KUATERNİON CEBRİNİN KLASİK MEKANİĞE UYGULANMASI

TÜLAY TOLAN
Yüksek Lisans Tezi

Fizik Anabilim Dalı
OCAK-1998

Tülay TOLAN' ın yüksek lisans tezi olarak hazırladığı *Kuaternion Cebrinin Klasik Mekaniğe Uygulanması* başlıklı tez.13.02.1998.....tarihinde aşağıdaki juri tarafından Lisansüstü Öğretim Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye (Tez Danışmanı): ...*Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ*

Üye : ...*Prof. M. Selami KILIÇKAYA*..

Üye : ...*Yrd. Doç. Dr. Murat TANIŞLI*

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 19.02.1998.....tarih ve ...3/12.......sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmaya izin veren T.C. Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü yöneticilerine ve bu çalışmamı yönlendiren değerli hocam Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ'a, çalışmalarımda desteğini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Murat TANIŞLI' ya, tezin yazımı sırasında bana yardımcı olan Arş. Grv. Süleyman DEMİR' e teşekkür ederim.

Tülay TOLAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KUATERNİON CEBRİNİN KLASİK MEKANİĞE UYGULANMASI

TÜLAY TOLAN

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ
1998, sayfa 44

Öteleme ve dönme hareketlerinin kuaternion ve dual kuaternionlarla temsilinin, fizikçilerin daha yaygın olarak tercih ettikleri homojen matris temsilinden daha basit bir forma ve daha açık bir geometrik anlama sahip olduğu bilinmektedir. Bu yüzden öteleme ve dönmenin büyüklüklerini ve yönlerini doğrudan veren kuaternion temsili ve bunun bir uygulaması olan bir sistemin açısal momemtumu, eylemsizlik momenti bu çalışmada ele alınmıştır.

Ayrıca buna ilaveten dual kuaternionların cebrini incelenip Serret-Frenet Üçyüzlüsünün ifadeleri tanımlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kuaternion, Dual Kuaternion

ABSTRACT

Master of Science Thesis

APPLICATION OF QUATERNION ALGEBRA
TO CLASSICAL MECHANICS

TÜLAY TOLAN

Anadolu University
Gradate School of Natural and Applied Sciences
Physics Program

Supervisor: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ
1998, Page 44

It is known that representation of translational and rotational motions by the quaternions and dual quaternions have simpler form and clearer geometrical meaning than homogeneous matris representation which is often used by physicists. Therefore quaternion representation, gives magnitudes and direction of translation and rotation, and angular momentum, moment of inertia of a system which are an application of quaternion representation are investigated in this thesis.

In addition, dual quaternion algebra is studied and representations of Serret-Frenet Formula are defined.

Keywords: Quaternions, Dual Quaternions

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\Re$	: Reel sayılar uzayı
$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$	: Kuaternion
p^i	: Kuaternion bileşenleri
e_i	: Yapı sabitleri
$\boldsymbol{p}^*$	: $\boldsymbol{p}$ kuaternionunun kompleks eşleniği
$N(\boldsymbol{q})$	: $\boldsymbol{q}$ kuaternionunun normu
$\boldsymbol{p}^{-1}$	: $\boldsymbol{p}$ kuaternionunun tersi
$\breve{\mathrm{P}}$	: Kuaternionun 2x2 matris temsili
$\overset{+}{\mathrm{P}}, \overset{-}{\mathrm{P}}$	: Kuaternionun 4x4 matris temsilleri
$r, s, \ldots$	: skaler
$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \ldots$	: Vektör
$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \ldots$	: Matris
U	: Birim Matris
P,Q,...	: 3x1 Matris
$\mathbf{A}$	: Dönme dönüşüm matrisi
$\boldsymbol{w}$	: Açısal hız kuaternionu
$\dot{\boldsymbol{w}}$	: Açısal hızın birinci türevi veya açısal ivme
L	: Açısal momentum
$\boldsymbol{\tau}$	: Tork
$\mathbf{I}$	: Üç boyutlu uzayda eylemsizlik matrisi
I	: Dört boyutlu uzayda eylemsizlik matrisi
$\mathbf{D}$	: Dual sayılar uzayı
A	: Dual sayı
$\mathbf{A}$	: Dual vektör
$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$	: Dual kuaternion
Q_0	: Birim dual kuaternion
ε	: Dual birim
$\boldsymbol{P}^*$	: Dual kuaternionun kompleks eşleniği
$N(\boldsymbol{P})$	: Dual kuaternionun normu
$\boldsymbol{P}^{-1}$	:Dual kuaternionun tersi
$\mathbf{e}$	: Dual vektör yapı sabiti
τ	: Burulma yarıçapı
$\odot$	: Skaler çarpım
$\otimes$	: Vektörel çarpım

1. GİRİŞ

Kuaternionlar Hamilton tarafından bulunalı bir buçuk asır geçmesine rağmen adeta yeniden keşfedilmiş gibi son yıllarda kullanılmaya başlanmıştır. Bölüm cebrini oluşturan 1, 2, 4, 8 boyutlu cisimlere sırasıyla reel sayılar, kompleks sayılar, kuaternionlar ve oktonionlar denildiği bilinmektedir. Bunlara iki kuaternionun birleşmesiyle elde edilen dual kuaternionları da eklediğimizde fiziksel problemlerin tanımlanmasında ve çözümlenmesinde kullanılan bir sayı cebrine sahip olunur. Özellikle kuaternionlar ve oktonionlar temel parçacıkların sınıflandırılmasında, grup teoride, uzaysal dönmeler ve fiziksel büyüklüklerin karakterlerinin belirlenmesinde başarıyla kullanılmaktadır.

Vektörler, koordinat geometrisi ve trigonometrinin yetersiz kaldığı konularda kuaternionlar kullanılabilmektedir. Dönme artı öteleme probleminin dual kuaternionlarla gösterimi ve bir uygulaması Walker ve Shou /17/ tarafından ele alınmıştır. Dual kuaternion değerli tek reel değişkenli fonksiyonlar için Serret-Frenet formüllerini Sivridağ ve arkadaşları /16/ elde etmişlerdir. Valasek ve Stejskal kinematik denklemlerin matris, kuaternion ve dual kuaternion gösterimlerinin kıyaslamasını ve uzaysal mekanizmaların hız ve konum çözümlemeleri için bazı tanımlamalar yapmışlardır. Spring /19/ ise sınırlı dönmeleri Euler parametreleri ve kuaternion cebrini kullanarak göstermiş n-linkli robot kollarının kinematik denklemlerini ele almıştır. Robotiklerin pozisyonunu Euler ve genel kuaternion dönüşümleri ile inceleyip, Stanford robotiğine uygulanması, ayrıca dönme artı öteleme yapan koordinat sistemlerinde hız ve ivme bağıntılarını Tanışlı ve Özdaş /11/,/5/ tanımlamıştır. Chou ise kuaternion kinematik ve dinamik diferansiyel denklemlerini tanımlayarak açısal momentum ve eylemsizlik momentleri üzerine çalışmıştır. Kuaternion skaler alanları konulu çalışmayı De Leo ve Rotelli /20/ gerçekleştirmiştir. Ell, kısmi türevli diferansiyel denklemlerle tanımlanabilen dinamik sistemlerin analiz edilmesinde kuaternionların iyi bir araç olduğunu göstermiştir.

Gerek kuaternionlar gerekse dual kuaternionlar matris gösterimlerine de sahiptirler. Ayrıca, bu sayı cebirlerinde tanımlanan bazı özellikler bu cebrin kullanılmasını da kolaylaştırmaktadır. Türev alma ve diferansiyel vektör operatörlerinin tanımlanabilmesi de ayrıca bir avantaj olup, fiziksel niceliklerin gösterimi de konuya ayrı bir boyut getirmektedir.

2. KUATERNİON

2.1. Tanım

$\forall q \in \mathbf{Q}$ olmak üzere bir kuaternion;

$$\begin{aligned} q &= \sum_{\mu=0}^{3} q^{\mu}\hat{e}_{\mu} \qquad \mu \in \Re \\ &= q^0\hat{e}_0 + q^1\hat{e}_1 + q^2\hat{e}_2 + q^3\hat{e}_3 \\ &= (q^0, q^1, q^2, q^3) \end{aligned} \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır. Burada $\hat{e}_0$, $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ birim kuaternionlardır(Özdaş ve Özdaş [1]).

Kuaternion cebrinin birim elemanı $\hat{e}_0$' dır. q^0 reel bileşen; q^1, q^2, q^3' ler ise imajiner bileşenler adını alır. İmajiner bileşenler sıfır ise kuaternion reeldir ve skaler kuaternion olarak adlandırılır; iki imajiner bileşen sıfır ise kuaternion bir kompleks sayı ve eğer kuaternionun reel bileşeni sıfır ve q^1, q^2, q^3 bileşenlerinden bir tanesi bile sıfırdan farklı ise kuaternion imajiner veya vektör kuaterniondur. O halde reel ve kompleks sayılar kuaternionların alt kümesidir (Özdaş [2]).

2.2. Kuaternion Cebri

Sıfır Kuaternion: Dört elemanı da sıfır olan kuaternion,

$$q^0 = q^1 = q^2 = q^3 = 0$$

sıfır kuaternion olarak adlandırılır ve

$$q = (0,0,0,0) \tag{2.2}$$

olarak temsil edilir.

Skaler Kuaternion: Yalnızca reel bileşene sahip olan kuaternionlar *skaler kuaternion*dur ve

$$q = (q^0,0,0,0) \tag{2.3}$$

olarak temsil edilirler.

Vektör Kuaternion: Reel bileşeni sıfır ve imajiner bileşenlerinden en az bir tanesi sıfırdan farklı olan kuaternionlar *vektör kuaternion* adını alır. Yani vektör kuaternionlar, $q^0 = 0$ ve q^1, q^2, q^3' ten en az biri sıfırdan farklı olan kuaternionlardır (Özdaş ve Özdaş [1]):

$$q = (0, q^1, q^2, q^3) \tag{2.4}$$

Kuaternionlarda Toplama ve Çıkarma İşlemi: $\boldsymbol{p}$ ve $\boldsymbol{q}$ gibi iki kuaternionun toplamı ve farkı,

$$\begin{aligned} p \pm q &= \left[p^0, p^1, p^2, p^3\right] \pm \left[q^0, q^1, q^2, q^3\right] \\ &= \left[p^0 \pm q^0, p^1 \pm q^1, p^2 \pm q^2, p^3 \pm q^3\right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

veya skaler ve vektörel bileşenler cinsinden,

$$\boldsymbol{p} \pm \boldsymbol{q} = \left(p^0 + q^0\right) + (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \tag{2.6}$$

olarak ifade edilir (Özdaş ve Özdaş [1]), (Hacısalihoğlu [3]).

Toplama ve çıkarma işlemlerinin sonucunda yine bir kuaternion elde edilir. Yani, kuaternion cebri, toplama ve çıkarma işlemine göre kapalılık özelliğine sahiptir. Ayrıca, toplama işlemi değişme özelliğine sahiptir.

Kuaternionlarda Eşitlik: $\boldsymbol{p}$ ve $\boldsymbol{q}$ iki kuaternion olmak üzere,

$$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbf{Q}$$

$$p^0 = q^0, p^1 = q^1, p^2 = q^2, p^3 = q^3; \quad p^\mu = q^\mu \tag{2.7}$$

ise $\boldsymbol{p}$ ve $\boldsymbol{q}$ kuaternionları birbirine eşittir.

Kuaternionlarda Skalar ile Çarpma İşlemi: $\lambda \in \Re$ ve $\boldsymbol{q} \in \mathbf{Q}$ olmak üzere,

$$\lambda q = \lambda q^0 + \lambda q^1 + \lambda q^2 + \lambda q^3 = \boldsymbol{q}\lambda, \quad \boldsymbol{q}\lambda \in \mathbf{Q} \tag{2.8}$$

şeklinde yine bir kuaternion elde edilir.

Kompleks Eşlenik: $\boldsymbol{q} \in \mathbf{Q}$ olmak üzere,

$$\boldsymbol{q} = q^0 \hat{e}_0 + q^1 \hat{e}_1 + q^2 \hat{e}_2 + q^3 \hat{e}_3$$

olarak temsil edilen kuaternionun kompleks eşleniği $\boldsymbol{q}^*$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}^* &= q^0 \hat{e}_0 - q^1 \hat{e}_1 - q^2 \hat{e}_2 - q^3 \hat{e}_3 \\ &= q^0 \hat{e}_0 - q^1 \hat{e}_1 - q^2 \hat{e}_2 - q^3 \hat{e}_3 \\ &= q^0 \hat{e}_0 - \mathbf{q}\mathbf{e} \end{aligned} \tag{2.9}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, $\left(\boldsymbol{q}^*\right)^* = \boldsymbol{q}$ ve $(\boldsymbol{p}\boldsymbol{q})^* = \boldsymbol{q}^* \boldsymbol{p}^*$ dır (Özdaş ve Özdaş [1]).

Norm: Kuaternion ve bu kuaternionun kompleks eşleniğinin çarpımı olarak tanımlanır. Sonuç skaler bir niceliktir:

$$
\begin{aligned}
N(q) = qq^* = q^*q &= \left[\left(q^0\right)^2 + \left(q^1\right)^2 + \left(q^2\right)^2 + \left(q^3\right)^2, 0,0,0\right] \\
&= \sum_{\mu=0}^{3}\left(q^\mu\right)^2 (1,0,0,0) \\
&= \sum_{\mu=0}^{3}\left(q^\mu\right)^2 \hat{e}_0
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Birim Kuaternion: Normu bire eşit olan kuaternion *birim kuaternion* olarak adlandırılır.

Ters Eleman ve Bölme: $q \in \mathbf{Q}$ ve sıfırdan farklı ise q kuaternionunun tersi,

$$
q^{-1} = \frac{q^*}{\sum_{\mu=1}^{3}\left(q^\mu\right)^2} = \frac{q^*}{N(q)}
\tag{2.11}
$$

şeklinde tanımlanır. Kuaternion tersi ile çarpıldığında birim kuaternion elde edilir:

$$
qq^{-1} = q^{-1}q = (1,0,0,0)
\tag{2.12}
$$

Kuaternionlarda bölme işleminde değişme özelliği olmadığından bölme işlemi sağdan ve soldan olmak üzere iki şekilde gerçekleştirilir:

$$
\frac{p}{q} = \begin{cases} pq^{-1} = p\dfrac{q^*}{\sum_{\mu=0}^{3}\left(q^\mu\right)^2} & \text{Sağdan bölme} \\[2ex] q^{-1}p = q\dfrac{p^*}{\sum_{\mu=0}^{3}\left(q^\mu\right)^2} & \text{Soldan bölme} \end{cases}
\tag{2.13}
$$

$pq^{-1} \neq q^{-1}p$ olduğu açıktır. q bir skaler kuaternion ise sağdan bölme soldan bölmeye eşittir. Eğer, p birim kuaternion ise $p^{-1} = p^*$ dır (Özdaş ve Özdaş [1]).

Kuaternionların Matris Temsilleri

i) 2x2 Matris Temsili

Kuaternionlar 2x2 boyutlu matrislerle kompleks formda temsil edilebilirler. Bu matrisler kuantum mekaniğinde bilinen Pauli spin matrislerinin -i sanal sayısı ile çarpımından elde edilir:

$\hat{e}_1 = -i\,\sigma_1$, $\hat{e}_2 = -i\,\sigma_2$, $\hat{e}_3 = -i\,\sigma_3$,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Buradan bir $\boldsymbol{p}$ kuaternionu,

$$\boldsymbol{p} = p^0 - ip^k\sigma_k \tag{2.15}$$

olarak ifade edilir. Bu ifade matris formunda,

$$\breve{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} p^0 - ip^3 & -p^2 - ip^1 \\ p^2 - ip^1 & p^0 + ip^3 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

şeklini alır. Burada,

$$a = p^0 - ip^3, \quad b = p^2 - ip^1, \quad a^* = p^0 + ip^3, \; b^* = p^2 + ip^1,$$

olmak üzere $\boldsymbol{p}$ kuaternionu a ve b elemanları cinsinden,

$$\breve{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

şeklini alır. Bu matrisin determinantı kuaternionun normunu verir (Özdaş [2]), (Serdaroğlu [4]), (Tanışlı [5]):

$$\det(\breve{\mathbf{P}}) = aa^* + bb^* = \mathrm{N}(\boldsymbol{p}) \tag{2.18}$$

ii) 4x4 Matris Temsili

$\boldsymbol{p} = [p^0, p^1, p^2, p^3]$ gibi bir kuaternion, 4x4 ortogonal matrisler cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\overset{+}{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} p^0 & -\mathrm{P}^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{P} & p^0\mathbf{U} + \widetilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^0 & -p^1 & -p^2 & -p^3 \\ p^1 & p^0 & -p^3 & p^2 \\ p^2 & p^3 & p^0 & -p^1 \\ p^3 & -p^2 & p^1 & p^0 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

veya

$$\overset{-}{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} p^0 & -\mathrm{P}^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{P} & p^0\mathbf{U} - \widetilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^0 & -p^1 & -p^2 & -p^3 \\ p^1 & p^0 & p^3 & -p^2 \\ p^2 & -p^3 & p^0 & p^1 \\ p^3 & p^2 & -p^1 & p^0 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Eğer p kuaternionu vektör kuaternion ise $\overset{+}{\mathbf{P}}$ ve $\overset{-}{\mathbf{P}}$ kuaternionları anti-simetriktir, yani $\overset{+}{\mathbf{P}}{}^{T} = -\overset{+}{\mathbf{P}}$ ve $\overset{-}{\mathbf{P}}{}^{T} = -\overset{-}{\mathbf{P}}$ dir. Kuaternion çarpımı matris vektör notasyonunda,

$$pq = \overset{+}{\mathbf{P}} q \tag{2.21}$$

$$qp = \overset{-}{\mathbf{P}} q \tag{2.22}$$

olarak yazılabilir (Tanışlı [5]), (Harauz [6]), (Horn [7]).

Kuaternion Çarpımı

Kuaternionlar için üç şekilde çarpım söz konusudur. Bu çarpımlar,

a) Kuaternion çarpımı,

b) İki vektör kuaternionun skaler çarpımı,

c) İki vektör kuaternionun vektörel çarpımı

olarak adlandırılır.

a) ***Kuaternion çarpımı:*** p ve $q \in \mathbf{Q}$ olmak üzere, p ve q kuaternionları skaler ve vektör bileşenler cinsinden,

$$p = p^0 + \mathbf{p} \qquad \text{ve} \qquad q = q^0 + \mathbf{q}$$

olarak yazılabilir. pq çarpımı;

$$pq = p^0 q^0 + p^0 \mathbf{q} + q^0 \mathbf{p} - \mathbf{p}.\mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \tag{2.23}$$

şeklindedir. İki vektör kuaternionun çarpımı ise aşağıdaki şekilde tanımlanır (Chou [8]), Wehage [9]), (Chou and Kamel [10]):

$$\mathbf{pq} = -\mathbf{p}.\mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \tag{2.24}$$

Daha açık gösterimle kuaternion çarpımı,

$$\begin{aligned} pq &= \left[p^0, p^1, p^2, p^3\right]\left[q^0, q^1, q^2, q^3\right] \\ &= [(p^0q^0 - p^1q^1 - p^2q^2 - p^3q^3), (p^0q^1 + p^1q^0 + p^2q^3 - p^3q^2) \\ &\quad (p^0q^2 + p^2q^0 + p^3q^1 - p^1q^3), (p^0q^3 + p^3q^0 + p^1q^2 - p^2q^1)] \end{aligned} \tag{2.25}$$

şeklinde ifade edilir (Özdaş ve Özdaş[1]).

Birim kuaternionlar için çarpım kuralları kısaca yazılabilir:

$$\hat{e}_i \hat{e}_j = -\delta_{ij} e_0 + \epsilon_{ijk}\, e_k \quad (i, j, k = 1,2,3) \tag{2.26}$$

Burada,

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\in_{ijk} = \begin{cases} 1, & (i,j,k) = (1,2,3) = (2,3,1) = (3,1,2) \\ -1, & (i,j,k) = (1,3,2) = (3,2,1) = (2,1,3) \\ 0, & (i,j,k) = (1,1,2) = (2,1,2) = \ldots\ldots \end{cases}$$

şeklindedir. Birim kuaternionların çarpım tablosu aşağıdaki gibidir (Serdaroğlu [4]):

1 \ 2	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

Burada çarpımın ilk elemanı birinci sütundan, ikinci elemanı ise birinci satırdan alınmalıdır.

Kuaternion çarpımı matris formunda da,

$$\mathbf{PQ} = \begin{bmatrix} p^0 q^0 - \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q} \\ \mathrm{P}q^0 + (p^0\mathbf{U} + \widetilde{\mathbf{P}})\mathrm{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^0 p^0 - \mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{P} \\ \mathrm{Q}p^0 + (q^0\mathbf{U} - \widetilde{\mathbf{Q}})\mathrm{P} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada **U**, 3x3 birim matris ve

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & -p^3 & p^2 \\ p^3 & 0 & -p^1 \\ -p^2 & p^1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & -q^3 & q^2 \\ q^3 & 0 & -q^1 \\ -q^2 & q^1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

olmak üzere çarpım kuaternionu iki matris çarpımı şeklinde aşağıdaki şekilde yazılabilir (Chou [8]), (Wehage [9]), (Chou and Camel [10]):

$$\mathbf{B} = \mathbf{PQ} = \begin{bmatrix} p^0 & -\mathrm{P}^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{P} & p^0\mathbf{U} + \widetilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^0 \\ \mathrm{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^0 & -\mathrm{Q}^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{Q} & q^0\mathbf{U} - \widetilde{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^0 \\ \mathrm{P} \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Bu çarpımın daha açık gösterimi,

$$\mathbf{PQ} = \begin{bmatrix} p^0 & -p^1 & -p^2 & -p^3 \\ p^1 & p^0 & -p^3 & p^2 \\ p^2 & p^3 & p^0 & -p^1 \\ p^3 & -p^2 & p^1 & p^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^0 \\ q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^0 & -q^1 & -q^2 & -q^3 \\ q^1 & q^0 & q^3 & -q^2 \\ q^2 & -q^3 & q^0 & q^1 \\ q^3 & q^2 & -q^1 & q^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

şeklinde olmaktadır. Buradan elde edilen sonuca göre;

İki kuaternion çarpımı bir kuaterniondur. $pq \neq qp$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Değişme özelliği yoktur (komutatif değildir).

Üç kuaternion belli bir sırada çarpılırken ilk ikisinin çarpımıyla üçüncüsünün çarpılması veya birincisiyle ikinci ve üçüncüsünün çarpılması önemli değildir. Buradan da kuaternion çarpımının birleşimli (asosyatif) olduğu görülür:

$$(pq)\,m = p\,(qm) \tag{2.31}$$

b) *İki Vektör Kuaternionun Skaler Çarpımı:* *p* ve ***q*** kuaternionlarının her ikisi de vektör kuaternion olmak üzere,

$$\begin{aligned} p \odot q &= -\frac{1}{2}\,[pq + qp] = -\frac{1}{2}\,[pq + (pq)^*] \\ &= [\,(p^1q^1 + p^2q^2 + p^3q^3)\,,0\,,0\,,0] \end{aligned} \tag{2.32}$$

olarak tanımlanır. İki vektör kuaternion çarpımı sonucunda skaler kuaternion elde edilir ve iki vektör kuaternionun skaler çarpımı komutatiftir (Tanışlı [5]), (Harauz [6]):

$$p \odot q = q \odot p \tag{2.33}$$

Eğer, p ve q vektör kuaternionlarının skaler çarpımı sıfırsa bu vektör kuaternionlar birbirine diktir (Özdaş ve Özdaş[1]).

c) *İki Vektör Kuaternionun Vektörel Çarpımı:* *p* ve ***q*** kuaternionlarının her ikisi de vektör kuaternion olmak üzere,

$$\begin{aligned} p \otimes q &= \frac{1}{2}\,[pq - qp] = \frac{1}{2}\,[pq - (pq)^*] \\ &= [\,0\,,(p^2q^3 - p^3q^2)\,,(p^3q^1 - p^1q^3)\,,(p^1q^2 - p^2q^1)\,] \end{aligned} \tag{2.34}$$

olarak tanımlanır. İki vektör kuaternionun vektörel çarpımı sonucunda yine bir vektör kuaternion elde edilir ve iki vektör kuaternionun vektörel çarpımı komutatif değildir:

$$p \otimes q = -\,(q \otimes p) \tag{2.35}$$

Ayrıca, p ve q vektör kuaternionlarının vektörel çarpımı sıfırsa bu vektör kuaternionlar birbirine paraleldir (Özdaş ve Özdaş [1]), (Tanışlı [5]).

2.3. Özellikler

Kuaternion cebrinde tanımlanmış özellikler işlem kolaylığı açısından önem taşır. Bu sebeple, $\boldsymbol{m}$ ve $\boldsymbol{n}$ skaler kuaternion, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ vektör kuaternion olmak üzere, aşağıdaki tanımlar verilebilir:

1. $\boldsymbol{mn} = [m^0 n^0\,,0\,,0\,,0]$

2. $\boldsymbol{mn}^{-1} = \boldsymbol{n}^{-1}\boldsymbol{m} = \left[\dfrac{m^0}{n^0}, 0, 0, 0\right]$

3. $\boldsymbol{mf} = \boldsymbol{fm} = \left[0, m^0 f^1, m^0 f^2, m^0 f^3\right]$

4. $\mathbf{fm}^{-1} = \boldsymbol{m}^{-1}\boldsymbol{f} = \left[0, \dfrac{f^1}{m^0}, \dfrac{f^2}{m^0}, \dfrac{f^3}{m^0}\right]$

5. $\boldsymbol{mf}^{-1} = \boldsymbol{m}^{-1}\boldsymbol{f} = \dfrac{m^0}{\left(f^1\right)^2 + \left(f^2\right)^2 + \left(f^3\right)^2}\left[0, -f^1, -f^2, -f^3\right]$

6. $\boldsymbol{st} = (\boldsymbol{ts})^*$

7. $\boldsymbol{st}^{-1} = \left(\boldsymbol{t}^{-1}\boldsymbol{s}\right)^*$, (Tanışlı [5]).

8. $\boldsymbol{h}^n = \begin{cases} \text{n tek ise} & \boldsymbol{h}^n = \left(-h_x - h_y - h_z\right)\boldsymbol{h} \\ \text{n çift ise} & \boldsymbol{h}^n = \left(-h_x - h_y - h_z\right)(1{,}0{,}0{,}0) \end{cases}$

9. $\mathbf{B} = \overset{+}{\mathbf{P}}\mathbf{Q} = \overset{-}{\mathbf{Q}}\mathbf{P}$

10. $\mathbf{PBQ} = \overset{+}{\mathbf{P}}\overset{+}{\mathbf{B}}\mathbf{Q} = \overset{+}{\mathbf{P}}\overset{-}{\mathbf{Q}}\mathbf{B}$

veya

$$\mathbf{PBQ} = \overset{+}{\mathbf{P}}\overset{+}{\mathbf{B}}\mathbf{Q} = \overset{-}{\mathbf{Q}}\left(\overset{+}{\mathbf{P}}\mathbf{B}\right)$$

olmaktadır. Buradan da,

$$\overset{+}{\mathbf{P}}\overset{-}{\mathbf{Q}} = \overset{-}{\mathbf{Q}}\overset{+}{\mathbf{P}}$$

bulunur.

11. (9) Özelliğinin genelleştirilmesiyle,

$$\overset{+}{\mathbf{P}}_1 \overset{+}{\mathbf{P}}_2 \cdots \overset{+}{\mathbf{P}}_{n-1} \mathbf{P}_n = \overset{-}{\mathbf{P}}_n \overset{-}{\mathbf{P}}_{n-1} \cdots \overset{-}{\mathbf{P}}_2 \mathbf{P}_1$$

$$= \left(\overset{+}{\mathbf{P}}_1 \overset{+}{\mathbf{P}}_2 \cdots \overset{+}{\mathbf{P}}_{i-1}\right)\left(\overset{-}{\mathbf{P}}_n \overset{-}{\mathbf{P}}_{n-1} \cdots \overset{-}{\mathbf{P}}_{i+1}\right)\mathbf{P}_i$$

elde edilir.

12. (10) Özelliğinin genelleştirilmesiyle,

$$\left(\overset{+}{\mathbf{P}}_1 \overset{+}{\mathbf{P}}_2 \ldots\ldots \overset{+}{\mathbf{P}}_n\right)\left(\overset{-}{\mathbf{Q}}_1 \overset{-}{\mathbf{Q}}_2 \ldots\ldots \overset{-}{\mathbf{Q}}_m\right) = \left(\overset{-}{\mathbf{Q}}_1 \overset{-}{\mathbf{Q}}_2 \ldots\ldots \overset{-}{\mathbf{Q}}_m\right)\left(\overset{+}{\mathbf{P}}_1 \overset{+}{\mathbf{P}}_2 \ldots\ldots \overset{+}{\mathbf{P}}_n\right)$$

13. $$\overset{+}{\left(\overset{+}{\mathbf{P}}_1 \overset{+}{\mathbf{P}}_2 \cdots \overset{+}{\mathbf{P}}_{n-1} \mathbf{P}_n\right)} = \overset{+}{\mathbf{P}}_1 \overset{+}{\mathbf{P}}_2 \cdots \overset{+}{\mathbf{P}}_{n-1} \mathbf{P}_n$$

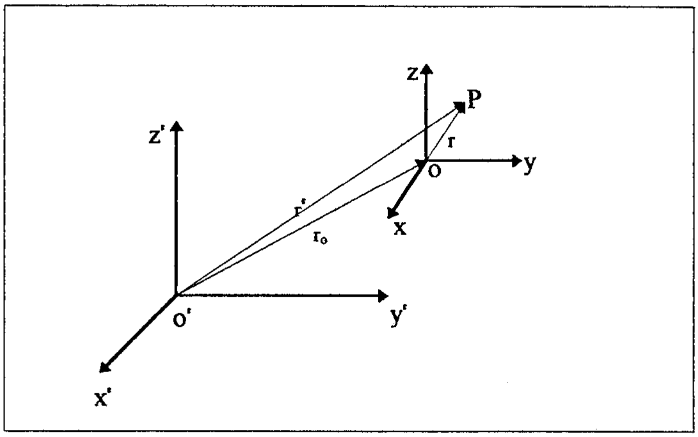
14. $$\overset{-}{\left(\overset{+}{\mathbf{P}}_1 \overset{+}{\mathbf{P}}_2 \cdots \overset{+}{\mathbf{P}}_{n-1} \mathbf{P}_n\right)} = \overset{-}{\mathbf{P}}_n \overset{-}{\mathbf{P}}_{n-1} \cdots \overset{-}{\mathbf{P}}_2 \overset{-}{\mathbf{P}}_1$$

15. $$\overset{+}{\left(\overset{-}{\mathbf{P}}_1 \overset{-}{\mathbf{P}}_2 \ldots\ldots \overset{-}{\mathbf{P}}_{n-1} \mathbf{P}_n\right)} = \overset{+}{\mathbf{P}}_n \overset{+}{\mathbf{P}}_{n-1} \ldots\ldots \overset{+}{\mathbf{P}}_2 \overset{+}{\mathbf{P}}_1$$

16. $$\overset{-}{\left(\overset{-}{\mathbf{P}}_1 \overset{-}{\mathbf{P}}_2 \ldots\ldots \overset{-}{\mathbf{P}}_{n-1} \mathbf{P}_n\right)} = \overset{-}{\mathbf{P}}_1 \overset{-}{\mathbf{P}}_2 \ldots\ldots \overset{-}{\mathbf{P}}_{n-1} \overset{-}{\mathbf{P}}_n \quad , \quad \text{(Chou [8])}.$$

3. DÖNME VE ÖTELEMENİN KUATERNİON GÖSTERİMİ

3.1. Ötelemenin Kuaternion Gösterimi



Şekil 3.1. Öteleme hareketinin gösterimi

xyz koordinat sistemi eksenler paralel kalacak şekilde ötelensin. O gözlem çerçevesine göre P noktasının yervektörü,

$$\mathbf{r} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3 \tag{3.1}$$

şeklindedir. P noktasının O' gözlem çerçevesine göre yervektörü ise,

$$\mathbf{r}' = x'\hat{e}_1 + y'\hat{e}_2 + z'\hat{e}_3 \tag{3.2}$$

olmaktadır. O' gözlem çerçevesinin O gözlem çerçevesine göre yervektörü ise,

$$\mathbf{r}_0 = x_0\hat{e}_1 + y_0\hat{e}_2 + z_0\hat{e}_3 \tag{3.3}$$

şeklindedir. Bu yer vektörlerinin kuaternion temsilleri sırası ile aşağıdaki gibidir:

$$\boldsymbol{r} = [0, x, y, z] \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{r}' = [0, x', y', z'] \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{r}_0 = [0, x_0, y_0, z_0] \tag{3.6}$$

$\boldsymbol{r}'$ vektör kuaternionu, kuaternion temsilleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r} \\ &= [0, x_0, y_0, z_0] + [0, x, y, z] = [0, (x_0 + x), (y_0 + y), (z_0 + z)] \end{aligned} \tag{3.7}$$

şeklinde ifade edilmektedir (Özdaş[2]), (Tanışlı,Özdaş vd. [11]). Matris formunda ise dönüşüm bağıntısı,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

olarak yazılır (Ziheng, Zhe et al [12]).

3.2. Dönmenin Kuaternion Gösterimi

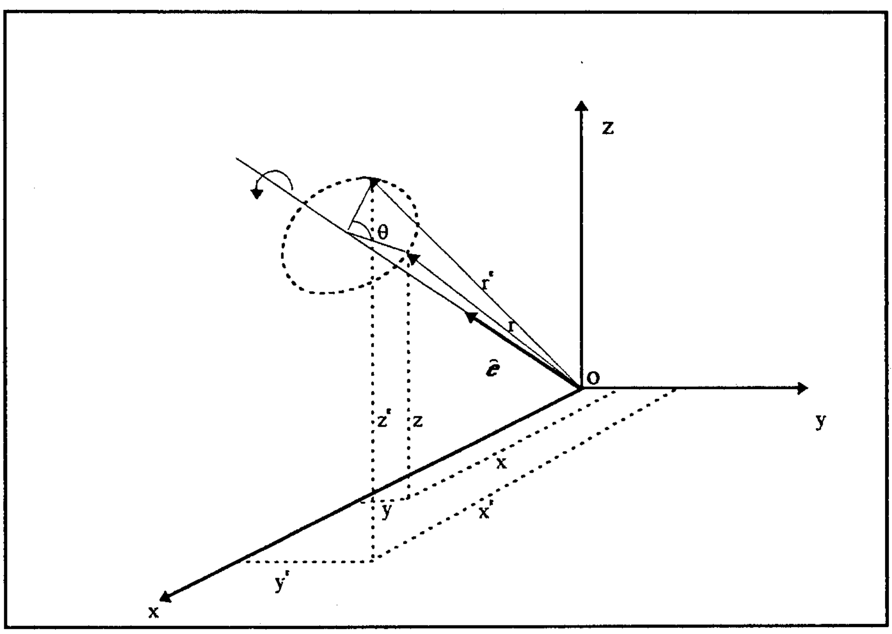
$\mathbf{r} = (x, y, z)$ yervektörünün $\hat{\mathbf{e}}$ birim vektörü etrafında θ açısı kadar döndürülmesiyle $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ vektörü elde edilir. Dönme, kuaternionlar cinsinden,

$$\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{prp^*} \tag{3.9}$$

ile tanımlanır. Burada $\boldsymbol{p}$ kuaternionu birim kuaterniondur. Dönme ifadelerinde birim kuaternion olarak Euler parametreleri cinsinden,

$$\mathbf{P} = [e_0, e_1, e_2, e_3]^{\mathrm{T}} = [e, \mathbf{e}^{\mathrm{T}}] \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{e} \\ &= \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\hat{e}_1 + \sin\frac{\theta}{2}\hat{e}_2 + \sin\frac{\theta}{2}\hat{e}_3 \end{aligned} \tag{3.11}$$



Şekil 3.2. Dönme hareketinin gösterimi

kuaternionu kullanılır ve $0 \leq \theta \leq 2\pi$ değerleri arasındadır (Chou [8]).

Euler parametreleri cinsinden bu bileşenler ayrı olarak,

$$E(x,\theta) = \cos\frac{\theta}{2} + e_1 \sin\frac{\theta}{2} \tag{3.12}$$

$$E(y,\theta) = \cos\frac{\theta}{2} + e_2 \sin\frac{\theta}{2} \tag{3.13}$$

$$E(z,\theta) = \cos\frac{\theta}{2} + e_3 \sin\frac{\theta}{2} \tag{3.14}$$

şeklinde yazılabilir. (3.9) Eşitliğinden yararlanılarak dönmeyi ifade eden dönüşümler,

$$\boldsymbol{r}' = E(x,\theta)\, \boldsymbol{r}\, E^*(x,\theta) \tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{r}' = E(y,\theta)\, \boldsymbol{r}\, E^*(y,\theta) \tag{3.16}$$

$$\boldsymbol{r}' = E(z,\theta)\, \boldsymbol{r}\, E^*(z,\theta) \tag{3.17}$$

şeklinde bileşenler cinsinden ifade edilir. Dönüşümlerin kolaylaştırılması açısından matris ifadelerini yazmak uygundur. Dönme matrisleri bileşenler cinsinden ayrı ayrı yazılırsa,

$$\boldsymbol{r}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$$\boldsymbol{r}' = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

$$\boldsymbol{r}' = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

şeklini alır. Yukarıdaki matrisler sırası ile x,y,z eksenlerin dönmelerine karşılık gelmektedir (Tan and Balchen [13]), (Tanışlı, Özdaş vd. [11]).

Dönme ifadelerinin tanımlanmasında kullanılan birim kuaternionların büyüklüğü bire eşittir:

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \tag{3.21}$$

Dönme ifadesi,

$$r' = prp^*$$

idi. Bu dönme ifadesi matris formunda,

$$\mathbf{R}' = \left(\overset{+}{\mathbf{P}}\overset{-}{\mathbf{P}}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{R} = \left(\overset{-}{\mathbf{P}}^{\mathrm{T}}\overset{+}{\mathbf{P}}\right)\mathbf{R} \tag{3.22}$$

olarak tanımlanabilir. Buradaki $\overset{+}{\mathbf{P}}$ matrisi (2.19) Eşitliğinde verilen p kuaternionun 4x4 matris temsili, $\overset{-}{\mathbf{P}}$ matrisi ise (2.20) Eşitliğinde verilen p kuatenionun 4x4 matris temsilidir. Burada,

$$\overset{+\mathrm{P}}{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & -e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} \qquad \overset{-\mathrm{P}}{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

olmak üzere $\mathbf{R}'$ matrisi,

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overset{+\mathrm{P}}{\mathbf{E}}\,\overset{-\mathrm{P}}{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{R} \tag{3.24}$$

şeklindedir.

Dönme dönüşüm matrisi olan $\mathbf{A}$ dört boyutlu uzayda,

$$\mathbf{A} = \overset{+}{\mathbf{P}}\overset{-}{\mathbf{P}}^{\mathrm{T}} = \overset{-}{\mathbf{P}}^{\mathrm{T}}\overset{+}{\mathbf{P}}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 - e_0e_3) & 2(e_1e_3 + e_0e_2) \\ 0 & 2(e_2e_1 + e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 - e_0e_1) \\ 0 & 2(e_3e_1 - e_0e_2) & 2(e_3e_2 + e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

olarak tanımlanır. $\overset{+}{\mathbf{P}}$ ve $\overset{-}{\mathbf{P}}$ matrisleri ortonormaldir, yani transpozesi tersine ve determinantı bire eşittir; dolayısıyla $\mathbf{R}$ ve dönüşüm matrisi sonucu elde edilen $\mathbf{R}'$ nün uzunlukları (normları) aynıdır.

r' nin vektör kuaternion olduğu durumda dönme dönüşüm matrisi,

$$\mathbf{A} = \overset{+}{\mathbf{E}}^{\mathrm{P}} \overset{-}{\mathbf{E}}^{\mathrm{P}^{\mathrm{T}}} = \left(e_0^2 - e^{\mathrm{T}} e\right)\mathbf{U} + 2\left(ee^{\mathrm{T}} + e_0 \tilde{\mathbf{E}}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1 e_2 - e_0 e_3) & 2(e_1 e_3 + e_0 e_2) \\ 2(e_2 e_1 + e_0 e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2 e_3 - e_0 e_1) \\ 2(e_3 e_1 - e_0 e_2) & 2(e_3 e_2 + e_0 e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

olacaktır.

Euler teoreminden yararlanılarak yani $e_0 = \cos\frac{\theta}{2}$ ve $\mathbf{e} = \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{c}$ trigonometrik özdeşlikleri kullanılarak, dönme dönüşüm matrisi olan **A**,

$$\mathbf{A} = (\cos\theta)\mathbf{U} + (1 - \cos\theta)\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + (\sin\theta)\tilde{\mathbf{C}} \quad (3.27)$$

olarak elde edilir. Bu ispat Bölüm (3.4)' te gösterilmiştir.

Ayrıca, dönmede kullanılan dönüşüm matrisi tek değildir. $\boldsymbol{p}$ yerine $(-\boldsymbol{p})$ kullanılarakta aynı dönüşüm yazılabilir.

$$\boldsymbol{r}' = (-\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{r}\,(-\boldsymbol{p})^* \quad (3.28)$$

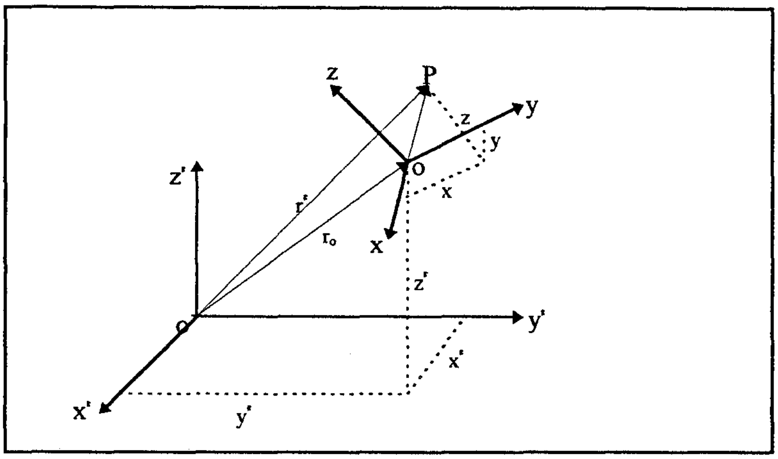
Ters dönüşüm matrisi ise $\mathbf{A}^{-1}$ ile gösterilir. Eğer **A**, $\boldsymbol{p}$ birim kuaternionu ile tanımlanıyorsa $\mathbf{A}^{-1}$ de $\boldsymbol{p}$ birim kuaternionunun konjugesi olan $\boldsymbol{p}^*$ ile tanımlanır. Buradan,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{p}^*\,\boldsymbol{r}'\,(\boldsymbol{p}^*)^* \\ &= \boldsymbol{p}^*\,\boldsymbol{r}'\,\boldsymbol{p} \end{aligned} \quad (3.29)$$

yazılabilir (Chou [8]).

3.3. Dönme + Ötelemenin Kuaternion Gösterimi

O orijinli *xyz* koordinat sistemi ile O' orijinli $x'y'z'$ koordinat sistemi ele alınsın. Başlangıçta her iki koordinat sisteminin orijinleri ve eksenleri çakışıktır. xyz koordinat sistemi ötelenirken aynı zamanda ê birim vektörü etrafında θ açısı kadar dönüyor olsun. $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$, noktanın O orijinli xyz koordinat sistemine göre yervektörü, $\boldsymbol{r}' = (x', y', z')$; O' orijinli $x'y'z'$ koordinat sistemine göre yervektörü olarak tanımlansın. Bu yer vektörlerinin kuaternionlarla ifadesi aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.3. Dönme + Öteleme hareketinin gösterimi

$$\boldsymbol{r} = (0, x, y, z)$$

$$\boldsymbol{r}' = (0, x', y', z')$$

$$\boldsymbol{r}_0 = (0, x_0, y_0, z_0)$$

Buradan,

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{p}^* \qquad (3.30)$$

olarak dönme + öteleme hareketinin kuaternion gösterimi yazılabilir.

Kuaternionlar kullanılarak fiziksel niceliklerin temsili üç boyutlu uzaydan dört boyutlu uzaya taşınabilmektedir. Dönme, öteleme ve dönme+öteleme gösterimlerinde kuaternionların kullanılması kolaylık sağlar, çünkü kuaternion gösterimi ile öteleme ve dönmenin büyüklükleri ve yönleri doğrudan verilmektedir (Özdaş [2]).

3.4. Rodrigues Formülünün İspatı

Üç boyutlu uzayda **A** dönme dönüşüm matrisinin,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 - e_0e_3) & 2(e_1e_3 + e_0e_2) \\ 2(e_2e_1 + e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 - e_0e_1) \\ 2(e_3e_1 - e_0e_2) & 2(e_3e_2 + e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{bmatrix}$$

ile verildiği Bölüm (3.2) Eşitlik (3.26) da verilmişti. Bu bölümde yukarıda açık ifadesi verilen,

$$\mathbf{A} = (\cos\theta)\mathbf{U} + (1 - \cos\theta)\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + (\sin\theta)\tilde{\mathbf{U}}$$

matrislerinin eşitliği ispatlanacaktır. Burada,

$$\mathbf{PP}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$$

idi. Ayrıca,

$$e_0 = \cos\frac{\theta}{2} \qquad e_1 = c_1 \sin\frac{\theta}{2} \qquad e_2 = c_2 \sin\frac{\theta}{2} \qquad e_3 = c_3 \sin\frac{\theta}{2}$$

olarak tanımlanıp,

$$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$$

$$2\sin^2\theta = 1 - \sin 2\theta$$

trigonometrik ifadelerinden faydalanılarak,

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{11} &= e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 2e_0^2 + 2e_1^2 - 1 = 1 + \cos\theta + c_1^2(1-\cos\theta) - 1 \\ &= \cos\theta + c_1^2(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{12} &= 2(e_1e_2 - e_0e_3) = 2c_1 \sin\frac{\theta}{2} c_2 \sin\frac{\theta}{2} - 2\cos\frac{\theta}{2} c_3 \sin\frac{\theta}{2} \\ &= 2c_1c_2 \sin^2\frac{\theta}{2} - 2c_3 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ &= c_1\, c_2 (1-\cos\theta) - c_3 \sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{13} &= 2(e_1e_3 + e_0e_2) = 2c_1 \sin\frac{\theta}{2} c_3 \sin\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2} c_2 \sin\frac{\theta}{2} \\ &= 2c_1c_3 \sin^2\frac{\theta}{2} + 2c_2 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ &= c_1\, c_3 (1-\cos\theta) + c_2 \sin\theta \end{aligned}$$

$$A_{21} = 2\left(e_2e_1 + e_0e_3\right) = 2c_2 \sin\frac{\theta}{2}c_1 \sin\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}c_3 \sin\frac{\theta}{2}$$
$$= 2c_2c_1 \sin^2\frac{\theta}{2} + 2c_3 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$= c_2\,c_1\left(1-\cos\theta\right) + c_3 \sin\theta$$

$$A_{22} = e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 = 2e_0^2 + 2e_2^2 - 1 = 1 + \cos\theta + c_2^2\left(1-\cos\theta\right) - 1$$
$$= \cos\theta + c_2^2\left(1-\cos\theta\right)$$

$$A_{23} = 2\left(e_2e_3 - e_0e_1\right) = 2c_2 \sin\frac{\theta}{2}c_3 \sin\frac{\theta}{2} - 2\cos\frac{\theta}{2}c_1 \sin\frac{\theta}{2}$$
$$= 2c_2c_3 \sin^2\frac{\theta}{2} - 2c_1 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$= c_2\,c_3\left(1-\cos\theta\right) - c_1 \sin\theta$$

$$A_{31} = 2\left(e_3e_1 - e_0e_2\right) = 2c_3 \sin\frac{\theta}{2}c_1 \sin\frac{\theta}{2} - 2\cos\frac{\theta}{2}c_2 \sin\frac{\theta}{2}$$
$$= 2c_3c_1 \sin^2\frac{\theta}{2} - 2c_2 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$= c_3\,c_1\left(1-\cos\theta\right) - c_2 \sin\theta$$

$$A_{32} = 2\left(e_3e_2 + e_0e_1\right) = 2c_3 \sin\frac{\theta}{2}c_2 \sin\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}c_1 \sin\frac{\theta}{2}$$
$$= 2c_3c_2 \sin^2\frac{\theta}{2} + 2c_1 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$= c_3\,c_2\left(1-\cos\theta\right) + c_1 \sin\theta$$

$$A_{33} = e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 = 2e_0^2 + 2e_3^2 - 1 = 1 + \cos\theta + c_3^2\left(1-\cos\theta\right) - 1$$
$$= \cos\theta + c_3^2\left(1-\cos\theta\right)$$

şeklinde **A** matrisinin elemanları elde edilir. İşlemler sonucunda elde edilen matris elemanlarının oluşturduğu **A** dönme dönüşüm matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta + c_1^2\left(1-\cos\theta\right) & c_1c_2\left(1-\cos\theta\right) - u_3\sin\theta & c_1c_3\left(1-\cos\theta\right) + c_2\sin\theta \\ c_2c_1\left(1-\cos\theta\right) + c_3\sin\theta & \cos\theta + c_2^2\left(1-\cos\theta\right) & c_2c_3\left(1-\cos\theta\right) - c_1\sin\theta \\ c_3c_1\left(1-\cos\theta\right) - c_2\sin\theta & c_3c_2\left(1-\cos\theta\right) + c_1\sin\theta & \cos\theta + c_3^2\left(1-\cos\theta\right) \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

$$\mathbf{A} = (\cos\theta)\mathbf{U} + (1-\cos\theta)\mathrm{C}\mathrm{C}^{\mathrm{T}} + (\sin\theta)\tilde{\mathbf{C}}$$

ifadesinin açık ifadesinin yazılması ile iki matrisin eşit olduğu gösterilmiş olmaktadır. Burada, **U** birim matris olmak üzere,

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmıştır. Böylece **A**,

$$\mathbf{A} = \cos\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1-\cos\theta) \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_2c_1 & c_2^2 & c_2c_3 \\ c_3c_1 & c_3c_2 & c_3^2 \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta + c_1^2(1-\cos\theta) & c_1c_2(1-\cos\theta) - \mathrm{u}_3\sin\theta & c_1c_3(1-\cos\theta) + c_2\sin\theta \\ c_2c_1(1-\cos\theta) + c_3\sin\theta & \cos\theta + c_2^2(1-\cos\theta) & c_2c_3(1-\cos\theta) - c_1\sin\theta \\ c_3c_1(1-\cos\theta) - c_2\sin\theta & c_3c_2(1-\cos\theta) + c_1\sin\theta & \cos\theta + c_3^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Görüldüğü üzere, (3.26) Eşitliği ile (3.27) Eşitliği birbirlerine denktir (Korn and Korn [14]).

4. KİNEMATİK ve DİNAMİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN KUATERNİON GÖSTERİMLERİ

4.1. Açısal Hız

(c) eğrisi üzerinde hareket eden bir parçacığın O(0,x, y, z) sistemine göre yervektörü kuaternion olarak $\boldsymbol{r}$ ve $O'(x', y', z')$ sistemine göre yervektörü kuaternion olarak $\boldsymbol{r'}$ ile tanımlansın. $\boldsymbol{p}$ ise Euler parametrelerini temsil etsin. Burada,

$$r' = p\, r\, p^* \tag{4.1}$$

$$r = p^*\, \mathrm{r}'\, p \tag{4.2}$$

dir. (4.1) Eşitliğinin türevi alındığında,

$$\dot{r}' = \dot{p}rp^* + pr\dot{p}^* + p\dot{r}p^* \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.2) Eşitliği (4.3) Eşitliğinde yerine konulduğunda,

$$\dot{r}' = \dot{p}p^*r'pp^* + pp^*r'p\dot{p}^* + p\dot{r}p^* \tag{4.4}$$

olur. Euler parametrelerinin büyüklükleri birim olduğundan normları da birimdir, dolayısıyla;

$$pp^* = p^*p = 1$$

olacaktır. Bu ifade türevlendiğinde,

$$\dot{p}p^* + p\dot{p}^* = \dot{p}^*p + p^*\dot{p} = 0$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafı α, diğer kısmı ise β olarak tanımlandığında,

$$\alpha = \dot{p}p^* = -p\dot{p}^* \qquad \text{ve} \qquad \beta = \dot{p}^*p = -p^*\dot{p} \tag{4.5}$$

olur. (4.4) Eşitliği düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} \dot{r}' &= \dot{p}p^*r' + r'p\dot{p}^* + p\dot{r}p^* \\ &= ar' + r'(-a) + p\dot{r}p^* \\ &= 2ar' + p\dot{r}p^* \end{aligned} \tag{4.6}$$

bulunur. Buradaki α vektör kuaterniondur. **2**α açısal hız olarak tanımlanır.

Matris formunda açısal hızın ifadesi,

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \dot{\overset{+}{\mathbf{P}}}\mathbf{P}^* = \overset{-}{\mathbf{P}}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{P}} \\ \overset{+}{\mathbf{E}}^{\mathrm{P}}\dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\overset{+}{\mathbf{E}}}^{\mathrm{P}}\dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

şeklindedir. (4.6) Eşitliği tekrar ele alındığında,

$$\begin{aligned} \dot{r}' &= \left(-a.r' + a \times r'\right) - \left(-r'.a + r' \times a\right) + p\dot{r}p^{*} \\ &= 2a \times r' + p\dot{r}p^{*} \end{aligned} \tag{4.8}$$

ya da matris formunda,

$$\dot{\mathbf{R}}' = 2\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}' + \mathbf{A}\dot{\mathbf{R}} \tag{4.9}$$

olarak tanımlanır. $\mathbf{R}' = \mathbf{A}\ \mathbf{R}$ nin türevinden,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}' &= \dot{\mathbf{A}}\mathbf{R} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{R}} \\ &= \widetilde{\mathbf{W}}'\mathbf{A}\mathbf{R} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{R}} \\ &= \widetilde{\mathbf{W}}'\mathbf{R}' + \mathbf{A}\dot{\mathbf{R}} \end{aligned} \tag{4.10}$$

olduğundan $\mathbf{W}' = 2\widetilde{\mathbf{A}}$ ya karşılık gelir. 2α dört boyutlu uzayda açısal hız, 2**a** ise üç boyutlu uzayda açısal hız olarak tanımlanır. Açısal hız,

$$w' = 2\alpha = 2\dot{p}p^{*} = -2p\dot{p}^{*} \tag{4.11}$$

veya matris formunda,

$$\mathbf{W}' = 2\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{T}\dot{\mathbf{P}} \\ \overset{+P}{\mathbf{E}}\ \dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 \\ \overset{+P}{\mathbf{E}}\ \dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{A} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

şeklindedir. w', O' sistemindeki açısal hızdır.Benzer şekilde (4.2) Eşitliğinin türevi alınıp (4.1) Eşitliğinde yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 2\beta r - p^{*}\dot{r}'p \\ &= 2b \times r + p^{*}\dot{r}'p \end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. Bu ifade matris formunda

$$\dot{\mathbf{R}} = 2\widetilde{\mathbf{B}}\mathbf{R} + \mathbf{A}^{T}\dot{\mathbf{R}}' \tag{4.14}$$

olacaktır. $\mathbf{R} = \mathbf{A}^{T}\mathbf{R}'$ ifadesinin türevinden,

$$\dot{\mathbf{R}} = -\widetilde{\mathbf{W}}\mathbf{R} + \mathbf{A}^{T}\dot{\mathbf{R}}' \tag{4.15}$$

elde edilir.

$$w = -2\beta = -2\dot{p}^{*}p = 2p^{*}\dot{p} \tag{4.16}$$

Matris formunda ise,

$$\mathbf{W} = 2\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{T}\dot{\mathbf{P}} \\ \bar{\mathbf{E}}^{P}\,\dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{E}}^{P}\,\dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 \\ -B \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

olarak verilir. $\boldsymbol{w}$, O sistemine göre açısal hızdır.

$\boldsymbol{w}$ ve $\boldsymbol{w}'$ açısal hızları birbirleri ile

$$\boldsymbol{w}' = \mathbf{A}\,\boldsymbol{w} \tag{4.18}$$

olacak şekilde ilişkilidir (Chou [8]), (Wehage [9]), (Tanışlı [5]).

4.2. Açısal İvme

O' sisteminine göre açısal ivme $\dot{\boldsymbol{w}}'$ olmak üzere, açısal hızın türevinin alınmasıyla,

$$\dot{\boldsymbol{w}}' = 2\dot{\alpha} = 2\left(\ddot{p}p^{*} + \dot{p}\dot{p}^{*}\right) = -2\left(\dot{p}\dot{p}^{*} + p\ddot{p}^{*}\right) \tag{4.19}$$

olarak tanımlanır ya da matris formunda,

$$\dot{\mathbf{W}}' = 2\left(\bar{\mathbf{P}}^{T}\,\ddot{\mathbf{P}} + \dot{\bar{\mathbf{P}}}\,\dot{\mathbf{P}}\right) = 2\left(\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{T} \\ \overset{+}{\mathbf{E}}^{P} \end{bmatrix}\left[\ddot{\mathbf{P}}\right] + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}^{T} \\ \dot{\overset{+}{\mathbf{E}}}^{P} \end{bmatrix}\left[\dot{\mathbf{P}}\right]\right) = 2\begin{bmatrix} 0 \\ \overset{+}{\mathbf{E}}^{P}\,\ddot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

şeklindedir. O sistemine göre açısal ivme ise,

$$\dot{\boldsymbol{w}} = -2\dot{\beta} = -2\left(\ddot{p}^{*}p + \dot{p}^{*}\dot{p}\right) = -2\left(\dot{p}^{*}\dot{p} + p^{*}\ddot{p}\right) \tag{4.21}$$

olarak tanımlanır ya da matris formunda,

$$\dot{\mathbf{W}} = 2\left(\overset{+}{\mathbf{P}}^{T}\,\ddot{\mathbf{P}} + \dot{\overset{+}{\mathbf{P}}}\,\dot{\mathbf{P}}\right) = 2\left(\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{T} \\ \bar{\mathbf{E}}^{P} \end{bmatrix}\left[\ddot{\mathbf{P}}\right] + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}^{T} \\ \dot{\bar{\mathbf{E}}}^{P} \end{bmatrix}\left[\dot{\mathbf{P}}\right]\right) = 2\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{E}}^{P}\,\ddot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

şeklindedir. Buradan $\dot{\boldsymbol{w}}'$ ve $\dot{\boldsymbol{w}}$ açısal ivmeleri birbirleri ile,

$$\dot{\boldsymbol{w}}' = \mathbf{A}\,\dot{\boldsymbol{w}} \tag{4.23}$$

olacak şekilde elde edilir (Chou [8]).

4. 3. Açısal Momentumun Kuaternion Gösterimi

Bir sistemin hareketi boyunca, bütün nokta çiftleri arasındaki uzaklıkları, sistemin üzerine bir kuvvet etkidiğinde bile değişmiyorsa böyle bir sistem *rijit cisim* olarak adlandırılır.

O(x,y,z) eylemsiz koordinat sistemi olmak üzere $\boldsymbol{I}$ eylemsizlik momentine sahip rijit cisminin genel hareketi $\boldsymbol{L}$ açısal momentum, τ tork olmak üzere,

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \tau \tag{4.24}$$

ile tanımlanır. Açısal momentum,

$$\boldsymbol{L} = 2\boldsymbol{I}'\alpha = 2\boldsymbol{I}'(\dot{p}p^*) = -2\boldsymbol{I}'(p\dot{p}^*) \tag{4.25}$$

olarak ifade edilir.

Cismin O(x,y,z) sistemine göre yervektörü $\mathbf{r} = \left[r_x, r_y, r_z\right]^T$ ve sonsuz küçük kütlesi dm olsun. x,y,z eksenlerine göre kütlenin eylemsizlik mometleri,

$$I_{xx} = \int\left(r_y^2 + r_z^2\right)dm \tag{4.26}$$

$$I_{yy} = \int\left(r_z^2 + r_x^2\right)dm \tag{4.27}$$

$$I_{zz} = \int\left(r_x^2 + r_y^2\right)dm \tag{4.28}$$

ve eylemsizlik çarpanları ise,

$$I_{xy} = \int\left(r_x r_y\right)dm \tag{4.29}$$

$$I_{yz} = \int\left(r_y r_z\right)dm \tag{4.30}$$

$$I_{zx} = \int\left(r_z r_x\right)dm \tag{4.31}$$

şeklindedir. Üç boyutlu uzayda eylemsizlik matrisi,

$$\mathbf{I} = \int\left(R^T R\, U - R^T R\right)dm = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

ve $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, $I_{yz} = I_{zy}$ şeklindedir.

Dört boyutlu uzayda ise $\boldsymbol{r} = \left[0, r_x, r_y, r_z\right]^{\mathrm{T}}$ vektör kuaternion ve dm sonsuz küçük kütle olmak üzere eylemsizlik matrisi,

$$\mathbf{I'} = \int \left(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\ \mathbf{U} - \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\right) \mathrm{dm} = \int \left(\overset{+\,\mathrm{r}}{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}} \overset{+\,\mathrm{r}}{\mathbf{E}} \right) \mathrm{dm} = \int \left(\overset{-\,\mathrm{r}}{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}} \overset{-\,\mathrm{r}}{\mathbf{E}} \right) \mathrm{dm} \tag{4.33}$$

olarak tanımlanır. Burada,

$$\overset{+\,\mathrm{r}}{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}} \overset{+\,\mathrm{r}}{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_y^2 + r_z^2 & -r_x r_y & -r_x r_z \\ 0 & -r_y r_z & r_x^2 + r_z^2 & -r_y r_z \\ 0 & -r_z r_x & -r_z r_y & r_x^2 + r_y^2 \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

olarak elde edilir. Sürekli yük dağılımının eylemsizlik momenti,

$$\int x^2 \mathrm{dm} = \frac{1}{2}\left(-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}\right) \tag{4.35}$$

$$\int y^2 \mathrm{dm} = \frac{1}{2}\left(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}\right) \tag{4.36}$$

$$\int z^2 \mathrm{dm} = \frac{1}{2}\left(I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}\right) \tag{4.37}$$

ile verilir. Buradan,

$$\int \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \mathrm{dm} = \frac{1}{2}\left(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}\right) \tag{4.38}$$

elde edilir. Bu son ifadeye k adı verilirse,

$$k = \frac{1}{2}\left(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{İz}(\mathbf{I}) \tag{4.39}$$

yazılabilir. Bu durumda dörtlü uzayda eylemsizlik matrisi,

$$\mathbf{I'} = \begin{bmatrix} k & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

olarak tanımlanır.

Açısal momentum ifadesi matris formunda,

$$\mathbf{L} = 2\mathbf{I'}\bar{\mathbf{P}}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{P}} = 2\begin{bmatrix} k & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{P}} \\ \overset{+P}{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k\left(\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{P}}\right) \\ 2\mathbf{I}\overset{+P}{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\mathbf{I}\overset{+P}{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

ya da daha açık bir ifade ile,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{I}_{xx}w_1 - \mathrm{I}_{xy}w_2 - \mathrm{I}_{xz}w_3 \\ -\mathrm{I}_{yx}w_1 + \mathrm{I}_{yy}w_2 - \mathrm{I}_{yz}w_3 \\ -\mathrm{I}_{zx}w_1 - \mathrm{I}_{zy}w_2 + \mathrm{I}_{zz}w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\mathrm{I}_{xx} + \mathrm{I}_{yy} + \mathrm{I}_{zz}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{xx} & -\mathrm{I}_{xy} & -\mathrm{I}_{xz} \\ 0 & -\mathrm{I}_{yx} & \mathrm{I}_{yy} & -\mathrm{I}_{yz} \\ 0 & -\mathrm{I}_{zx} & -\mathrm{I}_{zy} & \mathrm{I}_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir (Chou[8]).

Bazı durumlarda katı cismin hareketini asal eksenlerle çakışan bir koordinat sistemine göre tanımlamak uygundur. Böyle bir koordinat sistemi $O'(x',y',z')$ kabul edilsin. Asal eksen (ya da asal eylemsizlik eksenleri) O orijinli cisim ile birlikte dönen cisme göre sabit ve ikişer ikişer birbirleriyle dik eksenlerdir; bu eksenler etrafındaki eylemsizlik çarpanları sıfırdır. Asal eksenler cisimle birlikte dönerler yani, cisme göre sabittirler.

Katı cismin hareketi cismin, sabit bir noktasından ötelenmesi ve bu sabit noktadan geçen eksen etrafındaki dönmesi olarak düşünülebilir.

$O(x,y,z)$ koordinat sistemine göre eylemsizlik matrisi **I** ve $O'\left(x',y',z'\right)$ koordinat sistemine göre eylemsizlik matrisi **I'** ise, **I** ve **I'** arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{I'} = \mathbf{A}\,\mathbf{I}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{4.42}$$

A, dönme dönüşüm matrisidir. Yukarıdaki bağıntı türevlendiğinde,

$$\dot{\mathbf{I}}' = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{I}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}\mathbf{I}\dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{I}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{4.43}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\dot{\mathbf{I}}' = \tilde{\mathbf{W}}'\mathbf{A}\mathbf{I}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}\mathbf{I}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{W}}'^{\mathrm{T}} \tag{4.44}$$

ve $\dot{\mathbf{I}} = 0$ dır. (4.42) Eşitliği, (4.44) Eşitliğinde yerine konulursa,

$$\dot{\mathbf{I}}' = \tilde{\mathbf{W}}'\mathbf{I}' - \mathbf{I}'\tilde{\mathbf{W}}' \tag{4.45}$$

elde edilir.

Tork, açısal momentumun türevlenmesi ile bulunur;

$$\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{I}'\dot{\mathbf{W}}' + \tilde{\mathbf{W}}'\mathbf{I}'\mathbf{W}' \tag{4.46}$$

ya da kuaternion uzayında bu bağıntı,

$$\tau' = 2\boldsymbol{I}'\dot{\alpha} + 2\left[\alpha\left(\boldsymbol{I}'\alpha\right) - \left(\boldsymbol{I}'\alpha\right)\alpha\right] \tag{4.47}$$

olarak yazılır. Kuaternion uzayında tork ifadesi,

$$\tau' = 2\boldsymbol{I}'\left(\ddot{p}p^* + \dot{p}\dot{p}^*\right) + 2\left\{\left(\dot{p}p^*\right)\left[\boldsymbol{I}'\left(\dot{p}p^*\right)\right] - \left[\boldsymbol{I}'\left(\dot{p}p^*\right)\right]\left(\dot{p}p^*\right)\right\} \tag{4.48}$$

şeklinde elde edilir. Matris formunda,

$$\begin{aligned} \tau' &= 2\mathbf{I}'\left(\bar{\mathbf{P}}^T\ddot{\mathbf{P}} + \dot{\bar{\mathbf{P}}}^T\dot{\mathbf{P}}\right) + 2\left(\dot{\overset{+}{\mathbf{P}}}\overset{+}{\mathbf{P}}^T - \bar{\mathbf{P}}^T\dot{\bar{\mathbf{P}}}\right)\mathbf{I}'\left(\bar{\mathbf{P}}^T\dot{\mathbf{P}}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2\mathbf{I}\overset{+}{\mathbf{E}}^P\ddot{\mathbf{P}} + 4\dot{\overset{+}{\mathbf{E}}}\overset{+}{\mathbf{E}}^T\mathbf{I}\overset{+}{\mathbf{E}}^P\dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.49}$$

ile ifade edilir. Görüldüğü gibi tork vektör kuaterniondur. O' sistemindeki tork $\boldsymbol{\tau}'$ ise τ ve $\boldsymbol{\tau}'$ arasında,

$$\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{A}\,\tau \tag{4.50}$$

şeklinde bir ilişki vardır, O sistemindeki tork τ,

$$\tau = \mathbf{I}\dot{\mathbf{W}} + \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{I}\mathbf{W} \tag{4.51}$$

$$\tau = -2\boldsymbol{I}\dot{\beta} + 2\left[\beta\left(\boldsymbol{I}\beta\right) - \left(\boldsymbol{I}\beta\right)\beta\right] \tag{4.52}$$

olarak tanımlanır (Chou[8]). Bu ifade kuaternion uzayında,

$$\tau = 2\boldsymbol{I}\left(p^*\ddot{p} + \dot{p}^*\dot{p}\right) + 2\left\{\left(p^*\dot{p}\right)\left[\boldsymbol{I}\left(p^*\dot{p}\right)\right] - \left[\boldsymbol{I}\left(p^*\dot{p}\right)\right]\left(p^*\dot{p}\right)\right\} \tag{4.53}$$

olarak ifade edilir. Bu ifade matris formunda ise,

$$
\begin{aligned}
\tau &= 2\mathbf{I}\left(\overset{+}{\mathbf{P}}^{T}\ddot{\mathbf{P}}+\dot{\overset{+}{\mathbf{P}}}^{T}\dot{\mathbf{P}}\right)+2\left(\bar{\mathbf{P}}\dot{\bar{\mathbf{P}}}^{T}-\dot{\overset{+}{\mathbf{P}}}^{T}\overset{+}{\mathbf{P}}\right)\mathbf{I}\left(\overset{+}{\mathbf{P}}^{T}\dot{\mathbf{P}}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 2\mathbf{I}\bar{\mathbf{E}}^{p}\ddot{\mathbf{P}}+4\bar{\mathbf{E}}\dot{\bar{\mathbf{E}}}^{T}\mathbf{I}\bar{\mathbf{E}}^{p}\dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

şeklindedir (Chou [8]).

5. DUAL KUATERNİON

Dual kuaternion kavramına geçmeden önce dual sayı ve dual vektör kavramlarını kısaca tanımlamak yararlı olacaktır.

Dual Sayı; $\forall(a,b) \in \mathbf{D}$ elemanına dual sayı denir. $\Re$, reel sayılar kümesi olmak üzere $\mathbf{D} = \Re \times \Re$ ' dir.

Dual sayılar $A = a + \varepsilon\, b$ formuna sahiptir. "a" reel sayısına A' nın reel kısmı, "b" reel sayısına da A' nın dual kısmı denir. (0,1) dual sayısı kısaca ε ile gösterilir ve dual birim olarak adlandırılır.

Dual Vektör; $\Re^3$ üç boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \Re^3$) $\mathbf{A}$ dual vektörü,

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \varepsilon\, \mathbf{b} \qquad \left[\varepsilon = (0,1) \in \mathbf{D}\right]$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{A} \in \mathbf{D}^3$ tür. $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ reel vektörlerdir.

5.1. Tanım

$\boldsymbol{p}$ ve $\boldsymbol{q}$,

$$p = p^0\hat{e}_0 + p^1\hat{e}_1 + p^2\hat{e}_2 + p^3\hat{e}_3$$

$$q = q^0\hat{e}_0 + q^1\hat{e}_1 + q^2\hat{e}_2 + q^3\hat{e}_3$$

şeklinde iki reel kuaternion olmak üzere, bir dual kuaternion,

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + \varepsilon \boldsymbol{q} \qquad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır. Başka bir formda,

$$\boldsymbol{P} = D + A\hat{e}_1 + B\hat{e}_2 + C\hat{e}_3 \qquad (5.2)$$

olarak dual kuaternionu yazmak mümkündür. Burada,

$$D = (p^0 + \varepsilon q^0),\;\; A = (p^1 + \varepsilon q^1),\;\; B = (p^2 + \varepsilon q^2),\;\; C = (p^3 + \varepsilon q^3) \qquad (5.3)$$

artık, D, A, B, C dual sayılar olup, $\boldsymbol{P}$ dual kuaternionun *dual bileşenleri* adını alırlar.

Bir dual kuaternionun skaler kısmı s_P ve vektör kısımları $\mathbf{v}_P$ ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} s_P &= D \\ \mathbf{v}_P &= A\hat{e}_1 + B\hat{e}_2 + C\hat{e}_3 \end{aligned} \qquad (5.4)$$

olacaktır. Dual kuaternionun skalar kısmı bir *dual sayı* ve vektörel kısmı ise bir *dual vektör*dür.

Dual kuaternion $p^0, p^1, p^2, p^3, q^0, q^1, q^2, q^3$ reel sayılar olmak üzere en genel formda birbirinden bağımsız sekiz reel sayı gerektirir. Bu sekiz reel sayıya dual kuaternionun *temel elemanları* adı verilir (Hacısalihoğlu [3]).

5.2. Dual Kuaternion Cebri

Sıfır Dual Kuaternion: Bir dual kuaternionun hem reel hem de dual kısmı sıfır kuaternion ise bu kuaternion *sıfır dual kuaternion* adını alır.

Dual Kuaternionlarda Eşitlik: İki dual kuaternionun reel ve dual kısımları karşılıklı olarak birbirine eşit ise bu iki dual kuaternion *eşit*tir.

Dual Kuaternionlarda Toplama ve Çıkarma İşlemi: $\boldsymbol{P}$ ve $\boldsymbol{Q}$ dual kuaternionlar olmak üzere, iki dual kuaternionun toplamı ve farkı;

$$\boldsymbol{P} \pm \boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{p} + \varepsilon \boldsymbol{q}) \pm (\boldsymbol{r} + \varepsilon \boldsymbol{s}) \tag{5.5}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca toplama işlemi,

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P}$$

şeklinde değişme özelliğine sahiptir.

Dual Kuaternionlarda Çarpma İşlemi: $\boldsymbol{P}$ ve $\boldsymbol{Q}$ dual kuaternion olmak üzere $\boldsymbol{P}$ ve $\boldsymbol{Q}$ dual kuaternionlarının çarpımı;

$$\begin{aligned} \boldsymbol{PQ} &= (\boldsymbol{p} + \varepsilon \boldsymbol{q}) + (\boldsymbol{r} + \varepsilon \boldsymbol{s}) \\ &= [\boldsymbol{pr}; \boldsymbol{ps} + \boldsymbol{qr}] = \boldsymbol{pr} + \varepsilon(\boldsymbol{ps} + \boldsymbol{qr}) \end{aligned} \tag{5.6}$$

olarak tanımlanır. $\varepsilon^2=0$ olacaktır. $\boldsymbol{QP}$ çarpımı ise;

$$\begin{aligned} \boldsymbol{QP} &= (\boldsymbol{r} + \varepsilon \boldsymbol{s}) + (\boldsymbol{p} + \varepsilon \boldsymbol{q}) \\ &= [\boldsymbol{rp}; \boldsymbol{rq} + \boldsymbol{sp}] = \boldsymbol{rp} + \varepsilon(\boldsymbol{rq} + \boldsymbol{sp}) \end{aligned} \tag{5.7}$$

olmaktadır (Valasek, Stejskal [15]). $\boldsymbol{PQ}$ ve $\boldsymbol{QP}$ çarpımları karşılaştırıldıklarında kolayca görülebileceği gibi çarpma işlemi de değişme özelliği dual kuaternionlarda da kuaternionlarda olduğu gibi mevcut değildir.

Genel olarak iki dual kuaternionun çarpımı sonucu yine bir dual kuaternion elde edilir. Fakat $\boldsymbol{ps} + \boldsymbol{qr} = 0$ ise $\boldsymbol{PQ}$ çarpımı, $\boldsymbol{rq} + \boldsymbol{sp} = 0$ ise $\boldsymbol{QP}$ çarpımı kuaternion çarpımına indirgenir.

Kuaternion çarpımında olduğu gibi dual kuaternion çarpımı da dağılımlı ve birleşimlidir (Hacısalihoğlu [3]).

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{QP} + \boldsymbol{QR} \tag{5.8}$$

$$(\boldsymbol{QP})\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{PR}) \tag{5.9}$$

İki Dual Vektörün Skaler Çarpımı: $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{Q}$ iki dual vektör olmak üzere $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{Q}$ dual vektörlerinin skaler çarpımı,

$$\mathbf{P} \odot \mathbf{Q} = \mathbf{p} \odot \mathbf{r} + \varepsilon(\mathbf{p} \odot \mathbf{s} + \mathbf{q} \odot \mathbf{r}) \tag{5.10}$$

olarak tanımlanır.

İki Dual Vektörün Vektörel Çarpımı: $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{Q}$ iki dual vektör olmak üzere $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{Q}$ dual vektörlerinin vektörel çarpımı,

$$\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} + \varepsilon\,(\mathbf{p} \otimes \mathbf{s} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{r}) \tag{5.11}$$

şeklindedir.

Üç birim, dual vektör kuaternionlarda olduğu gibi,

$$e_i^2 = -1 \qquad\qquad 1 \le i \le 3$$

$$e_1 \times e_2 = e_3 = -e_2 \times e_1$$

formuna sahiptir.

Tekrar dual kuaternion çarpımına dönülürse,

$$\boldsymbol{PQ} = s_P\, s_Q + s_P\, \mathbf{v}_Q + s_Q\, \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_P \odot \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_P \otimes \mathbf{v}_Q \tag{5.12}$$

olarak kuaternion çarpımı skaler ve vektörel çarpımlar cinsinden yazılabilir.

Kompleks Eşlenik: $\boldsymbol{P}$ bir dual kuaternion olmak üzere $\boldsymbol{P}$ dual kuaternionunun kompleks eşleniği ,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}^* &= D - A\hat{e}_1 - B\hat{e}_2 - C\hat{e}_3 \\ &= s_P - \mathbf{v}_P \end{aligned} \tag{5.13}$$

olarak tanımlanır (Sivridağ, Güneş,vd. [16]).

Norm: $\boldsymbol{P}$ dual kuaternionunun normu,

$$N(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{PP}^* = \boldsymbol{P}^*\boldsymbol{P} = D^2 + A^2 + B^2 + C^2 \tag{5.14}$$

olarak tanımlanır. $N(\boldsymbol{P})$ dual sayıdır. Reel kısmı $ReN(\boldsymbol{P})$ ve dual kısmı $DuN(\boldsymbol{P})$ ile gösterilirse,

$$ReN(\boldsymbol{P}) = \left(p^0\right)^2 + \left(p^1\right)^2 + \left(p^2\right)^2 + \left(p^3\right)^2 \tag{5.15}$$

$$DuN(\boldsymbol{P}) = 2\left(p^0 q^0 + p^1 q^1 + p^2 q^2 + p^3 q^3\right) \tag{5.16}$$

olacaktır.

Ters Eleman ve Bölme: Bir $\boldsymbol{P}$ dual kuaternionun tersi $\boldsymbol{P}^{-1}$ ile gösterilir.

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{\boldsymbol{P}^*}{N(\boldsymbol{P})}=\frac{D-A\hat{e}_1-B\hat{e}_2-C\hat{e}_3}{D^2+A^2+B^2+C^2} \tag{5.17}$$

ile tanımlanır. $\boldsymbol{P}^{-1}$' in reel kısmı Re($\boldsymbol{P}^{-1}$) ve dual kısmı olan Du($\boldsymbol{P}^{-1}$)' in ifadesi,

$$\mathrm{Re}(\boldsymbol{P}^{-1})=\frac{p^0-p^1\hat{e}_1-p^2\hat{e}_2-p^3\hat{e}_3}{\left(p^0\right)^2+\left(p^1\right)^2+\left(p^2\right)^2+\left(p^3\right)^2} \tag{5.18}$$

$$\mathrm{Du}(\boldsymbol{P}^{-1})=\frac{q^0-q^1\hat{e}_1-q^2\hat{e}_2-q^3\hat{e}_3}{\left(q^0\right)^2+\left(q^1\right)^2+\left(q^2\right)^2+\left(q^3\right)^2}-2\left(p^0-p^1\hat{e}_1-p^2\hat{e}_2-p^3\hat{e}_3\right)\frac{\left(p^0q^0+p^1q^1+p^2q^2+p^3q^3\right)}{\left\{\left(p^0\right)^2+\left(p^1\right)^2+\left(p^2\right)^2+\left(p^3\right)^2\right\}^2} \tag{5.19}$$

olarak elde edilir.

Bir $\boldsymbol{P}$ dual kuaternionunun diğer bir $\boldsymbol{Q}$ dual kuaternionu ile bölümü iki şekilde gerçekleşir. Bunun nedeni ise dual kuaternionlarda değişme özelliğinin olmayışıdır:

$$\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{Q}}=\begin{cases}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1} & \text{sağdan bölme}\\ \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P} & \text{soldan bölme}\end{cases} \tag{5.20}$$

olarak $\boldsymbol{P}/\boldsymbol{Q}$ işlemi verilir.

Birim Dual Kuaternion: Normu birim olan yani; reel kısmı birim dual kısmı sıfır olan dual kuaternion *birim dual kuaternion* olarak adlandırılır, $\boldsymbol{P}_0$ ile gösterilir,

$$\boldsymbol{P}_0=D+A\hat{e}_1+B\hat{e}_2+C\hat{e}_3 \tag{5.21}$$

$$D=(p^0+\varepsilon q^0),\quad A=(p^1+\varepsilon q^1),\quad B=(p^2+\epsilon q^2),\quad C=(p^3+\varepsilon q^3)$$

olarak tanımlanmaktadır. Tanımda verildiği üzere,

$$\mathrm{ReN}(\boldsymbol{P})=\left(p^0\right)^2+\left(p^1\right)^2+\left(p^2\right)^2+\left(p^3\right)^2=1 \tag{5.22}$$

ve

$$\mathrm{DuN}(\boldsymbol{P})=\left(p^0q^0+p^1q^1+p^2q^2+p^3q^3\right)=0 \tag{5.23}$$

olmalıdır (Hacısalihoğlu [3]).

5.3. Özellikler

Aşağıda verilen özelliklerin kullanılması dual kuaternionlarla yapılan işlemlerde kolaylık sağlar (Hacısalihoğlu [3]).

1. $(\boldsymbol{P}^*)^* = \boldsymbol{P}$

2. $(\boldsymbol{PQ})^* = \boldsymbol{Q}^* \boldsymbol{P}^*$

3. $\mathrm{N}(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2) = \mathrm{N}(\boldsymbol{Q}_1)\,\mathrm{N}(\boldsymbol{Q}_2)$

4. $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^* = 0$ ise $\boldsymbol{P}$ dual vektör kuaterniondur.

5. $(\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 + \cdots\cdots + \boldsymbol{P}_{n-1} + \boldsymbol{P}_n)^* = \boldsymbol{P}_n{}^* + \boldsymbol{P}_{n-1}{}^* + \cdots\cdots + \boldsymbol{P}_2{}^* + \boldsymbol{P}_1{}^*$

6. $(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 \cdots\cdots \boldsymbol{P}_{n-1}\boldsymbol{P}_n)^* = \boldsymbol{P}_n{}^* \boldsymbol{P}_{n-1}{}^* \cdots\cdots \boldsymbol{P}_2{}^* \boldsymbol{P}_1{}^*$

7. $\mathrm{N}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 \cdots\cdots \boldsymbol{P}_{n-1}\boldsymbol{P}_n) = \mathrm{N}(\boldsymbol{P}_1)\mathrm{N}(\boldsymbol{P}_2) \cdots\cdots \mathrm{N}(\boldsymbol{P}_{n-1}) + \mathrm{N}(\boldsymbol{P}_n)$

8. $(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2 \cdots\cdots \boldsymbol{Q}_{n-1}\boldsymbol{Q}_n)^{-1} = \boldsymbol{Q}_n^{-1}\boldsymbol{Q}_{n-1}^{-1} \cdots\cdots \boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{Q}_1^{-1}$

6. DÖNME VE ÖTELEMENİN DUAL KUATERNİON GÖSTERİMLERİ

Dual kuaternion,

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{r} + \varepsilon \boldsymbol{s}$$

olarak Bölüm (5.1)' de tanımlanmıştı (Hacısalihoğlu [3]). Ayrıca, dual kuaternionlar kuaternionlara benzer şekilde Euler parametreleri cinsinden,

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e} \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

olarak gösterilebilir.

Dönme ve ötelenmenin dual kuaternionlar ile ifadesinde gerekli olacak kavramlardan biri de dual açı kavramıdır. Dual açı,

$$\theta = \theta + \varepsilon d \tag{6.2}$$

ile verilir; burada θ dönme açısı ve d ise $\mathbf{e}$ birim vektörü ile belirtilen yön boyunca ötelenme mesafesidir. Dual açılar için,

$$\sin\theta = \sin(\theta + \varepsilon d) = \sin\theta + \varepsilon d\cos\theta \tag{6.3}$$

$$\cos\theta = \cos(\theta + \varepsilon d) = \cos\theta - \varepsilon d\sin\theta \tag{6.4}$$

olarak tanımlanır. Bunun nedeni, dual sayıların fonksiyonlarının Taylor serisi açılımı kullanılarak ifade edilmesidir. Taylor serisi açılımı dual sayılarda $\varepsilon^2 = 0$ olduğundan,

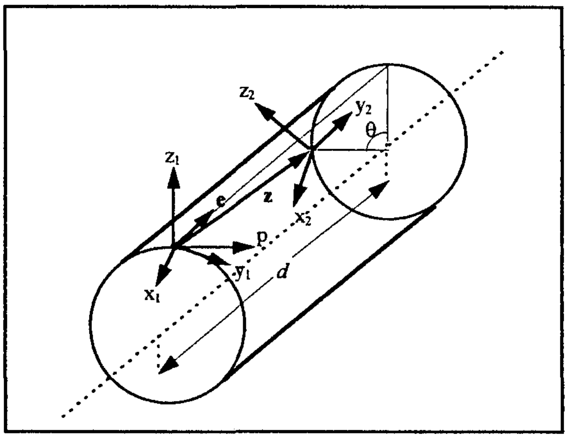
$$f(a + \varepsilon b) = f(a) + \varepsilon b f'(a) \tag{6.5}$$

şekline indirgenir.

$\mathbf{e}$ dual vektörü üç boyutlu uzayda koordinat sistemlerinin dönmesi ve ötelenmesinin ifade edilmesinde kullanılır; **e** birim vektörü dönme ekseninin yönü, aynı zamanda ötelenmenin yönünü belirtir. **p** ise yer vektörüdür.

$$\mathbf{e} = \mathbf{e} + \varepsilon \mathbf{p} \times \mathbf{e} \tag{6.6}$$

(6.1) Eşitliği, (6.3) Eşitliği, (6.4) Eşitliği ve (6.6) Eşitliği kullanılarak,



Şekil 6.1. Dual kuaternionlarda dönme ve öteleme hareketinin gösterimi

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e} \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -(d/2)\sin(\theta/2) \\ (d/2)\cos(\theta/2)\,\mathbf{e} + \sin(\theta/2)\,(\mathbf{p}\times\mathbf{e}) \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

elde edilir.

Dual kuaternion sekiz elemana sahiptir; oysa üç boyutlu uzayda bağımsız değişken sayısı altıdır. Bunun anlamı ise iki elemanın bağımsız olmayışıdır. Bu sınırlamalar;

$$\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} = 1 \tag{6.9}$$

$$\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} = 0 \tag{6.10}$$

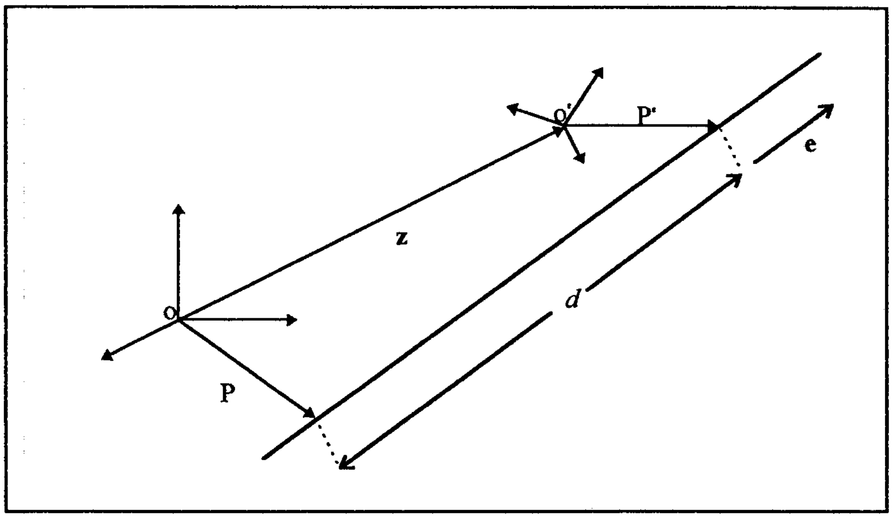
olmaktadır.

Q ve **W** matrisleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} r^0\mathbf{U} + \widetilde{\mathbf{R}} & \mathrm{R} \\ -\mathrm{R}^{\mathrm{T}} & r^0 \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} r^0\mathbf{U} - \widetilde{\mathbf{R}} & \mathrm{R} \\ -\mathrm{R}^{\mathrm{T}} & r^0 \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

$\widetilde{\mathbf{R}}$ anti simetrik bir matristir, (2.28)' deki matrise benzer olarak tanımlanmıştır.



Şekil 6.2. Dual kuaternionlarda öteleme hareketinin gösterimi

Dönme matrisi (6.11) eşitliği ve (6.12) eşitliği ile,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{W}^{T}\mathbf{Q} \tag{6.13}$$

olarak tanımlanır.

Şekil (6.2)' den,

$$\mathbf{z} + \mathbf{p}' = \mathbf{p} + d\mathbf{e} \tag{6.14}$$

olduğu görülmektedir. Buradan **z** yalnız bırakılırsa,

$$\mathbf{z} = \mathbf{p} + d\mathbf{e} - \mathbf{p}' \tag{6.15}$$

olacaktır. $\mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{p}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \mathbf{P} + d\mathbf{e} - \mathbf{A}\mathbf{P} \\ &= (\mathbf{U} - \mathbf{A})\mathbf{P} + d\mathbf{e} \end{aligned} \tag{6.16}$$

elde edilir.

Rodrigues formülü,

$$\mathbf{A} = \cos\theta\mathbf{U} + (1 - \cos\theta)\mathbf{e}\mathbf{e}^{T} + \sin\theta(\tilde{\mathbf{e}})$$

idi. Burada,

$$\mathbf{e}\mathbf{e}^{T} = \mathbf{U} + \tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}} \tag{6.17}$$

olacaktır. Bu ifadeden yararlanarak Rodrigues formülü tekrar yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \cos\theta\mathbf{U} + (1-\cos\theta)(\mathbf{U} + \tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}) + \sin\theta(\tilde{\mathbf{e}}) \\ &= \mathbf{U} + 2\sin^2(\theta/2)\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}} + \sin\theta\tilde{\mathbf{e}} \end{aligned} \tag{6.18}$$

elde edilir. (6.18) Eşitliği (6.16) Eşitliğinde yerleştirilirse,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \left(-2\sin^2(\theta/2)\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}\mathbf{P} - \sin\theta\tilde{\mathbf{e}}\right)\mathbf{P} + d\mathbf{e} \\ &= 2\sin^2(\theta/2)\mathbf{e} \times (p \times \mathbf{e}) + \sin\theta(\mathbf{p} \times \mathbf{e}) + d\mathbf{e} \end{aligned} \tag{6.19}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$r^0 s - s^0 r = \left(d\mathbf{e} + \sin\theta(\mathbf{p} \times \mathbf{e})\right)/2 \tag{6.20}$$

ve

$$r \times s = \sin^2(\theta/2)\,\mathbf{e} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{e}) \tag{6.21}$$

olmaktadır. Buradan,

$$\mathbf{z} = 2\left(r^0\mathbf{s} - \mathbf{s}^0\mathbf{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{s}\right) \tag{6.22}$$

bulunur.

Ötelenme vektörü,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{W}^T\mathbf{S}$$

kuaternionu ile tanımlanır,

$$\mathbf{W}^T\mathbf{S} = \begin{bmatrix} r^0\mathbf{U} + \tilde{\mathbf{R}} & -\mathrm{R} \\ \mathrm{R}^T & r^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \mathrm{S}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (1/2)\,\mathrm{Z} \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

olacaktır (Walker and Shou [17]).

z vektörünün öteleme hareketinin dual kuaternionlar ile tanımı,

$$\mathbf{R'} = \left[1; \frac{1}{2}\mathbf{z}\right] \tag{6.24}$$

olarak gösterilir. ***e*** Euler parametrelerini tanımlamak üzere, orijinleri çakışık sistemlerin birbirlerine göre dönmelerinin tanımı,

$$\mathbf{R'} = [e; 0] \tag{6.25}$$

şeklindedir.

Dönme ve öteleme,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}' &= \mathbf{z} + \mathbf{R}\mathbf{P} \\
&= \left[1; \frac{1}{2}\mathbf{z}\right][e; \mathbf{0}]\left[1; -\frac{1}{2}\mathbf{z}\right] \\
&= [e; \mathbf{z} \times \mathbf{e}]
\end{aligned}
\tag{6.26}
$$

olarak tanımlanır (Valasek and Stejskal [15]).

7. SERRET-FRENET ÜÇYÜZLÜSÜNÜN DUAL KUATERNİONLAR İLE GÖSTERİMİ

Sürekli bir (c) eğrisi üzerinde hareket eden bir P noktasının yerini belirlemek için (c) eğrisi üzerinde keyfi seçilmiş bir Q orjinine göre s yay uzunluğunu vermek yeterlidir. Burada,

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$$

ve (c) eğrisi,

$$c(s) = A(s)\hat{e}_1 + B(s)\hat{e}_2 + C(s)\hat{e}_3 \quad , \quad c(s) \subset \mathbf{D}^3$$

ile tanımlansın, c' nin dual teğet vektörü $\boldsymbol{T}$ olarak adlandırılsın ve birim uzunlukta seçilsin. Bu durumda,

$$\dot{\mathbf{c}}(s) = \boldsymbol{T}(s) \qquad \|\boldsymbol{T}(s)\| = 1 \tag{7.1}$$

olacaktır. Burada T teğet birim vektörü,

$$\boldsymbol{T}(s) = \boldsymbol{t}(s) + \varepsilon \boldsymbol{v}(s) \tag{7.2}$$

formuna sahiptir. $\boldsymbol{t}$, c' nin reel bölümüyle meydana getirilen eğrinin birim teğet vektörü ve $\boldsymbol{v}(s)$ teğet vektörün vektörel momentidir. Teğet birim vektörün büyüklüğü birim olduğundan,

$$\boldsymbol{TT^*}=1$$

olmalıdır. Bu ifadenin türevi alındığında,

$$\dot{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{T}^* + \boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{T}}^* = 0 \tag{7.3}$$

olacaktır. Buradan da, $\dot{\boldsymbol{T}}$ ve $\boldsymbol{T}$ nin birbirlerine dik olduğu $\dot{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{T^*}$ ifadesinin dual vektör kuaternion olduğu görülür.

$\dot{\boldsymbol{T}}$ yönündeki birim dual kuaternion N, K ise skalar bir fonksiyon olmak üzere,

$$\dot{\boldsymbol{T}} = K\boldsymbol{N} \tag{7.4}$$

olarak tanımlanır. $\|\boldsymbol{N}\| = 1$ ve $K \in \mathbf{D}$ dir. $\dot{\boldsymbol{T}}$ ve $\boldsymbol{T}$ birbirlerine dik olduklarından $\boldsymbol{T}$ ve $\boldsymbol{N}$ de birbirine diktir. K ise (c) eğrisinin P noktasındaki eğriliği olarak tanımlanır.

$\boldsymbol{T}$ ve $\boldsymbol{N}$ birim dual vektör kuaternionlarının her ikisine de dik olan birim dual vektör kuaternion $\boldsymbol{B}$ ile tanımlanır. $\boldsymbol{B}$, binormal birim dual vektör olarak adlandırılır.

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{N} \tag{7.5}$$

$\dot{\boldsymbol{B}}$, $\boldsymbol{T}$ ve $\boldsymbol{N}$' ye bağlı olacağından;

$$\dot{\boldsymbol{B}} = c_1\, \boldsymbol{T} + c_2\, \boldsymbol{N} \tag{7.6}$$

olarak yazılabilir. $\boldsymbol{N}$ ifadesi,

$$-\boldsymbol{N} = \boldsymbol{TB} \tag{7.7}$$

idi. Türevi alındığında,

$$-\dot{\boldsymbol{N}} = \dot{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{B}} \tag{7.8}$$

elde edilir. (7.4) Eşitliği ve (7.6) Eşitliği, (7.8) Eşitliğinde yerine konulursa,

$$-\dot{\boldsymbol{N}} = -c_1 + K\boldsymbol{T} + c_2\boldsymbol{B} \tag{7.9}$$

$\boldsymbol{N}$, birim dual vektör kuaternion olduğundan $c_1 = 0$ olmalıdır. Buradan $\dot{\boldsymbol{N}}$ ifadesi tekrar yazılacak olursa,

$$-\dot{\boldsymbol{N}} = K\boldsymbol{T} + c_2\boldsymbol{B} \tag{7.10}$$

elde edilir. $c_2 = -\tau$ ile tanımlandığında,

$$\dot{\boldsymbol{N}} = -K\boldsymbol{T} + \tau\, \boldsymbol{B} \tag{7.11}$$

olur. Buradaki τ (c)' nin P(s) noktasındaki burulması adını taşır.

(7.5) eşitliğinin türevi alındığında,

$$\dot{\boldsymbol{B}} = \dot{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{N} + \boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{N}} \tag{7.12}$$

elde edilir. (7.12) eşitliğinde (7.4) ve (7.11) eşitlikleri yerleştirildiğinde,

$$\dot{\boldsymbol{B}} = -\tau\, \boldsymbol{N} \tag{7.13}$$

bulunur.

$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$ birim dual vektörlerinin (c) uzay eğrisinin P(s) noktasındaki doğal referans sistemini veya Serret-Frenet üçyüzlüsünü meydana getirirler.

Teğet, normal ve binormal birim dual vektörlerinin Frenet üçyüzlüsünün eksenleri üzerindeki bileşenlerini veren ve aşağıdaki gibi gösterilen (7.14) ifadelerine Frenet formülleri adı verilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{T}} \\ \dot{\boldsymbol{N}} \\ \dot{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{7.14}$$

Burada $K = \boldsymbol{k} + \varepsilon \boldsymbol{l}$ ve $R = \boldsymbol{r} + \varepsilon \boldsymbol{s}$ formuna sahiptir. $R= 1/K$ büyüklüğüne (c) eğrisinin P(s) noktasındaki eğrilik yarıçapı, τ büyüklüğüne ise de burulma adı verilir (Özemre [18]).

Serret - Frenet formülleri $\mathbf{D}^4$ de dual kuaternionlar kullanılarak elde edilebilir. $\mathbf{D}^4$ de $(\widetilde{c})$ eğrisi,

$$(\widetilde{c}) = D(s) + A(s)\hat{e}_1 + B(s)\hat{e}_2 + C(s)\hat{e}_3$$

ile verilir. D, A, B, C elemanları dual sayılardan oluşmuştur. $(\widetilde{c})$ eğrisine teğet vektör $\widetilde{\boldsymbol{T}}$ olarak adlandırılır ve birim uzunluktadır.

$$\dot{\widetilde{c}} = \widetilde{\boldsymbol{T}} \qquad \left\|\widetilde{\boldsymbol{T}}\right\| = 1 \tag{7.15}$$

Ayrıca, $\dot{\widetilde{\boldsymbol{T}}}$ yönündeki birim dual kuaternion $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ ise,

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{T}}} = \widetilde{K}\widetilde{\boldsymbol{N}} \qquad \left\|\dot{\widetilde{\boldsymbol{T}}}\right\| = \widetilde{K} \tag{7.16}$$

bağıntısı ile tanımlanabilir. $\widetilde{\boldsymbol{T}}$' nın birim uzunlukta olduğundan yola çıkılarak alınan türev ifadesi sonucunda,

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{T}}}\widetilde{\boldsymbol{T}}^* + \widetilde{\boldsymbol{T}}\dot{\widetilde{\boldsymbol{T}}}^* = 0 \tag{7.17}$$

elde edilir. (7.16) Eşitliği (7.17) Eşitliğinde yerine konulacak olursa,

$$\widetilde{K}\widetilde{\boldsymbol{N}}\widetilde{\boldsymbol{T}}^* + \widetilde{K}\widetilde{\boldsymbol{T}}\widetilde{\boldsymbol{N}}^* = 0 \tag{7.18}$$

olacaktır. $\widetilde{\boldsymbol{N}}\widetilde{\boldsymbol{T}}^*$ dual birim vektör kuaterniondur. $(\widetilde{c})$ eğrisi boyunca,

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}\widetilde{\boldsymbol{T}}^* = \boldsymbol{T} \tag{7.19}$$

olmaktadır. $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ ve $\widetilde{\boldsymbol{T}}$ birbirlerine diktir.

(7.19) Eşitliğinin her iki tarafı sağdan $\widetilde{\boldsymbol{T}}$ ile çarpıldığında,

$$\widetilde{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{T}\,\widetilde{\boldsymbol{T}} \tag{7.20}$$

elde edilir. (7.20) eşitliğinin türevi alındığında,

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{N}}} = \dot{\boldsymbol{T}}\widetilde{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{T}\dot{\widetilde{\boldsymbol{T}}} \tag{7.21}$$

bulunur.

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{N}\widetilde{\boldsymbol{T}} \tag{7.22}$$

olarak tanımlansın. (7.21) eşitliğinde (7.4) ve (7.15) eşitlikleri yerleştirildiğinde,

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{N}} &= KNT + T\widetilde{K}\widetilde{N} \\ &= KB - \widetilde{K}\widetilde{T} \end{aligned} \tag{7.23}$$

sonucuna ulaşılır. Buradaki B birim dual kuaterniondur. (7.22) Eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\dot{\widetilde{B}} = \dot{N}\widetilde{T} + N\dot{\widetilde{T}} \tag{7.24}$$

olur. (7.11) ve (7.16) eşitlikleri (7.24) eşitliğinde yerine konulduğunda,

$$\dot{\widetilde{B}} = \left(-KT + \tau B\right)\widetilde{T} + N\left(\widetilde{K}\widetilde{N}\right) \tag{7.25}$$

Ayrıca, $\widetilde{Y} = B\widetilde{T}$ olarak tanımlansın. Bu tanımlar doğrultusunda (7.25) eşitliği,

$$\widetilde{B} = -KN + \left(\tau - \widetilde{K}\right)\widetilde{Y} \tag{7.26}$$

olarak elde edilir. $\widetilde{Y}$ birim dual vektör kuaterniondur. Burada verilen $\widetilde{T}, \widetilde{N}, \widetilde{B}, \widetilde{Y}$ dual birim vektör kuaternionların hepsi karşıklı birbirlerine diktirler.

Son olarak (7.13) ve (7.16) eşitlikleri kullanılarak,

$$\dot{\widetilde{Y}} = -\tau\widetilde{B} + \widetilde{K}\widetilde{B} \tag{7.27}$$

bulunur.

$D^{4,}$ te $\left(\widetilde{c}\right)$ eğrisi boyunca Serret - Frenet formülleri matris formunda aşağıdaki şekilde verilir (Sivridağ, Güneş, vd.[16]).

$$\begin{bmatrix} \dot{\widetilde{T}} \\ \dot{\widetilde{N}} \\ \dot{\widetilde{B}} \\ \dot{\widetilde{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{K} & 0 & 0 \\ -\widetilde{K} & 0 & \widetilde{K} & 0 \\ 0 & -\widetilde{K} & 0 & \tau - \widetilde{K} \\ 0 & 0 & -\left(\tau - \widetilde{K}\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{T} \\ \widetilde{N} \\ \widetilde{B} \\ \widetilde{Y} \end{bmatrix} \tag{7.28}$$

8. TARTIŞMA VE SONUÇ

Fiziksel niceliklerin kuaternionlarda kullanılması bu niceliklerin üç boyuttan dört boyuta taşınması ile mümkündür. Bu bölüm cebri olan bir sayı sistemi olduğu için bir avantaj sağlayabilir. Bilindiği gibi fiziksel büyüklükler kompleks değildir. Çünkü ölçülebilir hiçbir büyüklük kompleks olamaz. Fiziksel büyüklüklerin kompleks sayılarla gösterimi sadece temsilden ibarettir. Dolayısıyla kuaternionlar veya dual kuaternionlarla fiziksel niceliklerin gösterimi sadece temsil özelliği taşımaktadır.

Dual sayılar bulunduğumuz yüzyılın başında Alman geometrici E. Study tarafından bulunmuştur. Bu dual sayılar dual kuaternionların bileşenlerini meydana getirirler. Kuaternionlarda örneğin, dönme ve öteleme hareketleri ayrı ayrı tanımlanırken iki kuaternionun birleşiminden meydana gelen dual kuaternionlarda ise tek bir dual kuaternion yeterli olmaktadır. Bir tek dual kuaternionun bileşenleri aynı anda dönme artı ötelemeyi içerir.

Dual kuatarnionlar, sekiz bileşenden oluşan yapıları ile oktonionlara benzemektedirler; bunlar birleşme özelliğine sahip olup değişme özelliğine sahip değildirler. Bu yapıları ile de kuaternionlara benzemektedirler. Buradan dual kuaternionların kuaternion mu yoksa oktonion mu olduğu tartışması ile karşılaşılır. Dual kuaternionlar özellikleri bakımından kuaterniondur. Sekiz bileşenin aslında dört dual sayı olduğu düşünülür ise kuaternion yapısına sahip olduğu görülecektir. Dual kuaternion ve oktonionların bir diğer farkı da dual birim olan ε^2 nin oktonionlarda -1, dual kuaternionlarda sıfır oluşudur.

Matris veya vektör kullanımına göre, kuaternion veya dual kuaternionların fiziksel ifadelerde kullanımı; işlem, gösterim kolaylığının yanısıra, vektör veya matris cebrinde mümkün olmayan bazı temel işlemleri yapabilme olanağı sağlamaktadır.

Sonuçta, bu çalışmada her iki sayı için cebirsel özellikler ele alınmıştır. Serret-Frenet formüllerinin yanısıra fiziksel bir sistem için açısal momentum ve eylemsizlik momentleri ifadelerinin tanımlamaları yapılmıştır.

KAYNAKLAR

1. ÖZDAŞ, K., ÖZDAŞ, A., *Fiziksel Niceliklerin Kuaternionlarla Temsili,* Fen - Edebiyat Dergisi, C:I, 2, *101 - 113,* 1989.

2. ÖZDAŞ, K., *Bölüm Cebirleri ve Bunların Fiziksel Uygulamaları.* Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Eskişehir, 1995.

3. HACISALİHOĞLU, H., *Hareket Geometrisi ve Kuaternionlar Teorisi.* Gazi Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara, 1983.

4. SERDAROĞLU, M., *Fizikte Kuaternion ve Oktonion Yapılar,* Bilim ve Teknik Dergisi, 26, 302, *45-51,* 1993.

5. TANIŞLI, M. Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 1995, 69.

6. HARAUZ, G., *Representation of Rotations by Unit Quaternions,* Ultramicroscopy, 33, *209-213,* 1990.

7. HORN, B., *Closed - Form Solution of Absolute Orientation Using Quaternions,* Journal of Optical Society of America, 4, *629-642,* 1987.

8. Chou, J.C.K., *Quaternion Kinematic and Dynamic Differantial Equations,* IEEE Transaction on Robotics and Automation, 8, 1, *53-64,* 1992.

9. WEHAGE, R.A., *Quaternion and Euler Parameters - A Brief Expansion,* Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics E.J. Haug ed., *147-180,* 1984.

10. CHOU, J.C.K., KAMEL, M., *Finding the Position and Orientation of a Sensor an a Robot Manipulator Using Quaternions,* The International Journal of Robotics Research, 10, 3, *240-254,* 1991.

11. TANIŞLI, M., ÖZDAŞ, A. , ÖZDAŞ, K., *An Application of General Quaternion for a Robotics Position,* Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi, 3, *65-68,* 1997.

12. ZIEHENG, G., ZHE, C., JAMES, C.H., *Quaternion Transformation for Robotic Application,* Electrical Engineering Department, IECON, *549-554,* 1986.

13. TAN, Q., BALCHEN, J.G., *General Quaternion Transformation Representation for Robotic Application,* IEEE-SMC, 93, Paris, 1993.

14. KORN, G.A., KORN, T.M., *Mathematical Handbook for Scientist and Engeneers,* Mac-Graw Hill Book Company, New York San Francisco Toronto London Sydney, 1968.

15. Valasek M., Stajskal V., *The Comparison of Matrix and Quaternion Apporaches Towards Kinematic*, Acta Technica, Csav,1, *118-136*, 1988.

16. SİVRİDAĞ, A.İ.,GÜNEŞ, R., KELEŞ, S., *The Serret-Frenet Formulae for Dual Quaternion- Valued Fonctions of a Single Real Variable*, Mech. Mach. Teory, 29, 5, *749-754*, 1994.

17. WALKER, M.W., SHAO,L., VOLZ, R.A., *Estimating 3-D Location Parameters Using Dual Number Quaternions*, CVGIP: Image Understanding, 54, 3, *358-367*, 1991.

18. ÖZEMRE, A. Y., *Klasik Teorik Mekanik*. İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, İstanbul, 1981.

19. SPRING, K., W., *Euler Parameters and The Use of Quaternion Algebra in The Manipulation of Finite Rotations: A Review*, Mech. Mach. Teory, 21, 5, *365-373*, 1986.

20. DE LEO, S., ROTELLİ, P., *Quaternion Scalar Field*, Physical Review D, 45, 2, *575-579*, 1992.