ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ –B
Teorik Bilimler

ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY –B
Theoretical Sciences
Cilt/Vol.:1-Sayı/No: 1 : 1-18 (2011)

ŞANS KISITLI STOKASTİK PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNİN DETERMİNİSTİK EŞİTLİKLERİ

Kumru Didem ATALAY [1], Ayşen APAYDIN [2]

ÖZ

Doğrusal programlama problemi olarak modellenen birçok gerçek hayat probleminde katsayılar rasgele değişken olarak ortaya çıkar. Bu durumda kurulan probleme stokastik programlama problemi adı verilmektedir. Stokastik programlamanın çözümünde temel yaklaşım, problemin olasılıksal bir yapıdan deterministik bir yapıya dönüştürülerek bilinen yöntemlerle çözülmesidir. Stokastik programlama tekniklerinden biri olan şans kısıtlı programlama yaklaşımı, rasgele kısıtları belirli seviyelerine göre deterministik duruma getirmeyi amaçlar.

Bu çalışmada rasgele değişken olan katsayıların normal dağılıma ve Ki-kare dağılımına sahip olması durumunda ortaya çıkan şans kısıtlı stokastik programlama modelleri kullanılarak deterministik modellerin oluşturulması süreci incelenmiştir. Katsayıların dağılımının doğru olarak seçilmesinin önemliliği sayısal bir örnekle açıklanmış ve irdelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Şans kısıtlı stokastik programlama, Normal dağılım, Ki-Kare dağılımı.

DETERMINISTIC EQUIVALENTS OF CHANCE CONSTRAINED STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEMS

ABSTRACT

Many real life problems which are modeled as linear programming problems where coefficients appear as random variables. In this case, such problems are called as stochastic programming problem. The basic approach in the stochastic programming is solving the problem with known methods by converting the problem from a probability structure to a deterministic structure. The chance constraints in this programming approach can be forced from being the random coefficients to deterministic one according to their specific levels.

In this study when the coefficients which are random variables have normal and Chi-square distributions, obtaining of deterministic models that are equivalent to chance constrained stochastic programming models are examined. The importance of choosing the correct distributions of coefficients is explained by a numeric example.

Keywords: Chance constrained stochastic programming, Normal distribution, Chi-Square distribution.

[1,] Başkent Üniversitesi, Tıp Fakültesi, Biyoistatistik Anabilim Dalı, Bağlıca Kampüsü, 06810 Etimesgut, Ankara.
E-posta: katalay@baskent.edu.tr
[2,] Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, 06100 Tandoğan, Ankara.
E-posta: aapaydin@ankara.edu.tr

Geliş: 2 Temmuz 2007; **Düzeltme:** 14 Mart 2008; **Düzeltme:** 9 Şubat 2009; **Kabul:** 21 Aralık 2009

1. GİRİŞ

Gerçek hayattan alınarak, doğrusal programlama olarak modellenen problemlerin çoğunda karşılaşılan genel problemlerden birisi model parametrelerinin $\left(c_j, a_{ij}\ ve\ b_i\right)$ uygun değerlerini belirleme güçlüğüdür. Parametreler elde bulunan veriler yardımıyla veya daha önceki çalışmalardan yararlanılarak kesin değerler olarak seçilir ve uygulanana kadar doğruluğu bilinmeyebilir. Bu bazen araştırmanın yansızlığını etkileyebilir. Bununla birlikte model parametreleri genellikle önceden belirlenemeyen, kesin olmayan rasgele değişkenlerin etkisi altında kalmaktadır. Diğer bir ifadeyle modelde bazı veya tüm parametreler rasgele değişken olabilir. Bu tür problemlere stokastik programlama problemleri adı verilir.

Deterministik yaklaşım, karmaşık sistemlerin araştırılması ve optimizasyonu sırasındaki tasarlama, projelendirme ve yönetim durumlarının ekonomide, teknolojide ve askeri yönetimde yaygın olarak kullanılmasına olanak sağlar. Başlangıç verileri, amaç kurallarının etkisi altında gelişirler ve bu durumda deterministik yapıya sahiptirler. Fakat bu sistemlerin deterministik gelişimleri sadece bir eğilimdir ve rasgele faktörlerle bozulurlar. Bu nedenle gerçek hayat problemlerinin çoğunda stokastik yaklaşım kullanmak daha doğru olacaktır (Kolbin, 1977).

Belirsizlik altındaki doğrusal programlar için bazı yaklaşımlar geliştirilmiştir. Belirsizlik aslında doğrusal programlama parametrelerinin kesin olarak belirlenmesinin zor olduğu durumlarda ortaya çıkar. Stokastik programlamada rasgele değişken içeren tüm kısıtların bir olasılığa sahip olması gerekmektedir. Burada genel yaklaşım, problemin olasılıksal yapısını, problemin gerçek yapısını bozmadan ona eşdeğer olan deterministik duruma dönüştürmektir. Bu tip problemlerde kesinlik elde edilir ve simpleks yöntem ile çözülür (Taha, 1997)

Stokastik programlama teknikleri çok aşamalı programlama ve şans kısıtlı programlama olmak üzere ikiye ayrılır. Bu çalışmada ele alınan şans kısıtlı stokastik programlama tekniğidir.

Şans kısıtlı stokastik programlar ilk olarak Charnes ve Cooper (1959) tarafından modellenmiştir. Symonds (1967), çalışmasında şans kısıtlı programlama problemleri için deterministik çözümler sunmuştur. Sengupta (1970), şans kısıtlı doğrusal programlamanın bazı dağılımlar açısından genelleştirilmesi üzerinde çalışmıştır. Sengupta (1972), stokastik programlama yöntemlerini sistem güvenilirliği yaklaşımı altında incelemiş, uygulama ve yaklaştırma yöntemlerini sunmuştur. Resh (1970), stokastik hesaplama zamanları ile makine yükleme problemlerinin şans kısıtlı programlaması üzerine çalışmıştır. Kolbin (1977), stokastik programlama problemlerini açıkça tanımlamıştır. Planlama ve yönetim problemlerindeki risk ve belirsizliği incelemiş, şans kısıtlı programlama modellerini sunmuştur. Hulsurkar, Biswal ve Sinha (1997), çok amaçlı stokastik doğrusal programlama problemlerinin bulanık programlama yaklaşımının bir uygulamasını çalışmışlardır. Déak (1998), stokastik programlama probleminin en iyilenmesinde çoklu normal dağılımlar için doğrusal regresyon tahmin edicileri sunmuştur. Kampas ve White (2003), çalışmalarında nitrat kirliliği kontrolü için olasılıksal programlamayı önermişlerdir. Jana ve Biswal (2004), katsayıları sürekli dağılıma sahip rasgele değişkenler olan şans kısıtlı stokastik programlama problemlerinin çözümü için, genetik algoritmayı temel alan stokastik simülasyon sunmuşlardır.

Bu çalışmada şans kısıtlı stokastik programlama problemlerindeki katsayıların normal ve ki-kare dağılımına sahip rasgele değişkenler olmaları durumunda deterministik eşitliklerinin bulunması incelenmiştir. Katsayıların normal dağılıma sahip rasgele değişkenler olmaları durumunda, rasgele kısıtların ve amaç fonksiyonunun deterministik hale dönüştürülmesi kolay ve zahmetsizdir. Bu nedenle şans kısıtlı problemlerin çoğunda katsayıları normal dağılıma sahip olan modeller ele alınmıştır. Ancak gerçek hayat problemlerinde farklı dağılımlara sahip katsayıların da olduğu düşünülerek normal dağılım dışında farklı bir dağılıma sahip şans kısıtlarının da incelenmesine gerek duyulmuştur. Ki kare dağılımının seçilmesindeki sebep, normal dağılıma sahip rasgele değişkenlerin karelerinin toplamlarının ki kare dağılımına sahip olduğu özelliği kullanılarak deterministik eşitliklerin bulunmasıdır. Katsayıların ki kare dağılımına sahip olması durumunda deterministik eşitliklerin elde edilişleri oldukça karmaşık hesaplamalar gerektirir. Bu da literatürde normal dağılımın tercih edilme sebebini açık bir şekilde ortaya koymaktadır. Çalışmada, iki farklı dağılım için rasgele değişken olan katsayıların rasgelelikten kurtularak deterministik biçimlerinin elde edilişi ayrıntılı olarak sunulmuştur. Sayısal bir örnek verilerek incelenmiştir.

2. ŞANS KISITLI STOKASTİK PROGRAMLAMA PROBLEMİ

Stokastik programlama problemini deterministik programlama problemine dönüştürmek için kullanılan yaklaşımlardan biri şans kısıtlı stokastik programlama problemidir. Şans kısıtlı stokastik programlama problemi rasgele verileri içerir ve belirlenen olasılık limitlerine kadar kısıt bozulmalarına izin verir. Eğer doğrusal kısıtlar, kısıtlardaki bozulmaların genişliğini belirten olasılık ölçülerinin kümesiyle birleştiriliyorsa doğrusal programlama modeli şans kısıtlı olarak adlandırılır. Kısıtların kısmi bozulmasına izin veren şans kısıtlı stokastik programlama problemi, yaklaşık güvenilirliği sağlayan bir yöntem olarak görülebilir. Bu yöntem genelleştirilmiş ve birçok endüstriyel ve ekonomik problemde uygulanmıştır (Sengupta, 1972).

Şans kısıtlı doğrusal programlama modeli,

$$\max(\min) z(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\mathrm{P}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i\right] \geq 1 - u_i\,,\ i = 1, \ldots, m \tag{2.1}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$u_i \in (0,1), \quad i = 1, \ldots, m$$

biçiminde tanımlanır. Burada c_j, a_{ij} ve b_i katsayılarının tümü, ikili veya tek olarak rasgele değişkenlerdir ve u_i ' ler seçilmiş olasılıklardır. x_j karar değişkenlerinin deterministik olduğu varsayılmıştır (Taha, 1997).

(2.1) modelinde katsayıların rasgele değişken olması durumunda, her birinin belli bir dağılıma sahip olması veya bunların ortak dağılımının bilinmesi gerekmektedir. Problemin çözüm aşamasında amaç, modeli rasgele değişkenlerden kurtararak şans kısıtlı probleme denk olan deterministik problemi elde etmektir.

Katsayıların normal veya ki kare dağılımına sahip olması durumundaki şans kısıtlı problemlerin deterministik eşitliklerinin elde edilmesi alt kesimlerde verilmiştir.

2.1 Katsayıları Normal Dağılıma Sahip Rasgele Değişkenler Olan Şans Kısıtlı Modeller

Doğrusal programlama problemlerinde, katsayıların rasgele değişken olduğu durumda genel olarak normal dağılıma sahip olduğu varsayılır. Bu varsayım altında (2.1) modeli ile verilen şans kısıtlı stokastik doğrusal programlama probleminde c_j, a_{ij} ve b_i 'ler normal dağılıma sahip rasgele değişkenlerdir.

Katsayıları normal dağılıma sahip şans kısıtlarının deterministik eşitliklerinin bulunması

1) Yalnız a_{ij} katsayıları rasgele değişken,

2) Yalnız b_i katsayıları rasgele değişken,

3) Yalnız c_j katsayıları rasgele değişken,

4) a_{ij} ve b_i katsayılarının her ikisi de rasgele değişken,

biçiminde tanımlanan dört durum ile verilmiştir. Diğer durumlar bu dört durumun kombinasyonu ile elde edilebilir.

Durum 1: Yalnız a_{ij} katsayıları rasgele değişken ise;

a_{ij} , $E\left(a_{ij}\right)$ ortalamalı ve $Var\left(a_{ij}\right)$ varyanslı normal dağılıma sahip rasgele değişken olsun. a_{ij} ve a_{kl} rasgele değişkenleri arasındaki kovaryansın bilindiği varsayılsın. d_i rasgele değişkeni

$$d_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ , \quad i = 1,...,m$$

biçiminde tanımlansın. $a_{i1},...,a_{in}$ katsayıları normal dağılımlı rasgele değişkenler ve $x_1,...,x_n$ karar değişkenleri olmak üzere, d_i rasgele değişkeni

$$E\left(d_i\right) = \sum_{j=1}^{n} E\left(a_{ij} x_j\right), \quad i = 1,...,m$$

ve

$$Var\left(d_i\right) = X^T V_i X, \qquad i = 1,...,m$$

ile normal dağılır. Burada V_i ,

$$V_i = \begin{bmatrix} Var\left(a_{i1}\right) & Cov\left(a_{i1},a_{i2}\right)...Cov\left(a_{i1},a_{in}\right) \\ Cov\left(a_{i2},a_{i1}\right) & Var\left(a_{i2}\right) \quad ...Cov\left(a_{i2},a_{in}\right) \\ . & . \qquad\qquad . \\ . & . \qquad\qquad . \\ Cov\left(a_{in},a_{i1}\right) & Cov\left(a_{in},a_{i2}\right)...Var\left(a_{in}\right) \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanan i ’inci kovaryans matrisidir. Bu durumda (2.1) modelinin kısıtları,

$$P\left[d_i \le b_i\right] \ge 1 - u_i \tag{2.2}$$

olarak yazılabilir. $\dfrac{\left(d_i - E\left(d_i\right)\right)}{\sqrt{Var\left(d_i\right)}}$ rasgele değişkeni ortalaması sıfır ve varyansı bir olan standart normal dağılıma sahip olduğundan, (2.2) ile verilen kısıt

$$P\left[\frac{d_i - E\left(d_i\right)}{\sqrt{Var\left(d_i\right)}} \le \frac{b_i - E\left(d_i\right)}{\sqrt{Var\left(d_i\right)}}\right] \ge 1 - u_{i,} \quad i = 1,...,m \tag{2.3}$$

biçiminde yazılır. $\phi\left(z\right)$, standart normal dağılıma sahip z ’ nin dağılım fonksiyonu olmak üzere,

$$P\left[d_i \le b_i\right] = \phi\left[\frac{b_i - E\left(d_i\right)}{\sqrt{Var\left(d_i\right)}}\right]$$

olarak yazılır. Eğer K_{u_i} , $\phi\left(K_{u_i}\right)=1-u_i$ olan standart normal değişkenin değeri olarak alınırsa (2.3) kısıtı,

$$\phi\left[\frac{b_i-E\left(d_i\right)}{\sqrt{Var\left(d_i\right)}}\right]\geq\phi\left(K_{u_i}\right),\quad i=1,\ldots,m \tag{2.4}$$

biçiminde ifade edilir. (2.4) eşitsizliği, sadece

$$\frac{b_i-E\left(d_i\right)}{\sqrt{Var\left(d_i\right)}}\geq K_{u_i}$$

olduğu durumda sağlanır, veya

$$E\left(d_i\right)+K_{u_i}\sqrt{Var\left(d_i\right)}\leq b_i\quad i=1,\ldots,m \tag{2.5}$$

şeklinde de yazılabilir. (2.5) eşitsizliğinde d_i rasgele değişkeninin değeri yerine konularak,

$$\sum_{j=1}^{n}E\left(a_{ij}\right)x_j+K_{u_i}\sqrt{X^TV_iX}\leq b_i,\quad i=1,\ldots,m \tag{2.6}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.6) kısıtı, orijinal olasılıksal doğrusal kısıtlara denk, deterministik doğrusal olmayan kısıtlardır. Bu durumda, olasılıksal programlama probleminin çözümü,

$$\max(\min) z\left(\mathbf{x}\right)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$
$$\sum_{j=1}^{n}E\left(a_{ij}\right)x_j+K_{u_i}\sqrt{X^TV_iX}\leq b_i\qquad i=1,\ldots,m$$
$$x_j\geq 0\qquad j=1,\ldots,n$$

biçiminde oluşturulan deterministik doğrusal olmayan programlama probleminin çözümü ile elde edilir. Eğer tüm normal dağılımlı a_{ij} rasgele değişkenleri bağımsız ise kovaryans terimlerinin hepsi sıfır olacaktır ve (2.6) ile verilen kısıtlar,

$$\sum_{j=1}^{n}E\left(a_{ij}\right)x_j+K_{u_i}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}Var\left(a_{ij}\right)x_j^2}\leq b_i,\ \ i=1,\ldots,m$$

biçimine dönüşecektir (Hulsurkar vd., 1997).

Durum 2: Yalnız b_i katsayıları rasgele değişken ise;

b_i, $E\left(b_i\right)$ ortalamalı ve $Var\left(b_i\right)$ varyanslı normal dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun. Bu durumda (2.1) modelinde verilen şans kısıtı

$$P\left[\frac{b_i - E(b_i)}{\sqrt{Var(b_i)}} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - E(b_i)}{\sqrt{Var(b_i)}}\right] \geq p_i\,,\; i = 1,\ldots,m \tag{2.7}$$

biçiminde yazılır. Burada $p_i = 1 - u_i$ ve $\dfrac{\left(b_i - E(b_i)\right)}{\sqrt{Var(b_i)}}$ standart normal rasgele değişkendir. Bu durumda (2.7) ile verilen eşitsizlik

$$P\left[\frac{b_i - E(b_i)}{\sqrt{Var(b_i)}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - E(b_i)}{\sqrt{Var(b_i)}}\right] \leq 1 - p_i \tag{2.8}$$

biçimine dönüşür. Eğer, K_{p_i}, $\phi\left(K_{p_i}\right) = 1 - p_i$ olan standart normal değişkenin değeri olarak alınırsa (2.8) ile verilen kısıtlar,

$$\phi\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - E(b_i)}{\sqrt{Var(b_i)}}\right) \leq \phi\left(K_{p_i}\right) \tag{2.9}$$

biçiminde ifade edilir. (2.9) eşitsizliği sadece

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - E(b_i)}{\sqrt{Var(b_i)}} \leq K_{p_i}\,, \quad i = 1,\ldots,m$$

olduğu durumda sağlanır ya da,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq E(b_i) + K_{p_i}\sqrt{Var(b_i)}\,,\; i = 1,\ldots,m$$

şeklinde de yazılabilir. Böylece olasılıksal doğrusal programlama problemine denk olan deterministik doğrusal programlama problemi,

$$\max(\min) z(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq E(b_i) + K_{p_i}\sqrt{Var(b_i)}, \qquad i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,\ldots,n$$

biçiminde ifade edilir (Hulsurkar vd., 1997).

Durum 3: Yalnız c_j katsayıları rasgele değişken ise,

c_j katsayıları normal dağılıma sahip rasgele değişkenler olduğundan $z(\mathbf{x})$, amaç fonksiyonu da normal dağılıma sahip olacaktır. $z(\mathbf{x})$'in ortalaması,

$$E(z(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^{n} E(c_j) x_{j,}$$

olacaktır. Böylece E-modele (beklenen değer modeline) sahip deterministik amaç fonksiyonu

$$\max(\min) E(z(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^{n} E(c_j) x_{j,}$$

biçimine dönüşecektir (Taha, 1997).

Durum 4: a_{ij} ve b_i katsayılarının her ikisi de rasgele değişken ise;

$h_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i$ şeklinde tanımlanan bir rasgele değişken olmak üzere, (2.1) modelinde verilen şans kısıtları

$$P[h_i \le 0] \ge 1 - u_i\,, \qquad i = 1,...,m \tag{2.10}$$

biçiminde yazılabilir. h_i normal dağılıma sahip rasgele değişkenlerin doğrusal kombinasyonu olarak verildiğinden normal dağılıma sahip olacaktır. Böylece (2.10) ile verilen kısıt,

$$P\left[\frac{h_i - E(h_i)}{\sqrt{Var(h_i)}} \le \frac{-E(h_i)}{\sqrt{Var(h_i)}}\right] \ge 1 - u_i\,,\ i = 1,...,m \tag{2.11}$$

şeklinde yazılacaktır. Burada $\dfrac{h_i - E(h_i)}{\sqrt{Var(h_i)}}$ standart normal dağılıma sahip rasgele değişkenlerdir.

Böylece K_{u_i}, $\phi(K_{u_i}) = 1 - u_i$ olan standart normal değişkenin değeri olarak alınırsa (2.11) kısıtı,

$$\phi\left[\frac{-E(h_i)}{\sqrt{Var(h_i)}}\right] \ge \phi(K_{u_i}),\ i = 1,...,m \tag{2.12}$$

biçiminde ifade edilir. (2.12) eşitsizliği sadece,

$$\frac{-E(h_i)}{\sqrt{Var(h_i)}} \ge K_{u_i}\,, \qquad i = 1,...,m$$

olduğu durumda sağlanır veya

$$E(h_i)+K_{u_i}\sqrt{Var(h_i)}\le 0\,,\qquad i=1,...,m$$

şeklinde de yazılabilir. Bu durumda olasılıksal doğrusal programlama problemine denk olan doğrusal olmayan deterministik programlama problemi, h_i rasgele değişkenlerinin de yerine yazılmasıyla

$$\max(\min)\, z(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j-b_i\right)+K_{u_i}\sqrt{Var\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j-b_i\right)}\le 0\,,\qquad i=1,...,m$$
$$x_j\ge 0\qquad j=1,...,n$$

biçimine dönüşür (Taha, 1997).

Durum 1,2 ve 4'de açıklandığı gibi, katsayıları normal dağılıma sahip rasgele değişkenler olan şans kısıtlı modellerde, bu katsayılara ait beklenen değer ve varyanslar biliniyorsa standartlaştırma işlemi uygulanarak, standart normal dağılım tablolarından yararlanılmıştır. Durum 3'de ise, amaç fonksiyonu katsayıları rasgele değişken ise, katsayıların beklenen değerleri alınarak, amaç fonksiyonu deterministik hale dönüştürülmüştür. Bu kesimde görüldüğü gibi, normal dağılım varsayımı altında hesaplama işlemleri oldukça kolay ve zahmetsizdir.

2.2 Katsayıları Ki Kare Dağılımına Sahip Rasgele Değişkenler Olan Şans Kısıtlı Modeller

Katsayıları ki kare dağılımına sahip olan şans kısıtlı modellerin deterministik eşitliklerinin bulunuşu karmaşık işlemler gerektirdiğinden literatürde pek sık rastlanmaz. Şans kısıtlı modellerin farklı dağılımlara da sahip olabileceği düşüncesiyle dört durum için ki kare dağılımlı modellerde incelenmiştir.

Durum 1: b_i katsayıları rasgele değişken ise;

$a_i^{'}$, A katsayılar matrisinin i'inci satır vektörü ve u_i, 0 ile 1 arasında sabit olmak üzere, b rasgele değişkeninin b_i elemanları s_i parametresi ile bağımsız merkezsel ki-kare değişkenleri olsun. Bu durumda model (2.1) ile verilen şans kısıtları,

$$P\left(a_i^{'}\mathbf{x}\le b_i\right)\ge u_i\qquad i=1,...,m \tag{2.13}$$

biçiminde yazılabilir. (2.13) ile verilen şans kısıtının deterministik eşitliği

$$\begin{aligned} &a_i^{'}\mathbf{x}\le F^{-1}\left(1-u_i\right)\quad i=1,...,m\\ &\quad\mathbf{x}\ge\mathbf{0}\end{aligned} \tag{2.14}$$

biçiminde yazılır. Burada $F^{-1}(w)$, $w=1-u_i$ değeri ile s_i serbestlik dereceli ki-kare dağılım fonksiyonunun tersidir. (2.14) eşitsizliğindeki $F^{-1}\left(1-u_i\right)$ terimi ki-kare tablosundan rahatlıkla bulunabilir. (Sengupta, 1972).

Durum 2: a_{ij} katsayıları bağımsız merkezsel ki-kare değişkenleri ise;

$a_k^{'}$, A matrisinin k'ıncı satırını göstermek üzere,

$$d_k = a_k^{'}\mathbf{x}, \quad k = 1,\ldots,m$$

eşitliği tanımlansın. Her bir a_{ij} katsayısının ki-kare dağıldığı varsayılırsa, a_{ij} rasgele değişkenleri, normal dağılımlı rasgele değişkenlerin karesi olarak yazılabilir. Bu durumda,

$$\xi_{kj}^2 = \left(n_{kj}\tau_j\right)^2; \qquad \tau_j = x_j^{1/2} \geq 0, \quad k = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n$$

biçiminde tanımlanabilir. Burada n_{kj} sonlu ortalama ve varyansla normal dağılan rasgele değişkenlerdir ve a_{kj}, n_{kj}^2 'nin dağılımına sahiptir. Eğer τ_j 'ler stokastik olmayan karar değişkenleri ise ve n_{kj} 'lerin bağımsız olduğu varsayılırsa, $\xi_{k1}, \xi_{k2,\ldots,}\xi_{kn}$ 'ler

$$m_{kj} = E\left(\xi_{kj}\right)$$
$$V_{kj} = E\left(\xi_{kj} - m_{kj}\right)^2, \quad j = 1,\ldots,n$$

olmak üzere sonlu beklenen değer ve varyansla bağımsız normal rasgele değişkenler olduğu görülür. Bu durumda

$$d_k = \sum_{j=1}^{n} \xi_{kj}^2 = \sum_{j=1}^{n} V_{kj}\left(q_{kj} + \overline{m}_{kj}\right)^2 \tag{2.15}$$

biçiminde yazılır. Burada ortalama ve q_{kj}

$$\overline{m}_{kj} = \frac{m_{kj}}{V_{kj}^{1/2}}, \qquad q_{kj} = \frac{\left(\xi_{kj} - m_{kj}\right)}{V_{kj}^{1/2}}$$

eşitlikleri ile verilir ve ξ_{kj} rasgele değişkeni ortalaması m_{kj} ve varyansı V_{kj} olan normal dağılıma, q_{kj} rasgele değişkeni standart normal dağılıma sahiptir. Böylece (2.15) ile verilen d_k 'nın karakteristik fonksiyonu $\Phi(t)$,

$$\Phi(t) = E(e^{it\sum_{j=1}^{n}\xi_{kj}^2}) = E(e^{it\sum_{j=1}^{n}V_{kj}\left(q_{kj}+\overline{m}_{kj}\right)^2})$$
$$= \prod_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(q_{kj}^2\right)} e^{itV_{kj}\left(q_{kj}+\overline{m}_{kj}\right)^2} dq_{kj}\right]$$

işleminin çözümü sonucunda

$$\Phi(t) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - 2itV_{kj}\right)^{-1/2} \exp\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(itV_{kj}\overline{m}_{kj}^2\right)}{1 - 2itV_{kj}}\right\} \tag{2.16}$$

elde edilmektedir (Sengupta, 1970). (2.16) merkezsel olmayan ki-karenin karakteristik fonksiyonudur. (2.16) karakteristik fonksiyonu yardımıyla ortalama,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(V_{kj}+V_{kj}\overline{m}_{kj}^{2}\right)$$

ve varyans,

$$2\sum_{j=1}^{n}\left(V_{kj}^{2}+2V_{kj}^{2}\overline{m}_{kj}^{2}\right)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\overline{m}_{kj}=\frac{\left(E\left(n_{kj}\right)\right)\left(x_j^{1/2}\right)}{V_{kj}^{1/2}}$$

$$V_{kj}=x_jE\left(n_{kj}-E\left(n_{kj}\right)\right)^2,\qquad x_j=\tau_j^2$$

biçimindedir. Merkezsel olmama parametresi $\lambda=\sum_{j=1}^{n}V_{kj}\overline{m}_{kj}^{2}$ 'dir (Sengupta, 1972).

Bununla birlikte eğer herhangi bir y rasgele değişkeni, h serbestlik derecesi ile merkezsel ki-kare dağılımına sahipse bunun olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f\left(y\right)=\frac{e^{-\frac{1}{2}y}y^{\frac{1}{2}h-1}}{2^{\frac{1}{2}h}\Gamma\left(\frac{1}{2}h\right)}$$

biçiminde gösterilir. y 'ler $\chi_k^2\left(h\right)$ ile gösterilsin. a_{kj} rasgele değişkenlerinin ortalamaları yani $E\left(n_{kj}^2\right)$ 'ler

$$E\left(n_{kj}^2\right)=\overline{a}_{kj}$$

olarak alınırsa ve a_{kj} 'leri $\chi_{ij}^2\left(\overline{a}_{kj}\right)$ ile gösterilirse,

$$d_k=l_k\chi_k^2\left(h\right)$$

olacaktır. Burada

$$l_k=\frac{\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j^2}{\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j}\qquad \text{ve}\qquad h=\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j^2\right)}$$

biçiminde tanımlanmıştır (Patnaik, 1949). Böylece şans kısıtlı problem,

$$P\left(l_k\chi_k^2\left(h\right)\le b_k\right)\ge u_k\qquad k=1,\ldots,m$$

ifadesi yardımıyla hesaplanabilir. Burada işlemleri kolaylaştırmak amacıyla h niceliği için alternatif yaklaşım kullanılır. Bu yaklaşım için,

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j^2\right)} \le \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}$$

eşitliği tanımlanır. Bununla birlikte D_k istenilen bir sabit olmak üzere

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j^2\right)} = D_k\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}$$

yazılabilir. Bu durumda, $D_k = 1$ alınmasıyla, yani h 'ın en üst sınırının seçilmesiyle,

$$\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j^2}{\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j}\right)\chi_k^2\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}\right)$$

ifadesi bulunur ve d_k rasgele değişkeninin yaklaşık olarak dağılımı elde edilebilir. Böylece şans kısıtları

$$P\left\{\chi_k^2\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}\right) \le \frac{b_k\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j}{\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j^2}\right\} \ge u_k; \qquad (b_k > 0) \tag{2.17}$$

biçimine dönüşür. Alternatif olarak (2.17)

$$F_k\left(b_k\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j \Big/ \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j^2\right) \ge u_k, \quad k = 1,\dots,m$$

yazılabilir. u_k 'lar önceden belirlenmiş tolerans ölçümleridir. Burada $F_k(w)$ serbestlik derecesi $N = \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}$ olan merkezsel ki-karenin dağılım fonksiyonudur ve

$$F_k(w) = \left(2^{N/2}\Gamma\left(N/2\right)\right)^{-1}\int_0^w t^{(N/2)-1}\exp\left(-t/2\right)dt$$

ile gösterilir. Seçilen serbestlik derecesine göre w değerleri merkezsel ki-kare tablosundan rahatlıkla bulunur ya da doğrudan

$$w = \frac{b_k \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} x_k}{\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} x_j^2}$$

eşitliği elde edilir. Böylece şans kısıtlı eşitlik,

$$b_k \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} x_j - q_k \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} x_j^2 \geq 0$$

biçimine dönüşecektir. Burada $q_k = w_o$ olarak alınır. Bu durumda eşdeğer deterministik model dışbükey programlama problemi olmak üzere,

$$\min z = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$b_k \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} x_j - q_k \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} x_j^2 \geq 0; \quad q_k = w_o$$

$$x_j \geq 0 \quad k = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots,n$$

biçiminde modellenir (Sengupta, 1970).

Durum 3: a_{ij} ve b_i ortak bağımsız merkezsel ki-kare değişkenleri ise;

$P\left(A\mathbf{x} \leq b\right) \geq u$ şans kısıtı ele alınsın. İlk olarak,

$$Q_k = \frac{d_k}{b_k} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j}{b_k}, \qquad k = 1,\dots,m \tag{2.18}$$

değişkeni tanımlansın. Bu durumda şans kısıtlı eşitlik

$P\left(Q_k \leq 1\right) \geq u_k, \quad k = 1,\dots,m$

biçiminde yazılabilir.

Durum 2'deki açıklamalara göre (2.18)' in paydası merkezsel olmayan ki-kare dağılımına sahiptir. Aynı zamanda b_i'ler, $\overline{b_i}$ ortalamasına sahip merkezsel ki-kare değişkenleri olarak alındığında (2.18) ile verilen oran merkezsel olmayan F dağılımına sahip olacaktır. Merkezsel olmayan F dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{-L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^j}{j!\,B\left(\frac{v_1}{2}+j, \frac{v_2}{2}\right)} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\left(\frac{v_1}{2}\right)+j} g(x);$$

eşitliği ile gösterilir. Burada,

$$g\left(x\right)=x^{\left(\frac{v_1}{2}\right)+j-1}\left(1+\frac{v_1 x}{v_2}\right)^{\frac{-(v_1+v_2)}{2-j}}$$

olarak alınmıştır. Diğer notasyonlar,

$B\left(m,n\right)$: Standart beta fonksiyonunu

v_1, L : Payın serbestlik derecesini ve payın merkezsel olmama parametresini (merkezsel olmayan ki-kare parametresini)

v_2 : Paydanın serbestlik derecesini göstermek üzere (2.18) ifadesinin dağılımı,

$$\frac{l_k\chi_k^2\left(h\right)\Big/\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}}{\chi_k^2\left(\overline{b}_k\right)\Big/\overline{b}_k}=\frac{\dfrac{\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j^2}{\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_k}\chi_k^2\left(h\right)\Big/\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}}{\chi_k^2\left(\overline{b}_k\right)\Big/\overline{b}_k}$$

oranının dağılımına eşittir. Bu durumda,

$$r=\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}\right)\Bigg/ b_k\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_k\right)$$

ve serbestlik dereceleri

$$M_1=\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj};\quad M_2=\overline{b}_k \tag{2.19}$$

olmak üzere $Q_k=\dfrac{d_k}{b_k}$ oranı $rF\left(M_1,M_2\right)$'nin dağılımı ile bulunur. $F\left(M_1,M_2\right)$, M_1 ve M_2 serbestlik dereceli merkezsel F dağılımıdır. Şans kısıtları,

$$P\left(F\left(M_1,M_2\right)\le 1/r\right)\ge u_{k,}\ r>0$$

ya da alternatif olarak,

$$G_k\left(1/r\right)\ge u_k\,,\qquad k=1,\ldots,m \tag{2.20}$$

biçiminde yazılır. Burada $G_k\left(w\right)$, (2.19)' da verilen serbestlik dereceleri ile merkezsel F değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonudur. Böylece verilen u_k ve serbestlik dereceleri için pozitif sabit l'nin değeri tablodan bulunabilir. Şöyle ki,

$$l_k=1/r_0$$

değeri (2.20) eşitsizliğini sağlar. Böylece eşdeğer deterministik model,

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$

$$\overline{b}_k\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_k\right)-l_k\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}\right)\geq 0 \qquad x_j\geq 0 \quad k=1,...,m,\quad j=1,...,n$$

biçimine dönüşür (Sengupta 1972).

Durum 4: a_{ij}, b_i ve c_j katsayıları ki-kare dağılımına sahip rasgele değişkenler ise, Durum 3 ile verilen modelde, a_{ij}, b_i katsayıları birlikte rasgele değişken olduğu durum incelenmişti ve denk deterministik kısıt elde edilmişti. O halde Durum 4'de amaç fonksiyonunun rasgeleliğini incelemek yeterlidir.

Amaç fonksiyonu, $z=\mathbf{c}'\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$ 'nin en büyüklemesi her verilen olasılık ölçüsü v (0< v <1) ve alt limit f için ele alınmıştır. Burada,

$$P\left(z=\mathbf{c}'\mathbf{x}\leq f\right)=v$$

olasılığı, c fiyat vektörünün rasgele olduğu durumda z amaç fonksiyonunun beklenen değerinin en büyüklemesini temsil eder. Bir en büyükleme problemi için eğer toplam kar z, en azından z_0 'a eşit veya z_0 'dan büyükse yani,

$$P\left(z\geq z_0\right)=u_{0,} \qquad 0\leq u_0\leq 1 \tag{2.21}$$

eşitliğinin en büyüklemesi ise, seçilmiş u_0 olasılığı ile karar vericinin istediği en büyüklemeyi sağlar. (2.21) durumu ele alınsın. u_i 'ler önceden atansın ve c_j elemanları ($\mathbf{c}$ fiyat vektörünün elemanları) ortalaması $\overline{c}_j$ ile ortak bağımsız dağılan ki-kare değişkenleri olsun ve $\chi_j^2\left(\overline{c}_j\right)$ ile gösterilsin. Böylece,

$$R=\sum_{j=1}^{n}x_j\chi_j^2\left(\overline{c}_j\right); \qquad \overline{c}_j : c_j \text{ 'nin beklenen değeridir.}$$

oranının dağılımı Durum 2' dekine benzer olarak,

$$R=l\chi^2(h),\text{ burada } l=\frac{\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_jx_j^2}{\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_jx_j}, \qquad h=\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j$$

biçiminde tanımlanmasıyla ortaya çıkar. Bu durumda deterministik amaç fonksiyonu,

$$\max z_0=w_0\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_jx_j^2\Big/\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_jx_j$$

problemine indirgenir. Burada,

$$w_0=F^{-1}\left(1-u_0\right)$$

olmak üzere pozitif sabittir ve $F(v)$, $\sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j$ ortalamalı merkezsel ki-kare değişkeninin dağılım fonksiyonudur (Sengupta, 1970).

Durum 1'de, b_i katsayılarının rasgele değişken olması durumunda, rasgele değişkenin dağılım fonksiyonunun tersi alınabiliyorsa, şans kısıtı (2.14) eşitsizliğindeki gibi deterministik hale getirilir. Ki kare dağılımının tablolaşmış değerleri olduğundan bilinen serbestlik derecesi kullanılarak deterministik kısıt rahatlıkla elde edilebilir. Durum 2'de, a_{ij} katsayıları bağımsız ki-kare değişkenleri ise, normal dağılan rasgele değişkenlerin karelerinin toplamının ki kare dağılımına sahip olması özelliği kullanılmıştır. Karar değişkenleri ile çarpım halinde bulunan teknoloji katsayılarına ait dağılımın merkezsel olmayan ki kare dağılımına uyduğu gözlenmiştir. Merkezsel olmayan ki kare dağılımını merkezsel ki kare dağılımına dönüştüren bir yaklaşım kullanılarak ki kare tablosunun kullanılmasıyla şans kısıtı deterministik hale dönüştürülmüştür. Durum 3'de, a_{ij} ve b_i ortak bağımsız merkezsel ki-kare değişkenleri ise, paydası merkezsel olmayan, payı merkezsel ki kareye ait oranın dağılımı merkezsel olmayan F dağılımına sahip olacaktır. Merkezsel F dağılımına dönüştürme işlemi ve bilinen serbestlik dereceleri kullanılarak F tablosu yardımıyla deterministik kısıt bulunur. Durum 4'de amaç fonksiyonunun rasgeleliği incelenmiştir. Durum 1 ile verilen yöntem izlenerek deterministik eşitlik bulunmuştur.

3. SAYISAL ÖRNEK

Kesim 2.1 ve 2.2 ile verilen katsayıların normal veya ki kare dağılımına sahip olması durumunda, deterministik modellerin ayrı ayrı oluşturulması ve model çözümlerinden elde edilen sonuçların karşılaştırılması amacıyla üç değişkenden ve üç stokastik kısıttan oluşan iki farklı şans kısıtlı stokastik programlama problemi;

$$\begin{aligned}
&\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\
&\mathrm{P}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le 8\right) \ge 0.95 \\
&\mathrm{P}\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le 6\right) \ge 0.90 \\
&\mathrm{P}\left(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le 5\right) \ge 0.80 \\
&x_j \ge 0,\ j = 1,2,3
\end{aligned} \tag{3.1}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\
&\mathrm{P}\left(5x_1 + x_2 + 6x_3 \le b_1\right) \ge 0.10 \\
&\mathrm{P}\left(3x_1 + 2x_2 + 7x_3 \le b_2\right) \ge 0.05 \\
&\mathrm{P}\left(6x_1 + x_2 + 5x_3 \le b_3\right) \ge 0.20 \\
&x_j \ge 0,\ j = 1,2,3
\end{aligned} \tag{3.2}$$

biçiminde verilsin. (3.1) modelinde amaç fonksiyonundaki c_j, $j=1,2,3$ katsayıları, kısıtlardaki a_{ij}, $i=1,2,3$ $j=1,2,3$ katsayıları ve (3.2) modelinde amaç fonksiyonundaki c_j, $j=1,2,3$ katsayıları, kısıtlardaki $b_i, i=1,2,3$ katsayıları ilk olarak normal, ikinci olarak ki kare dağılan rasgele değişkenler olarak ele alınsın. Her iki dağılıma da sahip olmaları durumunda (3.1) ve (3.2) modellerindeki, a_{ij}, b_i ve c_j rasgele değişkenlerine ilişkin beklenen değerler ve varyanslar, rasgele türetilerek Tablo 1 ile sunulmuştur.

Tablo 1. Katsayıların Beklenen Değerleri ve Varyansları

Katsayılar	a_{1j}			a_{2j}			a_{3j}			b_i			c_j		
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
Beklenen Değer	2	1	3	3	2	4	2	3	4	7	6	5	5	6	3
Varyans	4	2	9	5	3	7	6	2	8	9	4	16	8	7	6

İlk olarak, a_{ij} ve c_j rasgele değişkenleri normal dağılıma sahip iken (3.1) modeline ilişkin deterministik model

$$\begin{aligned} &\max z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 \\ &2x_1 + x_2 + 3x_3 + 1.645\sqrt{4x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2} \le 8 \\ &3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1.285\sqrt{5x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2} \le 6 \\ &2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 0.845\sqrt{6x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2} \le 5 \\ &x_j \ge 0,\ j = 1,2,3 \end{aligned} \tag{3.3}$$

b_i ve c_j rasgele değişkenleri normal dağılıma sahip iken (3.2) modeline ilişkin deterministik model

$$\begin{aligned} &\max z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 \\ &5x_1 + x_2 + 6x_3 \le 10.855 \\ &3x_1 + 2x_2 + 7x_3 \le 9.29 \\ &6x_1 + x_2 + 5x_3 \le 8.38 \\ &x_j \ge 0,\ j = 1,2,3 \end{aligned} \tag{3.4}$$

biçiminde bulunur. Burada Kesim 2.1'den yararlanılmıştır. Amaç fonksiyonu katsayıları rasgele değişken olduğu için Durum3'de, a_{ij} katsayıları rasgele değişken olduğu için Durum 1'de, b_i katsayılarının rasgele değisken olduğu için Durum 2'de verilen deterministik modeller kullanılmıştır.

İkinci olarak, a_{ij} ve c_j rasgele değişkenleri ki kare dağılımına sahip iken (3.1) modeline ilişkin deterministik model

$$\begin{aligned} &\max z_0 = 21.06(5x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2)/(5x_1 + 6x_2 + 3x_3) \\ &16x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 25.2x_1^2 - 12.6x_2^2 - 37.8x_3^2 \ge 0 \\ &18x_1 + 12x_2 + 24x_3 - 44.1x_1^2 - 29.4x_2^2 - 58.8x_3^2 \ge 0 \\ &10x_1 + 15x_2 + 20x_3 - 24.4x_1^2 - 36.6x_2^2 - 48.8x_3^2 \ge 0 \\ &x_j \ge 0,\ j = 1,2,3 \end{aligned} \tag{3.5}$$

b_i ve c_j rasgele değişkenleri ki kare dağılımına sahip iken (3.2) modeline ilişkin deterministik model

$$\begin{aligned} \max z_0 &= 21.06(5x_1^2+6x_2^2+3x_3^2)/(5x_1+6x_2+3x_3) \\ &5x_1+x_2+6x_3 \le 12.02 \\ &3x_1+2x_2+7x_3 \le 12.59 \\ &6x_1+x_2+5x_3 \le 7.289 \\ &x_j \ge 0,\ j=1,2,3 \end{aligned} \tag{3.6}$$

biçiminde bulunur. Burada Kesim 2.2'den yararlanılmıştır. Amaç fonksiyonu katsayıları için Durum 4'de, a_{ij} katsayıları rasgele değişken olduğu için Durum 2'de, b_i katsayılarının rasgele değisken olduğu için Durum 1'de verilen deterministik modeller kullanılmıştır. Amaç fonksiyonu için u_0 olasılığı 0.90 olarak alınmıştır.

(3.3), (3.4), (3.5) ve (3.6) modelleri LİNGO paket programı ile çözülerek elde edilen sonuçlar Tablo 2 ile verilmiştir.

Tablo 2. (3.3), (3.4), (3.5) ve (3.6) modellerinin sonuçları.

	(3.3) Modeli NORMAL	(3.5) Modeli Kİ KARE	(3.4) Modeli NORMAL	(3.6) Modeli Kİ KARE
x_1	0.4191284	0.000000	0.000000	0.000000
x_2	0.9203255	0.5170851	4.645000	6.295000
x_3	0.0000000	0.1849498	0.000000	0.000000
max z	7.617595	9.828653	27.87	132.5727

4. SONUÇ ve TARTIŞMA

Pratik olarak basit bir problemde başlangıç verisi yetersiz olduğunda, elde olan veriler kullanılarak durum içerisinde kararlar vermek bir kuraldır. Karmaşık durumlarda, deterministik modeller yerine stokastik modelleri seçerek karar vermenin daha uygun olduğu görülmüştür. Başlangıç verilerinin tam olarak bilinmediği yani bir belirsizlik veya eksiklik içerdiği durumda şans kısıtlı stokastik programlama problemlerini kullanmak gerekmektedir.

Katsayıların rasgele değişken olması, bu katsayıların birer dağılıma sahip olmasını zorunlu kılar. Şans kısıtlarının katsayılarının sahip olduğu dağılımın doğru olarak seçilmesi önemli bir problem olup seçilen dağılıma ilişkin şans kısıtlarının, deterministik eşitliklerinin nasıl elde edileceği sorusunu beraberinde getirir. Bu düşünceden yola çıkarak normal ve ki-kare dağılımlı şans kısıtlı modellerin deterministik modellerinin elde edilişleri ayrıntılı olarak her katsayı için incelenmiştir.

Uygulama aşamasında ele alınan şans kısıtlı modelin katsayılarının normal ve ki kare dağılımına sahip olmaları durumunda deterministik modelleri bulunmuştur. Bu modellere ait çözümler Tablo 2 ile verilmiştir. Çözüm sonuçlarına göre, dağılımın değişmesi ile karar değişkenlerinin ve amaç fonksiyonlarının değerlerinin oldukça etkilendiği görülmüştür. Bu nedenle gerçek hayat problemlerinde katsayıların hangi dağılıma sahip olduğu doğru olarak belirlenmelidir.

Sonuç olarak rasgele değişken katsayılara sahip modellerde öncelikle katsayılara uygun olan dağılım seçilmelidir. Ele alınan şans kısıtlı modelin deterministik eşitliği teorik temellere dayandırılarak bulunmalıdır.

KAYNAKLAR

Charnes, A. ve Cooper, W.W. (1959). Chance Constrained Programming. *Management Science* 6, 73-79.

Déak, I. (1998). Linear Regression Estimators for Multinormal Distributions in Optimization of Stochastic Programming Problems. *European Journal of Operational Research* 111, 555-568.

Hillier, F.S. ve Lieberman, G.J. (1990). *Introduction to Mathematical Programming*. Hill Publishing Company, New York.

Hulsurkar, S., Biswal, M.P. ve Sinha, S.B. (1997). Fuzzy Programming Approach to Multi-Objective Stochastic Linear Programming Problems. *Fuzzy Sets and Systems 88*,173-181.

Jana, R.K. ve Biswal, M.P. (2004). Stochastic Simulation-Based Genetic Algorıthm for Chance Constraint Programming Problems with Continuous Random Variables. *International Journal of Computer Mathematics* 81(9), 1069-1076.

Kampas, A. ve White, B. (2003). Probabilistic Programming for Nitrate Pollution Control: Comparing Different Probabilistic Constraint Approximations. *European Journal of Operational Research* 147, 217-228.

Kolbin, V.V. (1977). *Stochastic Programming*. D. Reidel Publishing Company, Boston.

Patnaik, P.B. (1949). The Non-Central χ^2 and F- Distributions and Their Applications. *Biometrika* 36,202-232.

Resh, M. (1970). Chance Constrained Programming of the Machine Loading Problem with Stochastic Proccessing Times. *Management Science* 17,48-65.

Sengupta, J.K. (1970). A Generalization of Some Distribution Aspects of Chance Constrained Linear Programming. *International Economic Review* 11, 287-304.

Sengupta, J.K. (1972). *Stochastic Programming: Methods and Applications*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Symonds, G.H. (1967). Deterministic Solutions for A Class of Chance Constrained Programming Problems. *Operations Research* 15, 495-512.

Taha, H.A. (1997). *Operations Research an Introduction*. Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ.

Kumru Didem ATALAY, 1975, Ankara doğumludur. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'nden 1998 yılında mezun olduktan sonra aynı bölümde 2000 yılında yüksek lisans, 2007 yılında doktora derecesini aldı ve Araştırma Görevlisi olarak çalıştı. 2008 yılından itibaren Başkent Üniversitesi Tıp Fakültesi Biyoistatistik Anabilim Dalı'nda çalışmalarını sürdürmektedir.

Ayşen APAYDIN, 1956, Denizli doğumludur. Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü'nden 1979 yılında mezun olduktan sonra aynı bölümde 1981 yılında yüksek lisans, 1987 yılında doktora derecesini aldı ve Araştırma Görevlisi olarak çalıştı. 1988 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'nde Yardımcı Doçent, 1996 yılında Doçent ve 2002 yılında Profesör oldu. Halen ayny bölümde Yöneylem Araştırması Anabilim Dalı Başkanı olarak görevini sürdürmektedir.