ANADOLU UNIVERSITY | GRADUATE SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES

AJESI

ANADOLU JOURNAL OF EDUCATIONAL SCIENCES INTERNATIONAL

***DOI: 10.18039/ajesi.923938***

# Can Middle School Students Make Proof?[1]

Tuğba Yulet YILMAZ[2], Nilüfer YAVUZSOY KÖSE[3]

***Date Submitted:*** *21.04.2021* ***Date Accepted:*** *22.06.2021* ***Type[4]:*** *Research Article*

## Abstract

In order to support the development of reasoning skills, it is very necessary and important for students to meet mathematical proof from an early age and to carry out actions in this process, and this is why "can young students make proof?" brings to mind the question. In line with this question, the purpose of this study is to examine the reasoning of middle school students in the process of proving the given problems and propositions. For this purpose, in the 2019-2020 academic year, seventh-grade students studying at a state middle school were selected as participants. In this study, in which qualitative research approach was adopted, the data were collected through open-ended tasks. The study findings revealed that students who did not understand the tasks left the task unanswered, rewrote it, used the data in task incompletely, incorrectly or went outside the data and sometimes did not understand the premise of the proposition in the task. When the reasoning of the students who understood the tasks was examined, it was determined that they generally made empirical verification in number tasks that require direct proof. In geometry tasks that require direct proof, it was determined that they mostly made incorrect justification by giving an example as opposed to another quadrilateral covered by a quadrilateral, justification with symbols on the prototype drawing, or justification based on incorrect drawing, and some students make deductive reasoning. In tasks in which they need to give counterexamples, was observed that some students made non-logical justifications caused by a lack of prior knowledge in the tasks, while many students made deductive reasoning. In this study, it can be said that students in general have difficulty making arguments in the proving process, often tend to generalize using special situations and use their previous learnings without transformation.

***Keywords:*** deductive reasoning, empirical verification, mathematics education, mathematical proof

***Cite***: Yılmaz, T. Y., & Yavuzsoy Köse, N. (2021). Can middle school students make proof? *Anadolu Journal of Educational Sciences International, 11*(2), 852-880. https://doi.org/10.18039/ajesi.923938



[1] This article includes a part of his doctoral dissertation titled "Examining 7th Grade Students of the Proving Processes and The Functions of Proof in This Process". Part of this article was presented as a poster at the International Social and Educational Sciences Symposium (USVES 2021).

[2] (Corresponding author) Dr., Cahit Zarifoğlu Ortaokulu, Turkey, tugbayulet@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2872-4062

[3] Prof. Dr., Anadolu University, Faculty of Education, Department of Mathematics and Science Education, Turkey, nyavuzsoy@anadolu.edu.tr, https://orcid.org/0000-0001-7407-7498

[4] This study was carried out with the Ethics Committee Approval of Anadolu University, Graduate School of Educational Sciences, dated 23.01.2019 and numbered 54380210-050.99.

ANADOLU | GRADUATE SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES
AJESI
ANADOLU JOURNAL OF EDUCATIONAL SCIENCES INTERNATIONAL

***DOI: 10.18039/ajesi.923938***

# Ortaokul Öğrencileri Kanıt Yapabilir mi?[1]

Tuğba Yulet YILMAZ[2], Nilüfer YAVUZSOY KÖSE[3]

***Gönderim Tarihi:*** *21.04.2021* ***Kabul Tarihi:*** *22.06.2021* ***Türü[4]:*** *Araştırma Makalesi*

## Öz

Öğrencilerin muhakeme becerilerinin gelişiminin desteklemesi için küçük yaşlardan itibaren matematiksel kanıtla tanışmaları ve bu süreçteki eylemleri gerçekleştirmeleri oldukça gerekli ve önemli olmakla birlikte bu durum “küçük yaştaki öğrenciler kanıt yapabilir mi?” sorusunu akla getirmektedir. Bu soru doğrultusunda bu çalışmanın amacı ortaokul öğrencilerinin verilen problem ve önermeleri kanıtlama sürecindeki muhakemelerini incelemektir. Bu amaçla 2019-2020 eğitim öğretim yılında, bir devlet ortaokulunda öğrenim gören yedinci sınıf öğrencileri katılımcı olarak seçilmiştir. Nitel araştırma yaklaşımının benimsendiği bu çalışmada veriler açık uçlu görevler aracılığıyla toplanmıştır. Çalışma bulguları görevleri anlamayan öğrencilerin görevi yanıtsız bıraktıklarını, tekrar yazdıklarını, görevdeki verileri eksik, hatalı kullandıklarını ya da verilerin dışına çıktıklarını, bazen de görevdeki önermenin öncülünü anlamadıklarını ortaya koymuştur. Görevleri anlayan öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde, doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı görevlerinde genel olarak deneysel doğrulama yaptıkları belirlenmiştir. Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri görevlerinde ise çoğunlukla bir dörtgenin kapsadığı dörtgeni aksine örnek vererek hatalı gerekçelendirme, prototip çizim üzerinde sembolle gerekçelendirme ya da hatalı çizime dayalı gerekçelendirme yaptıkları, bazı öğrencilerin ise tümdengelimsel muhakeme yaptığı belirlenmiştir. Aksine örnek vererek kanıt yapmaları gereken görevlerde bazı öğrencilerin ön bilgi eksikliğinden kaynaklı mantıksal olmayan gerekçelendirmeler yaptıkları, bununla birlikte pek çok öğrencinin tümdengelimsel muhakeme yaptığı görülmüştür. Bu çalışmada genel olarak öğrencilerin kanıtlama sürecinde argüman üretmede zorlandıkları, çoğunlukla özel durumlar kullanarak genelleme yapma eğiliminde oldukları ve önceki öğrenmelerini dönüşüm yapmadan kullandıkları söylenebilir.

***Anahtar kelimeler:*** deneysel doğrulama, matematik eğitimi, matematiksel kanıt, tümdengelimsel muhakeme

***Atıf***: Yılmaz, T. Y., ve Yavuzsoy Köse, N. (2021). Ortaokul öğrencileri kanıt yapabilir mi? *Anadolu Journal of Educational Sciences International, 11*(2), 852-880. https://doi.org/10.18039/ajesi.923938

[1] Bu makale "7. Sınıf Öğrencilerinin Kanıtlama Süreçlerinin ve Bu Süreçte Ortaya Çıkan Kanıt İşlevlerinin İncelenmesi" başlıklı doktora tezinin bir bölümünü içermektedir. Bu makalenin bir bölümü Uluslararası Sosyal ve Eğitim Bilimleri Sempozyumu’nda (USVES 2021) poster bildiri olarak sunulmuştur.

[2] (Sorumlu yazar) Dr., Cahit Zarifoğlu Ortaokulu, Türkiye, tugbayulet@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2872-4062

[3] Prof. Dr., Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Türkiye, nyavuzsoy@anadolu.edu.tr, https://orcid.org/0000-0001-7407-7498

[4] Bu çalışma Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü’nün 23.01.2019 tarih ve 54380210-050.99 sayılı Etik Kurul Onayı alınarak gerçekleştirilmiştir.

## Giriş

Matematik sistematik bir yapıya sahiptir, öyle ki bu sisteme eklenen her bir kavram kendinden önce eklenen ve kendinden sonra eklenecek olanla tutarlı bir bütün oluşturmaktadır. Matematiğin tutarlı bir bütün olmasını sağlayan matematiksel kanıt, matematik öğretim programında konular arasındaki ilişkileri açığa çıkardığı için matematiğin tüm bağlamlarına uyan ve matematiğin merkezinde yer alan evrensel bir kavramdır (Balacheff, 1991; Blanton ve diğerleri, 2009; Knuth ve Elliot, 1998). NCTM (2000), muhakeme ve kanıtın anaokulundan 12. sınıfa kadar her seviyedeki matematik öğretim programının bir parçası olmasını önermekte, muhakeme ve kanıt becerilerini; genellemeler hakkında varsayım oluşturabilme, bu varsayımları ve iddiaları değerlendirebilme, iddiaları formüle ederek tümdengelimsel ve tümevarımsal muhakemeyi kullanabilme olarak betimlemektedir. Bununla birlikte ortaokuldaki öğrencilerin, matematiksel ifade ve önermeleri savunabileceklerini, örüntüler aracılığıyla matematiksel ilişkileri göstermek için tümevarıma dayalı mantık yürütebileceklerini, matematiksel ifadeleri sembolik dil kullanarak gösterebileceklerini, formel yönden eksiklikleri olsa da tümdengelimsel olarak kabul edilebilir bir kanıt yapabileceklerini belirtmektedir (NCTM, 2000).

Matematiksel muhakeme ve kanıt; matematiksel kavramların anlam kazanmasını, kavramlar arasındaki ilişkilerin görünür kılınmasını ve bu ilişkiler sayesinde yeni bilgilerin öncekilerle bütünleşmesini sağladığı için matematiksel düşünmenin gerçekleşmesi bakımından son derece önemlidir (Flores, 2002; Liu, 2003; Mubark, 2011). Bu nedenle kanıtın öğrencilerin algılama ve bilişsel düzeylerine uygun olacak şekilde her sınıf düzeyinde ele alınmasına ve muhakeme ile birlikte matematik öğretiminin bir parçası olmasına vurgu yapılmaktadır (De Villiers, 1990; NCTM, 2000). Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (Programme for International Student Assesment [PISA]) 2018 Türkiye ön raporunda, matematiksel süreçlerin temelini oluşturan matematiksel becerilerden birinin de muhakeme ve kanıt olduğunu, matematik okuryazarlığı alanında başarılı olabilmek için öğrencilerin muhakeme becerilerini kullanabilmeleri gerektiğini belirtmektedir (MEB PISA Raporu, 2019).

Alan yazın incelendiğinde öğrencilerin kanıtları anlama ve kanıt oluşturabilme süreçlerini değerlendirmek için farklı kanıt kategorileri ve kanıt şemalarının belirlendiği pek çok araştırmaya rastlanmaktadır (Balacheff, 1988; Sowder ve Harel, 1998; Yang ve Lin, 2008; Waring, 2001; Weber, 2005). Öte yandan farklı araştırmacıların ortaokul öğrencilerinin kanıtlarını analiz etmek için bu kategori ya da şemaları kullandıkları görülmüştür (Flores, 2006; Şen ve Güler, 2015; Zeybek ve Üstün, 2019). Örneğin Flores (2006) beşinci sınıftan 12. sınıfa kadar 70 öğrencinin gerekçelendirmelerini ve kanıt şemalarını belirlemeyi amaçladığı çalışmasında, öğrencilerin çoğunlukla öğretmen ya da ders kitaplarını otorite olarak gördüklerini, birçok öğrencinin sayısal örnekler kullanarak genellemelerini gerekçelendirdiklerini belirtmiştir. Benzer şekilde Şen ve Güler (2015), yedinci sınıf öğrencilerinin kanıt becerilerini ve kanıt şemalarını inceledikleri çalışmalarında, öğrenciler tarafından üretilen kanıtların genel olarak dışsal ve deneysel kanıt şemalarına ait olduğunu belirtmişlerdir. Bununla birlikte ortaokul öğrencilerinin kanıtlama sürecindeki muhakemelerinin incelenmesine ilişkin sınırlı sayıda çalışmaya rastlanmaktadır (Arslan, 2007; Tanışlı, 2016; Zaimoğlu, 2012). Örneğin Tanışlı (2016), ortaokul öğrencilerinin verilen matematiksel ifadelere ilişkin muhakeme ve kanıtlama süreçlerini incelediği çalışmasında, bazı öğrencilerin hatalı ya da öğretmen, ders kitabı gibi bir otoriteyi referans göstererek muhakeme yaptıklarını belirtmiştir. Ayrıca kanıtlama sürecinde deneysel, sezgisel ya da mantıklı olmayan gerekçeler sunduklarını, ağırlıklı olarak ise örnek verme ya da deneme/yanılma yoluna gittiklerini göstermiştir. Gerçekleştirilen çalışmalarda kanıtlama süreçlerini değerlendirebilmek için farklı düzey ya da şemalar belirlendiği, genel olarak öğrencilerin kanıt yapmada zorluk yaşadıkları belirtilmiştir. Bu araştırma bulguları da yedinci sınıf öğrencilerinin kanıtlama süreçlerinin ve bu süreçteki muhakemelerinin belirlenmesine yönelik çalışmalara ihtiyaç olduğunu vurgulamaktadır. Ayrıca ilgili alan yazın incelendiğinde programlarda yapılan reform çalışmaları ile birlikte ortaokul matematiğinde kanıtın farklı odak noktalarıyla ele alındığı pek çok çalışma olduğu; ancak Türkiye'de bu çalışmaların sayısının sınırlı olduğu görülmektedir. Bu odak noktaları doğrultusunda bu çalışmanın amacı ortaokul öğrencilerinin farklı kanıt yöntemleri ile kanıtlamaları gereken problem ve önermelerdeki muhakeme süreçlerini incelemektir.

## Matematiksel Kanıt ve Matematiksel Muhakeme

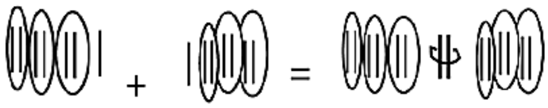
Matematiğin kendisi kadar eski olan matematiksel kanıtın farklı bakış açılarıyla ele alınması, yıllar içinde odak noktaları farklı olan pek çok tanımın oluşmasını sağlamıştır. Örneğin Hilbert matematiksel kanıtı, sonuncunun kanıtlanan teorem olduğu ve her birinin birer aksiyom ya da önceki formüllerden çıkarım kuralları ile elde edilen formüller dizisi olarak tanımlamaktadır (Dawson, 2006). Matematiksel kanıtın benzer yapıdaki geleneksel tanımlarının daha formel olduğu, kesinliğin ve kanıt yazma biçiminin ön plana çıktığı görülmektedir. Bununla birlikte okul matematiğindeki matematiksel kanıt tanımlarında, matematiksel anlamaya, kanıtın matematiksel muhakemenin ürünü olması durumuna, bazen de ikna etme işlevi ön plana çıkarılarak kanıtın sosyal yönlerine vurgu yapıldığı görülmektedir. NCTM (2000) matematiksel kanıtı, belirli muhakeme ve gerekçelendirme biçimlerini sergilemenin formel bir yolu olarak tanımlamakta, Csikos (1999) ise kanıtlanacak ifadelerin daha önceden doğruluğu kanıtlanmış ifadeler yardımıyla tümdengelimsel ve tümevarımsal muhakeme ile kanıtlandığını belirtmektedir. Aynı zamanda kanıtı bir süreç olarak gören ve bu süreci aşamaları ile tanımlayan araştırmacılar da mevcuttur. Örneğin Perry ve diğerleri (2009) kanıtlama sürecinin ilk aşamasının varsayım oluşturmayı sağlayan eylemleri (bir düzenliliğin aranması ve bunun keşfi, varsayımların formüle edilmesi ve bu varsayımların doğru olduğunu gösteren argümanlar sunulması), ikinci aşamanın ise kanıtı oluşturacak fikirlerin araştırılması, düzenlenmesi ve sunulması eylemlerini içerdiğini belirtmektedirler. Bununla birlikte Hersh (2009) sosyo-kültürel yönlerine vurgu yaparak matematiksel kanıtı, ilgili kavramları anlayan herkesi ikna eden ve aksine tek bir örnek bile verilemeyen kesin bir argüman olarak tanımlamaktadır. Benzer şekilde Stylianides (2007a) kanıtın sosyal olarak inşa edildiğini ve geçerliliğinin sınıf normlarına bağlı olduğunu belirtmektedir. Bu bağlamda sınıf tarafından daha fazla gerekçeye ihtiyaç duyulmadan kabul edilen ifadeler yardımıyla, öğrencilerin kavramsal olarak algılayabileceği muhakeme biçimleri kullanılarak diğer teoremlerin kanıtları yapılır ve kanıtlar sınıf düzeyine uygun olan farklı temsil biçimleri ile iletilir. Tüm bu tanımlardan yola çıkarak matematiksel kanıtın süreç olarak nitelendirilmesini sağlayan en önemli unsurun muhakeme olduğu söylenebilir. Nitekim Laborde (2000) kanıt yapma sürecinde varsayımda bulunma, keşfetme, genelleme gibi becerileri kullanabilmek için muhakemenin gerektiğini, öte yandan kanıt yapmanın öğrencilerin muhakeme becerilerini geliştirmek için bir araç olarak kullanabileceğini belirtmektedir.

Matematiksel muhakemenin; muhakeme yaparken ortaya çıkan argümanların yapısı ve bunların birbirleriyle ilişkisini açıklayan bir sistem ile muhakeme sürecinde ortaya çıkan eylemler olmak üzere birbirini destekleyen iki odak noktası bulunmaktadır. Bu bağlamda öğrenciler muhakeme sürecinde varsayımda bulunma, genelleme, gerekçelendirme, kanıtlama gibi eylemleri gerçekleştirirken tümdengelimsel, tümevarımsal, geri çıkarımsal gibi yapılar ortaya çıkmaktadır (Jeannotte ve Kieran, 2017). Muhakeme sürecinde gerçekleşen eylemlerden biri varsayımda bulunmadır. Varsayım, mantıklı görünen ancak doğruluğu henüz kanıtlanmamış matematiksel cümleler, varsayımda bulunma ise bir şeyin doğru olduğunu tahmin etme ya da hissetme ve bunun doğruluğunu araştırma süreci olarak tanımlanmaktadır (Mason ve diğerleri, 2010). Yine muhakeme sürecinde gerçekleşen eylemlerden biri olan genelleme için Yıldırım (1996), mevcut nesne ya da ilişkinin gözlemi sonucu oluşan ve o nesne ya da ilişkinin parçası olduğu tüm sınıf hakkında doğru olduğu düşünülen bir yargı olduğunu belirtmektedir. Gerekçelendirme ise kabulleri ve matematiksel muhakeme türlerini kullanarak bir iddianın doğruluğunu gösteren bir argüman olarak tanımlanmaktadır (Staples ve diğerleri, 2012). Gerek yapısal gerekse süreç bağlamında matematiksel muhakemede amaç sadece doğruyu gösterme değil, neden doğru olduğunu da açıklama olmalı ve muhakemenin tüm biçimleri de matematik sınıflarında kullanılmalıdır (Tanışlı ve Yavuzsoy Köse, 2020).

Muhakeme sürecinde oluşan argümanların yapısı ve bunların birbirleriyle ilişkisi incelendiğinde, tümdengelimsel muhakemenin bilinen bir durumdan yeni ve özel bir sonuca ulaşma, tümevarımsal muhakemenin ise bilinenlerden yola çıkarak bilinmeyen hakkında çıkarımda bulunmayı sağlayan muhakeme olduğu görülmektedir (Reid ve Knipping, 2010). Bu bağlamda Şekil 1'de sunulduğu gibi "İki tek sayının toplamı çifttir." önermesinin ilkokul üçüncü sınıf öğrencileri tarafından yapılan görsel kanıtı tümdengelimsel muhakeme ile nitelendirilebilir (Ball ve diğerleri, 2002):

**Şekil 1**

*"İki tek sayının toplamı çifttir." Önermesinin Çubuklar Yardımıyla Görsel Kanıtı (Ball ve diğerleri, 2002)*

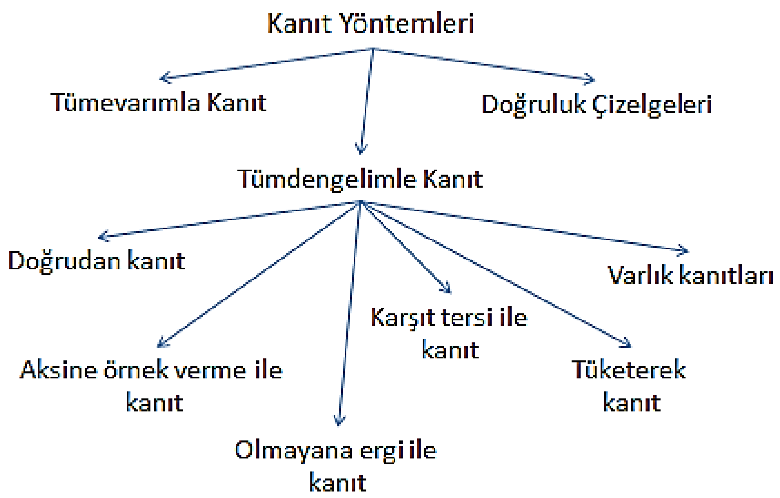


"İki tek sayının toplamı çifttir." önermesinin özel örneklerden yararlanılarak deneysel doğrulanması ise tümevarımsal muhakeme ile nitelendirilebilir. Deneysel doğrulamalar hangi düzeyde olursa olsun geçerli bir kanıt yöntemi olarak kabul edilmemekte; ancak öğrencilerin iddialarını test etmek, problemi analiz etmek ve varsayımda bulunmak için stratejik örnekler seçerek deneysel doğrulama yapmalarının, bir sonraki adım olan kanıt yapmada yardımcı olduğu belirtilmektedir (Yılmaz, 2021).

Kanıtın farklı tanımlarla ele alınmasının yanı sıra kanıt yöntemlerinin sınıflandırılmasında da farklılıklar olduğu belirlenmiş (Bayazıt, 2017; Rossi, 2006; Stefanowicz, 2014) ve bu sınıflamalar incelenerek kapsamlı bir sınıflandırma oluşturulmuştur. Buna göre kanıt yöntemleri tümevarımla kanıt, tümdengelimle kanıt ve doğruluk çizelgeleri olarak Şekil 2'deki gibi üç temel gruba ayrılmıştır:

**Şekil 2**

*Kanıt Yöntemleri*




Şekil 2'de görüldüğü gibi tümdengelimle kanıt yöntemi; doğrudan kanıt, aksine örnek verme ile kanıt, olmayana ergi ile kanıt, karşıt tersi ile kanıt, tüketerek kanıt ve varlık kanıtları olarak sınıflandırılmıştır. Bu araştırma kapsamında ele alınan kanıt yöntemlerinden biri olan doğrudan kanıt, bir önermenin doğruluğunun bilinen tanım, teorem ve kurallar kullanılarak kanıtlanması iken aksine örnek verme, verilen önermenin yanlış olduğunu gösteren en az bir örnek bularak gerçekleştirilen kanıt türüdür. Tüketerek kanıt ise önermenin tanımlandığı kümede tüm durumların tek tek denenerek önermenin doğru olduğunun gösterilmesidir (Stefanowicz, 2014). Formel kanıt yöntemlerinin yanı sıra özellikle ilköğretim çağındaki küçük çocukların anlayabileceği düzeyde görsel, açıklayıcı kanıtlara da yer verilmesi ve bu kanıtların bulundukları düzey için geçerli sayılması gerektiği belirtilmektedir (Hanna, 1990; 2000). Bu bağlamda Stylianides ve Stylianides (2009) küçük çocukların yaptıkları genellemelerin kanıt olarak isimlendirilebileceğini vurgulamaktadırlar. Küçük çocukların kanıt kabul edilen argümanlar oluşturabildikleri, bu nedenle ilköğretim düzeyindeki öğrencilerin matematiği anlamalarını sağlamak için kanıt yapmaları pek çok araştırmacı tarafından önerilmektedir (Derek, 2011; Stylianides, 2007b).

Bununla birlikte öğrencilerin kitap öğretmen gibi otoriteler tarafından kendilerine sunulan çeşitli kuralları, formülleri ezberlemek yerine, muhakeme yaparak kendi kanıtlarını yapmaları ve böylece matematiğe karşı olumlu tutum geliştirmeleri sağlanabilir. Benzer bir görüşü savunan Zaslavsky ve diğerleri (2012) öğrencilerin matematikçilerinkine benzer muhakeme deneyimi yaşamalarını belirtmekte, matematiksel bilginin doğasını ve matematikteki sonuçların nedenlerini anlamalarının önemine vurgu yapmaktadırlar. Böylece okullarda karşılaştıkları kanıtların öğrencilere mantıksal düşünme, iletişim kurma becerilerini kazandırdığını, öğrencilerin problem çözme süreçlerini öğrenmelerine yardımcı olduğunu belirtmektedirler. Nitekim öğrencilerin muhakeme yaparak bir fikirden başka bir fikri oluşturmaları, kavramlar arasında ilişki kurmaları, bu ilişkileri gerekçelendirebilmeleri güçlü bir bilgi ağı oluşmasını sağlamaktadır (Brodie, 2010). Bu doğrultuda ortaokul öğrencilerinin kanıt yapma sürecindeki muhakemelerini incelemek bu araştırmanın temel odak noktasını oluşturmaktadır.

## Yöntem

Bu bölümde araştırmanın desenine, katılımcılarına, veri toplama aracı ve sürecine, verilerin analizine, araştırmanın sınırlılıklarına, araştırmanın geçerlik ve güvenirliği ile etik konusunda alınan önlemlere yer verilmiştir.

### Araştırmanın Deseni

Bu araştırmada verilerin toplanması, çözümlenmesi ve analiz süreçlerinde nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Nitel araştırmalar olayları, algıları doğal ortamlarında anlama, yorumlama ve bağlamlaştırma amacı ile yapılan tümevarımsal bir yaklaşımdır (Glesne, 2013). Bu amaçla araştırmacılar tarafından gözlem, görüşme ve doküman inceleme yoluyla elde edilen veri bütüncül bir biçimde ortaya konularak yorumlanır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu çalışma kapsamında ise temel nitel araştırma yolu ile ortaokul öğrencilerinin kanıtlama sürecindeki muhakemelerine odaklanılmış ve doküman inceleme yoluyla veri elde edilmiştir.

### Araştırmanın Katılımcıları

Katılımcıların seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Ortaokulun öğrencilerde tümdengelimsel muhakemenin gelişiminde kritik bir dönem olması ve yedinci sınıf öğrencilerinin informel kanıt ile formel kanıt arasında geçiş evresinde bulunmaları (De Villiers, 2003; Epp, 1998; NCTM, 2000) nedeniyle bu çalışmanın yedinci sınıf öğrencileri ile yapılmasının uygun olacağı düşünülmüştür. Araştırmacı tanıdığı ve önceden gözlemlemiş olduğu yedinci sınıflar arasından çalışma için gönüllü, farklı başarı düzeylerinde öğrencilerin olduğu bir sınıf seçmiştir. Bu sınıfta 15 kız, 16 erkek öğrenci bulunmaktadır. Seçilen sınıfın altıncı sınıf yılsonu matematik dersi not ortalaması 78,25 olmakla birlikte, bu sınıftaki öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun sosyo-ekonomik durumu orta düzeydedir. Aynı zamanda sınıftaki öğrencilerin tamamı 2007 doğumludur. Araştırmaya başlamadan önce katılımcılara araştırma hakkında gerekli bilgilendirmeler yapılmış ve hem katılımcılardan hem de velilerinden araştırmaya katılımlarına ilişkin gerekli izinler alınmıştır. Buna göre 2019-2020 eğitim öğretim yılında, Eskişehir ilinde, bir devlet ortaokulunda öğrenim gören toplam 31 7. sınıf öğrencisi katılımcı olarak seçilmiştir.

### Veri Toplama Aracı

Bu araştırmanın veri toplama aracı olan açık uçlu görevler hazırlanırken öğrencilerin bildikleri ifadeler topluluğu, kavrayabilecekleri argümantasyon ve temsil biçimleri göz önünde bulundurulmuştur. Buna göre görevlerin yedinci sınıftan önceki sınıf kazanımları ile ilgili en temel ve basit yargıları içermesine ve alan yazında benzer yaş grubuna uygulanan matematiksel kanıt problemleri ile uyumlu olmasına dikkat edilmiştir. Aynı zamanda öğrencilerinin bulundukları sınıf düzeyi dikkate alınarak, ölçme aracındaki görevler tümdengelimle kanıt yöntemlerinden doğrudan kanıt, aksine örnek verme ile kanıt ve tüketerek kanıt yöntemleri ile sınırlandırılmıştır. Hazırlanan görevlerin ölçme amacına uygunluğunun tespiti için iki alan uzmanının görüşüne başvurulmuş, verilen dönütlere göre düzenlenen görevlerin pilot çalışması yapılmıştır. Pilot çalışmadan elde edilen bulgular ışığında, veri toplama aracında bulunan görevlerden öğrencilerin yaklaşık % 90'ı tarafından anlaşılmayan bir problem ve iki önerme çıkarılmış, iki önermede yanlış anlaşılmalar olduğu fark edilerek düzenlemeler yapılmış ve açık uçlu görevlere son hali verilmiştir. Buna göre araştırmanın verileri, araştırmacı tarafından hazırlanan açık uçlu üç farklı yapıda görev aracılığıyla toplanmıştır.

Bu görevlerden birincisi öğrencilerin doğrudan kanıt yapmaları gereken bir sayı problemidir. Görev 1 (G.1) aşağıda sunulmuştur:

*GÖREV 1. Ali bir oyun bulur. Bir tam sayı alır ve 5 ile çarpar, sonra 12 ekler. Daha sonra başlangıçtaki sayıyı çıkarır ve sonucu 4'e böler. Cevabın, her zaman ilk sayıdan 3 fazla olduğunu fark eder. Ayşe ise bunun hep bu şekilde sonuçlanacağını düşünmediği için ilk sayıdan başka bir sayı dener. Ali ve Ayşe sonucun her zaman ilk sayıdan 3 fazla olacağına karar verirler. Sence haklılar mı? Bir arkadaşını sonucun her zaman ilk sayının üç fazlası olacağına nasıl ikna edersin?*

Bu görev hazırlanırken altıncı sınıf cebir öğrenme alanında bulunan sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade, verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazma, cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplama kazanımları dikkate alınmıştır.

İkinci görev, içinde farklı önermelerin olduğu bir görevdir. Bu önermelerden Önerme 2b (Ö.2b) öğrencilerin doğrudan kanıt yapmaları gereken, Önerme 2a (Ö.2a), Önerme 2c (Ö.2c) ve Önerme 2d (Ö.2d) ise aksine örnek vererek kanıt yapmaları gereken sayı önermeleridir. Önerme 2e (Ö.2e) öğrencilerin tüketerek kanıt yapmaları gereken bir önerme, Önerme 2f (Ö.2f), Önerme 2g (Ö.2g), Önerme 2h (Ö.2h) ve Önerme 2i (Ö.2i) ise doğrudan kanıt yapmaları gereken geometri önermeleridir. Görev 2 aşağıda sunulmuştur:

*GÖREV 2: Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur? Nedenleri ile birlikte yazın.*

*a) Bir sayı başka bir sayıdan daha büyükse, büyük olan sayı her zaman daha fazla çarpana sahiptir.*

*b) İki tek sayının toplamı çifttir.*

*c) Her sayı ardışık iki sayının toplamı şeklinde yazılabilir.*

*d) 2'nin katı olan bir sayı her zaman 4'ün de bir katıdır.*

*e) A = {1,2,3,4,5} ve n sayısı A kümesinin bir elemanı ise, $n^2 - n + 11$ sayısı her zaman bir asal sayıdır.*

*f) Karşılıklı kenarları birbirine paralel olan ve bir açısının ölçüsü 90º olan bütün dörtgenler dikdörtgendir.*

*g) Her kare bir paralelkenardır.*

*h) Karşılıklı kenarları paralel olan bütün dörtgenler paralelkenardır.*

*i) Karşılıklı açılarının ölçüleri eşit olan bütün dörtgenler paralelkenardır.*

İkinci görevde de yedinci sınıftan önceki sınıf kazanımları dikkate alınmıştır. Buna göre sayı önermelerinde altıncı sınıf sayılar ve işlemler öğrenme alanında bulunan doğal sayıların çarpanlarını ve katlarını belirleme, iki doğal sayının ortak bölenleri ile ortak katlarını belirleme, bir doğal sayının kendisiyle tekrarlı çarpımını üslü ifade olarak yazma ve değerini hesaplama, asal sayıları özellikleriyle belirleme kazanımları dikkate alınmıştır. Aynı zamanda üçüncü sınıf sayılar ve işlemler öğrenme alanında bulunan tek ve çift doğal sayıları kavrama kazanımı dikkate alınmıştır. Geometri önermelerinde beşinci sınıf geometri öğrenme alanında bulunan dikdörtgen, paralelkenar, eşkenar dörtgenin temel elemanlarını belirleme ve çizme ile üçgen ve dörtgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamını belirleme ve verilmeyen açıyı bulma kazanımları dikkate alınmıştır.

Üçüncü görev, öğrencilerin doğrudan kanıt yapmaları beklenen bir geometri görevidir. Görev 3 (G.3) aşağıda sunulmuştur:

*GÖREV 3: Bir dik üçgende dar açıların ölçüleri toplamı kaç derecedir? Neden?*

Bu görevde beşinci sınıf geometri öğrenme alanındaki açılarına ve kenarlarına göre üçgenler oluşturma, oluşturulmuş farklı üçgenleri kenar ve açı özelliklerine göre sınıflandırma, üçgen ve dörtgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamını belirleme ve verilmeyen açıyı bulma kazanımları dikkate alınmıştır.

## Veri Toplama Süreci

Bu çalışmada yedinci sınıf öğrencilerinin kanıtlama süreçlerindeki muhakemelerini belirlemek amaçlandığı için veri toplama aracı olarak problem ve önermelerden oluşan toplam üç açık uçlu görev, 31 öğrenciye yazılı olarak uygulanmıştır. Öğrencilere çözümlerini gerçekleştirebilmeleri için yeterince süre tanınmış ve görevlerin uygulanması 80 dakika sürmüştür.

## Verilerin Analizi

Nitel veri analizi; araştırmacının verileri düzenlediği, analiz birimlerine ayırdığı, sentezlediği, biçimleri ortaya çıkardığı, önemli değişkenleri keşfettiği ve hangi bilgileri rapora yansıtacağına karar verdiği bir süreçtir (Bogdan ve Biklen, 1992). Araştırma verilerinin çözümlenmesinde içerik analizi tekniği kullanılmıştır. Bu bağlamda toplanan veriler derinlemesine analiz edilerek, bu verilerin altında yatan ve belirgin olmayan kavramlar ile bunlar arasındaki ilişkiler kodlama aracılığıyla ortaya çıkarılmıştır. Kodlar oluşturulurken hem katılımcıların yazdıkları ifadelere, hem de alan yazında daha önce belirlenmiş kavramlara başvurularak isimler oluşturulmuştur. Kodlar bir araya getirilerek ortak yönleri araştırılmış, alt temalar ile temalar oluşturulmuş ve verilerin yüzde ve frekans dağılımları (%(f)) tablolaştırılarak sunulmuştur. Araştırmada ortaya çıkan kodlar, alt temalar ve temalar arası ilişkiler Tablo 1'de sunulmuştur:

**Tablo 1**

*Araştırmada Ortaya Çıkan Kodlar, Alt Temalar ve Temalar*

| Temalar | Alt Temalar | Kodlar | Alt Kodlar |
|---|---|---|---|
| Görevin Anlaşılması | Görevi Anlama | | |
| | Görevi Anlamama | Görevi Yanıtsız Bırakma | |
| | | Görevi Tekrar Yazma | |
| | | Görevdeki Verileri Eksik Kullanma | |
| | | Görevdeki Önermenin Öncülünü Anlamama | |

**Tablo 1**

*(Devam)*

| Temalar | Alt Temalar | Kodlar | Alt Kodlar | Temalar |
|---|---|---|---|---|
| | | Görevdeki Verilerin Dışına Çıkma | | |
| | | Görevdeki Verileri Hatalı Kullanma | | |
| Muhakeme | Deneysel Doğrulama | Bir Örnekle Deneme | | |
| | | Birden Fazla Örnekle Deneme | Rastgele Örnek Seçme | |
| | | | Stratejik Örnek Seçme | |
| | | Yalnızca Önermeyi Doğrulayan Örnek Verme | | |
| | Mantıksal Olmayan Gerekçelendirme | Çarpım-çarpan ilişkisi bilgisi eksikliği | | |
| | | Tek–çift sayı bilgisi eksikliği | | |
| | | Dörtgenlerin Tanım Bilgisi Eksikliği | | |
| | | Dörtgenlerin Özellik Bilgisi Eksikliği | | |
| | | Açı- paralellik bilgisi eksikliği | | |
| | | Çarpan–bölen bilgisi eksikliği | | |
| | | Ardışık sayı bilgisi eksikliği | | |
| | | Asal Sayı Bilgisi Eksikliği | | |
| | Kapsadığı Dörtgeni Aksine Örnek Vererek Hatalı Gerekçelendirme | Hatalı Niceleyici Kullanma | | |
| | Prototip Çizim Üzerinde Sembolle Gerekçelendirme | | | |
| | Hatalı Çizime Dayalı Gerekçelendirme | Hatalı Niceleyici Kullanma | | |
| | Tümdengelimsel Muhakeme | Dörtgenlerin Tanım Bilgisine Dayalı Gerekçelendirme | | |
| | | Dörtgenlerin Özellik Bilgisine Dayalı Gerekçelendirme | | |
| | | Bir Dörtgenin Kapsadığı Dörtgene Dayalı Gerekçelendirme | | |
| | | Sayısal İfadenin Kullanıldığı Şekille Desteklenmiş Gerekçelendirme | | |
| | | Aksine Örnek Vererek Kanıt Yapma | Yalnızca Aksine Örnek Verme | |
| | | | Hem Doğrulayan Örnek Hem Aksine Örnek Verme | |
| | | Tüketerek Kanıt Yapma | | |

## Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu araştırma 2019-2020 eğitim öğretim yılı, Eskişehir ili merkezinde bulunan bir devlet ortaokulunda öğrenim gören yedinci sınıf öğrencilerden elde edilen nitel veriler ile sınırlıdır. Bununla birlikte araştırma yedinci sınıf öğrencilerinin kavramsal olarak algılayabileceği düzeyde olan doğrudan kanıt, aksine örnek vererek kanıt ve tüketerek kanıt görevleri ile sınırlandırılmıştır.

## Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Araştırmanın güvenirliğini sağlamak adına bir alan uzmanı ve araştırmacı tarafından bağımsız olarak yapılan kodlamalar arasındaki benzerlik ve farklılıklar karşılaştırılarak nedenleri üzerine tartışılmıştır. Bu iki kodlayıcı arasında yüksek düzeyde uyum bulunurken, uyum sağlanamayan kodlar tekrar incelenmiş ve ortak bir karar verilmiştir. Kodlamaların düzenlenmiş hali farklı bir alan uzmanına sunulmuş, farklı olan kodlar tekrar incelenmiş ve kodlamalara son hali verilmiştir. Bu araştırmada sonuçların aktarılabilirliğini artırmak için amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmış, katılımcıları belirleme ölçütleri, katılımcıların özellikleri, araştırmanın sınırlılıkları açıkça ortaya konulmuş, araştırma sonuçlarının hangi bağlamda ele alınıp yorumlanabileceği belirtilmiştir. Aynı zamanda, veri toplama araçlarının özellikleri ve veri analizi ile ilgili aşamalar ayrıntılı bir biçimde tanımlanmış, öznel yargılardan uzak durulmaya çalışılmıştır.

## Etik Konular

Bu araştırma için Anadolu Üniversitesi'nden 23.01.2019 tarih ve 54380210-050.99 sayılı Etik Kurul İzni ve Eskişehir İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nden 26.02.2019 tarih ve 12377788-604.01.02-E.4196611 sayılı izin ile araştırma kapsamındaki verilerin toplanmasına onay alınmıştır. Araştırmaya başlamadan önce katılımcılara araştırmanın amacı hakkında ve elde edilen verilerin sadece araştırma kapsamında kullanılacağına dair araştırmaya gönüllü katılım formu ile bilgilendirme yapılmış, ayrıca veli izin formu ile öğrenci velilerinden izin alınmıştır. Araştırmada katılımcılarla ilgili isim ve soy isim kullanılmamış, öğrencilere kod isim verilmiştir.

# Bulgular

Ortaokul öğrencilerinin farklı kanıt yöntemleri ile kanıtlamaları gereken problem ve önermelerde kanıtlama süreçlerindeki muhakemelerini incelemek temel amaç olduğu için ilk olarak öğrencilerin problem ve önermeleri anlamayıp anlamadıkları incelenmiş, ardından problem ve önermeleri anlayan öğrencilerin muhakemeleri belirlenmiştir.

## Öğrencilerin Görevleri Anlamalarına İlişkin Bulgular

Öğrencilerin görevi yanıtlamaları, verilen yanıtlarda verilenler ile istenilenleri doğru belirleyebilmeleri ve bu verileri doğru kullanabilmeleri görevi anladıklarının göstergesidir. Bununla birlikte bazı öğrencilerin görevleri yanıtsız bıraktığı, görevdeki problem cümlesini ya da önermeyi tekrar yazdığı, verileri eksik kullandığı, görevdeki önermenin öncülünü anlamadığı, verilerin dışına çıktığı ya da verileri hatalı kullandıkları, dolayısıyla görevi anlamadıkları görülmüştür. Öğrencilerin görevleri anlamalarına ilişkin yüzde ve frekanslar (%(f)) Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2'de görüldüğü gibi doğrudan kanıt yapmayı gerektiren bir sayı önermesi olan Önerme 2b ile aksine örnek vererek kanıt yapmayı gerektiren Önerme 2d'de önermeyi anlama yüzdesinin %90'ının üstüne çıktığı belirlenmiş ve bu önermeler sunulan görevler içinde anlama yüzdesinin en yüksek olduğu görevler olarak kabul edilmiştir. Sunulan görevlerde yedinci sınıftan önceki sınıf kazanımları temel alındığı için öğrencilerin bu görevleri anlama yüzdesinin daha yüksek olması beklenirken ne yazık ki pek çok görevde anlama yüzdesinin %70'in altında kaldığı görülmüştür. Bununla birlikte öğrencilerin çoğunluğunun tüketerek kanıt yapmayı gerektiren bir önerme olan Önerme 2e'yi anlamada sıkıntı yaşadıkları belirlenmiştir.

**Tablo 2**

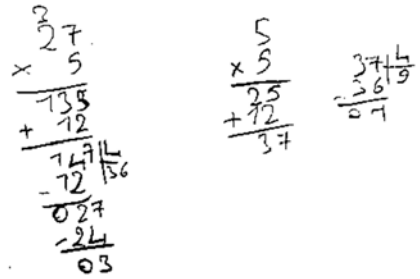
*Öğrencilerin Görevleri Anlamalarına İlişkin Yüzde ve Frekanslar (%(f))*

| | | **Görevi Anlama** | **Görevi Anlamama** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Görevi Yanıtsız Bırakma | Görevi Tekrar Yazma | Görevdeki Verileri Eksik Kullanma | Görevdeki Önermenin Öncülünü Anlamama | Görevdeki Verilerin Dışına Çıkma | Görevdeki Verileri Hatalı Kullanma |
| G.1 | | 70,9 (22) | 3,2 (1) | 3,2 (1) | 22,5 (7) | | | |
| Ö.2b | | 90,3 (28) | 3,2 (1) | | 6,4 (2) | | | |
| Ö.2a | *% (f)* | 61,2 (19) | 12,9 (4) | 25,8 (8) | | | | |
| Ö.2c | | 64,5 (20) | 25,8 (8) | 9,6 (3) | | | | |
| Ö.2d | | 90,3 (28) | 6,4 (2) | 6,4 (2) | | | | |
| Ö.2e | | 32,2 (10) | 29 (9) | 6,4 (2) | 12,9 (4) | | 16,1 (5) | 6,4 (2) |
| Ö.2f | | 77,4 (24) | 19,3 (6) | 3,2 (1) | | | | |
| Ö.2g | | 77,4 (24) | 19,3 (6) | 3,2 (1) | | | | |
| Ö.2h | | 61,2 (19) | 25,8 (8) | 9,6 (3) | | 3,2 (1) | | |
| Ö.2i | | 64,5 (20) | 25,8 (8) | 6,4 (2) | | 3,2 (1) | | |
| G.3 | | 64,5 (20) | 9,6 (3) | | | | | 25,8 (8) |

Tablo 2'de sunulduğu gibi doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemi olan Görev 1'de öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun problemi anladığı söylenebilir. Öte yandan bu görevi anlamayan öğrencilerin genel olarak görevdeki verileri eksik kullandığı belirlenmiştir. Örneğin İdris, aldığı sayıları beş ile çarpıp, 12 eklemiş ve sonra da çıkan sonucu dörde bölmüş, yani başlangıçtaki sayıyı çıkarmayı ihmal ederek görevdeki verileri eksik kullanmıştır. İdris'in yaptığı çözüm Görsel 1'de örnek olarak sunulmuştur:

**Görsel 1**

*İdris'in Görev 1'de Çözümü*

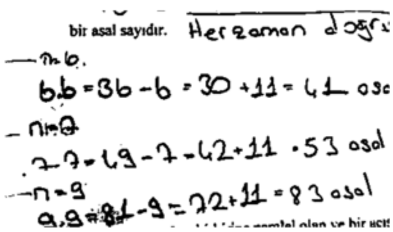


Aksine örnek verme önermelerinden biri olan Önerme 2a'da önermeyi anlamayan sekiz öğrencinin bu önermeyi tekrar yazdığı görülürken, bir diğer aksine örnek verme önermesi olan Önerme 2c'de ise önermeyi anlamayan sekiz öğrencinin önermeyi yanıtsız bıraktığı belirlenmiştir.

Tüketerek kanıt yapmayı gerektiren Önerme 2e öğrencilere sunulan görevler içinde görevi anlamama yüzdesinin en yüksek olduğu önermedir. Bu önermeyi anlamayan öğrencilerin çoğunlukla önermeyi yanıtsız bıraktığı belirlenirken, bazı öğrencilerin önermedeki verileri eksik, hatalı kullandığı ya da verilerin dışına çıktığı görülmektedir. Örneğin Elif verilen kümenin elemanlarının dışına çıkarak altı, yedi ve sekiz sayıları ile verilen önermeyi doğrulamaya çalışmıştır. Elif'in çözümü Görsel 2'de sunulmuştur:

**Görsel 2**

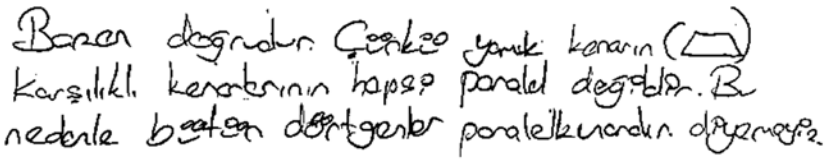
*Elif'in Önerme 2e'de Çözümü*




Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri önermeleri olan Önerme 2f ve Önerme 2g'de önermeyi anlama yüzdesinin %70'in üstünde olduğu belirlenirken, Önerme 2h ve Önerme 2i'de ise bu oranın %70'in altında kaldığı görülmüştür. Bu önermeleri anlamayan öğrencilerin çoğunlukla önermeleri yanıtsız bıraktığı ya önermeyi tekrar yazdığı belirlenmiştir. Bununla birlikte Önerme 2h ve Önerme 2i'de bazı öğrencilerin önermenin öncülünü anlamadıkları belirlenmiştir. Örneğin Önerme 2h'de öncül olarak verilen karşılıklı kenarların paralelliğini anlamayan İrem, bütün dörtgenlerin karşılıklı kenarlarının paralel olmadığını belirterek sadece bir çift kenarı paralel olan yamuk örneğini vermiş, aynı zamanda hatalı niceleyici kullanarak önermenin bazen doğru olduğunu belirtmiştir. İrem'in çözümü Görsel 3'te sunulmuştur:

**Görsel 3**

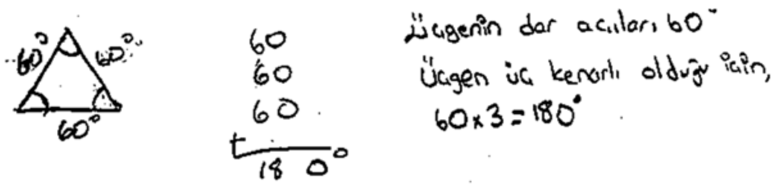
*İrem'in Önerme 2h'de Çözümü*



Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri problemi olan Görev 3'te ise görevi anlamayan sekiz öğrencinin görevde verilen dik üçgeni ihmal ederek görevdeki veriyi hatalı kullandığı belirlenmiştir. Bu öğrencilerden biri olan Müjgan'ın Görsel 4'te sunulduğu gibi deneysel doğrulama yapmaya çalıştığı; ancak görevdeki dik üçgeni ihmal ettiği görülmüştür:

**Görsel 4**

*Müjgân'ın Problem 3'te Çözümü*




## Öğrencilerin Kanıtlama Sürecindeki Muhakemelerine İlişkin Bulgular

Görevleri anlayan öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde, sayı problem ve önermelerinde deneysel doğrulama, mantıksal olmayan gerekçelendirme ya da tümdengelimsel muhakeme yaptıkları belirlenmiştir. Geometri görevlerinde ise bu muhakemelere ek olarak kapsadığı dörtgeni aksine örnek vererek hatalı gerekçelendirme, prototip çizim üzerinde sembolle gerekçelendirme ya da hatalı çizime dayalı gerekçelendirme olmak üzere farklı şekillerde muhakeme yaptıkları belirlenmiştir. Buna göre öğrencilerin görevlerdeki muhakemelerine ilişkin yüzde ve frekanslar (%(f)) Tablo 3'te sunulmuştur:

**Tablo 3**

*Öğrencilerin Görevlerdeki Muhakemelerine İlişkin Yüzde ve Frekanslar (%(f))*

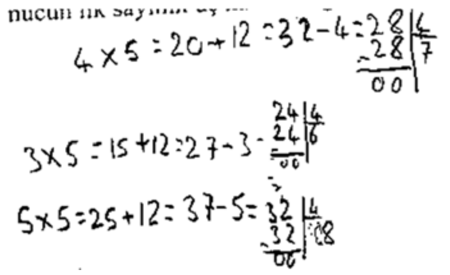
| | | Muhakeme | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Deneysel Doğrulama | Mantıksal Olmayan Gerekçelendirme | Kapsadığı Dörtgeni Aksine Örnek Vererek Hatalı Gerekçelendime | Prototip Çizim Üzerinde Sembolle Gerekçelendirme | Hatalı Çizime Dayalı Gerekçelendirme | Tümdengelimsel muhakeme |
| G.1 | | 67,7 (21) | 3,2 (1) | | | | |
| Ö.2b | | 83,8 (26) | 6,4 (2) | | | | |
| Ö.2a | % (f) | 12,9 (4) | 16,1 (5) | | | | 32,2 (10) |
| Ö.2c | | 6,4 (2) | 38,7 (12) | | | | 19,3 (6) |
| Ö.2d | | 16,1 (5) | 22,5 (7) | | | | 51,6 (16) |
| Ö.2e | | 9,6 (3) | 9,6 (3) | | | | 12,9 (4) |
| Ö.2f | | | | 58,0 (18) | 6,4 (2) | 3,2 (1) | 9,6 (3) |
| Ö.2g | | | | 12,9 (4) | 25,8 (8) | 3,2 (1) | 35,4 (11) |
| Ö.2h | | | 6,4 (2) | 16,1 (5) | 6,4 (2) | | 32,2 (10) |
| Ö.2i | | | 12,9 (4) | 22,5 (7) | 6,4 (2) | | 22,5 (7) |
| G.3 | | 32,2 (10) | | | | | 32,2 (10) |

Öğrencilerin doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı görevlerini kanıtlama sürecinde genellikle özel durumlar kullanarak deneysel doğrulama yaptıkları belirlenmiştir. Buna karşın öğrencilerin aksine örnek vererek kanıt yapmaları gereken önermelerde doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı görevlerine göre daha başarılı oldukları söylenebilir. Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri önermelerinde ise öğrencilerin genel olarak bir dörtgenin kapsadığı başka bir dörtgeni aksine örnek vermek için kullandıkları ya da prototip çizim üzerinde sembolle gerekçelendirme yaptıkları görülmüştür. Bununla birlikte geometri görevlerinde tümdengelimsel muhakeme yapabilen öğrenciler de mevcuttur. Öğrencilerin mantıksal olmayan gerekçelendirmelerinin görevlere göre farklılık gösterdiği ve genellikle ön bilgi eksikliğinden kaynaklandığı saptanmıştır.

Tablo 3'te sunulduğu gibi öğrencilerin doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı görevleri olan Görev 1 ve Önerme 2b'de genel olarak deneysel doğrulama yaptıkları görülmüştür. Görev 1'de öğrencilerin yaklaşık %68'inin deneysel doğrulama yaparak problemi çözmeye çalıştıkları belirlenmiştir. Bu görevde deneysel doğrulama yapan öğrencilerinin bir kısmının, herhangi bir tam sayı aldıkları, bu sayıyı beş ile çarpıp 12 ekledikleri, çıkan sonuçtan başlangıçtaki tam sayıyı çıkarıp sonucu dörde böldükleri belirlenmiştir. Yaptıkları işlem sonunda çıkan sonucun tuttukları sayının üç fazlası olacağına karar vermişlerdir. Bazılarının ise aynı sonuca birden fazla örnek deneyerek ulaştıkları belirlenmiştir. Birden fazla örnekle deneme yapan öğrencilerin bir kısmının stratejik örnekler seçerek deneme yaptığı, çoğunluğunun ise rastgele örnekler seçerek deneme yaptığı görülmüştür. Örneğin Enes Görsel 5'te sunulduğu gibi rastgele seçtiği örneklerle doğrulama yapmış ve her seferinde seçtiği ilk sayıyı değiştirerek problemi çözeceğini belirtmiştir:

**Görsel 5**

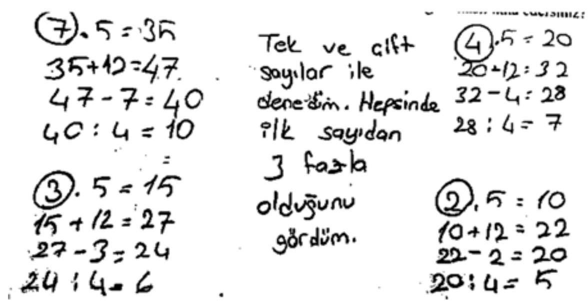
*Enes'in Görev 1'de Çözümü*




Bu görevde stratejik örnekler (tek-çift sayı, bir basamaklı-iki basamaklı-üç basamaklı gibi) seçerek deneme yapan dört öğrenciden biri olan Nefise tek ve çift sayılarla doğrulama yapmayı tercih etmiş ve yaptığı doğrulama sonucu çıkan sonucun her zaman ilk sayının üç fazlası olacağına karar vermiştir. Nefise'nin çözümü Görsel 6'da sunulmuştur:

**Görsel 6**

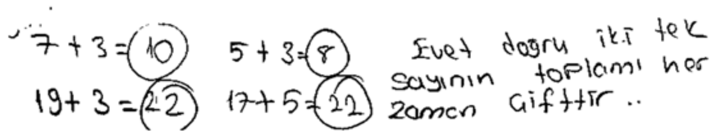
*Nefise'nin Görev 1'de Çözümü*




Benzer şekilde Önerme 2b'de de deneysel doğrulama yapan öğrenci yüzdesinin yüksek olduğu belirlenmiştir. Bu önermede deneysel doğrulama yapan bazı öğrencilerin iki tek sayının çift olduğu sonucuna bir örnekle deneme yaparak ulaştıkları görülürken, öğrencilerin büyük çoğunluğunun aynı sonuca birden fazla örnekle deneme yaparak ulaştığı saptanmıştır. Bu öğrencilerin 17'sinin örneklerini herhangi bir strateji kullanmadan rastgele seçtikleri belirlenmiştir. Büşra'nın rastgele seçtiği tek sayıları toplayarak önermeyi doğruladığı Görsel 7'de sunulmuştur:

**Görsel 7**

*Büşra'nın Önerme 2b'de Çözümü*

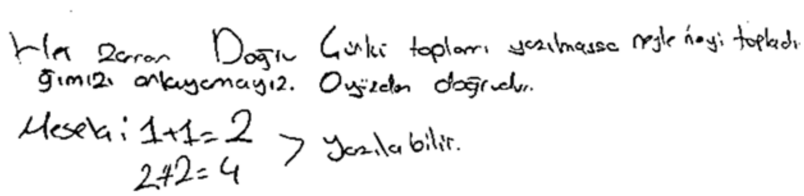



Bununla birlikte az sayıda öğrencinin Görev 1 ve Önerme 2b'de mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptıkları görülmüştür. Görev 1'de bir öğrencinin çarpan-çarpım ilişkisi eksikliğinden, Önerme 2b'de ise iki öğrencinin tek-çift sayı bilgisi eksikliğinden kaynaklı mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir. Tablo 3'te görüldüğü gibi öğrencilerin hiçbiri Görev 1 ve Önerme 2b'de tümdengelimsel muhakeme yapamamıştır.

Önerme 2a, Önerme 2c ve Önerme 2d aksine örnek vererek kanıtlanması gereken önermelerdir. Az sayıda öğrencinin, aksine örnek vermeleri gereken önermelerde yalnızca önermeyi doğrulayan örnek vererek deneysel doğrulama yaptıkları, böylece bu önermelerin her zaman doğru olduğunu belirttikleri görülmüştür. Bu öğrenciler aksine örnek verme eğiliminde bulunmamış, denedikleri bir örneğin önermeyi doğrulamasıyla yetinerek önermenin her zaman doğru olduğunu savunmuşlardır. Örneğin Büşra Önerme 2a'da bir sayı başka bir sayıdan büyükse, büyük olan sayının her zaman daha fazla çarpanı olduğunu göstermek için sekiz ve dördün çarpan sayılarını karşılaştırmış ve büyük olan sayının her zaman daha fazla çarpana sahip olduğu gerekçesini sunarak deneysel doğrulama yapmıştır. Bununla birlikte bazı öğrencilerin bu önermelerde mantıksal olmayan gerekçelendirmeler yaptıkları belirlenmiştir. Önerme 2a'da beş öğrencinin çarpan-bölen bilgisi eksikliğinden kaynaklı büyük olan sayının her zaman daha fazla çarpana sahip olduğunu savundukları, Önerme 2d'de ise yedi öğrencinin yine çarpan-bölen bilgisi eksikliğinden kaynaklı ikinin katı olan bir sayının her zaman dördün de bir katı olduğunu belirttikleri görülmüştür. Önerme 2c, mantıksal olmayan gerekçelendirme yapan öğrenci sayısının en fazla olduğu önermedir. Bu önermede 12 öğrencinin ardışık sayı bilgisi eksikliğinden kaynaklı mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir. Örneğin Melisa Görsel 8'de sunulduğu gibi her sayının iki ardışık sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini göstermek için ardışık sayılar yerine bir ve bir ile iki ve ikiyi örnek olarak vermiş ve önermenin her zaman doğru olduğunu belirterek hatalı gerekçelendirme yapmıştır:

**Görsel 8**

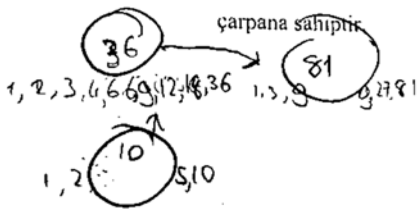
*Melisa'nın Önerme 2c'de Çözümü*




Öte yandan Önerme 2a, Önerme 2c ve Önerme 2d'de bazı öğrencilerin aksine örnek vererek tümdengelimsel muhakeme yaptıkları saptanmıştır. Bu önermelerde öğrencilerin bir kısmının yalnızca aksine örnek vererek kanıt yaptıkları, bir kısmının ise hem aksine örnek verdiği hem de önermeyi doğrulayan örnek vererek önermenin her zaman doğru olmadığını gösterdikleri görülmüştür. Örneğin Önerme 2a'da tümdengelimsel muhakeme yapan 10 öğrenciden biri olan Bahri, Görsel 9'da sunulduğu gibi 36 ve 10 ile 36 ve 81'in çarpan sayılarını karşılaştırmıştır. 36 ve 10'un çarpan sayılarını karşılaştırdığında 36'nın daha fazla çarpana sahip olduğunu belirtmiştir. Öğrenci 36 ve 81'in çarpan sayılarını karşılaştırdığında 81'in 36'dan büyük olmasına karşın 36'nın daha fazla çarpanı olduğunu göstererek bu önermenin her zaman doğru olmadığını yani yanlış olduğunu belirtmiştir:

**Görsel 9**

*Bahri'nin Önerme 2a'da Çözümü*

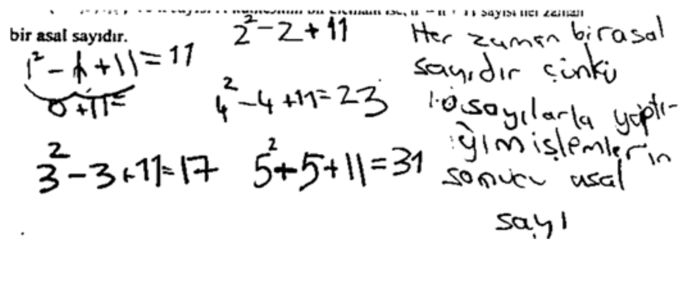



Benzer şekilde Önerme 2d'de öğrencilerin yaklaşık % 52'sinin tümdengelimsel muhakeme yaptığı ve bunların büyük bir çoğunluğunun hem doğrulayan hem de aksine örnek vererek ikinin katı olan bir sayının her zaman dördün de bir katı olmadığını kanıtladıkları, yani önermenin yanlış olduğunu belirttikleri görülmüştür.

Tüketerek kanıt yapmayı gerektiren bir önerme olan Önerme 2e'de üç öğrencinin verilen kümenin elemanlarının tamamı ile değil de bir ya da birkaç elemanı ile deneysel doğrulama yaptığı ve önermenin her zaman doğru olduğunu belirttikleri saptanmıştır. Aynı zamanda bu önermede üç öğrencinin asal sayı bilgisi eksikliğinden kaynaklı mantıksal olmayan gerekçelendirme, dört öğrencinin ise tümdengelimsel muhakeme yaptığı belirlenmiştir. Tümdengelimsel muhakeme yapan öğrencilerden biri olan Yağız kümedeki elemanların tamamını kullanarak tüketerek kanıt yapmış ve sonuçların asal sayı çıkması üzerine bu önermenin her zaman doğru olduğunu kabul etmiştir. Yağız'ın çözümü Görsel 10'da sunulmuştur:

**Görsel 10**

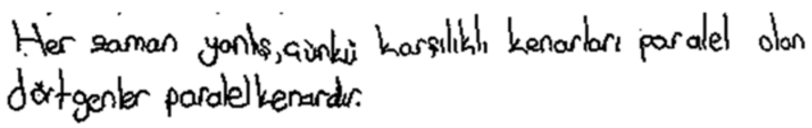
*Yağız'ın Önerme 2e'de Çözümü*




Önerme 2f, Önerme 2g, Önerme 2h ve Önerme 2i ise öğrencilerin doğrudan kanıt yapmaları gereken geometri önermeleridir. Önerme 2h'de iki öğrencinin, Önerme 2i'de ise dört öğrencinin dörtgenlerin tanım bilgisi, özellik bilgisi eksikliği ile ya da açı-paralellik bilgisi eksikliğinden kaynaklı mantıksal olmayan gerekçelendirmeler yaptıkları belirlenmiştir. Örneğin Önerme 2i'de Yağmur, açı ile paralellik arasında ilişki kuramadığı için, karşılıklı kenarları paralel olan dörtgenlerin paralelkenar olduğunu, bu nedenle önermenin her zaman yanlış olduğunu belirterek mantıksal olmayan gerekçelendirme yapmıştır. Yağmur'un çözümü Görsel 11'de sunulmuştur:

**Görsel 11**

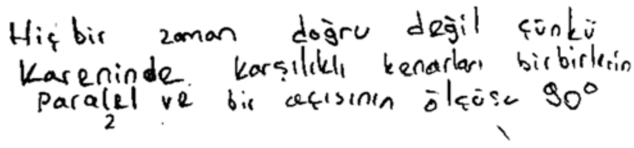
*Yağmur'un Önerme 2i'de Çözümü*




Geometri önermelerinin tamamında bir dörtgenin kapsadığı dörtgenleri aksine örnek vermek için kullanan ve bu nedenle hatalı gerekçelendirme yapan öğrencilerin olduğu görülmüştür. Bununla birlikte Önerme 2f, bir dörtgenin kapsadığı dörtgeni aksine örnek vererek hatalı gerekçelendirme yapan öğrenci yüzdesinin en yüksek olduğu önermedir. Bu önermede 18 öğrencinin karşılıklı kenarları birbirine paralel olan ve bir açısının ölçüsü 90° olan bütün dörtgenlerin dikdörtgen olmadığını, karenin de bu özellikleri sağladığını belirttikleri, dikdörtgenin kapsadığı dörtgen olan kareyi aksine örnek vererek hatalı gerekçelendirme yaptıkları görülmüştür. Aynı zamanda bu öğrencilerden bazılarının hatalı niceleyici kullanarak önermenin bazen doğru olduğunu belirttikleri, bazılarının ise önermenin doğru olmadığını belirttikleri görülmüştür. Dikdörtgen ve kare arasında doğru ve kapsayıcı hiyerarşik ilişki kuramayan ve önermenin doğru olmadığını belirten öğrencilerden biri olan Bahri'nin çözümü örnek olarak Görsel 12'de sunulmuştur:

**Görsel 12**

*Bahri'nin Önerme 2f'de Çözümü*

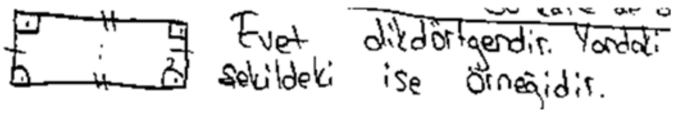



Benzer şekilde Önerme 2i'de öğrencilerin yedisinin karşılıklı açılarının ölçüleri eşit olan bütün dörtgenlerin paralelkenar olmadığını belirttikleri, paralelkenarın kapsadığı dikdörtgen ve kareyi aksine örnek vermek için kullandıkları, bunlardan bazılarının da hatalı niceleyici kullanarak önermenin bazen doğru olduğunu belirttikleri, diğerlerinin ise önermenin yanlış olduğunu belirttikleri görülmüştür. Önermenin yanlış olduğunu belirten Mehmet, "Doğru değildir, çünkü kare ve dikdörtgenin de karşılıklı açılarının ölçüleri eşittir." şeklinde gerekçelendirme yapmıştır.

Geometri önermelerinde bazı öğrencilerin prototip çizim üzerinde sembollerle gerekçelendirmeler yaptıkları belirlenmiştir. Örneğin Önerme 2f'de Azra, bir dikdörtgen prototipi çizerek ve bu çizim üzerinde kullandığı semboller ile karşılıklı kenarları birbirine paralel olan ve bir açısının ölçüsü 90° olan bütün dörtgenlerin dikdörtgen olduğunu savunmuştur. Azra'nın çözümü Görsel 13'te sunulmuştur:

**Görsel 13**

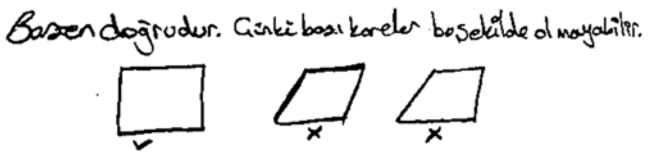
*Azra'nın Önerme 2f'de Çözümü*




Geometri önermelerinde bazı öğrencilerin hatalı çizime dayalı gerekçelendirmeler yaptıkları belirlenmiştir. Örneğin Asya Önerme 2g'de karşılıklı kenarları paralel olmayan bir takım dörtgenler çizerek bunların kare olduğunu iddia etmiş, böylece her karenin bir paralelkenar olmayacağını belirtmiştir. Öğrenci aynı zamanda önermenin bazen doğru olduğunu belirterek hatalı niceleyici kullanmıştır. Asya'nın çözümü Görsel 14'te sunulmuştur:

**Görsel 14**

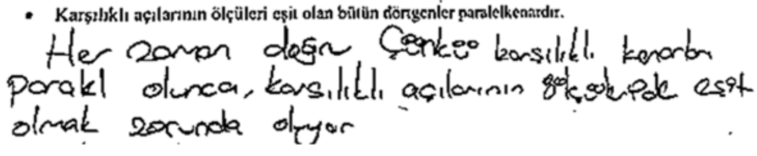
*Asya'nın Önerme 2g'de Çözümü*




Geometri önermelerinde tümdengelimsel muhakeme yapan öğrencilerin muhakemelerinde dörtgenlerin tanım bilgisine, özellik bilgisine ve bir dörtgenin kapsadığı dörtgene dayalı gerekçelendirme olmak üzere üç farklı şekilde gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir. Örneğin Önerme 2g'de her karenin bir paralelkenar olduğunu göstermek için tanım bilgisine dayalı gerekçelendirme yapan sekiz öğrenciden biri olan Eylül "Her zaman doğrudur, çünkü karenin karşılıklı kenarları birbirine paralel olduğu için biz ona da paralelkenar deriz." şeklinde gerekçelendirme yapmıştır. Benzer şekilde Önerme 2i'de karşılıklı açılarının ölçüleri eşit olan bütün dörtgenlerin paralelkenar olduğunu göstermek için tümdengelimsel muhakeme yapan yedi öğrenciden biri olan İrem, karşılıklı kenarların paralel olma durumu ile karşılıklı açıların ölçülerinin eşitliği arasında ilişki kurarak özellik bilgisine dayalı gerekçelendirme yapmış ve bu dörtgenin her zaman paralelkenar olduğunu belirtmiştir. İrem'in çözümü Görsel 15'te sunulmuştur:

**Görsel 15**

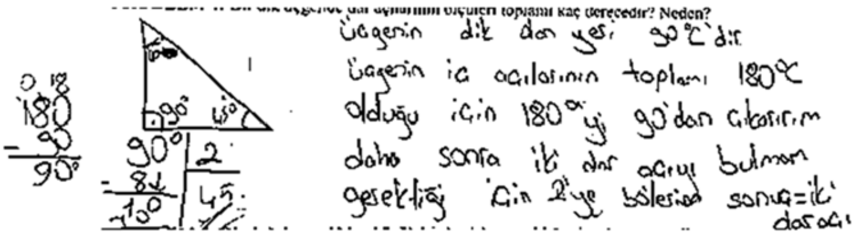
*İrem'in Önerme 2i'de Çözümü*



Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren bir geometri görevi olan Görev 3'te 10 öğrencinin özel bir üçgen seçerek deneysel doğrulama yaptıkları görülmüştür. Deneysel doğrulama yapan öğrencilerden üçünün seçtikleri üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını 180° almadığı belirlenmiştir. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını doğru alan öğrencilerden yedisinin bir dik üçgende dar açıların ölçüleri toplamının 90° olduğunu göstermek için, dik açının 90° ve bir üçgenin iç açı ölçülerinin toplamının 180° olduğu ön bilgisinden hareket ettikleri; ancak ikizkenar dik üçgen örneğini kullanarak doğrulama yaptıkları belirlenmiştir. Bu öğrencilerden Azra, dik açılı üçgende bir tane 90° olduğu için geriye 90° kaldığını göstermiş; ancak 90°'yi ikiye bölerek her bir iç açının 45° olduğunu belirtmiştir. Azra'nın çözümü Görsel 16'da sunulmuştur:

**Görsel 16**

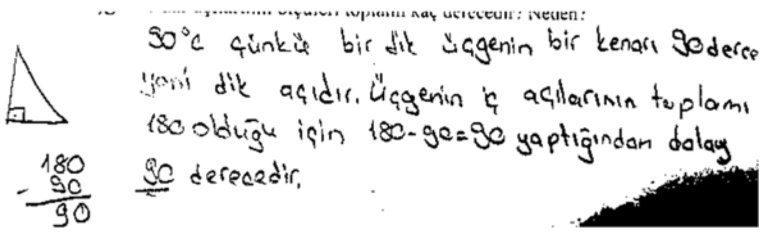
*Azra'nın Görev 3'te Çözümü*



Bununla birlikte bu görevde bir dik üçgende dar açıların ölçüleri toplamının 90° olduğunu göstermek için 10 öğrencinin tümdengelimsel muhakeme yaptığı belirlenirken öğrencilerin gerekçelerinin sayısal ifadenin kullanıldığı şekille desteklenmiş gerekçeler olduğu görülmüştür. Kanıt yapan öğrencilerin hiçbiri cebirsel ifadelerle kanıt yapma yolunu seçmemiş olsalar da açıklamaları yeterli görülmüştür. Bu öğrencilerden Ceren dik üçgende, dik açının 90° ve bir üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamının 180° olduğu ön bilgisinden hareket etmiş, dar açıların ölçüleriyle dik açının ölçüsünün toplamının 180° olabilmesi için dar açıların ölçüleri toplamının 90° olduğu genellemesine ulaşmıştır. Öğrencinin çözümü Görsel 17'de sunulmuştur:

**Görsel 17**

*Ceren'in Görev 3'te Çözümü*



## Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Bu araştırmada ortaokul öğrencilerinin verilen kanıt görevlerindeki kanıtlama süreçleri incelenmiş ve araştırmada ortaokul öğrencileri kanıt yapabilir mi sorusu sorulmuştur. Bunun için farklı kanıt yöntemleri ile çözmeleri gereken üç açık uçlu görev hazırlanmış, bu görevlere yedinci sınıf öğrencilerinin verdikleri yanıtlar incelenmiştir. Bu doğrultuda yedinci sınıf öğrencilerinin kanıtlama süreçlerindeki muhakemeleri ortaya konulmuş ve görevlerdeki muhakemelerinin çeşitlilik gösterdiği saptanmıştır.

Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı görevlerinde genel anlamda örnek vererek deneysel doğrulama yapma eğiliminde oldukları, çoğunlukla bir ya da birden fazla örneği genel bir durumun doğrulanmasında yeterli gördüklerini belirlenmiştir. Öğrencilerin deneysel doğrulamalar yapması pek çok araştırmanın sonuçları arasında yer almıştır (Arslan, 2007; Aylar ve Şahiner, 2016; Flores, 2006; Şen ve Güler, 2015; Tanışlı, 2016; Zaimoğlu, 2012; Zeybek ve Üstün, 2019). Bununla birlikte araştırmanın bulguları öğrencilerin sembolik dili kullanamadıklarını, genellikle aritmetiksel stratejiler kullandıklarını, cebirsel strateji kullanmaya çalışan öğrencilerin de hatalı işlemler yaptıkları için sonuca ulaşamadıklarını göstermiştir. Bu durum pek çok araştırmanın sonuçları ile paralellik göstermektedir (Arslan, 2007; Aylar ve Şahiner, 2016). Buna karşın öğrencilerin aksine örnek vererek kanıt yapmaları gereken önermelerde doğrudan kanıt yapmayı gerektiren görevlerine göre daha başarılı oldukları görülmüştür. Bu durum şu soruyu akla getirmektedir: Evrensel niceleyici kullanılan önermelerde verilen önermeyi çürütmek için aksine bir örnek bulan ve önermenin her zaman doğru olmadığını gösteren öğrenciler, yine evrensel niceleyici kullanılan durumlarda bir ya da birkaç örnekle doğrulama ve ardından genelleme yapmanın matematiksel olarak geçerli olabileceğini mi düşünmektedirler? Bazı öğrencilerin aksine örnek vermeleri gereken önermelerde önermeyi hem doğrulayan örnek vermeleri hem de aksine örnek vererek önermenin her zaman doğru olmadığını göstermeleri bu durumu destekler niteliktedir. Bununla birlikte öğrencilerden çözümlerini nedenleri ile birlikte yazmaları istense de öğrencilerin doğrulama yaparken denedikleri örneklerden çıkan sonuçlara göre gerekçelendirme yapmaları, bir önermeyi aksine bir örnekle çürütürken önermenin neden yanlış olduğunu açıklamamaları (açıklayamamaları) dikkat çekicidir.

Geometri önermelerinde öğrencilerin çoğunlukla bir dörtgenin kapsadığı dörtgeni aksine örnek vererek hatalı gerekçelendirme, mantıksal olmayan gerekçelendirme ve prototip çizim üzerinde sembollerle gerekçelendirme yapma eğiliminde oldukları belirlenmiştir. Bu önermelerde tümdengelimsel muhakeme yapma ile dörtgenlerde hiyerarşik sınıflama yapma arasında ilişki olduğu görülmüştür. Nitekim öğrencilerin tümdengelimsel muhakeme yapamamaları, böylece önceki öğrenmelerini benzer formatta dönüşüm yapmadan kullanmaları, dörtgenler arasında hiyerarşik ilişki kuramamalarına neden olmuştur. Öğrencilerin dörtgenlerin harici tanımlarını kullanmaları nedeniyle dörtgenlerle ilgili sınırlı yapılar oluşturdukları yani verilen özellikleri sağlayan alternatif prototipler oluşturamadıkları için bir dörtgenin kapsadığı başka bir dörtgeni aksine örnek vermek için kullandıkları görülmüştür. Bu görüşü destekleyen De Villiers (1994) kapsayıcı tanımların, daha özel kavramların özelliklerinin tümdengelimsel muhakeme yoluyla sistematikleştirilmesini ve türetilmesini kolaylaştırdığını belirtmiştir. Bu araştırmada da dörtgenlerin kapsayıcı tanımlarını kullanan öğrencilerin önermeleri doğrularken tanımları tümdengelimli bir sistem içinde organize ettikleri görülmüştür. Tüm önermelerde mantıksal olmayan gerekçelendirmelerin ön bilgi eksikliğinden kaynaklandığı belirlenmiştir.

Öğrencilerin açık uçlu görevlere verdikleri yanıtlar bir bütün olarak değerlendirildiğinde tümdengelimsel muhakeme yapamayan öğrenciler ile ilgili birkaç durum ön plana çıkmaktadır:

- Deneysel doğrulamanın genelleme yapmak için yeterli olduğunu düşünme,
- Cebirsel temsil kullanmama (ya da kullanamama),
- Ön bilgi eksikliğinden kaynaklı mantıksal olmayan gerekçelendirmeler yapma,
- Hiyerarşik sınıflamaya olanak sağlayan kapsayıcı tanımları kullanmama,
- Dörtgenleri sadece prototip örnek üzerinden tanımlama.

Bu anlamda, muhakeme ile olan ilişkisi nedeniyle kanıtın ortaokul matematik öğretim programı ile matematik öğrenmenin bir aracı olarak bütünleştirilmesi sağlanabilir. Kanıt çalışmalarının çok büyük bir kısmının lise ya da lisans düzeyinde olduğu görülmektedir. Bu nedenle özellikle ortaokulda öğretim uygulamaları ile sınıflarda öğrencilerin kanıt ve muhakemelerindeki değişimi gösteren araştırmalara ihtiyaç vardır. Bu araştırma ortaokul yedinci sınıf düzeyinde ile sınırlandırılmış olup, diğer sınıf düzeylerindeki öğrencilerin kanıtlama sürecindeki muhakemelerini belirlemeye yönelik benzer bir çalışma yapılabilir.

## Araştırmacıların Katkı Oranı Beyanı

Araştırmada her bir yazarın araştırmaya katkı oranı %50’dir.

## Çatışma Beyanı

Araştırmada yazarlar arasında ve yazarlarla diğer kişiler veya kurumlar arasında herhangi bir çatışma yoktur.

## Kaynakça


Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi.* [Doktora tezi, Uludağ Üniversitesi.] YÖK Ulusal Tez Merkezi. https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/tezSorguSonucYeni.jsp adresinden 03.09.2019 tarihinde erişildi.

Aylar, E. ve Şahiner, Y. (2016). Yedinci sınıf öğrencilerinin ispat becerileri ve tercihlerinin incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi, 17*(3), 559-579. https://www.researchgate.net/publication/311953562 adresinden 01.05.2019 tarihinde erişildi.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In. D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216–235). Hodder and Stoughton.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. Van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (1nd ed., pp. 175–192). Kluwer.

Ball, D.L., Hoyles, C., Jahnke, H.N. & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L.I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (pp. 907-922). Beijing: Higher Education Press. http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/03Printemps/teaching_proof.pdf adresinden 03.09.2019 tarihinde erişildi.

Bayazit, N. (2009). *Prospective mathematics teacher's use of mathematical definitions in doing proof.* [Unpublished doctoral thesis]. Florida State University. https://diginole.lib.fsu.edu/islandora/object/fsu%3A253932 adresinden 03.09.2019 tarihinde erişildi.

Blanton, M., Stylianou, D. & David, M. (2009). Understanding instructional scaffolding in classroom discourse on proof. In D. Stylianou, M. Blanton & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (1nd ed., pp. 290-306). Routledge.

Bogdan, R.C. & Biklen, S.K. (1992). *Qualitative research for education: Introduction and methods.* (2nd ed.). Allyn and Bacon.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms.* Springer Science and Business Media.

Csíkos, C.A. (1999). Measuring students' proving ability by means of Harel and Sowder's proof-categorization. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 233–240). http://www.igpme.org/wp-content/uploads/2019/05/PME23-1999-Haifa.pdf adresinden 10.06.2020 tarihinde erişildi.

Dawson, J. (2006). Why do mathematicians re-prove theorems? *Philosophia Mathematica, 14*(3), 269-286. https://doi.org/10.1093/philmat/nkl009 adresinden 09.10.2020 tarihinde erişildi.

Derek, M. (2011). *Teaching and learning of proof in the college curriculum*. [Unpublished Master's thesis]. San Jose State University. https://doi.org/10.31979/etd.ytyx-fs6x adresinden 05.10.2018 tarihinde erişildi.

De Villiers, M. (2003). *Rethinking proof with the geometer's sketchpad*. (1nd ed.). Key Curriculum Press.

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of mathematics, 14*(1), 11-18. https://flm-journal.org/Articles/58360C6934555B2AC78983AE5FE21.pdf adresinden 05.09.2020 tarihinde erişildi.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*(24), 17–24. https://www.researchgate.net/publication/264784642_The_Role_and_Function_of_Proof_in_Mathematics adresinden 06.06.2018 tarihinde erişildi.

Epp, S. (1998). A unified framework for proof and disproof. *Mathematics Teacher, 91*(8), 708-713. https://condor.depaul.edu/~sepp/MathTeacher.Nov98.pdf adresinden 04.04.2018 tarihinde erişildi.

Flores, A. (2006). How do students know what they learn in middle school mathematics is true? *School Science and Mathematics*, *106*(3), 124-132. https://dx.doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18169.x adresinden 12.04.2019 tarihinde erişildi.
Flores, A. (2002). How do children know that what they learn in mathematics is true? *Teaching Children Mathematics, 8*(5), 269-274. https://dx.doi.org/10.5951/TCM.8.5.0269 adresinden 20.04.2018 tarihinde erişildi.
Glesne, C. (2013). *Nitel araştırmaya giriş.* (A. Ersoy ve P. YALÇINOĞLU, Çev.; 2. Baskı). Anı Yayıncılık
Hanna, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange, 21*(1), 6-13. https://dx.doi.org/10.1007/BF01809605 adresinden 08.05.2018 tarihinde erişildi.
Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2), 5–23. https://dx.doi.org/10.1023/A:1012737223465 adresinden 08.05.2018 tarihinde erişildi.
Hersh, R (2009). What ı would like my students to already know about proof. In D. Stylianou, M. Blanton & E. Knuth (Eds.), T*eaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (1nd ed., pp. 17-21). Routledge.
Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16. https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-017-9761-8 adresinden 08.05.2018 tarihinde erişildi.
Knuth, E.J. & Elliott, R.L. (1998). Characterizing students' understanding of mathematical proof. *The Mathematics Teacher*, *91*(8), 714-731. https://dx.doi.org/10.5951/MT.91.8.0714 adresinden 01.07.2019 tarihinde erişildi.
Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1), 151-161. https://dx.doi.org/10.1023/A:1012793121648 adresinden 05.06.2019 tarihinde erişildi.
Liu, P. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? *Mathematics Teacher*, *96*(6), 416–421. https://www.researchgate.net/publication/281223989 adresinden 19.06.2018 tarihinde erişildi.
Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically*. (2nd ed.). Pearson Education Limited.
Milli Eğitim Bakanlığı. (2019). *PISA 2018 Türkiye ön raporu*. http://www.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2019_12/03105347_PISA_2018_Turkiye_On_Raporu.pdf adresinden 01.09.2020 tarihinde erişildi.
Mubark, M.M. (2011). Mathematical thinking: Teachers perceptions and students performance. *Canadian Social Science*, *7*(5), 176-181. https://dx.doi.org/10.3968/J.css.1923669720110705.502 adresinden 18.03.2018 tarihinde erişildi.
National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for school mathematics.* NCTM
Perry, P., Camargo, L., Samper, C. & Echeverry, O.M. (2009). Assigning mathematics tasks versus providing pre-fabricated mathematics in order to support learning to prove. In F.L., Lin, F.J., Hsieh, G., Hanna, M. & De Villiers (Eds.) *ICMI Study 19 —Proof and Proving in Mathematics Education*.https://www.researchgate.net/publication/282571052_Proceedings_of_the_ICMI_Study_19_Conference_Proof_and_Proving_in_Mathematics_Education_Volume_2. adresinden 15.08.2018 tarihinde erişildi.
Rossi, R. J. (2006). *Theorems, corollaries, lemmas and methods of proof (1st ed.).* Wiley Interscience.
Sowder, L. & Harel, G., (1998). Types of students' justifications. *The mathematics teacher*, *91*(8), 670-675. https://doi.org/10.5951/MT.91.8.0670. adresinden 20.01.2019 tarihinde erişildi.

Staples, M.E., Bartlo, J.& Thanheiser, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifaceted role in middle grades mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(4), 447–462. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.07.001 adresinden 15.01.2018 tarihinde erişildi.

Stefanowicz, A. (2014). *Proofs and mathematical reasoning.* University of Birmingham Mathematics Support Center. https://www.birmingham.ac.uk/Documents/college-eps/college/stem/Student-Summer-Education-Internships/Proof-and-Reasoning.pdf adresinden 05.03.2018 tarihinde erişildi.

Stylianides, A.J. (2007a). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321. https://psycnet.apa.org/record/2007-06531-004 adresinden 15.02.2018 tarihinde erişildi.

Stylianides, A.J. (2007b). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1-20. https://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-9038-0 adresinden 15.02.2018 tarihinde erişildi.

Stylianides, G.J. & Stylianides, A.J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(3), 314-352. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.40.3.0314 adresinden 18.04.2018 tarihinde erişildi.

Şen, C. & Güler, G. (2015). Examination of middle school seventh graders' proof skills and proof schemes. *Universal Journal of Educational Research, 3*(9), 617-631. https://dx.doi.org/10.13189/ujer.2015.030906 adresinden 25.03.2019 tarihinde erişildi.

Tanisli, D. (2016). How do students prove their learning and teachers their teaching? Do teachers make a difference? *Eurasian Journal of Educational Research,* 66, 47-70. http://dx.doi.org/10.14689/ejer.2016.66.3. adresinden 12.02.2019 tarihinde erişildi.

Tanışlı, D. ve Yavuzsoy Köse, N. (2020). Etkinlikler yoluyla matematiksel muhakemenin desteklenmesi. Y. Dede, M. F. Doğan, F. Aslan Tutak (Eds.), *Matematik Eğitiminde Etkinlikler ve Uygulamaları içinde* (ss-363-393). Pegem Akademi.

Yang, K.L. & Lin, F.L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 59 –76. https://www.researchgate.net/publication/226110047_A_model_of_reading_comprehension_of_geometry_proof adresinden 12.02.2019 tarihinde erişildi.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2006). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* (6.baskı.). Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, C. (1996). *Matematiksel düşünme.* (1.baskı.). Remzi Kitapevi

Yılmaz, T.Y. (2021). *7. sınıf öğrencilerinin kanıtlama süreçlerinin ve bu süreçte ortaya çıkan kanıt işlevlerinin incelenmesi.* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Anadolu Üniversitesi.

Waring, S. (2001). Proof is back! (A proof-orientated approach to school mathematics). *Mathematics in school*, 30(1), 4-8. https://www.jstor.org/stable/i30212116 adresinden 17.08.2019 tarihinde erişildi.

Weber, K. (2005). Problem solving, proving and learning: The relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof contruction. *Journal of Mathematical Behaviour, 24*(3), 351-360. https://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.005 adresinden 15.02.2021 tarihinde erişildi.

Zaimoğlu, Ş. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri.* [Yüksek lisans tezi, Kastamonu Üniversitesi.] YÖK Ulusal Tez Merkezi. https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/tezSorguSonucYeni.jsp adresinden 01.10.2018 tarihinde erişildi.

Zaslavsky, O., Nickerson, S., Styliandes, A., Kidron, I., & Winicki, G. (2012). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. In G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (Vol. 15, pp. 215-229). Springer.

Zeybek, Z. ve Üstün, A (2019). 7. sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki ispat seviyelerinin incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 13*(1), 196-216. https://doi.org/10.17522/balikesirnef.541576 adresinden 01.07.2020 tarihinde erişildi.

## Extended Abstract

### Introduction

Mathematics has a systematic structure, so that each concept added to this system forms a whole consistent with the one added before it and added after it. The mathematical proof that enables mathematics to be a coherent whole is a universal concept that fits all contexts of mathematics and at the center of mathematics, as it reveals the relationships between subjects in the mathematics curriculum (Balacheff, 1991; Blanton et al., 2009; Knuth & Elliot, 1998). Mathematical reasoning and proof; it is extremely important to provide for the realization of mathematical thinking as it enables mathematical concepts to gain meaning, to make the relationships between concepts visible, and to integrate new information with the previous ones thanks to these relationships (Flores, 2002; Liu, 2003; Mubark, 2011). When the literature is examined, there are many studies in which different proof categories and proof schemes are determined in order to evaluate the processes of students understanding and producing evidence (Balacheff, 1988, Sowder & Harel, 1998; Yang & Lin, 2008; Waring, 2001; Weber, 2005). On the other hand, it was observed that different researchers used this category or schemes to analyze the proof of middle school students (Flores, 2006; Şen & Güler, 2015; Zeybek & Üstün, 2019). However, there are a limited number of studies on the reasoning of middle school students in the proving process (Arslan, 2007; Tanışlı, 2016; Zaimoğlu, 2012). The aim of this study is to examine the reasoning processes in the problems and propositions that middle school students need to prove with different proof methods.

### Method

In this study, a qualitative research approach has been adopted in data collection and analysis processes. From among the seventh grades that the researcher knew and observed beforehand, the volunteer for the study selected a class with students of different levels of success. In the 2019-2020 academic year, 15 girls and 16 boys, a total of 31 seventh grade students studying at a state secondary school in Eskişehir were selected as participants. The data of the research were collected through three different open-ended tasks prepared by the researcher. The students' answers to these questions were analyzed using thematic analysis method.

### Findings

It is the main purpose to examine the reasoning of middle school students in the process of proving the tasks that they need to prove with different proof methods. Because of this it was first examined whether the students did not understand the tasks and then the reasoning of the students who understood the tasks was determined.

Students' ability to respond to the task, correctly identify what is given and what is required in the responses, and use this data correctly indicates that they understand the task. However, some students left tasks unanswered, rewrote the problem sentence or proposition in the task, used the data incomplete, did not understand the premise of the proposition in the task, went outside the data, or used the data incorrectly, so they did not understand the task. Although students were expected to have a higher percentage of understanding these tasks, unfortunately, in many tasks, the percentage of understanding remained below 70%, as the tasks offered were based on grade gains before seventh grade. Ö.2e, which requires making proof by consuming, is the proposition that the percentage of not understanding the task is the highest among the tasks offered to students.

When the reasoning of the students who understood the tasks was examined, it was determined that they made empirical verification, non-logical justification or deductive reasoning in number problems and propositions. In geometry tasks, in addition to these reasoning, it was determined that they reasoned in different ways, such as incorrect justification by giving an example, justification by symbol on the prototype drawing, or justification based on incorrect drawing, giving an example as opposed to another quadrilateral covered by a quadrilateral.

In the process of proving the number tasks that require direct proof (G.1 and Ö.2b) it was determined that students generally made empirical verification by using special cases. G.1, it was determined that approximately 68% and Ö.2b, it was determined that approximately 83% of the students tried to solve the problem by making empirical verification. In these tasks, some students tried one example and some tried more than one example. It was observed that some of the students who experimented with more than one sample made experiments by choosing strategic examples, and most of them made experiments by choosing random samples. On the other hand, it can be said that students are more successful in tasks in which they need to give counterexamples than the number tasks that require direct proof. It was observed that in the propositions that they should give counterexamples (Ö.2a, Ö.2c, Ö.2d) some of the students made proof only by giving examples to the contrary, while some of them both gave an example to the contrary and showed that the proposition was not always correct by giving examples that confirm the proposition.

In geometry propositions that require direct proof (Ö.2f, Ö.2g, Ö.2h, Ö.2i) students generally use it to give an example, as opposed to another quadrilateral covered by a quadrilateral, or justify it with a symbol on the prototype drawing. Ö.2f is the proposition that the percentage of students making incorrect justifications by giving the opposite example to the quadrilateral covered by a quadrilateral is the highest. In this proposition, it was observed that 18 students stated that all quadrilaterals with parallel sides and an angle of $90^{o}$ are not rectangles, that the square also provides these properties, and they gave incorrect justification by giving examples on the contrary to the square, which is the quadrilateral covered by the rectangle. However, there are also students who can make deductive reasoning in geometry tasks. It was determined that students who made deductive reasoning in geometry tasks made justifications based on definition information of quadrilaterals, property information and justifications based on quadrilaterals covered by a quadrilateral in their reasoning. In G.3, which is a geometry task that requires direct proof, it was seen that 10 students made empirical verification by choosing a special triangle and 10 students made deductive reasoning in this task.

It was found that non-logical justifications of students differ according to tasks and are usually caused by a lack of prior knowledge.

## Conclusion and Discussion

It was determined that they tend to make empirical verification by giving examples in general in number tasks that require direct proof, and that they generally consider one or more examples sufficient to verify a general situation. Students' empirical verification has been among the results of many studies (Arslan, 2007; Aylar & Şahiner, 2016; Flores, 2006; Şen & Güler, 2015; Tanışlı, 2016; Zaimoğlu, 2012; Zeybek & Üstün, 2019). The findings of the study showed that the students could not use symbolic language, they generally used arithmetic strategies, and the students who tried to use algebraic strategies could not reach the result because they performed incorrect operations. This situation is in parallel with the results of many studies (Arslan, 2007; Aylar & Şahiner, 2016). It has been observed that there is a relationship between deductive reasoning in geometry propositions and hierarchical classification in quadrilaterals. The students' inability to make deductive reasoning, thus using their previous learning in a similar format without transforming, caused them not to establish a hierarchical relationship between quadrilaterals. Supporting this view, De Villiers (1994) stated that inclusive definitions facilitate systematization and derivation of the features of more specific concepts through deductive reasoning.

In this sense, it can be ensured that the proof is integrated with the middle school mathematics curriculum as a tool for learning mathematics due to its relationship with reasoning. It is seen that most of the proof studies are at the high school or undergraduate level. For this reason, there is a need for studies that show the changes in students' proof and reasoning, especially in middle school teaching practices and classes. This research is limited to the seventh grade students and a similar study can be done to determine the reasoning of students at other grade levels in the proving process.