Printing Press.

Becker, J.R. and Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In Chick, H.L. and Vincent, J.L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the InternationalGroup for the Psychology of Mathematic Education, Vol. 4,* 121-128. Melbourne: PME.

Bezuska, S.J. and Kenney, M.J. (2008). The Three r's: Recursive thinking, recursion, and recursive formulas. In C.E. Greenes and R. Rubenstein (Eds.). *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics*: Seventieth Yearbook, 81 - 97. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Blanton, M.L and Kaput, J.J (2004). Design principles for instructional context that support students' transition from arithmetic to algebraic reasoning: Elements of task and culture, In R. Nemirovsky, B. Warren, A. Roesebery and J.Solomon (Eds.) *Everyday Matters in Science and Mathematics*, 211-234. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Blanton, M.L. and Kaput, J.J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue From Multiple Perspectives*, 5-23. Springer Berlin Heidelberg.

Blum, W. and Niss, M. (1989). Mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and ıssues in mathematics ınstruction. M. Niss, W. Blum ve I. Huntley (Ed.). *Modelling Applicationsand Applied Problem Solving*, 1 - 19. England: Halsted Pres.

Boaler J. (1993). Encouraging the transfer of "school" mathematics to the "real world" through the integration of pocess and content, context and culture. *Educational Studies in Mathematics*, 25, 341-373.

Bogdan, R.C. and Biklen, S.K. (1992). *Qualitative research for education: an ıntroduction to theory and methods*. London: Allyn ve Bacon.

Branca, N.A. (1980). Problem solving as a goal, process, and basic skill. In S. Krulik and R. E. Reys (Eds.*), Problem solving in school mathematics: 1980 yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. and Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies In Mathematics*, 23, 247-285.

Caeli, K. Ray, L. and Mill, J. (2003). 'Clear as mud'. Toward greater clarity generic qualitative research. *International Journal of Qualitative Methods,* 2 (2).

Cai, J. (1999). *The use of open-ended questions in assessing student performance inproblem solving*. Lecture delivered at the Chinese University of Hong Kong.

Cai, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving andproblem posing: an exploratory study. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 34* (5), 719-737.

Cai, J. and Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in U.S. and Chinesestudents' mathematical problem solving and problem posing. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 401-421.

Cai, J., Moyer, J.C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B. and Garber, T. (2013). Mathematicalproblem posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 57-69.

Carlson, M.P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, and E. Dubinsky (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education*, III, CBMS Issues in Mathematics Education, Vol. 7, 114–162. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. and Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events. *Journal for Research in Mathematics Education, 33* (5), 352-378.

Carlson, M., Larsen, S. and Lesh, R. (2003). Integrating models and modeling perspective with existing research and practice. In R. Lesh and H. Doerr (Eds.). *Beyond constructivism: A models and modeling perspective*, 465-478. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carlson, M. and Oehrtman, M. (2005). Key aspects of knowing and learning the concept of function. *Research Sampler Series, 9, The Mathematical Association of America Notes Online*.

Charles, R.I. and Lester Jr, F.K. (1984). An evaluation of a process-oriented instructional program in mathematical problem solving in grades 5 and 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*, 15-34.

Chazan, D. (1996). Algebra for all students. *Journal of Mathematical Behavior*, 15 (4), 455-477.

Confrey, J. and Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26* (2/3), 134–165.

Cooper, T. (1986). *Problem solving*. Queensland: Mathematics Education, Brisbane College of Advanced Education.

Creswell, J.W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions* (2nd Eds.). Thousand Oaks, CA: Sage.

De Corte, E. and L. Verschaffel. (1985). *Proceeding of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol I, University of Utrecht, The Netherlands.

Denzin, N.K. and Lincoln, Y.S. (1998). Introduction: Entering the field of qualitative research, in N.K. Denzin and Y.S. Lincoln (Eds.). *The Landscape of Qualitative Research: Theories and Issues*, London: Sage.

Dubinsky, Ed and Harel, G (1992). *The nature of the process conception of function*. In The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, edited by Guershon Harel and Ed Dubinsky, 85–106. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Ellerton, N.F. (1986). Children's made-up mathematics problems - A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics, 17,* 261–271.

English, L.D., Lesh, R. and Fennewald, T. (2008). Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. In. M. Santillan (Ed.), *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education* , 6-13, Monterrey, Mexico.

Fan, L. and Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Education Studies Mathematics, 66 (1)*, 61-75.

Flavell, J.H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In: *The Nature of Intelligence*,. Resnick, Lauren B (ed.), 233, Lawrence Erlbaum Associates.

Ferrini-Mundy, J. and Lappan, G. (1997). Experiences with patterning. *Teaching Children Mathematics*, 3 (6), 282-288.

Ford, M.I. (1994). Teachers' beliefs about mathematical problem solving in the elementary school. *School Science and Mathematics*, 94 (6), 314-322.

Gambrill, E. (1999). Evidence-based practice: An alternative to authority-based practice. *Families in Society*, *80*, 341-350.

Goldin, G. (1998). Representations and the psychology of mathematics education: part II. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2), 135-165.

Hacker, D.J. and Dunlosky, J. (2003). Not all metacognition is created equal. *New Directions For Teaching And Learning*, 95, 73–79.

Halat, E. (2007). Matematik öğretiminde WebQuest'in kullanımına ilişkin öğretmen adaylarının görüşleri. *İlköğretim Online*, 6 (2), 264–283.

Harel, G. (2001). Pupa’s two complementary products: Taxonomy of students’ existing proof schemes and DNR-based Instruction. *International Newsletter on de Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 1-12.

Harel, G. (2007). The DNR System as a conceptual framework for curriculum development and instruction. In R. Lesh, J. Kaput and E. Hamilton (Eds.), *Foundations for the future in mathematics education*, 263-280. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Harel, G. (2008a). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM*, *40* (3), 487-500.

Harel, G. (2008b). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher’s knowledge base. *ZDM*, *40* (5), 893-907.

Harel, G. and Koichu, B. (2010). An operational definition of learning. *Journal of Mathematical Behavior*, *29* (3), 115–124.

Harel, G. ve Lim, K.H. (2004). Mathematics teachers’ knowledge base: Preliminary results. In M.J. Hoines and A.B. Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (3), 25-32. Bergen, Norway.

Harel, G. and Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput and E. Dubinsky (Eds.), *Research In Collegiate Mathematics Education. III*, 234-283. Providence, RI: American Mathematical Society and Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Herman, M. (2007). What students choose to do and have to say about use of multiple representation in college algebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *26* (1), 27-54.

Higgins, K.M. (1997). The Effect of year-long ınstruction in mathematical problem solving on middle school students’attitudes, beliefs and abilities. *Journal of Experimental Education*, C. 66, 5.

Holton, D., Anderson, J., Thomas, B. and Fletcher, D. (1999). Mathematical problem solving in support of the curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30 (3), 351-371.

Hurst, C. (2007). *Numeracy in action: Students connecting mathematical knowledge to a range of contexts.* Yayınlanmamış doktora tezi. Perth, Western Australia: Curtin University.

Ishida, J. (2002). Students' evaluation of their strategies when they find several solution methods. *Journal of Mathematical Behavior, 21,* 49–56.

İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt semaları*. Doktora Tezi, Trabzon: KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.

Janvier, C. (1987). Representation system and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representations in the Learning and Teaching of Mathematics*, 19–27. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Jiang, C. and Chua B.L. (2010). Strategies for solving three fraction-related word problems on speed: A comparative study between Chinese and Singaporean students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 8,* 73-96.

Kabael, T. (2016). Fonksiyonlar. A.N. Elçi, E.B. Güzel, B.C. Günhan, E.E. Çimen (Ed), *Temel matematiksel kavramlar ve uygulamaları* içinde 179-188. Ankara: Pegem Akademi.

Kabael, U.T. (2010). Fonksiyon kavramı: Tarihi gelişimi, öğrenilme süreci, öğrenci yanılgıları ve öğretim stratejileri. *Tübav Bilim Dergisi, 3 (1),* 128-136.

Kabael, T. ve Akın, A. (2016). Investigating pre-service middle school mathematics teachers' quantative reasoning and their support for students' quantative reasoning in the problem solving process. In Csikos, C., Rausch, A. and Szitanyi, J. (Eds). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol 1, 305. Szeged, Hungary: PME.

Kabael, T., Akın, A., Kızıltoprak, F. ve Toprak, O. (2014). Pre-service middle school mathematics teachers' ways of thinking and pedagogical approaches in problem solving process. *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for* *the Psychology of Mathematics Education (PMENA 36)*, Vol. 6, 327, British Colombia University, Vancouver, Canada, July 15-20 2014.

Kabael, T. ve Kızıltoprak, F. (2014). Sixth grade students' ways of thinking associated with solving algebraic verbal problems. In S. Oesterle, C. Nicol, P. Liljedahl and D. Allan (Eds), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PMENA 36)*, Vol. 6, 120. Vancouver, Canada: PME.

Kaput, J.J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*, 77-156. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Karataş, İ. ve Güven, B. (2003). Problem çözme davranışlarının değerlendirilmesinde kullanılan yöntemler: klinik mülakatın potansiyeli. *İlköğretim Online* 2 (2), 2-9.

Kızıltoprak, F. (2017). *Matematik okuryazarlığının problem çözmede sistematik çeşitleme ile desteklenmesinin öğretim yoluyla incelenmesi*. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.

Koichu, B. and Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 349-365.

Koichu, B., Harel, G. and Manaster, A. (2013). Ways of thinking associates with mathematics teachers' problem posing in context of division of fractions. *Instructional Science*, 1-18. doi: 10.1007/s11251-012-9254-1 (Online version).

Koparan, T., Güven, B. ve Karataş, İ. (2014). Lise öğrencilerinin veri analizinde bağlam bilgileri ile matematiksel/istatistiksel bilgilerinin kullanım şekilleri. *Journal of Computer and Education Research*, 2 (4), 1-22.

Langrall, C., Nisbet, S. and Mooney, E. (2006). The interplay between students' statistical knowledge and context knowledge in analyzing data. In A. Rossman and B. Chance (Eds.). *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador,* Brazil. Voorburg: The Netherlands: International Statistical Institute.

Langrall, C., Mooney, E. and Williams, N. (2005). Students' use of context knowledge in interpreting data. Paper presented at the Building connections: *Research, theory,* *and practice. 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research,* Group of Australasia Sydney.

Lesh, R. and Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development, *Mathematical Thinking and Learning*, 5: 2-3, 157-189.

Lesh, R. and Zawojewski, J.S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 763-804. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lester, F.K. (1980). Problem solving: Is it a problem? In M.M. Lindsquist (Ed.). S*elected issues in mathematics*, 29-45. Reston, VA: NCTM.

Li, J., Peng, A. and Song, N. (2011). Teaching algebraic equations with variation in Chinese classrom. In J.Cai, and Knuth (Eds.) *Early Algebraization*, 529-556.

Lim, J.H. (2011). Qualitative methods in adult development and learning: Theoretical traditions, current practices, and emerging horizons. C. Hoare (Ed.). *In The Oxford handbook of reciprocal adult development and learning*, 39-60. New York: Oxford University Press.

Lim, K.H. (2006). *Students' mental acts of anticipating in solving problems involving algebraic inequalities and equations*. Unpublished dissertation, San Diego State University, USA.

Lim, K.H., Morera, O. and Tchoshanov, M. (2009). Assessing problem-solving dispositions: Likelihood-to-act survey. In S.L. Swars, Stinson, D.W. and Lemons-Smith, S. (Eds), *Proceedings of the Thirty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 700-708. Atlanta: Georgia State University.

Merriam, S.B. (2009). *Qualitative research: A guide to design and implemention*. San Francisco: Jossey-Bass.

Mills, J.D. and Holloway, C.E. (2013). The development of statistical literacy skills in the eighth grade: exploring the TIMSS data to evaluate student achivement and teacher characteristics in the United States, *Educational Research and Evaluation*, 19:4, 323-345.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, 25, 175–193.

Moore, K.C., Musgrave, S. and Paoletti, T. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32 (3), 461-473.

Moss, J., Beatty, R., Shillolo, G. and Barkin, S. (2008). What is your theory? What is your rule? Fourth graders build their understanding of patterns and functions on a collaborative database. In C. Greenes (Ed.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics: The National Council of Teachers of Mathematics 70th Yearbook*, 155–168. Reston, VA: NCTM.

Muir, T., Beswick, K. And Williamson, J. (2008). "I'm not very good at solving problems": An exploration of students'problem solving behaviours. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 27, 228–241.

NCTM (1989). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.Reston, VA.: Author.

Oehrtman, M.C., Carlson, M.P. and Thompson, P.W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In M.P. Carlson and C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics,* 27-42. Washington, D.C: Mathematical Association of America.

Pfannkuch, M. and Wild, C. (2004) Towards an understanding of statistical thinking In D. Ben-Zvi and J Garfield (Eds). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking*, 17-47, Dordrecht: Kluwer.

Park, K. (2006). Mathematics lessons in Korea: teaching with systematic variation. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, 25 (1), 151-167.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton. New Jersey: Princeton University.

Polya, G. (1957). *How to solve it.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Pugalee, D.K. (2001). Writing, mathematics and metacognition: Looking forconnections through students' work in mathematical problem solving. *School Science and Mathematics*, *101* (8), 236-245.

Rabin, J.M., Fuller, E. and Harel, G. (2013). Double negative: The necessity principle, commognitive conflict, and negative number operations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32* (3), 649-659.

Rivera, F. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: understanding figural generalization. *Mathematics Teacher,* 101 (1), 69-75.

Rott, B. (2012). Heuristics in the problem solving processes of fifth graders. In T. Y. Tso, (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 35- 42, Taipei, Taiwan .

Saenz, C. (2009). The role of contextual, conceptual and procedural knowledge in activating mathematical competencies (PISA). *Educational Studies in Mathematics, 71*, 123-143.

Saldanha, L. and Thompson, P. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S.B. Berensen and W.N. Coulombe (Eds.). *Proceedings of the Twentieth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 298-304, Raleigh, NC: North Carolina State University.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Pres, San Diego.

Schoenfeld, A.H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A.H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education*, 189–215. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A.H. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, N.J: L. Erlbaum Associates.

Schraw, G. (1998). Promoting General Metacognitive Awareness. *Instructional Science,* 26, 113-125.

Schroeder, T. and Lester, F. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. P. Trafton, A. Shulte (Eds.). *New Directions for Elementary School Mathematics* (1989 Yearbook), NCTM, Reston, VA.

Selden, A. and Selden, J. (1997). *What does it take to be an expert problem solver?[online]*. http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_4.html web adresinden 12Aralık 2014 tarihinde edinilmiştir.

Sherman, R.R. and Webb, R.B. (1988) Qualitative research in education: A focus. R.R. Sherman ve R.B. (Eds.), *Qualitative research in education: Focus and methods*. London: Falmer Press.

Silver, E.A. and Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school. *Journal For Research in Mathematics Education, 27,* 521-539. Aralık 12, 2014 tarihinde Jstor veri tabanından alınmıştır.

Stoyanova, E. (2003). Extending students‟ understanding of mathematics via problem posing. *The Australian Mathematics Teachers, 59* (2), 32-40. Aralık 12, 2014 tarihinde Ebscohost veri tabanından alınmıştır.

Swanson, H.L. (1999). Instructional components that predict treatment outcomes for students withlearning disabilities: Support for a combined strategy and direct instruction model. *Learning Disabilities Research and Practice, 16*, 109–119.

Swings, S. and Peterson, P. (1988). Eleborative and integrative thought processes in Mathematics Learning. *Journal of Educational Psychology*, 80 (1), 54-66.

Thompson, P.W. (1994a). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 229-274.

Thompson, P.W. (1994b). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld and J. Kaput (Eds.), *Research In Collegiate Mathematics Education I,* 21-44. Providence, RI: American Mathematical Society.

Usiskin, Z. (1998). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford, (Ed.) *The ideas of algebra, K-12*. 1988 Yearbook.

Van de Walle, J.A. (1994). *Elementary school mathematics: Teaching developmentally* (2nd ed.). New York: Longman.

Van Dooren, W., Verschaffel, L. and Onghena, P. (2003). Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebraic word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*, 27-52.

Verschaffel, L. and De Corte E. (1997). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: a teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28, 577-601.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Boagerts, H. and Ratincky, E. (1999). Learning to solve mathematical application problems: A design experiment with fifth graders. *Mathematical Thinking ve Learning,* 1 (3), 195-229.

Vinner, S. and Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal For Research In Mathematics Education*, 20 (4), 356-366.

Yanık, H.B. (2017). Ortaokul matematik öğretmen adaylarının webquestlerde kullandıkları bağlamların ve bu bağlamlarla matematik öğrenme alanları arasında kurulan ilişkilerin incelenmesi. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 14 (37)*, 160-179.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. (8.Baskı), Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldız, F. ve Şengül, S. (2017). 8. Sınıf öğrencilerinin olasılık ve istatistik ile ilgili anlama ve düşünme yollarının dnr tabanlı metodolojik yaklaşımla incelenmesi. *The Journal of Academic Social Science Studies, 57*, 199-226.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. In Chick, H. L. ve Vincent, J. L. (Eds.) *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 305-312. Melbourne: PME.

Wilson, J. (1998). Metacognition within mathematics: A new and practical multimethodapproach. In C. Kanes, M. Goos. and E. Warren (Eds.), *Teachingmathematics in new times, Proceedings of the 21st annual conference of thematematics education research group of Australasia,* 693–700. Queensland: MERGA.

**http-1:** https://www.shelovesmath.com/algebra/advanced-algebra/piecewise-functions/
(Erişim tarihi: 17.05.2015)

**Ekler**

EK - 1. Futbol Problemi

**FUTBOL SORUSU**


**Beraberliğe 1, galibiyete 3, yenilgiye 0 puan verilen bir futbol turnuvasında A,B,C,D ve E takımları mücadele etmektedir. Her biri, diğerlerinin her biriyle yalnız bir kez oynamaktadır. • A takımı, E ve B yi yeniyor, C ile berabere kalıyor, D ye de yeniliyor. • B takımı, C ve D ye yeniliyor. • D takımı, C ye yeniliyor. • E takımı, D yi yeniyor, B ve C ile berabere kalıyor. Buna göre;**

**a)** Bu turnuvanın şampiyonu hangi takım olmuştur?
**b)** Turnuvada son sırayı hangi takım kaç puanla almıştır?
**c)** Turnuva sonunda kaç tane maç berabere bitmiştir?
**d)** Bu turnuvada B ve D takımlarının puanları toplamı kaçtır?
**e)** Turnuvayı şampiyon tamamlayan takımın galibiyet sayısı ve puanı kaçtır?
**f)** Turnuvada toplamda takımların aldığı puanların toplamı kaçtır?
**g)** Turnuva sonunda bir *tablo* (puanları, galibiyet, mağlubiyet ve beraberlik sayılarını gösteren) oluşturulmak istesenseydi senin tablon nasıl olurdu?

*Strateji ile ilgili sorular*

a) Soruyu farklı bir yolla çözmek isteseydin nasıl bir yöntem kullanırdın?
b) Takımların kaçar maç yapmaları gerektiğine nasıl karar verdin?

*Doğrulama yollarıyla ilgili sorular*

a) Yaptığın yöntemde çıkan sonuçların doğruluğunu nasıl gösterebilirsin?
b) (Takımların maç sayılarının farklı olduğunu ifade ettiği varsayılarak) Sence bu şartlar altında oynanan bir turnuva nasıl adil olurdu?

*İnançla ilgili sorular*

a) Sence bu problem nasıl bir problemdi? Çözerken ne hissettin?
b) Matematik derslerinde çözdüğünüz problemlerden farkı mıydı? Var ise sence bu fark neydi?
c) Soruya ilave edecek bir şeylerin olsaydı neleri ilave ederdin? Ya da sorudan neleri çıkarırdın?
d) Futbolda puanlamayı bilmek sence bu soruda işine yarar mıydı?

*Bağlamla ilgili sorular*

a) Futbolla aran nasıldır?
b) Futbol maçlarını izleme sıklığın nedir?
c) Futbol programları hakkında bir fikrin var mı?
d) "Puan Durumu" kavramıyla ilgili bir fikrin var mıydı? (Daha önce gazete, internet vb yollarla puan durumu görmüş müydün?) Puan durumu senin için ne ifade ediyor?

EK - 2. Tişört Problemi

**TİŞÖRT SORUSU**

**İlçede bir matematik fuarı için hazırlık yapılmaktadır. Okulun idarecileri fuar için öğrencilere tişört basılmasını uygun görmüşlerdir. Bunun için de iki farklı matbaadan fiyat almışlardır. "*Çiçek baskı matbaa*" tişörtlerin satışı için 75 tişörte kadar tişört başına 10TL fiyat vermiştir. 75 tişörtten fazla tişört alınması halinde ilk 75 tişörtten sonrakilerin tanesinde 2 TL'lik indirim yapacağını,150 den fazla alım olması halinde ise ilk 150 tişörtten sonraki tişörtlerin tanesinde ilk fiyata göre 5 TL'lik indirim yapacağını söylemiştir. "Ajans matbaa" ise 100 tişörte kadar 12TL ye basım yapacağını, 100 ile 160 tane arasında yapılacak satışta ilk fiyattan hesaplanacak toplam ücretten %25 indirim yapacağını, 160 taneden fazla alım olur ise de sayıya bakılmaksızın tişörtlerin tanesini 6 TL den vereceğini ifade etmiştir. Okulda fuara katılacak öğrenci sayısı henüz kesin değildir. Bu şartlar altında idarecilere hangi matbaayı hangi şartlarda önerirsiniz?**

*Strateji ile ilgili sorular*

a) Yönteminde değişiklik yapmak istersen nasıl bir yol denersin?

b) (Özel örnekleri denediğini varsayarak) Seçtiğin tişört sayılarını nasıl belirliyorsun? Neden o değerleri seçiyorsun?

c) O değerleri göstermek için başka bir yol bulabilir misin?

d) Herhangi bir tişört sayısı için hangi matbaanın daha tercih edilebilir olduğunu bulabileceğin bir genelleme geliştirebilir miydin? (Evet, yanıtı alınırsa nasıl sorusu sorulur)

e) Farklı bir yolla problemi nasıl çözebilirdin?

*Doğrulama yollarıyla ilgili sorular*

a. Yaptıklarının doğruluğunu nasıl kontrol edersin?

*İnançla İlgili sorular*

a) Problem sende ne hissettirdi?

b) Okulda çözülen problemlerden farklı mıydı? Benziyorsa benzer yanları nelerdi? Farklı ise farkları nelerdi?

c) Sorunun yapısı sana göre neye benziyor?

d) Sence bu problem matematiksel bir kavram ile ilişkili mi? (Evet, yanıtı alınırsa hangi kavram veya konularla ilişkili?)

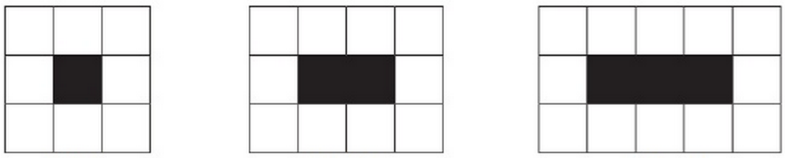
e) Bu problemi kategorize etmeye kalksan matematikte nelere daha yakın diyebilirsin?

f) Soruya bir şeyler ilave edecek ya da çıkartacak olsan bunu nasıl yapardın?

EK - 3. Karo Problemi

**KARO SORUSU**

**Enver Usta, bir teras tasarlamıştır. Her bir terasın ortasında dikdörtgen bir bahçe yer almaktadır. Enver Usta, bahçenin toprağını gösterebilmek için siyah karoları, sınırlarını gösterebilmek içinse beyaz karoları kullanmıştır. Aşağıda ilk üç terasa ait resimler gösterilmiştir.**



a. 4. ve 5. Teraslara ait resimlerle ilgili neler söyleyebilirsiniz? Bu teraslarda kaç tane beyaz ve siyah karo olduğunu bulunuz.
b. Daha büyük teraslardaki karo sayılarını bulmak için nasıl bir yol izlersiniz?
c. 60. teras için gereken beyaz karo sayısını bulmaya yarayacak bir yöntem bulabilir misiniz?
d. Beyaz karo sayısını bulmaya yarayacak bir kural bulabilir misiniz? (Problem çözme stratejileri)
e. Bulduğunuz kuralın her adımda işe yaradığını nasıl gösterirsiniz? (Doğrulama yolları)
f. Beyaz karo sayısını bulmaya yarayacak farklı bir kural bulabilir misiniz? Bulduğunuz kuralları karşılaştırabilir misiniz? (Problem çözme stratejileri)

*Strateji ile ilgili sorular*

a. (Görsellerdeki artış üzerinden genelleme yaptığı varsayılarak) Bu genellemede görselleri nasıl kullandın ve sonucu nasıl ifade ettin?
b. (Karo sayılarını yazarak oluşturduğu ve bir örüntü aradığı varsayılarak) Yazdığın karo sayılarının birbirleri arasındaki ilişkiyi açıklar mısın?
c. (Değişken kullandığı varsayılarak) Kullandığın değişkenin ne olduğunu ve senin problemde neyi yapmanı sağladığını açıklar mısın?

*Doğrulama yollarıyla ilgili sorular*

a. (Genelleme yaptığını varsayarak) Bu kuralın çalışıp çalışmadığını nasıl gösterirsin?
b. (Kuralı denediğini varsayarak) Bulduğun kuralın çalışıyor olduğunu söylemek için birkaç kez denemek yeterli mi senin için?

*İnançla ilgili sorular*

a. Problem sende ne hissettirdi?
b. Bu problemi matematiksel bir kavramla ilişkilendirmeye kalksan neyle ilişkilendirirdin?

EK - 4. Konser Problemi

**KONSER SORUSU**

**Jale Biber, İTÜ Stadyumunda konser vermek istemektedir. Bu konserden en az 100.000TL gelir elde etmeyi hedeflemektedir. İTÜ Stadı'nın kapasitesi bilinmemektedir ancak konsere giriş ücreti 20TL olarak belirlenmiştir. Jale, bu konser için 50.000TL harcama yapmıştır.**

A) Jale'nin konserden hedeflediği parayı kazanabilmesi için konsere gelecek kişi sayısı ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?

B ) Jale'nin kazanmayı hedeflediği ücret 150.000TL olsaydı stada gelecek kişi sayısıyla ilgili ne söylerdiniz? ( Bilet ücreti ve yapılan harcama aynı olmak üzere)

C ) Jale'nin yaptığı harcama 75.000 TL olsaydı; stada gelecek kişi sayısıyla ilgili ne söylerdiniz? ( Bilet ücreti ve hedeflenen para aynı olmak üzere )

D ) Biletler 10 TL olsaydı Jale'nin kazanacağı para ve stada gelen kişi sayısıyla ilgili ne söylerdiniz? ( Hedeflenen para ve yapılan harcama aynı olmak üzere )

E ) Stadın kapasitesi 15.000 kişi olursa ve stad tamamen dolarsa Jale Biber'in kazanacağı para ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?

F ) İTÜ stadının kapasitesi, Jale Biber'in hedeflediği gelir, konser için yaptığı harcama ve konsere ödenen giriş ücretiyle ilgili bir bağlantı kurmak isteseniz neler söylersiniz?

G ) Problemi başka bir yöntemle çözecek olsanız nasıl bir yol izlersiniz?

*Strateji ile ilgili sorular*

a. (Değişken kullandığını varsayarak) Seçtiğin değişkenin/değişkenlerin neyi temsil ettiğini açıklar mısın?
b. Sence buradaki değişkenler birbirini etkiliyor mu? Etkiliyorsa birbirlerini nasıl etkilediklerini açıklar mısın?

*Doğrulama yollarıyla ilgili sorular*

a. Yazdıklarının doğruluğunu nasıl gösterirsin?

*İnançla ilgili sorular*

a. Problemi çözerken ne hissettin?
b. Problem matematikte hangi kavramlarla ilişkili sence?

EK – 5. Alınan İzinler (1)

T.C
BEYLİKOVA KAYMAKAMLIĞI
Müberra Mehmet Güleç Anadolu İmam Hatip Lisesi Müdürlüğü

SAYI : 53158073/605.01/ 85 15.04.2015
KONU: Doktora Tez Çalışması

İLGİLİ MAKAMA

2014-2015 Eğitim - Öğretim Yılı II.Döneminde ekli listede adı geçen 11.sınıf öğrencileriyle 16570571642 T.C. kimlik numaralı okulumuz matematik öğretmeni Onur TOPRAK'ın Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı "11.Sınıf Öğrencilerinin Problem Çözme Bağlamında Düşünme Yolları" isimli doktora tez çalışması kapsamında görüşme yapması uygun bulunmuştur.

Bahattin GÜRSOY
Okul Müdürü

| No: | Görüşme Yapılması Planlanan Öğrenciler |
|---|---|
| 1 | [illegible] |
| 2 | [illegible] |
| 3 | [illegible] |
| 4 | [illegible] |
| 5 | [illegible] |
| 6 | [illegible] |
| 7 | [illegible] |
| 8 | [illegible] |
| 9 | [illegible] |
| 10 | [illegible] |

Kurum Kodu:972382
Ayrıntılı bilgi için irtibat: Murat DUMAN -Müdür baş Yrd.
Adres : Yunusemre Mah. Yunusemre Cad.
26750 BEYLİKOVA-ESKİŞEHİR
Tel : 0(222) 531 2054
Faks : -
e-Posta : 972382@meb.k12.tr
Web Adresi: mmgaol.meb.k12.tr

EK – 5. Alınan İzinler (2)

**İzin Belgesi**

Yukarıda açıklanan araştırma kapsamında gerçekleştirilecek derslerde velisi olduğum öğrencinin katılımcı olarak bulunmasını onayladığımı beyan ederim.

Ayrıca öğrencinin katılacağı derslerin ses kaydı ile kayıt altına alınmasında sakınca yoktur. Okulumuz pansiyonlu bir okul olup öğrenci velileri okul müdürüdür. Tez kapsamında çalışılacak listede yer alan öğrenci velileriyle gerekli görüşmeler yapılıp onayları alınmıştır.

| No: | Görüşme Yapılması Planlanan Öğrenciler |
|---|---|
| 1 | [redacted] |
| 2 | [redacted] |
| 3 | [redacted] |
| 4 | [redacted] |
| 5 | [redacted] |
| 6 | [redacted] |
| 7 | [redacted] |
| 8 | [redacted] |
| 9 | [redacted] |
| 10 | [redacted] |

07.04.2015

Öğrenci Velisi

Bahattin GÜRSOY

Okul Müdürü

EK – 5. Alınan İzinler (3)

## KATILIMCI BİLGİLENDİRME VE İZİN BELGESİ

### Öğrenci Velisini Bilgilendirme

Sayın Öğrenci Velisi,

Bu araştırma Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Doktora Programı'nda yürütmekte olduğum doktora tez çalışmamı kapsayan bir çalışmadır. Araştırmada 11.sınıf öğrencilerinin problem çözme bağlamında düşünme yollarını incelemek amaçlanmaktadır.

Araştırma 2014 – 2015 eğitim ve öğretim yılı bahar döneminde ortaöğretim matematik dersi öğretim programında yer alan fonksiyonlar öğrenme alanına ait kazanımları kapsamaktadır. Araştırma kapsamındaki uygulamaların yaklaşık bir ay süreceği tahmin edilmektedir.

Araştırmaya dahil olan öğrencilerin her biriyle araştırmanın uygulandığı süreçte en az iki görüşme yapılacaktır. Tüm bu görüşmelerde öğrencilerin matematiksel bilgileri, düşünme becerileri ve problem çözme performansları incelenecek ve değerlendirilecektir. Bunun yanında öğrencilerin öğrenmelerinin daha iyi incelenebilmesi amacıyla dersler ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınacaktır. Bu kayıtlar yalnızca araştırmayı analiz etme ve raporlaştırma aşamasında kullanılacak; öğrencilerin isimleri gizlenecektir. Ayrıca bu kayıtlar araştırma kapsamı dışında hiçbir kişi ya da kurumla kesinlikle paylaşılmayacaktır.

Velisi olduğunuz öğrencinin projeye katılmasını istiyorsanız lütfen aşağıdaki izin belgesini doldurunuz. İlginize teşekkür ederim.

06.04.2015

Onur TOPRAK

Matematik Öğretmeni

Anadolu Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Tel: 0 (554) 4822426

EK - 6. Kod Listesi

| | KODLAR |
|---|---|
| **Kovaryasyonel Eylem Düzeyi Davranışları** | - Değişkeni bilinmeyen olarak kullanma<br>- Değişkeni fonksiyonel yapıda bağımlı-bağımsız olarak ifade etme<br>- Kendi sembol/simgelerini kullanma<br>- Genellemeyi sayısal veri seti üzerinden oluşturma<br>- Genellemeyi ilişkiler üzerinden oluşturma<br>- Genellemeyi görseller yardımıyla oluşturma<br>- Genellemeyi ana diliyle oluşturma<br>- Bir veri setinin sonuçlarını diğer değişkenlerle birlikte düşünüp sözel olarak ifade etme<br>- İki değişkenin farklı değerlerinde ortaya çıkan sonuçları temel olarak ilişkilendirme<br>- Bir veri setinin/değişkenlerin sonuçlarını diğer veriler/değişkenlerle birlikte düşünüp onlara olan etkisini yönüyle birlikte kullanma/kullanamama<br>- İki değişkenin farklı değerlerindeki ilişkiyi anlamlı değerler için kullanma/ilişkilendirme<br>- Bağımsız değişkendeki değişimi yönüyle birlikte ifade edebilme/edememe<br>- Seçtiği özel örnekleri rastgele belirleme<br>- Seçtiği özel örnekleri belirli bir amaç için belirleme<br>- Değişkenler için kullanılan sayı/sembolleri manipüle etme<br>- Sayı/sembol kullanımına kendiliğinden/yönlendirmeyle geçme<br>- Sembolik manipülasyon yapabilme/yapamama<br>- Birden fazla değişken kullanma/kullanmama<br>- Probleme ilişkin bir öneride bulunma/bulunmama<br>- Sonuç odaklı düşünerek çözüme odaklanma<br>- İlişki odaklı düşünerek çözüme odaklanma |
| **Doğrulama Yollarının Ortaya Çıkması** | - Problemin doğruluğuna emin olma/olmama<br>- Problemin kontrol sürecine kendiliğinden girme/girmeme<br>- İfade ettikleriyle kendini ikna etme çabasında olma/olmama<br>- İfade ettikleriyle başkalarını ikna etme çabasında olma/olmama<br>- Yaptıklarını gösterirken kendine ait sayı/sembol kullanma/kullanmama<br>- Problemin kontrol sürecinde kendine ait olan/olmayan yönergeler kullanma |

| | |
|---|---|
| **İnançlara Yönelik Ortaya Çıkan Durumlar** | - Problemin cevabını ya da çözümünü merak etme/etmeme<br>- Çözümü boyunca kendine güvenme/güvenmeme<br>- Problemlerde kendisini yetersiz hissetme<br>- Problemi sevme/sevmeme<br>- Problemi değiştirme önerilerini kendisinin zorlandığı kısma göre seçme<br>- Problemi değiştirme önerilerini soruyu zorlaştırma/kolaylaştırma adına seçme<br>- Problemi değiştirme önerilerini rastgele seçme<br>- Çözümler boyunca onaylanma ihtiyacı hissetme/hissetmeme<br>- Problemi yapabildiğine/yapamadığına odaklanarak hissettiklerini ifade etme<br>- Geçmiş yaşam deneyimlerini çözüme yansıtma/yansıtmama |
| **Bağlama Yönelik İfadeler ve Kullanımlar** | - Problemin bağlamını günlük hayatta kullanma<br>- Problem durumuna aşina olma/olmama<br>- Problemde bulunmayan terimleri çözümünde kullanma<br>- Problemleri kendisine verilen yönergeleri kullanarak çözme<br>- Problemleri kendisine verilen yönergeler dışında geçmiş yaşam deneyimlerini dahil ederek çözme<br>- Yaptıklarını kontrol ederken problem bağlamı dışında terimler ifade etme/kullanma<br>- Problemi değiştirme önerilerini bağlam bilgisiyle birleştirme/birleştirmeme<br>- Problem bağlamına dolaylı yoldan katkı sağlayacak bir bilgiyi kullanma |

**ÖZGEÇMİŞ**

Ad- Soyad : Onur TOPRAK

Yabancı Dil : İngilizce

Doğum Yeri ve Yılı : İzmir / 09.09.1987

E-Posta Adresi : coma.aku@gmail.com

Telefon : 0554 482 24 26

Eğitim Geçmişi:

| | |
|---|---|
| • 2012-2019 Doktora: | Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı |
| • 2009-2010 Tezsiz Yüksek lisans: | Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Öğretmenliği |
| • 2005-2009 Lisans: | Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü |

Mesleki Geçmişi:

- 2012 - 2013, Öğretmen, Milli Eğitim Bakanlığı, İstanbul TOKİ Kız Teknik ve Meslek Lisesi
- 2013 - 2014, Öğretmen, Milli Eğitim Bakanlığı, Eskişehir Kırka Çok Programlı Anadolu Lisesi
- 2014-2015, Öğretmen, Milli Eğitim Bakanlığı, Eskişehir Beylikova Müberra Mehmet Güleç Anadolu Öğretmen Lisesi
- 2015-2018, Öğretmen, Milli Eğitim Bakanlığı, Eskişehir Beylikova Müberra Mehmet Güleç Anadolu İmam Hatip Lisesi
- 2018-2019, Öğretmen, Milli Eğitim Bakanlığı, Eskişehir Çifteler Sami Arıel Anadolu Lisesi

Seçilmiş Yayınları:

Kabael, T., Akın, A., Kızıltoprak, F. ve Toprak, O. (2014). Pre-service middle school mathematics teachers' ways of thinking and pedagogical approaches in problem solving process. *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PMENA 36), Vol. 6*. p. 327, British Colombia University, Vancouver, Canada, July 15-20 2014.

Kabael, T., Akın, A., Kızıltoprak, F. ve Toprak, O. (2017). Pre-Service Middle School Mathematics Teachers' Ways of Thinking, Ways of Understanding and Pedagogical Approaches in Problem-Solving Process.*Kastamonu Eğitim Dergisi, 25 (2),*851-870. (http://79.123.169.199/ojs/index.php/Kefdergi/article/view/946/524)

Kabael, T., Akın, A., Kızıltoprak, F. ve Toprak, O. (2014). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının problem çözme sürecindeki anlama ve düşünme yolları. *13. Matematik Sempozyumu (MATDER 13),* Karabük Üniversitesi. Karabük. Mayıs 2014.