

LEVHA PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN 12  
SERBESTLİK DERECELİ BİR ÜÇGEN ELEMANIN  
RİJİTLİK MATRİSİNİN GELİŞTİRİLMESİ VE  
HAZIRLANAN PROGRAMDA NÜMERİK TESTİNİN  
KARŞILAŞTIRMALI OLARAK YAPILMASI

**Nihal ESENGÜR**

Anadolu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
Olarak Hazırlanmıştır

**Danışman : Yard. Doç. Dr. Ahmet TOPÇU**

✓

Anadolu Üniversitesi  
Merkez Kütüphane

Şubat - 1988

## ÖNSÖZ

Bu çalışmada levha sistemlerde uygulanması anlatılmaya çalışılan sonlu elemanlar metodu oldukça yeni bir metoddur.

Bilgisayarların kısa sürede gelişimine paralel olarak sonlu elemanlar metodu da hızla yeni uygulama alanları bulmuştur.

Klasik çözüm metodları ile çözülmesi pratik olarak çok karışık hatta olanaksız olan taşıyıcı sistemler kolayca çözülebilir hale gelmiş ve hesapların hassasiyet dereceleri artmıştır.

Bu çalışmada levhaların statik yükler altında çözümünü içeren bir bilgisayar programı verilmiştir. Programda dış yükler ve verilmiş deplasmanlar etkisindeki levhanın gerilmeleri, ayrıca düğüm noktalarındaki deplasmanları da hesaplanabilmektedir.

Program hazırlanarak Amstrad CPC 6128 de test edilmiştir.

Çalışmalarına yardımcı olan Sayın HocamYard.Doç.Ahmet TOPÇU'ya teşekkürü borç bilirim.

Nihal ESENGÜR

## ÖZET

Bu çalışmada deplasman fonksiyonu  $2^{\circ}$  polinom olan 12 serbestlik dereceli bir üçgen levha elemanı geliştirilerek rijitlik matrisi verilmiştir.

Hazırlanan bir levha programı ile elemanın sayısal karşılaştırılması yapılmış ve elde edilen sonuçların yeter derecede doğru olduğu gösterilmiştir.

## SUMMARY

In this study a triangular 12 degree of freedom displacement type plate element is developed by using a second order polynomial for displacement function and the stiffness matrix is given.

A computer program is developed for the element explained above and some numerical test problems are solved and the results are compared with the other solved problems in the literature. As a result it has been seen that our solutions are within reasonable accuracy.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ .....	iii
ÖZET .....	iv
SUMMARY .....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	x
SİMGELER DİZİNİ .....	xi
1. SONLU ELEMANLAR METODU .....	1
1.1. Giriş .....	1
1.2. Sonlu Elemanlar Metodu İle Sistemin Analizi ..	2
2. SİSTEMİN İDEALİZASYONU .....	3
2.1. Sistem Hakkında Genel Bilgiler .....	3
3. ÜÇGEN ELEMAN VE ALAN KOORDİNATLARI .....	7
3.1. Üçgenin Geometrik Özellikleri .....	7
3.2. Alan Koordinatları .....	8
4. DEPLASMAN FONKSİYONU SEÇİMİ VE SÜREKLİLİK ŞARTLARI	12
4.1. Üçgen Elemanın Düğüm Noktalarındaki Deplasmanları .....	12
4.2. Deplasman Fonksiyonunun Seçimi .....	12
4.3. Üçgen Elemanda $d_i$ Değerlerinin Hesaplanması ..	13
4.4. Süreklilik Şartları .....	20
4.5. Toplam Potansiyelin Minimum Olma Prensibi ....	27
4.6. Elastisite Matrisi .....	27
5. RİJİTLİK MATRİSİNİN HESABI .....	29
5.1. Elemanda Rijitlik Matrisinin Kurulması .....	29
5.2. Rijitlik Matrisi Terimlerinin Hesabı .....	33

## İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
6. GERİLME HESABI .....	49
6.1. Levhanın Orta Noktasında Gerilmeler .....	49
7. SAYISAL KARŞILAŞTIRMA .....	54
7.1. Cook Çözümünün Sonuçları .....	54
7.2. Levhada İdealizasyon Şekilleri .....	55
7.3. Levhanın Polinomlarla Çözümü .....	56
7.4. Levhada Deplasman Sonuçlarının Karşılaştırılması	57
7.5. Gerilme Değerlerinin Kiriş Teorisi (elastisite teorisi) ile karşılaştırılması .....	58
8. SONUÇ .....	69
EK-1 BİLGİSAYAR PROGRAMI .....	70
KAYNAKLAR DİZİNİ .....	83

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. Sistemin idealize edilmesi .....	3
2.2. İdealize edilmiş tipik bir eleman .....	4
2.3. Sistemde eleman ve nokta numaraları .....	4
2.4. Elemanda oluşan normal ve kayma gerilmeleri ....	5
2.5. Sistemin simetrik olması hali .....	6
3.1. Üçgen elemana ait eksen takımında ağırlık merkezi .....	7
3.2. Üçgen eleman ve düğüm noktaları .....	7
3.3. Üçgende alan koordinatları .....	8
3.4. Noktaların alan koordinatları .....	11
4.1. Düğüm noktası deplasmanları .....	12
4.2. Elemanın 1 noktasına yatay birim deplasman uygulanması .....	13
4.3. Elemanın 2 noktasına yatay birim deplasman uygulanması .....	14
4.4. Elemanın 3 noktasına yatay birim deplasman uygulanması .....	15
4.5. Elemanın 4 noktasına yatay birim deplasman uygulanması .....	15
4.6. Elemanın 5 noktasına yatay birim deplasman uygulanması .....	16
4.7. Elemanın 6 noktasına yatay birim deplasman uygulanması .....	16
4.8. Elemanın 1 noktasına düşey birim deplasman uygulanması .....	17
4.9. Elemanın 2 noktasına düşey birim deplasman uygulanması .....	17
4.10. Elemanın 3 noktasına düşey birim deplasman uygulanması .....	18
4.11. Elemanın 4 noktasına düşey birim deplasman uygulanması .....	18
4.12. Elemanın 5 noktasına düşey birim deplasman uygulanması .....	19
4.13. Elemanın 6 noktasına düşey birim deplasman uygulanması .....	19
6.1. Üçgen elemanda gerilme değerlerinin hesaplandığı nokta .....	49

## ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
7.1. Problemin tanımı .....	54
7.2. 4 elemanlı idealizasyon .....	55
7.3. 8 elemanlı idealizasyon .....	55
7.4. 12 elemanlı idealizasyon .....	55
7.5. Elastisite teorisinde çözümü yapılan levha .....	56
7.6. 12 elemanlı idealizasyonda düşey kuvvet uygulanması .....	58
7.7. 12 elemanlı idealizasyonda yatay kuvvet uygulanması .....	64



## ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
7.1. Düşey deplasman değerlerinin karşılaştırılması	58
7.2. Elemanlardaki gerilme değerlerinin karşılaştırılması .....	63

## SİMGELER DİZİNİ

<u>Simge</u>	<u>Açıklama</u>
$\underline{\sigma}$	Gerilme matrisi
A	Elemanın alanı
$L_i$	Alan oranı
$d_i$	Deplasman fonksiyonu katsayısı
$\bar{U}$	Eleman deplasman matrisi
$u_i$	Yatay deplasman
$v_i$	Düşey deplasman
$\epsilon$	Şekil değiştirme matrisi
$a_i$	Parametre
$\underline{E}$	Malzemenin rijitlik matrisi
$\nu$	Poisson oranı
V	Elemanın hacmi
$\underline{s}$	Eleman kuvvetleri
$\underline{D}$	Katsayılar matrisi
$\underline{K}$	Elemanın rijitlik matrisi
$\pi$	Toplam enerji
$k_{ij}$	Rijitlik matrisi elemanları
t	Elemanın kalınlığı
$\tau_{xy}$	Kayma gerilmesi
$\sigma_{xx}$	Normal gerilme
$\sigma_{yy}$	Normal gerilme
$\sigma_{xy}$	Kayma gerilmesi

## 1. SONLU ELEMANLAR METODU

### 1.1. Giriş

Sonlu elemanlar metodu nümerik bir hesap yöntemidir. Metodun esası, sistem ne denli karmaşık olursa olsun daima sistemin idealize edilmiş ve özellikleri bilinen elemanların çözümüne dayanır. Bu metod ile her türlü karmaşık sistem çözülebilir. Sonlu elemanlar metodu, iki ve üç boyutlu sürekli ve süreksiz ortamın gerilme ve yer değiştirme problemlerine de uygulanacak şekilde genelleştirilmiştir. Sonlu elemanlar metodu ilk olarak mühendislik alanında uçak sanayiinde kullanılmış, bu dalda karşılaşılan çok sayıda karmaşık yapıdaki problemlerin çözümünde yararlanılmıştır.

Bilgisayar tekniğinin gelişmesine paralel olarak başta yapı mekaniği olmak üzere diğer bilim dallarında da hızlı bir şekilde uygulama alanı bulmuştur. Sistemin sonlu sayıda elemanlardan meydana geldiği düşüncesi metodun esasını oluşturur ve buna sistemin idealizasyonu denir.

Bu elemanların sonlu sayıdaki düğüm noktalarında birbirine bağlandığı varsayılır. Sistemin denge denklemlerinin kurulmasında oluşturulacak denge matrisinin boyutu, sistemin düğüm noktası sayısına bağlıdır.

Bir sistemin veya tipik bir çerçeveden oluşan yapının idealize edilmesinde yapılması gereken tek kabul, deplasman fonksiyonunun iki düğüm noktası arasında ve elastik eksen boyunca sürekli olduğudur.

Yapı sistemlerinin analizinde en büyük gelişme, sonlu elemanlar metodunun sürekli ortam problemlerinin her türlü geometri, sınır şartı ve yük haline uygulanabilmesidir.

Levha, kabuk ve plakları iki boyutlu elemanların birleşimi şeklinde temsil etmek mümkün olduğu gibi üç boyutlu elemanların birleşmesi ile de sürekli bir ortamı temsil etmek mümkündür. Çözüm sırasında yapılan kabuller fiziksel karakterde olup idealize edilmiş sistem gerçek ortam yerine

kullanılır. İdealizasyon sonucu oluşan hata miktarı kabul edilebilir sınırlar içinde kalmaktadır.

Elemanların farklı ve değişik malzemelerden oluşması durumunda da bu metod geçerli olup uygulanabilir. Bu da sonlu elemanlar metodunun geniş bir uygulama alanına sahip olduğunu ifade eder.

## 1.2. Sonlu Elemanlar Metodu İle Sistem Analizi

Sistemin sonlu elemanlar metodu ile analizi yapılırken yapının idealize edilecek elemanlarının özelliklerinin belirlenmesi ve idealize edilmiş olan yapının analizi olmak üzere kısımlara ayırmak mümkündür. Sürekli ortam özellikleri bilinen tipte elemanlara ayrılarak idealize edilir. Bundan sonra sürekli ortamın analizi yerine, idealize edilmiş olan sistemin analizi ile çözüm yapılır.

Çözümün doğru ve kesinliği, idealize edilmiş sistemin sürekli ortamı ne kadar hassasiyetle temsil ettiğine bağlıdır. Genel olarak idealize işi zor bir işlem değildir. Sık bir ağ şeklindeki idealizasyonun çok daha iyi sonuç verdiği gösterilmiştir.

Ana problem sistemi oluşturan elemanların elastik özelliklerini belirlenmesidir. Düğüm noktasına etkiyen kuvvetler ile bu kuvvetlerin neden oldukları deplasmanlar arasındaki bağıntının kurulması ve eleman rijitlik matrisinin hesabı ana problemdir.

Verilmiş yükler (dış kuvvetler, mesnet çökmesi, ısı vs.) altında sistemin deplasmanlarının, eleman kuvvetlerinin ve elemanlarda oluşan gerilme ile deformasyonların hesabı her zaman karşımıza çıkabilecek bir problemdir.

Sistemin idealize edilmesi sistematik olup metodun esaslı her türlü karmaşık sistem için geçerlidir.

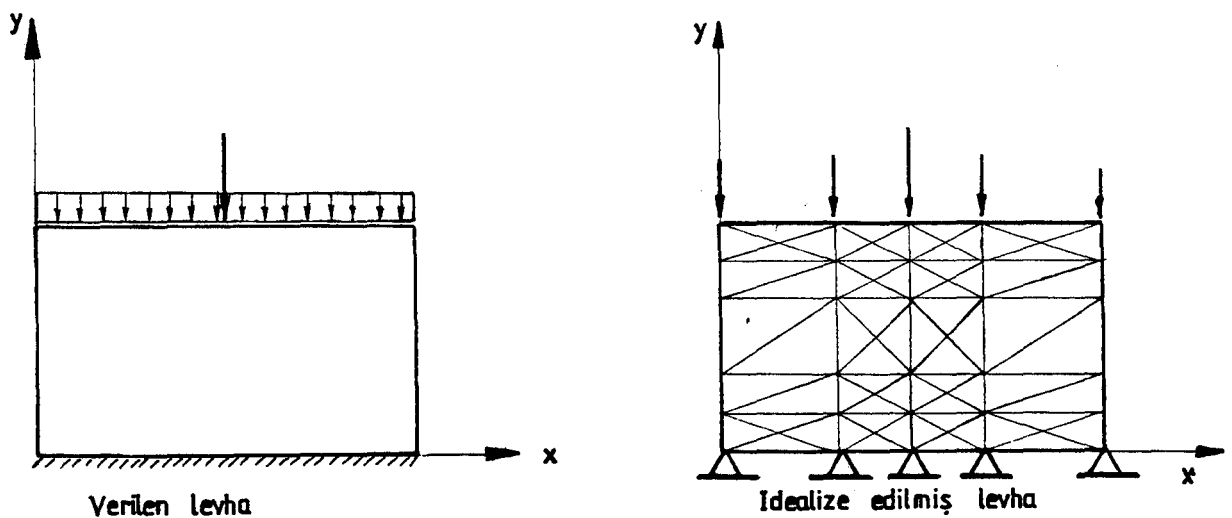
## 2. SİSTEMİN İDEALİZASYONU

### 2.1. Sistem Hakkında Genel Bilgiler

Sonlu elemanlar deplasman metodu ile levhalarda oluşan iç kuvvetler (gerilmeler) ve mesnet reaksiyonları düzlem gerilme ve düzlem deformasyon halleri için hesaplanacaktır.

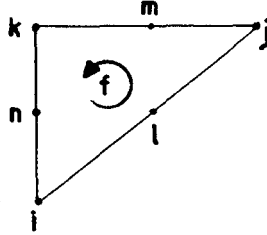
Sürekli bir ortam olan levhaların çözümü için sistem önce sonlu sayıda elemana bölünür. Burada üçgen levha kullanılacaktır. Eleman sayısı arttıkça çözümün doğruluk derecesi de arttığından mümkün olduğu kadar çok elemana bölmek esastır. Ayrıca gerilmelerin büyük olacağı tahmin edilen bölgelerin (tekil yüklerin, mesnetlerin, boşlukların ve ısı farkının olduğu bölge) mümkün olduğu kadar küçük boyutlu elemanlara bölünmesi faydalıdır. Eleman sayısının üst sınırı sadece kullanılan bilgisayarın bellek kapasitesi ile sınırlıdır.

Levhanın elemanlara bölünmesine sistemin idealize edilmesi denir. Şekil 2.1'de görüldüğü gibi sistemin geometrisi idealize edilirken süreklilik gösteren sınır şartları ve yayılı yükler de idealize edilir (Topçu, A., 1987).



Şekil 2.1. Sistemin idealize edilmesi

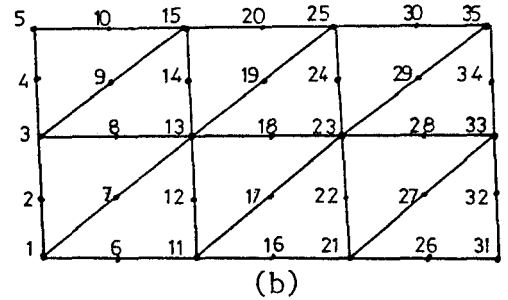
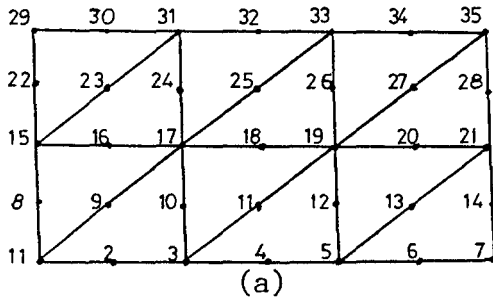
Düğüm Noktaları: İdealizasyon sonunda oluşan noktardır. İdealize edilmiş levhada tipik bir f. elemanını ele alırsak (Şekil 2.2):



Şekil 2.2. İdealize edilmiş tipik bir eleman

Eleman tarif edilirken, herhangi bir köşe noktadan başlayarak, sıra ile, diğer noktaları (saat yönünün ters istikametinde), daha sonra ana noktalar göz önünde tutulmalıdır.

Numaralama işlemi sistemin genelinde yapıldığı için numaralama sonunda herhangi bir tipik elemanın nokta numaralarının farklarının mümkün olduğu kadar küçük kalmasına özen gösterilmelidir. Şekil 2.3a'da verilen numaralama yerine Şekil 3.3b'de verilen numaralama tercih edilmelidir.



Şekil 2.3. Sistemde eleman ve nokta numaraları

Şekil 2.3a'da taralı olan elemanın numaraları 1,3,17, 2,10,9 ve numaraları arasındaki fark  $17-1=16$  halbuki, Şekil 2.3b de 1,11,13,6,12,7 için ise  $13-1=12$  dir. Bu fark ne kadar küçük kalırsa, problem için harcanan bellek ve hesap süresi de o oranda azalır.

Elemanlar: Sistemin idealize edilmesi sonucunda oluşan üçgen elemanlardır, sıra ile numaralanırlar (Şekil 2.3b).

Sistem eksen takımı: Sistemin x ve y eksenleridir. Yön söz konusu olduğunda x yönü 1 ile, y yönü 2 ile adlandırılır.

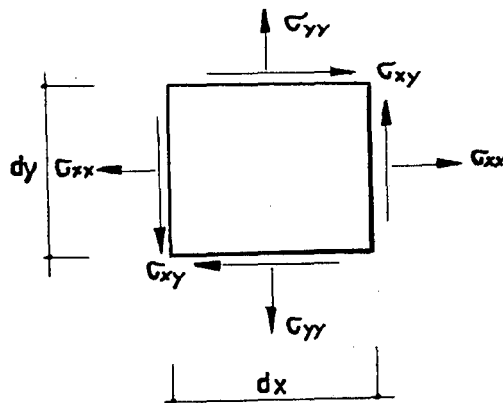
Mesnet Şartları: Mesnet noktalarında verilmiş deplasmanlardır.

Dış yükler: Düğüm noktalarında ve eksenler yönünde etkiyen tekil kuvvetler, elemanlarda ısı etkisi ve mesnet çökmeleri dış yük olarak verilebilir. Sürekli yükler statikçe eşdeğer ve sadece düğüm noktalarına gelen yük halini alır.

Koordinatlar: Düğüm noktalarının seçilen eksen takımına göre koordinatlarıdır.

Deplasmanlar: Verilen yüklerden düğüm noktalarında oluşan hareket miktarlarıdır. Her noktada x ve y yönünde olmak üzere iki deplasman vardır. Her elemanda ise 6 nokta ve  $6 \times 2 = 12$  deplasman mevcuttur.

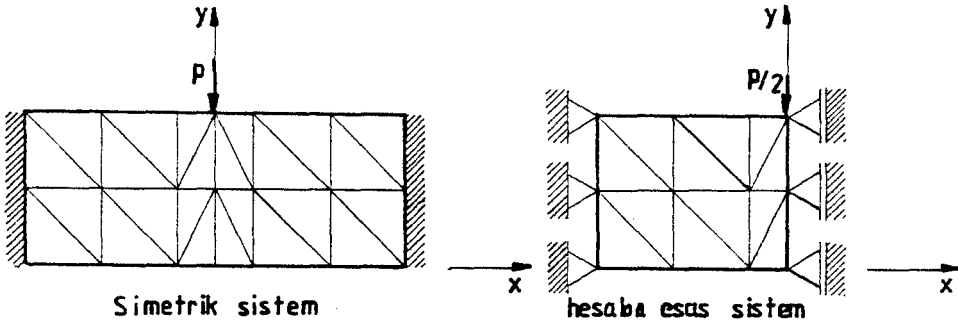
Gerilmeler: Elemanlarda verilen yükler nedeni ile oluşan gerilmelerdir.  $\sigma_{xx}$  ve  $\sigma_{yy}$  normal gerilmeleri ile  $\sigma_{xy}$  kayma gerilmesi mevcuttur. Söz konusu gerilmeler eleman içinde her noktada şabittir. Gerilmelerden pozitif yönleri Şekil 2.4 de elemandan alınan bir dx, dy elemanı üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 2.4. Elemanda oluşan normal ve kayma gerilmeleri

Reaksiyonlar: Mesnet noktalarında ve mesnet şartı verilmiş doğrultularda dış yüklerden oluşan kuvvetlerdir.

Sistemin ve yüklemelerin simetrik olması: Bu durumda sistemin yarısı ile hesap yapılabilir. Simetriden bellek tasarrufu için mutlaka yararlanılmalıdır. Şekil 2.5'de simetrik bir sistemin idealizasyonu örnek olarak gösterilmiştir.



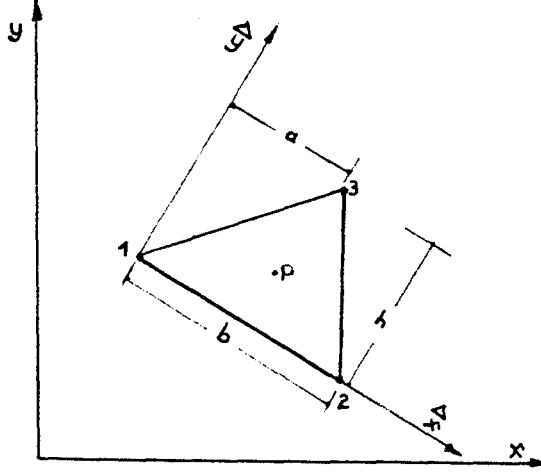
Şekil 2.5. Sistemin simetrik olması hali

Yukarıda bahsedildiği gibi idealizasyonu yapılan bir sistemde artık sistemin rijitlik matrisinin kurulması gerekir. Burada üçgen eleman ve alan koordinatlarından yararlanılmıştır.



### 3. ÜÇGEN ELEMAN VE ALAN KOORDİNATLARI

#### 3.1. Üçgenin Geometrik Özellikleri

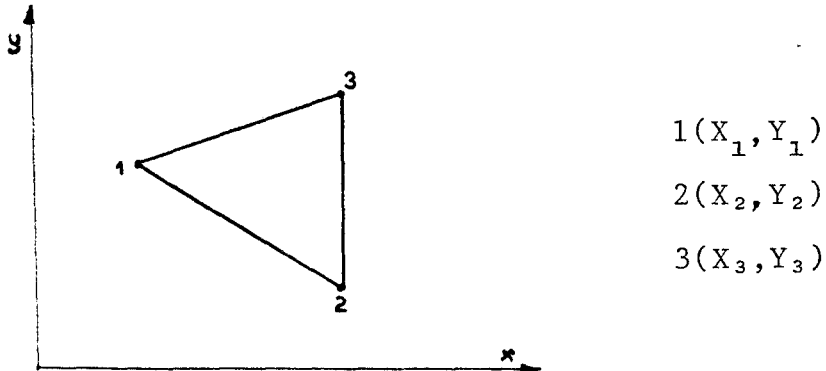


Şekil 3.1. Üçgen elemana ait eksen takımında ağırlık merkezi

Üçgenin ağırlık merkezi olan  $P(X_P, Y_P)$  noktasının koordinatlarının hesaplanması için  $a, b$  ve  $h$  değerleri bilinmelidir (İnan, M., 1981).

$$X_P = \frac{a+b}{3} \quad \text{ve} \quad Y_P = \frac{h}{3} \quad \text{olur} \quad (3.1.1)$$

Üçgen elemana ait  $(X, Y)$  koordinat sistemine göre eleman  $P(X_P, Y_P)$  değerleri, sisteme ait  $(x, y)$  koordinatlarına dönüştürülür.



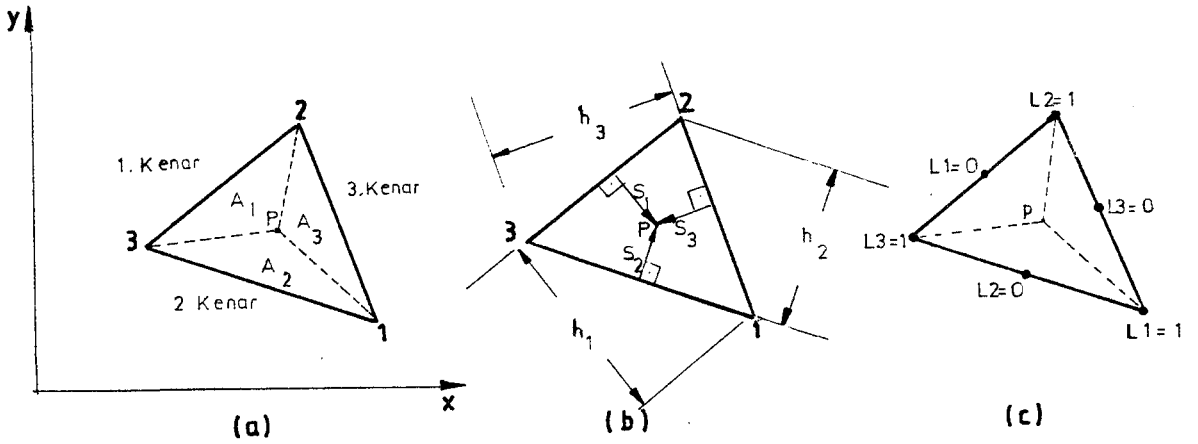
Şekil 3.2. Üçgen eleman ve düğüm noktaları

Şekil 3.2'deki üçgenin  $i$  noktasının koordinatları  $X_i, Y_i$  olmak üzere üçgenin alanı, 1,2,3 köşe noktaları cinsinden (Przemieniecki, J.S., 1968)

$$\underline{A}_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{bmatrix} \quad (3.1.2)$$

ile verilir.

### 3.2. Alan Koordinatları



Şekil 3.3. Üçgende alan koordinatları

Üçgenin içinde teşkil edilecek herhangi bir P noktası ile üçgen  $A_1$ ,  $A_2$  ve  $A_3$  den oluşan alanlara ayrılabilir. Şekil 3.1a da P noktasının üçgeni bölmesi ile üç alan oluşmuştur (Cook, R.D., 1974; Gallegher, R.H., 1976).

Üçgenin kenarlarından P noktasına çizilen dik uzaklıklara  $S_1$ ,  $S_2$  ve  $S_3$  denir. Şekil 3.3b deki üçgenin yükseklikleri her kenar için  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  olur.

P noktasının üçgen içinde konumu değiştikçe  $A_1$ ,  $A_2$  ve  $A_3$  alanlarının da büyüklükleri değişmektedir. Şekil 3.3c de P noktasının ayırdığı üçgenlerin kenar çizgileri görülmektedir. Şekil 3.3c'de  $A_2$  alanının büyüklüğünü belirleyen  $L_2$  çizgisi gösterilmiştir.  $L_1$  ve  $L_2$  ve  $L_3$  bölünen alanların toplam A alanına oranıdır.

$$L_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{s_1}{h_1}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{s_2}{h_2} \quad \text{ve} \quad L_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{s_3}{h_3} \quad (3.2.1)$$

olmaktadır.

Bir kenarı ortak iki üçgende yüksekliklerin oranı alanların oranına eşittir. Şekil 3.3b'de 1. kenarda  $s_1/h_1 = A_1/A$  olmaktadır. Alan koordinatlarının teşkilinde P noktası üçgenin merkezine yerleştirilir. Bu durumda oluşan üçgenler eşit büyüklükte ve

$$L_1 = L_2 = L_3 = \frac{1}{3} \quad (3.2.2)$$

olur. P noktasının alan koordinatları cinsinden koordinatları  $P(L_1, L_2, L_3) = P(1/3, 1/3, 1/3)$  olur.

Şekil 3.3a daki üçgen elemanı ele alınır (Topçu, A., 1986)

$$\begin{array}{l} A \text{ nın tarifi } \hat{1} \hat{2} \hat{3} \\ A_1 \quad \quad \quad " \quad \hat{2} \hat{3} P \\ A_2 \quad \quad \quad " \quad \hat{3} \hat{1} P \\ A_3 \quad \quad \quad " \quad \hat{1} \hat{2} P \end{array}$$

ve P noktasının koordinatları  $(x, y)$  olmak üzere alanlar (3.1.2) den

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \{ X_1(Y_2 - Y_3) + X_2(Y_3 - Y_1) + X_3(Y_1 - Y_2) \} \quad (3.2.3)$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \{ (X_2 Y_3 - Y_2 X_3) + x(Y_2 - Y_3) + y(X_3 - X_2) \} \quad (3.2.4)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & X_3 & Y_3 \\ 1 & X_1 & Y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \{ (X_3 Y_1 - X_1 Y_3) + x(Y_3 - Y_1) + y(X_1 - X_3) \} \quad (3.2.5)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \{(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) + x(Y_1 - Y_2) + y(X_2 - X_1)\} \quad (3.2.6)$$

olarak yazılabilir.

Alan koordinatlarının tarifi (3.2.1 den)

$$L_i = \frac{A_i}{A}, \quad L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A}$$

dir ve alanların oranının toplamı üçgenin alanına eşittir:

$$L_1 + L_2 + L_3 = \frac{A_1}{A} + \frac{A_2}{A} + \frac{A_3}{A} = \frac{A}{A}$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (3.2.7)$$

Burada alan koordinatlarının lineer bağımlı olduğu görülür.  $L_1$  için,  $L_1 = 1 - (L_2 + L_3)$  şeklinde lineer bağımlık yazılabilir.

Formüllerde kısaltmalar yapılırsa:

$$\alpha_{ij} = X_i Y_j - X_j Y_i \quad (3.2.8)$$

$$X_{ij} = X_i - X_j \quad (3.2.9)$$

$$Y_{ij} = Y_i - Y_j \quad (3.2.10)$$

$$2A = X_1 Y_{23} + X_2 Y_{32} + X_3 Y_{12} \quad (3.2.11)$$

$$2A_1 = \alpha_{23} + x Y_{23} + y X_{23} \quad (3.2.12)$$

$$2A_2 = \alpha_{31} + x Y_{31} + y X_{13} \quad (3.2.13)$$

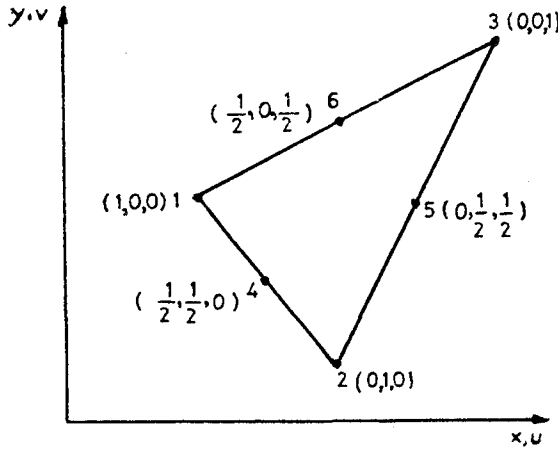
$$2A_3 = \alpha_{12} + x Y_{12} + y X_{21} \quad (3.2.14)$$

olarak ifade edilebilir.

Alan koordinatları ile kartezyen koordinatlar arasındaki bağlantı matris şeklinde yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_{23} & Y_{23} & X_{32} \\ \alpha_{31} & Y_{32} & X_{13} \\ \alpha_{12} & Y_{12} & Y_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.2.15)$$

Alan koordinatları yardımı ile eleman global koordinatlarından bağımsız olarak tariflenebilir.



Şekil 3.4. Noktaların alan koordinatları

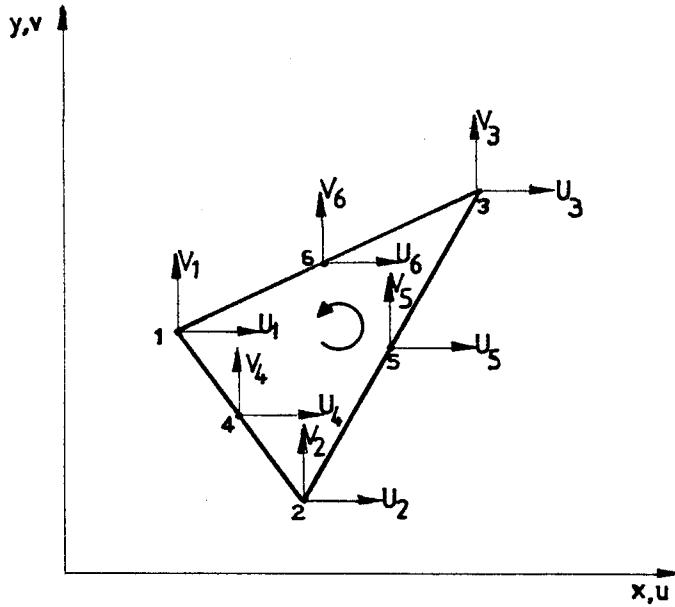
Elemana ait P noktasının üçgenin üzerindeki 1,2,3,4,5 ve 6 noktalarının herhangi birinin üzerine kaydırılması durumunda, alan koordinatları bu noktalar için Şekil 3.4 de  $(L_1, L_2, L_3)$  olarak tariflenmiştir.

P noktası 1 noktası ile çakıştığıında  $A_1=A$  ve  $A_2=A_3=0$  dır. Bu durumda  $L_1=1$ ,  $L_2=0$ ,  $L_3=0$  ve 1 noktasında olan P noktasının koordinatları  $P(1,0,0)$  olur.

#### 4. DEPLASMAN FONKSİYONU SEÇİMİ, SÜREKLİLİK ŞARTLARI

##### 4.1. Üçgen Elemanın Düğüm Noktalarındaki Deplasmanları

İdealize edilen herhangi bir levhanın  $i$  inci elemanın-  
da düğüm noktaları ve deplasmanlar aşağıdaki şekilde göste-  
rilmiştir.



Şekil 4.1. Düğüm noktası deplasmanları

Levhaların sonlu elemanlar metodu ile hesabı yapılırken her elemandaki mevcut noktaların (1,2,...,6) yatay ve düşey deplasman değerleri bulunur. Her eleman için nokta sayısı ve bir noktada bulunan deplasman adedi çarpılarak serbestlik derecesi elde edilir. Şekil 4.1 de  $i$ . inci elemanın  $6 \times 2 = 12$  serbestlik derecesi vardır. Elemanın yapacağı deplasman sayısına serbestlik derecesi denir. Eleman bu deplasmanlar doğrultusunda serbestçe hareket edebilir.

##### 4.2. Deplasman Fonksiyonunun Seçimi

Elemanın deplasman vektörü  $\bar{U}$  ile tanımlanırsa her eleman için sınır şartlarını sağlayan deplasman fonksiyonu  $y$  için:

$$\underline{v} = \underline{d} \bar{U} \quad (4.2.1)$$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} U_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{D} & | & 0 \\ \hline 0 & | & \underline{D} \end{bmatrix} \bar{U} \quad (4.2.2)$$

yazılabilir (Topçu, A., 1986).

4.2.2 deki ifade açık olarak yazılırsa:

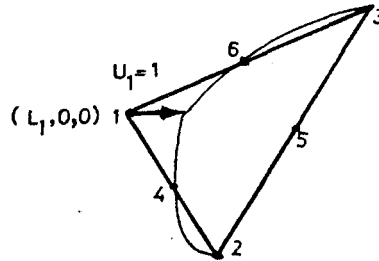
$$\underline{v} = \begin{bmatrix} U_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & | & 0 \\ \hline 0 & & & & & & | & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_6 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_6 \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

olur.

Buradaki  $d_1, d_2, \dots, d_6$  katsayıları olan koordinatları cinsinden deplasman fonksiyonunu belirler. Deplasman fonksiyonunun tesbiti için yatay ve düşey deplasmanlara birim deplasmanlar verilerek  $d_i$ 'ler hesaplanır. Örnek olarak  $u_1=1$  ve bütün diğer  $u_i=0$ ,  $v_i=0$  ( $i > 1$ ) iken  $d_1$  hesaplanabilir.

### 4.3. Üçgen Elemanda $d_i$ Değerlerinin Hesabı

#### 4.3a. Yatay deplasman katsayılarının belirlenmesi



Şekil 4.2. Elemanın 1 noktasına yatay birim deplasman uygulanması

1. noktasındaki yatay deplasmana birim deplasman verilir. Burada  $u_1=1$  ve diğer  $u_i=0$ ,  $v_i=0$  (diğer noktalarda verilmiş deplasman bulunmamaktadır). Aynı zamanda  $d_1$  sadece  $A_1$  ile tariflenir ve  $L_2$  ve  $L_3$  den bağımsızdır. Şekil 4.2 deki elemanın yüzeyi  $2^\circ$  bir paraboludur.

$2^\circ$  parabol için 3 bilinmeyenli denklem kurulur:

$$d_1 = a_1 + a_2 L_1 + a_3 L_1^2 \quad (4.3.1)$$

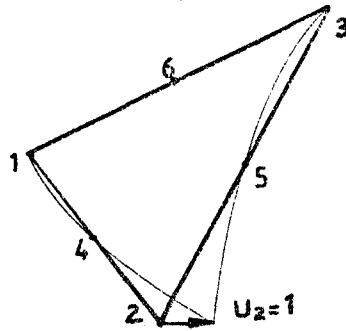
$L_1=1$  ve P noktasının yeri  $P(1,0,0)$  olur.  $L_2$  ve  $L_3$  sıfır olduğundan  $d_1$  sadece  $L_1$  in fonksiyonudur. Sınır şartı olarak  $u_1=1$ ,  $u_2=0$  ve  $u_4=0$  alınırsa denklemler:

$$\begin{aligned} 1 \quad d_1(1,0,0) &= u_1 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ 2 \quad d_1(0,1,0) &= u_2 = a_1 = 0 \\ 3 \quad d_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) &= u_4 = a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{4} a_3 = 0 \end{aligned}$$

olur. Bu denklemler çözüldüğünde  $a_1=0$ ,  $a_2=-1$ ,  $a_3=2$  bulunur.

$$d_1 = -L_1 + 2L_1^2 = L_1(2L_1 - 1) \quad (4.3.2)$$

Diğer 2 ve 3 noktalarının deplasman fonksiyonları aynı yöntem ile bulunur. 2 noktasına yatay birim deplasman uygulandığında  $P(0,1,0)$  ve  $d_2 = a_1 + a_2 L_2 + a_3 L_2^2$  olur. Sınır şartları yerine konursa fonksiyonun ifadesi aşağıdaki gibi olur.

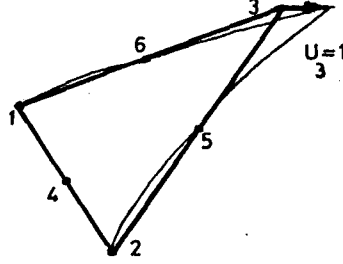


Şekil 4.3. Elemanın 2 noktasına yatay birim deplasman uygulanması

$$d_2 = L_2(2L_2 - 1) \quad (4.3.3)$$



3 noktasına yatay birim deplasman uygulanması durumunda  $P(0,0,1)$  ve  $d_3=a_1+a_2L_3+a_3L_3^3$  için:

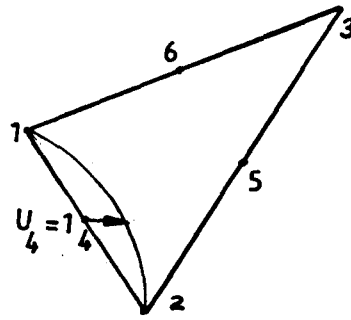


Şekil 4.4. Elemanın 3 noktasına yatay birim deplasman uygulanması

$$d_3=L_3(2L_3-1)$$

(4.3.4)

olarak hesaplanır.



Şekil 4.5. Elemanın 4 noktasına yatay birim deplasman uygulanması

4 noktasındaki yatay deplasman katsayısının hesaplanması için birim deplasman uygulanır.  $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$  noktası üçgeni iki eşit alana böler. Bu nedenle  $d_4=d_4(L_1, L_2)$  dir ve 2° denklemin katsayıları 6 adettir. Deplasman fonksiyonu

$$d_4=a_1+a_2L_1+a_3L_2+a_4L_1^2+a_5L_2^2+a_6L_1L_2 \quad (4.3.5)$$

olur ve sınır şartları  $u_4=1, u_1=u_2=u_3=u_5=u_6=0$  için denklemler:

$$1. \quad d_4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)=u_4=a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2}a_3+\frac{1}{4}a_4+\frac{1}{4}a_5+\frac{1}{4}a_6=1$$

$$2. \quad d_4(1, 0, 0)=u_1=a_1+a_2+a_4=0$$

$$3. \quad d_4(0, 1, 0)=u_2=a_1+a_3+a_5=0$$

$$4 \quad d_4(0,0,1)=u_3=a_1=0$$

$$5 \quad d_4(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})=u_5=a_1+\frac{1}{2} a_3+\frac{1}{4} a_5=0$$

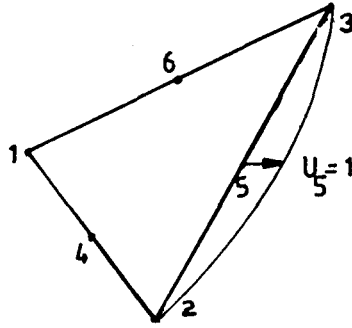
$$6 \quad d_4(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})=u_6=a_1+\frac{1}{2} a_2+\frac{1}{4} a_4=0$$

ve katsayılar  $a_1=0$ ,  $a_2=0$ ,  $a_3=0$ ,  $a_4=0$ ,  $a_5=0$ ,  $a_6=4$  olarak elde edilir. Sonuçta 4 noktası için deplasman fonksiyonu:

$$d_4=4 L_1 L_2 \quad (4.3.6)$$

olur.

Benzer şekilde 5 ve 6 noktalarına yatay birim deplasmanlar verilerek  $d_5$  ve  $d_6$  katsayıları hesaplanır.

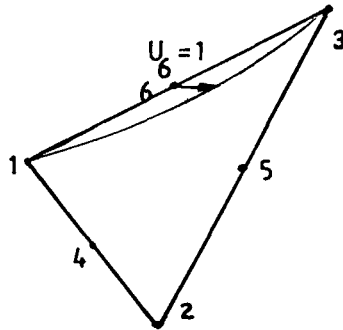


Şekil 4.6. Elemanın 5 noktasına yatay birim deplasman uygulanması

$d_5=d_5(L_2, L_3)$  ve sınır şartları  $u_5=1$ ,  $u_1=u_2=u_3=u_4=u_6=0$  için

$$d_5=4 L_2 L_3 \quad (4.3.7)$$

elde edilir.

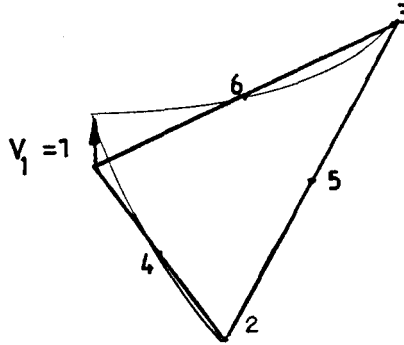


Şekil 4.7. Elemanın 6 noktasına yatay birim deplasman uygulanması

$d_6 = d_6(L_1, L_3)$  ve sınır şartları  $u_6=1, u_1=u_3=u_4=u_5=0$  için  
 $d_6 = 4 L_1 \cdot L_3$  (4.3.8)

bulunur.

#### 4.3b. Düşey deplasman katsayılarının belirlenmesi



Şekil 4.8. Elemanın 1 noktasına düşey birim deplasman uygulanması

$P(1,0,0)$  ve  $d_1 = a_1 + a_2 L_1 + a_3 L_1^2$  denklemi için sınır şartları  $v_1=1, v_3=0, v_6=0$  uygulanırsa:

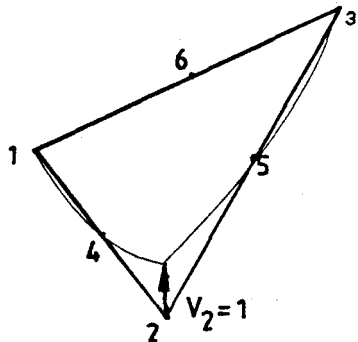
- 1  $d_1(1,0,0) = v_1 = a_1 + a_2 + a_3 = 1$
- 2  $d_1(0,0,1) = v_3 = a_1 = 0$
- 3  $d_1\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = v_6 = a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{4} a_3 = 0$

olur ve sistemin çözümünde

$$d_1 = L_1(2L_1 - 1) \quad (4.3.9)$$

bulunur.

Benzer şekilde 2 noktası için  $d_2 = d_2(L_2)$  dir.

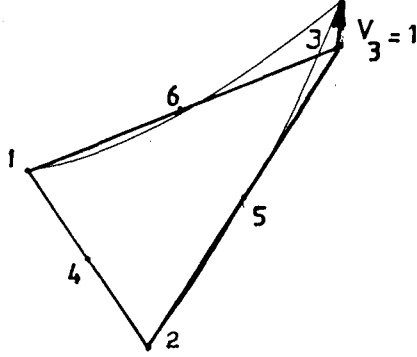


Şekil 4.9. Elemanın 2 noktasına düşey birim deplasman uygulanması

$$d_2 = L_2(2L_2 - 1)$$

$$(4.3.10)$$

3 noktasında deplasman fonksiyonu:



Şekil 4.10. Elemanın 3 noktasına düşey birim deplasman uygulaması

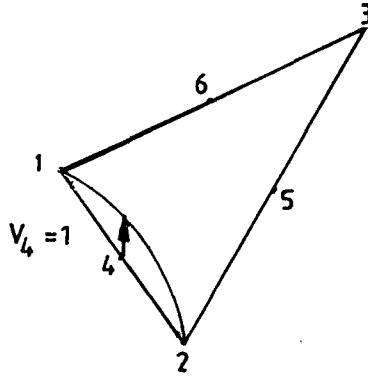
$$d_3 = L_3(2L_3 - 1)$$

$$(4.3.11)$$

Elemanın 4 noktasına birim deplasman uygulanması durumunda deplasman fonksiyonu  $L_1$  ve  $L_2$  ye bağımlı olmaktadır. Sınır şartı olarak  $v_4 = 1$ ,  $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = 0$  alınırsa

$$d_4 = a + a_2 L_1 + a_3 L_2 + a_4 L_1^2 + a_5 L_2^2 + a_6 L_1 L_2$$

şeklindeki deplasman fonksiyonunun çözümü:



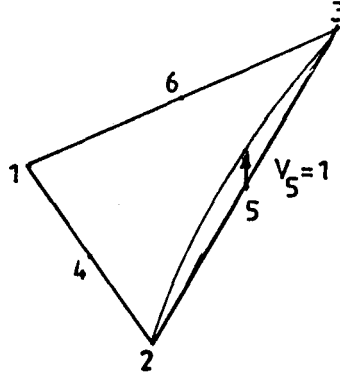
Şekil 4.11. Elemanın 4 noktasına düşey birim deplasman uygulanması

$$d_4 = 4L_1 L_2$$

$$(4.3.12)$$

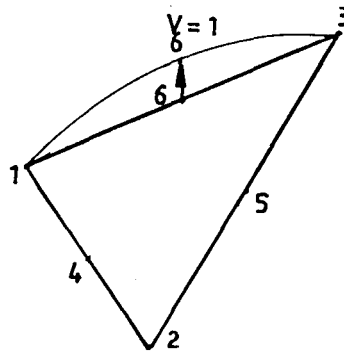
olur.

Benzer şekilde diğer noktalar için:



Şekil 4.12. Elemanın 5 noktasına düşey birim deplasman uygulanması

$$d_5 = 4L_2L_3$$



$$(4.3.13)$$

Şekil 4.13. Elemanın 6 noktasına düşey birim deplasman uygulanması

$$d_6 = 4L_1L_3$$

elde edilir.

Hesaplanan  $d_i$  katsayıları  $\underline{D}$  matrisinde ifade edilirse:

$$\underline{D} = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6]$$

$$\underline{D} = [L_1(2L_1-1) \ L_2(2L_2-1) \ L_3(2L_3-1) \ 4L_1L_2 \ 4L_2L_3 \ 4L_1L_3]$$

$\underline{D}$  matrisi yatay ve düşey deplasmanlar için birbirine eşittir. 4.2.1 den deplasman ifadesi:

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} U_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{D} & 0 \\ 0 & \underline{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{V} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradaki  $\begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{V} \end{bmatrix}$  matrisinin transpozesi yazılırsa:

$$[\underline{U}^T \ \underline{V}^T] = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6\}$$

olur.

#### 4.4. Süreklilik Şartları

Eleman deformasyonları ile deplasman fonksiyonu diferansiyel bağıntı:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (v_{ij} + v_{ji}) \quad (4.4.1)$$

ya da

$$\underline{\epsilon} = \underline{\Delta} \underline{v}$$

olarak yazılabilir.

Levha elemanında şekil değiştirme matrisi:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \\ \underline{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \underline{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{D} & 0 \\ \hline 0 & \underline{D} \\ \underline{d} \end{bmatrix} \underline{\bar{U}}$$

$$\underline{\epsilon} = \underline{\Delta} \underline{v} = \underline{\Delta} \underline{d} \underline{\bar{U}}$$

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{D}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \underline{D}}{\partial y} \\ \frac{\partial \underline{D}}{\partial y} & \frac{\partial \underline{D}}{\partial x} \\ \underline{\tilde{D}} \end{bmatrix} \cdot \underline{\bar{U}} = \underline{\tilde{D}} \underline{\bar{U}} \quad (4.4.2)$$

$\underline{\tilde{D}}$  matrisini oluşturan  $\frac{\partial \underline{D}}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \underline{D}}{\partial y}$  ifadelerinin hesabı:

$$\frac{\partial \underline{D}}{\partial x} = \left[ \frac{\partial d_1}{\partial x} \quad \frac{\partial d_2}{\partial x} \quad \frac{\partial d_3}{\partial x} \quad \frac{\partial d_4}{\partial x} \quad \frac{\partial d_5}{\partial x} \quad \frac{\partial d_6}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [L_1(2L_1 - 1)] = \frac{(2L_1^2 - L_1)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial x} = 4L_1 \frac{\partial L_1}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial x} = (4L_1 - 1) \frac{\partial L_1}{\partial x}$$

$\frac{\partial d_i}{\partial x}$  lerin hesabında  $L_1$ ,  $L_2$  ve  $L_3$  ifadelerinin türevi yer almaktadır. 3.2.15 den:

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_{23} & Y_{23} & X_{32} \\ \alpha_{31} & Y_{31} & X_{13} \\ \alpha_{12} & Y_{12} & X_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

ve

$$L_1 = \frac{1}{2A} (\alpha_{23} + xY_{23} + yX_{32})$$

$$L_2 = \frac{1}{2A} (\alpha_{31} + xY_{31} + yX_{13})$$

$$L_3 = \frac{1}{2A} (\alpha_{12} + xY_{12} + yX_{21})$$

olarak yazılabilir.

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2A} (\alpha_{23} + xY_{23} + yX_{32}) \right]$$

$$\alpha_{ij} = X_i Y_j - X_j Y_i, \quad \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x} = \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial y} = 0 \text{ olduğundan}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = \frac{1}{2A} Y_{23}$$

bulunur.

$$\frac{\partial d_1}{\partial x} = \frac{Y_{23}}{2A} (4L_1 - 1) \quad (4.4.3)$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial x} = (4L_2 - 1) \frac{\partial L_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2A} (\alpha_{31} + xY_{31} + yX_{13}) \right]$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{Y_{31}}{2A}$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial x} = \frac{Y_{31}}{2A} (4L_2 - 1) \quad (4.4.4)$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2A} (\alpha_{12} + xY_{12} + yX_{21}) \right]$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial x} = \frac{Y_{12}}{2A}$$

$$\frac{\partial d_3}{\partial x} = \frac{Y_{12}}{2A} (4L_3 - 1) \quad (4.4.5)$$

$$\frac{\partial d_4}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (4L_1 L_2)$$

$$\frac{\partial d_4}{\partial x} = 4L_1 \frac{\partial L_2}{\partial x} + 4L_2 \frac{\partial L_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial d_4}{\partial x} = \frac{4}{2A} (Y_{31} L_1 + Y_{23} L_2) \quad (4.4.6)$$

$$\frac{\partial d_5}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (4L_2 L_3)$$

$$\frac{\partial d_5}{\partial x} = 4L_2 \frac{\partial L_3}{\partial x} + 4L_3 \frac{\partial L_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial d_5}{\partial x} = \frac{4}{2A} (Y_{12} L_2 + Y_{31} L_3) \quad (4.4.7)$$

$$\frac{\partial d_6}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (4L_1 L_3)$$

$$\frac{\partial d_6}{\partial x} = 4L_1 \frac{\partial L_3}{\partial x} + 4L_3 \frac{\partial L_1}{\partial x}$$



$$\frac{\partial d_6}{\partial x} = \frac{4}{2A} (Y_{12}L_1 + Y_{23}L_3) \quad (4.4.8)$$

$$\frac{\partial D}{\partial x} = [\tilde{d}_1 \quad \tilde{d}_2 \quad \tilde{d}_3 \quad \tilde{d}_4 \quad \tilde{d}_5 \quad \tilde{d}_6]$$

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{1}{2A} [(4L_1-1)Y_{23} \quad (4L_2-1)Y_{31} \quad (4L_3-1)Y_{12} \quad 4(Y_{31}L_1+Y_{23}L_2) \\ 4(Y_{12}L_2+Y_{31}L_3) \quad 4(Y_{12}L_1+Y_{23}L_3)] \quad (4.4.9)$$

Deplasman fonksiyonunun y parametresine göre türevi alınırsa:

$$\frac{\partial D}{\partial y} = \left[ \frac{\partial d_1}{\partial y} \quad \frac{\partial d_2}{\partial y} \quad \frac{\partial d_3}{\partial y} \quad \frac{\partial d_4}{\partial y} \quad \frac{\partial d_5}{\partial y} \quad \frac{\partial d_6}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2L_1^2 - L_1) = (4L_1 - 1) \frac{\partial L_1}{\partial y}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2A} (\alpha_{23} + xY_{23} + yX_{32}) \right]$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial y} = \frac{X_{32}}{2A}$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial y} = \frac{X_{32}}{2A} (4L_1 - 1) \quad (4.4.10)$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial y} = (4L_2 - 1) \frac{\partial L_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2A} (\alpha_{31} + xY_{31} + yX_{13}) \right]$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial y} = \frac{X_{13}}{2A}$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial y} = \frac{X_{13}}{2A} (4L_2 - 1) \quad (4.4.11)$$

$$\frac{\partial d_3}{\partial y} = (4L_3 - 1) \frac{\partial L_3}{\partial y}$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2A} (\alpha_{12} + xY_{12} + yX_{21}) \right]$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial y} = \frac{X_{21}}{2A}$$

$$\frac{\partial d_3}{\partial y} = \frac{X_{21}}{2A} (4L_3 - 1) \quad (4.4.12)$$

$$\frac{\partial d_4}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (4L_1 L_2) = 4L_1 \frac{\partial L_2}{\partial y} + 4L_2 \frac{\partial L_1}{\partial y}$$

$$\frac{\partial d_4}{\partial y} = \frac{4}{2A} (X_{13} L_1 + X_{32} L_2) \quad (4.4.13)$$

$$\frac{\partial d_5}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (4L_2 L_3) = 4L_2 \frac{\partial L_3}{\partial y} + 4L_3 \frac{\partial L_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial d_5}{\partial y} = \frac{4}{2A} (X_{21} L_2 + X_{13} L_3) \quad (4.4.14)$$

$$\frac{\partial d_6}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (4L_1 L_3) = 4L_1 \frac{\partial L_3}{\partial y} + 4L_3 \frac{\partial L_1}{\partial y}$$

$$\frac{\partial d_6}{\partial y} = \frac{4}{2A} (X_{21} L_1 + X_{32} L_3) \quad (4.4.15)$$

$$\frac{\partial \underline{D}}{\partial y} = [\tilde{d}_7, \tilde{d}_8, \tilde{d}_9, \tilde{d}_{10}, \tilde{d}_{11}, \tilde{d}_{12}]$$

$$\frac{\partial \underline{D}}{\partial y} = \frac{1}{2A} [ (4L_1 - 1)X_{32}, (4L_2 - 1)X_{13}, (4L_3 - 1)X_{21}, 4(X_{13}L_1 + X_{32}L_2), 4(X_{21}L_2 + X_{13}L_3), 4(X_{21}L_1 + X_{32}L_3) ] \quad (4.4.16)$$

olur.

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial D}{\partial y} \\ \frac{\partial D}{\partial y} & \frac{\partial D}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_x \\ \underline{V}_y \end{bmatrix}$$

Süreklilik şartının açık ifadesi aşağıdaki gibi olmaktadır.

#### 4.5. Toplam Potansiyelin Minimum Olma Prensibi

Herhangi bir eleman için toplam potansiyel 4.4.2 nazara alınarak yazılırsa (Topçu, A., 1986).

$\underline{s}$ ,  $\bar{\underline{U}}$  yönündeki kuvvetler olmak üzere

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{E} \cdot \underline{\varepsilon} dv - \bar{\underline{U}}^T \cdot \underline{s} \quad (4.5.1)$$

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \bar{\underline{U}}^T \tilde{\underline{D}}^T \underline{E} \tilde{\underline{D}} \bar{\underline{U}} dv - \bar{\underline{U}}^T \underline{s}$$

$\bar{\underline{U}}$  sabit olduğundan

$$\pi = \frac{1}{2} \bar{\underline{U}}^T \int_V \tilde{\underline{D}}^T \underline{E} \tilde{\underline{D}} dv \bar{\underline{U}} - \bar{\underline{U}}^T \underline{s} \quad (4.5.2)$$

yazılabilir.

$$\underline{K} = \int_V \tilde{\underline{D}}^T \underline{E} \tilde{\underline{D}} dv \quad (4.5.3)$$

denirse

$$\pi = \frac{1}{2} \bar{\underline{U}}^T \cdot \underline{K} \bar{\underline{U}} - \bar{\underline{U}}^T \underline{s} \quad (4.5.4)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \bar{\underline{U}}} = 0 \text{ minimum şartı uygulanarak}$$

$$\underline{s} = \underline{K} \bar{\underline{U}} \quad (4.5.5)$$

elde edilir. Böylece elemanın denge denklemleri bulunmuş olur. Burada  $\underline{K}$  elemanın rijitlik matrisidir ve  $\underline{K} = \underline{K}^T$  (simetrik),  $\det \underline{K} = 0$  (singular) geçerlidir.

#### 4.6. Elastisite Matrisi

Hooke kanununda  $\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\varepsilon}$  dur. Buradaki  $\underline{E}$  matrisinin düzlem gerilme ve düzlem deformasyon halleri için iki farklı tanım mevcuttur (Cheung, Y.K., Yeo, M.F., 1979).

Düzlem gerilme hali için elastisite modülü:

$$\underline{E} = E \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu^2} & \frac{\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu^2} & \frac{1}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.6.1)$$

Düzlem deformasyon hali için elastisite modülü:

$$\underline{E} = E \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.6.2)$$

Düzlem gerilme ve düzlem deformasyon hallerini içeren ortak bir  $\underline{E}$  matrisi

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} B & C & 0 \\ C & B & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \quad (4.6.3)$$

şeklinde yazılabilir.

## 5. RİJİTLİK MATRİSİNİN HESABI

### 5.1. Elemanda Rijitlik Matrisinin Kurulması

Üçgen elemanda 4.5.3 deki hacim üzerinden olan integral

$$\underline{K} = \int_A \int_0^t \underline{\tilde{D}}^T \underline{E} \underline{\tilde{D}} dx_3 dA = t \int_A \underline{\tilde{D}}^T \underline{E} \underline{\tilde{D}} dA$$

olarak yazılabilir. Burada t sabit ve elemanın kalınlığıdır.

Elemanda 4.4.17 deki matris kısaltma ile

$$\underline{\tilde{D}} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \tilde{d}_1 & \tilde{d}_2 & \tilde{d}_3 & \tilde{d}_4 & \tilde{d}_5 & \tilde{d}_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{d}_7 & \tilde{d}_8 & \tilde{d}_9 & \tilde{d}_{10} & \tilde{d}_{11} & \tilde{d}_{12} \\ \tilde{d}_7 & \tilde{d}_8 & \tilde{d}_9 & \tilde{d}_{10} & \tilde{d}_{11} & \tilde{d}_{12} & \tilde{d}_1 & \tilde{d}_2 & \tilde{d}_3 & \tilde{d}_4 & \tilde{d}_5 & \tilde{d}_6 \end{bmatrix} \quad (5.1.1)$$

şeklini alır. 4.6.3 deki elastisite matrisi ile  $\underline{D}$  nin çarpımı:

$$\underline{E} \underline{\tilde{D}} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} B\tilde{d}_1 & B\tilde{d}_2 & B\tilde{d}_3 & B\tilde{d}_4 & B\tilde{d}_5 & B\tilde{d}_6 & C\tilde{d}_7 & C\tilde{d}_8 & C\tilde{d}_9 & C\tilde{d}_{10} & C\tilde{d}_{11} & C\tilde{d}_{12} \\ C\tilde{d}_1 & C\tilde{d}_2 & C\tilde{d}_3 & C\tilde{d}_4 & C\tilde{d}_5 & C\tilde{d}_6 & B\tilde{d}_7 & B\tilde{d}_8 & B\tilde{d}_9 & B\tilde{d}_{10} & B\tilde{d}_{11} & B\tilde{d}_{12} \\ F\tilde{d}_7 & F\tilde{d}_8 & F\tilde{d}_9 & F\tilde{d}_{10} & F\tilde{d}_{11} & F\tilde{d}_{12} & F\tilde{d}_1 & F\tilde{d}_2 & F\tilde{d}_3 & F\tilde{d}_4 & F\tilde{d}_5 & F\tilde{d}_6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} = \frac{t}{4A^2} \int_A \begin{bmatrix} \tilde{d}_1 & 0 & \tilde{d}_7 \\ \tilde{d}_2 & 0 & \tilde{d}_8 \\ \tilde{d}_3 & 0 & \tilde{d}_9 \\ \tilde{d}_4 & 0 & \tilde{d}_{10} \\ \tilde{d}_5 & 0 & \tilde{d}_{11} \\ \tilde{d}_6 & 0 & \tilde{d}_{12} \\ 0 & \tilde{d}_7 & \tilde{d}_1 \\ 0 & \tilde{d}_8 & \tilde{d}_2 \\ 0 & \tilde{d}_9 & \tilde{d}_3 \\ 0 & \tilde{d}_{10} & \tilde{d}_4 \\ 0 & \tilde{d}_{11} & \tilde{d}_5 \\ 0 & \tilde{d}_{12} & \tilde{d}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B\tilde{d}_1 & B\tilde{d}_2 & B\tilde{d}_3 & B\tilde{d}_4 & B\tilde{d}_5 & B\tilde{d}_6 & C\tilde{d}_7 & C\tilde{d}_8 & C\tilde{d}_9 & C\tilde{d}_{10} & C\tilde{d}_{11} & C\tilde{d}_{12} \\ C\tilde{d}_1 & C\tilde{d}_2 & C\tilde{d}_3 & C\tilde{d}_4 & C\tilde{d}_5 & C\tilde{d}_6 & B\tilde{d}_7 & B\tilde{d}_8 & B\tilde{d}_9 & B\tilde{d}_{10} & B\tilde{d}_{11} & B\tilde{d}_{12} \\ F\tilde{d}_7 & F\tilde{d}_8 & F\tilde{d}_9 & F\tilde{d}_{10} & F\tilde{d}_{11} & F\tilde{d}_{12} & F\tilde{d}_1 & F\tilde{d}_2 & F\tilde{d}_3 & F\tilde{d}_4 & F\tilde{d}_5 & F\tilde{d}_6 \end{bmatrix} \cdot dA$$



5.1.4 de  $\underline{K}$  matrisi içinde bulunan notasyonları inceleysek:

1. B,C,F değerleri düzlem gerilme veya düzlem deformasyon için katsayılar değiştirilecek ve programın çalışması sırasında verilecektir.

2.  $d_1, d_2, \dots, d_{12}$  değerleri de  $\underline{K}$  matrisinde sistematik olarak değişmektedir.

3.  $\underline{K}$  matrisi simetriktir. Bu durumda rijitlik matrisi terimlerinin yarısını hesaplamamız yeterli olacaktır.

$d_i$  değerleri, rijitlik matrisi terimlerindeki yerlerine yazılırsa integrali alınacak terimlerin birbirine benzediği görülür. Dolayısı ile  $\underline{K}$  integrallerini tip integralere indirgeyerek hesaplama da kolaylık sağlanabilir.

İntegral değerleri aşağıdaki formüle göre alınır (Holand, I., Bell, K., 1972).

$$\int k_{ij} = \int_A L_1^{m_1} L_2^{m_2} L_3^{m_3} dA = 2 \cdot A \frac{m_1! m_2! m_3!}{(m_1+m_2+m_3+2)!} \quad (5.1.7)$$

$\underline{K}$  rijitlik matrisinde 7 tip integral vardır:

$$\begin{aligned} 1. \int (4L_i - 1)^2 dA &= \int (16L_i^2 - 8L_i + 1) dA \\ &= 16 \cdot \frac{2!}{4!} 2A - 8 \frac{1!}{3!} 2A + A \\ &= \left( \frac{8}{3} - \frac{8}{3} + 1 \right) A \end{aligned}$$

$$\int (4L_i - 1)^2 dA = A$$

$$\begin{aligned} 2. \int (4L_i - 1)(4L_j - 1) dA &= \int (16L_i L_j - 4L_i - 4L_j + 1) dA \\ &= 16 \cdot \frac{1!}{4!} 2A - 4 \cdot \frac{1!}{3!} 2A - 4 \cdot \frac{1!}{3!} 2A + A \\ &= \left( \frac{4}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} + 1 \right) A \end{aligned}$$

$$\int (4L_i - 1)(4L_j - 1) dA = -\frac{A}{3}$$



$$\begin{aligned}
3. \quad \int (4L_i - 1)(aL_i + bL_j) dA &= \int (a4L_i^2 + b4L_iL_j - aL_i - bL_j) dA \\
&= a \cdot 4 \cdot \frac{2!}{4!} 2A + b \cdot 4 \cdot \frac{1!}{4!} 2A - a \cdot \frac{1!}{3!} 2A - b \cdot \frac{1!}{3!} 2A \\
&= \left( a \cdot \frac{2}{3} + b \frac{1}{3} - a \frac{1}{3} - b \frac{1}{3} \right) A
\end{aligned}$$

$$\int (4L_i - 1)(aL_i + bL_j) dA = a \cdot \frac{A}{3}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad \int (4L_i - 1)(aL_j + bL_k) dA &= \int (a \cdot 4L_iL_j + b4 \cdot L_iL_k - aL_j - bL_k) dA \\
&= a \cdot 4 \cdot \frac{1!}{4!} 2A + b \cdot 4 \cdot \frac{1!}{4!} 2A - a \cdot \frac{1!}{3!} 2A - b \cdot \frac{1!}{3!} 2A \\
&= \left( \frac{a}{3} + \frac{b}{3} - \frac{a}{3} - \frac{b}{3} \right) A
\end{aligned}$$

$$\int (4L_i - 1)(aL_j + bL_k) dA = 0$$

$$\begin{aligned}
5. \quad \int (aL_i + bL_j)^2 dA &= \int (a^2L_i^2 + b^2L_j^2 + 2abL_iL_j) dA \\
&= a^2 \cdot \frac{2!}{4!} 2A + b^2 \frac{2!}{4!} 2A + 2a \cdot b \frac{1!}{4!} 2A \\
&= \left( \frac{a^2}{6} + \frac{b^2}{6} + \frac{ab}{6} \right) A
\end{aligned}$$

$$\int (aL_i + bL_j)^2 dA = (a^2 + b^2 + ab) \frac{A}{6}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad \int (aL_i + bL_j)(cL_i + dL_k) dA &= \int (acL_i^2 + adL_iL_k + bcL_jL_i + bdL_jL_k) dA \\
&= ac \frac{2!}{4!} 2A + ad \frac{1!}{4!} 2A + bc \frac{1!}{4!} 2A + bd \frac{1!}{4!} 2A \\
&= \left( ac \frac{2}{12} + ad \frac{1}{12} + bc \frac{1}{12} + bd \frac{1}{12} \right) A
\end{aligned}$$

$$\int (aL_i + bL_j)(cL_i + dL_k) dA = (2ac + ad + bc + bd) \frac{A}{12}$$

$$\begin{aligned}
7. \quad \int (aL_i + bL_j)(cL_i + dL_j) dA &= \int (acL_i^2 + adL_iL_j + bcL_iL_j + bdL_j^2) dA \\
&= ac \frac{2!}{4!} 2A + ad \frac{1!}{4!} 2A + bc \frac{1!}{4!} 2A + bd \frac{2!}{4!} 2A \\
&= \left( ac \frac{2}{12} + ad \frac{1}{12} + bc \frac{1}{12} + bd \frac{2}{12} \right) A
\end{aligned}$$

$$\int (aL_i + bL_j)(cL_i + dL_j) dA = (2ac + ad + bc + 2bd) \frac{A}{12}$$

Kısaltılmış integral terimleri özet olarak:

$$\int (4L_i - 1)^2 dA = A$$

$$\int (4L_i - 1)(4L_j - 1) dA = -\frac{A}{3}$$

$$\int (4L_i - 1)(aL_i + bL_j) dA = a \cdot \frac{A}{3}$$

$$\int (4L_i - 1)(aL_j + bL_k) dA = 0$$

$$\int (aL_i + bL_j)^2 dA = (a^2 + b^2 + ab) \frac{A}{6}$$

$$\int (aL_i + bL_j)(cL_i + dL_k) dA = (2ac + ad + bc + bd) \frac{A}{12}$$

$$\int (aL_i + bL_j)(cL_i + dL_j) dA = (2ac + ad + bc + 2bd) \frac{A}{12}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece rijitlik matrisi terimlerini hesaplarırken yukardaki kısaltılmış integrallerden yararlanılabilir.

## 5.2. Rijitlik Matrisi Terimlerinin Hesabı

$$\begin{aligned} \int k_{11} dA &= B \int \tilde{d}_1^2 dA + F \int \tilde{d}_7^2 dA \\ &= B \int (4L_1 - 1)^2 Y_{23}^2 dA + F \int (4L_1 - 1)^2 X_{32}^2 dA \\ &= (BY_{23}^2 + FX_{32}^2) A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int k_{21} dA &= B \int \tilde{d}_2 \tilde{d}_1 dA + F \int \tilde{d}_8 \tilde{d}_7 dA \\ &= B \int (4L_2 - 1)(4L_1 - 1) Y_{31} \cdot Y_{23} \cdot dA + F \int (4L_2 - 1)(4L_1 - 1) X_{13} X_{32} dA \\ &= -(BY_{31} Y_{23} + F X_{13} X_{32}) \cdot \frac{A}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int k_{22} dA &= B \int \tilde{d}_2 \tilde{d}_2 dA + F \int \tilde{d}_8 \tilde{d}_8 dA \\ &= B \int (4L_2 - 1)^2 \cdot Y_{31}^2 dA + F \int (4L_2 - 1) X_{13}^2 dA \\ &= (BY_{31}^2 + FX_{13}^2) A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{3,1}dA &= B \int \tilde{d}_3 \tilde{d}_1 dA + F \int \tilde{d}_9 \tilde{d}_7 dA \\
&= BY_{1,2} Y_{2,3} \int (4L_3 - 1)(4L_1 - 1) dA + F X_{2,1} X_{3,2} \int (4L_3 - 1)(4L_1 - 1) dA \\
&= -(BY_{1,2} Y_{2,3} + F X_{2,1} X_{3,2}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{3,2}dA &= B \int \tilde{d}_3 \tilde{d}_2 dA + F \int \tilde{d}_9 \tilde{d}_8 dA \\
&= BY_{1,2} Y_{3,1} \int (4L_3 - 1)(4L_2 - 1) dA + F X_{2,1} X_{1,3} \int (4L_3 - 1)(4L_2 - 1) dA \\
&= -(BY_{1,2} Y_{3,1} + F X_{2,1} X_{1,3}) \frac{A}{3} \\
&= -(BY_{1,2} Y_{3,1} + F X_{2,1} X_{1,3}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{3,3}dA &= B \int \tilde{d}_3 \tilde{d}_3 dA + F \int \tilde{d}_9 \tilde{d}_9 dA \\
&= BY_{1,2}^2 \int (4L_1 - 1)^2 dA + F X_{2,1}^2 \int (4L_1 - 1)^2 dA \\
&= -(BY_{1,2}^2 + F X_{2,1}^2) A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{4,1}dA &= B \int \tilde{d}_4 \tilde{d}_1 dA + F \int \tilde{d}_{1,0} \tilde{d}_7 dA \\
&= 4 \cdot Y_{2,3} B \int (Y_{3,1} L_1 + Y_{2,3} L_2)(4L_1 - 1) dA + F 4 X_{3,2} \int (X_{1,3} L_1 + X_{3,2} L_2)(4L_1 - 1) dA \\
&= 4(BY_{2,3} Y_{3,1} + F X_{3,2} X_{1,3}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{4,2}dA &= B \int \tilde{d}_4 \tilde{d}_2 dA + F \int \tilde{d}_{1,0} \tilde{d}_8 dA \\
&= 4 \cdot Y_{3,1} B \int (Y_{3,1} L_1 + Y_{2,3} L_2)(4L_2 - 1) dA + 4 F X_{1,3} \int (X_{1,3} L_1 + X_{3,2} L_2)(4L_2 - 1) dA \\
&= 4(BY_{3,1} \cdot Y_{2,3} + F X_{1,3} X_{3,2}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{4,3}dA &= B \int \tilde{d}_4 \tilde{d}_3 dA + F \int \tilde{d}_{1,0} \tilde{d}_9 dA \\
&= 4BY_{1,2} \int (Y_{3,1} L_1 + Y_{2,3} L_2)(4L_3 - 1) dA + 4FX_{2,1} \int (X_{1,3} L_1 + X_{3,2} L_2)(4L_3 - 1) dA \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{4,4}dA &= B \int \tilde{d}_4 \tilde{d}_4 dA + F \int \tilde{d}_{1,0} \tilde{d}_{1,0} dA \\
&= 16 B \int (Y_{3,1} L_1 + Y_{2,3} L_2)^2 dA + F \cdot 16 \int (X_{1,3} L_1 + X_{3,2} L_2)^2 dA \\
&= 16 [B(Y_{3,1}^2 + Y_{2,3}^2 + Y_{3,1} Y_{2,3}) + F(X_{1,3}^2 + X_{3,2}^2 + X_{1,3} X_{3,2})] \frac{A}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{5,1} dA &= B \int \tilde{d}_5 \tilde{d}_1 dA + \int \tilde{d}_{1,1} \tilde{d}_7 dA \\
&= 4BY_{23} \int (Y_{12}L_2 + Y_{31}L_3)(4L_1 - 1)dA + F4X_{32} \int (X_{21}L_2 + X_{13}L_3)(4L_1 - 1)dA \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{5,2} dA &= B \int \tilde{d}_5 \tilde{d}_2 dA + F \int \tilde{d}_{1,1} \tilde{d}_8 dA \\
&= 4BY_{31} \int (Y_{12}L_2 + Y_{31}L_3)(4L_2 - 1)dA + FX_{13} \int (X_{21}L_2 + X_{13}L_3)(4L_2 - 1)dA \\
&= 4(BY_{31} \cdot Y_{12} + FX_{13}X_{21}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{5,3} dA &= B \int \tilde{d}_5 \tilde{d}_3 dA + F \int \tilde{d}_{1,1} \tilde{d}_9 dA \\
&= 4B Y_{12} \int (Y_{12}L_2 + Y_{31}L_3)(4L_3 - 1)dA + FX_{21} \int (X_{21}L_2 + X_{13}L_3)(4L_3 - 1)dA \\
&= 4(BY_{12} Y_{31} + FX_{21}X_{13}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{5,4} dA &= B \int \tilde{d}_5 \tilde{d}_4 dA + F \int \tilde{d}_{1,1} \tilde{d}_{10} dA \\
&= 16B \int (Y_{12}L_2 + Y_{31}L_3)(Y_{31}L_1 + Y_{23}L_2)dA + F16 \int (X_{21}L_2 + X_{13}L_3)(X_{13}L_1 + X_{32}L_2)dA \\
&= 16 [B(Y_{12}Y_{31} + 2Y_{12}Y_{23} + Y_{31}^2 + Y_{31}Y_{23}) + F(X_{21}X_{13} + 2X_{21}X_{32} + X_{13}^2 + X_{13}X_{32})] \frac{A}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{5,5} dA &= B \int \tilde{d}_5 \tilde{d}_5 dA + F \int \tilde{d}_{1,1} \tilde{d}_{11} dA \\
&= 16B \int (Y_{12}L_2 + Y_{31}L_3)^2 dA + 16F \int (X_{21}L_2 + X_{13}L_3)^2 dA \\
&= 16 [B(Y_{12}^2 + Y_{31}^2 + Y_{12}Y_{31}) + F(X_{21}^2 + X_{13}^2 + X_{21}X_{13})] \frac{A}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{6,1} dA &= B \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_1 dA + F \int \tilde{d}_{1,2} \tilde{d}_7 dA \\
&= 4BY_{23} \int (Y_{12}L_1 + Y_{23}L_3)(4L_1 - 1)dA + 4FX_{32} \int (X_{21}L_1 + X_{32}L_3)(4L_1 - 1)dA \\
&= 4(BY_{23}Y_{12} + FX_{32}X_{21}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{6,2} dA &= B \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_2 dA + F \int \tilde{d}_{1,2} \tilde{d}_8 dA \\
&= 4Y_{31}B \int (Y_{21}L_1 + Y_{23}L_3)(4L_2 - 1)dA + 4FX_{13} \int (X_{21}L_1 + X_{32}L_3)(4L_2 - 1)dA \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{6,3} dA &= B \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_3 dA + F \int \tilde{d}_{1,2} \tilde{d}_9 dA \\
&= 4BY_{1,2} \int (Y_{1,2}L_1 + Y_{2,3}L_3)(4L_3 - 1) dA + 4FX_{2,1} \int (X_{2,1}L_1 + X_{3,2}L_3)(4L_3 - 1) dA \\
&= 4(BY_{1,2}Y_{2,3} + FX_{2,1}X_{3,2}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{6,4} dA &= B \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_3 dA + F \int \tilde{d}_{1,2} \tilde{d}_{1,0} dA \\
&= 16B \int (Y_{1,2}L_1 + Y_{2,3}L_3)(Y_{3,1}L_1 + Y_{2,3}L_2) dA + 16F \int (X_{2,1}L_1 + X_{3,2}L_3)(X_{1,3}L_1 + X_{3,2}L_2) dA \\
&= 16B \left[ (2Y_{1,2}Y_{1,3} + Y_{1,2}Y_{2,3} + Y_{2,3}Y_{3,1} + Y_{2,3}^2) + F(2X_{2,1}X_{1,3} + X_{2,1}X_{3,2} + X_{3,2}X_{1,3} + X_{3,2}^2) \right] \frac{A}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{6,5} dA &= B \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_5 dA + F \int \tilde{d}_{1,2} \tilde{d}_{1,1} dA \\
&= 16 \int B(Y_{1,2}L_1 + Y_{2,3}L_3)(Y_{1,2}L_2 + Y_{3,1}L_3) dA + 16F \int (X_{2,1}L_1 + X_{3,2}L_3)(X_{2,1}L_2 + X_{1,3}L_3) dA \\
&= 16 \left[ B(Y_{1,2}^2 + Y_{1,2}Y_{3,1} + Y_{2,3}Y_{1,2} + 2Y_{2,3}Y_{3,1}) + F(X_{2,1}^2 + X_{2,1}X_{1,3} + X_{3,2}X_{2,1} + 2X_{3,2}X_{1,3}) \right] \frac{A}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{6,6} dA &= B \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_6 dA + F \int \tilde{d}_{1,2} \tilde{d}_{1,2} dA \\
&= 16 \int B(Y_{1,2}L_1 + Y_{2,3}L_3)^2 dA + F \int (X_{2,1}L_1 + X_{3,2}L_3)^2 dA \\
&= 16B \left[ (Y_{1,2}^2 + Y_{2,3}^2 + Y_{1,2}Y_{2,3}) + F(X_{2,1}^2 + X_{3,2}^2 + X_{3,1}X_{3,2}) \right] \frac{A}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{7,1} dA &= C \int \tilde{d}_7 \tilde{d}_1 dA + F \int \tilde{d}_1 \tilde{d}_7 dA = (C+F) \int \tilde{d}_7 \tilde{d}_1 dA \\
&= (C+F) X_{3,2} Y_{2,3} \int (4L_1 - 1)^2 dA \\
&= (C+F) X_{3,2} Y_{2,3} A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{7,2} dA &= C \int \tilde{d}_7 \tilde{d}_2 dA + F \int \tilde{d}_1 \tilde{d}_8 dA \\
&= CX_{3,2} Y_{3,1} \int (4L_1 - 1)(4L_2 - 1) dA + FY_{2,3} X_{1,3} \int (4L_1 - 1)(4L_2 - 1) dA \\
&= - \left[ (CX_{3,2} Y_{3,1} + FY_{2,3} X_{1,3}) \right] \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{7,3} dA &= C \int \tilde{d}_7 \tilde{d}_3 dA + F \int \tilde{d}_1 \tilde{d}_9 dA \\
&= CX_{32} Y_{12} \int (4L_1 - 1)(4L_3 - 1) dA + FY_{23} X_{21} \int (4L_1 - 1)(4L_3 - 1) dA \\
&= -[CX_{32} Y_{12} + FY_{23} X_{21}] \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{7,4} dA &= C \int \tilde{d}_7 \tilde{d}_4 dA + F \int \tilde{d}_1 \tilde{d}_{10} dA \\
&= CX_{32} 4 \int (4L_1 - 1)(Y_{31} L_1 + Y_{23} L_2) dA + FY_{23} 4 \int (4L_1 - 1)(X_{13} L_1 + X_{32} L_2) dA \\
&= 4[C \cdot X_{32} Y_{31} + FY_{23} X_{13}] \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{7,5} dA &= C \int \tilde{d}_7 \tilde{d}_5 dA + F \int \tilde{d}_1 \tilde{d}_{11} dA \\
&= CX_{32} \cdot 4 \int (4L_1 - 1)(Y_{12} L_2 + Y_{31} L_3) dA + FY_{23} 4 \int (4L_1 - 1)(X_{21} L_2 + X_{13} L_3) dA \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{7,6} dA &= C \int \tilde{d}_7 \tilde{d}_6 dA + F \int \tilde{d}_1 \tilde{d}_{12} dA \\
&= CX_{32} \cdot 4 \int (4L_1 - 1)(Y_{12} L_2 + Y_{23} L_3) dA + FY_{23} \cdot 4 \int (4L_1 - 1)(X_{21} L_2 + X_{32} L_3) dA \\
&= 4[CX_{32} Y_{12} + FY_{23} X_{21}] \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{7,7} dA &= B \int \tilde{d}_7 \tilde{d}_7 dA + F \int \tilde{d}_1 \tilde{d}_1 dA \\
&= BX_{32}^2 \int (4L_1 - 1)^2 dA + FY_{23}^2 \int (4L_1 - 1)^2 dA \\
&= (BX_{32}^2 + FY_{23}^2) A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{8,1} dA &= C \int \tilde{d}_8 \tilde{d}_1 dA + F \int \tilde{d}_2 \tilde{d}_7 dA \\
&= CX_{13} Y_{23} \int (4L_2 - 1)(4L_1 - 1) dA + FY_{31} X_{32} \int (4L_2 - 1)(4L_1 - 1) dA \\
&= -(CX_{13} Y_{23} + FY_{31} X_{32}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{8,2} dA &= C \int \tilde{d}_8 \tilde{d}_2 dA + F \int \tilde{d}_2 \tilde{d}_8 dA \\
&= CX_{13} Y_{31} \int (4L_2 - 1)^2 dA + FY_{31} X_{13} \int (4L_2 - 1)^2 dA \\
&= X_{13} Y_{31} (C + F) A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{8,3} dA &= C \int \tilde{d}_8 \tilde{d}_3 dA + F \int \tilde{d}_2 \tilde{d}_9 dA \\
&= CX_{1,3} Y_{1,2} \int (4L_2 - 1)(4L_3 - 1) dA + FY_{3,1} X_{2,1} \int (4L_2 - 1)(4L_3 - 1) dA \\
&= -(CX_{1,3} Y_{1,2} + FY_{3,1} X_{2,1}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{8,4} dA &= C \int \tilde{d}_8 \tilde{d}_4 dA + F \int \tilde{d}_2 \tilde{d}_{10} dA \\
&= CX_{1,3} \cdot 4 \int (4L_2 - 1)(Y_{3,1} L_1 + Y_{2,3} L_2) dA + FY_{3,1} \cdot 4 \int (4L_2 - 1)(X_{1,3} L_1 + X_{3,2} L_2) dA \\
&= 4 [CX_{1,3} Y_{2,3} + FY_{3,1} X_{3,2}] \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{8,5} dA &= C \int \tilde{d}_8 \tilde{d}_5 dA + F \int \tilde{d}_2 \tilde{d}_{11} dA \\
&= CX_{1,3} 4 \int (4L_2 - 1)(Y_{1,2} L_2 + Y_{3,1} L_3) dA + FY_{3,1} 4 \int (4L_2 - 1)(X_{2,1} L_2 + X_{1,3} L_3) dA \\
&= 4 [CX_{1,3} Y_{1,2} + FY_{3,1} X_{2,1}] \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{8,6} dA &= C \int \tilde{d}_8 \tilde{d}_6 dA + F \int \tilde{d}_2 \tilde{d}_{12} dA \\
&= CX_{1,3} 4 \int (4L_2 - 1)(Y_{1,2} L_1 + Y_{2,3} L_3) dA + FY_{3,1} 4 \int (4L_2 - 1)(X_{2,1} L_1 + X_{3,2} L_3) dA \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{8,7} dA &= B \int \tilde{d}_8 \tilde{d}_7 dA + F \int \tilde{d}_2 \tilde{d}_1 dA \\
&= BX_{1,2} X_{3,2} \int (4L_2 - 1)(4L_1 - 1) dA + FY_{3,1} Y_{2,3} \int (4L_2 - 1)(4L_1 - 1) dA \\
&= -(BX_{1,3} X_{3,2} + FY_{3,1} Y_{2,3}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{8,8} dA &= B \int \tilde{d}_8 \tilde{d}_8 dA + F \int \tilde{d}_2 \tilde{d}_2 dA \\
&= BX_{1,3}^2 \int (4L_2 - 1)^2 dA - FY_{3,1}^2 \int (4L_2 - 1) dA \\
&= (BX_{1,3}^2 + FY_{3,1}^2) A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{9,1} dA &= C \int \tilde{d}_9 \tilde{d}_1 dA + F \int \tilde{d}_3 \tilde{d}_7 dA \\
&= CX_{2,1} Y_{2,3} \int (4L_3 - 1)(4L_1 - 1) dA + FY_{1,2} X_{3,2} \int (4L_3 - 1)(4L_1 - 1) dA \\
&= -(CX_{2,1} Y_{2,3} + FY_{1,2} X_{3,2}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{9,2} dA &= C \int \tilde{d}_9 \tilde{d}_2 dA + F \int \tilde{d}_3 \tilde{d}_8 dA \\
&= CX_{2,1} Y_{3,1} \int (4L_3 - 1)(4L_2 - 1) dA + FY_{1,2} X_{1,3} \int (4L_3 - 1)(4L_2 - 1) dA \\
&= -(CX_{2,1} Y_{3,1} + FY_{1,2} X_{1,3}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{9,3} dA &= C \int \tilde{d}_9 \tilde{d}_3 dA + F \int \tilde{d}_3 \tilde{d}_9 dA \\
&= CX_{2,1} Y_{1,2} \int (4L_3 - 1)^2 dA + FY_{1,2} X_{2,1} \int (4L_3 - 1)^2 dA \\
&= X_{2,1} Y_{1,2} (C + F) A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{9,4} dA &= C \int \tilde{d}_9 \tilde{d}_4 dA + F \int \tilde{d}_3 \tilde{d}_{10} dA \\
&= CX_{2,1} 4 \int (4L_3 - 1)(Y_{3,1} L_1 + Y_{2,3} L_2) dA + FY_{1,2} 4 \int (4L_3 - 1)(X_{1,3} L_1 + X_{3,2} L_2) dA \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{9,5} dA &= C \int \tilde{d}_9 \tilde{d}_5 dA + F \int \tilde{d}_3 \tilde{d}_{11} dA \\
&= CX_{2,1} 4 \int (4L_3 - 1)(Y_{1,2} L_2 + Y_{3,1} L_3) dA + FY_{1,2} 4 \int (4L_3 - 1)(X_{2,1} L_2 + X_{1,3} L_3) dA \\
&= 4(CX_{2,1} Y_{3,1} + FY_{1,2} X_{1,3}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{9,6} dA &= C \int \tilde{d}_9 \tilde{d}_6 dA + F \int \tilde{d}_3 \tilde{d}_{12} dA \\
&= CX_{2,1} 4 \int (4L_3 - 1)(Y_{1,2} L_1 + Y_{2,3} L_3) dA + FY_{1,2} 4 \int (4L_3 - 1)(X_{2,1} L_1 + X_{3,2} L_3) dA \\
&= 4(CX_{2,1} Y_{2,3} + FY_{1,2} X_{3,2}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{9,7} dA &= B \int \tilde{d}_9 \tilde{d}_7 dA + F \int \tilde{d}_3 \tilde{d}_1 dA \\
&= X_{2,1} X_{3,2} B \int (4L_3 - 1)(4L_1 - 1) dA + FY_{2,1} Y_{2,3} \int (4L_3 - 1)(4L_1 - 1) dA \\
&= -(BX_{2,1} X_{3,2} + FY_{1,2} Y_{2,3}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\int k_{9,u} dA &= B \int \tilde{d}_9 \tilde{d}_u dA + F \int \tilde{d}_3 \tilde{d}_2 dA \\
&= BX_{21} X_{13} \int (4L_3 - 1)(4L_2 - 1) dA + FY_{12} Y_{31} \int (4L_3 - 1)(4L_2 - 1) dA \\
&= -(BX_{21} X_{13} + FY_{12} Y_{31}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{9,v} dA &= B \int \tilde{d}_9 \tilde{d}_v dA + F \int \tilde{d}_3 \tilde{d}_3 dA \\
&= BX_{21}^2 \int (4L_3 - 1)^2 dA + FY_{12}^2 \int (4L_3 - 1)^2 dA \\
&= (BX_{21}^2 + FY_{12}^2) A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{10,1} dA &= C \int \tilde{d}_{10} \tilde{d}_1 dA + F \int \tilde{d}_4 \tilde{d}_7 dA \\
&= C4Y_{23} \int (X_{13} L_1 + X_{32} L_2)(4L_1 - 1) dA + F4X_{32} \int (Y_{31} L_1 + Y_{23} L_2)(4L_1 - 1) dA \\
&= 4(CY_{23} X_{13} + FX_{32} Y_{31}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{10,2} dA &= C \int \tilde{d}_{10} \tilde{d}_2 dA + F \int \tilde{d}_4 \tilde{d}_u dA \\
&= C4Y_{31} \int (X_{13} L_1 + X_{32} L_2)(4L_2 - 1) dA + F4X_{13} \int (Y_{31} L_1 + Y_{23} L_2)(4L_2 - 1) dA \\
&= 4(CY_{31} X_{32} + FX_{13} Y_{23}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{10,3} dA &= C \int \tilde{d}_{10} \tilde{d}_3 dA + F \int \tilde{d}_4 \tilde{d}_9 dA \\
&= C4Y_{12} \int (X_{13} L_1 + X_{32} L_2)(4L_3 - 1) dA + F4X_{21} \int (Y_{31} L_1 + Y_{23} L_2)(4L_3 - 1) dA \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{10,4} dA &= C \int \tilde{d}_{10} \tilde{d}_4 dA + F \int \tilde{d}_4 \tilde{d}_{10} dA \\
&= C16 \int (X_{13} L_1 + X_{32} L_2)(Y_{31} L_1 + Y_{23} L_2) dA + F16 \int (Y_{31} L_1 + Y_{23} L_2)(X_{13} L_1 + X_{32} L_2) dA \\
&= 16(C+F)(2X_{13} Y_{31} + X_{13} Y_{23} + X_{32} Y_{31} + 2X_{32} Y_{23}) \frac{A}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{10,5} dA &= C \int \tilde{d}_{10} \tilde{d}_5 dA + F \int \tilde{d}_4 \tilde{d}_{11} dA \\
&= C16 \int (X_{13} L_1 + X_{32} L_2)(Y_{12} L_2 + Y_{31} L_3) dA + F16 \int (Y_{31} L_1 + Y_{23} L_2)(X_{21} L_2 + X_{13} L_3) dA \\
&= 16[C(X_{13} Y_{12} + X_{13} Y_{31} + 2X_{32} Y_{12} + X_{32} Y_{31}) + F(Y_{31} X_{21} + Y_{31} X_{13} + 2Y_{23} X_{21} + Y_{23} X_{13})] \frac{A}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{10,6} dA &= C \int \tilde{d}_{10} \tilde{d}_6 dA + F \int \tilde{d}_4 \tilde{d}_2 dA \\
&= C16 \int (X_{13} L_1 + X_{32} L_2)(Y_{12} L_1 + Y_{23} L_3) dA + F16 \int (Y_{31} L_1 + Y_{23} L_2)(X_{21} L_1 + X_{32} L_3) dA \\
&= 16[C(2X_{13} Y_{12} + X_{13} Y_{23} + X_{32} Y_{12} + X_{32} Y_{23}) + F(2Y_{31} X_{21} + Y_{31} X_{32} + Y_{23} X_{21} + Y_{23} X_{32})] \frac{A}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{107} dA &= B \int \tilde{d}_{10} \tilde{d}_7 dA + F \int \tilde{d}_4 \tilde{d}_1 dA \\
&= 4X_{32} B \int (X_{13} L_1 + X_{32} L_2) (4L_1 - 1) dA + F 4Y_{23} \int (Y_{31} L_1 + Y_{23} L_2) (4L_1 - 1) dA \\
&= 4(BX_{32} X_{13} + FY_{23} Y_{31}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{108} dA &= B \int \tilde{d}_{10} \tilde{d}_8 dA + F \int \tilde{d}_4 \tilde{d}_2 dA \\
&= 4BX_{13} \int (X_{13} L_1 + X_{32} L_2) (4L_2 - 1) dA + F 4Y_{31} \int (Y_{31} L_1 + Y_{23} L_2) (4L_2 - 1) dA \\
&= 4(BX_{13} X_{32} + FY_{31} Y_{23}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{109} dA &= B \int \tilde{d}_{10} \tilde{d}_9 dA + F \int \tilde{d}_4 \tilde{d}_3 dA \\
&= 4BX_{21} \int (X_{13} L_1 + X_{32} L_2) (4L_3 - 1) dA + F 4Y_{12} \int (Y_{31} L_1 + Y_{23} L_2) (4L_3 - 1) dA \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{1010} dA &= B \int \tilde{d}_{10} \tilde{d}_{10} dA + F \int \tilde{d}_4 \tilde{d}_4 dA \\
&= 16B \int (X_{13} L_1 + X_{32} L_2)^2 dA + F 16 \int (Y_{31} L_1 + Y_{23} L_2)^2 dA \\
&= 16[B(X_{13}^2 + X_{32}^2 + X_{13} X_{32}) + F(Y_{31}^2 + Y_{23}^2 + Y_{31} Y_{23})] \frac{A}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{111} dA &= C \int \tilde{d}_{11} \tilde{d}_{10} dA + F \int \tilde{d}_5 \tilde{d}_1 dA \\
&= C 4Y_{23} \int (X_{21} L_2 + X_{13} L_3) (4L_1 - 1) dA + F 4X_{32} \int (Y_{12} L_2 + Y_{31} L_3) (4L_1 - 1) dA \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{112} dA &= C \int \tilde{d}_{11} \tilde{d}_2 dA + F \int \tilde{d}_5 \tilde{d}_8 dA \\
&= C 4Y_{31} \int (X_{21} L_2 + X_{13} L_3) (4L_2 - 1) dA + F 4X_{13} \int (Y_{12} L_2 + Y_{31} L_3) (4L_2 - 1) dA \\
&= 4(CY_{31} X_{21} + FX_{13} Y_{12}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{113} dA &= C \int \tilde{d}_{11} \tilde{d}_3 dA + F \int \tilde{d}_5 \tilde{d}_9 dA \\
&= C 4Y_{12} \int (X_{21} L_2 + X_{13} L_3) (4L_3 - 1) dA + F X_{21} \int (Y_{12} L_2 + Y_{31} L_3) (4L_3 - 1) dA \\
&= 4(CY_{12} X_{13} + FX_{21} Y_{31}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{114} dA &= C \int \tilde{d}_{11} \tilde{d}_4 dA + F \int \tilde{d}_5 \tilde{d}_{10} dA \\
&= C_{16} \int (X_{21} L_2 + X_{13} L_3) (Y_{31} L_1 + Y_{23} L_2) dA + F 16 \int (Y_{12} L_2 + Y_{31} L_3) (X_{13} L_1 + X_{32} L_2) dA \\
&= 16[C(X_{21} Y_{31} + 2X_{21} Y_{23} + X_{13} Y_{31} + X_{13} Y_{32}) + F(Y_{12} X_{13} + 2Y_{12} X_{32} + Y_{31} X_{13} + Y_{31} X_{32})] \frac{A}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{115} dA &= C \int \tilde{d}_{11} \tilde{d}_5 dA + F \int \tilde{d}_5 \tilde{d}_{11} dA = (C+F) \int \tilde{d}_{11} \tilde{d}_5 dA \\
&= (C+F) 16 \int (X_{21} L_2 + X_{13} L_3)(Y_{12} L_2 + Y_{31} L_3) dA \\
&= 16(C+F)(2X_{21} Y_{12} + X_{21} Y_{31} + X_{13} Y_{12} + 2X_{13} Y_{31}) \frac{A}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{116} dA &= C \int \tilde{d}_{11} \tilde{d}_6 dA + F \int \tilde{d}_5 \tilde{d}_{12} dA \\
&= C 16 \int (X_{21} L_2 + X_{13} L_3)(Y_{12} L_1 + Y_{23} L_3) dA + F 16 \int (Y_{12} L_2 + Y_{31} L_3)(X_{21} L_1 + X_{32} L_3) dA \\
&= 16 [C(X_{21} Y_{12} + X_{21} Y_{23} + X_{13} Y_{12} + 2X_{13} Y_{23}) + F(Y_{12} X_{21} + Y_{12} X_{32} + Y_{31} X_{21} + 2Y_{31} X_{32})] \frac{A}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{117} dA &= B \int \tilde{d}_{11} \tilde{d}_7 dA + F \int \tilde{d}_5 \tilde{d}_1 dA \\
&= B 4 X_{32} \int (X_{21} L_2 + X_{13} L_3)(4L_1 - 1) dA + F Y_{23} \int (Y_{12} L_2 + Y_{31} L_3)(4L_1 - 1) dA \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{118} dA &= B \int \tilde{d}_{11} \tilde{d}_8 dA + F \int \tilde{d}_5 \tilde{d}_2 dA \\
&= 4B X_{13} \int (X_{21} L_2 + X_{13} L_3)(4L_1 - 1) dA + F Y_{31} \int (Y_{12} L_2 + Y_{31} L_3)(4L_2 - 1) dA \\
&= 4(BX_{13} X_{21} + FY_{31} Y_{12}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{119} dA &= B \int \tilde{d}_{11} \tilde{d}_9 dA + F \int \tilde{d}_5 \tilde{d}_3 dA \\
&= 4B X_{21} \int (X_{21} L_2 + X_{13} L_3)(4L_3 - 1) dA + 4F Y_{12} \int (Y_{12} L_2 + Y_{31} L_3)(4L_3 - 1) dA \\
&= 4(BX_{21} X_{13} + FY_{12} Y_{31}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{1110} dA &= B \int \tilde{d}_{11} \tilde{d}_{10} dA + F \int \tilde{d}_5 \tilde{d}_4 dA \\
&= 16B \int (X_{21} L_2 + X_{13} L_3)(X_{13} L_1 + X_{32} L_2) dA + F \int (Y_{12} L_2 + Y_{31} L_3)(Y_{31} L_1 + Y_{23} L_2) dA \\
&= 16 [B(X_{21} X_{13} + 2X_{21} X_{32} + X_{13}^2 + X_{13} X_{32}) + F(Y_{12} Y_{31} + 2Y_{12} Y_{23} + Y_{31}^2 + Y_{31} Y_{23})] \frac{A}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{1111} dA &= B \int \tilde{d}_{11} \tilde{d}_{11} dA + F \int \tilde{d}_5 \tilde{d}_5 dA \\
&= 16B \int (X_{21} L_2 + X_{13} L_2)^2 dA + F 16 \int (Y_{12} L_2 + Y_{31} L_3)^2 dA \\
&= 16 [B(X_{21}^2 + X_{13}^2 + X_{21} X_{13}) + F(Y_{12}^2 + Y_{31}^2 + Y_{12} Y_{31})] \frac{A}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{121} dA &= C \int \tilde{d}_{12} \tilde{d}_1 dA + F \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_7 dA \\
&= C 4 Y_{23} \int (X_{21} L_1 + X_{32} L_3)(4L_1 - 1) dA + 4F X_{32} \int (Y_{12} L_1 + Y_{23} L_3)(4L_1 - 1) dA \\
&= 4(CY_{23} X_{21} + FX_{32} Y_{12}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{122} dA &= C \int \tilde{d}_{12} \tilde{d}_2 dA + F \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_8 dA \\
&= C4Y_{31} \int (X_{21}L_1 + X_{32}L_3)(4L_2 - 1) dA + F4X_{13} \int (Y_{12}L_1 + Y_{23}L_3)(4L_2 - 1) dA \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{123} dA &= C \int \tilde{d}_{12} \tilde{d}_3 dA + F \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_9 dA \\
&= C4Y_{12} \int (X_{21}L_1 + X_{32}L_3)(4L_3 - 1) dA + F4X_{21} \int (Y_{12}L_1 + Y_{23}L_3)(4L_3 - 1) dA \\
&= 4(CY_{12}X_{32} + FX_{21}Y_{23}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{124} dA &= C \int \tilde{d}_{12} \tilde{d}_4 dA + F \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_{10} dA \\
&= 16C \int (X_{21}L_1 + X_{32}L_3)(Y_{31}L_1 + Y_{23}L_2) dA + F16 \int (Y_{12}L_1 + Y_{23}L_3)(X_{13}L_1 + X_{32}L_2) dA \\
&= 16[C(2X_{21}Y_{31} + X_{21}Y_{23} + X_{32}Y_{31} + X_{32}Y_{23}) + F(2Y_{12}X_{13} + Y_{12}X_{32} + Y_{23}X_{13} + Y_{23}X_{32})] \frac{A}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{125} dA &= C \int \tilde{d}_{12} \tilde{d}_5 dA + F \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_{11} dA \\
&= C16 \int (X_{21}L_1 + X_{32}L_3)(Y_{12}L_2 + Y_{31}L_3) dA + F16 \int (Y_{12}L_1 + Y_{23}L_3)(X_{21}L_2 + X_{13}L_3) dA \\
&= 16[C(X_{21}Y_{12} + X_{21}Y_{31} + X_{32}Y_{12} + 2X_{32}Y_{31}) + F(Y_{12}X_{21} + Y_{12}X_{13} + Y_{23}X_{21} + 2Y_{23}X_{13})] \frac{A}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{126} dA &= C \int \tilde{d}_{12} \tilde{d}_6 dA + F \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_{12} dA = (C+F) \int \tilde{d}_{12} \tilde{d}_6 dA \\
&= (C+F)16 \int (X_{21}L_1 + X_{32}L_3)(Y_{12}L_1 + Y_{23}L_3) dA \\
&= (C+F)16(2X_{21}Y_{12} + X_{21}Y_{23} + X_{32}Y_{12} + 2X_{32}Y_{23}) \frac{A}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{127} dA &= B \int \tilde{d}_{12} \tilde{d}_7 dA + F \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_1 dA \\
&= 4BX_{32} \int (X_{21}L_1 + X_{32}L_3)(4L_1 - 1) dA + F4Y_{23} \int (Y_{12}L_1 + Y_{23}L_3)(4L_1 - 1) dA \\
&= 4(BX_{32}X_{21} + FY_{23}Y_{12}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{128} dA &= B \int \tilde{d}_{12} \tilde{d}_8 dA + F \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_2 dA \\
&= 4BX_{13} \int (X_{21}L_1 + X_{32}L_3)(4L_2 - 1) dA + F4Y_{31} \int (Y_{12}L_1 + Y_{23}L_3)(4L_2 - 1) dA \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{129} dA &= B \int \tilde{d}_{12} \tilde{d}_9 dA + F \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_3 dA \\
&= 4X_{21}B \int (X_{21}L_1 + X_{32}L_3)(4L_3 - 1) dA + F4Y_{12} \int (Y_{12}L_1 + Y_{23}L_3)(4L_3 - 1) dA \\
&= 4(BX_{21}X_{32} + FY_{12}Y_{23}) \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{1210} dA &= \int B \tilde{d}_{12} \tilde{d}_{10} dA + F \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_4 dA \\
&= 16 \int B (X_{21} L_1 + X_{32} L_3) (X_{13} L_1 + X_{32} L_2) dA + F 16 \int (Y_{12} L_1 + Y_{23} L_3) (Y_{31} L_1 + Y_{23} L_2) dA \\
&= 16 [B (2X_{21} X_{13} + X_{21} X_{32} + X_{32} X_{13} + X_{32}^2) + F (2Y_{12} Y_{31} + Y_{12} Y_{23} + Y_{23} Y_{31} + Y_{23}^2)] \frac{A}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{1211} dA &= B \int \tilde{d}_{12} \tilde{d}_{11} dA + F \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_5 dA \\
&= 16 \int B (X_{21} L_1 + X_{32} L_3) (X_{21} L_2 + X_{13} L_3) dA + F 16 \int (Y_{12} L_1 + Y_{23} L_3) (Y_{12} L_2 + Y_{31} L_3) dA \\
&= 16 [B (X_{21}^2 + X_{21} X_{13} + X_{32} X_{21} + 2X_{32} X_{13}) + F (Y_{12}^2 + Y_{12} Y_{31} + Y_{23} Y_{12} + 2Y_{23} Y_{31})] \frac{A}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int k_{1212} dA &= B \int \tilde{d}_{12} \tilde{d}_{12} dA + F \int \tilde{d}_6 \tilde{d}_6 dA \\
&= 16 B \int (X_{21} L_1 + X_{32} L_3)^2 dA + 16 F \int (Y_{12} L_1 + Y_{23} L_3)^2 dA \\
&= 16 [B (X_{21}^2 + X_{32}^2 + X_{21} X_{32}) + F (Y_{12}^2 + Y_{23}^2 + Y_{12} Y_{23})] \frac{A}{6}
\end{aligned}$$

$$\bar{K} = \frac{t}{4A^2} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{111} & k_{112} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{211} & k_{212} \\ k_{121} & k_{122} & k_{123} & \dots & k_{1211} & k_{1212} \end{bmatrix} \quad (5.2.1)$$

Rijitlik matrisinin 7. satır, 3. sütunundaki elemanını ele alırsak:

$$K_{73} = \frac{t}{4A^2} k_{73}$$

$$K_{73} = \frac{t}{4A^2} \cdot [ -(CX_{32} Y_{12} + FY_{23} X_{21}) ] \frac{A}{3}$$

$$K_{73} = \frac{t}{12A} [ -(CX_{32} Y_{12} + FY_{23} X_{21}) ]$$

$$S = \frac{t}{12A} \text{ olmak üzere kısaltma yapılırsa:}$$

olur. Üçgen elemanda rijitlik matrisi

$$\underline{K} = S \cdot \underline{k} \quad (4.2.3)$$

ile ifade edilmiş ve 46. sayfada verilmiştir. Özetle

$$\underline{K} = S \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & & v_5 & v_6 \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \dots & k_{111} & k_{112} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \dots & k_{211} & k_{212} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \dots & k_{311} & k_{312} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{111} & k_{112} & k_{113} & k_{114} & k_{1111} & k_{1112} \\ k_{121} & k_{122} & k_{123} & k_{124} & k_{1211} & k_{1212} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix}$$

olarak yazılabilir.

$\underline{K}$  matrisi şematik olarak aşağıdaki gibi gösterilir.

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	
$\underline{K} = S$													$u_1$
													$u_2$
													$u_3$
													$u_4$
													$u_5$
													$u_6$
													$v_1$
													$v_2$
													$v_3$
													$v_4$
													$v_5$
													$v_6$

$\underline{K}$  matrisinde yatay ve düşey deplasmanlar matrisin farklı bölümlerinde yer almaktadır. Aynı zamanda,  $\underline{K}$ . 12x12 mertebeden kare bir matristir. Bu matris, elemanın uç noktalarındaki yer değiştirmelere göre gruplandırılırsa  $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, \dots, u_6, v_6$  şeklini almalıdır.



$$\underline{U} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_4 & u_5 & u_6 \end{bmatrix}, \text{ye}$$

karşılık gelen rijitlik matrisi.

$K=S.$

$3*(B*Y23*Y23+F*X32*X32)$																									
$-(B*Y31*Y23+F*X13*X32)$	$3*(B*Y31*Y31+F*X13*X13)$																								
$-(B*Y12*Y23+F*X21*X32)$	$-(B*Y12*Y31+F*X21*X13)$	$3*(B*Y12*Y12+F*X21*X21)$																							
$4*(B*Y23*Y31+F*X32*X13)$	$4*(B*Y31*Y23+F*X13*X32)$	0	$9*(B*(Y31*Y31+Y23*Y23+Y31*Y23)+F*(X13*X13+X13*X32*X32+X13*X32))$																						
0	$4*(B*Y31*Y12+F*X13*X21)$	$4*(B*Y12*Y31+F*X21*X13)$	$4*(B*(Y12*Y31+2*Y12*Y23+Y31*Y31+Y31*Y23)+F*(X21*X13+2*X21*X32+X13*X13+Y12*Y23))$	$8*(B*(Y12*Y12+Y31*Y31+Y12*Y31)+F*(X21*X21+X13*X13+X21*X13))$																					
$4*(B*Y23*Y12+F*X32*X21)$	0	$4*(B*Y12*Y23+F*X21*X32)$	$4*(B*(2*Y12*Y31+Y12*Y31+Y23*Y31+Y12+2*Y23*Y31)+F*(2*X21*X13+X21*X32+X32*X21+Y12+Y23*X32))$	$4*(B*(Y12*Y12+Y12*Y31+Y23*Y31+Y12+2*Y23*Y31)+F*(X21*X21+X21*X32+X32*X21+2*X32*X13))$	$8*(B*(Y12*Y12+Y23*Y23+Y12*Y23)+F*(X21*X21+X32*X32+X21*X32))$																				
$3*(C+F)*X32*Y23$	$-(C*X32*Y31+F*Y23*X13)$	$-(C*X32*Y12+F*Y23*X21)$	$4*(C*X32*Y31+F*Y23*X13)$	0	$4*(C*X32*Y12+F*Y23*X21)$	$3*(B*X32*X32+F*Y23*Y23)$																			
$-(C*X13*Y23+F*Y31*X32)$	$3*(C+F)*X13*Y31$	$-(C*X13*Y12+F*Y31*X21)$	$4*(C*X13*Y23+F*Y31*X32)$	$4*(C*X13*Y12+F*Y31*X21)$	0	$(B*X13*X32+F*Y31*Y23)$	$3*(B*X13*X13+F*Y31*Y31)$																		
$-(C*X21*Y23+F*Y12*X32)$	$-(C*X21*Y31+F*Y12*X13)$	$3*(C+F)*X21*Y12$	0	$4*(C*X21*Y31+F*Y12*X13)$	$4*(C*X21*Y23+F*Y12*X32)$	$-(B*X21*X32+F*Y12*Y23)$	$-(B*X21*X13+F*Y12*Y31)$	$15*(B*X21*X21+F*Y12*Y12)$																	
$4*(C*Y23*X13+F*X32*Y31)$	$4*(C*Y31*X32+F*Y23*Y23)$	0	$4*(C+F)*(2*X13*Y31+X13*Y23+2*X23*Y31+2*X32*Y23)$	$4*(C*(X13*Y12+X13*Y31+2*X21*Y12+X32*Y31)+F*(Y31*X21+Y31*X13+2*Y23*X21+Y23*X32))$	$4*(C*(2*X13*Y12+X13*Y23+X32*Y31)+F*(Y31*X21+Y31*X13+Y23*Y23))$	$4*(B*X32*X13+F*Y31*Y23)$	$4*(B*X13*X32+F*Y31*Y23)$	0	$B*(B*(X13*X13+X32*X32+X13*X32)+F*(Y31*Y31+Y23*Y23+Y31*Y23))$																
0	$4*(C*Y31*X21+F*Y12*X13)$	$4*(C*Y12*X13+F*X21*Y31)$	$4*(C*(X21*Y31+2*X21*Y23+X13*Y31+X13*Y23)+F*(Y12*X13+2*Y12*X32+Y31*X32))$	$4*(C+F)*(2*X12*Y31+X21*Y31)+F*(Y12*Y23+X13*Y12+2*X13*Y31)$	$4*(C*(X21*Y12+X21*Y23+X13*Y31)+F*(Y12*X21+Y12*X32+Y31*X32))$	0	$4*(B*X13*X21+F*Y31*Y12)$	$4*(B*X21*X13+F*Y12*Y31)$	$4*(B*(X21*X13+2*X21*X32+X13*X13+X13*X32)+F*(Y12*Y31+2*Y12*Y23+Y31*Y23))$	$8*(B*(X21*X21+X13*X13+X21*X13)+F*(Y12*Y12+Y12*Y31+Y12*Y23+Y31*Y23))$															
$4*(C*Y23*X21+F*X32*Y12)$	0	$4*(C*Y12*X32+F*Y21*Y23)$	$4*(C*(2*X21*Y31+X21*Y23+X32*Y31)+F*(Y12*Y23+Y12*Y31+Y23*Y31+Y12+2*Y23*Y31))$	$4*(C*(X21*Y12+X21*Y23+X32*Y31)+F*(Y12*X21+Y12*X32+Y31*X32))$	$4*(C+F)*(2*X21*Y12+X21*Y12+X21*Y23)+F*(Y12*X21+X32*Y12+2*X32*Y23)$	$4*(B*X32*X21+F*Y12*Y23)$	0	$4*(B*X21*X32+F*Y12*Y23)$	$4*(B*(2*X21*Y12+X21*Y12+X21*Y23)+F*(Y12*Y31+2*Y12*Y23+Y31*Y23))$	$4*(B*(X21*X21+Y21*Y23+X32*X32)+F*(2*Y12*Y31+Y12*Y23+Y23*Y31+Y31*Y23*Y23))$	$4*(B*(X21*X21+X21*Y12+Y21*Y23+X32*X32)+F*(2*Y12*Y31+Y12*Y23+Y23*Y31+Y31*Y23*Y23))$	$8*(B*(X21*X21+X21*Y12+Y21*Y23+X32*X32)+F*(Y12*Y12+Y12*Y31+Y12*Y23+Y23*Y31+Y31*Y23*Y23))$	$8*(B*(X21*X21+X13*X13+X21*X13)+F*(Y12*Y12+Y12*Y31+Y12*Y23+Y31*Y23+Y31*Y23*Y23))$												

$\underline{K}$  matrisinin satır ve sütunlarının yerlerinin değiştirilmesi ile levha probleminin çözümünde kullanılacak rijitlik matrisi elde edilir.

Aşağıda  $\underline{K}$  matrisi görülmektedir.

$[K] = S.$

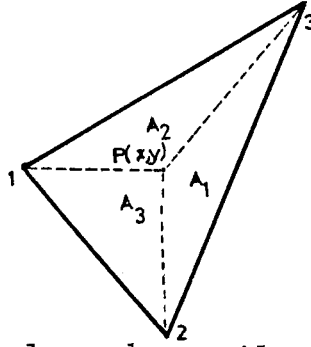
	$u_1$	$v_1$	$u_2$	$v_2$	$u_3$	$v_3$	$u_4$	$v_4$	$u_5$	$v_5$	$u_6$	$v_6$	
													$u_1$
													$v_1$
													$u_2$
													$v_2$
													$u_3$
													$v_3$
													$u_4$
													$v_4$
													$u_5$
													$v_5$
													$u_6$
													$v_6$



S438 (B4Y234Y23 +F4X324X32)	S438 (C+F) 4X324Y23	-S4 (B4Y314Y23 +F4X134X32)	-S4 (C4X134Y23 +F4Y314X32)	-S4 (B4Y124Y23 +F4X214X32)	-S4 (C4X214Y23 +F4Y124X32)	S448 (B4Y234Y31 +F4X324X13)	S448 (C4Y234X13 +F4X324Y31)	0	0	S448 (B4Y234Y12 +F4X324X21)	S448 (C4Y234X21 +F4X324Y12)
S438 (C+F) 4X324Y23	S438 (B4Y324Y32 +F4Y234Y23)	-S4 (C4X324Y31 +F4Y234X13)	-S4 (B4X134X32 +F4Y314Y23)	-S4 (C4X324Y12 +F4Y234X21)	-S4 (B4X214X32 +F4Y124Y23)	S448 (C4X324Y31 +F4Y234X13)	S448 (B4X324X13 +F4Y234Y31)	0	0	S448 (C4X324Y12 +F4Y234X21)	S448 (B4X324X21 +F4Y234Y12)
-S4 (B4Y314Y23 +F4X134X32)	-S4 (C4X324Y31 +F4Y234X13)	S438 (B4Y314Y31 +F4X134X13)	S438 (C+F) 4X134Y31	-S4 (B4Y124Y31 +F4X214X13)	-S4 (C4X214Y31 +F4Y124X13)	S448 (B4Y314Y23 +F4X134X32)	S448 (C4Y314X32 +F4X134Y23)	S448 (B4Y314Y12 +F4X134X21)	S448 (C4Y314X21 +F4X134Y12)	0	0
-S4 (C4X134Y23 +F4Y314X32)	-S4 (B4X134X32 +F4Y314Y23)	-S4 (C4X134Y31 +F4Y314X13)	S438 (B4X134X13 +F4Y314Y31)	-S4 (C4X134Y12 +F4Y314X21)	-S4 (B4X214Y13 +F4Y124Y31)	S448 (C4X134Y23 +F4Y314X32)	S448 (B4X134X32 +F4Y314Y23)	S448 (C4X134Y12 +F4Y314X21)	S448 (B4X134X21 +F4Y314Y12)	0	0
-S4 (B4Y124Y23 +F4X214X32)	-S4 (C4X324Y12 +F4Y234X21)	-S4 (B4Y124Y31 +F4X214X13)	-S4 (C4X134Y12 +F4Y314X21)	S438 (B4Y124Y12 +F4X214X21)	S438 (C+F) 4X214Y12	0	0	S448 (B4Y124Y31 +F4X214X13)	S448 (C4Y124X13 +F4X214Y31)	S448 (B4Y124Y23 +F4X214X32)	S448 (C4Y124X32 +F4X214Y23)
-S4 (C4X214Y23 +F4Y124X32)	-S4 (B4X214X32 +F4Y124Y23)	-S4 (C4X214Y31 +F4Y124X13)	-S4 (B4X214X13 +F4Y124Y31)	S438 (C+F) 4X214Y12	S438 (B4X214X21 +F4Y124Y12)	0	0	S448 (C4X214Y31 +F4Y124X13)	S448 (B4X214X13 +F4Y124Y31)	S448 (C4X214Y23 +F4Y124X32)	S448 (B4X214X32 +F4Y124Y23)
S448 (B4Y234Y31 +F4X324X13)	S448 (C4X324Y31 +F4Y234X13)	S448 (B4Y314Y23 +F4X134X32)	S448 (C4X134Y23 +F4Y314X32)	0	0	S488 (B4 (Y314Y31+Y23 4Y23+Y314Y23)+F4 (X13 4X13+X324X32+X134X32))	S448 (C+F) 4 (24X134Y31 +X134Y23+X324Y31+ 24X324Y23)	S448 (B4 (Y124Y31+24Y12 4Y23+Y314Y31+Y314Y23) +F4 (X214X13+24X214X32 +X134X13+X134X32))	S448 (C4 (X214Y31+24X21 4Y23+X134Y31+X134Y23) +F4 (Y124X13+24Y124X32 +Y314X13+Y314X32))	S448 (B4 (24Y124Y31+Y12 4Y23+Y234Y31+Y234Y23) +F4 (24X214X13+X214X32 +X324X13+X324X32))	S448 (C4 (24Y214Y31+Y21 4Y23+X324Y31+X324Y23) +F4 (24Y124X13+Y124X32 +Y234X13+Y234X32))
S448 (C4Y234X13 +F4X324Y31)	S448 (B4X324Y31 +F4Y234Y31)	S448 (C4Y314X32 +F4X134Y23)	S448 (B4X134X32 +F4Y314Y23)	0	0	S448 (C+F) 4 (24X134Y31 +X134Y23+X324Y31+ 24X324Y23)	S488 (B4 (X134X13+X324 X32+X134X32)+F4 (Y314 Y31+Y234Y23+Y314Y23))	S448 (C4 (X134Y12+X134 Y31+24X324Y12+X324Y31) +F4 (Y314X21+Y314X13+ 24Y234X21+Y234X13))	S448 (B4 (X214X13+24X21 4Y23+X134X13+X134X32) +F4 (Y124Y31+24Y124Y23 +Y314Y31+Y314Y23))	S448 (C4 (24X134Y12+X13 4Y23+X324Y12+X324Y23) +F4 (24Y314X21+Y314X32 +Y234X21+Y234X32))	S448 (B4 (24Y214X13+X21 4Y23+X324X13+X324X32) +F4 (C4Y214Y31+Y124Y23 +Y234Y31+Y234Y23))
0	0	S448 (B4Y314Y12 +F4X134X21)	S448 (C4X134Y12 +F4Y314X21)	S448 (B4Y124Y31 +F4X214X13)	S448 (C4X214Y31 +F4Y124X13)	S448 (B4 (Y124Y31+24Y12 4Y23+Y314Y31+Y314Y23) +F4 (X214X13+24X214X32 +X134X13+X134X32))	S448 (C4 (X134Y12+X134 Y31+24X324Y12+X324Y31) +F4 (Y314X21+Y314X13+ 24Y234X21+Y234X13))	S488 (B4 (Y124Y12+Y314 Y31+Y124Y31)+F4 (X214 X21+X134X13+X214X13))	S448 (C+F) 4 (24X214Y12 +X214Y31+X134Y12+24 X134Y31)	S448 (B4 (Y124Y12+Y124 Y31+Y234Y12+24Y234Y31) +F4 (X214X21+X214X13+ X324X21+24X324X13))	S448 (C4 (X214Y12+X214 Y31+X324Y12+24X324Y31) +F4 (Y124X21+Y124X32 +Y234X21+24Y234X13))
0	0	S448 (C4Y314X21 +F4X134Y12)	S448 (B4X134X21 +F4Y314Y12)	S448 (C4Y124X13 +F4X214Y31)	S448 (B4X214X13 +F4Y124Y31)	S448 (C4 (X214Y31+24X21 4Y23+X134Y31+X134Y23) +F4 (Y124X13+24Y124X32 +Y314X13+Y314X32))	S448 (B4 (X214X13+24X21 4X32+X134X13+X134X32) +F4 (Y124Y31+24Y124Y23 +Y314Y31+Y314Y23))	S448 (C+F) 4 (24X214Y12 +X214Y31+X134Y12+24 X134Y31)	S488 (B4 (X214X21+X134 X13+X214X13)+F4 (Y124 Y12+Y314Y31+Y124Y31))	S448 (C4 (X214Y12+X214 Y31+X134Y12+24X134Y23) +F4 (Y124X21+Y124X32+ Y314X21+24Y314X32))	S448 (B4 (X214X21+X214 X13+X324X21+24X324X13) +F4 (Y124Y12+Y124Y31+ Y234Y12+24Y234Y31))
S448 (B4Y234Y12 +F4X324X21)	S448 (C4X324Y12 +F4Y234X21)	0	0	S448 (B4Y124Y23 +F4X214X32)	S448 (C4X214Y23 +F4Y124X32)	S448 (B4 (24Y124Y31+Y12 4Y23+Y234Y31+Y234Y23) +F4 (24X214X13+X214X32 +X324X13+X324X32))	S448 (C4 (24X134Y12+X13 4Y23+X324Y12+X324Y23) +F4 (24Y314X21+Y314X32 +Y234X21+Y234X32))	S448 (B4 (Y124Y12+Y124 Y31+Y234Y12+24Y234Y31) +F4 (X214X21+X214X13+ X324X21+24X324X13))	S448 (C4 (X214Y12+X214 Y23+X134Y12+24X134Y23) +F4 (Y124X21+Y124X32+ Y314X21+24Y314X32))	S488 (B4 (Y124Y12+Y234 Y23+Y124Y23)+F4 (X214 X21+X324X32+X214X32))	S448 (C+F) 4 (24X214Y12 +X214Y23+X324Y12+24 X324Y23)
S448 (C4Y234X21 +F4X324Y12)	S448 (B4X324X21 +F4Y234Y12)	0	0	S448 (C4Y124X32 +F4X214Y23)	S448 (B4X214X32 +F4Y124Y23)	S448 (C4 (24X214Y31+X21 4Y23+X324Y31+X324Y23) +F4 (24Y124X13+Y124X32 +Y234X13+Y234X32))	S448 (B4 (24X214X13+X21 4X32+X324X13+X324X32) +F4 (24Y124Y31+Y124Y23 +Y234Y31+Y234Y23))	S448 (C4 (X214Y12+X214 Y31+X324Y12+24X324Y31) +F4 (Y124X21+Y124X32+ Y234X21+24Y234X13))	S448 (B4 (X214X21+X214 X13+X324X21+24X324X13) +F4 (Y124Y12+Y124Y31+ Y234Y12+24Y234Y31))	S448 (C+F) 4 (24X214Y12 +X214Y23+X324Y12+24 X324Y23)	S488 (B4 (X214X21+X324 X32+X214X32)+F4 (Y124 Y12+Y234Y23+Y124Y23))

## 6. GERİLME HESABI

## 6.1. Levhanın Orta Noktasında Gerilmeler



Şekil 6.1. Üçgen elemanda gerilme değerlerinin hesaplandığı nokta

$P(x,y)$  noktası üçgenin orta noktası ise:  $A_1=A_2=A_3$  ve

$$L_1=L_2=L_3=\frac{A_1}{A}=\frac{A_2}{A}=\frac{A_3}{A}=\frac{1}{3} \text{ olur.}$$

$L_1, L_2$  ve  $L_3$  için  $\frac{1}{3}$  değeri verilerek  $\underline{\underline{u}}$  hesaplanırsa:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (4L_1-1)Y_{23} & (4L_2-1)Y_{31} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 4(X_{21}L_1+X_{32}L_3) \\ (4L_1-1)X_{32} & (4L_2-1)X_{13} & \dots & 4(Y_{12}L_1+Y_{23}L_3) \end{bmatrix} \underline{\underline{U}}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \frac{Y_{23}}{3} & \frac{Y_{31}}{3} & \frac{Y_{12}}{3} & \frac{4(Y_{31}+Y_{23})}{3} & \frac{4(Y_{12}+Y_{31})}{3} & \frac{4(Y_{12}+Y_{23})}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{X_{32}}{3} & \frac{X_{13}}{3} & \frac{X_{21}}{3} & \frac{4(X_{13}+X_{32})}{3} & \frac{4(X_{21}+X_{13})}{3} & \frac{4(X_{21}+X_{32})}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{X_{32}}{3} & \frac{X_{13}}{3} & \frac{X_{21}}{3} & \frac{4(X_{13}+X_{32})}{3} & \frac{4(X_{21}+X_{13})}{3} & \frac{4(X_{21}+X_{32})}{3} \\ \frac{Y_{23}}{3} & \frac{Y_{31}}{3} & \frac{Y_{12}}{3} & \frac{4(Y_{31}+Y_{23})}{3} & \frac{4(Y_{12}+Y_{31})}{3} & \frac{4(Y_{12}+Y_{23})}{3} \end{bmatrix} \underline{\underline{U}}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \frac{Y_{23}}{3} & \frac{Y_{31}}{3} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{4(X_{21} + X_{32})}{3} \\ \frac{X_{32}}{3} & \frac{X_{13}}{3} & \dots & \frac{4(Y_{12} + Y_{23})}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

Düzlem gerilme veya düzlem deformasyon hali için  $\sigma$ - $\epsilon$  bağıntısı (Cheung, Y.K., Yeo, M.F., 1979).

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C & 0 \\ C & B & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

$\underline{E}$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

$\underline{\bar{E}}$

$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$  ifadelerini her nokta için yatay ve düşey deplasman olarak sıra ile tanımlarsak  $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, \dots, u_6, v_6$  olur.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_4 & v_5 & v_6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

$\underline{\bar{E}}$

$u_1, v_2; u_2, v_2; \dots$  şeklinde ifade edebilmek için  $\underline{\bar{E}}$  matrisinde sütunların yerleri değiştirilmelidir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_6 & v_6 \\ 1 & 7 & 2 & 8 & 3 & 9 & 6 & 12 \\ & & & \underline{\underline{E}} & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_6 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

Gerilme matrisinin elemanlarının elde edilebilmesi için önce  $\underline{\underline{E}}$  matrisi oluşturulur. Aşağıda  $\underline{\underline{E}}$  matrisi verilmiştir. Bu  $\underline{\underline{E}}$  matrisinin  $\underline{\underline{U}}$  matrisi ile çarpımından  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  ve  $\sigma_{xy}$  ifadeleri yazılabilir.

$$\underline{E} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} B & C & 0 \\ C & B & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{Y_{23}}{3} & \frac{Y_{31}}{3} & \frac{Y_{12}}{3} & \frac{4}{3}(Y_{31}+Y_{23}) & \frac{4}{3}(Y_{12}+Y_{31}) & \frac{4}{3}(Y_{12}+Y_{23}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{X_{32}}{3} & \frac{X_{13}}{3} & \frac{X_{21}}{3} & \frac{4}{3}(X_{13}+X_{32}) & \frac{4}{3}(X_{21}+X_{13}) & \frac{4}{3}(X_{21}-X_{32}) \\ \frac{X_{32}}{3} & \frac{X_{13}}{3} & \frac{X_{21}}{3} & \frac{4}{3}(X_{13}+X_{32}) & \frac{4}{3}(X_{21}+X_{13}) & \frac{4}{3}(X_{21}+X_{32}) & \frac{Y_{23}}{3} & \frac{Y_{31}}{3} & \frac{Y_{12}}{3} & \frac{4}{3}(Y_{21}+Y_{23}) & \frac{4}{3}(Y_{12}+Y_{31}) & \frac{4}{3}(Y_{12}+Y_{23}) \end{bmatrix}$$

$$\underline{E} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} B \frac{Y_{23}}{3} & B \frac{Y_{31}}{3} & B \frac{Y_{12}}{3} & B \frac{4}{3}(Y_{31}+Y_{23}) & B \frac{4}{3}(Y_{12}+Y_{31}) & B \frac{4}{3}(Y_{12}+Y_{23}) & C \frac{X_{32}}{3} & C \frac{X_{13}}{3} & C \frac{X_{21}}{3} & C \frac{4}{3}(X_{13}+X_{32}) & C \frac{4}{3}(X_{21}+X_{13}) & C \frac{4}{3}(X_{12}+X_{32}) \\ C \frac{Y_{23}}{3} & C \frac{Y_{31}}{3} & C \frac{Y_{12}}{3} & C \frac{4}{3}(Y_{31}+Y_{23}) & C \frac{4}{3}(Y_{12}+Y_{31}) & C \frac{4}{3}(Y_{12}+Y_{23}) & B \frac{X_{32}}{3} & B \frac{X_{13}}{3} & B \frac{X_{21}}{3} & B \frac{4}{3}(X_{13}+X_{32}) & B \frac{4}{3}(X_{21}+X_{13}) & B \frac{4}{3}(X_{21}+X_{32}) \\ F \frac{X_{32}}{3} & F \frac{X_{13}}{3} & F \frac{X_{21}}{3} & F \frac{4}{3}(X_{13}+X_{32}) & F \frac{4}{3}(X_{21}+X_{13}) & F \frac{4}{3}(X_{21}+X_{32}) & F \frac{Y_{23}}{3} & F \frac{Y_{31}}{3} & F \frac{Y_{12}}{3} & F \frac{4}{3}(Y_{31}+Y_{23}) & F \frac{4}{3}(Y_{12}+Y_{31}) & F \frac{4}{3}(Y_{12}+Y_{23}) \end{bmatrix}$$

1      2      3      4      5      6      7      8      9      10      11      12

Programda deplasmanlar  $U_1, U_2, U_3, U_4 \dots U_{11}, U_{12}$  olarak adlandırıldıklarından  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  ifadeleri:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \frac{1}{6A} & (U_1 BY_{23}) + (U_2 CX_{32}) + (U_3 BY_{31}) + (U_4 CX_{13}) + (U_5 BY_{12}) + \\ & (U_6 CX_{21}) + (U_7 (4B(Y_{31} + Y_{23}))) + (U_8 (4C(X_{13} + X_{32}))) + \\ & (U_9 (4B(Y_{12} + Y_{31}))) + (U_{10} (4C(X_{21} + X_{13}))) + (U_{11} (4B(Y_{12} + Y_{23}))) + \\ & (U_{12} (4C(X_{21} + X_{32}))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = \frac{1}{6A} & ((U_1 CY_{23}) + (U_2 BX_{32}) + (U_3 CY_{31}) + (U_4 BX_{13}) + (U_5 CY_{12}) + \\ & (U_6 BX_{21}) + (U_7 (4C(Y_{31} + Y_{23}))) + (U_8 (4B(X_{13} + X_{32}))) + \\ & (U_9 (4C(Y_{12} + Y_{31}))) + (U_{10} (4B(X_{21} + X_{13}))) + (U_{11} (4C(Y_{12} + Y_{23}))) + \\ & (U_{12} (4B(X_{21} + X_{32})))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = \frac{1}{6A} & ((U_1 FX_{32}) + (U_2 FY_{23}) + (U_3 FX_{13}) + (U_4 FY_{31}) + (U_5 FX_{21}) + \\ & (U_6 FY_{12}) + (U_7 (4F(X_{13} + X_{32}))) + (U_8 (4F(Y_{31} + Y_{23}))) + \\ & (U_9 (4F(X_{21} + X_{13}))) + (U_{10} (4F(Y_{12} + Y_{31}))) + (U_{11} (4F(X_{21} + X_{32}))) + \\ & (U_{12} (4F(Y_{12} + Y_{23})))) \end{aligned}$$

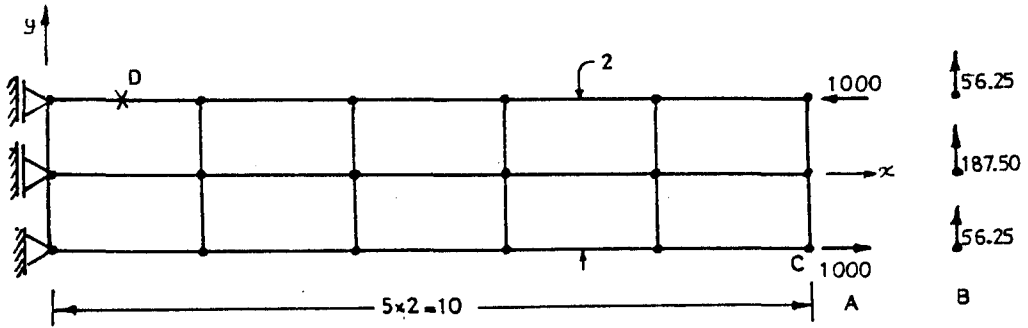
şeklindedir.

## 7. SAYISAL KARŞILAŞTIRMA

### 7.1. Cook Çözümünün Sonuçları

Programın test edilmesi için mevcut çözüm yöntemleri ile yeni geliştirilen yöntemin karşılaştırılması gerekir. Burada test elemanı olarak bir konsol kirişe iki farklı yükleme yapılarak deplasman ve gerilme değerleri karşılaştırılmıştır.

Robert Cook'a göre test edilen levhaya ait sonuçlar aşağıdadır (Cook, R.D., 1974).



Şekil 7.1. Problemin tanımı (Cook, R.D., 1974)

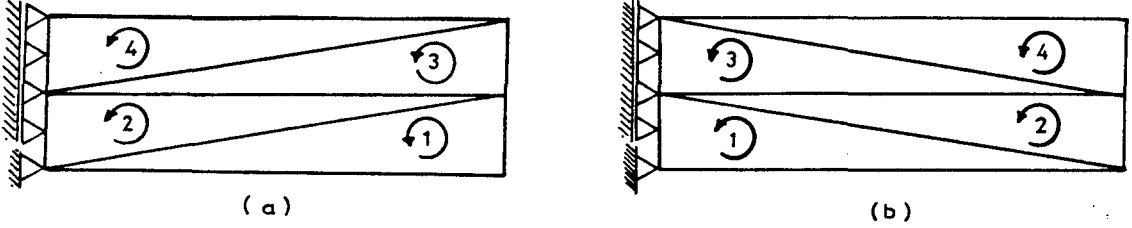
Test edilen düzlem elemanda  $E=1500$ ,  $\nu=0.25$  alınmıştır.

### SONUÇLAR

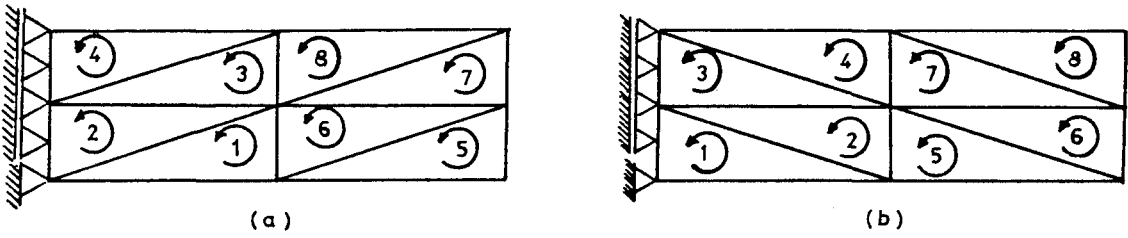
Elemanın Çözüm yöntemi	Elemanın serbestlik derecesi	Dış Serbestlik	Uyumluluk	C noktasında düşey deplasman		D noktasında $\sigma_{xx}$ Gerilmesi	
				Yüklem A	Yüklem B	Yüklem A	Yüklem B
Q4	8	8	Var	70.6	72.3	-2188	-2954
Q5	10	8	Var	75.7	77.7	-2270	-3056
Q6	12	8	Yok	100.0	101.3	-3000	-4050
Kiriş Teorisi	-	-	-	100.0	103.0	-3000	-4050

## 7.2. Levhada İdealizasyon Şekilleri

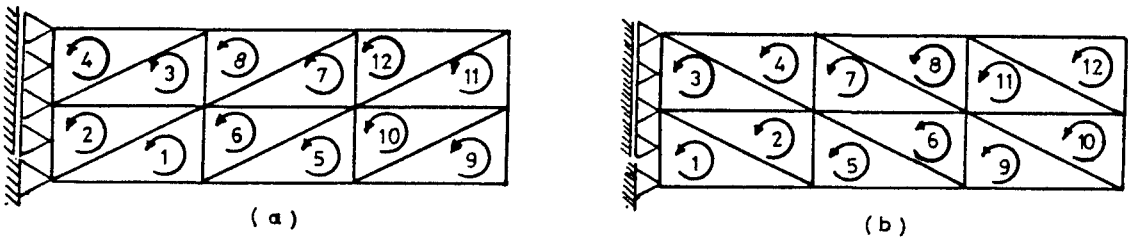
Cook (1974) tarafından sonuçları verilen konsol levha problemi rijitlik matrisi kurulan elemanın test edilmesi için kullanılacaktır. Bu nedenle Cook'un çözümünü yaptığı levha aşağıda idealize edilmiştir.



Şekil 7.2. 4 elemanlı idealizasyon



Şekil 7.3. 8 elemanlı idealizasyon



Şekil 7.4. 12 elemanlı idealizasyon

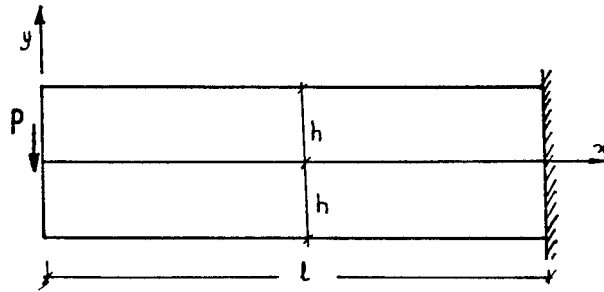
Programın test edilmesi için yukarıdaki idealizasyonların düzlem gerilme hali için sonuçları alınmıştır. Bu sonuçlarda önce düşey yük, sonra yatay yük durumu incelenmiştir. Fakat Cook'a göre yapılan incelemede konsolun üst yüzündeki D noktasının gerilmesi ile programdaki idealizasyonu



yapılan levhalardaki gerilmelerin koordinatları farklıdır. Dolayısı ile gerilmelerin (Cook, R.D., 1974) ile karşılaştırılması yanıltıcı sonuç verir. (Cook, R.D., 1974)'de hesaplanan c noktasının deplasmanı karşılaştıracak, fakat gerilmeler kiriş teorisinin sonuçları ile mukayese edilecektir.

### 7.3. Levhanın Polinomlarla Çözümü

Elastisite teorisinde basit konsol kirişe ait polinomlarla çözüm şöyledir (Holand, I., Bell, K., 1972).



Şekil 7.5. Elastisite teorisinde çözümü yapılan levha

Levhada sınır şartları:

$$\begin{aligned}
 x=0 \text{ için } \sigma_{xx} &= 0 & \text{ve} & \int_{-h}^{+h} \sigma_{xy} dy = P \\
 y=\pm h \text{ için } \sigma_{yy} &= 0 & \text{ve} & \sigma_{xy} = 0
 \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

olarak alınmıştır. Burada  $x=0$  kesitinde  $\sigma_{xy}$  gerilmelerinin dağılışı yerine, toplam değeri hakkında bir şart koşulmuştur. Bu şartın yardımı ile elementer fonksiyonlarla bir çözüm bulunmuştur. Probleme dördüncü ve ikinci dereceden iki polinomun toplamı ile cevap bulmak mümkündür.

$$F = F_4 + F_2 = D_4 xy^3 + B_2 xy \tag{7.3.2}$$

Buna göre gerilmeler:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= 6D_4 xy \\
 \sigma_{yy} &= 0 \\
 \sigma_{xy} &= -B_2 - 4D_4 y^2
 \end{aligned} \tag{7.3.3}$$

bulunur. Levhadaki sınır şartları yardımıyla

$$B_2 = -3D_4 h^2 \quad (7.3.4)$$

olur.  $B_2$  nin bu değeri 7.33 de yerine konur ve diğer  $x=0$  ucundaki şarttan faydalanılırsa,

$$D_4 = \frac{P}{4h^3}, \quad B_2 = -\frac{3P}{4h} \quad (7.3.5)$$

elde edilir.

Buna göre gerilme fonksiyonu ve gerilmeler:

$$F = \frac{3P}{4h^3} \left[ \frac{xy}{3} - h^2 xy \right] \quad (7.3.6)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{3P}{2h^3} xy$$

$$\sigma_{yy} = 0$$

$$\sigma_{xy} = \frac{3P}{4h^3} (h^2 - y^2) \quad (7.3.7)$$

Normal ve kayma gerilmeleri hesaplanmak istenen noktanın  $x$  ve  $y$  koordinatlarının değerleri bilinmelidir. Bu koordinatlar 7.3.7. deki denklemlerde yerlerine konarak gerilme değerleri hesaplanır.

#### 7.4. Levhada Deplasman Sonuçlarının Karşılaştırılması

C noktasında hesaplanan düşey deplasman Cook ile aşağıda verilen tabloda karşılaştırılmıştır.

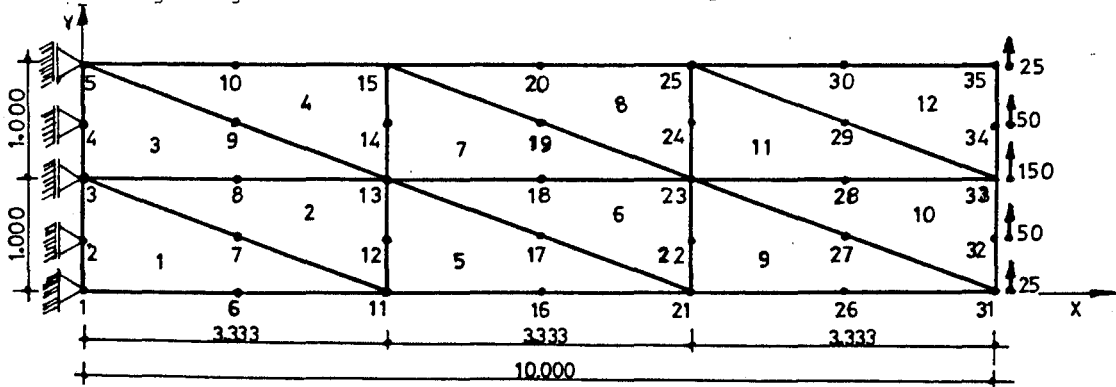
Levhada eleman sayısı arttıkça sonuçlar birbirine yakın hal almaktadır. Düşey yüke maruz, 12 elemana bölünmüş levhanın Q.6 ya göre çözümünde  $V_c = 101.30$ , kiriş teorisinde  $V_c = 103.00$ , levhada ise  $V_c = 101.59$  olarak elde edilmiştir. Yatay yük halinde de sonuçlar birbirine çok yakındır. Dolayısı ile levha programından hesaplanan deplasman değerlerinin doğru olduğu kabul edilebilir.

Çizelge 7.1. Düşey deplasman değerlerinin karşılaştırılması

Yöntem adı	Şekil No	Sistemin Serbestlik Derecesi	Eleman Sayısı	C noktasında düşey deplasman	
				Düşey yük hali	Yatay yük hali
COOK	7.1(Q4)	-	8	72.30	70.60
	7.1(Q5)	-	10	77.70	75.70
	7.1(Q6)	-	12	101.30	100.00
	7.1(kiriş teorisi)	-	10	103.00	100.00
Levha Programı	7.2.a	30	4	81.95	100.56
	7.2.b	30	4	81.80	100.56
	7.3.a.	50	8	99.08	100.47
	7.3.b	50	8	98.99	100.46
	7.4.a	70	12	101.59	100.11
	7.4.b	70	12	101.51	100.40

#### 7.5. Gerilme Değerlerinin Kiriş Teorisi (Elastisite Teorisi) İle Karşılaştırılması

Şekil 7.4.b deki idealize edilmiş levha elemanlarının gerilme değerleri, elastisite teorisinin polinom çözümleri ile karşılaştırılarak sonuca varılmıştır.



Şekil 7.6. 12 elemanlı idealizasyonda düşey kuvvet uygulanması

1 SAVE "BONED",a:RUN"levha  
6000 DATA ANA VERILER  
6010 DATA ONIKI ELEMENLI LEVHA YUK DUSEY SEKIL 7.4.b  
6020 DATA 12,35  
6030 DATA 5,6,0  
6040 DATA 1500,0,25,1,0  
6050 DATA ELEMENLARIN TARIFI  
6061 DATA 1,1,11,3,6,7,2  
6062 DATA 2,3,11,13,7,12,8  
6063 DATA 3,3,13,5,8,9,4  
6064 DATA 4,5,13,15,9,14,10  
6065 DATA 5,11,21,13,16,17,12  
6066 DATA 6,13,21,23,17,22,18  
6067 DATA 7,13,23,15,18,19,14  
6068 DATA 8,15,23,25,19,24,20  
6069 DATA 9,21,31,23,26,27,22  
6070 DATA 10,23,31,33,27,32,28  
6071 DATA 11,23,33,25,28,29,24  
6072 DATA 12,25,33,35,29,34,30  
6080 DATA KOORDINATLAR  
6081 DATA 1,0,0,2,0,0,5,3,0,1,4,0,1,5,5,0,2  
6082 DATA 6,1,667,0,7,1,667,0,5,8,1,667,1,9,1,667,1,5,10,1,667,2  
6083 DATA 11,3,333,0,12,3,333,0,5,13,3,333,1,14,3,333,1,5,15,3,333,2  
6084 DATA 16,5,0,17,5,0,5,18,5,1,19,5,1,5,20,5,2  
6085 DATA 21,6,667,0,22,6,667,0,5,23,6,667,1,24,6,667,1,5,25,6,667,2  
6086 DATA 26,8,333,0,27,8,333,0,5,28,8,333,1,29,8,333,1,5,30,8,333,2  
6087 DATA 31,10,0,32,10,0,5,33,10,1,34,10,1,5,35,10,2  
6100 DATA KUVVETLER  
6110 DATA 31,2,25,32,2,50,33,2,150,34,2,50,35,2,25  
6130 DATA SINIR SARTLARI  
6140 DATA 1,1,0,1,2,0,2,1,0,3,1,0,4,1,0,5,1,0  
6150 DATA SON

LEVHALARIN STATIK HESABI  
SONLU ELEMENLAR METODU  
(Deplasman Metodu)

PROBLEM:

ONIKI ELEMENLI LEVHA YUK DUSEY SEKIL 7.4.b  
(DUZLEM GERILME HALI)

eleman sayisi.....= 12  
nokta sayisi.....= 35  
kuvvet sayisi.....= 5  
sinir sarti sayisi.....= 6  
elastisite modulu.....= 1500  
poisson oranı.....= 0.25  
levha kalınlığı.....= 1  
isi etkisindeki eleman sayisi= 0  
isi uzama (kısılma) katsayisi= 0  
sistemin serbestlik derecesi.= 70

## ELEMANLARIN TARIFI

elm	i-nok	j-nok	k-nok	l-nok	m-nok	n-nok
1	1	11	3	6	7	2
2	3	11	13	7	12	8
3	3	13	5	8	9	4
4	5	13	15	9	14	10
5	11	21	13	16	17	12
6	13	21	23	17	22	18
7	13	23	15	18	19	14
8	15	23	25	19	24	20
9	21	31	23	26	27	22
10	23	31	33	27	32	28
11	23	33	25	28	29	24
12	25	33	35	29	34	30

DENKLEM SAYISI.....= 64

REAKSIYON SAYISI...= 6

YARI BAND GENISLIGI= 22

## NOKTALARIN KOORDINATLARI:

nokta	X	Y
1	0	0
2	0	0.5
3	0	1
4	0	1.5
5	0	2
6	1.667	0
7	1.667	0.5
8	1.667	1
9	1.667	1.5
10	1.667	2
11	3.333	0
12	3.333	0.5
13	3.333	1
14	3.333	1.5
15	3.333	2
16	5	0
17	5	0.5
18	5	1
19	5	1.5
20	5	2
21	6.667	0
22	6.667	0.5
23	6.667	1
24	6.667	1.5
25	6.667	2
26	8.333	0
27	8.333	0.5
28	8.333	1
29	8.333	1.5

30	8.333	2
31	10	0
32	10	0.5
33	10	1
34	10	1.5
35	10	2

VERILMIS KUVVETLER:

nokta	yon	kuvvet
31	2	25
32	2	50
33	2	150
34	2	50
35	2	25

VERILMIS ISI DEGERLERI

isi etkisi yok

VERILMIS SINIR SARTLARI:

nokta	yon	deplasman
1	1	0
1	2	0
2	1	0
3	1	0
4	1	0
5	1	0

DEPLASMANLAR:

nokta	1-yonu	2-yonu
1	0.00000	0.00000
2	0.00000	-0.13717
3	0.00000	-0.13776
4	0.00000	-0.01378
5	0.00000	0.24097
6	4.38563	4.27860
7	2.14594	4.06048
8	-0.03320	3.99895
9	-2.20699	4.08693
10	-4.43151	4.32981
11	8.32614	15.42079
12	4.09108	15.21427
13	-0.02687	15.12934
14	-4.14284	15.17181
15	-8.37246	15.34354
16	11.07529	32.01943
17	5.49716	31.88581
18	-0.02476	31.84908
19	-5.54684	31.90624

20	-11.12528	32.05419
21	13.32326	52.89513
22	6.59367	52.78556
23	-0.02373	52.73582
24	-6.64371	52.74742
25	-13.37560	52.82473
26	14.41663	76.44224
27	7.16394	76.40184
28	-0.02622	76.39752
29	-7.21735	76.42543
30	-14.46066	76.48046
31	15.01999	101.51834
32	7.43145	101.47311
33	-0.03731	101.46459
34	-7.48311	101.42791
35	-15.03872	101.43589

## GERILMELER:

Eleman	Sigma-xx	Sigma-yy	Sigma-xy
1	2571.15979	137.67782	141.12900
2	1169.03736	23.46962	179.37687
3	-1319.49333	35.44703	161.35843
4	-2420.70294	-12.30933	118.14474
5	1588.96961	-15.70789	115.27506
6	661.29703	12.20450	183.93947
7	-838.83202	11.71720	184.61089
8	-1411.43393	-12.50830	116.18149
9	593.72708	-12.00797	114.60802
10	159.57962	4.38293	178.13594
11	-342.60105	14.62597	184.03236
12	-410.70534	-6.96771	123.22395

## REAKSIYONLAR:

Nokta	Yon	Reaksiyon
1	1	-879.35001
1	2	-300.00460
2	1	-1282.84272
3	1	15.12738
4	1	1335.61926
5	1	811.44565

-----H E S A P S O N U-----

Levha programında gerilme değerleri hesaplanan elemanların ağırlık merkezlerindeki koordinatlarından yararlanarak 7.3.7 deki formül ile giriş teorisine ait gerilmeler hesaplanmış ve 7.2! de gösterilmiştir.

Çizelge 7.2. Elemanlardaki gerilme değerlerinin karşılaştırılması

Eleman No	Kiriş Teorisi			Program		
	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{xy}$	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{xy}$
1	2668.03	0	124.89	2571.15	137.67	141.12
2	1165.38	0	200.04	1169.03	23.46	179.37=
3	-1332.01	0	200.04	-1319.49	35.44	161.35
4	-2334.27	0	124.89	-2420.70	-12.30	118.14
5	1667.33	0	124.89	1588.96	-15.70	115.27
6	665.93	0	200.04	661.29	12.20	183.93
7	-832.41	0	200.04	-838.83	11.71	184.61
8	-1333.86	0	124.89	-1411.43	-12.50	116.18
9	666.93	0	124.89	593.72	-12.00	114.60
10	166.48	0	200.04	159.57	4.38	178.13
11	-332.96	0	200.04	-342.60	14.62	184.03
12	-333.46	0	124.89	-410.70	-6.96	123.22

$\sigma_{xx}$  gerilme değerlerinin karşılaştırılması:

$\sigma_{xx}$  normal gerilmelerin karşılaştırılmasında ortalama 0.048 oranında değer sapması görülmüştür. Bu sapma miktarı kabul edilebilir sınırlar içerisindedir.

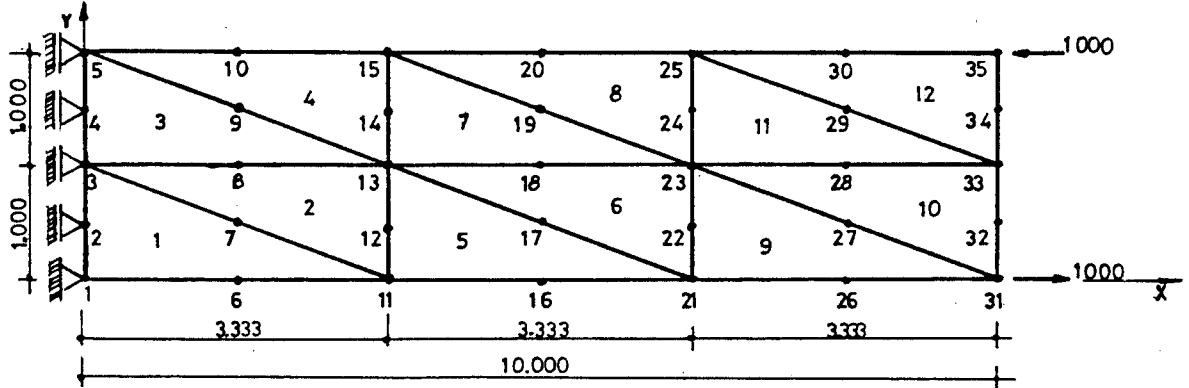
$\sigma_{yy}$  gerilme değerlerinin karşılaştırılması:

Polinomlarla çözüm yapıldığında  $\sigma_y$  değerlerinin sıfır olduğu kabul edilmiştir. Levhanın çözümünde elde edilen değerler de sıfıra yakındır. Sadece mesnet bölgesindeki elemanda  $\sigma_{yy}$  değeri sıfırdan büyüktür. Bunun da sonucu daha olumlu yönde etkidiği belirtilebilir. Çünkü mesnette x ve y yönünde tepkiler mevcuttur. Aynı tepkilerin mesnet bölgesinde  $\sigma_{xx}$  ve  $\sigma_{yy}$  gerilmelerini meydana getirmesi gerekir. Bu nedenle levhada elde edilen sonuçlar gerçeğe daha



yakındır denilebilir.

$\sigma_{yy}$  gerilme değerini mesnette y yönünde tepkisi bulunmayan başka bir test levhada araştırırsak  $\sigma_{yy}=0$  olması gerekir. Bu nedenle aynı levhaya yatay kuvvet uygulayarak gerilmeler elde edilmiştir.



şekil 7.7. 12 elemanlı idealizasyonda yatay kuvvet uygulanması

```

1 SAVE "BONEY",a:RUN"levha
6000 DATA ANA VERILER
6010 DATA ONIKI ELEMANLI LEVHA YUK YATAY SEKIL 7.4 b
6030 DATA 2,6,0
6040 DATA 1500,.25,1,0
6050 DATA ELEMANLARIN TARIFI
6061 DATA 1,1,11,3,6,7,2
6062 DATA 2,3,11,13,7,12,8
6063 DATA 3,3,13,5,8,9,4
6064 DATA 4,5,13,15,9,14,10
6065 DATA 5,11,21,13,16,17,12
6066 DATA 6,13,21,23,17,22,18
6067 DATA 7,13,23,15,18,19,14
6068 DATA 8,15,23,25,19,24,20
6069 DATA 9,21,31,23,26,27,22
6070 DATA 10,23,31,33,27,32,28
6071 DATA 11,23,33,25,28,29,24
6072 DATA 12,25,33,35,29,34,30
6080 DATA KOORDINATLAR
6081 DATA 1,0,0,2,0,.5,3,0,1,4,0,1.5,5,0,2
6082 DATA 6,1.667,0,7,1.667,.5,8,1.667,1,9,1.667,1.5,10,1.667,2
6083 DATA 11,3.333,0,12,3.333,.5,13,3.333,1,14,3.333,1.5,15,3.333,2
6084 DATA 16,5,0,17,5,.5,18,5,1,19,5,1.5,20,5,2
6085 DATA 21,6.667,0,22,6.667,.5,23,6.667,1,24,6.667,1.5,25,6.667,2
6086 DATA 26,8.333,0,27,8.333,.5,28,8.333,1,29,8.333,1.5,30,8.333,2
6087 DATA 31,10,0,32,10,.5,33,10,1,34,10,1.5,35,10,2
6100 DATA KUVVETLER
6110 DATA 31,1,1000,35,1,-1000
6120 DATA ISI DEGERLERI
6130 DATA SINIR SARTLARI
6140 DATA 1,1,0,1,2,0,2,1,0,3,1,0,4,1,0,5,1,0
6150 DATA SDN

```

## SONUÇLAR

LEVHALARIN STATİK HESABI  
SONLU ELEMENLAR METODU  
(Deplasman Metodu)

## PROBLEM:

ONIKI ELEMENLI LEVHA YUK YATAY SEKIL 7.4 b  
(DUZLEM GERILME HALI)

eleman sayisi.....= 12  
nokta sayisi.....= 35  
kuvvet sayisi.....= 2  
sinir sarti sayisi.....= 6  
elastisite modulu.....= 1500  
poisson orani.....= 0.25  
levha kalinligi.....= 1  
isi etkisindeki eleman sayisi= 0  
isi uzama (kisalma) katsayisi= 0  
sistemin serbestlik derecesi.= 70

## ELEMENLARIN TARIFI

elm	i-nok	j-nok	k-nok	l-nok	m-nok	n-nok
1	1	11	3	6	7	2
2	3	11	13	7	12	8
3	3	13	5	8	9	4
4	5	13	15	9	14	10
5	11	21	13	16	17	12
6	13	21	23	17	22	18
7	13	23	15	18	19	14
8	15	23	25	19	24	20
9	21	31	23	26	27	22
10	23	31	33	27	32	28
11	23	33	25	28	29	24
12	25	33	35	29	34	30

DENKLEM SAYISI.....= 64

REAKSIYON SAYISI...= 6

YARI BAND GENISLIGI= 22

NOKTALARIN KOORDINATLARI:

nokta	X	Y
1	0	0
2	0	0.5
3	0	1
4	0	1.5
5	0	2
6	1.667	0
7	1.667	0.5
8	1.667	1
9	1.667	1.5
10	1.667	2
11	3.333	0
12	3.333	0.5
13	3.333	1

14	3.333	1.5
15	3.333	2
16	5	0
17	5	0.5
18	5	1
19	5	1.5
20	5	2
21	6.667	0
22	6.667	0.5
23	6.667	1
24	6.667	1.5
25	6.667	2
26	8.333	0
27	8.333	0.5
28	8.333	1
29	8.333	1.5
30	8.333	2
31	10	0
32	10	0.5
33	10	1
34	10	1.5
35	10	2

## VERILMIS KUVVETLER:

nokta	yon	kuvvet
31	1	1000
35	1	-1000

VERILMIS ISI DEGERLERI  
isi etkisi yok

## VERILMIS SINIR SARTLARI:

nokta	yon	deplasman
1	1	0
1	2	0
2	1	0
3	1	0
4	1	0
5	1	0

## DEPLASMANLAR:

nokta	1-yonu	2-yonu
1	0.00000	0.00000
2	0.00000	-0.18749
3	0.00000	-0.24995
4	0.00000	-0.18747
5	0.00000	0.00001
6	3.33311	2.77730
7	1.66651	2.58978
8	-0.00007	2.52730
9	-1.66655	2.58984
10	-3.33303	2.77735
11	6.66649	11.10941
12	3.33304	10.92183
13	-0.00037	10.85908
14	-3.33299	10.92149

15	-6.66577	11.10900
16	9.99774	24.99926
17	4.99990	24.81200
18	0.00144	24.74930
19	-4.99910	24.81152
20	-9.99950	24.99920
21	13.32626	44.43669
22	6.66718	44.25144
23	0.00358	44.19691
24	-6.66932	44.26238
25	-13.33686	44.45196
26	16.76663	69.49648
27	8.35718	69.29881
28	-0.00694	69.25904
29	-8.35660	69.31802
30	-16.75325	69.48195
31	20.33867	100.40944
32	9.82906	100.22513
33	0.00239	100.11497
34	-9.82811	100.18037
35	-20.34726	100.43785

## GERİLMELER:

Eleman	Sigma-xx	Sigma-yy	Sigma-xy
1	2000.08402	0.01381	-0.03863
2	999.92278	-0.15696	-0.14121
3	-1000.07519	0.04205	0.04712
4	-1999.93088	-0.00347	0.14000
5	1998.67315	-0.02391	0.56434
6	1002.06624	5.22536	1.09965
7	-998.95368	-0.32681	-0.69609
8	-2001.78510	2.44768	-0.96218
9	2066.41450	1.37049	-21.42437
10	881.42877	-6.42798	19.92634
11	-1014.69231	-8.17654	21.55494
12	-1933.15065	6.01788	-20.05676

## REAKSIYONLAR:

Nokta	Yon	Reaksiyon
1	1	-499.97741
1	2	-0.00369
2	1	-1000.00044
3	1	-0.06926
4	1	1000.00555
5	1	500.04119

-----HESAP SONU-----

Şekil 7.7 deki levhaya etki eden kuvvetler x yönündedir. Gerilmeler x yönünde  $-2000 \text{ kg/cm}^2$  ile  $+2000 \text{ kg/cm}^2$  arasında değişmiş, y yönünde ise sıfıra yakın sonuçlar elde edilmiştir. Bir önceki örneğin sabit mesnet bölgesinde meydana ge-

len  $\sigma_{yy}$  gerilmesinin uygulanan kuvvetin yönü ile ilgili olduğu da Şekil 7.7 deki örnekle doğrulanmıştır.

$\sigma_{xy}$  kayma gerilmelerinin karşılaştırılması:

Kayma gerilmelerinin elastisite teorisinden bulunan değerlerle karşılaştırılması sonucunda 0.097 oranında bir değer sapması olduğu görülmüştür. Bunun kabul edilebilir hata sınırları içinde kaldığı belirtilebilir.

## 8. SONUÇ

Levha problemlerinin çözümleri için 12 serbestlik dereceli bir üçgen elemanın rijitlik matrisi geliştirilmiş ve hazırlanan programda nümerik testinin karşılaştırmalı olarak yapılması sonucunda rijitlik matrisinin doğru değerler verdiği görülmüştür.

Bilgisayarın bellek kapasitesi yeterli olmadığından levhadaki elemanın sayısı yeteri kadar arttırılamamıştır. Fakat Tablo 1'de de daha yakın sonuçlar elde edilmektedir. Bu nedenle büyük bellek kapasitesine sahip bilgisayarlarla çalışıldığında program çok daha iyi sonuçlar verecektir.

EK - 1

BİLGİSAYAR PROGRAMI

```

10 REM Test icin kullanılan bilgisayar
20 REM AMSTRAD CPC6128 Personal Computer.
30 REM Bu bilgisayarda yazicinin kanal numarası Ka%=8 dir.
40 REM ekran 0, yazıcı B kanal numarası
50 REM ile acılmakta veciktiler kagıda
60 REM PRINT #Ka%=8
70 REM deyimi ile yazılmaktadır.
80 REM Degisik bilgisayarlarda bu ifadelerin yerine
90 REM geçerli karşılıkları kullanılmalıdır.
100 INPUT "(EKRAN=0 YAZICI=8)";Ka%
110 INPUT "DATALARIN BULUNDUGU KUTUK ADI=",DAT$:DAT%=UPPER$(DAT%)
120 INPUT "DG-DUZLEM GERILME DD- DUZLEM DEFORMASYON=",TIP$:TIP%=UPPER$(TIP%)
130 IF TIP%<>"DG" AND TIP%<>"DD" THEN GOTO 120
140 GOSUB 5770
160 PRINT #Ka%,
170 PRINT #Ka%,
180 PRINT #Ka%, " LEVHALARIN STATIK HESABI "
190 PRINT #Ka%, " SONLU ELEMENLAR METODU "
200 PRINT #Ka%, " (Deplasman Metodu) "
210 PRINT #Ka%,
220 IF ka%=8 THEN PRINT#B,CHR$(15)
230 REM HATA LISTESI
240 Hata0$="----->verilerde hata var !"
250 Hata1$="----->eleman no hatali !"
260 Hata2$="----->noktano hatali !"
270 Hata3$="----->verilerin sirasi yanlis !"
280 Hata4$="----->hatali yon tarifi !"
290 Hata5$="----->daha once de verildi !"
300 Hata6$="----->sistem labil !"
310 D1$="ANA VERILER"
320 D2$="ELEMENLARIN TARIFI"
330 D3$="KOORDINATLAR"
340 D4$="KUVVETLER"
350 D5$="ISI DEGERLERI"
360 D6$="SINIR SARTLARI"
370 D7$="SON"
380 REM onemli degiskenlerin tarifi
390 REM ES%=eleman sayisi
400 REM NS%=nokta sayisi
410 REM KS%=verilmis kuvvet sayisi
420 REM SS%=verilmis SINIR sarti sayisi
430 REM IE%=isi etkisindeki eleman sayisi
440 REM SD%=sistemin serbestlik derecesi
450 REM E=elastisite modulu
460 REM NU=Poisson oranı
470 REM t=levha kalınlığı
480 REM ALFA=isi uzama kısıalma katsayisi
490 REM ED matrisi=eleman dataları
500 REM XY matrisi=noktaları koordinatları
510 REM LR matrisi=elemanın lokal rijitlik matrisi
520 REM GR matrisi=elemanın global rijitlik matrisi
530 REM SIG matrisi=gerilme matrisi
540 REM SR matrisi=sistem rijitlik matrisi
550 REM P matrisi=kuvvet vektörü

```



```

560 REM U matrisi=elemanın deplasman vektörü
570 REM DEP=verilmiş deplasman
580 REM NSD=bir noktanın serbestlik derecesi
590 REM ENS=elemanın nokta sayısı
600 REM band%+1=yarı band genişliği
610 Nsd%=2
620 Ens%=6
630 REM ana veriler
640 Hata$="YOK"
650 INPUT#9, DO$
660 IF DO$<>D1$ THEN PRINT #Ka%, HATA3$ : GOTO 2820
670 INPUT#9, Problemadi$
680 PRINT #Ka%, "PROBLEM:" : PRINT #Ka%, Problemadi$
690 IF tip$="D6" THEN PRINT#ka%, "(DUZLEM GERILME HALI)" ELSE PRINT#ka%, "(DUZLEM DEFORMASYON HALI)"
700 INPUT#9, Es%: INPUT#9, Ns%: INPUT#9, Ks%: INPUT#9, Ss%: INPUT#9, Ie%
710 INPUT#9, E: INPUT#9, Nu: INPUT#9, t: INPUT#9, Alfa
720 Sd%=Ns%*Nsd%
730 PRINT #Ka%, "eleman sayısı.....=";Es%
740 PRINT #Ka%, "nokta sayısı.....=";Ns%
750 PRINT #Ka%, "kuvvet sayısı.....=";Ks%
760 PRINT #Ka%, "sinir sarti sayısı.....=";Ss%
770 PRINT #Ka%, "elastisite modulu.....=";E
780 PRINT #Ka%, "poisson oranı.....=";Nu
790 PRINT #Ka%, "levha kalınlığı.....=";t
800 PRINT #Ka%, "isi etkisindeki eleman sayısı=";ABS(Ie%)
810 PRINT #Ka%, "isi uzama (kısılma) katsayısı=";Alfa
820 PRINT #Ka%, "sistemin serbestlik derecesi.=";Sd%
830 IF Es%<1 OR Ns%<6 THEN Hata$="VAR"
840 IF Ks%<0 OR Ks%>Sd%-Ss% THEN Hata$="VAR"
850 IF Ss%<3 OR Ss%>Sd%-Ks% THEN Hata$="VAR"
860 IF E<=0 OR Nu<0 OR Nu>=0.5 THEN Hata$="VAR"
870 IF D<=0 THEN Hata$="VAR"
880 IF Ie%=-Es% GOTO 900
890 IF Ie%<0 OR Ie%>Es% THEN Hata$="VAR"
900 IF Ie%>0 AND Alfa=0 THEN Hata$="VAR"
910 IF Alfa<>0 AND Ie%=0 THEN Hata$="VAR"
920 IF Hata$="VAR" THEN PRINT #Ka%, HATA0$ : GOTO 2820
930 DIM Ed(Es%,7), Xy(Ns%,2), Gr(12,12), U(12), SIG(3,1)
940 REM elemanların tarifi
950 INPUT#9, DO$
960 IF DO$<>D2$ THEN PRINT #Ka%, HATA3$ : GOTO 2820
970 Band%=0
980 PRINT #Ka%, "ELEMANLARIN TARIFI"
990 PRINT #Ka%, "el", "i-nok", "j-nok", "k-nok", "l-nok", "m-nok", "n-nok"
1000 FOR J%=1 TO Es%
1010 INPUT#9, E1%: INPUT#9, In%: INPUT#9, Jn%: INPUT#9, Kn%: INPUT#9, Ln%: INPUT#9, Mn%: INPUT#9, Nn%
1020 PRINT #Ka%, E1%, In%, Jn%, Kn%, Ln%, Mn%, Nn%
1030 IF E1%<1 OR E1%>Es% THEN PRINT #Ka%, HATA1$ : Hata$="VAR"
1040 IF In%<1 OR In%>Ns% THEN PRINT #Ka%, HATA2$ : Hata$="VAR"
1050 IF Jn%<1 OR Jn%>Ns% THEN PRINT #Ka%, HATA2$ : Hata$="VAR"
1060 IF Kn%<1 OR Kn%>Ns% THEN PRINT #Ka%, HATA2$ : Hata$="VAR"
1070 IF Ln%<1 OR Ln%>Ns% THEN PRINT #Ka%, HATA2$ : Hata$="VAR"
1080 IF Mn%<1 OR Mn%>Ns% THEN PRINT #Ka%, HATA2$ : Hata$="VAR"
1090 IF Nn%<1 OR Nn%>Ns% THEN PRINT #Ka%, HATA2$ : Hata$="VAR"
1100 IF In%=Jn% OR In%=Kn% THEN PRINT #Ka%, HATA2$ : Hata$="VAR"

```

```

1110 IF Ln%=Mn% OR Ln%=Nn% THEN PRINT #Ka%, Hata2% : Hata$="VAR"
1120 IF Mn%=Nn% THEN PRINT #Ka%, Hata2% : Hata$="VAR"
1130 IF Ln%=In% OR Mn%=In% THEN PRINT #Ka%, Hata2% : Hata$="VAR"
1140 IF Jn%=Kn% THEN PRINT #Ka%, Hata2% : Hata$="VAR"
1150 IF Ed(E1%,1)>0 THEN PRINT #Ka%, Hata5% : Hata$="VAR"
1160 IF Hata$="VAR" GOTO 2820
1170 Ed(E1%,1)=In%
1180 Ed(E1%,2)=Jn%
1190 Ed(E1%,3)=Kn%
1200 Ed(E1%,4)=Ln%
1210 Ed(E1%,5)=Mn%
1220 Ed(E1%,6)=Nn%
1230 I1%=ABS(In%-Jn%)
1240 J1%=ABS(Jn%-Kn%)
1250 K1%=ABS(Kn%-In%)
1260 L1%=ABS(Ln%-Mn%)
1270 M1%=ABS(Mn%-Nn%)
1280 N1%=ABS(Ln%-Mn%)
1290 I2%=ABS(In%-Ln%)
1300 J2%=ABS(Jn%-Ln%)
1310 K2%=ABS(Kn%-Mn%)
1320 L2%=ABS(Ln%-Kn%)
1330 M2%=ABS(Mn%-In%)
1340 N2%=ABS(Nn%-In%)
1350 J3%=ABS(Jn%-Mn%)
1360 K3%=ABS(Kn%-Nn%)
1370 N3%=ABS(Nn%-Jn%)
1380 IF I1%>Band% THEN Band%=I1%
1390 IF J1%>Band% THEN Band%=J1%
1400 IF K1%>Band% THEN Band%=K1%
1410 IF L1%>Band% THEN Band%=L1%
1420 IF M1%>Band% THEN Band%=M1%
1430 IF N1%>Band% THEN Band%=N1%
1440 IF I2%>Band% THEN Band%=I2%
1450 IF J2%>Band% THEN Band%=J2%
1460 IF K2%>Band% THEN Band%=K2%
1470 IF L2%>Band% THEN Band%=L2%
1480 IF M2%>Band% THEN Band%=M2%
1490 IF N2%>Band% THEN Band%=N2%
1500 IF J3%>Band% THEN Band%=J3%
1510 IF K3%>Band% THEN Band%=K3%
1520 IF N3%>Band% THEN Band%=N3%
1530 NEXT J%
1540 Band%=(Band%+1)*Nsd%-1
1550 PRINT #Ka%, "DENKLEM SAYISI.....=";Sd%-Ss%
1560 PRINT #Ka%, "REAKSIYON SAYISI...=";Ss%
1570 PRINT #Ka%, "YARI BAND GENISLIGI=";Band%+1
1580 DIM Sr(Sd%,Band%+1)
1590 DIM P(Sd%+Band%+1,1)
1600 DIM Ss(Sd%+Band%+1,3)
1610 REM noktaların koordinatları
1620 INPUT#9, D0%
1630 IF D0%<>D3% THEN PRINT #Ka%, Hata3% : GOTO 2820
1640 PRINT #Ka%, "NOKTALARIN KOORDINATLARI:"
1650 PRINT #Ka%, "nokta","X","Y"

```

```

1660 FOR JZ=1 TO NsZ
1670 INPUT#9, KZ: INPUT#9,X: INPUT#9,Y
1680 PRINT #KaZ, KZ,X,Y
1690 IF KZ<1 OR KZ>NsZ THEN PRINT #KaZ, Hata2$ : Hata$="VAR"
1700 IF Xy(KZ,1)<>0 THEN PRINT #KaZ, Hata5$ : Hata$="VAR"
1710 IF Xy(KZ,2)<>0 THEN PRINT #KaZ, Hata5$ : Hata$="VAR"
1720 IF Hata$="VAR" GOTO 2820
1730 Xy(KZ,1)=X
1740 Xy(KZ,2)=Y
1750 NEXT JZ
1760 REM KUVVETLER
1770 INPUT#9, D0$
1780 IF D0$<>D4$ THEN PRINT #KaZ, Hata3$ : GOTO 2820
1790 PRINT #KaZ, "VERILMIS KUVVETLER:"
1800 IF KsZ=0 THEN PRINT #KaZ, Hata3$ : GOTO 2820
1810 PRINT #KaZ, "nokta","yon","kuvvet"
1820 FOR JZ=1 TO KsZ
1830 INPUT#9,KZ: INPUT#9,YonZ: INPUT#9,Kuv
1840 PRINT #KaZ, KZ,YonZ,Kuv
1850 IF KZ<1 OR KZ>NsZ THEN PRINT #KaZ, Hata2$ : Hata$="VAR"
1860 IF YonZ<1 OR YonZ>2 THEN PRINT #KaZ, Hata4$ : Hata$="VAR"
1870 D2Z=NsdZ*KZ-NsdZ+YonZ
1880 IF P(D2Z,1)<>0 THEN PRINT #KaZ, Hata5$ : Hata$="VAR"
1890 IF Hata$="VAR" GOTO 2820
1900 P(D2Z,1)=Kuv
1910 NEXT JZ
1920 REM elemanlardaki isi degerleri
1930 INPUT #9, D0$
1940 IF D0$<>D5$ THEN PRINT #KaZ, Hata3$ : GOTO 2820
1950 PRINT #KaZ, "VERILMIS ISI DEGERLERI"
1960 IF IeZ=0 THEN PRINT #KaZ, "isi etkisi yok" : GOTO 2130
1970 PRINT #KaZ, "eleman","isi"
1980 FOR IZ=1 TO ABS(IeZ)
1990 INPUT#9,ELZ: INPUT#9, T
2000 PRINT #KaZ, ELZ,T
2010 IF ELZ<1 OR ELZ>EsZ THEN PRINT #KaZ, Hata1$ : Hata$="VAR"
2020 IF Ed(ELZ,7)<>0 THEN PRINT #KaZ, Hata5$ : Hata$="VAR"
2030 IF Hata$="VAR" GOTO 2820
2040 IF IeZ=-EsZ GOTO 2080
2050 GOSUB 4870
2060 NEXT IZ
2070 GOTO 2130
2080 PRINT #KaZ, "butun diger elemanlarda da ayni isi etkisi var "
2090 FOR ELZ=1 TO EsZ
2100 GOSUB 4870
2110 NEXT ELZ
2120 REM sinir sartlari
2130 INPUT#9, D0$
2140 IF D0$<>D6$ THEN PRINT #KaZ, Hata3$ : GOTO 2820
2150 PRINT #KaZ, "VERILMIS SINIR SARTLARI:"
2160 PRINT #KaZ, "nokta","yon","deplasman"
2170 FOR IZ=1 TO SsZ
2180 INPUT#9, KZ: INPUT#9,YonZ: INPUT#9,Dep
2190 PRINT #KaZ, KZ,YonZ,Dep
2200 IF KZ<1 OR KZ>NsZ THEN PRINT #KaZ, Hata2$ : Hata$="VAR"

```

```

2210 IF YonZ<1 OR YonZ>2 THEN PRINT #KaZ, Hata4$ : Hata$="VAR"
2220 JZ=NsdZ#KZ-NsdZ+YonZ
2230 IF Ss(JZ,1)<>0 THEN PRINT #KaZ, Hata5$ : Hata$="VAR"
2240 IF Hata$="VAR" GOTO 2820
2250 Ss(JZ,1)=YonZ
2260 Ss(JZ,2)=Dep
2270 NEXT JZ
2280 INPUT#9, D0$
2290 IF D0$<>D7$ THEN PRINT #KaZ, Hata3$ : GOTO 2820
2300 REM sistemin rijitlik matrisi
2310 GOSUB 4530
2320 REM deplasman kuvvetleri
2330 FOR JZ=1 TO SdZ
2340 Dep=Ss(JZ,2)
2350 IF Dep<>0 THEN GOSUB 5080
2360 NEXT JZ
2370 REM sinir sartlarinin islenmesi
2380 FOR JZ=1 TO SdZ
2390 IF Ss(JZ,1)=0 GOTO 2420
2400 Dep=Ss(JZ,2)
2410 GOSUB 5180
2420 NEXT JZ
2430 REM denklemler sisteminin cozumu
2440 GOSUB 5250
2450 GOTO 2490
2460 FOR IZ=1 TO SdZ
2470 P(IZ,1)=P(IZ,1)/E
2480 NEXT IZ
2490 IF Hata$="TEKIL" THEN PRINT #KaZ, Hata6$ : GOTO 2820
2500 PRINT #KaZ, "DEPLASMANLAR:"
2510 PRINT #KaZ, "nokta","1-yonu","2-yonu"
2520 FOR IZ=1 TO NsZ
2530 PRINT #KaZ, IZ,P(2*IZ-1,1),P(2*IZ,1)
2540 NEXT IZ
2550 REM gerilmeler
2560 PRINT #KaZ, "GERILMELER:"
2570 PRINT #KaZ, "eleman","Sigma-xx","Sigma-yy","Sigma-xy"
2580 GOSUB 3940
2590 REM reaksiyonlar
2600 PRINT #KaZ, "REAKSIYONLAR:"
2610 PRINT #KaZ, "nokta","yon","reaksiyon"
2620 FOR IZ=1 TO SdZ
2630 Sr(IZ,1)=0
2640 NEXT IZ
2650 GOSUB 4530
2660 FOR JZ=1 TO SdZ
2670 YonZ=Ss(JZ,1)
2680 IF YonZ=0 GOTO 2800
2690 A=0
2700 FOR KZ=2 TO BandZ+1
2710 J2Z=JZ-1+KZ
2720 A=A+Sr(JZ,KZ)*P(J2Z,1)
2730 IF JZ<KZ GOTO 2760
2740 J1Z=JZ+1-KZ
2750 A=A+Sr(J1Z,KZ)*P(J1Z,1)

```

```

2760 NEXT KZ
2770 A=(A+Sr(JZ,1)*P(JZ,1))+Ss(JZ,3)
2780 KZ=(JZ-YonZ+2)/2
2790 PRINT #KaZ, KZ, YonZ, A
2800 NEXT JZ
2810 PRINT #KaZ, "-----H E S A P S O N U-----"
2820 END
2830 REM elemanın geometrik özellikleri
2840 REM ucgen eleman
2850 InZ=Ed(EIz,1)
2860 JnZ=Ed(EIz,2)
2870 KnZ=Ed(EIz,3)
2880 LnZ=Ed(EIz,4)
2890 MnZ=Ed(EIz,5)
2900 NnZ=Ed(EIz,6)
2910 X1=Xy(InZ,1) : Y1=Xy(InZ,2)
2920 X2=Xy(JnZ,1) : Y2=Xy(JnZ,2)
2930 X3=Xy(KnZ,1) : Y3=Xy(KnZ,2)
2940 X13=X1-X3 : X32=X3-X2 : X21=X2-X1
2950 Y31=Y3-Y1 : Y23=Y2-Y3 : Y12=Y1-Y2
2960 A=0.5*(X32*Y12-X21*Y23)
2970 RETURN
2980 REM elemanın global rijitlik matrisi
2990 REM ucgen eleman
3000 IF TIP$="D6" THEN B=E/(1-NU*NU) : C=E*NU/(1-NU*NU) : F=E/(2*(1+NU))
3010 IF TIP$="DD" THEN B=E*(1-NU)/((1+NU)*(1-2*NU)) : C=E*NU/((1+NU)*(1-2*NU)) : F=E/(2*(1+NU))
3020 RO=0.375
3030 S=t/(12*A)
3040 GR(1,1)=S*3*(B*Y23*Y23+F*X32*X32)
3050 GR(2,1)=S*3*(C+F)*X32*Y23
3060 GR(2,2)=S*3*(B*X32*X32+F*Y23*Y23)
3070 GR(3,1)=-S*(B*Y31*Y23+F*X13*X32)
3080 GR(3,2)=-S*(C*X32*Y31+F*Y23*X13)
3090 GR(3,3)=S*3*(B*Y31*Y31+F*X13*X13)
3100 GR(4,1)=-S*(C*X13*Y23+F*Y31*X32)
3110 GR(4,2)=-S*(B*X13*X32+F*Y31*Y23)
3120 GR(4,3)=S*3*(C+F)*X13*Y31
3130 GR(4,4)=S*3*(B*X13*X13+F*Y31*Y31)
3140 GR(5,1)=-S*(B*Y12*Y23+F*X21*X32)
3150 GR(5,2)=-S*(C*X32*Y12+F*Y23*X21)
3160 GR(5,3)=-S*(B*Y12*Y31+F*X21*X13)
3170 GR(5,4)=-S*(C*X13*Y12+F*Y31*X21)
3180 GR(5,5)=S*3*(B*Y12*Y12+F*X21*X21)
3190 GR(6,1)=-S*(C*X21*Y23+F*Y12*X32)
3200 GR(6,2)=-S*(B*X21*X32+F*Y12*Y23)
3210 GR(6,3)=-S*(C*X21*Y31+F*Y12*X13)
3220 GR(6,4)=-S*(B*X21*X13+F*Y12*Y31)
3230 GR(6,5)=S*3*(C+F)*X21*Y12
3240 GR(6,6)=S*3*(B*X21*X21+F*Y12*Y12)
3250 GR(7,1)=S*4*(B*Y23*Y31+F*X32*X13)
3260 GR(7,2)=S*4*(C*X32*Y31+F*Y23*X13)
3270 GR(7,3)=S*4*(B*Y31*Y23+F*X13*X32)
3280 GR(7,4)=S*4*(C*X13*Y23+F*Y31*X32)
3290 GR(7,5)=0
3300 GR(7,6)=0

```

```

3310 BR(7,7)=S*B*(B*(Y31*Y31+Y23*Y23+Y31*Y23)+F*(X13*X13+X32*X32+X13*X32))
3320 BR(8,1)=S*A*(C*Y23*X13+F*X32*Y31)
3330 BR(8,2)=S*A*(B*X32*X13+F*Y23*Y31)
3340 BR(8,3)=S*A*(C*Y31*X32+F*X13*Y23)
3350 BR(8,4)=S*A*(B*X13*X32+F*Y31*Y23)
3360 BR(8,5)=0
3370 BR(8,6)=0
3380 BR(8,7)=S*A*(C+F)*(2*X13*Y31+X13*Y23+X32*Y31+2*X32*Y23)
3390 BR(8,8)=S*B*(B*(X13*X13+X32*X32+X13*X32)+F*(Y31*Y31+Y23*Y23+Y31*Y23))
3400 BR(9,1)=0
3410 BR(9,2)=0
3420 BR(9,3)=S*A*(B*Y31*Y12+F*X13*X21)
3430 BR(9,4)=S*A*(C*X13*Y12+F*Y31*X21)
3440 BR(9,5)=S*A*(B*Y12*Y31+F*X21*X13)
3450 BR(9,6)=S*A*(C*X21*Y31+F*Y12*X13)
3460 BR(9,7)=S*A*(B*(Y12*Y31+2*Y12*Y23+Y31*Y31+Y31*Y23)+F*(X21*X13+2*X21*X32+X13*X13+X13*X32))
3470 BR(9,8)=S*A*(C*(X13*Y12+X13*Y31+2*X32*Y12+X32*Y31)+F*(Y31*X21+Y31*X13+2*Y23*X21+Y23*X13))
3480 BR(9,9)=S*B*(B*(Y12*Y12+Y31*Y31+Y12*Y31)+F*(X21*X21+X13*X13+X21*X13))
3490 BR(10,1)=0
3500 BR(10,2)=0
3510 BR(10,3)=S*A*(C*Y31*X21+F*X13*Y12)
3520 BR(10,4)=S*A*(B*X13*X21+F*Y31*Y12)
3530 BR(10,5)=S*A*(C*Y12*X13+F*X21*Y31)
3540 BR(10,6)=S*A*(B*X21*X13+F*Y12*Y31)
3550 BR(10,7)=S*A*(C*(X21*Y31+2*X21*Y23+X13*Y31+X13*Y23)+F*(Y12*X13+2*Y12*X32+Y31*X13+Y31*X32))
3560 BR(10,8)=S*A*(B*(X21*X13+2*X21*X32+X13*X13+X13*X32)+F*(Y12*Y31+2*Y12*Y23+Y31*Y31+Y31*Y23))
3570 BR(10,9)=S*A*(C+F)*(2*X21*Y12+X21*Y31+X13*Y12+2*X13*Y31)
3580 BR(10,10)=S*B*(B*(X21*X21+X13*X13+X21*X13)+F*(Y12*Y12+Y31*Y31+Y12*Y31))
3590 BR(11,1)=S*A*(B*Y23*Y12+F*X32*X21)
3600 BR(11,2)=S*A*(C*X32*Y12+F*Y23*X21)
3610 BR(11,3)=0
3620 BR(11,4)=0
3630 BR(11,5)=S*A*(B*Y12*Y23+F*X21*X32)
3640 BR(11,6)=S*A*(C*X21*Y23+F*Y12*X32)
3650 BR(11,7)=S*A*(B*(2*Y12*Y31+Y12*Y23+Y23*Y31+Y23*Y23)+F*(2*X21*X13+X21*X32+X32*X13+X32*X32))
3660 BR(11,8)=S*A*(C*(2*X13*Y12+X13*Y23+X32*Y12+X32*Y23)+F*(2*Y31*X21+Y31*X32+Y23*X21+Y23*X32))
3670 BR(11,9)=S*A*(B*(Y12*Y12+Y12*Y31+Y23*Y12+2*Y23*Y31)+F*(X21*X21+X21*X13+X32*X21+2*X32*X13))
3680 BR(11,10)=S*A*(C*(X21*Y12+X21*Y23+X13*Y12+2*X13*Y23)+F*(Y12*X21+Y12*X32+Y31*X21+2*Y31*X32))
3690 BR(11,11)=S*B*(B*(Y12*Y12+Y23*Y23+Y12*Y23)+F*(X21*X21+X32*X32+X21*X32))
3700 BR(12,1)=S*A*(C*Y23*X21+F*X32*Y12)
3710 BR(12,2)=S*A*(B*X32*X21+F*Y23*Y12)
3720 BR(12,3)=0
3730 BR(12,4)=0
3740 BR(12,5)=S*A*(C*Y12*X32+F*X21*Y23)
3750 BR(12,6)=S*A*(B*X21*X32+F*Y12*Y23)
3760 BR(12,7)=S*A*(C*(2*X21*Y31+X21*Y23+X32*Y31+X32*Y23)+F*(2*Y12*X13+Y12*X32+Y23*X13+Y23*X32))
3770 BR(12,8)=S*A*(B*(2*X21*X13+X21*X32+X32*X13+X32*X32)+F*(2*Y12*Y31+Y12*Y23+Y23*Y31+Y23*Y23))
3780 BR(12,9)=S*A*(C*(X21*Y12+X21*Y31+X32*Y12+2*X32*Y31)+F*(Y12*X21+Y12*X13+Y23*X21+2*Y23*X13))
3790 BR(12,10)=S*A*(B*(X21*X21+X21*X13+X32*X21+2*X32*X13)+F*(Y12*Y12+Y12*Y31+Y23*Y12+2*Y23*Y31))
3800 BR(12,11)=S*A*(C+F)*(2*X21*Y12+X21*Y23+X32*Y12+2*X32*Y23)
3810 BR(12,12)=S*B*(B*(X21*X21+X32*X32+X21*X32)+F*(Y12*Y12+Y23*Y23+Y12*Y23))
3820 FOR I%=1 TO 12
3830 FOR J%=I%+1 TO 12
3840 BR(I%,J%)=BR(J%,I%)

```

```

3850 NEXT JZ
3860 NEXT IZ
3870 RETURN
3880 FOR JZ=1 TO 12
3890 PRINT#KAZ,USING"###.##";GR(IZ,JZ);
3900 NEXT JZ
3910 PRINT#KAZ,
3920 RETURN
3930 REM gerilme hesabi
3940 FOR EIZ=1 TO EsZ
3950 GOSUB 2850
3960 GOSUB 4450
3970 REM ESIG matris elemanlari
3980 GR(1,1)=B*Y23/6/A
3990 GR(1,2)=C*X32/6/A
4000 GR(1,3)=B*Y31/6/A
4010 GR(1,4)=C*X13/6/A
4020 GR(1,5)=B*Y12/6/A
4030 GR(1,6)=C*X21/6/A
4040 GR(1,7)=B*4*(Y31+Y23)/6/A
4050 GR(1,8)=C*4*(X13+X32)/6/A
4060 GR(1,9)=B*4*(Y12+Y31)/6/A
4070 GR(1,10)=C*4*(X21+X13)/6/A
4080 GR(1,11)=B*4*(Y12+Y23)/6/A
4090 GR(1,12)=C*4*(X21+X32)/6/A
4100 GR(2,1)=C*Y23/6/A
4110 GR(2,2)=B*X32/6/A
4120 GR(2,3)=C*Y31/6/A
4130 GR(2,4)=B*X13/6/A
4140 GR(2,5)=C*Y12/6/A
4150 GR(2,6)=B*X21/6/A
4160 GR(2,7)=C*4*(Y31+Y23)/6/A
4170 GR(2,8)=B*4*(X13+X32)/6/A
4180 GR(2,9)=C*4*(Y12+Y31)/6/A
4190 GR(2,10)=B*4*(X21+X13)/6/A
4200 GR(2,11)=C*4*(Y12+Y23)/6/A
4210 GR(2,12)=B*4*(X21+X32)/6/A
4220 GR(3,1)=F*X32/6/A
4230 GR(3,2)=F*Y23/6/A
4240 GR(3,3)=F*X13/6/A
4250 GR(3,4)=F*Y31/6/A
4260 GR(3,5)=F*X21/6/A
4270 GR(3,6)=F*Y12/6/A
4280 GR(3,7)=F*4*(X13+X32)/6/A
4290 GR(3,8)=F*4*(Y31+Y23)/6/A
4300 GR(3,9)=F*4*(X21+X13)/6/A
4310 GR(3,10)=F*4*(Y12+Y31)/6/A
4320 GR(3,11)=F*4*(X21+X32)/6/A
4330 GR(3,12)=F*4*(Y12+Y23)/6/A
4340 REM gerilme matrisi carpmi
4350 FOR IZ=1 TO 3
4360 SIG(IZ,1)=0
4370 FOR JZ=1 TO 12
4380 SIG(IZ,1)=SIG(IZ,1)+GR(IZ,JZ)*U(JZ)
4390 NEXT JZ
4400 NEXT IZ

```

```

4410 PRINT #KaZ, EI%,SIG(1,1),SIG(2,1),SIG(3,1)
4420 NEXT EI%
4430 RETURN
4440 REM eleman deplasmanlari
4450 FOR IX=1 TO EnsZ
4460 I1Z=NsdZ*Ed(EI%,IX)-1
4470 J1Z=NsdZ*Ed(EI%,IX)
4480 U(NsdZ*IX-1)=P(I1Z,1)
4490 U(NsdZ*IX)=P(J1Z,1)
4500 NEXT IX
4510 RETURN
4520 REM sistem rijitlik matrisi
4530 FOR EI%=1 TO EsZ
4540 GOSUB 2850
4550 GOSUB 3000
4560 REM eleman rijitliginin sistem rijitligine eklenmesi
4570 I1Z=NsdZ*InZ-NsdZ
4580 L1Z=NsdZ*LnZ-NsdZ
4590 J1Z=NsdZ*JnZ-NsdZ
4600 M1Z=NsdZ*MnZ-NsdZ
4610 K1Z=NsdZ*KnZ-NsdZ
4620 N1Z=NsdZ*NnZ-NsdZ
4630 U(1)=I1Z+1
4640 U(2)=I1Z+2
4650 U(7)=L1Z+1
4660 U(8)=L1Z+2
4670 U(3)=J1Z+1
4680 U(4)=J1Z+2
4690 U(9)=M1Z+1
4700 U(10)=M1Z+2
4710 U(5)=K1Z+1
4720 U(6)=K1Z+2
4730 U(11)=N1Z+1
4740 U(12)=N1Z+2
4750 FOR I1Z=1 TO 12
4760 IZ=U(I1Z)
4770 FOR J1Z=1 TO 12
4780 JZ=U(J1Z)
4790 IF JZ<IZ GOTO 4820
4800 J2Z=JZ-IZ+1
4810 Sr(IZ,J2Z)=Sr(IZ,J2Z)+6r(I1Z,J1Z)
4820 NEXT J1Z
4830 NEXT I1Z
4840 NEXT EI%
4850 RETURN
4860 REM isidan olusan kuvvetler
4870 GOSUB 2850
4880 A=E*Alfa*T/(1-Nu)
4890 Ed(EI%,7)=-A
4900 A=A/2*D
4910 D2Z=NsdZ*InZ-NsdZ
4920 P(D2Z+1,1)=P(D2Z+1,1)+A*Y32
4930 P(D2Z+2,1)=P(D2Z+2,1)-A*X23
4940 Ss(D2Z+1,3)=Ss(D2Z+1,3)-A*Y32

```



```

4950 Ss(D2%+2,3)=Ss(D2%+2,3)+A*X23
4960 D2%=Nsd%*Jn%-Nsd%
4970 P(D2%+1,1)=P(D2%+1,1)-A*Y13
4980 P(D2%+2,1)=P(D2%+2,1)+A*X31
4990 Ss(D2%+1,3)=Ss(D2%+1,3)+A*Y13
5000 Ss(D2%+2,3)=Ss(D2%+2,3)-A*X31
5010 D2%=Nsd%*Kn%-Nsd%
5020 P(D2%+1,1)=P(D2%+1,1)+A*Y21
5030 P(D2%+2,1)=P(D2%+2,1)-A*X12
5040 Ss(D2%+1,3)=Ss(D2%+1,3)-A*Y21
5050 Ss(D2%+2,3)=Ss(D2%+2,3)+A*X12
5060 RETURN
5070 REM verilmiş deplasmanlardan oluşan kuvvetler
5080 T=E*Dep
5090 FOR K%=2 TO Band%+1
5100 J2%=J%-1+K%
5110 P(J2%,1)=P(J2%,1)-Sr(J%,K%)*T
5120 IF J%<K% GOTO 5150
5130 J1%=J%+1-K%
5140 P(J1%,1)=P(J1%,1)-Sr(J1%,K%)*T
5150 NEXT K%
5160 RETURN
5170 REM sınır şartlarının islenmesi
5180 FOR K%=2 TO Band%+1
5190 Sr(J%,K%)=0
5200 IF J%>K% THEN Sr(J%+1-K%,K%)=0
5210 NEXT K%
5220 Sr(J%,1)=1 : P(J%,1)=E*Dep
5230 RETURN
5240 REM denklem sisteminin çözümü(CHOLESKY)
5250 G=0 : A$="DUZENLI"
5260 REM norm
5270 FOR I%=1 TO Sd%
5280 IF Sr(I%,1)>G THEN G=Sr(I%,1)
5290 NEXT I%
5300 IF G<=0 GOTO 5750
5310 G=G*0.00000001
5320 LZ=Band%+1
5330 REM carpanlara ayırma
5340 FOR N%=1 TO Sd%
5350 T=Sr(N%,1)
5360 IF T<G GOTO 5750
5370 T=SQR(T)
5380 FOR J%=1 TO LZ
5390 Sr(N%,J%)=Sr(N%,J%)/T
5400 NEXT J%
5410 FOR J%=1 TO Band%
5420 I%=N%+J%
5430 IF I%>Sd% GOTO 5500
5440 T=Sr(N%,J%+1)

```

```

5450 FOR KZ=JZ TO BandZ
5460 IIZ=1+KZ-JZ
5470 Sr(IZ, IIZ)=Sr(IZ, IIZ)-T*Sr(NZ, KZ+1)
5480 NEXT KZ
5490 NEXT JZ
5500 NEXT NZ
5510 REM ileri hesap
5520 FOR NZ=1 TO SdZ
5530 P(NZ,1)=P(NZ,1)/Sr(NZ,1)
5540 FOR JZ=1 TO BandZ
5550 IZ=NZ+JZ
5560 IF IZ>SdZ GOTO 5600
5570 T=Sr(NZ, JZ+1)
5580 P(IZ,1)=P(IZ,1)-T*P(NZ,1)
5590 NEXT JZ
5600 NEXT NZ
5610 REM geri hesap
5620 P(SdZ,1)=P(SdZ,1)/Sr(SdZ,1)
5630 FOR IZ=1 TO SdZ-1
5640 KZ=SdZ-IZ
5650 T=0
5660 FOR JZ=1 TO BandZ
5670 IIZ=JZ+KZ
5680 IF SdZ<IIZ GOTO 5710
5690 T=T+Sr(KZ, JZ+1)*P(IIZ,1)
5700 NEXT JZ
5710 P(KZ,1)=(P(KZ,1)-T)/Sr(KZ,1)
5720 NEXT IZ
5730 RETURN
5740 REM matris tekil veya negatif tarifli
5750 A$="TEKIL":PRINT#KAZ,"MATRIS TEKIL !":PRINT#KAZ, NZ;T:STOP
5760 RETURN
5770 REM DATA CONVERSION
5780 OPENIN DAT$
5790 OPENOUT "D.DAT"
5800 LINE INPUT#9, S$
5810 IZ=INSTR(1,S$, " "):SAT$=LEFT$(S$, IZ-1)
5820 IF MID$(S$, IZ+1, 4)<>"DATA" GOTO 5800
5830 IZ=INSTR(1,S$, "DATA"):LZ=LEN(S$)
5840 S$=RIGHT$(S$, LZ-IZ-4)
5850 LZ=LEN(S$):JZ=1:IF LZ=0 GOTO 5930
5860 IZ=INSTR(JZ, S$, ", "):IF IZ=JZ GOTO 5930
5870 IF IZ=0 THEN IZ=LZ+1
5880 L$=MID$(S$, JZ, IZ-JZ):PRINT#9, L$
5890 JZ=IZ+1:IF JZ<=LZ GOTO 5860
5900 IF L$<>"SON" GOTO 5800
5910 CLOSEIN:CLOSEOUT:OPENIN "D.DAT"
5920 RETURN
5930 PRINT #KAZ, "DATALARDA HATA VAR!": END

```

## KAYNAKLAR

- Topçu, A., 1987, Düzlem kafes, uzay kafes ve levha sistem-  
lerin statik hesabı, A.Ü. yayınları, No: 221, Eskişehir.
- İnan, M., 1981, Cisimlerin mukavemeti, İstanbul.
- Przemieniecki, J.S., 1968, Theory of matrix structural  
analysis Mc Graw Hill, Newyork.
- Cook, R.D., 1974, Concepts and applications of finite  
element analysis, By, John Wiley-Sons inc.
- Gallegher, R.H., 1976, Finite element analysis. Springer  
verlag, Berlin-Heidelberg-Newyork.
- Topçu, A., 1986, Sonlu elemanlar metodu, Ders notları.
- Dankert, J., 1977, Numerische Methoden der Mechanik  
Springer Verlag Wien-Newyork Veb. Fachburchverlag.
- 
- Cheung, Y.K., Yeo, M.F., 1979, A practical introduction to  
finite element analysis, Pitman Publishing Limited.
- Holand, I, and Bell, K., 1972, Division of structural  
mechanics, The Technical University of Norway, Tapir.
- İnan, M., 1968, Düzlemde elastisite teorisi, İ.T.Ü.  
Kütüphanesi, Sayı: 750.