174080

KONVEKS KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN KONVEKS DEVAMI VE DİFERANSİYEL İÇERMELER TEORİSİNE UYGULAMALARI

Serkan Ali DÜZCE
Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Haziran - 2003

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Serkan Ali Düzce'nin **Konveks Küme Değerli Dönüşümlerin Konveks Devamı ve Diferansiyel İçermeler Teorisine Uygulamaları** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Doktora tezi **24/06/2003** tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Doç. Dr. Halig Hüseyinov	
Üye	:	Prof. Dr. Orhan Özer	
Üye	:	Prof. Dr. Kamal Soltanov	
Üye	:	Prof. Dr. Yalçın Küçük	
Üye	:	Doç. Dr. Vakıf Caferov	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 25.06.2003 tarih ve ..21/3...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Orhan ÖZER
Fen Bilimleri Enstitüsü
Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

KONVEKS KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN KONVEKS DEVAMI VE DİFERANSİYEL İÇERMELER TEORİSİNE UYGULAMALARI

SERKAN ALİ DÜZCE

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Halig HÜSEYİNOV

2003, 124 Sayfa

Bu tezde, aralık üzerinde tanımlı kompakt, konveks küme değerli dönüşümler için konveks devam tanımlanmış, konveks devamın varlığı araştırılmış ve konveks devamın olmadığı durumlar incelenmiştir. Ayrıca konveks devamın maksimallik özelliği ele alınmış, küme değerli dönüşümlerin konveks devamının varlığı ile Lipschitz sürekliliği arasındaki bağlantı araştırılmıştır. Bunun yanında verilen küme değerli dönüşümün değer kümelerine uzaklığı, verilen değeri geçmeyen erişim kümelerine sahip diferansiyel içermenin bulunması problemi ele alınmıştır. Problem, önce verilen dönüşümün afin tüp olduğu özel durum için çözülmüştür. Sonra özel durum için sunulan yöntem kullanılarak kompakt, konveks değerli, sürekli küme değerli dönüşümler için çözüm verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konveks Devam, Küme Değerli Dönüşüm, Diferansiyel İçerme, Erişim Kümesi, İntegral Tünel.

ABSTRACT

PhD Thesis

CONVEX CONTINUATION OF THE CONVEX SET VALUED MAPS AND APPLICATIONS TO THE DIFFERENTIAL INCLUSION THEORY

SERKAN ALİ DÜZCE

Anadolu University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Assoc. Prof. Kh.G. GUSEINOV
2003, 124 Pages

In this thesis, convex continuation for the compact, convex set valued maps on an interval was defined, existence of the convex continuation of the compact, convex set valued maps was studied and the cases which there is no convex continuation were investigated. Maximality of the convex continuation was also considered. The relation between the existence of the convex continuation of the compact, convex set valued maps and the Lipschitz continuity of the set valued maps was investigated. Finally, an inverse problem of the differential inclusion theory was considered. It is required to define a differential inclusion so that the Hausdorff distance between the reachable sets of this inclusion and the value sets of the given set valued map does not exceed the given value. As a first step, the problem was solved for a special case where the set valued map is an affine tube. Then, on generalizing this approach, a solution was obtained for the compact, convex valued, continuous set valued maps.

Keywords: Convex Continuation, Set Valued Map, Differential Inclusion, Reachable Set, Integral Funnel.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Orhan ÖZER, Doç. Dr. Vakıf CAFEROV, danışman hocam Doç. Dr. Halig HÜSEYİNOV'a ve çalışmalarım esnasındaki özverilerinden dolayı sevgili aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	:	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
$\|\|x\|\|$	:	x vektörünün Öklid normu
B	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının açık birim yuvarı
$\overline{B}$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının kapalı birim yuvarı
$\langle x, y \rangle$	:	x ve y vektörlerinin iç çarpımları
$B(x_0, \delta)$	:	x_0 noktasının açık δ komşuluğu
$\overline{B}(x_0, \delta)$	:	x_0 noktasının kapalı δ komşuluğu
$d(x, A)$	:	x noktasının A kümesine uzaklığı
$C([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$	:	$[t_0, \theta]$ aralığından $\mathbb{R}^n$ uzayına tanımlı, sürekli fonksiyonlar uzayı
$K(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının boş olmayan, kompakt alt kümeleri uzayı
$h(E, F)$	:	E ve F kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı
$X(t_0, x_0)$	:	Diferansiyel içermenin $x(t_0) = x_0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerinin kümesi
$X(t_0, X_0)$	:	Diferansiyel içermenin $x(t_0) \in X_0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerinin kümesi
$X(t; t_0, x_0)$	:	(t_0, x_0) başlangıç noktası için diferansiyel içermenin t anındaki erişim kümesi
$X(t; t_0, X_0)$	:	(t_0, X_0) başlangıç kümesi için diferansiyel içermenin t anındaki erişim kümesi
$H(t_0, x_0)$	:	Diferansiyel içermenin (t_0, x_0) noktasından çıkan integral tüneli
$H(t_0, X_0)$		Diferansiyel içermenin (t_0, X_0) kümesinden çıkan integral tüneli
$D^+V(t, x)$	:	$V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün (t, x) noktasındaki üst sağ türev kümesi
$D^-V(t, x)$	:	$V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün (t, x) noktasındaki üst sol türev kümesi

GİRİŞ

Küme değerli analiz matematiğin çeşitli dallarda pek çok uygulaması olan çağdaş alanlarından biridir. Küme değerli analizin temel tanım ve konuları ilk olarak kontrol sistemleri teorisindeki bazı problemlere çözüm aranırken ortaya konmuştur. O yıllardan bugüne küme değerli analiz, matematiğin önemli dallarından biri haline gelmiştir.

Fizik, ekonomi, mekanik ve daha birçok uygulama alanında ortaya çıkan problemlere çözüm aranırken karşılaşılan dönüşümler tek değerli olmayabilir ya da bulunan fonksiyonlar diferansiyellenebilir olmayabilir. Bu tür problemlerin çözümlerinin araştırılmasında klasik analizin yöntemleri yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle diferansiyellenebilir olmayan fonksiyonlar ve küme değerli dönüşümler için yeni metodlar geliştirilmesi gerekmiştir. Bugün, klasik analizin birçok problemi, küme değerli analiz kapsamında incelenmektedir. Küme değerli dönüşümlerin alttan yarı sürekliği, üstten yarı sürekliği (bkz. $[1-6]$), diferansiyeli ve türev kümeleri (bkz. $[1,7-19]$), alt yarı sürekli fonksiyonlar için ortalama değer eşitsizliği (bkz. $[20-22]$), küme değerli dönüşümlerin sabit noktalarının, denge noktalarının varlığı (bkz. $[23-31]$), küme değerli dönüşümlerin integralleri (bkz. $[1,32-37]$), bu problemlere hemen verilebilecek örneklerden birkaçıdır.

Sadece klasik analizin bilinen problemlerini genel formda incelemekle kalmayan küme değerli analiz, bugün kendine ait konuları da araştırmaktadır. Bu konular arasında küme değerli dönüşümlerin parametrelendirilmesi (bkz. $[1,38-40]$), küme değerli dönüşümlerin sürekli, ölçülebilir, Lipschitz türü selektörlerinin varlığı (bkz. $[1,41-50]$), konveks, monoton küme değerli dönüşümlerin özellikleri (bkz. $[50-54]$) sayılabilir.

Küme değerli analizin uygulama bulduğu alanlardan biri de diferansiyel içermeler teorisidir. Diferansiyel içermeler iki açıdan ele alınabilir. İlk olarak diferansiyel içerme, sağ tarafı küme değerli dönüşüm olan diferansiyel denklemdir. İkinci olarak davranışı diferansiyel denklemle verilen kontrol sisteminin genel formudur. Diferansiyel içermeler ilk olarak (bkz. [55, 56])'da, sağ tarafı küme değerli dönüşüm olan diferansiyel denklemler olarak incelenmiş, daha sonra (bkz. [44, 57])'de, sağ tarafı durum vektörüne göre süreksiz diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin çözümlerinin varlığı araştırılırken altyapı olarak kullanılmıştır.

60'lı yıllarda diferansiyel içermeler için Cauchy probleminin çözümlerinin varlığı, erişim kümeleri ve integral tünelin kapalılığı, kompaktlığı, bağlantılılığı, çözümler kümesinin başlangıç koşullarına bağımlılığı araştırılmıştır (bkz. [44, 58 – 63]). 70'lerde diferansiyel içermeler bir kontrol sistemi olarak incelenmeye başlanmış, davranışı diferansiyel içerme olarak verilen kontrol sistemleri için Pontryagin maksimum prensibi kanıtlanmıştır (bkz. [21, 64, 65]). Bunu 80'lerde diferansiyel içermelerin evalusyon denklemlerinin bulunuşu (bkz. [66, 67]), çözümlerin viability özelliklerinin incelenişi izlemiştir (bkz. [7, 68 – 76]). 80'li yılların sonu ve 90'lı yıllarda diferansiyel içermelerin viability özelliği, diferansiyel oyunlar teorisi ve Hamilton-Jacobi denklemleri teorisinde çeşitli uygulama alanları bulmuştur (bkz. [77 – 86]). Verilen bir diferansiyel oyunun değer fonksiyonuna, bir başka Hamilton-Jacobi denkleminin bir viscosity (veya minimaks) çözümü karşılık getirilebileceği ve tersine verilen bir Hamilton-Jacobi denkleminin bir viscosity çözümünün, bir başka diferansiyel oyunun değer fonksiyonu olduğu kanıtlanmıştır (bkz. [84, 87 – 89]). Böylece diferansiyel oyunlar teorisi ve Hamilton-Jacobi denklemleri teorisi arasındaki sıkı bağ ortaya çıkarılmıştır.

Diferansiyel içermelerin erişim kümeleri ve integral tünelinin özellikleri, erişim kümeleri ve integral tünellerinin nümerik hesaplanması konuları geniş kapsamlı olarak araştırılmış konulardır (bkz. [90 – 98]).

Tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tezde yapılan araştırmalar kapsamında konveks analiz, küme değerli analiz ve diferansiyel içermeler teorisinin bazı temel tanım ve teoremleri verilmiştir.

İkinci bölümde konveks küme değerli dönüşümler için devam tanımı verilmiş, konveks, kompakt küme değerli dönüşümlerin konveks devamının varlığı incelenmiş ve konveks devamın olmadığı durumlar araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, küme değerli dönüşümün türev kümeleri yardımıyla ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde maksimal konveks devam tanımlanmış ve devamın olduğu durumlarda, konveks, kompakt küme değerli dönüşümün maksimal devamının özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde kapalı, sınırlı aralıkta tanımlanmış konveks, kompakt küme değerli dönüşümün konveks devamının varlığı ile bu küme değerli dönüşümün Lipschitz sürekliliği arasındaki ilişki incelenmiştir. Konveks küme değerli dönüşümlerin Lipschitz sürekliliği [99 – 101]'de araştırılmıştır. Kapalı, sınırlı kümede tanımlı konveks küme değerli dönüşümler bu aralıkta Lipschitz sürekli olmayabilir. Tez'de kapalı, sınırlı aralıkta tanımlı ve konveks devamı olan konveks küme değerli dönüşümlerin bu aralıkta Lipschitz sürekli olduğu kanıtlanmıştır. Tersine değerlerinin içi boş olmayan, Lipschitz sürekli, konveks, kompakt küme değerli dönüşümün konveks devamının varlığı da kanıtlanmıştır.

Beşinci bölümde diferansiyel içermeler teorisinin bir ters problemi incelenmektedir. Verilen konveks, kompakt değerli küme değerli dönüşümün değer kümelerine Hausdorff uzaklığı ε sayısını geçmeyen erişim kümelerine sahip bir diferansiyel içermenin bulunması problemi ele alınmıştır. Bu türden problemlerin çözümü, matematiksel modellemede faz durumu kesin ölçülemeyen belirsiz kontrol sistemlerin dinamiğinin bulunması için kullanılabilir. Ters problem [99 – 101]'de incelenmiştir. [102]'de grafiği konveks, kompakt küme değerli dönüşümler için problem çözülmüştür. Tezde, problem önce verilen küme değerli dönüşümün afin tüp olduğu özel durumda, sonra da özel durum için sunulan yöntem uygulanarak konveks, kompakt değerli, sürekli küme değerli dönüşümler için çözülmüştür.

1 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde analiz, konveks analiz, küme değerli analiz ve diferansiyel içermeler teorisinin sonraki bölümler için gerekli olan bazı temel tanım ve teoremleri verilecektir.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

$\mathbb{R}^n$ ile n-boyutlu Öklid uzayı, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

ile x vektörünün normu,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

ile x ve y vektörlerinin iç çarpımları gösterilsin. Açıktır ki, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ olur.

$A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $\overline{A}$ ile A kümesinin kapanışı, ∂A ile sınırı, $int(A)$ ile içi, $co(A)$ ile kapalı konveks zarfı gösterilsin.

$\mathbb{R}^n$'nin açık birim yuvarı B, kapalı birim yuvarı $\overline{B}$ ve $\mathbb{R}^n$'nin birim küresi üzerindeki noktalar da S ile gösterilsin. Yani,

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\},\ \overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \text{ ve } S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

olsun.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\delta > 0$ olmak üzere, x_0 noktasının açık δ komşuluğu

$$B(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \delta\}$$

ve x_0 noktasının kapalı δ komşuluğu

$$\overline{B}(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq \delta\}$$

ile gösterilsin.

Bunların dışında, x noktasının A kümesine uzaklığı

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

olarak tanımlanır.

$K(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$ uzayının boş olmayan, kompakt alt kümelerinin ailesi gösterilsin.

Kümeler için cebirsel toplam ve skaler ile çarpma aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 1.1.1. *E, $F \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere*

$$\{ e + f \mid e \in E, f \in F \}$$

kümesine E ile F kümesinin cebirsel toplamı denir ve $E + F$ ile gösterilir.

$K(\mathbb{R}^n)$ küme ailesi, kümelerin cebirsel toplamı işlemine göre kapalıdır. Yani

$$E, F \in K(\mathbb{R}^n) \Rightarrow E + F \in K(\mathbb{R}^n)$$

olur.

E, F, $G \in K(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

1. $E + F = F + E$
2. $E + (F + G) = (E + F) + G$
3. $E + \{0\} = E \quad (0 \in \mathbb{R}^n)$

eşitlikleri kolayca doğrulanır.

Tanım 1.1.2. *$E \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere*

$$\{ \lambda \cdot e \mid e \in E \}$$

kümesine E kümesinin $\lambda \in \mathbb{R}$ ile çarpımı denir ve $\lambda \cdot E$ ile gösterilir.

$K(\mathbb{R}^n)$ küme ailesi, kümelerin skaler ile çarpımına göre kapalıdır. Yani

$$E \in K(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \lambda \cdot E \in K(\mathbb{R}^n)$$

olur.

$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $E, F \in K(\mathbb{R}^n)$ için aşağıdakiler doğrudur.

1. $\alpha \cdot (\beta \cdot E) = (\alpha\beta) \cdot E$

2. $1 \cdot E = E$

3. $\alpha \cdot (E + F) = \alpha \cdot E + \alpha \cdot F$

4. $(\alpha + \beta) \cdot E \subset \alpha \cdot E + \beta \cdot E$.

Önerme 1.1.3. *$\alpha, \beta \geq 0$ ve $E \in K(\mathbb{R}^n)$ konveks küme ise*

$$(\alpha + \beta) \cdot E = \alpha \cdot E + \beta \cdot E$$

olur.

$C([a,b], \mathbb{R}^n)$ ile $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonların kümesi gösterilsin. $x(\cdot) \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$ için

$$\|x(\cdot)\|_C = \max_{t \in [a,b]} \|x(t)\|$$

olsun. $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ kümesi $\|\cdot\|_C$ ile normlu uzaydır.

Aşağıdaki önerme $\mathbb{R}^n$ uzayındaki kümelerin kompaktlığını karakterize etmektedir.

Önerme 1.1.4. *$A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul, A kümesinin kapalı ve sınırlı olmasıdır.*

$f(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun mutlak sürekliliği aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 1.1.5. *$f(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $[a,b]$ aralığının ikişer ikişer ayrık keyfi (a_i, b_i), $(i = 1, 2, \ldots, k)$ alt aralıkları için $\sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i) < \delta$ iken*

$$\sum_{i=1}^{k} \|f(b_i) - f(a_i)\| < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, $f(\cdot)$ fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir.

Yukarıdaki tanımdan mutlak sürekli fonksiyonlar aynı zamanda düzgün süreklidir. Ancak bunun tersi doğru değildir.

Tanım 1.1.6. *$f(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon olsun. Her $t_1, t_2 \in [a,b]$ için*

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| \leq L|t_1 - t_2|$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı varsa, $f(\cdot)$ fonksiyonuna L sabiti ile Lipschitz sürekli fonksiyon denir.

Tanım 1.1.7. *$f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon olsun. Her $D \subset \mathbb{R}^m$ sınırlı kümesi ve her $x_1,\, x_2 \in D$ için*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

olacak şekilde $L = L(D) > 0$ sayısı varsa, $f(\cdot)$ fonksiyonuna yerel Lipschitz fonksiyon denir.

Mutlak sürekli fonksiyonların tanımından aşağıdaki önermeler elde edilir.

Önerme 1.1.8. *$f(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu Lipschitz sürekli ise $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir.*

Önerme 1.1.9. *$u(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyon ve her $t \in [a,b]$ için*

$$f(t) = \int_a^t u(\tau)\, d\tau$$

ise, $f(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}$ mutlak sürekli fonksiyondur.

$f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveksliği aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 1.1.10. *$\forall \alpha,\, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ ve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ için*

$$f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

eşitsizliğini sağlayan $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Teorem 1.1.11. *[53, 103] $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise yerel Lipschitzdir.*

Önerme 1.1.12. *[103] $K \subset \mathbb{R}^n$ kapalı, konveks bir küme ve $y_0 \notin K$ olsun. O zaman $\|x_0 - y_0\| = d(y_0, K)$ olacak şekilde bir tek $x_0 \in K$ vardır ve her $x \in K$ için*

$$\langle x_0 - y_0, x_0 - x \rangle \leq 0 \tag{1.1.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Tersine $x_0 \in K$ olmak üzere her $x \in K$ için (1.1.1) *eşitsizliği sağlanıyorsa,*

$$\|x_0 - y_0\| = d(y_0, K) \tag{1.1.2}$$

olur ve (1.1.2) *eşitsizliğini sağlayan $x_0 \in K$ tektir.*

1.2 Küme Değerli Dönüşümler. Süreklilik Kavramı ve Türev Kümeleri

Bu bölümde küme değerli analizin temel tanımları verilecek ve konu ile ilgili bazı teoremler ifade edilecektir.

Aşağıda $\mathbb{R}^n$'de verilen iki küme arasındaki Hausdorff uzaklığı tanımlanmaktadır.

Tanım 1.2.1. *$E, F \subset \mathbb{R}^n$ olsun.*

$$h(E, F) = \max \left\{ \sup_{x \in E} d(x, F), \sup_{y \in F} d(y, E) \right\}$$

sayısına E ve F kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı denir.

Hausdorff uzaklığı aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. Her $E \subset \mathbb{R}^n$ için $h(E, E) = 0$,

ii. $E, F \subset \mathbb{R}^n$ için $h(E, F) = 0 \Leftrightarrow \overline{E} = \overline{F}$,

iii. Her $E, F \subset \mathbb{R}^n$ için $h(E, F) \geq 0$,

iv. Her $E, F, G \subset \mathbb{R}^n$ için $h(E, F) \leq h(E, G) + h(G, F)$.

ii. koşulundan $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ve $E \neq F$ için $h(E, F) = 0$ olabileceği görülmektedir. Bu nedenle yukarıdaki gibi tanımlanan h fonksiyonu $2^{\mathbb{R}^n}$ üzerinde yani, $\mathbb{R}^n$ uzayının tüm alt kümelerinin oluşturduğu küme üzerinde bir metrik değildir.

$h(\cdot) : K(\mathbb{R}^n) \times K(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ fonksiyonu metrik koşullarını sağlar. Yani $(K(\mathbb{R}^n), h)$ bir metrik uzaydır.

Çoğu zaman iki küme arasındaki Hausdorff uzaklığının bulunması için aşağıdaki önerme kullanılır.

Önerme 1.2.2. *$E, F \in K(\mathbb{R}^n)$ olsun.*

$$h(E, F) = \inf\{r > 0 \,|\, E \subset F + r \cdot B \ , \quad F \subset E + r \cdot B\}$$

olur.

Aşağıda küme değerli dönüşüm kavramı tanımlanmıştır.

Tanım 1.2.3. *$A \subset \mathbb{R}^n$ ve her $x \in A$ için $F(x) \subset \mathbb{R}^m$ olsun. Bu durumda, $F(\cdot)$ dönüşümüne küme değerli dönüşüm ya da küme değerli fonksiyon denir ve $F(\cdot) : A \to \mathbb{R}^m$ şeklinde gösterilir. Ayrıca*

$$\{(x, y) \in A \times \mathbb{R}^m \mid y \in F(x)\}$$

olarak tanımlanan kümeye $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün grafiği denir ve $grF(\cdot)$ ile gösterilir.

Süreklilik

Fonksiyonlara benzer olarak küme değerli dönüşümler için de süreklilik tanımı verilebilir.

Tanım 1.2.4. *$A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $F(\cdot) : A \to K(\mathbb{R}^m)$ ve $x_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık keyfi $x \in B(x_0, \delta)$ için*

$$h(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı varsa, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne x_0 noktasında süreklidir denir.

$F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü her $x_0 \in A$ noktasında sürekli ise $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü A kümesinde süreklidir denir.

Önerme 1.2.2 uyarınca $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü x_0 noktasında sürekli ise verilen $\forall \varepsilon > 0$ için $x \in B(x_0, \delta)$ iken

$$\begin{aligned} F(x) &\subset F(x_0) + \varepsilon \cdot B \\ F(x_0) &\subset F(x) + \varepsilon \cdot B \end{aligned}$$

olacak biçimde $\delta > 0$ vardır.

Tanım 1.2.5. *$A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $F(\cdot) : A \to K(\mathbb{R}^m)$ ve $x_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık keyfi $x \in B(x_0, \delta)$ için*

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon \cdot B$$

olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı varsa, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne x_0 noktasında üstten yarı süreklidir denir.

Tanım 1.2.6. *$A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $F(\cdot) : A \to K(\mathbb{R}^m)$ ve $x_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık keyfi $x \in B(x_0, \delta)$ için*

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon \cdot B$$

olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı varsa, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne x_0 noktasında alttan yarı süreklidir denir.

Açıktır ki, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü, $x_0 \in A$ noktasında hem alttan hem de üstten yarı sürekli ise $x_0 \in A$ noktasında sürekli olur.

Yine fonksiyonlarda olduğu gibi küme değerli dönüşümler için de Lipschitz süreklilik tanımı yapılabilir.

Tanım 1.2.7. *$F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^m)$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için*

$$h(F(x), F(y)) \leq L \|x - y\|$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı varsa, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne L sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlıyor veya L sabitiyle Lipschitz süreklidir denir.

Konveks küme değerli dönüşüm ve kompakt küme değerli dönüşüm tanımları aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.2.8. *$A \subset \mathbb{R}^n$ konveks küme olmak üzere $F(\cdot) : A \to K(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümünün grafiği konveks küme ise $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü konvekstir denir.*

Tanım 1.2.9. *$A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $F(\cdot) : A \to K(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümünün grafiği kompakt küme ise $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü kompaktır denir.*

Önerme 1.2.10. *$A \subset \mathbb{R}^n$ konveks küme olmak üzere $F(\cdot) : A \to K(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşüm olsun. $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün konveks olması için gerek ve yeter koşul her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\lambda \cdot F(x_1) + (1-\lambda) \cdot F(x_2) \subset F(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2) \tag{1.2.3}$$

içermesinin sağlanmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $A \subset \mathbb{R}^n$ konveks küme olmak üzere $F(\cdot) : A \to K(\mathbb{R}^m)$ konveks küme değerli dönüşüm olsun. $\lambda \in [0,1]$ ve $x_1,\, x_2 \in A$ için (1.2.3) içermesinin sağlandığı kanıtlanmalıdır.

$$y \in \lambda \cdot F(x_1) + (1-\lambda) \cdot F(x_2) \tag{1.2.4}$$

olarak alınsın. O zaman $y = \lambda \cdot y_1 + (1-\lambda) \cdot y_2$ olacak biçimde $y_1 \in F(x_1)$, $y_2 \in F(x_2)$ vardır ve $(x_1, y_1) \in grF(\cdot)$, $(x_2, y_2) \in grF(\cdot)$ olur. $A \subset \mathbb{R}^n$ konveks olduğundan

$$\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2 \in A$$

olur. $F(\cdot) : A \to K(\mathbb{R}^m)$ konveks küme değerli dönüşüm olduğundan $grF(\cdot) \subset A \times \mathbb{R}^m$ konveks kümedir. O halde

$$\lambda \cdot (x_1, y_1) + (1-\lambda) \cdot (x_2, y_2) \in grF(\cdot)$$

olur. Buradan

$$\lambda \cdot y_1 + (1-\lambda) \cdot y_2 \in F(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2)$$

ve (1.2.3) uyarınca

$$y \in F(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2)$$

olduğu elde edilir. Bir başka deyişle (1.2.3) içermesi sağlanır.

($\Leftarrow$) Tersine her $\lambda \in [0,1]$ ve her x_1, $x_2 \in A$ için (1.2.3) içermesi sağlansın. $grF(\cdot) \subset A \times \mathbb{R}^m$ kümesinin konveks olduğu kanıtlansın. $(x_1, y_1) \in grF(\cdot)$, $(x_2, y_2) \in grF(\cdot)$ ve $\lambda \in [0,1]$ olsun. O zaman $y_1 \in F(x_1)$, $y_2 \in F(x_2)$ ve $\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2 \in A$ olur. Buradan

$$\lambda \cdot y_1 + (1-\lambda) \cdot y_2 \in \lambda \cdot F(x_1) + (1-\lambda) \cdot F(x_2)$$

ve (1.2.3) uyarınca $\lambda \in [0,1]$ için

$$\lambda \cdot y_1 + (1-\lambda) \cdot y_2 \in F(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2)$$

olduğu bulunur. Bu ise

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2, \lambda \cdot y_1 + (1-\lambda) \cdot y_2) &\in grF(\cdot) \\ \lambda \cdot (x_1, y_1) + (1-\lambda) \cdot (x_2, y_2) &\in grF(\cdot) \end{aligned}$$

olması demektir. Bir başka deyişle $grF(\cdot) \subset A \times \mathbb{R}^m$ konveks kümedir.

Türev Kümeleri

$K \subset \mathbb{R}^n$ kapalı bir küme olsun. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ için

$$T_K^U(x) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{\delta \to 0+} \frac{1}{\delta} d(x + \delta \cdot r, K) = 0 \right\}$$

$$T_K^L(x) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{\delta \to 0+} \frac{1}{\delta} d(x + \delta \cdot r, K) = 0 \right\}$$

olarak tanımlansın.

Tanım 1.2.11. [8] *$T_K^U(x)$ ($T_K^L(x)$) kümesine K kümesinin x noktasındaki üst (alt) contingent konisi adı verilir.*

Önerme 1.2.12. *$K \subset \mathbb{R}^n$ kapalı küme olmak üzere $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ için $T_K^U(x)$, $T_K^L(x)$ kümeleri kapalıdır.*

- $x \notin K$ *ise* $T_K^U(x) = \emptyset,\ T_K^L(x) = \emptyset,$

- $x \in intK$ *ise* $T_K^U(x) = \mathbb{R}^n,\ T_K^L(x) = \mathbb{R}^n.$

Önerme 1.2.13. $T_K^U(x),\ T_K^L(x)$ *kümeleri konidir.*

Bir küme değerli dönüşümün alt ve üst diferansiyeli tanımları aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.2.14. *[1]* $V(\cdot) : [a,b] \to K(\mathbb{R}^n)$ *herhangi bir küme değerli dönüşüm olsun.* $p \in \mathbb{R}$ *olmak üzere grafiği* $T_V^U(t,x) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *kümesiyle aynı olan*

$$p \to D^U V(t,x)|(p)$$

küme değerli dönüşümüne $V(\cdot)$ *küme değerli dönüşümünün* (t,x) *noktasındaki üst diferansiyeli denir.*

Tanım 1.2.15. *[1]* $V(\cdot) : [a,b] \to K(\mathbb{R}^n)$ *herhangi bir küme değerli dönüşüm olsun.* $p \in \mathbb{R}$ *olmak üzere grafiği* $T_V^L(t,x) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *kümesiyle aynı olan*

$$p \to D^L V(t,x)|(p)$$

küme değerli dönüşümüne $V(\cdot)$ *küme değerli dönüşümünün* (t,x) *noktasındaki alt diferansiyeli denir.*

$(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$D^U V(t,x)|(1) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \exists x_k \in V(t_k),\ t_k > t,\ \lim_{t_k \to t^+} \frac{x_k - x}{t_k - t} = r \right\}$$

kümesine $V(\cdot)$ dönüşümünün (t,x) noktasındaki üst sağ türevi,

$$D^L V(t,x)|(1) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \exists x(\tau) \in V(\tau),\ \tau > t,\ \lim_{\tau \to t^+} \frac{x(\tau) - x}{\tau - t} = r \right\}$$

kümesine $V(\cdot)$ dönüşümünün (t,x) noktasındaki alt sağ türevi,

$$D^U V(t,x)|(-1) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \exists x_k \in V(t_k),\ t_k < t,\ \lim_{t_k \to t^-} \frac{x_k - x}{t_k - t} = r \right\}$$

kümesine $V(\cdot)$ dönüşümünün (t,x) noktasındaki üst sol türevi,

$$D^L V(t,x)|(-1) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \exists x(\tau) \in V(\tau),\ \tau < t,\ \lim_{\tau \to t^-} \frac{x(\tau) - x}{\tau - t} = r \right\}$$

kümesine $V(\cdot)$ dönüşümünün (t,x) noktasındaki alt sol türevi denir.

Önerme 1.2.16. *Türev kümeleri kapalı kümelerdir.*

Önerme 1.2.17. *Aşağıdaki eşitlikler doğrudur.*

$$D^UV(t,x)|(1) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta} d(x+\delta\cdot r, V(t+\delta)) = 0 \right\}$$
$$D^LV(t,x)|(1) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta} d(x+\delta\cdot r, V(t+\delta)) = 0 \right\}$$
$$D^UV(t,x)|(-1) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta} d(x-\delta\cdot r, V(t-\delta)) = 0 \right\}$$
$$D^LV(t,x)|(-1) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta} d(x-\delta\cdot r, V(t-\delta)) = 0 \right\}$$

Türev kümelerinin, teğet konilerle bağlantısı aşağıdaki önermede verilmektedir.

Önerme 1.2.18. *Aşağıdaki içermeler doğrudur.*

$$D^UV(t,x)|(1) \subset \{r \in \mathbb{R} \mid (1,r) \in T_V^U(t,x)\}$$
$$D^LV(t,x)|(1) \subset \{r \in \mathbb{R}^n \mid (1,r) \in T_V^L(t,x)\}$$
$$D^UV(t,x)|(-1) \subset \{r \in \mathbb{R}^n \mid (-1,-r) \in T_V^U(t,x)\}$$
$$D^LV(t,x)|(-1) \subset \{r \in \mathbb{R}^n \mid (-1,-r) \in T_V^L(t,x)\}$$

Eğer $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümü Lipschitz koşulunu sağlıyorsa yukarıdaki içermeler eşitliğe dönüşür.

$(t,x) \in int\,(grV\,(\cdot))$ ise türev kümelerinin tamamı $\mathbb{R}^n$, $(t,x) \notin grV\,(\cdot)$ ise boş küme olur. f türevlenebilir fonksiyon ve $\forall\, t \in [a,b]$ için $V(t) = \{f(t)\}$ ise $\forall\, t \in (a,b)$ için

$$\begin{aligned} D^UV(t,x)|(1) &= D^LV(t,x)|(1) = D^UV(t,x)|(-1) \\ &= D^LV(t,x)|(-1) = \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} \end{aligned}$$

olur. Kolaylık olması açısından

$$\begin{aligned} D^UV(t,x)|(1) &= D^+V(t,x), \qquad D^UV(t,x)|(-1) = D^-V(t,x) \\ D^LV(t,x)|(1) &= D_*^+V(t,x), \qquad D^LV(t,x)|(-1) = D_*^-V(t,x) \end{aligned}$$

ile gösterilecektir.

Önerme 1.2.19. *$V(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$, $W(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ grafiği kapalı küme değerli dönüşümler, $t_1, t_2 \in (a,b)$ ve her $t \in [t_1, t_2]$ için $W(t) = V(t)$ olsun. O zaman $\forall t \in (t_1, t_2)$ ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\begin{aligned} D^+W(t,x) &= D^+V(t,x), \qquad & D_*^+W(t,x) = D_*^+V(t,x), \\ D^-W(t,x) &= D^-V(t,x), \qquad & D_*^-W(t,x) = D_*^-V(t,x) \end{aligned}$$

olur.

1.3 Diferansiyel İçermeler. Varlık Teoremleri ve İnvaryantlık

Bu bölümde diferansiyel içermeler teorisinin temel tanımları verilecek ve konunun bazı önemli teoremleri ifade edilecektir.

$F(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşüm olsun.

$$\frac{dx(t)}{dt} \in F(t, x(t)) \ , \ t \in [a,b] \tag{1.3.1}$$

ifadesine diferansiyel içerme denir. Burada $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ bilinmeyen fonksiyondur.

Tanım 1.3.1. *Hemen her $t \in [a,b]$ için (1.3.1) içermesini sağlayan mutlak sürekli $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna (1.3.1) diferansiyel içermesinin çözümü denir.*

Özel olarak, (1.3.1) diferansiyel içermesinde $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü tek değerli ise (1.3.1) diferansiyel içermesi diferansiyel denkleme dönüşür. Yani keyfi $(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ için $F(t,x) = \{f(t,x)\}$ ise, (1.3.1) diferansiyel içermesi

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) \ , \ t \in [a,b]$$

diferansiyel denklemine dönüşür.

(1.3.1) diferansiyel içermesinin $t_0 \in [a,b]$ olmak üzere $x(t_0) = x_0$ koşulunu sağlayan çözümlerinin bulunması problemine Cauchy problemi denir. Somut olarak, $t_0 \in [a,b]$ olmak üzere, Cauchy problemini aşağıdaki gibi yazılır.

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \tag{1.3.2}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.3.3}$$

(1.3.2) – (1.3.3) probleminin çözümler kümesi $X(t_0, x_0)$ ile gösterilsin ve $t \in [a,b]$ için

$$X(t; t_0, x_0) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid x(\cdot) \in X(t_0, x_0)\}$$

$$H(t_0, x_0) = \{(t, x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \mid x \in X(t; t_0, x_0)\}$$

olarak tanımlansın. $X(t; t_0, x_0)$ kümesine, (1.3.2) diferansiyel içermesinin (t_0, x_0) başlangıç noktası için t anındaki erişim kümesi, $H(t_0, x_0)$ kümesine ise (t_0, x_0) başlangıç noktasından çıkan integral tüneli denir. $t_0 \in [a,b]$ ve $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere, (1.3.2) diferansiyel içermesinin $x(t_0) \in X_0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümler kümesi $X(t_0, X_0)$ ile gösterilsin. Yani $X(t_0, X_0)$

$$\dot{x}\,(t) \in F(t, x(t)) \tag{1.3.4}$$

$$x(t_0) \in X_0 \tag{1.3.5}$$

Cauchy probleminin çözümlerinin kümesi olsun. Açıktır ki,

$$X(t_0, X_0) = \{x(\cdot) \in X(t_0, x_0) \mid x_0 \in X_0\}$$

olur.

$$X(t; t_0, X_0) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid x(\cdot) \in X(t_0, X_0)\}$$

$$H(t_0, X_0) = \{(t, x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \mid x \in X(t; t_0, X_0)\}$$

olsun. $X(t; t_0, X_0)$ kümesine (1.3.4) diferansiyel içermesinin (t_0, X_0) başlangıç kümesi için t anındaki erişim kümesi, $H(t_0, X_0)$ kümesine (t_0, X_0) başlangıç noktasından çıkan integral tüneli denir.

Teorem 1.3.2. *[7, 104] $F(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ konveks değerli, alttan yarı sürekli dönüşüm ve $t_0 \in (a,b)$ olsun. O zaman $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ aralığında* (1.3.2) – (1.3.3) *Cauchy probleminin çözümü var olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.*

Teorem 1.3.3. *[7, 104] $F(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ konveks değerli, üstten yarı sürekli dönüşüm, $t_0 \in (a,b)$ olsun. O zaman $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ aralığında (1.3.2) – (1.3.3) Cauchy probleminin çözümü var olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.*

Teorem 1.3.4. *[7, 104] $F(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ konveks değerli, üstten yarı sürekli dönüşüm, $t_0 \in [a,b]$ ve $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme olsun. $\forall\ (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ ve bir $c > 0$ sayısı için*

$$\max\{\|f\| \mid f \in F(t,x)\} \leq c\,(1 + \|x\|) \tag{1.3.6}$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman $\forall\ x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ çözümü tüm $[a,b]$ aralığında tanımlanmış fonksiyondur ve

i. $\forall\ x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ için $\|x(\cdot)\|_C \leq R$,

ii. $\forall\ t \in [a,b]$, $x \in X(t; t_0, X_0)$ için $\|x\| \leq R$,

iii. $\forall\ (t,x) \in H(t_0, X_0)$ için $\|(t,x)\| \leq R + |b|$

olacak biçimde $R > 0$ vardır.

Teorem 1.3.5. *[7, 104] Teorem 1.3.4'ün tüm koşulları sağlansın. O zaman $X(t_0, X_0)$ çözümler kümesi $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ uzayında, $H(t_0, X_0)$ integral tüneli $[a,b] \times \mathbb{R}^n$ uzayında ve her $t \in [a,b]$ için $X(t; t_0, X_0)$ erişim kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayında kompakt kümelerdir.*

$V \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı bir küme, $t \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t,x) \in V\}$$

olsun. V kümesinin,

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \tag{1.3.7}$$

diferansiyel içermesine göre zayıf invaryantlığı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 1.3.6. *[7, 13, 20, 68]* $V \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ *kapalı kümesi ve* (1.3.7) *diferansiyel içermesi verilsin. Keyfi* $(t_*, x_*) \in V$ *noktasına karşılık, her* $t \in [t_*, \theta]$ $(t \in [t_0, t_*])$ *için* $x(t) \in V(t)$ *olacak biçimde* $x(\cdot) \in X(t_*, x_*)$ *çözümü varsa,* V *kümesi* (1.3.7) *diferansiyel içermesine göre sağa (sola) zayıf invaryanttır denir.*

Sıradaki teorem, V kümesinin (1.3.7) diferansiyel içermesine göre zayıf invaryantlığını karakterize etmektedir.

Teorem 1.3.7. *[20, 69]* $F(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ *küme değerli dönüşümü ve* $V \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ *kapalı kümesi verilsin.*

i. $F(\cdot)$ *üstten yarı sürekli,*

ii. $\forall\ (t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ *için* $F(t, x)$ *konveks,*

iii. $\forall\ (t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ *ve bir* $c > 0$ *sayısı için*

$$\max\{\|f\| \mid f \in F(t, x)\} \leq c(1 + \|x\|)$$

eşitsizliği sağlanıyor olsun.

V *kümesinin,* (1.3.7) *diferansiyel içermesine göre sağa zayıf invaryant olması için gerek ve yeter koşul* $t < \theta$ *olmak üzere* $\forall\ (t, x) \in V$ *için*

$$F(t, x) \cap D^+V(t, x) \neq \emptyset$$

olmasıdır.

V *kümesinin,* (1.3.7) *diferansiyel içermesine göre sola zayıf invaryant olması için gerek ve yeter koşul* $t > t_0$ *olmak üzere* $\forall\ (t, x) \in V$ *için*

$$F(t, x) \cap D^-V(t, x) \neq \emptyset$$

olmasıdır.

Önerme 1.3.8. *[105] $V \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı kümesi* (1.3.7) *diferansiyel içermesine göre sola zayıf invaryant ve $(t_0, x_0) \in V$ olsun. O zaman $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için*

$$V(t) \subset X(t; t_0, x_0)$$

içermesi sağlanır.

V kümesinin (1.3.7) diferansiyel içermesine göre güçlü invaryantlığı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 1.3.9. *[7, 13, 20, 68] $V \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı kümesi ve* (1.3.7) *diferansiyel içermesi verilsin. Keyfi $(t_*, x_*) \in V$ noktası, keyfi $x(\cdot) \in X(t_*, x_*)$ çözümü ve her $t \in [t_*, \theta]$ $(t \in [t_0, t_*])$ için $x(t) \in V(t)$ oluyorsa, V kümesi* (1.3.7) *diferansiyel içermesine göre sağa (sola) güçlü invaryanttır denir.*

Aşağıdaki teorem V kümesinin (1.3.7) diferansiyel içermesine göre güçlü invaryantlığını karakterize etmektedir.

Teorem 1.3.10. *[20, 69] $F(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü ve $V \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı kümesi verilsin.*

i. *$F(\cdot)$ sürekli,*

ii. *$\forall t_* \in [t_0, \theta]$ için $F(t_*, \cdot) : \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ yerel Lipschitz,*

iii. *$\forall\ (t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ için $F(t, x)$ konveks,*

iv. *$\forall\ (t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ ve bir $c > 0$ sayısı için*

$$\max\{\|f\| \mid f \in F(t, x)\} \leq c(1 + \|x\|)$$

eşitsizliği sağlanıyor olsun.

V kümesinin, (1.3.7) *diferansiyel içermesine göre sağa güçlü invaryant olması için gerek ve yeter koşul, $t < \theta$ olmak üzere, $\forall\ (t, x) \in V$ için*

$$F(t, x) \subset D^+V(t, x)$$

içermesinin sağlanmasıdır.

V kümesinin, (1.3.7) diferansiyel içermesine göre sola güçlü invaryant olması için gerek ve yeter koşul, $t > t_0$ olmak üzere, $\forall\ (t,x) \in V$ için

$$F(t,x) \subset D^{-}V\,(t,x)$$

içermesinin sağlanmasıdır.

Önerme 1.3.11. *[105] $V \subset [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesi (1.3.7) diferansiyel içermesine göre sağa güçlü invaryant ve $(t_0,x_0) \in V$ olsun. O zaman $\forall\ t \in [t_0,\theta]$ için*

$$X\,(t;t_0,x_0) \subset V\,(t)$$

içermesi sağlanır.

Önerme 1.3.8 ve önerme 1.3.11 kullanılarak şu teoremler elde edilir.

Teorem 1.3.12. *[105] $V \subset [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesi ve (1.3.7) diferansiyel içermesi verilsin. $\forall\ t \in [t_0,\theta]$ için $V\,(t) = X\,(t;t_0,X_0)$ olması için gerek ve yeter koşul V kümesinin (1.3.7) diferansiyel içermesine göre sola zayıf invaryant, sağa güçlü invaryant ve $V\,(t_0) = X_0$ olmasıdır.*

Teorem 1.3.13. *[105] $F\,(\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to K\,(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü ve $V \subset [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı kümesi verilsin.*

i. *$F\,(\cdot)$ sürekli,*

ii. *$\forall\, t_* \in [t_0,\theta]$ için $F\,(t_*,\cdot) : \mathbb{R}^n \to K\,(\mathbb{R}^n)$ yerel Lipschitz,*

iii. *$\forall\ (t,x) \in [t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n$ için $F\,(t,x)$ konveks,$\forall\ (t,x) \in [t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n$ ve bir $c > 0$ sayısı için*

$$\max\left\{\|f\| \mid f \in F\,(t,x)\right\} \leq c\,(1 + \|x\|)$$

eşitsizliği sağlanıyor olsun.

$\forall\ t \in [t_0, \theta]$ *için* $V(t) = X(t; t_0, X_0)$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\forall\ (t, x) \in V$ *için*

$$F(t,x) \subset D^{+}V(t,x),$$
$$F(t,x) \cap D^{-}V(t,x) \neq \emptyset$$

ve $V(t_0) = X_0$ *olmasıdır.*

2 KONVEKS DEVAM

Bu bölümde konveks, kompakt küme değerli dönüşümler için konveks devam kavramı tanımlanacak ve konveks devamın varlığı için gerekli koşullar araştırılacaktır. Ayrıca konveks, kompakt küme değerli dönüşümlerin hangi durumlarda konveks devamının olmadığı incelenecektir.

2.1 Konveks Devamın Tanımı

Konveks, kompakt küme değerli dönüşümler için devam şöyle tanımlanır.

Tanım 2.1.1. *$V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ konveks, kompakt bir küme değerli dönüşüm olsun.*

$\alpha > 0$ sayısı ve $\forall t \in [t_0, \theta]$ için $W(t) = V(t)$ olacak şekilde

$$W(\cdot) : [t_0 - \alpha, \theta] \to K(\mathbb{R}^n) \qquad (W(\cdot) : [t_0, \theta + \alpha] \to K(\mathbb{R}^n))$$

konveks, kompakt küme değerli dönüşümü varsa, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola (sağa) konveks $\alpha-$devamı vardır denir. Bu $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola (sağa) konveks $\alpha-$devamı denir.

$\alpha > 0$ sayısı ve $\forall t \in [t_0, \theta]$ için $W(t) = V(t)$ olacak şekilde

$$W(\cdot) : [t_0 - \alpha, \theta + \alpha] \to K(\mathbb{R}^n)$$

konveks, kompakt küme değerli dönüşümü varsa, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün konveks $\alpha-$devamı vardır denir. Bu $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün konveks $\alpha-$devamı denir.

$V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ konveks, kompakt küme değerli dönüşüm olsa da konveks devamı olmayabilir. Bu duruma bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.1.2. *Her $t \in [0, 1]$ için*

$$V(t) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 - \sqrt{t} \le x \le 1 + \sqrt{t}\right\}$$

olarak tanımlansın. $grV(\cdot) = \{(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R} \,|x \in V(t)\}$ *olsun.* $grV(\cdot)$ *konveks, kompakt küme olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Ancak bu küme değerli dönüşümün sola konveks devamı yoktur.*

Önerme 2.1.3. $\alpha > 0$ *için* $W(\cdot) : [t_0 - \alpha, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ *ve* $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ *kompakt, konveks küme değerli dönüşümler olsun.* $W(t_0) = V(t_0)$ *ve her* $t \in (t_0, \theta]$ *için* $V(t) \subset W(t)$ *ise*

$$V_\alpha(t) = \begin{cases} W(t) & , \ t \in [t_0 - \alpha, t_0) \\ V(t) & , \ t \in [t_0, \theta] \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $V_\alpha(\cdot) : [t_0 - \alpha, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ *dönüşümü,* $V(\cdot)$ *küme değerli dönüşümünün sola konveks* $\alpha-$*devamıdır.*

Kanıt. $V_\alpha(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün kompakt olduğu açıktır. Her $t \in [t_0, \theta]$ için $V_\alpha(t) = V(t)$ olduğundan, $V_\alpha(\cdot)$ dönüşümünün, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola konveks $\alpha-$devamı olduğunu kanıtlamak için

$$V_\alpha(\cdot) : [t_0 - \alpha, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$$

küme değerli dönüşümünün konveks olduğunu göstermek yeterli olacaktır. t_1, $t_2 \in [t_0 - \alpha, \theta]$ ve $\lambda \in [0,1]$ olsun. Önerme 1.2.2 uyarınca

$$(1-\lambda) \cdot V_\alpha(t_1) + \lambda \cdot V_\alpha(t_2) \subset V_\alpha((1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2) \qquad (2.1.1)$$

olduğunu görmek yeterlidir. Genelliği bozmadan $t_1 < t_2$ olarak kabul edilirse üç durum söz konusudur.

1. t_1, $t_2 \in [t_0 - \alpha, t_0)$ ise $x_1 \in W(t_1)$, $x_2 \in W(t_2)$ olur. $W(\cdot)$ konveks küme değerli dönüşüm olduğundan

   $$(1-\lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 \in W((1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2)$$

   olur. t_1, $t_2 \in [t_0 - \alpha, t_0)$ iken $\forall \lambda \in [0,1]$ için $(1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2 \in [t_0 - \alpha, t_0)$ olacağı için

   $$(1-\lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 \in V_\alpha((1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2)$$

   olur. Bir başka deyişle t_1, $t_2 \in [t_0 - \alpha, t_0)$ iken (2.1.1) içermesi sağlanır.

2. $t_1, t_2 \in [t_0, \theta]$ ise $x_1 \in V(t_1)$, $x_2 \in V(t_2)$ olur. $V(\cdot)$ konveks küme değerli dönüşüm olduğundan

$$(1-\lambda)\cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 \in V((1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2)$$

olduğu elde edilir. $t_1, t_2 \in [t_0, \theta]$ ise $\forall \lambda \in [0,1]$ için $(1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2 \in [t_0, \theta]$ olduğu için

$$(1-\lambda)\cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 \in V_\alpha((1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2)$$

olduğu bulunur. Yani $t_1, t_2 \in [t_0, \theta]$ iken (2.1.1) içermesi sağlanır.

3. $t_1 \in [t_0 - \alpha, t_0)$, $t_2 \in [t_0, \theta]$ ise $x_1 \in W(t_1)$ ve $x_2 \in V(t_2)$ olur. $\forall t \in [t_0, \theta]$ için $V(t) \subset W(t)$ olduğundan $x_2 \in V(t_2) \subset W(t_2)$ ve buradan $\forall \lambda \in [0,1]$ için

$$(1-\lambda)\cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 \in W((1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2) \tag{2.1.2}$$

olduğu elde edilir.
$\lambda_0 = \dfrac{t_0 - t_1}{t_2 - t_1}$ olarak seçilsin. $0 \leq \lambda < \lambda_0$ iken

$$(1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2 \in [t_0 - \alpha, t_0)$$

olur. $t \in [t_0 - \alpha, t_0)$ için $V_\alpha(t) = W(t)$ olduğundan, (2.1.2) uyarınca $0 \leq \lambda < \lambda_0$ için

$$(1-\lambda)\cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 \in V_\alpha((1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2)$$

olur. Bir başka deyişle

$$(1-\lambda)\cdot V_\alpha(t_1) + \lambda \cdot V_\alpha(t_2) \subset V_\alpha((1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2) \tag{2.1.3}$$

içermesi sağlanır.

$\lambda_0 \leq \lambda \leq 1$ olduğu varsayılsın. $x_0 = (1-\lambda_0)\cdot x_1 + \lambda_0 \cdot x_2$ olsun. $(1-\lambda_0)\, t_1 + \lambda_0\, t_2 = t_0$ olduğundan, (2.1.2) uyarınca

$$x_0 \in W(t_0) = V(t_0) \tag{2.1.4}$$

olur.

$\lambda_0 \leq \lambda \leq 1$ için $\lambda = (1-\gamma)\,\lambda_0 + \gamma$ olacak biçimde $\gamma \in [0,1]$ vardır. Buradan $\lambda_0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\cdot x_1 + \lambda\cdot x_2 &= (1-((1-\gamma)\,\lambda_0+\gamma))\cdot x_1 + ((1-\gamma)\,\lambda_0+\gamma)\cdot x_2 \\ &= (1-\lambda_0)\,(1-\gamma)\cdot x_1 + (1-\gamma)\,\lambda_0\cdot x_2 + \gamma\cdot x_2 \\ &= (1-\gamma)\cdot x_0 + \gamma\cdot x_2 \qquad (2.1.5)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\;t_1 + \lambda\,t_2 &= (1-((1-\gamma)\,\lambda_0+\gamma))\;t_1 + ((1-\gamma)\,\lambda_0+\gamma)\;t_2 \\ &= (1-\lambda_0)\,(1-\gamma)\;t_1 + (1-\gamma)\,\lambda_0\,t_2 + \gamma\,t_2 \\ &= (1-\gamma)\;t_0 + \gamma\,t_2 \qquad (2.1.6)\end{aligned}$$

olur. Buradan $t_2 \in [t_0,\theta]$ olduğundan $\gamma \in [0,1]$ iken $(1-\gamma)\;t_0 + \gamma\,t_2 \in [t_0,\theta]$ olur. O halde $\lambda_0 \leq \lambda \leq 1$ iken

$$(1-\lambda)\;t_1 + \lambda\,t_2 \in [t_0,\theta] \qquad (2.1.7)$$

olduğu elde edilir. $V(\cdot)$ konveks küme değerli dönüşüm ve $x_2 \in V(t_2)$ olduğu için, (2.1.4) uyarınca

$$(1-\gamma)\cdot x_0 + \gamma\cdot x_2 \in V((1-\gamma)\;t_0 + \gamma\,t_2) \qquad (2.1.8)$$

olduğu bulunur. (2.1.5) – (2.1.8) uyarınca $\lambda_0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$(1-\lambda)\cdot x_1 + \lambda\cdot x_2 \;\in V((1-\lambda)\;t_1 + \lambda\,t_2)$$

olur. $t \in [t_0,\theta]$ için $V_\alpha(t) = V(t)$ olduğundan, (2.1.7) uyarınca

$$(1-\lambda)\cdot x_1 + \lambda\cdot x_2 \;\in V_\alpha((1-\lambda)\;t_1 + \lambda\,t_2)$$

olur. Bir başka deyişle $\lambda_0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$(1-\lambda)\cdot V_\alpha(t_1) + \lambda\cdot V_\alpha(t_2) \subset V_\alpha((1-\lambda)\;t_1 + \lambda\,t_2) \qquad (2.1.9)$$

içermesi sağlanır. (2.1.7) ve (2.1.9) içermelerinden keyfi $\lambda \in [0,1]$ için

$$(1-\lambda) \cdot V_\alpha(t_1) + \lambda \cdot V_\alpha(t_2) \subset V_\alpha((1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2)$$

içermesinin sağlandığı elde edilir.

Keyfi $t_1,\ t_2 \in [t_0-\alpha, \theta]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için her üç durumda da (2.1.1) içermesinin sağlandığı görüldü. O halde $V_\alpha(\cdot)$ küme değerli dönüşümü konvekstir.

Önerme 2.1.4. *$\alpha > 0$ için $W(\cdot) : [t_0, \theta+\alpha] \to K(\mathbb{R}^n)$ ve $V(\cdot) : [t_0,\theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ kompakt, konveks küme değerli dönüşümler olsun. $W(\theta) = V(\theta)$ ve her $t \in [t_0,\theta)$ için $V(t) \subset W(t)$ ise*

$$V_\alpha(t) = \begin{cases} V(t) & , \quad t \in [t_0, \theta] \\ W(t) & , \quad t \in (\theta, \theta+\alpha] \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $V_\alpha(\cdot) : [t_0, \theta+\alpha] \to K(\mathbb{R}^n)$ dönüşümü, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sağa konveks $\alpha-$devamıdır.

Kanıt. $V_\alpha(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün kompakt olduğu açıktır. Sağa konveks $\alpha-$devamın ve $V_\alpha(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışından dolayı, $V_\alpha(\cdot)$ dönüşümünün konveks olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $t_1,\ t_2 \in [t_0, \theta+\alpha]$ ve $\lambda \in [0,1]$ olsun. Önerme 1.2.2 uyarınca

$$(1-\lambda) \cdot V_\alpha(t_1) + \lambda \cdot V_\alpha(t_2) \subset V_\alpha((1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2) \tag{2.1.10}$$

olduğunu görmek yeterlidir. Genelliği bozmadan $t_1 < t_2$ olarak kabul edilirse üç durum vardır.

1. $t_1,\ t_2 \in [t_0,\theta]$ ise $x_1 \in V(t_1),\ x_2 \in V(t_2)$ olur. $V(\cdot)$ konveks değerli dönüşüm olduğundan $\forall\, \lambda \in [0,1]$ için

   $$(1-\lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 \in V((1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2)$$

   ve $(1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2 \in [t_0, \theta]$ olduğundan $V_\alpha(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımı uyarınca

   $$(1-\lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 \in V_\alpha((1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2)$$

olduğu elde edilir. Yani t_1, $t_2 \in [t_0, \theta]$ ise (2.1.10) içermesi sağlanır.

2. t_1, $t_2 \in (\theta, \theta + \alpha]$ ise $x_1 \in W(t_1)$, $x_2 \in W(t_2)$ olur. $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümü konveks olduğundan $\forall \lambda \in [0,1]$ için

$$(1-\lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 \in W((1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2)$$

olur. $(1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2 \in (\theta, \theta + \alpha]$ olduğundan $V_\alpha(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımı uyarınca

$$(1-\lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 \in V_\alpha((1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2)$$

olduğu bulunur. Yani t_1, $t_2 \in (\theta, \theta + \alpha]$ ise (2.1.10) içermesi sağlanır.

3. $t_1 \in [t_0, \theta]$, $t_2 \in (\theta, \theta + \alpha]$ ise $x_1 \in V(t_1)$ ve $x_2 \in W(t_2)$ olur. $\forall t \in [t_0, \theta]$ için $V(t) \subset W(t)$ olduğundan $x_1 \in V(t_1) \subset W(t_1)$ olur. $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümü konveks olduğundan $\forall \lambda \in [0,1]$ için

$$(1-\lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 \in W((1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2) \tag{2.1.11}$$

olduğu bulunur.
$\lambda_0 = \dfrac{\theta - t_1}{t_2 - t_1}$ ve $x_0 = (1-\lambda_0) \cdot x_1 + \lambda_0 \cdot x_2$ olsun. $(1-\lambda_0)\, t_1 + \lambda_0\, t_2 = \theta$ olduğundan (2.1.11) uyarınca

$$x_0 \in W((1-\lambda_0)\, t_1 + \lambda_0\, t_2) = W(\theta) = V(\theta) \tag{2.1.12}$$

olur. $\lambda_0 < \lambda \leq 1$ için $(1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2 \in (\theta, \theta + \alpha]$ olur. $t \in (\theta, \theta + \alpha]$ için $V_\alpha(t) = W(t)$ olarak tanımlandığından (2.1.11) uyarınca $\lambda_0 < \lambda \leq 1$ için

$$(1-\lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 \in V_\alpha((1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2) \tag{2.1.13}$$

olduğu bulunur. O halde $\lambda_0 < \lambda \leq 1$ için (2.1.10) içermesi sağlanır.

$0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ için $\lambda = \gamma\, \lambda_0$ olacak biçimde $\gamma \in [0,1]$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\, t_1 + \lambda\, t_2 &= (1-\gamma\lambda_0)\, t_1 + \gamma\lambda_0\, t_2 \\ &= (1-\gamma)\, t_1 + \gamma\, t_1 - \gamma\lambda_0\, t_1 + \gamma\lambda_0\, t_2 \\ &= (1-\gamma)\, t_1 + \gamma\, [(1-\lambda_0)\, t_1 + \lambda_0\, t_2] \\ &= (1-\gamma)\, t_1 + \gamma\, \theta \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

eşitliği elde edilir. $t_1 \in [t_0, \theta]$ olduğundan $\gamma \in [0,1]$ iken $(1-\gamma)\ t_1 + \gamma\,\theta \in [t_0, \theta]$ olur. (2.1.14) eşitliğinden $0 \le \lambda \le \lambda_0$ için

$$(1-\lambda)\ t_1 + \lambda\, t_2 \in [t_0, \theta] \tag{2.1.15}$$

olduğu bulunur. Ek olarak $0 \le \lambda \le \lambda_0$ iken

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 &= (1-\gamma\lambda_0)\cdot x_1 + \gamma\lambda_0 \cdot x_2 \\ &= (1-\gamma)\cdot x_1 + \gamma \cdot x_1 - \gamma\lambda_0 \cdot x_1 + \gamma\lambda_0 \cdot x_2 \\ &= (1-\gamma)\cdot x_1 + \gamma \cdot [(1-\lambda_0)\cdot x_1 + \lambda_0 \cdot x_2] \\ &= (1-\gamma)\cdot x_1 + \gamma \cdot x_0 \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

olur. $V(\cdot)$ konveks değerli dönüşüm ve $x_1 \in V(t_1)$ olduğundan (2.1.12), (2.1.16) uyarınca

$$(1-\lambda)\cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 \in V((1-\lambda)\ t_1 + \lambda\, t_2) \tag{2.1.17}$$

olduğu bulunur. Her $t \in [t_0, \theta]$ için $V_\alpha(t) = V(t)$ olduğundan (2.1.15) ve (2.1.17) uyarınca

$$(1-\lambda)\cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 \in V_\alpha((1-\lambda)\ t_1 + \lambda\, t_2) \tag{2.1.18}$$

olduğu elde edilir. Bir başka deyişle $0 \le \lambda \le \lambda_0$ iken (2.1.10) içermesi sağlanır. (2.1.13) ve (2.1.18) ifadelerinden keyfi $0 \le \lambda \le 1$ için (2.1.10) içermesinin sağlandığı elde edilir.

Keyfi $t_1, t_2 \in [t_0, \theta + \alpha]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için her üç durumda da (2.1.10) içermesinin sağlandığı görüldü. O halde $V_\alpha(\cdot)$ küme değerli dönüşümü konvekstir.

2.2 $V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (\cdot)$ ve $V_\gamma^R(t_*, x_*) \mid (\cdot)$ Küme Değerli Dönüşümleri

Bu bölümde $V(\cdot)$ konveks, kompakt küme değerli dönüşümünün konveks devamının varlığı kanıtlanırken kullanılacak olan $V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (\cdot)$ ve $V_\gamma^R(t_*, x_*) \mid$

$(\cdot)$ küme değerli dönüşümleri tanımlanıp, bu dönüşümlerin sağladığı özellikler incelenecektir.

$V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Bu dönüşümün grafiği

$$grV(\cdot) = \{(t,x) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \mid x \in V(t)\}$$

ile gösterilsin. $\gamma > 0$ sayısı, $t_* \in [t_0, \theta]$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ ve $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü için

$$V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (t) = \left(1 - \frac{t - t_* + \gamma}{\gamma}\right) \cdot x_* + \frac{t - t_* + \gamma}{\gamma} \cdot V(t_*) \quad (2.2.1)$$

$$V_\gamma^R(t_*, x_*) \mid (t) = \left(1 - \frac{t_* + \gamma - t}{\gamma}\right) \cdot x_* + \frac{t_* + \gamma - t}{\gamma} \cdot V(t_*) \quad (2.2.2)$$

olmak üzere $V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (\cdot) : [t_* - \gamma, \theta + \gamma] \to K(\mathbb{R}^n)$ ve $V_\gamma^R(t_*, x_*) \mid (\cdot) : [t_0 - \gamma, t_* + \gamma] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümleri tanımlansın.

Önerme 2.2.1. $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ *küme değerli dönüşümü konveks, kompakt değerli dönüşüm ve* $t_* \in [t_0, \theta]$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ *olsun.* (2.2.1) *ve* (2.2.2) *ile tanımlanan*

$$V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (\cdot) : [t_* - \gamma, \theta + \gamma] \to K(\mathbb{R}^n),$$

$$V_\gamma^R(t_*, x_*) \mid (\cdot) : [t_0 - \gamma, t_* + \gamma] \to K(\mathbb{R}^n)$$

dönüşümleri konveks, kompakt küme değerli dönüşümdür. Ayrıca bu dönüşümler Lipschitz koşulunu sağlar.

Kanıt. $t_* \in [t_0, \theta]$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (\cdot) : [t_* - \gamma, \theta + \gamma] \to K(\mathbb{R}^n)$$

küme değerli dönüşümünün konveks, kompakt değerli dönüşüm olduğu ve Lipschitz koşulunu sağladığı kanıtlanacaktır.

$V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (\cdot)$ küme değerli dönüşümünün konveks olduğunu kanıtlamak için t_1, $t_2 \in [t_* - \gamma, \theta + \gamma]$ ve $\lambda \in [0, 1]$ alınsın. Önerme 1.2.10 uyarınca

$$\lambda \cdot V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (t_1) + (1 - \lambda) \cdot V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (t_2) \subset V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (\lambda t_1 + (1 - \lambda)\, t_2) \quad (2.2.3)$$

içermesinin sağlandığını kanıtlamak yeterlidir.

$$x \in \lambda \cdot V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (t_1) + (1-\lambda) \cdot V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (t_2)$$

olsun. Bu durumda $x = \lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2$ olacak biçimde $x_1 \in V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (t_1)$ ve $x_2 \in V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (t_2)$ vardır. $V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışından $i = 1,\, 2$ için

$$x_i \in \left(1 - \frac{t_i - t_* + \gamma}{\gamma}\right) \cdot x_* + \frac{t_i - t_* + \gamma}{\gamma} \cdot V\left(t_*\right)$$

olur. Buradan $x = \lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2$ olduğundan

$$x \in \left(1 - \frac{\lambda\, t_1 + (1-\lambda)\, t_2 - t_* + \gamma}{\gamma}\right) \cdot x_* + \frac{\lambda\, t_1 + (1-\lambda)\, t_2 - t_* + \gamma}{\gamma} \cdot V\left(t_*\right)$$

ve $x \in V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (\lambda\, t_1 + (1-\lambda)\, t_2)$ olduğu elde edilir. Bir başka deyişle (2.2.3) içermesi sağlanır. O halde $V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (\cdot)$ küme değerli dönüşümü konvekstir.

$V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (\cdot)$ küme değerli dönüşümünün Lipschitz koşulunu sağladığını kanıtlamak için $t_1,\, t_2 \in [t_* - \gamma, \theta + \gamma]$ alınsın. Genelliği bozmadan $t_1 > t_2$ olduğu varsayılabilir. Bu durumda önerme 1.1.3 uyarınca

$$\begin{aligned}
V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (t_1) &= \left(1 - \frac{t_1 - t_* + \gamma}{\gamma}\right) \cdot x_* + \frac{t_1 - t_* + \gamma}{\gamma} \cdot V\left(t_*\right) \\
&= \left(1 - \frac{t_1 + t_2 - t_2 - t_* + \gamma}{\gamma}\right) \cdot x_* \\
&\quad + \frac{t_1 + t_2 - t_2 - t_* + \gamma}{\gamma} \cdot V\left(t_*\right) \\
&= \left(1 - \frac{t_2 - t_* + \gamma}{\gamma}\right) \cdot x_* + \frac{t_2 - t_* + \gamma}{\gamma} \cdot V\left(t_*\right) \\
&\quad + \frac{t_1 - t_2}{\gamma} \cdot \left(V\left(t_*\right) - x_*\right)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Buradan $V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışı uyarınca

$$V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (t_1) = V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (t_2) + \frac{t_1 - t_2}{\gamma} \cdot \left(V\left(t_*\right) - x_*\right) \qquad (2.2.4)$$

olur. $V(t_*)$ kompakt küme olduğundan $\frac{1}{\gamma}\cdot(V(t_*) - x_*) \subset L\cdot\overline{B}$ olacak biçimde $L > 0$ sayısı vardır. (2.2.4) eşitliğinden

$$V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (t_1) \subset V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (t_2) + |t_2 - t_1| \; L \cdot \overline{B} \tag{2.2.5}$$

olduğu bulunur. t_1 ile t_2 keyfi seçildiğinden (2.2.5) içermesinden

$$h\left(V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (t_1), V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (t_2)\right) \leq L \; |t_2 - t_1|$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. O halde $V_\gamma^L(t_*, x_*) \mid (\cdot)$ küme değerli dönüşümü Lipschitz koşulunu sağlar.

$V_\gamma^R(t_*, x_*) \mid (\cdot) : [t_0 - \gamma, t_* + \gamma] \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün konveks, kompakt küme değerli dönüşüm olduğu ve Lipschitz koşulunu sağladığı da benzer olarak kanıtlanabilir.

2.3 Sola Konveks α–Devamın Varlığı

Aşağıda konveks, kompakt bir küme değerli dönüşümün sola konveks devamının varlığı ile ilgili teorem verilmiştir.

Teorem 2.3.1. $V(\cdot) : [t_0, \theta] \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ *konveks, kompakt bir küme değerli dönüşüm,* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *ve* $\alpha > 0$ *olsun.* $\forall v \in V(t_0)$ *için*

$$D^+V(t_0, v) \subset D^+V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_0, v)$$

içermesi sağlanıyorsa $\forall t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$V(t) \subset V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t) \tag{2.3.1}$$

olur.

Kanıt. $t_* \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t_*) \not\subset V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_*) \tag{2.3.2}$$

olduğu varsayılsın. $V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_0) = V(t_0)$ olduğundan, t_0 noktasında (2.3.1) içermesinin sağlandığı açıktır. O halde $t_* \in (t_0, \theta]$ olur. (2.3.2) uyarınca

$x_* \notin V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_*)$ olacak biçimde bir $x_* \in V(t_*)$ vardır. $\forall t \in [t_0, \theta]$ için, $V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t)$ kompakt, konveks küme ve $x_* \notin V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_*)$ olduğundan dolayı önerme 1.1.12 uyarınca

$$\|x_* - w_*\| = d\left(x_*, V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_*)\right)$$

olacak biçimde tek $w_* \in V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_*)$ vardır ve $\forall\, w \in V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_*)$ için

$$\langle x_* - w_*, w_* - w \rangle \geq 0 \tag{2.3.3}$$

eşitsizliği sağlanır. $V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışı uyarınca $\forall w_* \in V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_*)$ için

$$w_* = \left(1 - \frac{t_* - t_0 + \alpha}{\alpha}\right) \cdot x_0 + \frac{t_* - t_0 + \alpha}{\alpha} \cdot v_0 \tag{2.3.4}$$

eşitliğini sağlayan $v_0 \in V(t_0)$ vardır. $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = \left(1 - \frac{t - t_0}{t_* - t_0}\right) \cdot v_0 + \frac{t - t_0}{t_* - t_0} \cdot x_* \tag{2.3.5}$$

olmak üzere $x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ ve $t \in [t_0, t_*]$ için

$$w(t) = \left(1 - \frac{t - t_0}{t_* - t_0}\right) \cdot v_0 + \frac{t - t_0}{t_* - t_0} \cdot w_* \tag{2.3.6}$$

olmak üzere $w(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları tanımlansın. (2.3.4) eşitliğinden $w(\cdot)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} w(t) &= \left(1 - \frac{t - t_0}{t_* - t_0}\right) \cdot v_0 + \frac{t - t_0}{t_* - t_0} \cdot \left(\frac{t_0 - t_*}{\alpha} \cdot x_0 + \left(1 - \frac{t_0 - t_*}{\alpha}\right) \cdot v_0\right) \\ &= \left(1 - \frac{t_0 - t}{\alpha}\right) \cdot v_0 + \frac{t_0 - t}{\alpha} \cdot x_0 \end{aligned}$$

ve buradan

$$w(t) = \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha}{\alpha}\right) \cdot x_0 + \frac{t - t_0 + \alpha}{\alpha} \cdot v_0 \tag{2.3.7}$$

biçiminde de ifade edilebilir. Burada $w(t_0) = v_0$, $w(t_*) = w_*$ olduğu açıktır.

Keyfi $v \in V(t_0)$ seçilsin ve sabitlensin.

$$w = \left(1 - \frac{t_* - t_0 + \alpha}{\alpha}\right) \cdot x_0 + \frac{t_* - t_0 + \alpha}{\alpha} \cdot v \tag{2.3.8}$$

olsun. (2.2.1) uyarınca $w \in V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_*)$ olur. (2.3.3), (2.3.4) ve (2.3.8) uyarınca

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x_* - w_*, w_* - w \rangle &= \left\langle x_* - w_*, \frac{t_* - t_0 + \alpha}{\alpha} \cdot (v_0 - v) \right\rangle \\ &= \frac{t_* - t_0 + \alpha}{\alpha} \langle x_* - w_*, v_0 - v \rangle \end{aligned}$$

ve $\dfrac{t_* - t_0 + \alpha}{\alpha} > 0$ olduğundan $\langle x_* - w_*, v_0 - v \rangle \geq 0$ olduğu elde edilir. $v \in V(t_0)$ keyfi seçildiğinden, $\forall v \in V(t_0)$ için

$$\langle x_* - w_*, v_0 - v \rangle \geq 0 \tag{2.3.9}$$

eşitsizliği sağlanır.

$t \in [t_0, t_*]$ ve $w \in V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t)$ olsun. $\forall w \in V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t)$ için

$$w = \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha}{\alpha}\right) \cdot x_0 + \frac{t - t_0 + \alpha}{\alpha} \cdot v$$

olacak biçimde bir $v \in V(t_0)$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} \langle x(t) - w(t), w(t) - w \rangle &= \left\langle \frac{t - t_0}{t_* - t_0} \cdot (x_* - w_*), \frac{t - t_0 + \alpha}{\alpha} \cdot (v_0 - v) \right\rangle \\ &= \frac{t - t_0}{t_* - t_0} \cdot \frac{t - t_0 + \alpha}{\alpha} \langle x_* - w_*, v_0 - v \rangle \end{aligned}$$

olduğundan (2.3.9) eşitsizliğinden, $\forall t \in [t_0, t_*]$ ve $\forall w \in V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t)$ için

$$\langle x(t) - w(t), w(t) - w \rangle \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır. Önerme 1.1.12 uyarınca

$$\begin{aligned} d\left(x(t), V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t)\right) &= \|x(t) - w(t)\| \\ &= \frac{t - t_0}{t_* - t_0} \|x_* - w_*\| \end{aligned}$$

olduğu bulunur. $r_* = \dfrac{\|x_* - w_*\|}{t_* - t_0}$ seçilirse $\forall t \in [t_0, t_*]$ için

$$\frac{d\left(x(t), V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t)\right)}{t - t_0} = r_*$$

olur. $v = \dfrac{1}{t_* - t_0} \cdot (x_* - v_0)$ olarak belirlenirse $\forall t \in [t_0, t_*]$ için (2.3.5) eşitliğinden

$$x(t) = v_0 + (t - t_0) \cdot v$$

ve

$$\lim_{t \to t_0^+} \frac{d\left(v_0 + (t - t_0) \cdot v, V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t)\right)}{t - t_0} = r_* > 0$$

olduğu elde edilir.

$$D^+ V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_0, v_0) = \left\{ v \mid \liminf_{\delta \to 0^+} \frac{d\left(v_0 + \delta \cdot v, V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_0 + \delta)\right)}{\delta} = 0 \right\}$$

olarak tanımlandığından,

$$v \notin D^+ V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_0, v_0) \tag{2.3.10}$$

olur.

$x_* \in V(t_*)$, $v_0 \in V(t_0)$ ve $grV(\cdot)$ konveks olduğundan (2.3.5) eşitliğinden, $\forall t \in [t_0, t_*]$ için $x(t) \in V(t)$ ve $d(x(t), V(t)) = 0$ olur. O zaman

$$\liminf_{t \to t_0^+} \frac{d(v_0 + (t - t_0) \cdot v, V(t))}{t - t_0} = 0$$

ve buradan

$$v \in D^+ V(t_0, v_0) \tag{2.3.11}$$

olduğu bulunur. (2.3.10) ve (2.3.11) uyarınca

$$D^+ V(t_0, v_0) \not\subset D^+ V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_0, v_0)$$

olur. Ancak bu sonuç teoremin koşulu ile çelişir. O halde varsayım doğru değildir. Yani $\forall t \in [t_0, \theta]$ için $V(t) \subset V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t)$ olur.

Önerme 2.1.3 ve teorem 2.3.1'den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.3.2. *$V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ konveks, kompakt bir küme değerli dönüşüm, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha > 0$ olsun. $\forall v \in V(t_0)$ için*

$$D^+ V(t_0, v) \subset D^+ V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_0, v)$$

ise $V(\cdot)$ *küme değerli dönüşümünün sola konveks* $\alpha-$*devam vardır ve* $\forall\, t \in [t_0 - \alpha, \theta]$ *için*

$$W(t) = \begin{cases} V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t) & , \ t \in [t_0 - \alpha, t_0) \\ V(t) & , \ t \in [t_0, \theta] \end{cases}$$

olarak tanımlanan $W(\cdot) : [t_0 - \alpha, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ *dönüşümü,* $V(\cdot)$ *küme değerli dönüşümünün sola konveks* $\alpha-$*devamıdır.*

Kanıt. Teorem 2.3.1 uyarınca $\alpha > 0$ sayısı ve $\forall\, v \in V(t_0)$ için

$$D^+V(t_0, v) \subset D^+V_\alpha^L(x_0) \mid (t_0, v)$$

içermesi sağlanıyorsa $\forall t \in [t_0, \theta]$ için $V(t) \subset V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t)$ olur.

$\forall t \in [t_0, \theta]$ için $V(t) \subset V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t)$ olduğundan dolayı önerme 2.1.3 uyarınca

$$W(t) = \begin{cases} V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t) & , \ t \in [t_0 - \alpha, t_0) \\ V(t) & , \ t \in [t_0, \theta] \end{cases}$$

olarak tanımlanan $W(\cdot) : [t_0 - \alpha, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ dönüşümü, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola konveks $\alpha-$devamıdır.

2.4 Sağa Konveks $\alpha-$Devamın Varlığı

Benzer teoremler sağa konveks devam için de kanıtlanabilir.

Teorem 2.4.1. $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ *konveks, kompakt küme değerli dönüşüm,* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *ve* $\alpha > 0$ *olsun.* $\forall\, v \in V(\theta)$ *için*

$$D^-V(\theta, v) \subset D^-V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (\theta, v)$$

içermesi sağlanıyorsa $\forall\, t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$V(t) \subset V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t) \tag{2.4.1}$$

olur.

Kanıt. $t_* \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t_*) \not\subset V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t_*) \tag{2.4.2}$$

olduğu varsayılsın. $V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışı uyarınca $V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (\theta) = V(\theta)$ olduğundan $t = \theta$ için (2.4.1) içermesinin sağlandığı açıktır. O halde $t_* \in [t_0, \theta)$ olur. (2.4.2) uyarınca $x_* \notin V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t_*)$ olacak biçimde $x_* \in V(t_*)$ vardır. $\forall t \in [t_0, \theta]$ için $V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t)$ kompakt, konveks küme ve $x_* \notin V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t_*)$ olduğundan, önerme 1.1.12 uyarınca

$$\|x_* - w_*\| = d\left(x_*, V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t_*)\right)$$

eşitliğini sağlayan tek $w_* \in V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t_*)$ vardır ve $\forall w \in V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t_*)$ için

$$\langle x_* - w_*, w_* - w \rangle \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır. $V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışı uyarınca $\forall w_* \in V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t_*)$ için

$$w_* = \left(1 - \frac{\theta + \alpha - t_*}{\alpha}\right) \cdot x_0 + \frac{\theta + \alpha - t_*}{\alpha} \cdot v_0 \tag{2.4.3}$$

eşitliğini sağlayan $v_0 \in V(\theta)$ vardır. Şimdi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = \left(1 - \frac{\theta - t}{\theta - t_*}\right) \cdot v_0 + \frac{\theta - t}{\theta - t_*} \cdot x_* \tag{2.4.4}$$

olmak üzere $x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ ve $t \in [t_0, \theta]$ için

$$w(t) = \left(1 - \frac{\theta - t}{\theta - t_*}\right) \cdot v_0 + \frac{\theta - t}{\theta - t_*} \cdot w_* \tag{2.4.5}$$

olmak üzere $w(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları tanımlansın. (2.4.3) eşitliğinden dolayı $w(\cdot)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} w(t) &= \left(1 - \frac{\theta - t}{\theta - t_*}\right) \cdot v_0 + \frac{\theta - t}{\theta - t_*} \cdot \left(\frac{t_* - \theta}{\alpha} \cdot x_0 + \left(1 - \frac{t_* - \theta}{\alpha}\right) \cdot v_0\right) \\ &= \left(1 - \frac{t - \theta}{\alpha}\right) \cdot v_0 + \frac{t - \theta}{\alpha} \cdot x_0 \end{aligned}$$

ve buradan

$$w(t) = \left(1 - \frac{\theta + \alpha - t}{\alpha}\right) \cdot x_0 + \frac{\theta + \alpha - t}{\alpha} \cdot v_0 \tag{2.4.6}$$

biçiminde de ifade edilebilir. $w(\theta) = v_0$, $w(t_*) = w_*$, olur.

$\forall t \in [t_*, \theta]$ ve $\forall w \in V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t)$ için

$$\langle x(t) - w(t), w(t) - w \rangle \geq 0$$

olduğunu kanıtlamak için keyfi $y \in V(\theta)$ seçilsin ve

$$w = \left(1 - \frac{\theta + \alpha - t_*}{\alpha}\right) \cdot x_0 + \frac{\theta + \alpha - t_*}{\alpha} \cdot y \tag{2.4.7}$$

olsun. O zaman $w \in V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t_*)$ olur. (2.4.3), (2.4.7) eşitliklerinden ve $\dfrac{\theta + \alpha - t_*}{\alpha} > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x_* - w_*, w_* - w \rangle &= \left\langle x_* - w_*, \frac{\theta + \alpha - t_*}{\alpha} \cdot (v_0 - y) \right\rangle \\ &= \frac{\theta + \alpha - t_*}{\alpha} \langle x_* - w_*, v_0 - y \rangle \end{aligned}$$

$\langle x_* - w_*, v_0 - y \rangle \geq 0$ olduğu elde edilir. $y \in V(\theta)$ keyfi seçildiğinden $\forall y \in V(\theta)$ için

$$\langle x_* - w_*, v_0 - y \rangle \geq 0 \tag{2.4.8}$$

eşitsizliğinin sağlandığı bulunur.

$t \in [t_*, \theta]$ ve $w \in V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t)$ olsun. $\forall w \in V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t)$ için

$$w = \left(1 - \frac{\theta + \alpha - t}{\alpha}\right) \cdot x_0 + \frac{\theta + \alpha - t}{\alpha} \cdot y$$

olacak şekilde bir $y \in V(\theta)$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} \langle x(t) - w(t), w(t) - w \rangle &= \left\langle \frac{\theta - t}{\theta - t_*} \cdot (x_* - w_*), \left(1 - \frac{t - \theta}{\alpha}\right) \cdot (v_0 - y) \right\rangle \\ &= \frac{\theta - t}{\theta - t_*} \left(1 - \frac{t - \theta}{\alpha}\right) \langle x_* - w_*, v_0 - y \rangle \end{aligned}$$

ve (2.4.8) eşitsizliğinden $\forall t \in [t_*, \theta]$ ve $\forall w \in V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t)$ için

$$\langle x(t) - w(t), w(t) - w \rangle \geq 0$$

olduğu elde edilir. Önerme 1.1.12 uyarınca, $\forall t \in [t_*, \theta]$ için

$$\begin{aligned} d\left(x(t), V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t)\right) &= \|x(t) - w(t)\| \\ &= \frac{\theta - t}{\theta - t_*} \|x_* - w_*\| \end{aligned}$$

olur. $r_* = \dfrac{\|x_* - w_*\|}{\theta - t_*}$ seçilirse $\forall t \in [t_*, \theta]$ için

$$\frac{d\left(x(t), V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t)\right)}{\theta - t} = r_*$$

olur. $v = \dfrac{1}{\theta - t_*} \cdot (x_* - v_0)$ olarak belirlensin. $t \in [t_*, \theta]$ için (2.4.4) eşitliğinden

$$x(t) = v_0 + (t - \theta) \cdot v$$

ve

$$\lim_{t \to \theta^-} \frac{d\left(v_0 - (\theta - t) \cdot v, V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t)\right)}{\theta - t} = r_* > 0$$

olduğu elde edilir.

$$D^- V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (\theta, v_0) = \left\{ v \mid \liminf_{\delta \to 0^+} \frac{d\left(v_0 - \delta \cdot v, V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (\theta - \delta)\right)}{\delta} = 0 \right\}$$

olarak tanımlandığından

$$v \notin D^- V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (\theta, x_0) \tag{2.4.9}$$

bulunur.

$x_* \in V(t_*), v_0 \in V(\theta)$ ve $grV(\cdot)$ konveks olduğundan (2.4.4) uyarınca $\forall t \in [t_*, \theta]$ için $x(t) \in V(t)$ ve $d(x(t), V(t)) = 0$ olur. Buradan

$$\liminf_{t \to \theta^-} \frac{d(v_0 + (t - \theta) \cdot v, V(t))}{t - \theta} = 0$$

ve

$$v \in D^- V(\theta, v_0) \tag{2.4.10}$$

olduğu çıkar. (2.4.9) ve (2.4.10) uyarınca

$$D^- V(\theta, v) \not\subset D^- V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (\theta, v)$$

olur. Ancak bu sonuç teoremin koşulu ile çelişir. O halde varsayım doğru değildir. Yani $\forall t \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t) \subset V_\alpha^R(\theta, x_0) \mid (t)$$

içermesi sağlanır.

Önerme 2.1.4 ve teorem 2.4.1 kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.4.2. *$V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ konveks, kompakt küme değerli dönüşüm, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha > 0$ olsun. $\forall v \in V(\theta)$ için*

$$D^{-}V(\theta, v) \subset D^{-}V_{\alpha}^{R}(\theta, x_0) \mid (\theta, v)$$

ise $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümü için sağa konveks $\alpha-$devam vardır ve $\forall t \in [t_0, \theta + \alpha]$ için

$$W(t) = \begin{cases} V(t) & , \quad t \in [t_0, \theta] \\ V_{\alpha}^{R}(\theta, x_0) \mid (t) & , \quad t \in (\theta, \theta + \alpha] \end{cases}$$

olarak tanımlanan $W(\cdot) : [t_0, \theta + \alpha] \to K(\mathbb{R}^n)$ dönüşümü, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sağa konveks $\alpha-$devamıdır.

Kanıt. Teorem 2.4.1 uyarınca $\alpha > 0$ sayısı ve $\forall v_0 \in V(\theta)$ için

$$D^{-}V(\theta, v_0) \subset D^{-}V_{\alpha}^{R}(\theta, x_0) \mid (\theta, v_0)$$

ise $\forall t \in [t_0, \theta]$ için $V(t) \subset V_{\alpha}^{R}(\theta, x_0) \mid (t)$ olur.

$\forall t \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t) \subset V_{\alpha}^{R}(\theta, x_0) \mid (t)$$

olduğundan dolayı önerme 2.1.4 uyarınca,

$$W(t) = \begin{cases} V(t) & , \quad t \in [t_0, \theta] \\ V_{\alpha}^{R}(\theta, x_0) \mid (t) & , \quad t \in (\theta, \theta + \alpha] \end{cases}$$

ile verilen $W(\cdot) : [t_0, \theta + \alpha] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sağa konveks $\alpha-$devamıdır.

2. Kanıt. Her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$Y(t) = V(t_0 + \theta - t) \tag{2.4.11}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $Y(t_0) = V(\theta)$, $Y(\theta) = V(t_0)$ ve $V(t) = Y(t_0 + \theta - t)$ olur. (t_1, x_1), $(t_2, x_2) \in grY(\cdot)$ ise

$$(t_0 + \theta - t_1, x_1) \in grV(\cdot), \qquad (t_0 + \theta - t_2, x_2) \in grV(\cdot)$$

ve $grV(\cdot)$ konveks küme olduğundan her $\lambda \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}&(1-\lambda)\cdot(t_0+\theta-t_1,x_1)+\lambda\cdot(t_0+\theta-t_2,x_2)=\\&\qquad=(t_0+\theta-((1-\lambda)\,t_1+\lambda\,t_2,),(1-\lambda)\cdot x_1+\lambda\cdot x_2)\in grV(\cdot)\end{aligned}$$

olduğu bulunur. O halde

$$(1-\lambda)\cdot x_1+\lambda\cdot x_2\in V(t_0+\theta-((1-\lambda)\,t_1+\lambda\,t_2))=Y((1-\lambda)\,t_1+\lambda\,t_2)$$

ve buradan

$$(1-\lambda)\cdot(t_1,x_1)+\lambda\cdot(t_2,x_2)\in grY(\cdot)$$

olduğu elde edilir. O halde $Y(\cdot):[t_0,\theta]\to K(\mathbb{R}^n)$ konveks küme değerli dönüşümdür.

$$d(w-\delta\cdot v,V(\theta-\delta))=d(w+\delta\cdot(-v),Y(t_0+\delta))$$

olduğundan

$$\begin{aligned}D^-V(\theta,w)&=\left\{v\in\mathbb{R}^n\mid\liminf_{\delta\to0^+}\frac{d(w-\delta\cdot v,V(\theta-\delta))}{\delta}=0\right\}\\&=\left\{v\in\mathbb{R}^n\mid\liminf_{\delta\to0^+}\frac{d(w+\delta\cdot(-v),Y(t_0+\delta))}{\delta}=0\right\}\\&=\left\{v\in\mathbb{R}^n\mid(-v)\in D^+Y(t_0,w)\right\}\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$D^-V(\theta,w)=-D^+Y(t_0,w)\tag{2.4.12}$$

olduğu bulunur. $t'=t_0+\theta-t$ olmak üzere

$$\begin{aligned}V_\alpha^R(\theta,x_0)\mid(t)&=\left(1-\frac{\theta+\alpha-t}{\alpha}\right)\cdot x_0+\frac{\theta+\alpha-t}{\alpha}\cdot V(\theta)\\&=\left(1-\frac{t'-t_0+\alpha}{\alpha}\right)\cdot x_0+\frac{t'-t_0+\alpha}{\alpha}\cdot Y(t_0)\\&=Y_\alpha^L(t_0,x_0)\mid(t')\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}D^-V_\alpha^R(\theta,x_0)\mid(\theta,w)&=\left\{v\in\mathbb{R}^n\mid\liminf_{\delta\to0^+}\frac{d(w-\delta\cdot v,V_\alpha^R(\theta,x_0)\mid(\theta-\delta))}{\delta}=0\right\}\\&=\left\{v\in\mathbb{R}^n\mid\liminf_{\delta\to0^+}\frac{d(w+\delta\cdot(-v),Y_\alpha^L(t_0,x_0)\mid(t_0+\delta))}{\delta}=0\right\}\\&=\left\{v\in\mathbb{R}^n\mid(-v)\in D^+Y_\alpha^L(t_0,x_0)\mid(t_0,w)\right\}\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$D^{-}V_{\alpha}^{R}(\theta,x_0)\mid(\theta,w)=-D^{+}Y_{\alpha}^{L}(t_0,x_0)\mid(t_0,w) \qquad (2.4.13)$$

eşitliği elde edilir. Teoremin koşulundan (2.4.12) ve (2.4.13) uyarınca $Y(\cdot):[t_0,\theta]\to K(\mathbb{R}^n)$ kompakt, konveks küme değerli dönüşümü her $\forall w\in Y(t_0)$ için

$$D^{+}Y(t_0,w)\subset D^{+}Y_{\alpha}^{L}(t_0,x_0)\mid(t_0,w)$$

koşulunu sağlar. Teorem 2.3.2 uyarınca $Y(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola konveks $\alpha-$devam vardır ve $\forall t\in[t_0-\alpha,\theta]$ için

$$W^{*}(t)=\begin{cases} Y_{\alpha}^{L}(t_0,x_0)\mid(t) & ,\ t\in[t_0-\alpha,t_0) \\ Y(t) & ,\ t\in[t_0,\theta] \end{cases} \qquad (2.4.14)$$

olarak tanımlanan $W^{*}(\cdot):[t_0-\alpha,\theta]\to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü $Y(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola konveks $\alpha-$devamıdır.

$W(\cdot):[t_0,\theta+\alpha]\to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü

$$W(t)=W^{*}(t_0+\theta-t) \qquad (2.4.15)$$

olarak tanımlansın. O zaman $(2.4.11)$, $(2.4.14)$ ve $(2.4.15)$ uyarınca

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{cases} Y_{\alpha}^{L}(t_0,x_0)\mid(t_0+\theta-t) & ,\ t\in[t_0-\alpha,t_0) \\ Y(t_0+\theta-t) & ,\ t\in[t_0,\theta] \end{cases} \\ &= \begin{cases} V(t) & ,\ t\in[t_0,\theta] \\ V_{\alpha}^{R}(t_0,x_0)\mid(t) & ,\ t\in(\theta,\theta+\alpha] \end{cases} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $(t_1,x_1),(t_2,x_2)\in grW(\cdot)$ için $(t_0+\theta-t_1,x_1)\in grW^{*}(\cdot)$, $(t_0+\theta-t_2,x_2)\in grW^{*}(\cdot)$, $grW^{*}(\cdot)$ konveks küme olduğundan her $\lambda\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)\cdot(t_0+\theta-t_1,x_1)+\lambda\cdot(t_0+\theta-t_2,x_2)= \\ &\qquad (t_0+\theta-((1-\lambda)\ t_1+\lambda\, t_2,),(1-\lambda)\cdot x_1+\lambda\cdot x_2)\in grW^{*}(\cdot) \end{aligned}$$

olur. O halde

$$((1-\lambda)\cdot x_1+\lambda\cdot x_2)\in W^*(t_0+\theta-((1-\lambda)\,t_1+\lambda\,t_2))=W((1-\lambda)\,t_1+\lambda\,t_2)$$

ve buradan

$$(1-\lambda)\cdot(t_1,x_1)+\lambda\cdot(t_2,x_2)\in grW(\cdot)$$

olduğu elde edilir. Yani $grW(\cdot)\subset[t_0,\theta+\alpha]\times\mathbb{R}^n$ konveks kümedir.

2.5 Konveks Devamın Varlığı

Aşağıdaki teorem konveks, kompakt küme değerli dönüşümlerin konveks devamının varlığı için yeterli koşulları vermektedir.

Teorem 2.5.1. *$V(\cdot):[t_0,\theta]\to K(\mathbb{R}^n)$ konveks, kompakt bir küme değerli dönüşüm olsun. $\forall\, w\in V(t_0)$ için*

$$D^+V(t_0,w)\subset D^+V_\alpha^L(t_0,x_0)\mid(t_0,w) \tag{2.5.1}$$

ve $\forall\, w\in V(\theta)$ için

$$D^-V(\theta,w)\subset D^-V_\alpha^R(\theta,y_0)\mid(\theta,w) \tag{2.5.2}$$

içermeleri sağlanacak şekilde en az bir $\alpha>0$ sayısı ve $x_0,\ y_0\in\mathbb{R}^n$ varsa, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümü için konveks devam vardır ve $\forall t\in[t_0-\alpha,\theta+\alpha]$ için

$$W(t)=\begin{cases} V_\alpha^L(t_0,x_0)\mid(t) &, \ t\in[t_0-\alpha,t_0)\\ V(t) &, \ t\in[t_0,\theta]\\ V_\alpha^R(\theta,y_0)\mid(t) &, \ t\in(\theta,\theta+\alpha]\end{cases} \tag{2.5.3}$$

olarak tanımlanan $W(\cdot):[t_0-\alpha,\theta+\alpha]\to K(\mathbb{R}^n)$ dönüşümü, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün konveks $\alpha-$devamıdır.

Kanıt. $\forall\, w\in V(t_0)$ için (2.5.1) ve $\forall\, w\in V(\theta)$ için (2.5.2) içermeleri sağlanacak şekilde en az bir $\alpha>0$ sayısı ve $x_0,\ y_0\in\mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda (2.5.2) içermesi ve teorem 2.4.2 uyarınca, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sağa konveks $\alpha-$devamı vardır ve $\forall\, t \in [t_0, \theta + \alpha]$ için

$$U(t) = \begin{cases} V(t) & , \ t \in [t_0, \theta] \\ V_\alpha^R(\theta, y_0) \mid (t) & , \ t \in (\theta, \theta + \alpha] \end{cases} \tag{2.5.4}$$

şeklinde tanımlanan $U(\cdot) : [t_0, \theta + \alpha] \to K(\mathbb{R}^n)$ dönüşümü, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sağa konveks $\alpha-$devamıdır. Burada $V_\alpha^R(\theta, y_0) \mid (\cdot)$ dönüşümü, (2.2.2) ile tanımlanmış küme değerli dönüşümdür.

Sağa konveks $\alpha-$devam tanımından dolayı $U(\cdot)$ kompakt, konveks küme değerli dönüşümdür. (2.5.4) uyarınca $\forall\, t \in [t_0, \theta]$ için $U(t) = V(t)$ olur. Buradan önerme 1.2.19 uyarınca $\forall\, w \in V(t_0)$ için

$$D^+U(t_0, w) = D^+V(t_0, w) \tag{2.5.5}$$

olduğu elde edilir.

(2.5.1) içermesi ve (2.5.5) uyarınca $\forall\, w \in V(t_0)$ için

$$D^+U(t_0, w) \subset D^+V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_0, w)$$

içermesi sağlanır. O zaman teorem 2.3.2 uyarınca, $U(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola konveks $\alpha-$devamı vardır ve $\forall t \in [t_0 - \alpha, \theta + \alpha]$ için

$$U_L(t) = \begin{cases} V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t) & , \ t \in [t_0 - \alpha, t_0) \\ U(t) & , \ t \in [t_0, \theta + \alpha] \end{cases} \tag{2.5.6}$$

olarak tanımlanan $U_L(\cdot) : [t_0 - \alpha, \theta + \alpha] \to K(\mathbb{R}^n)$ dönüşümü, $U(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola konveks $\alpha-$devamıdır. Sola konveks $\alpha-$devamın tanımından dolayı $U_L(\cdot)$ kompakt, konveks küme değerli dönüşümdür. (2.5.3), (2.5.4) ve (2.5.6) uyarınca $\forall\, t \in [t_0 - \alpha, \theta + \alpha]$ için

$$W(t) = U_L(t) \tag{2.5.7}$$

olur. U_L konveks, kompakt küme değerli dönüşüm ve $\forall\, t \in [t_0, \theta]$ için

$$U_L(t) = V(t)$$

olduğundan (2.5.7) uyarınca $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümü, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün konveks $\alpha-$devamıdır.

2.6 Konveks Devamın Olmadığı Durumlar

Bu bölümde, konveks, kompakt küme değerli dönüşümlerin hangi durumlarda konveks devamının olmadığı araştırılacaktır.

Önerme 2.6.1. *$V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ konveks, kompakt küme değerli dönüşüm, $\alpha > 0$ ve $W(\cdot) : [t_0 - \alpha, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ dönüşümü, $V(\cdot)$ dönüşümünün sola konveks $\alpha-$devamı olsun. $\alpha_* \in (0, \alpha]$ ve $x_* \in W(t_0 - \alpha_*)$ olmak üzere, her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$V(t) \subset V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (t)$$

olur.

Kanıt. $t^* \in [t_0, \theta]$ olsun.

$$P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) = \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{t^* - t_0 + \alpha_*}\right) \cdot x_* + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{t^* - t_0 + \alpha_*} \cdot V(t^*)$$

olmak üzere $P_{\alpha_*}(x_*) \mid (\cdot)$ küme değerli dönüşümü tanımlansın. $x \in P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t_0)$ için

$$x = \left(1 - \frac{\alpha_*}{t^* - t_0 + \alpha_*}\right) \cdot x_* + \frac{\alpha_*}{t^* - t_0 + \alpha_*} \cdot w^* \tag{2.6.1}$$

olacak şekilde $w^* \in V(t^*)$ vardır. $t^* \in [t_0, \theta]$ olduğundan $W(t^*) = V(t^*)$ ve $w^* \in W(t^*)$ olur. $(t_0 - \alpha_*, x_*) \in grW(\cdot)$, $(t^*, w^*) \in grW(\cdot)$ ve $grW(\cdot) \subset [t_0 - \alpha, \theta] \times \mathbb{R}^n$ konveks küme olduğundan $(t_0, x) \in grW(\cdot)$, $x \in W(t_0) = V(t_0)$ olur. O halde

$$P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t_0) \subset V(t_0) \tag{2.6.2}$$

içermesi sağlanır.

$$V_0' = P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t_0) = \left(1 - \frac{\alpha_*}{t^* - t_0 + \alpha_*}\right) \cdot x_* + \frac{\alpha_*}{t^* - t_0 + \alpha_*} \cdot V(t^*) \tag{2.6.3}$$

ve $t \in [t_0 - \alpha_*, t^*]$ için

$$Q_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) = \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \cdot x_* + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} \cdot V_0' \tag{2.6.4}$$

olarak tanımlansın. $V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (\cdot)$ küme değerli dönüşümü her $t \in [t_0 - \alpha_*, \theta]$ için

$$V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (t) = \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \cdot x_* + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} \cdot V(t_0)$$

olarak tanımlandığından, (2.6.2), (2.6.3) ve (2.6.4) uyarınca, her $t \in [t_0 - \alpha_*, \theta]$ için

$$Q_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) \subset V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (t) \tag{2.6.5}$$

olduğu elde edilir. Keyfi $t \in [t_0 - \alpha_*, t^*]$ için,

$$\begin{aligned} Q_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) &= \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \cdot x_* + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} \cdot V_0' \\ = \frac{t_0 - t}{\alpha_*} \cdot x_* &+ \left(1 - \frac{t_0 - t}{\alpha_*}\right) \left[\left(1 - \frac{\alpha_*}{t^* - t_0 + \alpha_*}\right) \cdot x_* + \frac{\alpha_*}{t^* - t_0 + \alpha_*} \cdot V(t^*)\right] \\ &= \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{t^* - t_0 + \alpha_*}\right) \cdot x_* + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{t^* - t_0 + \alpha_*} \cdot V(t^*) \\ &= P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) \end{aligned}$$

olduğundan

$$Q_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) = P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) \tag{2.6.6}$$

olduğu elde edilir. Her $t \in [t_0 - \alpha_*, t^*]$ için (2.6.5) ve (2.6.6) uyarınca

$$P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) = Q_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) \subset V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (t) \tag{2.6.7}$$

olduğu bulunur. $t = t^*$ için (2.6.7) kullanılırsa

$$V(t^*) \subset V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (t^*)$$

içermesi elde edilir. $t^* \in [t_0, \theta]$ keyfi seçildiğinden herhangi bir $t \in [t_0, \theta]$ için $V(t) \subset V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (t)$ olur.

Önerme 2.6.2. $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ *konveks, kompakt küme değerli dönüşüm,* $\alpha > 0$ *ve* $W(\cdot) : [t_0, \theta + \alpha] \to K(\mathbb{R}^n)$ *dönüşümü,* $V(\cdot)$ *dönüşümünün sağa konveks* $\alpha-$*devamı olsun.* $\alpha_* \in (0, \alpha]$ *ve* $x_* \in W(\theta + \alpha_*)$ *olmak üzere, her* $t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$V(t) \subset V^R_{\alpha_*}(\theta, x_*) \mid (t)$$

olur.

Kanıt. $t^* \in [t_0, \theta]$ olsun. $P_{\alpha_*}(x_*) \mid (\cdot)$ küme değerli dönüşümü

$$P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) = \left(1 - \frac{\theta + \alpha_* - t}{\theta + \alpha_* - t^*}\right) \cdot x_* + \frac{\theta + \alpha_* - t}{\theta + \alpha_* - t^*} \cdot V(t^*)$$

ile tanımlasın. $x \in P_{\alpha_*}(x_*) \mid (\theta)$ olarak seçilsin. Bu durumda

$$x = \left(1 - \frac{\alpha_*}{\theta + \alpha_* - t^*}\right) \cdot x_* + \frac{\alpha_*}{\theta + \alpha_* - t^*} \cdot w^*$$

olacak şekilde $w^* \in V(t^*)$ vardır. $t^* \in [t_0, \theta]$ olduğundan $W(t^*) = V(t^*)$ ve $w^* \in W(t^*)$ olur. $(\theta + \alpha_*, x_*) \in grW(\cdot)$, $(t^*, w^*) \in grW(\cdot)$ ve $grW(\cdot) \subset [t_0, \theta + \alpha_*] \times \mathbb{R}^n$ konveks küme olduğundan $(\theta, x) \in grW(\cdot)$, $x \in W(\theta) = V(\theta)$ olur. Bu durumda

$$P_{\alpha_*}(x_*) \mid (\theta) \subset V(\theta) \tag{2.6.8}$$

içermesi doğrudur.

$$V_1' = P_{\alpha_*}(x_*) \mid (\theta) = \left(1 - \frac{\alpha_*}{\theta + \alpha_* - t^*}\right) \cdot x_* + \frac{\alpha_*}{\theta + \alpha_* - t^*} \cdot V(t^*) \tag{2.6.9}$$

ve $t \in [t^*, \theta + \alpha_*]$ için

$$Q_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) = \left(1 - \frac{\theta + \alpha_* - t}{\alpha_*}\right) \cdot x_* + \frac{\theta + \alpha_* - t}{\alpha_*} \cdot V_1' \tag{2.6.10}$$

olarak tanımlansın. $V_{\alpha_*}^R(\theta, x_*) \mid (\cdot)$ küme değerli dönüşümü her $t \in [t^*, \theta + \alpha_*]$ için

$$V_{\alpha_*}^R(\theta, x_*) \mid (t) = \left(1 - \frac{\theta - t + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \cdot x_* + \frac{\theta - t + \alpha_*}{\alpha_*} \cdot V(\theta)$$

olarak tanımlandığından, (2.6.8), (2.6.9) ve (2.6.10) uyarınca, her $t \in [t^*, \theta + \alpha_*]$ için

$$Q_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) \subset V_{\alpha_*}^R(\theta, x_*) \mid (t) \tag{2.6.11}$$

olduğu elde edilir. Her $t \in [t^*, \theta + \alpha_*]$ için,

$$\begin{aligned} Q_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) &= \left(1 - \frac{\theta + \alpha_* - t}{\alpha_*}\right) \cdot x_* + \frac{\theta + \alpha_* - t}{\alpha_*} \cdot V_1' \\ &= \frac{t - \theta}{\alpha_*} \cdot x_* + \left(\frac{\theta - t + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \cdot \left[\frac{\theta - t^*}{\theta + \alpha_* - t^*} \cdot x_* + \frac{\alpha_*}{\theta + \alpha_* - t^*} \cdot V(t^*)\right] \\ &= \left(1 - \frac{\theta + \alpha_* - t}{\theta + \alpha_* - t^*}\right) \cdot x_* + \frac{\theta + \alpha_* - t}{\theta + \alpha_* - t^*} \cdot V(t^*) \\ &= P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) \end{aligned}$$

olduğundan

$$Q_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) = P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) \tag{2.6.12}$$

eşitliği elde edilir. O zaman her $t \in [t^*, \theta + \alpha_*]$ için (2.6.11) ve (2.6.12) uyarınca

$$P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) = Q_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) \subset V^R_{\alpha_*}(\theta, x_*) \mid (t) \tag{2.6.13}$$

olduğu elde edilir. $t = t^*$ için (2.6.13) kullanılırsa

$$V(t^*) \subset V^R_{\alpha_*}(\theta, x_*) \mid (t^*)$$

içermesi bulunur. $t^* \in [t_0, \theta]$ keyfi seçildiğinden herhangi bir $t \in [t_0, \theta]$ için $V(t) \subset V^R_{\alpha_*}(\theta, x_*) \mid (t)$ içermesi sağlanır.

Teorem 2.6.3. $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ *konveks, kompakt küme değerli dönüşüm olsun. Her* $\alpha > 0$ *ve her* $x \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$D^+V(t_0, w) \not\subset D^+V^L_{\alpha}(t_0, x) \mid (t_0, w) \tag{2.6.14}$$

olacak şekilde en az bir $w \in V(t_0)$ *varsa,* $V(\cdot)$ *küme değerli dönüşümü için sola konveks devam yoktur.*

Kanıt. Aksi varsayılsın. Yani bir $\alpha_0 > 0$ için $W(\cdot) : [t_0 - \alpha_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola konveks α_0−devamı olsun. $0 < \alpha_* < \alpha_0$ olmak üzere $x_* \in W(t_0 - \alpha_*)$ seçilsin. Önerme 2.6.1 uyarınca her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t) \subset V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (t) \tag{2.6.15}$$

olur. Burada $V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (\cdot)$ dönüşümü (2.2.1) ile tanımlanmış olan küme değerli dönüşümdür. $V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (t_0) = V(t_0)$ olduğundan (2.6.15) uyarınca her $w \in V(t_0)$ için

$$D^+V(t_0, w) \subset D^+V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (t_0, w)$$

olur. Ancak bu (2.6.14) ile çelişir.

Teorem 2.6.4. $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ *konveks, kompakt küme değerli dönüşüm olsun.* $\forall\, \alpha > 0$ *ve* $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$D^-V(\theta, w) \not\subset D^-V^R_{\alpha}(\theta, x) \mid (\theta, w) \tag{2.6.16}$$

olacak şekilde $\exists\, w \in V(\theta)$ *varsa,* $V(\cdot)$ *küme değerli dönüşümü için sağa devam yoktur.*

Kanıt. Aksi varsayılsın. Yani bir $\alpha_0 > 0$ için $W(\cdot) : [t_0, \theta + \alpha_0] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sağa konveks α_0-devamı olsun. $0 < \alpha_* < \alpha_0$ olmak üzere $x_* \in W(\theta + \alpha_*)$ seçilsin. Önerme 2.6.2 uyarınca her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t) \subset V^R_{\alpha_*}(\theta, x_*) \mid (t) \tag{2.6.17}$$

olur. Burada $V^R_{\alpha_*}(\theta, x_*) \mid (\cdot)$ dönüşümü (2.2.2) ile tanımlanmış olan küme değerli dönüşümdür. $V^R_{\alpha_*}(\theta, x_*) \mid (\theta) = V(\theta)$ olduğundan (2.6.17) uyarınca her $w \in V(\theta)$ için

$$D^- V(\theta, w) \subset D^- V^R_{\alpha_*}(\theta, x_*) \mid (\theta, w)$$

olur. Ancak bu (2.6.16) ile çelişir.

3 MAKSİMAL KONVEKS DEVAM

Bu bölümde maksimal konveks devam kavramı tanımlanacak ve konveks, kompakt küme değerli dönüşümlerin maksimal konveks devamı bulunacaktır.

3.1 Maksimal Konveks Devamın Tanımı. $M^L_{\alpha_*}$ ve $M^R_{\alpha_*}$ Kümeleri

Aşağıda sola ve sağa maksimal konveks devamın tanımı verilmiştir.

Tanım 3.1.1. *$\alpha > 0$ sabit bir sayı ve*

$$V_\alpha(\cdot) : [t_0 - \alpha, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$$

küme değerli dönüşümü, $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ konveks, kompakt küme değerli dönüşümünün herhangi bir sola konveks $\alpha-$devamı olsun. Eğer $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün her $W(\cdot) : [t_0 - \alpha, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ sola konveks $\alpha-$devamı için

$$W(t_0 - \alpha) \subset V_\alpha(t_0 - \alpha)$$

içermesi sağlanıyorsa, $V_\alpha(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola maksimal konveks $\alpha-$devamı denir.

Tanım 3.1.2. *$\alpha > 0$ sabit bir sayı ve*

$$V_\alpha(\cdot) : [t_0, \theta + \alpha] \to K(\mathbb{R}^n)$$

küme değerli dönüşümü, $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ konveks, kompakt küme değerli dönüşümünün herhangi bir sağa konveks $\alpha-$devamı olsun. Eğer $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün her $W(\cdot) : [t_0, \theta + \alpha] \to K(\mathbb{R}^n)$ sağa konveks $\alpha-$devamı için

$$W(\theta + \alpha) \subset V_\alpha(\theta + \alpha)$$

içermesi sağlanıyorsa, $V_\alpha(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sağa maksimal konveks $\alpha-$devamı denir.

$\alpha_* > 0$ sayısı ve $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ konveks, kompakt küme değerli dönüşümü verilsin. $V^L_{\alpha_*}(t_0, x) \mid (\cdot)$ ve $V^R_{\alpha_*}(\theta, x) \mid (\cdot)$ sırasıyla (2.2.1), (2.2.2) ile tanımlanan küme değerli dönüşümler olmak üzere

$$M^L_{\alpha_*} = \left\{ \begin{array}{ll} x \in \mathbb{R}^n & \mid \forall\, v \in V(t_0) \text{ için} \\ & D^+V(t_0, v) \subset D^+V^L_{\alpha_*}(t_0, x) \mid (t_0, v) \end{array} \right\} \quad (3.1.1)$$

$$M^R_{\alpha_*} = \left\{ \begin{array}{ll} x \in \mathbb{R}^n & \mid \forall\, v \in V(\theta) \text{ için} \\ & D^-V(\theta, v) \subset D^-V^R_{\alpha_*}(\theta, x) \mid (\theta, v) \end{array} \right\} \quad (3.1.2)$$

olarak tanımlansın.

Önerme 3.1.3. *$M^L_{\alpha_*}$ ve $M^R_{\alpha_*}$ kompakt, konveks kümelerdir.*

Kanıt. $M^L_{\alpha_*}$ boş küme ise önermenin doğruluğu açıktır.

$M^L_{\alpha_*} \neq \emptyset$ olsun. İlk olarak $M^L_{\alpha_*}$ kümesinin konveks olduğu kanıtlansın. x_1, $x_2 \in M^L_{\alpha_*}$ ve $\lambda \in [0, 1]$ olsun.

$$\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2 \in M^L_{\alpha_*}$$

olduğunu görmek yeterli olacaktır.

$x_1, x_2 \in M^L_{\alpha_*}$ olduğundan $\forall\, v \in V(t_0)$ için

$$\begin{aligned} D^+V(t_0, v) &\subset D^+V^L_{\alpha_*}(t_0, x_1) \mid (t_0, v) \\ D^+V(t_0, v) &\subset D^+V^L_{\alpha_*}(t_0, x_2) \mid (t_0, v) \end{aligned}$$

içermeleri sağlanır. Teorem 2.3.1 uyarınca $\forall\, t \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t) \subset V^L_{\alpha_*}(t_0, x_1) \mid (t) \text{ ve } V(t) \subset V^L_{\alpha_*}(t_0, x_2) \mid (t) \quad (3.1.3)$$

olur. Burada

$$V^L_{\alpha_*}(t_0, x) \mid (t) = \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \cdot x + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} \cdot V(t_0)$$

olarak tanımlanmış küme değerli dönüşümdür. Buradan (3.1.3) uyarınca

$$V(t) \subset \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \cdot x_1 + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} \cdot V(t_0) \quad (3.1.4)$$

$$V(t) \subset \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \cdot x_2 + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} \cdot V(t_0) \quad (3.1.5)$$

olduğu bulunur. (3.1.4) , (3.1.5) içermelerinden $\lambda \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} \lambda \cdot V(t) &\subset \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \lambda \cdot x_1 + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} \lambda \cdot V(t_0) \\ (1-\lambda) \cdot V(t) &\subset \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) (1-\lambda) \cdot x_2 + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} (1-\lambda) \cdot V(t_0) \end{aligned}$$

olduğu bulunur. $V(t)$ konveks küme olduğundan önerme 1.1.3 uyarınca $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t) \subset \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) (\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2) + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} \cdot V(t_0)$$

olduğu elde edilir. Buradan $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t) \subset V^L_{\alpha_*}(t_0, \lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2) \mid (t) \tag{3.1.6}$$

içermesi sağlanır.

$$V^L_{\alpha_*}(t_0, \lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2) \mid (t_0) = V(t_0)$$

olduğundan (3.1.6) içermesinden $\forall\ v \in V(t_0)$ için

$$D^+V(t_0, v) \subset D^+V^L_{\alpha_*}(t_0, \lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2) \mid (t_0, v)$$

olduğu elde edilir. O halde $\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2 \in M^L_{\alpha_*}$ ve $M^L_{\alpha_*}$ konveks kümedir.

$M^L_{\alpha_*} \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kompakt olduğunun görülmesi için $M^L_{\alpha_*}$ kümesinin kapalı ve sınırlı olduğunu kanıtlamak yeterli olacaktır.

$M^L_{\alpha_*} \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kapalılığını göstermek için $x_n \to x_0$ olacak biçimde bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M^L_{\alpha_*}$ dizisi alınsın. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in M^L_{\alpha_*}$ olduğundan $\forall\ v \in V(t_0)$ için

$$D^+V(t_0, v) \subset D^+V^L_{\alpha_*}(t_0, x_n) \mid (t_0, v)$$

içermesi sağlanır. Önerme 2.3.1 uyarınca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$V(t) \subset V^L_{\alpha_*}(t_0, x_n) \mid (t)$$

ve (2.2.1) uyarınca

$$V(t) \subset \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \cdot x_n + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} \cdot V(t_0) \tag{3.1.7}$$

olur.

$\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $\varepsilon_* = \dfrac{\alpha_*}{\theta - t_0}\varepsilon$ olsun. $x_n \to x_0$ olduğundan $n > N$ iken $x_n \in x_0 + \varepsilon_* \cdot B$ olacak biçimde $N \in \mathbb{N}$ vardır. (3.1.7) uyarınca $n > N$ iken $\forall\, t \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t) \subset \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \cdot (x_0 + \varepsilon_* \cdot B) + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} \cdot V(t_0)$$

ve buradan

$$V(t) \subset V^L_{\alpha_*}(t_0, x_0) \mid (t) + \varepsilon \cdot B \tag{3.1.8}$$

olduğu elde edilir. $V(t)$, $V^L_{\alpha_*}(t_0, x_0) \mid (t)$ kümeleri kompakt ve keyfi $\varepsilon > 0$ için (3.1.8) içermesi sağlandığından $\forall\, t \in [t_0, \theta]$ için $V(t)$ ve

$$V(t) \subset \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \cdot x_0 + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} \cdot V(t_0)$$

ve

$$V(t) \subset V^L_{\alpha_*}(t_0, x_0) \mid (t) \tag{3.1.9}$$

olduğu bulunur. (3.1.9) içermesinden $\forall\, v \in V(t_0)$ için

$$D^+V(t_0, v) \subset D^+V^L_{\alpha_*}(t_0, x_0) \mid (t_0, v)$$

olduğu elde edilir. Yani $x_0 \in M^L_{\alpha_*}$ ve $M^L_{\alpha_*}$ kapalı kümedir.

$M^L_{\alpha_*}$ kümesinin sınırlı küme olmadığı varsayılsın. Bu durumda $n \to \infty$ iken $\|x_n\| \to \infty$ olacak biçimde bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M^L_{\alpha_*}$ dizisi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in M^L_{\alpha_*}$ olduğundan $\forall\, v \in V(t_0)$ için

$$D^+V(t_0, v) \subset D^+V^L_{\alpha_*}(t_0, x_n) \mid (t_0, v)$$

içermesi sağlanır. Bu durumda teorem 2.3.1 uyarınca $\forall\, t \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t) \subset V^L_{\alpha_*}(t_0, x_n) \mid (t) \tag{3.1.10}$$

olur. $V^L_{\alpha_*}(t_0, x_n) \mid (\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışından (3.1.10) içermesi

$$V(t) \subset \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \cdot x_n + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} \cdot V(t_0) \tag{3.1.11}$$

biçiminde de yazılabilir. $w_0 \in V(\theta)$ olsun. (3.1.11) uyarınca her $x_n \in M^L_{\alpha_*}$ için

$$w_0 = \left(1 - \frac{\theta - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \cdot x_n + \frac{\theta - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} \cdot v_n$$

olacak biçimde bir $v_n \in V(t_0)$ vardır. Buradan

$$x_n = \frac{\alpha_*}{t_0 - \theta} \cdot w_0 - \frac{\theta - t_0 + \alpha_*}{t_0 - \theta} \cdot v_n$$

eşitliğinin sağlandığı elde edilir. $V(t_0)$ kompakt olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $\|v_n\| \leq m$ olacak biçimde $m > 0$ sayısı vardır. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \left\| \frac{\alpha_*}{t_0 - \theta} \cdot w_0 + \frac{\theta - t_0 + \alpha_*}{t_0 - \theta} \cdot v_n \right\| \\ &\leq \left| \frac{\alpha_*}{t_0 - \theta} \right| \|w_0\| + \left| \frac{\theta - t_0 + \alpha_*}{t_0 - \theta} \right| m \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sonuç $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M^L_{\alpha_*}$ dizisinin $n \to \infty$ iken $\|x_n\| \to \infty$ olacak biçimde seçilmiş oluşuyla çelişir. O halde $M^L_{\alpha_*}$ kümesi sınırlıdır.

Benzer olarak $M^R_{\alpha_*} \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin de konveks ve kompakt olduğu kanıtlanır.

3.2 Maksimal Konveks $\alpha-$Devamın Hesabı

Bu bölümde, konveks, kompakt küme değerli dönüşümlerin sola ve sağa maksimal konveks $\alpha-$devamın bulunmasını sağlayan teoremler kanıtlanacaktır.

Teorem 3.2.1. *$\alpha_* > 0$, $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ konveks, kompakt küme değerli dönüşümü verilsin ve (3.1.1) ile tanımlanmış olan $M^L_{\alpha_*}$ kümesi boş olmasın. $M^L_{\alpha_*}(\cdot) : [t_0 - \alpha_*, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü*

$$M^L_{\alpha_*}(t) = \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \cdot M^L_{\alpha_*} + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} \cdot V(t_0) \tag{3.2.1}$$

olarak tanımlansın. O zaman $t \in [t_0 - \alpha_*, \theta]$ için

$$V_{\alpha_*}(t) = \begin{cases} M^L_{\alpha_*}(t) & , \ t \in [t_0 - \alpha_*, t_0) \\ V(t) & , \ t \in [t_0, \theta] \end{cases} \tag{3.2.2}$$

olarak tanımlanan $V_{\alpha_*}(\cdot) : [t_0 - \alpha, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola maksimal konveks α_*-devamıdır.

Kanıt. $M_{\alpha_*}^L \subset \mathbb{R}^n$ kompakt olduğundan $V_{\alpha_*}(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün kompakt olduğu açıktır.

İlk olarak

$$V_{\alpha_*}(\cdot):[t_0-\alpha_*,\theta]\to K(\mathbb{R}^n)$$

küme değerli dönüşümünün, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola konveks α_*–devamı olduğu kanıtlansın. $V_{\alpha_*}(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışından her $t\in[t_0,\theta]$ için $V_{\alpha_*}(t)=V(t)$ olduğu açıktır. O halde $V_{\alpha_*}(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün konveks olduğunu kanıtlamak yeterli olacaktır. $t_1,\ t_2\in[t_0-\alpha_*,\theta]$ ve $\lambda\in[0,1]$ olsun. Önerme 1.2.10 uyarınca

$$(1-\lambda)\cdot V_{\alpha_*}(t_1)+\lambda\cdot V_{\alpha_*}(t_2)\subset V_{\alpha_*}((1-\lambda)\ t_1+\lambda\, t_2) \tag{3.2.3}$$

içermesinin sağlandığını görmek yeterlidir. $x_1\in V_{\alpha_*}(t_1)$, $x_2\in V_{\alpha_*}(t_2)$ olsun. Genelliği bozmadan $t_1<t_2$ olduğu kabul edilebilir. O zaman üç farklı durum bulunur.

1. $t_2<t_0$ ise $\lambda\, t_1+(1-\lambda)\ t_2\in[t_0-\alpha_*,t_0)$ olur. (3.2.2) uyarınca $x_1\in M_{\alpha_*}^L(t_1)$, $x_2\in M_{\alpha_*}^L(t_2)$ ve $M_{\alpha_*}^L(\cdot)$ küme değerli dönüşümü konveks olduğundan

$$(1-\lambda)\cdot x_1+\lambda\cdot x_2\in M_{\alpha_*}^L((1-\lambda)\ t_1+\lambda\, t_2)$$

olduğu bulunur. Her $t\in[t_0-\alpha_*,t_0)$ için $V_{\alpha_*}(t)=M_{\alpha_*}^L(t)$ olduğundan

$$(1-\lambda)\cdot x_1+\lambda\cdot x_2\in V_{\alpha_*}(\lambda\, t_1+(1-\lambda)\ t_2)$$

olduğu elde edilir. Bir başka deyişle $t_2<t_0$ iken (3.2.3) içermesi sağlanır.

2. $t_0\le t_1$ ise $\lambda\, t_1+(1-\lambda)\ t_2\in[t_0,\theta]$ olur. $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümü konveks olduğundan

$$(1-\lambda)\cdot x_1+\lambda\cdot x_2\in V(\lambda\, t_1+(1-\lambda)\ t_2)$$

ve (3.2.2) uyarınca

$$(1-\lambda)\cdot x_1+\lambda\cdot x_2\in V_{\alpha_*}(\lambda\, t_1+(1-\lambda)\ t_2)$$

olduğu bulunur. Yani $t_0\le t_1$ ise (3.2.3) içermesi sağlanır.

3. $t_1 < t_0 < t_2$ ise (3.2.2) uyarınca $x_1 \in M^L_{\alpha_*}(t_1)$ ve $x_2 \in V(t_2)$ olur. Bu durumda $M^L_{\alpha_*}(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışından, yani (3.2.1)'den

$$x_1 = \left(1 - \frac{t_1 - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \cdot x_* + \frac{t_1 - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} \cdot v_0 \qquad (3.2.4)$$

olacak şekilde $x_* \in M^L_{\alpha_*}$ ve $v_0 \in V(t_0)$ vardır. $x_* \in M^L_{\alpha_*}$ olduğundan her $v \in V(t_0)$ için

$$D^+V(t_0, v) \subset D^+V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (t_0, v)$$

olur. Teorem 2.3.2 uyarınca

$$W(t) = \begin{cases} V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (t) & , \quad t \in [t_0 - \alpha_*, t_0) \\ V(t) & , \quad t \in [t_0, \theta] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $W(\cdot) : [t_0 - \alpha_*, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola konveks α_*−devamıdır. Burada $V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (\cdot)$, (2.2.1) eşitliğinde

$$V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (t) = \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \cdot x_* + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} \cdot V(t_0)$$

olarak tanımlanmış küme değerli dönüşümüdür. $V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (\cdot)$ dönüşümünün tanımlanışı ve (3.2.4) uyarınca $x_1 \in V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (t_1)$ olur. $t_1 \in [t_0 - \alpha_*, t_0)$ olduğundan $x_1 \in W(t_1)$ olur. $x_2 \in V(t_2)$, $t_2 > t_0$ olduğundan $x_2 \in W(t_2)$ olur. $W(\cdot)$ dönüşümü, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola konveks α_*−devamı olduğundan, keyfi $\lambda \in [0, 1]$ için

$$(1 - \lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 \in W(\lambda t_1 + (1 - \lambda)\, t_2) \qquad (3.2.5)$$

olur. $x_* \in M^L_{\alpha_*}$ olduğundan, $V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (\cdot)$ ve $V_{\alpha_*}(\cdot)$ küme değerli dönüşümlerinin tanımları uyarınca, keyfi $t \in [t_0 - \alpha_*, t_0)$ için

$$W(t) = V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (t) \subset M^L_{\alpha_*}(t) = V_{\alpha_*}(t) \qquad (3.2.6)$$

olduğu açıktır. $W(\cdot)$ ve $V_{\alpha_*}(\cdot)$ küme değerli dönüşümlerinin tanımlarından, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$W(t) = V(t) = V_{\alpha_*}(t) \qquad (3.2.7)$$

olur. (3.2.6) ve (3.2.7) uyarınca keyfi $t \in [t_0 - \alpha_*, \theta]$ için

$$W(t) \subset V_{\alpha_*}(t)$$

olduğu elde edilir. Buradan (3.2.5) uyarınca, keyfi $\lambda \in [0,1]$ için

$$(1-\lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 \in V_{\alpha_*}(\lambda t_1 + (1-\lambda)\, t_2)$$

olduğu bulunur. Bir başka deyişle $t_1 < t_0 < t_2$ iken (3.2.3) içermesi sağlanır.

O halde $V_{\alpha_*}(\cdot) : [t_0 - \alpha_*, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü konvekstir ve $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün sola konveks α_*−devamıdır.

Şimdi $V_{\alpha_*}(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola maksimal konveks α_*−devamı olduğunu kanıtlayalım.

$$W(\cdot) : [t_0 - \alpha_*, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$$

küme değerli dönüşümü, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün herhangi bir sola konveks α_*−devamı ve $x_* \in W(t_0 - \alpha_*)$ olsun. Önerme 2.6.1 uyarınca her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t) \subset V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (t)$$

içermesi sağlanır. $V(t_0) = V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (t_0)$ olduğundan, keyfi $v \in V(t_0)$ için

$$D^+V(t_0, v) \subset D^+V^L_{\alpha_*}(t_0, x_*) \mid (t_0, v)$$

olur. Bu durumda $x_* \in M^L_{\alpha_*}$ olur. $x_* \in W(t_0 - \alpha_*)$ keyfi seçildiğinden,

$$W(t_0 - \alpha_*) \subset V_{\alpha_*}(t_0 - \alpha_*)$$

içermesi sağlanır. Bir başka deyişle $V_{\alpha_*}(\cdot)$, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola maksimal konveks α_*−devamıdır.

Teorem 3.2.2. *$\alpha_* > 0$, $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ konveks, kompakt küme değerli dönüşümü verilsin ve (3.1.2) ile tanımlanmış olan $M^R_{\alpha_*}$ kümesi boş olmasın. $M^R_{\alpha_*}(\cdot) : [t_0, \theta + \alpha_*] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü*

$$M^R_{\alpha_*}(t) = \left(1 - \frac{\theta + \alpha_* - t}{\alpha_*}\right) \cdot M^R_{\alpha_*} + \frac{\theta + \alpha_* - t}{\alpha_*} \cdot V(\theta)$$

olarak tanımlansın. $t \in [t_0, \theta + \alpha_*]$ için

$$V_{\alpha_*}(t) = \begin{cases} V(t) & , \ t \in [t_0, \theta] \\ M^R_{\alpha_*}(t) & , \ t \in (\theta, \theta + \alpha_*] \end{cases}$$

olarak tanımlanan $V_{\alpha_*}(\cdot) : [t_0, \theta + \alpha_*] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sağa maksimal konveks α_*−devamıdır.

Teorem 3.2.2, teorem 3.2.1'e benzer olarak kanıtlanır.

4 LIPSCHITZ SÜREKLİLİK VE KONVEKS DEVAM

Bu bölümde $[t_0, \theta]$ aralığında tanımlı kompakt, konveks küme değerli dönüşümlerin konveks devamının varlığı ile Lipschitz sürekliliği arasındaki ilişki incelenecektir.

4.1 Konveks Devamı Olan Küme Değerli Dönüşümlerin Lipschitz Sürekliliği

Genel durumda, konveks, kompakt $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü, $[t_0, \theta]$ aralığında Lipschitz sürekli olmayabilir. Bu duruma bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.1.1. *Her $t \in [0,2]$ için*

$$V(t) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \mid -1-\sqrt{t} \le x \le 1+\sqrt{t}\} & , \quad t \in [0,1] \\ \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{-t+2}-1 \le x \le \sqrt{-t+2}+1\} & , \quad t \in (1,2] \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $grV(\cdot) = \{(t,x) \in [0,2] \times \mathbb{R} \,|x \in V(t)\}$ olsun. $grV(\cdot)$ konveks, kompakt küme olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Yani $V(\cdot) : [0,2] \to K(\mathbb{R}^n)$ konveks, kompakt küme değerli dönüşümdür. Ancak bu küme değerli dönüşüm Lipschitz sürekli değildir.

Aşağıda Lipschitz sürekli küme değerli bir dönüşüm ile kompakt, konveks bir küme değerli dönüşüm arasındaki bir ilişki verilmiştir.

Önerme 4.1.2. *$W(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ Lipschitz koşulunu sağlayan bir küme değerli dönüşüm olsun. $V(t_0) = W(t_0)$, $V(\theta) = W(\theta)$ ve $grV(\cdot) \subset grW(\cdot)$ koşullarını sağlayan her $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ kompakt, konveks küme değerli dönüşümü de Lipschitz koşulunu sağlar.*

Kanıt. $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümü $L > 0$ sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlıyor olsun. $V(t_0) = W(t_0)$, $V(\theta) = W(\theta)$ ve $grV(\cdot) \subset grW(\cdot)$ olacak biçimde bir $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ kompakt, konveks küme değerli dönüşümü seçilsin.

$V(\cdot)$ küme değerli dönüşümü Lipschitz koşulunu sağladığı kanıtlanacaktır. $t_1,\ t_2 \in [t_0, \theta]$ ve $t_1 < t_2$ olduğu varsayılsın. $v_2 \in V(t_2)$ seçilsin. $grV(\cdot) \subset grW(\cdot)$ olduğundan

$$v_2 \in W(t_2) \tag{4.1.1}$$

olur. $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümü $L > 0$ sabitiyle Lipschitz koşulunu sağladığından

$$\begin{aligned} W(t_0) &\subset W(t_2) + L(t_2 - t_0) \cdot \overline{B} \\ W(t_2) &\subset W(t_0) + L(t_2 - t_0) \cdot \overline{B} \end{aligned}$$

olur. Buradan (4.1.1) uyarınca $v_2 \in W(t_0) + L(t_2 - t_0) \cdot \overline{B}$ olduğu bulunur. $W(t_0) = V(t_0)$ olduğundan $v_2 \in V(t_0) + L(t_2 - t_0) \cdot \overline{B}$ olduğu elde edilir. Bu durumda

$$v_2 = v_0 + L(t_2 - t_0) \cdot b \tag{4.1.2}$$

olacak şekilde $v_0 \in V(t_0)$ ve $b \in \overline{B}$ vardır. $v(\cdot) : [t_0, t_2] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu

$$v(t) = \left(1 - \frac{t - t_0}{t_2 - t_0}\right) \cdot v_0 + \frac{t - t_0}{t_2 - t_0} \cdot v_2 \tag{4.1.3}$$

olarak tanımlansın. $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümü konveks ve $v_0 \in V(t_0)$, $v_2 \in V(t_2)$ olduğundan her $t \in [t_0, t_2]$ için $v(t) \in V(t)$ olur. Buna göre $t_1 \in [t_0, t_2]$ için $v(t_1) \in V(t_1)$'dir. (4.1.2) ve (4.1.3) uyarınca

$$\begin{aligned} \|v_2 - v(t_1)\| &= \left\|(v_0 + L(t_2 - t_0) \cdot b) - \left(v_0 + \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} \cdot (v_2 - v_0)\right)\right\| \\ &= \left\|L(t_2 - t_0) \cdot b - \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} \cdot L(t_2 - t_0) \cdot b\right\| \\ &\le L(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Yani $v_2 \in V(t_1) + L(t_2 - t_1) \cdot \overline{B}$ olur. Bir başka deyişle

$$V(t_2) \subset V(t_1) + L(t_2 - t_1) \cdot \overline{B} \tag{4.1.4}$$

olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi

$$V(t_1) \subset V(t_2) + L(t_2 - t_1) \cdot \overline{B}$$

olduğu kanıtlansın. $v_1 \in V(t_1)$ olsun. $grV(\cdot) \subset grW(\cdot)$ olduğundan

$$v_1 \in W(t_1) \tag{4.1.5}$$

olur. $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümü $L > 0$ sabitiyle Lipschitz koşulunu sağladığından

$$\begin{aligned} W(\theta) &\subset W(t_1) + L(\theta - t_1) \cdot \overline{B} \\ W(t_1) &\subset W(\theta) + L(\theta - t_1) \cdot \overline{B} \end{aligned}$$

olduğu yazılabilir. Buradan (4.1.5) uyarınca $v_1 \in W(\theta) + L(\theta - t_1) \cdot \overline{B}$ olur. $V(\theta) = W(\theta)$ olduğundan $v_1 \in V(\theta) + L(\theta - t_1) \cdot \overline{B}$ olduğu elde edilir. Bu durumda

$$v_1 = v_2 + L(\theta - t_1) \cdot b \tag{4.1.6}$$

olacak şekilde $v_2 \in V(\theta)$ ve $b \in \overline{B}$ vardır. $w(\cdot) : [t_1, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu

$$w(t) = \left(1 - \frac{t - t_1}{\theta - t_1}\right) \cdot v_1 + \frac{t - t_1}{\theta - t_1} \cdot v_2 \tag{4.1.7}$$

olarak tanımlansın. $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümü konveks ve $v_1 \in V(t_1)$, $v_2 \in V(\theta)$ olduğundan her $t \in [t_1, \theta]$ için $w(t) \in V(t)$ olur. Buna göre $t_2 \in [t_1, \theta]$ için $w(t_2) \in V(t_2)$'dir. (4.1.6) ve (4.1.7) uyarınca

$$\begin{aligned} \|v_1 - w(t_2)\| &= \left\| (v_2 + L(\theta - t_1) \cdot b) - \left(v_2 + \frac{t_2 - t_1}{\theta - t_1} \cdot (v_2 - v_1)\right) \right\| \\ &\leq L(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Yani $v_1 \in V(t_2) + L(t_2 - t_1) \cdot \overline{B}$ olur. Bir başka deyişle

$$V(t_1) \subset V(t_2) + L(t_2 - t_1) \cdot \overline{B} \tag{4.1.8}$$

içermesi sağlanır. (4.1.4) ve (4.1.8) içermelerinden

$$h(V(t_1), V(t_2)) \leq L(t_2 - t_1)$$

olduğu elde edilir. Yani $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ kompakt, konveks küme değerli dönüşümü $L > 0$ sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlar.

Sıradaki teorem, kapalı, sınırlı aralıkta tanımlı ve konveks devamı olan kompakt, konveks küme değerli dönüşümlerin Lipschitz sürekli olduğunu göstermektedir.

Teorem 4.1.3. *Kompakt, konveks $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün konveks devamı varsa $V(\cdot)$ Lipschitz koşulunu sağlar.*

Kanıt. $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ kompakt, konveks küme değerli dönüşümünün konveks devamı varsa önerme 2.6.1 ve önerme 2.6.2 uyarınca, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t) \subset V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t), \qquad V(t) \subset V_\alpha^R(\theta, x_1) \mid (t) \tag{4.1.9}$$

olacak şekilde $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha > 0$ vardır. Burada $V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (\cdot)$ ve $V_\alpha^R(\theta, x_1) \mid (\cdot)$ dönüşümleri (2.2.1) ve (2.2.2) ile tanımlanan küme değerli dönüşümlerdir.

$$W = \left(grV_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (\cdot) \bigcap grV_\alpha^R(\theta, x_1) \mid (\cdot)\right) \tag{4.1.10}$$

olsun. $W(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$W(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in W\} \tag{4.1.11}$$

olarak tanımlansın. $grV_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (\cdot)$ ve $grV_\alpha^R(\theta, x_1) \mid (\cdot)$ kümeleri konveks, kompakt küme olduğundan $W \subset [t_0 - \alpha, \theta + \alpha] \times \mathbb{R}^n$ kümesi de konveks, kompakt kümedir. $grW(\cdot) = W$ olduğundan (4.1.11) ile tanımlanan $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümü konveks, kompakt küme değerli dönüşümdür. (4.1.9) uyarınca her $t \in [t_0, \theta]$ için $V(t) \subset W(t)$ olduğu açıktır. $t \in [t_0, \theta]$ için $V(t) \neq \emptyset$ olduğundan her $t \in [t_0, \theta]$ için $W(t) \neq \emptyset$ olur. $W(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ olacak biçimde bir konveks, kompakt küme değerli dönüşümdür. Buradan her $t \in [t_0, \theta]$ için $W(t)$ kümesinin boş olmayan, konveks, kompakt küme olduğu elde edilir.

$W(\cdot):[t_0,\theta]\to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü Lipschitz koşulunu sağladığı kanıtlansın. $t_1, t_2\in[t_0,\theta]$ olsun. Genelliği bozmadan $t_1<t_2$ olduğu varsayılsın. $v_2\in W(t_2)$ olsun. $(t_2,v_2)\in W$ olduğundan (4.1.10) uyarınca

$$v_2\in V_\alpha^L(t_0,x_0)\mid(t_2) \text{ ve } v_2\in V_\alpha^R(\theta,x_1)\mid(t_2) \tag{4.1.12}$$

olur. Önerme 2.2.1 uyarınca, $V_\alpha^L(t_0,x_0)\mid(\cdot)$ ve $V_\alpha^R(\theta,x_1)\mid(\cdot)$ dönüşümleri Lipschitz koşulunu sağladığından her τ, $\eta\in[t_0,\theta]$ için

$$V_\alpha^L(t_0,x_0)\quad\mid\quad(\tau)\subset V_\alpha^L(t_0,x_0)\mid(\eta)+L_1|\tau-\eta|\cdot\overline{B} \tag{4.1.13}$$

$$V_\alpha^R(\theta,x_1)\quad\mid\quad(\eta)\subset V_\alpha^R(\theta,x_1)\mid(\tau)+L_2|\tau-\eta|\cdot\overline{B} \tag{4.1.14}$$

içermeleri sağlanacak şekilde L_1, $L_2>0$ sayıları vardır. Bu durumda (4.1.12) ve (4.1.13) uyarınca

$$v_2\in V_\alpha^L(t_0,x_0)\mid(t_0)+L_1(t_2-t_0)\cdot\overline{B}$$

olur. O zaman

$$v_2=v_0+L_1(t_2-t_0)\cdot b \tag{4.1.15}$$

olacak şekilde $v_0\in V_\alpha^L(t_0,x_0)\mid(t_0)$ ve $b\in\overline{B}$ vardır.

$v(\cdot):[t_0,t_2]\to\mathbb{R}^n$ fonksiyonu

$$v(t)=\left(1-\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\right)\cdot v_0+\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\cdot v_2 \tag{4.1.16}$$

olarak tanımlansın. $V_\alpha^L(t_0,x_0)\mid(\cdot)$ küme değerli dönüşümü konveks ve $v_0\in V_\alpha^L(t_0,x_0)\mid(t_0)$ olduğundan (4.1.12) ve (4.1.16) uyarınca her $t\in[t_0,t_2]$ için

$$v(t)\in V_\alpha^L(t_0,x_0)\mid(t) \tag{4.1.17}$$

olur. Öte yandan $V_\alpha^L(t_0,x_0)\mid(t_0)=V(t_0)$ ve her $t\in[t_0,\theta]$ için $V(t)\subset V_\alpha^R(\theta,x_1)\mid(t)$ olduğundan $v_0\in V_\alpha^R(\theta,x_1)\mid(t_0)$ ve (4.1.12) uyarınca her $t\in[t_0,t_2]$ için $v(t)\in V_\alpha^R(\theta,x_1)\mid(t)$ olur. Bu durumda (4.1.15) ve (4.1.16) uyarınca $t_1\in[t_0,t_2]$ için

$$v(t_1)\in V_\alpha^R(\theta,x_1)\mid(t_1)$$

olur. Buradan (4.1.10) ve (4.1.17) uyarınca $v(t_1) \in W(t_1)$ olduğu elde edilir. (4.1.15) ve (4.1.16) uyarınca

$$\begin{aligned} \|v_2 - v(t_1)\| &= \left\| v_0 + L_1 |t_2 - t_0| \cdot b - \left(v_0 + \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} \cdot (v_2 - v_0) \right) \right\| \\ &= \|L_1 (t_2 - t_1) \cdot b\| \\ &\leq L_1 (t_2 - t_1) \end{aligned}$$

olduğundan

$$v_2 \in W(t_1) + L_1 (t_2 - t_1) \cdot \overline{B}$$

olur. $L = \max\{L_1, L_2\}$ olarak seçilirse

$$W(t_2) \subset W(t_1) + L(t_2 - t_1) \cdot \overline{B} \tag{4.1.18}$$

olduğu elde edilir.

$v_1 \in W(t_1)$ olsun. O zaman $(t_1, v_1) \in W$ olduğundan (4.1.10) uyarınca

$$v_1 \in V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_1), \qquad v_1 \in V_\alpha^R(\theta, x_1) \mid (t_1) \tag{4.1.19}$$

olur. (4.1.14) uyarınca

$$v_1 \in V_\alpha^R(\theta, x_1) \mid (\theta) + L_2(\theta - t_1) \cdot \overline{B}$$

olduğu elde edilir. Bu durumda

$$v_1 = v_2 + L_2(\theta - t_1) \cdot b \tag{4.1.20}$$

olacak şekilde $v_2 \in V_\alpha^R(\theta, x_1) \mid (\theta)$ ve $b \in \overline{B}$ vardır.

$w(\cdot) : [t_1, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu

$$w(t) = \left(1 - \frac{\theta - t}{\theta - t_1}\right) \cdot v_2 + \frac{\theta - t}{\theta - t_1} \cdot v_1 \tag{4.1.21}$$

olarak tanımlasın. $V_\alpha^R(\theta, x_1) \mid (\cdot)$ küme değerli dönüşümü konveks ve $v_2 \in V_\alpha^R(\theta, x_1) \mid (\theta)$ olduğundan (4.1.19), (4.1.21) uyarınca her $t \in [t_1, \theta]$ için

$$w(t) \in V_\alpha^R(\theta, x_1) \mid (t) \tag{4.1.22}$$

olur. Öte yandan $V_\alpha^R(\theta, x_1) \mid (\theta) = V(\theta)$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için $V(t) \subset V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t)$ olduğundan $v_2 \in V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (\theta)$ olur. Buradan (4.1.19), (4.1.21) uyarınca her $t \in [t_1, \theta]$ için $w(t) \in V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t)$ olur. Bu durumda $t_2 \in [t_1, \theta]$ için

$$w(t_2) \in V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_2)$$

olur. Buradan ve (4.1.10), (4.1.22) ifadelerinden $w(t_2) \in W(t_2)$ olduğu elde edilir. (4.1.20) ve (4.1.21) uyarınca

$$\begin{aligned}\|v_1 - w(t_2)\| &= \left\| v_2 + L_2(\theta - t_1) \cdot b - \left(v_2 + \frac{\theta - t_2}{\theta - t_1} \cdot (v_1 - v_2) \right) \right\| \\ &= \|L_2(t_2 - t_1) \cdot b\| \\ &\leq L_2(t_2 - t_1)\end{aligned}$$

olduğundan

$$v_1 \in W(t_2) + L_2(t_2 - t_1) \cdot \overline{B}$$

eşitsizliği elde edilir. $L = \max\{L_1, L_2\}$ olarak seçilsin.

$$W(t_1) \subset W(t_2) + L(t_2 - t_1) \cdot \overline{B} \tag{4.1.23}$$

olduğu bulunur. (4.1.18) ve (4.1.23) içermelerinden

$$h(W(t_1), W(t_2)) \leq L(t_2 - t_1)$$

eşitsizliğine ulaşılır. O halde (4.1.11) ile tanımlanmış olan $W(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü $L = \max\{L_1, L_2\}$ sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlar.

Her $t \in [t_0, \theta]$ için, $V(t)$ boş olmayan, kompakt, konveks küme ve $V(t) \subset W(t)$ olduğundan önerme 4.1.2 uyarınca $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü de Lipschitz koşulunu sağlar.

Teorem 4.1.3'ten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.4. *$V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ kompakt, konveks küme değerli dönüşüm olsun. $V(\cdot)$ Lipschitz sürekli olmasın. O zaman $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün konveks devamı yoktur.*

Örnek 4.1.1'e geri dönülürse, bu örnekte verilen $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü Lipschitz sürekli olmadığından bu dönüşümün konveks devamı yoktur.

4.2 Lipschitz Sürekli Küme Değerli Dönüşümlerin Konveks Devamının Varlığı

Şimdi Lipschitz sürekli küme değerli dönüşümlerin konveks, kompakt devamının varlığı problemi ele alınsın.

Önerme 4.2.1. *$V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ Lipschitz koşulunu sağlayan bir küme değerli dönüşüm olsun. $intV(t_0) \neq \emptyset$ ve $intV(\theta) \neq \emptyset$ ise her $v \in V(t_0)$ ve her $w \in V(\theta)$ için*

$$
\begin{aligned}
D^+V(t_0, v) &\subset D^+V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_0, v) \\
D^-V(\theta, w) &\subset D^-V_\alpha^R(\theta, x_1) \mid (\theta, w)
\end{aligned}
$$

olacak şekilde x_0, $x_1 \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha > 0$ vardır.

Kanıt. $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü $L_0 > 0$ sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t) \subset V(t_0) + L_0(t - t_0) \cdot B \tag{4.2.1}$$

olur. $V_1(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü

$$V_1(t) := V(t_0) + L_0(t - t_0) \cdot B$$

olarak tanımlansın. (4.2.1) uyarınca her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t) \subset V_1(t) \tag{4.2.2}$$

olur.

Her $t \in [t_0, \theta]$ için $V_1(t) \subset V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t)$ olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sayısı ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olduğu kanıtlansın. $x_0 \in intV(t_0)$ olsun. O zaman

$$B(x_0, \varepsilon_0) \subset V(t_0)$$

olacak biçimde $\varepsilon_0 > 0$ vardır. O halde herhangi bir $\beta > 0$ sayısı için

$$\frac{1}{\beta} \cdot (B(x_0, \varepsilon_0) - x_0) \subset \frac{1}{\beta} \cdot (V(t_0) - x_0) \tag{4.2.3}$$

içermesi doğrudur. Ayrıca

$$B = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot (B(x_0, \varepsilon_0) - x_0) \tag{4.2.4}$$

olduğu açıktır.

$$0 < \alpha_0 \le \frac{\varepsilon_0}{L_0} \tag{4.2.5}$$

koşulunu sağlayan bir $\alpha_0 > 0$ seçilirse, $(B(x_0, \varepsilon_0) - x_0)$ konveks, kompakt küme ve $0 \in (B(x_0, \varepsilon_0) - x_0)$ olduğundan $(4.2.3)$, $(4.2.4)$ ve $(4.2.5)$ uyarınca her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} V_1(t) &= V(t_0) + L_0(t - t_0) \cdot B \\ &= V(t_0) + \frac{L_0}{\varepsilon_0}(t - t_0) \cdot (B(x_0, \varepsilon_0) - x_0) \\ &\subset V(t_0) + \frac{1}{\alpha_0}(t - t_0) \cdot (B(x_0, \varepsilon_0) - x_0) \\ &\subset V(t_0) + \frac{1}{\alpha_0}(t - t_0) \cdot (V(t_0) - x_0) \\ &= V^L_{\alpha_0}(t_0, x_0) \mid (t) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. O halde $x_0 \in intV(t_0)$ ve $\alpha_0 \in \left(0, \frac{\varepsilon_0}{L_0}\right]$ için $t \in [t_0, \theta]$ iken

$$V_1(t) \subset V^L_{\alpha_0}(t_0, x_0) \mid (t) \tag{4.2.6}$$

olur. (4.2.2) ve (4.2.6) ifadelerinden $\alpha_0 \in \left(0, \frac{\varepsilon_0}{L_0}\right]$ için $t \in [t_0, \theta]$ iken

$$V(t) \subset V^L_{\alpha_0}(t_0, x_0) \mid (t)$$

olduğu bulunur. O zaman $V^L_{\alpha_0}(t_0, x_0) \mid (t_0) = V(t_0)$ olduğundan her $v \in V(t_0)$ için

$$D^+V(t_0, v) \subset D^+V^L_{\alpha_0}(t_0, x_0) \mid (t_0, v)$$

olur.

Her $w \in V(\theta)$ için

$$D^{-}V(\theta, w) \subset D^{-}V_{\alpha}^{R}(\theta, x_1) \mid (\theta, w)$$

olacak şekilde $x_1 \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha > 0$ olduğu kanıtlansın. $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü $L_0 > 0$ sabitiyle Lipschitz koşulunu sağladığından her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t) \subset V(\theta) + L_0(\theta - t) \cdot B \tag{4.2.7}$$

olur. $V_2(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü

$$V_2(t) := V(\theta) + L_0(\theta - t) \cdot B$$

olarak tanımlansın. (4.2.7) uyarınca her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t) \subset V_2(t) \tag{4.2.8}$$

olur.

Şimdi her $t \in [t_0, \theta]$ için $V_2(t) \subset V_{\alpha}^{R}(\theta, x_1) \mid (t)$ olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sayısının varlığı kanıtlanacaktır. $x_1 \in intV(\theta)$ olsun. O zaman

$$B(x_1, \varepsilon_1) \subset V(\theta)$$

olacak biçimde $\varepsilon_1 > 0$ vardır. Buna göre herhangi bir $\beta > 0$ sayısı için

$$\frac{1}{\beta} \cdot (B(x_1, \varepsilon_1) - x_1) \subset \frac{1}{\beta} \cdot (V(\theta) - x_1) \tag{4.2.9}$$

ifadesi doğrudur. Ayrıca

$$B = \frac{1}{\varepsilon_1} \cdot (B(x_1, \varepsilon_1) - x_1) \tag{4.2.10}$$

olduğu açıktır.

$$0 < \alpha_1 \leq \frac{\varepsilon_1}{L_0} \tag{4.2.11}$$

koşulunu sağlayan bir $\alpha_1 > 0$ seçilirse, $(B(x_1, \varepsilon_1) - x_1)$ konveks, kompakt küme ve $0 \in (B(x_1, \varepsilon_1) - x_1)$ olduğundan (4.2.9), (4.2.10) ve (4.2.11) uyarınca her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
V_2(t) &= V(\theta) + L_0(\theta - t) \cdot B \\
&= V(\theta) + \frac{L_0}{\varepsilon_1}(\theta - t) \cdot (B(x_1, \varepsilon_1) - x_1) \\
&\subset V(\theta) + \frac{1}{\alpha_1}(\theta - t) \cdot (B(x_1, \varepsilon_1) - x_1) \\
&\subset V(\theta) + \frac{1}{\alpha_1}(\theta - t) \cdot (V(\theta) - x_1) \\
&= V_{\alpha_1}^R(\theta, x_1) \mid (t)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. O halde $x_1 \in intV(\theta)$ ve her $\alpha_1 \in \left(0, \frac{\varepsilon_1}{L_0}\right]$ için $t \in [t_0, \theta]$ iken

$$V_2(t) \subset V_{\alpha_1}^R(\theta, x_1) \mid (t) \tag{4.2.12}$$

olur. (4.2.8) ve (4.2.12) içermelerinden her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$V(t) \subset V_{\alpha_1}^R(\theta, x_1) \mid (t)$$

olduğu bulunur. O zaman $V_{\alpha_1}^R(\theta, x_1) \mid (\theta) = V(\theta)$ olduğundan her $w \in V(\theta)$ için

$$D^-V(\theta, w) \subset D^-V_{\alpha_1}^R(\theta, x_1) \mid (\theta, w)$$

olur.

$\alpha_0 \in \left(0, \frac{\varepsilon_0}{L_0}\right]$ ve $\alpha_1 \in \left(0, \frac{\varepsilon_1}{L_0}\right]$ keyfi seçildiğinden $\alpha = \min\{\alpha_0, \alpha_1\}$ alınırsa, her $v \in V(t_0)$ ve her $w \in V(\theta)$ için

$$\begin{aligned}
D^+V(t_0, v) &\subset D^+V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_0, v) \\
D^-V(\theta, w) &\subset D^-V_\alpha^R(\theta, x_1) \mid (\theta, w)
\end{aligned}$$

olduğu sonucuna ulaşılır.

Aşağıdaki teorem, Lipschitz koşulunu sağlayan konveks, kompakt küme değerli dönüşümlerin hangi durumda konveks devamının olduğunu söylemektedir.

Teorem 4.2.2. *$V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ konveks, kompakt küme değerli dönüşümü Lipschitz koşulunu sağlasın. $intV(t_0) \neq \emptyset$ ve $intV(\theta) \neq \emptyset$ ise $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün konveks devamı vardır.*

Kanıt. Önerme 4.2.1 uyarınca $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü için her $v \in V(t_0)$ ve her $w \in V(\theta)$ için

$$\begin{aligned} D^+V(t_0, v) &\subset D^+V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t_0, v) \\ D^-V(\theta, w) &\subset D^-V_\alpha^R(\theta, x_1) \mid (\theta, w) \end{aligned}$$

koşulları sağlanacak biçimde $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha > 0$ vardır. O zaman teorem 2.5.1 uyarınca $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümü için konveks devam vardır ve $\forall t \in [t_0 - \alpha, \theta + \alpha]$ için

$$W(t) = \begin{cases} V_\alpha^L(t_0, x_0) \mid (t) & , \ t \in [t_0 - \alpha, t_0) \\ V(t) & , \ t \in [t_0, t_1] \\ V_\alpha^R(\theta, x_1) \mid (t) & , \ t \in (t_1, t_1 + \alpha] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $W(\cdot) : [t_0 - \alpha, \theta + \alpha] \to K(\mathbb{R}^n)$ dönüşümü $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün konveks $\alpha-$devamıdır.

Sonuç 4.1.4 uyarınca, $V(\cdot)$ konveks, kompakt küme değerli dönüşümü Lipschitz sürekli değilse bu dönüşümün konveks devamının olmadığı görüldü. Teorem 4.2.2 uyarınca eğer $intV(t_0) \neq \emptyset$ veya $intV(\theta) \neq \emptyset$ değilse de teorem doğru değildir. Bu duruma örnekler aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.2.3. $t \in [0, 1]$ *için*

$$V(t) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq t \}$$

olmak üzere $V(\cdot) : [0, 1] \to K(\mathbb{R})$ *küme değerli dönüşümü tanımlansın. O zaman* $intV(0) = \emptyset$ *olur. Açıktır ki,* $V(\cdot)$ *Lipschitz sürekli, kompakt, konveks küme değerli dönüşümdür. Bu küme değerli dönüşümün sağa konveks* $\alpha-$*devamı vardır ancak konveks devamı yoktur.*

Örnek 4.2.4. $t \in [0, 2]$ *için*

$$V(t) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq t^2 - 2t \}$$

olmak üzere $V(\cdot) : [0, 2] \to K(\mathbb{R})$ *küme değerli dönüşümü tanımlansın. O zaman* $intV(0) = \emptyset$, $intV(2) = \emptyset$ *olur. Açıktır ki,* $V(\cdot)$ *Lipschitz sürekli, kompakt, konveks küme değerli dönüşümdür ancak konveks devamı yoktur.*

Teorem 4.2.2'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.5. *V_*, $V^* \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konveks kümeler ve $intV_* \neq \emptyset$, $intV^* \neq \emptyset$ olsun. $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$V(t) = \left(1 - \frac{t - t_0}{\theta - t_0}\right) \cdot V_* + \frac{t - t_0}{\theta - t_0} \cdot V^*$$

olarak tanımlanan $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün konveks $\alpha-$devamı vardır.

Kanıt. $V = grV(\cdot)$ olsun. V_*, $V^* \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konveks kümeler olduğundan $V \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesinin de kompakt, konveks olduğu açıktır.

Ayrıca $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün Lipschitz sürekli olduğu kolayca gösterilebilir. $intV_* \neq \emptyset$, $intV^* \neq \emptyset$ olduğundan teorem 4.2.2 uyarınca $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün konveks $\alpha-$devamı vardır.

5 TERS PROBLEM

Bu bölümde diferansiyel içermeler teorisindeki ters problem ifade edilecek ve bu problem için bir çözüm yöntemi verilecektir.

$V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ sürekli ve konveks değerli bir küme değerli dönüşüm ve $\varepsilon > 0$ sabitlenmiş keyfi bir sayı olsun. Ters problem, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ anındaki erişim kümesi, verilen küme değerli dönüşümün t anındaki görüntüsü olan $V(t)$ kümesine Hausdorff uzaklığı ε sayısından büyük olmayan diferansiyel içermenin elde edilmesi problemi olarak ifade edilmektedir. Bir başka deyişle ters problem, $\varepsilon > 0$ sabitlenmiş sayısı ve $V(\cdot)$ konveks değerli ve sürekli küme değerli dönüşümüne karşılık her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h\left(X\left(t; t_0, V\left(t_0\right)\right), V\left(t\right)\right) \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir diferansiyel içermenin bulunması problemidir. Burada $X\left(t; t_0, V\left(t_0\right)\right)$, aranan diferansiyel içermenin $\left(t_0, V\left(t_0\right)\right)$ başlangıç kümesinden çıkan, t anındaki erişim kümesidir.

5.1 Sürekli Küme Değerli Dönüşümlerin Parçalı Afin İnterpolasyonu

Kompakt, konveks değerli, sürekli $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümü $[t_0, \theta]$ kompakt aralığında tanımlı ve sürekli olduğundan düzgün süreklidir. O zaman $|t - \tau| \leq \sigma$ iken

$$h\left(V\left(t\right), V\left(\tau\right)\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.1.1}$$

olacak biçimde bir $\sigma > 0$ sayısı vardır. $i = 0, 1, \ldots, m-1$ için

$$\Delta = t_{i+1} - t_i \tag{5.1.2}$$

olmak üzere $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \theta\}$, $[t_0, \theta]$ aralığının $\Delta \leq \sigma$ olacak biçimde bir düzgün parçalanışı olsun. Bu durumda (5.1.1) eşitsizliğinden

$i = 0, 1, \ldots, m-1$ için

$$h(V(t_i), V(t_{i+1})) \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.1.3}$$

olduğu elde edilir.

$i = 0, 1, \ldots, m-1$ için $V_i = V(t_i)$ olmak üzere, $V_i(\cdot) : [t_i, t_{i+1}] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü

$$V_i(t) = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot V_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot V_{i+1} \tag{5.1.4}$$

ve $W(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü

$$W(t) = \begin{cases} V_i(t) & , \ t \in [t_i, t_{i+1}) \\ V_m & , \ t = \theta \end{cases} \tag{5.1.5}$$

olarak tanımlansın.

$$grW(\cdot) = \{(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \mid x \in W(t)\} \tag{5.1.6}$$

olsun.

Tanımlanıştan dolayı her $i = 0, 1, \ldots m$ için $W(t_i) = V(t_i) = V_i$ olduğu açıktır.

$V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü kompakt, konveks değerli olduğundan her $i = 0, 1, \ldots, m$ için $V(t_i) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konveks kümedir. O halde $i = 0, 1, \ldots, m-1$ için $V_i(\cdot) : [t_i, t_{i+1}] \to K(\mathbb{R}^n)$ kompakt, konveks küme değerli dönüşümdür.

Sıradaki önerme, $V(\cdot)$ ile $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümlerinin t anındaki görüntüleri arasındaki Hausdorff uzaklığını belirlemektedir.

Önerme 5.1.1. $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ *konveks değerli, sürekli küme değerli dönüşümü ve* $\varepsilon > 0$ *sayısı verilsin.* $[t_0, \theta]$ *aralığının* $\Delta \leq \sigma(\varepsilon)$ *koşulunu sağlayan her* $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \theta\}$ *düzgün parçalanışı ve her* $t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$h(V(t), W(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.1.7}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde $\sigma(\varepsilon) > 0$ *sayısı vardır. Burada* Δ, (5.1.2) *ile verilen sayıdır.*

Kanıt. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $W(\theta) = V(\theta)$ olduğundan $t = \theta$ iken (5.1.7) eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır. $t \in [t_0, \theta)$ ve $w \in W(t)$ olsun. $t \in [t_i, t_{i+1})$ olacak biçimde $i = 0, 1, \ldots, m-1$ vardır. $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışından

$$w = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot v_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot v_{i+1} \tag{5.1.8}$$

olacak biçimde $v_i \in V_i$ ve $v_{i+1} \in V_{i+1}$ vardır. $t \in [t_i, t_{i+1})$ olduğundan (5.1.1) uyarınca

$$h(V(t_i), V(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } h(V(t_{i+1}), V(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. O halde

$$\|v_i - v_1^*\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \|v_{i+1} - v_2^*\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.1.9}$$

olacak biçimde v_1^*, $v_2^* \in V(t)$ vardır. $V(t)$ konveks küme olduğundan

$$v = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot v_1^* + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot v_2^* \in V(t) \tag{5.1.10}$$

olur. (5.1.8), (5.1.9) ve (5.1.10) uyarınca

$$\begin{aligned} \|v - w\| &= \left\| \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot (v_1^* - v_i) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot (v_2^* - v_{i+1}) \right\| \\ &\leq \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \|v_1^* - v_i\| + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \|v_2^* - v_{i+1}\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Bu durumda

$$W(t) \subset V(t) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \overline{B} \tag{5.1.11}$$

olur.

Şimdi $v \in V(t)$ olsun. (5.1.1) uyarınca

$$h(V(t_i), V(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } h(V(t_{i+1}), V(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. O zaman

$$\|v_i - v\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \|v_{i+1} - v\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.1.12}$$

olacak biçimde $v_i \in V_i$ ve $v_{i+1} \in V_{i+1}$ vardır. $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışından

$$w = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot v_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot v_{i+1} \in W(t) \tag{5.1.13}$$

olur. (5.1.12) ve (5.1.13) uyarınca

$$\begin{aligned} \|v - w\| &= \left\| \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot (v - v_i) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot (v - v_{i+1}) \right\| \\ &\leq \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \|v - v_i\| + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \|v - v_{i+1}\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. O halde

$$V(t) \subset W(t) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \overline{B} \tag{5.1.14}$$

olur. (5.1.11) ve (5.1.14) içermelerinden

$$h(V(t), W(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olduğu bulunur. $t \in [t_0, \theta]$ keyfi seçildiğinden kanıt tamamlanmıştır.

Önerme 5.1.2. $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$, *konveks değerli, L sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlayan bir küme değerli dönüşüm ve* $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \theta\}$, $[t_0, \theta]$ *aralığının düzgün bir parçalanışı olsun. Her* $t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$h(V(t), W(t)) \leq L\Delta \tag{5.1.15}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\Delta > 0$, (5.1.2) *ile belirlenen sayıdır.*

Kanıt. $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümü L sabitiyle Lipschitz koşulunu sağladığından t, $\tau \in [t_0, \theta]$ için

$$h(V(t), V(\tau)) \leq L\,|t - \tau| \tag{5.1.16}$$

eşitsizliği sağlanır.

$W(\theta) = V(\theta)$ olduğundan $t = \theta$ iken (5.1.15) eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır. $t \in [t_0, \theta)$ ve $w \in W(t)$ olsun. $t \in [t_i, t_{i+1})$ olacak biçimde $\exists\, i = 0, 1, \dots, m-1$ vardır. $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışından

$$w = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot v_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot v_{i+1} \tag{5.1.17}$$

olacak biçimde $v_i \in V_i$ ve $v_{i+1} \in V_{i+1}$ vardır. $t \in [t_i, t_{i+1})$ olduğundan (5.1.16) uyarınca

$$h\left(V\left(t_i\right), V\left(t\right)\right) \le L\,\Delta \text{ ve } h\left(V\left(t_{i+1}\right), V\left(t\right)\right) \le L\,\Delta$$

eşitsizlikleri sağlanır. O halde

$$\|v_i - v_1^*\| \le L\,\Delta \text{ ve } \|v_{i+1} - v_2^*\| \le L\,\Delta \tag{5.1.18}$$

olacak biçimde v_1^*, $v_2^* \in V(t)$ vardır. $V(t)$ konveks küme olduğundan

$$v = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot v_1^* + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot v_2^* \in V(t) \tag{5.1.19}$$

olur. (5.1.17), (5.1.18) ve (5.1.19) uyarınca

$$\begin{aligned}
\|v - w\| &= \left\| \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot (v_1^* - v_i) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot (v_2^* - v_{i+1}) \right\| \\
&\le \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \|v_1^* - v_i\| + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \|v_2^* - v_{i+1}\| \\
&\le L\,\Delta
\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Bu durumda

$$W(t) \subset V(t) + L\,\Delta \cdot \overline{B} \tag{5.1.20}$$

olur.

Şimdi $v \in V(t)$ olsun. (5.1.16) uyarınca

$$h\left(V\left(t_i\right), V\left(t\right)\right) \le L\,\Delta \text{ ve } h\left(V\left(t_{i+1}\right), V\left(t\right)\right) \le L\,\Delta$$

eşitsizlikleri sağlanır. O zaman

$$\|v_i - v\| \le L\,\Delta \text{ ve } \|v_{i+1} - v\| \le L\,\Delta \tag{5.1.21}$$

olacak biçimde $v_i \in V_i$ ve $v_{i+1} \in V_{i+1}$ vardır. $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışından

$$w = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot v_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot v_{i+1} \in W(t) \tag{5.1.22}$$

olur. (5.1.21) ve (5.1.22) uyarınca

$$\begin{aligned} \|v - w\| &= \left\| \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot (v - v_i) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot (v - v_{i+1}) \right\| \\ &\leq \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \|v - v_i\| + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \|v - v_{i+1}\| \\ &\leq L\Delta \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. O halde

$$V(t) \subset W(t) + L\Delta \cdot \overline{B} \tag{5.1.23}$$

olur. (5.1.20) ve (5.1.23) içermelerinden

$$h(V(t), W(t)) \leq L\Delta$$

olduğu bulunur.

5.2 Özel Durum İçin Diferansiyel İçermenin Sağ Tarafı

V_*, $V^* \subset \mathbb{R}^n$ konveks, kompakt kümeler, $intV_* \neq \emptyset$, $intV^* \neq \emptyset$ olsun. $V(\cdot) : [t_*, t^*] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü

$$V(t) = \left(1 - \frac{t - t_*}{t^* - t_*}\right) \cdot V_* + \frac{t - t_*}{t^* - t_*} \cdot V^* \tag{5.2.1}$$

olarak tanımlansın ve bu dönüşümün grafiği

$$grV(\cdot) = \{(t, x) \in [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n \,|\, x \in V(t)\} \tag{5.2.2}$$

ile gösterilsin. Bu bölümde önce (5.2.1) ile verilen küme değerli dönüşüm için ters problemin çözümü yapılacaktır. Bir başka deyişle (5.2.1) ile verilen

$V(\cdot):[t_*,t^*]\to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü ve $\varepsilon>0$ sabitlenmiş sayısına karşılık $\forall\ t\in[t_*,t^*]$ için

$$h\left(X\left(t;t_*,V\left(t_*\right)\right),V\left(t\right)\right)\leq\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir diferansiyel içerme bulunacaktır. Burada $X\left(t;t_*,V\left(t_*\right)\right)$, aranan diferansiyel içermenin $\left(t_*,V\left(t_*\right)\right)$ başlangıç kümesinden çıkan, t anındaki erişim kümesidir.

Bu bölümde aranan diferansiyel içermenin sağ tarafını belirleyeceğiz. Açıktır ki, (5.2.1) ile verilen $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümü konvekstir. Her $t\in[t_*,t^*]$ için $V(t)\subset\mathbb{R}^n$ kompakt, konveks kümedir. Ayrıca $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümü Lipschitz süreklidir. V_*, $V^*\subset\mathbb{R}^n$ konveks, kompakt kümeler, $V(t_*)=V_*$, $V(t^*)=V^*$ ve $intV_*\neq\emptyset$, $intV^*\neq\emptyset$ olduğundan, sonuç 4.2.5 uyarınca $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün en az bir

$$\alpha>0 \tag{5.2.3}$$

sayısı için

$$V_\alpha(\cdot):[t_*-\alpha,t^*+\alpha]\to K(\mathbb{R}^n) \tag{5.2.4}$$

konveks $\alpha-$devamı vardır.

$\alpha>0$ sayısı ve $V_\alpha(\cdot):[t_*-\alpha,t^*+\alpha]\to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü sırasıyla (5.2.3) ve (5.2.4) ile verilmiş olsun. $\nu\in(0,\alpha)$ olmak üzere

$$F_\nu^*(\cdot):[t_*,t^*]\times\mathbb{R}^n\to K(\mathbb{R}^n)\ \text{ ve }\ \Phi_\nu^*(\cdot):[t_*,t^*]\times\mathbb{R}^n\to K(\mathbb{R}^n)$$

küme değerli dönüşümleri

$$F_\nu^*(t,x) = \frac{1}{\nu}\cdot[V_\alpha(t+\nu)-x] \tag{5.2.5}$$

$$\Phi_\nu^*(t,x) = -\frac{1}{\nu}\cdot[V_\alpha(t-\nu)-x] \tag{5.2.6}$$

ile tanımlansın. $t+\nu\leq t^*$ iken

$$F_\nu^*(t,x)=\frac{1}{\nu}\cdot[V(t+\nu)-x]$$

ve $t-\nu \geq t_*$ iken

$$\Phi_\nu^*(t,x) = -\frac{1}{\nu}\cdot [V(t-\nu)-x]$$

olacağı açıktır.

$$a = \max\{\|x\| \mid (t,x) \in grV_\alpha(\cdot)\} \qquad (5.2.7)$$

olsun.

Sıradaki önermede, $[t_*,t^*]\times\mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde tanımlanmış olan $F_\nu^*(\cdot)$ ve $\Phi_\nu^*(\cdot)$ küme değerli dönüşümlerinin bazı özellikleri verilmiştir.

Önerme 5.2.1. $\alpha > 0$ (5.2.3) *ile verilen sayı ve* $\nu \in (0,\alpha)$ *olsun. O zaman her* $(t,x) \in [t_*,t^*]\times\mathbb{R}^n$ *için* $F_\nu^*(t,x) \subset \mathbb{R}^n$ *ve* $\Phi_\nu^*(t,x) \subset \mathbb{R}^n$ *konveks, kompakt kümedir.*

$$F_\nu^*(\cdot) : [t_*,t^*]\times\mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n) \ \ ve\ \Phi_\nu^*(\cdot) : [t_*,t^*]\times\mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$$

küme değerli dönüşümleri süreklidir.

Her $t_0 \in [t_*,t^*]$ *için*

$$F_\nu^*(t_0,\cdot) : \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n) \ \ ve\ \Phi_\nu^*(t_0,\cdot) : \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$$

küme değerli dönüşümleri $\frac{1}{\nu} > 0$ *sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlar.*

$a \geq 0$ (5.2.7) *ile verilen sayı olmak üzere, her* $(t,x) \in [t_*,t^*]\times\mathbb{R}^n$ *için*

$$\max\{\|f\| \mid f \in F_\nu^*(t,x)\} \leq \frac{1}{\nu}(a+\|x\|), \qquad (5.2.8)$$

$$\max\{\|\varphi\| \mid \varphi \in \Phi_\nu^*(t,x)\} \leq \frac{1}{\nu}(a+\|x\|) \qquad (5.2.9)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Kanıt. Her $t \in [t_*-\alpha, t^*+\alpha]$ için $V_\alpha(t)$ konveks, kompakt küme olduğundan (5.2.5) ve (5.2.6) uyarınca $(t,x) \in [t_*,t^*]\times\mathbb{R}^n$ için $F_\nu^*(t,x) \subset \mathbb{R}^n$ ve $\Phi_\nu^*(t,x) \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri de konveks, kompakt kümelerdir.

$F_\nu^*(\cdot) : [t_*,t^*]\times\mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün sürekli olduğu kanıtlansın. $(t_0,x_0) \in (t_*,t^*)\times\mathbb{R}^n$ olsun. $\varepsilon > 0$ seçilsin. $V_\alpha(\cdot)$ sürekli olduğundan, $\varepsilon_* = \frac{\nu}{2}\varepsilon$ olmak üzere $|t-t_0| < \delta_1(\varepsilon)$ iken

$$V_\alpha(t_0+\nu) \subset V_\alpha(t+\nu) + \varepsilon_*\cdot B$$

içermesi sağlanacak biçimde $\delta_1(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. Buradan $|t - t_0| < \delta_1(\varepsilon)$ iken

$$\frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t_0 + \nu) - x_0] \subset \frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t + \nu) - x_0] + \frac{\varepsilon_*}{\nu} \cdot B \tag{5.2.10}$$

içermesinin sağlandığı bulunur. $\delta^*(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \varepsilon_*\} > 0$ olsun. O zaman (5.2.10) uyarınca $|t - t_0| < \delta^*(\varepsilon)$ ve $\|x - x_0\| < \delta^*(\varepsilon)$ iken

$$\begin{aligned} F_\nu^*(t_0, x_0) &= \frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t_0 + \nu) - x_0] \\ &\subset \frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t + \nu) - x] + \frac{1}{\nu} \cdot (x - x_0) + \frac{\varepsilon_*}{\nu} \cdot B \\ &\subset \frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t + \nu) - x] + \frac{\varepsilon_* + \delta^*(\varepsilon)}{\nu} \cdot B \\ &\subset \frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t + \nu) - x] + \frac{2\varepsilon_*}{\nu} \cdot B \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

olur. $F_\nu^*(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışından, (5.2.11) uyarınca

$$F_\nu^*(t_0, x_0) \subset F_\nu^*(t, x) + \varepsilon \cdot B \tag{5.2.12}$$

olduğu elde edilir.

Benzer olarak, $V_\alpha(\cdot)$ sürekli olduğundan, $|t - t_0| < \delta_2(\varepsilon)$ iken

$$V_\alpha(t + \nu) \subset V_\alpha(t_0 + \nu) + \varepsilon_* \cdot B$$

içermesi sağlanacak biçimde $\delta_2(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. Buradan $\varepsilon_* = \dfrac{\nu}{2}\varepsilon$ olmak üzere, keyfi bir $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t + \nu) - x] \subset \frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t_0 + \nu) - x] + \frac{\varepsilon_*}{\nu} \cdot B \tag{5.2.13}$$

içermesinin sağlandığı bulunur. $\delta_*(\varepsilon) = \min\{\delta_2(\varepsilon), \varepsilon_*\} > 0$ olsun. O zaman (5.2.13) uyarınca $|t - t_0| < \delta_*(\varepsilon)$, $\|x - x_0\| < \delta_*(\varepsilon)$ iken

$$\begin{aligned} F_\nu^*(t, x) &= \frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t + \nu) - x] \\ &\subset \frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t_0 + \nu) - x_0] + \frac{1}{\nu} \cdot (x_0 - x) + \frac{\varepsilon_*}{\nu} \cdot B \\ &\subset \frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t_0 + \nu) - x_0] + \frac{\varepsilon_* + \delta_*(\varepsilon)}{\nu} \cdot B \\ &\subset \frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t_0 + \nu) - x_0] + \frac{2\varepsilon_*}{\nu} \cdot B \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

olur. $F_\nu^*(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışından, (5.2.14) uyarınca

$$F_\nu^*(t,x) \subset F_\nu^*(t_0,x_0) + \varepsilon \cdot B \tag{5.2.15}$$

olduğu elde edilir.

$\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_*(\varepsilon), \delta^*(\varepsilon)\} > 0$ olarak seçilirse, (5.2.13) ve (5.2.15) uyarınca $|t-t_0| + \|x-x_0\| < \delta(\varepsilon)$ iken

$$\begin{aligned} F_\nu^*(t_0,x_0) &\subset F_\nu^*(t,x) + \varepsilon \cdot B \\ F_\nu^*(t,x) &\subset F_\nu^*(t_0,x_0) + \varepsilon \cdot B \end{aligned}$$

içermelerinin sağlandığı bulunur. Bu ise $|t-t_0| + \|x-x_0\| < \delta(\varepsilon)$ iken

$$h\left(F_\nu^*(t_0,x_0), F_\nu^*(t,x)\right) < \varepsilon$$

olması demektir. $F_\nu^*(\cdot)$ küme değerli dönüşümü keyfi seçilmiş $(t_0,x_0) \in (t_*,t^*) \times \mathbb{R}^n$ noktasında süreklidir.

$F_\nu^*(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün, $t_0 = t_*$ ise (t_0,x_0) noktasında t'ye göre sağdan ve $t_0 = t^*$ ise (t_0,x_0) noktasında t'ye göre soldan sürekli olduğu benzer olarak gösterilebilir. O halde $F_\nu^*(\cdot) : [t_*,t^*] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ süreklidir.

Şimdi keyfi bir $t_0 \in [t_*,t^*]$ için $F_\nu^*(t_0,\cdot) : \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün $\frac{1}{\nu}$ sabitiyle Lipschitz koşulunu sağladığı kanıtlansın. x_1, $x_2 \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t_0+\nu) - x_1] = \frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t_0+\nu) - x_2] + \frac{1}{\nu} \cdot (x_2 - x_1)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t_0+\nu) - x_1] &\subset \frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t_0+\nu) - x_2] + \frac{1}{\nu} \|x_2 - x_1\| \cdot \overline{B} \\ F_\nu^*(t_0,x_1) &\subset F_\nu^*(t_0,x_2) + \frac{1}{\nu} \|x_2 - x_1\| \cdot \overline{B} \qquad (5.2.16) \end{aligned}$$

içermeleri doğrudur. Yapılan işlemler x_1 ile x_2'nin seçilişinden bağımsız olduğundan (5.2.16) içermesinden

$$F_\nu^*(t_0,x_2) \subset F_\nu^*(t_0,x_1) + \frac{1}{\nu} \|x_2 - x_1\| \cdot \overline{B} \tag{5.2.17}$$

içermesinin ve (5.2.16), (5.2.17) içermelerinden

$$h\left(F_{\nu}^{*}\left(t_0, x_1\right), F_{\nu}^{*}\left(t_0, x_2\right)\right) \leq \frac{1}{\nu}\left\|x_2 - x_1\right\|$$

eşitsizliğinin sağlandığı bulunur. Bir başka deyişle $F_{\nu}^{*}\left(t_0, \cdot\right)$ küme değerli dönüşümü $\frac{1}{\nu}$ sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlar.

$(t, x) \in [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n$ ve $f \in F_{\nu}^{*}(t, x)$ olsun. (5.2.5) uyarınca

$$f = \frac{1}{\nu} \cdot (y - x)$$

olacak biçimde $y \in V_{\alpha}(t + \nu)$ vardır. Buradan, $a > 0$ (5.2.7) ile verilen sayı olmak üzere

$$\|f\| = \frac{1}{\nu}\|y - x\| \leq \frac{1}{\nu}(\|y\| + \|x\|)$$

$$\|f\| \leq \frac{1}{\nu}(a + \|x\|) \tag{5.2.18}$$

olduğu elde edilir. Keyfi $f \in F_{\nu}^{*}(t, x)$ için (5.2.18) eşitsizliği sağlandığı için

$$\max\left\{\|f\| \mid f \in F_{\nu}^{*}(t, x)\right\} \leq \frac{1}{\nu}(a + \|x\|)$$

eşitsizliği de sağlanır.

Benzer kanıtlar $\Phi_{\nu}^{*}(\cdot)$ küme değerli dönüşümü için de yapılabilir.

Sıradaki önerme $V_{\alpha}(\cdot)$ küme değerli dönüşümü ile $F_{\nu}^{*}(\cdot)$, $\Phi_{\nu}^{*}(\cdot)$ küme değerli dönüşümleri arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Önerme 5.2.2. *$V(\cdot)$ ve $V_{\alpha}(\cdot)$ sırasıyla (5.2.1) ve (5.2.4) ile verilmiş olan küme değerli dönüşümler ve $x \in V(t)$ olsun. $f \in F_{\nu}^{*}(t, x)$ ise keyfi $\delta \in (0, \nu]$ sayısı için*

$$x + \delta \cdot f \in V_{\alpha}(t + \delta)$$

ve $\phi \in \Phi_{\nu}^{*}(t, x)$ ise keyfi $\delta \in (0, \nu]$ sayısı için

$$x - \delta \cdot \phi \in V_{\alpha}(t - \delta)$$

olur.

Kanıt. $x \in V(t)$ ve $f \in F_\nu^*(t,x)$ olsun. (5.2.5) uyarınca

$$f = \frac{1}{\nu} \cdot (y - x)$$

olacak biçimde $y \in V_\alpha\,(t+\nu)$ vardır. Buradan $y = x + \nu \cdot f$ olur. $x\,(\cdot) : [0,\nu] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu

$$x\,(\delta) = \left(1 - \frac{\delta}{\nu}\right) \cdot x + \frac{\delta}{\nu} \cdot y \tag{5.2.19}$$

olarak tanımlansın. $y = x + \nu \cdot f$ olduğundan (5.2.19) eşitliği

$$x\,(\delta) = x + \delta \cdot f \tag{5.2.20}$$

biçiminde de yazılabilir. Her $t \in [t_*, t^*]$ için $V_\alpha\,(t) = V\,(t)$ olduğundan $x \in V_\alpha(t)$ olur. $y \in V_\alpha\,(t+\nu)$ ve $V_\alpha\,(\cdot)$ konveks olduğundan önerme 1.2.10 ve (5.2.19) uyarınca keyfi $\delta \in (0,\nu]$ sayısı için

$$x\,(\delta) \in V_\alpha \left(\left(1 - \frac{\delta}{\nu}\right) t + \frac{\delta}{\nu}\,(t+\nu) \right) = V_\alpha\,(t+\delta) \tag{5.2.21}$$

olur. (5.2.20) ve (5.2.21) uyarınca keyfi $\delta \in (0,\nu]$ sayısı için

$$x + \delta \cdot f \in V_\alpha\,(t+\delta)$$

olduğu elde edilir. Böylece $f \in F_\nu^*(t,x)$ ise keyfi $\delta \in (0,\nu]$ sayısı için $x + \delta \cdot f \in V_\alpha\,(t+\delta)$ olduğu kanıtlandı.

$x \in V(t)$ ve $\phi \in \Phi_\nu^*(t,x)$ olsun. (5.2.6) uyarınca

$$\phi = \frac{1}{\nu} \cdot (x - y)$$

olacak biçimde $y \in V_\alpha\,(t-\nu)$ vardır. Buradan $y = x - \nu \cdot \phi$ olur. $x\,(\cdot) : [-\nu, 0] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu

$$x\,(\delta) = \left(1 + \frac{\delta}{\nu}\right) \cdot x - \frac{\delta}{\nu} \cdot y \tag{5.2.22}$$

olarak tanımlansın. $y = x - \nu \cdot \phi$ olduğundan her $\delta \in [-\nu, 0]$ için

$$x\,(\delta) = x + \delta \cdot \phi \tag{5.2.23}$$

olarak yazılabilir. Her $t \in [t_*, t^*]$ için $V_\alpha(t) = V(t)$ olduğundan $x \in V_\alpha(t)$ olur. $y \in V_\alpha(t-\nu)$ ve $V_\alpha(\cdot)$ konveks olduğundan önerme 1.2.10 ve (5.2.22) uyarınca keyfi $\delta \in [-\nu, 0)$ sayısı için

$$x(\delta) \in V_\alpha\left(\left(1+\frac{\delta}{\nu}\right)t - \frac{\delta}{\nu}(t-\nu)\right) = V_\alpha(t+\delta) \qquad (5.2.24)$$

olur. (5.2.23) ve (5.2.24) uyarınca keyfi $\delta \in (0, \nu]$ sayısı için

$$x - \delta \cdot \phi \in V_\alpha(t-\delta)$$

olduğu bulunur.

Aşağıdaki önerme, (5.2.1) ile verilen $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün türev kümeleri ile $F_\nu^*(t,x)$, $\Phi_\nu^*(t,x)$ kümeleri arasındaki ilişkiyi karakterize etmektedir.

Önerme 5.2.3. *$V(\cdot)$ küme değerli dönüşümü (5.2.1) ile verilmiş olsun. Her $t \in [t_*, t^*)$ ve $x \in V(t)$ için*

$$F_\nu^*(t,x) \subset D_*^+ V(t,x), \qquad (5.2.25)$$

her $t \in (t_*, t^*]$ ve $x \in V(t)$ için

$$\Phi_\nu^*(t,x) \subset D_*^- V(t,x) \qquad (5.2.26)$$

içermeleri sağlanır.

Kanıt. $t \in [t_*, t^*)$ ve $x \in V(t)$ olsun. $f \in F_\nu^*(t,x)$ seçilsin. $t \in [t_*, t^*)$ olduğundan her $\delta \in [0, \delta_*]$ için $t + \delta \leq t^*$ olacak biçimde $\delta_* \in (0, \nu]$ sayısı vardır. $x(\cdot) : [0, \delta_*] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $x(\delta) = x + \delta \cdot f$ olarak tanımlansın. Önerme 5.2.2 uyarınca keyfi $\delta \in [0, \delta_*]$ sayısı için $x(t+\delta) \in V_\alpha(t+\delta)$ olur. Her $\delta \in [0, \delta_*]$ için $t+\delta \leq t^*$ olduğundan $V_\alpha(t+\delta) = V(t+\delta)$ olduğu açıktır. O halde her $\delta \in [0, \delta_*]$ için $x(t+\delta) \in V(t+\delta)$ olur. Buradan

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{x(t+\delta) - x}{\delta} = f$$

olduğu bulunur. Bir başka deyişle $f \in D_*^+ V(t,x)$ olduğu elde edilmiştir. Yani (5.2.25) içermesi doğrudur.

$t \in (t_*, t^*]$ ve $x \in V(t)$ olsun. $\phi \in \Phi_\nu^*(t,x)$ seçilsin. $t \in (t_*, t^*]$ olduğundan her $\delta \in [-\delta_*, 0]$ için $t_* \leq t + \delta$ olacak biçimde $\delta_* \in (0, \nu]$ sayısı vardır. $x(\cdot) : [-\delta_*, 0] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $x(\delta) = x + \delta \cdot \phi$ olarak tanımlansın. Önerme 5.2.2 uyarınca keyfi $\delta \in [-\delta_*, 0]$ sayısı için $x(t+\delta) \in V_\alpha(t+\delta)$ olur. Her $\delta \in [-\delta_*, 0]$ için $t_* \leq t + \delta$ olduğundan $V_\alpha(t+\delta) = V(t+\delta)$ olduğu açıktır. O halde her $\delta \in [-\delta_*, 0]$ için $x(t+\delta) \in V(t+\delta)$ olur. Buradan

$$\lim_{\delta \to 0^-} \frac{x(t+\delta) - x}{\delta} = \phi$$

olduğu bulunur. Bir başka deyişle $\phi \in D_*^- V(t,x)$ olur. Yani (5.2.26) içermesi doğrudur.

$A, C \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri için

$$\rho(A, C) = \inf\{\|a - c\| \mid a \in A,\ c \in C\}$$

olmak üzere, $r_\nu^*(\cdot) : [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ fonksiyonu

$$r_\nu^*(t,x) = \rho\left(F_\nu^*(t,x), \Phi_\nu^*(t,x)\right) \tag{5.2.27}$$

olarak tanımlansın.

Aşağıdaki önermede $r_\nu^*(\cdot)$ fonksiyonunun bazı özellikleri incelenmiştir.

Önerme 5.2.4. (5.2.27) *ile tanımlanan* $r_\nu^*(\cdot) : [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ *fonksiyonu süreklidir. Her* $t_0 \in [t_*, t^*]$ *için*

$$r_\nu^*(t_0, \cdot) : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$$

fonksiyonu $\frac{2}{\nu} > 0$ *sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlar.* (5.2.7) *ile verilmiş* $a \geq 0$ *sayısı ve her* $(t,x) \in [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n$ *için*

$$r_\nu^*(t,x) \leq \frac{2}{\nu}(a + \|x\|)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $r_\nu^*(\cdot)$ fonksiyonunun keyfi bir $(t_0, x_0) \in [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n$ noktasında sürekli olduğu kanıtlansın. Önce $(t_0, x_0) \in (t_*, t^*) \times \mathbb{R}^n$ olsun. Önerme 5.2.1 uyarınca, $F_\nu^*(\cdot)$ ve $\Phi_\nu^*(\cdot)$ küme değerli dönüşümleri sürekli olduğundan, $|t - t_0| + \|x - x_0\| \le \delta(\varepsilon)$ iken

$$F_\nu^*(t_0, x_0) \subset F_\nu^*(t, x) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \overline{B}, \quad F_\nu^*(t, x) \subset F_\nu^*(t_0, x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \overline{B} \tag{5.2.28}$$

$$\Phi_\nu^*(t_0, x_0) \subset \Phi_\nu^*(t, x) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \overline{B}, \quad \Phi_\nu^*(t, x) \subset \Phi_\nu^*(t_0, x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \overline{B} \tag{5.2.29}$$

içermeleri sağlanacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. (5.2.28) ve (5.2.29) içermelerinden

$$\begin{aligned}
r_\nu^*(t_0, x_0) &= \inf\left\{\|f - \varphi\| \mid f \in F_\nu^*(t_0, x_0),\ \varphi \in \Phi_\nu^*(t_0, x_0)\right\} \\
&\ge \inf\left\{\begin{array}{r} \left\|f + \frac{\varepsilon}{2} \cdot b - \varphi - \frac{\varepsilon}{2} \cdot b_*\right\| \ \mid \\ f \in F_\nu^*(t, x),\ \varphi \in \Phi_\nu^*(t, x),\ b,\ b_* \in \overline{B} \end{array}\right\} \\
&\ge \inf\left\{\|f - \varphi\| - \varepsilon \mid f \in F_\nu^*(t, x),\ \varphi \in \Phi_\nu^*(t, x)\right\} \\
&= r_\nu^*(t, x) - \varepsilon
\end{aligned}$$

$$r_\nu^*(t_0, x_0) \ge r_\nu^*(t, x) - \varepsilon \tag{5.2.30}$$

ve buradan

$$r_\nu^*(t, x) - r_\nu^*(t_0, x_0) \le \varepsilon \tag{5.2.31}$$

olduğu elde edilir. Benzer olarak (5.2.28) ve (5.2.29) eşitsizliklerinden

$$r_\nu^*(t_0, x_0) - r_\nu^*(t, x) \le \varepsilon \tag{5.2.32}$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilebilir. (5.2.31) ve (5.2.32) eşitsizlikleri uyarınca $|t - t_0| + \|x - x_0\| \le \delta(\varepsilon)$ iken

$$|r_\nu^*(t_0, x_0) - r_\nu^*(t, x)| \le \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. $r_\nu^*(\cdot)$ fonksiyonunun $t_0 = t_*$ ise (t_0, x_0) noktasında t'ye göre sağdan, $t_0 = t^*$ ise (t_0, x_0) noktasında t'ye göre soldan sürekli olduğu benzer yoldan kanıtlanabilir. O halde $r_\nu^*(\cdot) : [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ fonksiyonu süreklidir.

Herhangi bir $t_0 \in [t_*, t^*]$ için $r_\nu^*(t_0, \cdot) : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ fonksiyonunun $\frac{2}{\nu}$ sabitiyle Lipschitz koşulunu sağladığı kanıtlansın. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ olsun. $F_\nu^*(t_0, \cdot)$ ve $\Phi_\nu^*(t_0, \cdot)$ küme değerli dönüşümleri $\frac{1}{\nu}$ sabitiyle Lipschitz sürekli olduğundan, $i, j = 1, 2$ için

$$F_\nu^*(t_0, x_i) \subset F_\nu^*(t_0, x_j) + \frac{1}{\nu}\|x_i - x_j\| \cdot \overline{B}, \tag{5.2.33}$$

$$\Phi_\nu^*(t_0, x_i) \subset \Phi_\nu^*(t_0, x_j) + \frac{1}{\nu}\|x_i - x_j\| \cdot \overline{B} \tag{5.2.34}$$

içermeleri sağlanır. $(5.2.33)$, $(5.2.34)$ içermelerinden ve $r_\nu^*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımlanışından

$$\begin{aligned}
r_\nu^*(t_0, x_1) &= \inf\left\{\|f - \varphi\| \mid f \in F_\nu^*(t_0, x_1),\ \varphi \in \Phi_\nu^*(t_0, x_1)\right\} \\
&\geq \inf\left\{\begin{array}{r} \left\|f + \frac{1}{\nu}\|x_1 - x_2\| \cdot b - \varphi - \frac{1}{\nu}\|x_1 - x_2\| \cdot b_*\right\| \\ \mid f \in F_\nu^*(t_0, x_2),\ \varphi \in \Phi_\nu^*(t_0, x_2),\ b,\ b_* \in \overline{B} \end{array}\right\} \\
&\geq \inf\left\{\|f - \varphi\| - \frac{2}{\nu}\|x_1 - x_2\| \mid f \in F_\nu^*(t_0, x_2),\ \varphi \in \Phi_\nu^*(t_0, x_2)\right\} \\
&= r_\nu^*(t_0, x_2) - \frac{2}{\nu}\|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

ve buradan

$$r_\nu^*(t_0, x_2) - r_\nu^*(t_0, x_1) \leq \frac{2}{\nu}\|x_1 - x_2\| \tag{5.2.35}$$

eşitsizliği elde edilir. Yapılan işlemler x_1 ve x_2'nin seçilişinden bağımsız olduğundan

$$r_\nu^*(t_0, x_1) - r_\nu^*(t_0, x_2) \leq \frac{2}{\nu}\|x_1 - x_2\| \tag{5.2.36}$$

olduğu da kolayca doğrulanabilir. $(5.2.35)$ ve $(5.2.36)$ eşitsizliklerinden

$$|r_\nu^*(t_0, x_2) - r_\nu^*(t_0, x_1)| \leq \frac{2}{\nu}\|x_1 - x_2\|$$

olduğu bulunur. Bir başka deyişle herhangi bir $t_0 \in [t_*, t^*]$ için $r_\nu^*(t_0, \cdot) : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ fonksiyonu $\frac{2}{\nu}$ sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlar.

$(t, x) \in [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n$ olsun. Herhangi bir $f \in F_\nu^*(t, x)$ ve $\varphi \in \Phi_\nu^*(t, x)$ için

$$\begin{aligned}
r_\nu^*(t, x) &= \inf\left\{\|f - \varphi\| \mid f \in F_\nu^*(t, x),\ \varphi \in \Phi_\nu^*(t, x)\right\} \\
&\leq \|f - \varphi\| \\
&\leq \|f\| + \|\varphi\|
\end{aligned}$$

olur. Her $(t,x) \in [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n$ için (5.2.8) ve (5.2.9) eşitsizlikleri sağlandığından

$$r_\nu^*(t,x) \leq \frac{2}{\nu}(a + \|x\|)$$

olduğu elde edilir.

Önerme 5.2.5. $\alpha > 0$, (5.2.3) *ile belirlenen sayı olmak üzere* $2\nu \leq t^* - t_*$ *eşitsizliğini sağlayan bir* $\nu \in (0,\alpha)$ *seçilsin.* $t \in [t_* + \nu, t^* - \nu]$ *olacak biçimdeki her* $(t,x) \in grV(\cdot)$ *için* $r_\nu^*(t,x) = 0$ *olur.*

Ayrıca $\nu_1 \in (0,\alpha)$, $\nu_2 \in (0,\alpha)$ *ve* $\nu_1 \leq \nu_2$ *ise her* $(t,x) \in grV(\cdot)$ *için*

$$r_{\nu_1}^*(t,x) \leq r_{\nu_2}^*(t,x)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. $t_0 \in [t_* + \nu, t^* - \nu]$ olmak üzere bir $(t_0, x_0) \in grV(\cdot)$ seçilsin. (5.2.1) uyarınca

$$x_0 = \left(1 - \frac{t_0 - t_*}{t^* - t_*}\right) \cdot v_* + \frac{t_0 - t_*}{t^* - t_*} \cdot v^* \tag{5.2.37}$$

olacak biçimde $v_* \in V_*$, $v^* \in V^*$ vardır.

$$d_* = \frac{v^* - v_*}{t^* - t_*} \tag{5.2.38}$$

olarak belirlensin. $t_0 + \nu \leq t^*$ ve $v_* \in V_*$, $v^* \in V^*$ olduğundan, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışı uyarınca

$$\left(1 - \frac{t_0 + \nu - t_*}{t^* - t_*}\right) \cdot v_* + \frac{t_0 + \nu - t_*}{t^* - t_*} \cdot v^* \in V(t_0 + \nu) \tag{5.2.39}$$

olur. (5.2.37) ve (5.2.38) uyarınca

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{t_0 + \nu - t_*}{t^* - t_*}\right) \cdot v_* + \frac{t_0 + \nu - t_*}{t^* - t_*} \cdot v^* &= \left[\left(1 - \frac{t_0 - t_*}{t^* - t_*}\right) \cdot v_* + \frac{t_0 - t_*}{t^* - t_*} \cdot v^*\right] \\ &\quad + \nu \cdot \frac{v^* - v_*}{t^* - t_*} \\ &= x_0 + \nu \cdot d_*\end{aligned}$$

ve (5.2.39) uyarınca

$$x_0 + \nu \cdot d_* \in V(t_0 + \nu)$$

olduğu elde edilir. $t_0 + \nu \leq t^*$ olduğundan $V_\alpha(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışı uyarınca

$$x_0 + \nu \cdot d_* \in V_\alpha(t_0 + \nu)$$

olur. Buradan

$$d_* \in \frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t_0 + \nu) - x_0]$$

ve $F_\nu^*(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımından, yani (5.2.5) uyarınca

$$d_* \in F_\nu^*(t_0, x_0) \tag{5.2.40}$$

olduğu görülür.

$t_* \leq t_0 - \nu$ ve $v_* \in V_*$, $v^* \in V^*$ olduğundan, $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışı uyarınca

$$\left(1 - \frac{t_0 - \nu - t_*}{t^* - t_*}\right) \cdot v_* + \frac{t_0 - \nu - t_*}{t^* - t_*} \cdot v^* \in V(t_0 - \nu) \tag{5.2.41}$$

olur. (5.2.37) ve (5.2.38) uyarınca

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{t_0 - \nu - t_*}{t^* - t_*}\right) \cdot v_* + \frac{t_0 - \nu - t_*}{t^* - t_*} \cdot v^* &= \left[\left(1 - \frac{t_0 - t_*}{t^* - t_*}\right) \cdot v_* + \frac{t_0 - t_*}{t^* - t_*} \cdot v^*\right] \\ &\quad -\nu \frac{v^* - v_*}{t^* - t_*} \\ &= x_0 - \nu \cdot d_*\end{aligned}$$

ve (5.2.41) uyarınca

$$x_0 - \nu \cdot d_* \in V(t_0 - \nu)$$

olur. $t_* \leq t_0 - \nu$ olduğundan $V_\alpha(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışı uyarınca

$$x_0 - \nu \cdot d_* \in V_\alpha(t_0 - \nu)$$

olduğu bulunur. Buradan

$$d_* \in -\frac{1}{\nu} \cdot [V_\alpha(t_0 - \nu) - x_0]$$

$\Phi_\nu^*(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımından, yani (5.2.6) uyarınca

$$d_* \in \Phi_\nu^*(t_0, x_0) \tag{5.2.42}$$

olduğu görülür.

(5.2.40) ve (5.2.42) uyarınca $d_* \in F_\nu^* (t_0, x_0)$, $d_* \in \Phi_\nu^* (t_0, x_0)$ olduğundan, $r_\nu^* (\cdot)$ fonksiyonunun tanımlanışı uyarınca $r_\nu^* (t_0, x_0) = 0$ olduğu bulunur. O halde $2\nu \leq t^* - t_*$ olmak üzere $t \in [t_* + \nu, t^* - \nu]$ olacak biçimdeki her $(t, x) \in grV (\cdot)$ için $r_\nu^* (t, x) = 0$ olur.

Önermenin ikinci bölümünü kanıtlamak için ν_1, $\nu_2 \in (0, \alpha)$ ve $\nu_1 \leq \nu_2$ iken, her $(t, x) \in grV (\cdot)$ için

$$F_{\nu_2}^* (t, x) \subset F_{\nu_1}^* (t, x) \tag{5.2.43}$$

ve

$$\Phi_{\nu_2}^* (t, x) \subset \Phi_{\nu_1}^* (t, x)$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $(t, x) \in grV (\cdot)$ olsun. O zaman

$$x \in V (t) \tag{5.2.44}$$

olur. $d_* \in F_{\nu_2}^* (t, x)$ seçilsin. $F_{\nu_2}^* (\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımı, yani (5.2.5) uyarınca

$$x_2 = x + \nu_2 \cdot d_* \tag{5.2.45}$$

olacak biçimde bir $x_2 \in V_\alpha(t + \nu_2)$ vardır. $V_\alpha (\cdot)$ dönüşümü $V(t)$ küme değerli dönüşümün konveks devamı olduğundan $V_\alpha (\cdot)$ konvekstir ve her $t \in [t_*, t^*]$ için $V_\alpha(t) = V(t)$ olur. Bu durumda $x_2 \in V_\alpha(t + \nu_2)$ olduğundan (5.2.44) uyarınca her $\delta \in [0, 1]$ için

$$(1 - \delta) \cdot x + \delta \cdot x_2 \in V_\alpha \left((1 - \delta)\ t + \delta\ (t + \nu_2)\right)$$

ve (5.2.45) uyarınca

$$x + \delta\, \nu_2 \cdot d_* \in V_\alpha \left(t + \delta\, \nu_2\right)$$

olur. Buradan $\delta = \dfrac{\nu_1}{\nu_2}$ için

$$x + \nu_1 \cdot d_* \in V_\alpha \left(t + \nu_1\right)$$

olduğu bulunur. Yani $d_* \in F_{\nu_1}^* (t, x)$ olur. O halde (5.2.43) içermesi sağlanır.

Benzer olarak

$$\Phi^*_{\nu_2}(t,x) \subset \Phi^*_{\nu_1}(t,x) \tag{5.2.46}$$

olduğu kanıtlanabilir.

Şimdi keyfi $f \in F^*_{\nu_2}(t,x)$, $\phi \in \Phi^*_{\nu_2}(t,x)$ seçilsin.(5.2.43), (5.2.46) içermeleri uyarınca $f \in F^*_{\nu_1}(t,x)$ ve $\phi \in \Phi^*_{\nu_1}(t,x)$ olur. $r^*_\nu(\cdot)$ fonksiyonunun tanımlanışından

$$r^*_{\nu_1}(t,x) \leq \|f-\phi\|$$

ve $f \in F^*_{\nu_2}(t,x)$, $\phi \in \Phi^*_{\nu_2}(t,x)$ keyfi seçildiğinden

$$\begin{aligned} r^*_{\nu_1}(t,x) &\leq \inf\left\{\|f-\phi\| \mid f \in F^*_{\nu_2}(t,x),\ \phi \in \Phi^*_{\nu_2}(t,x)\right\} \\ &= r^*_{\nu_2}(t,x) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

5.3 Özel Durum İçin Diferansiyel İçerme

$F^*_\nu(\cdot) : [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ dönüşümü (5.2.5) ile verilmiş küme değerli dönüşüm, $r^*_\nu(\cdot)$ fonksiyonu ise (5.2.27) ile verilmiş pozitif değerli fonksiyon olmak üzere

$$\dot{x} \in F^*_\nu(t,x), \tag{5.3.1}$$

$$\dot{x} \in F^*_\nu(t,x) + r^*_\nu(t,x) \cdot \overline{B} \tag{5.3.2}$$

diferansiyel içermeleri verilsin.

$X_1 \subset \mathbb{R}^n$, $t_1 \in [t_*, t^*]$ olmak üzere, (5.3.1) ve (5.3.2) diferansiyel içermelerinin $x(t_1) \in X_1$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerinin kümesi $X^*_\nu(t_1, X_1)$ ve $X^*_{\nu,r}(t_1, X_1)$, t anındaki erişim kümeleri

$$\begin{aligned} X^*_\nu(t;t_1,X_1) &= \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid x(\cdot) \in X^*_\nu(t_1,X_1)\}, \\ X^*_{\nu,r}(t;t_1,X_1) &= \left\{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid x(\cdot) \in X^*_{\nu,r}(t_1,X_1)\right\}, \end{aligned}$$

(t_1, X_1) kümesinden çıkan integral tünelleri

$$\begin{aligned} H^*_\nu(t_1,X_1) &= \{(t,x) \in [t_*,t^*] \times \mathbb{R}^n \mid x \in X^*_\nu(t;t_1,X_1)\}, \\ H^*_{\nu,r}(t_1,X_1) &= \left\{(t,x) \in [t_*,t^*] \times \mathbb{R}^n \mid x \in X^*_{\nu,r}(t;t_1,X_1)\right\} \end{aligned}$$

ile gösterilsin.

Aşağıdaki teorem (5.3.1), (5.3.2) diferansiyel içermelerinin integral tünelleri ile $grV(\cdot) \subset [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n$ kümesi arasındaki ilişkiyi karakterize etmektedir.

Teorem 5.3.1. *$\alpha > 0$ (5.2.3) ile verilmiş sayı ve $\nu \in (0, \alpha)$ olsun. Her $t \in [t_*, t^*]$ için*

$$X_\nu^*(t; t_*, V(t_*)) \subset V(t) \subset X_{\nu,r}^*(t; t_*, V(t_*))$$

içermesi ve

$$H_\nu^*(t_*, V(t_*)) \subset grV(\cdot) \subset H_{\nu,r}^*(t_*, V(t_*))$$

içermesi sağlanır.

Kanıt. $\nu \in (0, \alpha)$ olsun. Önerme 5.2.1 uyarınca her $(t, x) \in [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n$ için $F_\nu^*(t, x) \subset \mathbb{R}^n$ konveks, kompakt kümedir.

$$F_\nu^*(\cdot) : [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$$

küme değerli dönüşümü süreklidir. Her $t_0 \in [t_*, t^*]$ için

$$F_\nu^*(t_0, \cdot) : \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$$

$\frac{1}{\nu} > 0$ sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlar. $a \geq 0$, (5.2.7) ile verilen sayı olmak üzere, her $(t, x) \in [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n$ için

$$\max\{\|f\| \mid f \in F_\nu^*(t, x)\} \leq \frac{1}{\nu}(a + \|x\|)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca önerme 5.2.3 uyarınca, her $t \in [t_*, t^*)$, $(t, x) \in grV(\cdot)$ için

$$F_\nu^*(t, x) \subset D_*^+ V(t, x)$$

olur. O zaman teorem 1.3.10 uyarınca, $grV(\cdot) \subset [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n$ kümesi (5.3.1) diferansiyel içermesine göre sağa güçlü invaryanttır. Yani keyfi $(t_1, x_1) \in grV(\cdot)$, $x(\cdot) \in X_\nu^*(t_1, x_1)$ alındığında her $t \in [t_1, t^*]$ için $x(t) \in V(t)$ olur. Buradan önerme 1.3.11 uyarınca her $t \in [t_*, t^*]$ için

$$X_\nu^*(t; t_*, V(t_*)) \subset V(t) \tag{5.3.3}$$

içermesi sağlanır.

Önerme 5.2.1 uyarınca her $(t,x) \in [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n$ için $\Phi_\nu^*(t,x) \subset \mathbb{R}^n$ konveks, kompakt kümedir.

$$\Phi_\nu^*(\cdot) : [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$$

küme değerli dönüşümü süreklidir. Her $t_0 \in [t_*, t^*]$ için

$$\Phi_\nu^*(t_0, \cdot) : \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$$

$\frac{1}{\nu} > 0$ sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlar. $a \geq 0$, (5.2.7) ile verilen sayı olmak üzere, her $(t,x) \in [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n$ için

$$\max\{\|\varphi\| \mid \varphi \in \Phi_\nu^*(t,x)\} \leq \frac{1}{\nu}(a + \|x\|)$$

eşitsizliği sağlanır. Tüm bunlara ek olarak önerme 5.2.3 uyarınca her $t \in (t_*, t^*]$, $(t,x) \in grV(\cdot)$ için

$$\Phi_\nu^*(t,x) \subset D_*^- V(t,x) \tag{5.3.4}$$

içermesi sağlanır. $r_\nu^*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımlanışından her $t \in (t_*, t^*]$, $(t,x) \in grV(\cdot)$ için

$$\Phi_\nu^*(t,x) \cap \left[F_\nu^*(t,x) + r_\nu^*(t,x) \cdot \overline{B}\right] \neq \emptyset$$

olduğu elde edilir. Buradan (5.3.4) uyarınca her $t \in (t_*, t^*]$, $(t,x) \in grV(\cdot)$ için

$$D_*^- V(t,x) \cap \left[F_\nu^*(t,x) + r_\nu^*(t,x) \cdot \overline{B}\right] \neq \emptyset \tag{5.3.5}$$

olduğu bulunur. (5.3.5) ve teorem 1.3.7 uyarınca $grV(\cdot) \subset [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n$ kümesi, (5.3.2) diferansiyel içermesine göre sola zayıf invaryanttır.Yani keyfi $(t_1, x_1) \in grV(\cdot)$ noktasına karşılık, her $t \in [t_*, t_1]$ için $x(t) \in V(t)$ olacak biçimde bir $x(\cdot) \in X_{\nu,r}^*(t_1, x_1)$ çözümü vardır. Buradan önerme 1.3.8 uyarınca her $t \in [t_*, t^*]$ için

$$V(t) \subset X_{\nu,r}^*(t; t_*, V(t_*)) \tag{5.3.6}$$

olduğu bulunur. (5.3.3) ve (5.3.6) içermelerinden her $t \in [t_*, t^*]$ için

$$X_\nu^*(t; t_*, V(t_*)) \subset V(t) \subset X_{\nu,r}^*(t; t_*, V(t_*)) \tag{5.3.7}$$

içermesinin sağlandığı elde edilir.

(5.3.7) içermesinden ve integral tünelin tanımından

$$H_{\nu}^{*}(t_{*}, V(t_{*})) \subset grV(\cdot) \subset H_{\nu,r}^{*}(t_{*}, V(t_{*}))$$

içermesinin de sağlandığı açıktır.

$(t,x) \in [t_{*}, t^{*}] \times \mathbb{R}^{n}$, $r > 0$ olmak üzere

$$\dot{x} \in F_{\nu}^{*}(t,x) + r \cdot \overline{B} \tag{5.3.8}$$

diferansiyel içermesi verilmiş olsun.

$t_1 \in [t_{*}, t^{*}]$, $X_1 \subset \mathbb{R}^{n}$ olmak üzere, $X_{\nu}^{r}(t_1, X_1)$ ile (5.3.8) diferansiyel içermesinin $x(t_1) \in X_1$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerinin kümesi ve

$$X_{\nu}^{r}(t; t_1, X_1) = \{x(t) \in \mathbb{R}^{n} \mid x(\cdot) \in X_{\nu}^{r}(t_1, X_1)\}$$

ile (5.3.8) diferansiyel içermesinin t anındaki erişim kümeleri gösterilecektir.

Aşağıdaki önerme, (5.3.1) ve (5.3.8) diferansiyel içermelerinin farklı başlangıç kümelerinden çıkan t anındaki erişim kümeleri arasındaki Haussdorff uzaklığı için bir üst sınır vermektedir.

Önerme 5.3.2. *$X_{*} \subset \mathbb{R}^{n}$, $Y_{*} \subset \mathbb{R}^{n}$ kompakt kümeleri ve keyfi $t \in [t_{*}, t^{*}]$ için*

$$\begin{aligned} h\left(X_{\nu}^{*}(t; t_{*}, X_{*}), X_{\nu}^{r}(t; t_{*}, Y_{*})\right) \leq\ & h(X_{*}, Y_{*}) \exp\left[-\frac{1}{\nu}(t - t_{*})\right] \\ & + r\nu\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_{*})\right)\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. $t_1 \in [t_{*}, t^{*}]$, $x_1 \in X_{\nu}^{*}(t_1; t_{*}, X_{*})$ olsun. $x(t_1) = x_1$ olacak biçimde bir $x(\cdot) \in X_{\nu}^{*}(t_{*}, X_{*})$ çözümü vardır. Buna göre hemen her $t \in [t_{*}, t^{*}]$ için $p_{*}(t) \in V_{\alpha}(t + \nu)$ olacak biçimde $p_{*}(\cdot) : [t_{*}, t^{*}] \to \mathbb{R}^{n}$ ölçülebilir fonksiyonu ve her $t \in [t_{*}, t^{*}]$ için

$$x(t) = x_{*} - \frac{1}{\nu}\int_{t_{*}}^{t} x(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\nu}\int_{t_{*}}^{t} p_{*}(\tau)\, d\tau \tag{5.3.9}$$

eşitliği sağlanacak biçimde $x_* \in X_*$ vardır. Şimdi $\|x_* - y_*\| \leq h(X_*, Y_*)$ eşitsizliğini sağlayan bir $y_* \in Y_*$ seçilip

$$y(t) = y_* - \frac{1}{\nu} \int_{t_*}^{t} y(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\nu} \int_{t_*}^{t} p_*(\tau)\, d\tau \qquad (5.3.10)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $y(\cdot) \in X_\nu^r(t_*, Y_*)$ ve $y_1 = y(t_1) \in X_\nu^r(t_1; t_*, Y_*)$ olur. (5.3.9) ve (5.3.10) eşitliklerinden her $t \in [t_*, t^*]$ için

$$x(t) - y(t) = x_* - y_* - \frac{1}{\nu} \int_{t_*}^{t} [x(\tau) - y(\tau)]\, d\tau$$

ve buradan

$$x(t) - y(t) = (x_* - y_*) \exp\left[-\frac{1}{\nu}(t - t_*)\right] \qquad (5.3.11)$$

olduğu bulunur. $\|x_* - y_*\| \leq h(X_*, Y_*)$ olduğu için (5.3.11) eşitliğinden

$$\|x(t) - y(t)\| \leq h(X_*, Y_*) \exp\left[-\frac{1}{\nu}(t - t_*)\right]$$

olduğu elde edilir. $x_1 \in X_\nu^*(t_1; t_*, X_*)$ keyfi seçildiğinden

$$X_\nu^*(t_1; t_*, X_*) \subset X_\nu^r(t_1; t_*, Y_*) + h(X_*, Y_*) \exp\left[-\frac{1}{\nu}(t_1 - t_*)\right] \cdot \overline{B} \qquad (5.3.12)$$

olduğu kanıtlanmış olur.

$y_1 \in X_\nu^r(t_1; t_*, Y_*)$ olsun. $y(t_1) = y_1$ olacak biçimde bir $y(\cdot) \in X_\nu^r(t_*, Y_*)$ vardır. Buradan hemen her $t \in [t_*, t^*]$ için $p_*(t) \in V_\alpha(t + \nu) + r\nu \cdot \overline{B}$ olacak biçimde $p_*(\cdot) : [t_*, t^*] \to \mathbb{R}^n$ ölçülebilir fonksiyonu ve her $t \in [t_*, t^*]$ için

$$y(t) = y_* - \frac{1}{\nu} \int_{t_*}^{t} y(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\nu} \int_{t_*}^{t} p_*(\tau)\, d\tau \qquad (5.3.13)$$

eşitliği sağlanacak biçimde $y_* \in Y_*$ vardır. $t \in [t_*, t^*]$ için

$$p(t) = \{p \in V_\alpha(t + \nu) \mid \|p_*(t) - p\| = d(p_*(t), V_\alpha(t + \nu))\} \qquad (5.3.14)$$

olarak tanımlansın. $t \to V_\alpha(t + \nu)$, $t \in [t_*, t^*]$ küme değerli dönüşümü sürekli, her $t \in [t_*, t^*]$ için $V_\alpha(t + \nu)$ kümesi konveks, kompakt ve $p_*(\cdot) : [t_*, t^*] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu ölçülebilir olduğundan, (5.3.14) ile tanımlanan

$$p(\cdot) : [t_*, t^*] \to \mathbb{R}^n$$

dönüşümü bir fonksiyondur ve bu fonksiyon ölçülebilirdir (bkz. [1]). Hemen her $t \in [t_*, t^*]$ için $p_*(t) \in V_\alpha(t+\nu) + r\nu \cdot \overline{B}$ olduğundan, (5.3.14) uyarınca hemen her $t \in [t_*, t^*]$ için

$$\|p_*(t) - p(t)\| \le r\nu \tag{5.3.15}$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu kez $\|x_* - y_*\| \le h(X_*, Y_*)$ olacak biçimde bir $x_* \in X_*$ seçilsin. $t \in [t_*, t^*]$ olmak üzere

$$x(t) = x_* - \frac{1}{\nu}\int_{t_*}^{t} x(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\nu}\int_{t_*}^{t} p(\tau)\, d\tau \tag{5.3.16}$$

olarak tanımlanırsa $x(\cdot) \in X_\nu^*(t_*, X_*)$ ve $x_1 = x(t_1) \in X_\nu^*(t_1; t_*, X_*)$ olur. (5.3.13), (5.3.16) eşitliklerinden her $t \in [t_*, t^*]$ için

$$x(t) - y(t) = x_* - y_* - \frac{1}{\nu}\int_{t_*}^{t} [x(\tau) - y(\tau)]\, d\tau - \frac{1}{\nu}\int_{t_*}^{t} [p(\tau) - p_*(\tau)]\, d\tau$$

ve

$$\begin{aligned} x(t) - y(t) &= (x_* - y_*) \exp\left[-\frac{1}{\nu}(t - t_*)\right] \\ &+ \frac{1}{\nu} \exp\left[-\frac{1}{\nu}(t - t_*)\right] \int_{t_*}^{t} (p(\tau) - p_*(\tau)) \exp\left(\frac{1}{\nu}(\tau - t_*)\right) d\tau \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Buradan, $\|x_* - y_*\| \le h(X_*, Y_*)$ olduğu için (5.3.15) uyarınca

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\le h(X_*, Y_*) \exp\left[-\frac{1}{\nu}(t - t_*)\right] \\ &+ r \exp\left[-\frac{1}{\nu}(t - t_*)\right] \int_{t_*}^{t} \exp\left[\frac{1}{\nu}(\tau - t_*)\right] d\tau \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\le h(X_*, Y_*) \exp\left[-\frac{1}{\nu}(t - t_*)\right] \\ &+ r \exp\left[-\frac{1}{\nu}(t - t_*)\right] \left(\nu \exp\left[\frac{1}{\nu}(\tau - t_*)\right]\right)\Bigg|_{t_*}^{t} \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\|x(t) - y(t)\| \le h(X_*, Y_*) \exp\left[-\frac{1}{\nu}(t - t_*)\right] + r\nu\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_*)\right)\right]$$

olduğu bulunur. $y_1 \in X_\nu^r(t_1; t_*, Y_*)$ keyfi seçildiğinden

$$X_\nu^r(t_1; t_*, X_*) \subset X_\nu^*(t_1; t_*, Y_*) + \ h(X_*, Y_*) \exp\left[-\frac{1}{\nu}(t_1 - t_*)\right] \cdot \overline{B}$$
$$+ r\nu \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t_1 - t_*)\right)\right] \cdot \overline{B} \qquad (5.3.17)$$

olduğu sonucuna ulaşılır. (5.3.12) ve (5.3.17) içermelerinden

$$h\left(X_\nu^*(t_1; t_*, X_*), X_\nu^r(t_1; t_*, Y_*)\right) \le h(X_*, Y_*) \exp\left[-\frac{1}{\nu}(t_1 - t_*)\right]$$
$$+ r\nu \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t_1 - t_*)\right)\right]$$

eşitsizliğinin sağlandığı elde edilir.

Önerme 5.3.2 kullanılarak şu sonuç elde edilir.

Sonuç 5.3.3. $X_* \subset \mathbb{R}^n$, $Y_* \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt kümeler olsun. Her* $t \in [t_*, t^*]$ *için*

$$h\left(X_\nu^*(t; t_*, X_*), X_\nu^*(t; t_*, Y_*)\right) \le h(X_*, Y_*) \exp\left[-\frac{1}{\nu}(t - t_*)\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 5.3.4. $\alpha > 0$ (5.2.3) *ile verilmiş sayı,* $\nu_* \in (0, \alpha)$ *ve*

$$r_* = \max\left\{r_{\nu_*}^*(t, x) \mid (t, x) \in grV(\cdot)\right\}$$

olmak üzere $r \in [r_*, +\infty)$ *olsun. Her* $\nu \in (0, \nu_*]$ *ve her* $t \in [t_*, t^*]$ *için*

$$h\left(X_\nu^*(t; t_*, V(t_*)), V(t)\right) \le r\nu \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_*)\right)\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Önerme 5.2.4 uyarınca $r_{\nu_*}^*(\cdot) : [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ fonksiyonu süreklidir. $grV(\cdot) \subset [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n$ kümesi kompakt olduğundan $r_{\nu_*}^*(\cdot)$ fonksiyonunun $grV(\cdot)$ kümesinde maksimumu vardır. Burada

$$r_{\nu_*}^*(t, x) = \rho\left(F_{\nu_*}^*(t, x), \Phi_{\nu_*}^*(t, x)\right)$$

ve $F^*_{\nu_*}(\cdot)$, $\Phi^*_{\nu_*}(\cdot)$ sırasıyla (5.2.5), (5.2.6) ile tanımlanmış küme değerli dönüşümlerdir.

$\nu \in (0, \nu_*]$ keyfi seçilmiş bir sayı olsun. Teorem 5.3.1 uyarınca, her $t \in [t_*, t^*]$ için

$$X^*_\nu(t; t_*, V(t_*)) \subset V(t) \tag{5.3.18}$$

içermesi sağlanır.

Her $t \in (t_*, t^*]$, $(t, x) \in grV(\cdot)$ için $\Phi^*_\nu(t, x) \subset D^-_* V(t, x)$ olduğundan, $r^*_\nu(\cdot)$ fonksiyonunun tanımlanışından

$$D^-_* V(t, x) \cap \left[F^*_\nu(t, x) + r^*_\nu(t, x) \cdot \overline{B}\right] \neq \emptyset \tag{5.3.19}$$

olur. $0 < \nu \leq \nu_*$ olarak seçildiğinden, önerme 5.2.5 uyarınca her $(t, x) \in grV(\cdot)$ için

$$r^*_\nu(t, x) \leq r^*_{\nu_*}(t, x) \leq r_*$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan (5.3.19) uyarınca her $t \in (t_*, t^*]$, $(t, x) \in grV(\cdot)$ için

$$D^-_* V(t, x) \cap \left[F^*_\nu(t, x) + r_* \cdot \overline{B}\right] \neq \emptyset \tag{5.3.20}$$

olduğu bulunur. $r \in [r_*, +\infty)$ olsun. Her $t \in (t_*, t^*]$, $(t, x) \in grV(\cdot)$ için (5.3.20) uyarınca

$$D^-_* V(t, x) \cap \left[F^*_\nu(t, x) + r \cdot \overline{B}\right] \neq \emptyset \tag{5.3.21}$$

olur.

(5.3.21) ve teorem 1.3.7 uyarınca, $grV(\cdot) \subset [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n$ kümesi, (5.3.8) diferansiyel içermesine göre sola zayıf invaryanttır. Yani keyfi $(t_1, x_1) \in grV(\cdot)$ noktasına karşılık, her $t \in [t_*, t_1]$ için $x(t) \in V(t)$ olacak biçimde bir $x(\cdot) \in X^r_\nu(t_1, x_1)$ çözümü vardır. Önerme 1.3.8 uyarınca her $t \in [t_*, t^*]$ için

$$V(t) \subset X^r_\nu(t; t_*, V(t_*)) \tag{5.3.22}$$

olur. Önerme 5.3.2 uyarınca, her $t \in [t_*, t^*]$ için

$$h\left(X^*_\nu(t; t_*, V(t_*)), X^r_\nu(t; t_*, V(t_*))\right) \leq r\nu \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_*)\right)\right] \tag{5.3.23}$$

eşitsizliği geçerlidir.

(5.3.18), (5.3.22) ve (5.3.23) ifadelerinden

$$h\left(X_{\nu}^{*}\left(t;t_{*},V\left(t_{*}\right)\right),V\left(t\right)\right)\leq r\nu\left[1-\exp\left(-\frac{1}{\nu}\left(t-t_{*}\right)\right)\right]$$

eşitsizliğinin sağlandığı elde edilir.

Teorem 5.3.1 ve teorem 5.3.4 kulanılarak şu teorem elde edilir.

Teorem 5.3.5. *Keyfi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. $\alpha > 0$ (5.2.3) ile verilen sayı ve $\nu_* \in (0,\alpha)$ olsun. O zaman her $\nu \in (0,\nu(\varepsilon))$ ve her $t \in [t_*, t^*]$ için*

$$h\left(X_{\nu}^{*}\left(t;t_{*},V\left(t_{*}\right)\right),V\left(t\right)\right)\leq\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $\nu(\varepsilon) \in (0,\nu_*)$ vardır.

Özel olarak her $(t,x) \in \partial(grV(\cdot))$ için $r_{\nu_*}^{*}(t,x) = 0$ olacak biçimde bir $\nu_* \in (0,\alpha)$ varsa, her $\nu \in (0,\nu_*]$ için

$$H_{\nu}^{*}\left(t_{*},V\left(t_{*}\right)\right)=grV\left(\cdot\right)$$

olur.

5.4 Genel Durum

$V(\cdot) : [t_0,\theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Bundan böyle $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün aşağıdaki koşulları sağladığı varsayılacaktır.

(A) $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümü sürekli, her $t \in [t_0,\theta]$ için $V(t) \subset \mathbb{R}^n$ konveks ve $int\,V(t) \neq \emptyset$ olsun.

Amaç, $\varepsilon > 0$ sayısı ve (A) koşulunu sağlayan $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümü verildiğinde, her $t \in [t_0,\theta]$ için

$$h(X(t;t_0,V(t_0)),V(t))\leq\varepsilon$$

olacak biçimde

$$\dot{x} \in F(t,x) \tag{5.4.1}$$

diferansiyel içermenin bulunmasıdır. Burada $X(t; t_0, V(t_0))$, (5.4.1) diferansiyel içermesinin $(t_0, V(t_0))$ başlangıç kümesinden çıkan, t anındaki erişim kümesidir.

$i = 0, 1, \ldots, m-1$ için

$$\Delta = t_{i+1} - t_i \tag{5.4.2}$$

olmak üzere $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \theta\}$, $[t_0, \theta]$ aralığının düzgün parçalanışı olsun.

$i = 0, 1, \ldots, m$ için $V_i = V(t_i)$ olsun. $i = 0, 1, \ldots, m-1$ için $V_i(\cdot) : [t_i, t_{i+1}] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü

$$V_i(t) = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot V_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot V_{i+1} \tag{5.4.3}$$

ve $W(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü

$$W(t) = \begin{cases} V_i(t) & , \ t \in [t_i, t_{i+1}) \\ V_m & , \ t = \theta \end{cases} \tag{5.4.4}$$

olarak tanımlansın.

$$grW(\cdot) = \{(t,x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \mid x \in W(t)\} \tag{5.4.5}$$

olsun.

(A) koşulundan dolayı $i = 0, 1, \ldots, m-1$ için $V_i(\cdot) : [t_i, t_{i+1}] \to K(\mathbb{R}^n)$ kompakt, konveks küme değerli dönüşümdür. Ayrıca $i = 0, 1, \ldots, m$ için $int\, V_i(t_i) \neq \emptyset$ olur. O halde teorem 4.2.2 uyarınca aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 5.4.1. *Her $i = 0, 1, \ldots, m-1$ ve en az bir $\alpha > 0$ sayısı için* (5.4.3) *ile tanımlanmış $V_i(\cdot) : [t_i, t_{i+1}] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün*

$$W_i(\cdot) : [t_i - \alpha, t_{i+1} + \alpha] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n) \tag{5.4.6}$$

$\alpha-$konveks devamı vardır.

Bu önermeye göre her bir $i = 0, 1, \ldots, m-1$ indisine karşılık, her $t \in [t_i, t_{i+1}]$ için $W_i(t) = V_i(t)$ olacak biçimde $\alpha > 0$ sayısı ve $W_i(\cdot) : [t_i - \alpha, t_{i+1} + \alpha] \to K(\mathbb{R}^n)$ kompakt, konveks küme değerli dönüşümü vardır. Ayrıca her bir $i = 0, 1, \ldots, m-1$ için $W_i(\cdot)$ küme değerli dönüşümü süreklidir. Tanımlanıştan dolayı her $i = 0, 1, \ldots m$ için $W(t_i) = V(t_i) = V_i$ olduğu da açıktır.

$\alpha > 0$, önerme 5.4.1 ile verilen sayı ve $\nu \in (0, \alpha)$ olsun. $i = 0, 1, ..., m-1$ ve $(t, x) \in [t_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}^n$ için $W_i(\cdot)$, önerme 5.4.1 ile verilen küme değerli dönüşüm olmak üzere

$$F_\nu^i(\cdot) : [t_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n), \qquad \Phi_\nu^i(\cdot) : [t_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$$

küme değerli dönüşümleri ve $r_\nu^i(\cdot) : [t_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu

$$F_\nu^i(t, x) = \frac{1}{\nu} \cdot [W_i(t + \nu) - x], \tag{5.4.7}$$

$$\Phi_\nu^i(t, x) = -\frac{1}{\nu} \cdot [W_i(t - \nu) - x], \tag{5.4.8}$$

$$r_\nu^i(t, x) = \rho\left(F_\nu^i(t, x), \Phi_\nu^i(t, x)\right) \tag{5.4.9}$$

olarak tanımlansın. Bu dönüşümler yardımıyla $(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ için

$$F_\nu(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n), \qquad \Phi_\nu(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$$

küme değerli dönüşümleri ve $r_\nu(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu, $i = 0, 1, \ldots, m-1$ olmak üzere

$$F_\nu(t, x) = \begin{cases} F_\nu^i(t, x) & , \quad (t, x) \in [t_i, t_{i+1}) \times \mathbb{R}^n \\ F_\nu^m(t, x) & , \quad (t, x) \in \{\theta\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$\Phi_\nu(t, x) = \begin{cases} \Phi_\nu^i(t, x) & , \quad (t, x) \in [t_i, t_{i+1}) \times \mathbb{R}^n \\ \Phi_\nu^m(t, x) & , \quad (t, x) \in \{\theta\} \times \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{5.4.10}$$

$$r_\nu(t, x) = \begin{cases} r_\nu^i(t, x) & , \quad (t, x) \in [t_i, t_{i+1}) \times \mathbb{R}^n \\ r_\nu^m(t, x) & , \quad (t, x) \in \{\theta\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Önerme 5.2.1 uyarınca $F_\nu(\cdot)$, $\Phi_\nu(\cdot)$ küme değerli dönüşümleri ve önerme 5.2.4 uyarınca $r_\nu(\cdot)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlar.

1. Herhangi bir $i = 0, 1, \ldots, m$, $t \neq t_i$ için $(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ noktasında süreklidir.

2. $i = 0, 1, \ldots, m-1$ için $(t_i, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ noktasında t'ye göre sağdan süreklidir.

3. $(\theta, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ noktasında t'ye göre soldan süreklidir.

4. Her $t \in [t_0, \theta]$ için $F_\nu(t, \cdot)$, $\Phi_\nu(t, \cdot)$ küme değerli dönüşümleri $\dfrac{1}{\nu}$, $r_\nu(t, \cdot)$ fonksiyonu $\dfrac{2}{\nu}$ sabitiyle Lipschitz süreklidir.

5. $$b = \max\{b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}\}, \quad b_i = \max\{\|x\| \mid (t, x) \in grW_i(\cdot)\}$$

   olmak üzere, her $(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ için,

   $$\begin{aligned} \max\{\|f\| \mid f \in F_\nu(t, x)\} &\leq \frac{1}{\nu}(b + \|x\|), \\ \max\{\|\varphi\| \mid \varphi \in \Phi_\nu(t, x)\} &\leq \frac{1}{\nu}(b + \|x\|), \\ r_\nu(t, x) &\leq \frac{2}{\nu}(b + \|x\|) \end{aligned}$$

   eşitsizlikleri sağlanır.

$(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\dot{x} \in F_\nu(t, x), \tag{5.4.11}$$

$$\dot{x} \in F_\nu(t, x) + r_\nu(t, x) \cdot \overline{B} \tag{5.4.12}$$

diferansiyel içermeleri verilmiş olsun. $X_* \subset \mathbb{R}^n$, $t_* \in [t_0, \theta]$ olmak üzere, $X_\nu(t_*, X_*)$, $X_{\nu,r}(t_*, X_*)$ sırasıyla (5.4.11) ve (5.4.12) diferansiyel içermelerinin

$x(t_*) \in X_*$ başlangıç koşulunu sağlayan tüm çözümleri kümesi ve

$$X_\nu(t;t_*,X_*) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n \,|\, x(\cdot) \in X_\nu(t_*,X_*)\}\,,$$

$$X_{\nu,r}(t;t_*,X_*) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n \,|\, x(\cdot) \in X_{\nu,r}(t_*,X_*)\}\,,$$

$$H_\nu(t_*,X_*) = \{(t,x) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \,|\, x \in X_\nu(t;t_*,X_*)\}\,,$$

$$H_{\nu,r}(t_*,X_*) = \{(t,x) \in [t_0,\theta] \times R^n \,|\, x \in X_{\nu,r}(t;t_*,X_*)\}$$

olsun.

Önerme 5.4.2. $V(\cdot) : [t_0,\theta] \to K(\mathbb{R}^n)$, *(A) koşulunu sağlayan bir küme değerli dönüşüm,* $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \theta\}$, $[t_0,\theta]$ *aralığının düzgün bir parçalanışı,* $V_i(\cdot)$, (5.4.3) *ile verilen küme değerli dönüşüm ve* $\nu \in (0,\alpha)$ *olsun. O zaman* $i = 0,1,\ldots,m-1$ *olmak üzere her* $t \in [t_i,t_{i+1}]$ *için*

$$X_\nu(t;t_i,V_i) \subset V_i(t) \subset X_{\nu,r}(t;t_i,V_i)$$

içermesi sağlanır. Burada $\alpha > 0$, *önerme 5.4.1'de verilmiş sayıdır.*

Önermenin kanıtı $F_\nu(\cdot)$ küme değerli dönüşümü, $r_\nu(\cdot)$ fonksiyonunun tanımlanışından, teorem 5.3.1 yardımıyla elde edilir.

Teorem 5.4.3. $V(\cdot) : [t_0,\theta] \to K(\mathbb{R}^n)$, *(A) koşulunu sağlayan bir küme değerli dönüşüm ve* $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \theta\}$, $[t_0,\theta]$ *aralığının düzgün bir parçalanışı ve* $\nu \in (0,\alpha)$ *olsun.* $W(\cdot)$, (5.4.4) *ile verilmiş küme değerli dönüşüm olmak üzere her* $t \in [t_0,\theta]$ *için*

$$X_\nu(t;t_0,W(t_0)) \subset W(t) \subset X_{\nu,r}(t;t_0,W(t_0))$$

ve

$$H_\nu(t_0,W(t_0)) \subset grW(\cdot) \subset H_{\nu,r}(t_0,W(t_0))$$

içermeleri sağlanır. Burada $\alpha > 0$, *önerme 5.4.1'de verilmiş sayıdır.*

Kanıt. Kanıt için tümevarım yöntemi kullanılacaktır. $t \in [t_0,t_1]$ olsun. $W(t_0) = V_0$ ve her $t \in [t_0,t_1]$ için $W(t) = V_0(t)$ olduğundan önerme 5.4.2 uyarınca, her $t \in [t_0,t_1]$ için

$$X_\nu(t;t_0,W(t_0)) \subset W(t) \subset X_{\nu,r}(t;t_0,W(t_0)) \tag{5.4.13}$$

içermeleri sağlanır. (5.4.11) ve (5.4.12) diferansiyel içermelerinin, t_1 anındaki erişim kümeleri

$$X_\nu^1 = X_\nu(t_1; t_0, W(t_0)), \qquad X_{\nu,r}^1 = X_{\nu,r}(t_1; t_0, W(t_0)) \tag{5.4.14}$$

olarak gösterilsin. $V_1 = W(t_1) = V(t_1)$ olduğundan (5.4.13) ifadesinden

$$X_\nu^1 \subset V_1 = W(t_1) \subset X_{\nu,r}^1 \tag{5.4.15}$$

olduğu yazılabilir.

$t \in [t_1, t_2]$ olsun. $W(t_1) = V_1$ ve her $t \in [t_1, t_2]$ için $W(t) = V_1(t)$ olduğundan önerme 5.4.2 uyarınca, her $t \in [t_1, t_2]$ için

$$X_\nu(t; t_1, W(t_1)) \subset W(t) \subset X_{\nu,r}(t; t_1, W(t_1))$$

olur. (5.4.15) uyarınca, her $t \in [t_1, t_2]$ için

$$X_\nu\left(t; t_1, X_\nu^1\right) \subset W(t) \subset X_{\nu,r}\left(t; t_1, X_{\nu,r}^1\right) \tag{5.4.16}$$

içermeleri sağlanır. Her $t \in [t_1, t_2]$ için

$$\begin{aligned} X_\nu\left(t; t_1, X_\nu^1\right) &= X_\nu(t; t_1, X_\nu(t_1; t_0, W(t_0))) = X_\nu(t; t_0, W(t_0)), \\ X_{\nu,r}(t; t_1, X_{\nu,r}^1) &= X_{\nu,r}(t; t_1, X_{\nu,r}(t_1; t_0, W(t_0))) = X_{\nu,r}(t; t_0, W(t_0)) \end{aligned}$$

olduğundan, (5.4.13) ve (5.4.16) içermelerinden her $t \in [t_0, t_2]$ için

$$X_\nu(t; t_0, W(t_0)) \subset W(t) \subset X_{\nu,r}(t; t_0, W(t_0))$$

olduğu bulunur.

Şimdi $k < m - 1$ olmak üzere, her $t \in [t_0, t_k]$ için

$$X_\nu(t; t_0, W(t_0)) \subset W(t) \subset X_{\nu,r}(t; t_0, W(t_0)) \tag{5.4.17}$$

olduğunu varsayılsın. Bu varsayım altında her $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için de

$$X_\nu(t; t_0, W(t_0)) \subset W(t) \subset X_{\nu,r}(t; t_0, W(t_0))$$

içermesinin sağlandığı gösterilsin. (5.4.11) ve (5.4.12) diferansiyel içermelerinin $(t_0, W(t_0))$ kümesinden çıkan, t_k anındaki erişim kümeleri

$$X_\nu^k = X_\nu(t_k; t_0, W(t_0)), \qquad X_{\nu,r}^k = X_{\nu,r}(t_k; t_0, W(t_0))$$

olarak gösterilsin. (5.4.17) varsayımından

$$X_\nu^k \subset W(t_k) \subset X_{\nu,r}^k \tag{5.4.18}$$

olduğu yazılabilir. $W(t_k) = V_k$ ve her $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için $W(t) = V_k(t)$ olduğundan önerme 5.4.2 uyarınca, her $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$X_\nu(t; t_k, W(t_k)) \subset W(t) \subset X_{\nu,r}(t; t_k, W(t_k)) \tag{5.4.19}$$

olur. (5.4.18) ve (5.4.19)uyarınca her $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$X_\nu(t; t_k, X_\nu^k) \subset W(t) \subset X_{\nu,r}(t; t_k, X_{\nu,r}^k) \tag{5.4.20}$$

olacağı açıktır.

$$\begin{aligned} X_\nu(t; t_k, X_\nu^k) &= X_\nu(t; t_k, X_\nu(t_k; t_0, W(t_0))) = X_\nu(t; t_0, W(t_0)) \\ X_\nu(t; t_k, X_{\nu,r}^k) &= X_\nu(t; t_k, X_{\nu,r}(t_k; t_0, W(t_0))) = X_{\nu,r}(t; t_0, W(t_0)) \end{aligned}$$

olduğundan (5.4.20) içermesinden, her $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$X_\nu(t; t_0, W(t_0)) \subset W(t) \subset X_{\nu,r}(t; t_0, W(t_0))$$

olduğu elde edilir. İstenen gösterilmiştir. Bu durumda keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$X_\nu(t; t_0, W(t_0)) \subset W(t) \subset X_{\nu,r}(t; t_0, W(t_0))$$

içermesi sağlanır.

Buradan

$$H_\nu(t_0, W(t_0)) \subset grW(\cdot) \subset H_{\nu,r}(t_0, W(t_0))$$

içermesinin de sağlanacağı açıktır.

Herhangi bir $\nu > 0$ için

$$\begin{aligned} r_\nu^i &= \max\left\{r_\nu^i(t,x) \mid (t,x) \in grV_i(\cdot)\right\}, \\ r_\nu &= \max\left\{r_\nu^i \mid i = 0, 1, ..., m-1\right\} \end{aligned} \tag{5.4.21}$$

olarak alınsın. $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışından önerme 5.2.5 uyarınca $\nu_1 \le \nu_2$ ise, her $(t,x) \in grW(\cdot)$ için

$$r_{\nu_1}(t,x) \le r_{\nu_2}(t,x) \tag{5.4.22}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde $\nu_1 \le \nu_2$ iken

$$r_{\nu_1} \le r_{\nu_2}$$

olur.

$\alpha > 0$ önerme 5.4.1 ile verilen sayı olsun.

$$\nu_* \in (0,\alpha) \tag{5.4.23}$$

olarak seçilsin. r_ν, (5.4.21) ile verilen sayı olmak üzere

$$r_* = r_{\nu_*} \tag{5.4.24}$$

ile gösterilsin. (5.4.22) eşitsizliği uyarınca, her $\nu \in (0,\nu_*]$ ve $(t,x) \in grW(\cdot)$ için

$$r_\nu(t,x) \le r_* \tag{5.4.25}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan itibaren ν_*, (5.4.23) ve r_*, (5.4.24) ile belirlenmiş sayıları gösterecektir.

Önerme 5.4.4. *$V(\cdot) : [t_0,\theta] \to K(\mathbb{R}^n)$, (A) koşulunu sağlayan bir küme değerli dönüşüm, $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \theta\}$, $[t_0,\theta]$ aralığının düzgün bir parçalanışı ve $r \in [r_*,\infty)$ olsun. $i = 0, 1, \ldots, m-1$ ve $V_i(\cdot)$, (5.4.3) ile verilen küme değerli dönüşüm olmak üzere, her $\nu \in (0,\nu_*]$ ve $t \in [t_i, t_{i+1}]$ için*

$$h(X_\nu(t;t_i,V(t_i)),V_i(t)) \le r\nu\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t-t_i)\right)\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

Önermenin kanıtı $F_\nu(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımından teorem 5.3.4 yardımıyla elde edilir.

Teorem 5.4.5. *$V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$, (A) koşulunu sağlayan bir küme değerli dönüşüm ve $r \in [r_*, \infty)$ olsun. $W(\cdot)$, (5.4.4) ile verilen küme değerli dönüşüm olmak üzere, her $\nu \in (0, \nu_*]$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$h(X_\nu(t; t_0, V(t_0)), W(t)) \leq r\nu \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_0)\right)\right] \tag{5.4.26}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Keyfi $r \in [r_*, \infty)$ sayısı seçilsin.

$$\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \theta\},$$

$[t_0, \theta]$ aralığının düzgün bir parçalanışı olsun. Keyfi bir $t_* \in [t_0, \theta]$ seçilsin. $t_* = t_0$ ise (5.4.26) eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır. $t_* \in (t_0, \theta]$ olsun. O halde $t_* \in (t_k, t_{k+1}]$ olacak biçimde bir $k = 0, 1, ..., m-1$ vardır.

Her $t \in [t_0, t_1]$ için $W(t) = V_0(t)$ olduğundan önerme 5.4.4 uyarınca, her $t \in [t_0, t_1]$ için

$$h(X_\nu(t; t_0, V(t_0)), W(t)) \leq r\nu \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_0)\right)\right] \tag{5.4.27}$$

olduğu elde edilir. (5.4.11) diferansiyel içermesinin t_1 anındaki erişim kümesini $X_\nu^1 = X_\nu(t_1; t_0, V(t_0))$ ile gösterilsin. $W(t_1) = V_1(t_1) = V(t_1)$ olduğundan, (5.4.27) uyarınca

$$h\left(X_\nu^1, V(t_1)\right) \leq r\nu \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t_1 - t_0)\right)\right] \tag{5.4.28}$$

olduğu bulunur.

Her $t \in [t_1, t_2]$ için $W(t) = V_1(t)$ olduğundan önerme 5.4.4 uyarınca, her $t \in [t_1, t_2]$ için

$$h(X_\nu(t; t_1, V(t_1)), W(t)) \leq r\nu \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_1)\right)\right] \tag{5.4.29}$$

eşitsizliği sağlanır. Sonuç 5.3.3 uyarınca, her $t \in [t_1, t_2]$ için

$$h\left(X_\nu\left(t; t_1, V(t_1)\right), X_\nu\left(t; t_1, X_\nu^1\right)\right) \leq h\left(V(t_1), X_\nu^1\right) \exp\left[-\frac{1}{\nu}\left(t - t_1\right)\right]$$

olur. Buradan ve (5.4.28) eşitsizliğinden

$$h\left(X_\nu\left(t; t_1, V(t_1)\right), X_\nu\left(t; t_1, X_\nu^1\right)\right) \leq r\nu\left[\exp\left(-\frac{1}{\nu}\left(t - t_1\right)\right)\right.$$
$$\left. - \exp\left(-\frac{1}{\nu}\left(t - t_0\right)\right)\right]$$

olduğu bulunur. $t \in [t_1, t_2]$ için $X_\nu\left(t; t_1, X_\nu^1\right) = X_\nu\left(t; t_0, V(t_0)\right)$ olduğundan (5.4.29) eşitsizliğinden, her $t \in [t_1, t_2]$ için

$$\begin{aligned} h\left(X_\nu\left(t; t_0, V(t_0)\right), W(t)\right) &\leq h\left(X_\nu\left(t; t_0, V(t_0)\right), X_\nu\left(t; t_1, V(t_1)\right)\right) \\ &\quad + h\left(X_\nu\left(t; t_1, V(t_1)\right), W(t)\right) \\ &\leq r\nu\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}\left(t - t_0\right)\right)\right] \end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

Şimdi her $i \leq k$ ve her $t \in [t_{i-1}, t_i]$ için

$$h\left(X_\nu\left(t; t_0, V(t_0)\right), W(t)\right) \leq r\nu\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}\left(t - t_0\right)\right)\right] \tag{5.4.30}$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayılıp, $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$h\left(X_\nu\left(t; t_0, V(t_0)\right), W(t)\right) \leq r\nu\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}\left(t - t_0\right)\right)\right] \tag{5.4.31}$$

eşitsizliğinin sağlandığı kanıtlanacaktır.

(5.4.11) diferansiyel içermesinin t_k anındaki erişim kümesi

$$X_\nu^k = X_\nu(t_k; t_0, V(t_0))$$

ile gösterilsin. $W(t_k) = V_k(t_k) = V(t_k)$ olduğundan, (5.4.30) eşitsizliğinden

$$h\left(X_\nu^k, V(t_k)\right) \leq r\nu\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}\left(t_k - t_0\right)\right)\right] \tag{5.4.32}$$

olduğu elde edilir. Her $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için $W(t) = V_k(t)$ olduğundan önerme 5.4.4 uyarınca, her $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$h\left(X_\nu(t; t_k, V(t_k)), W(t)\right) \leq r\nu\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}\left(t - t_k\right)\right)\right] \tag{5.4.33}$$

eşitsizliği sağlanır. Sonuç 5.3.3 uyarınca, her $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$h\left(X_\nu\left(t; t_k, V\left(t_k\right)\right), X_\nu\left(t; t_k, X_\nu^k\right)\right) \leq h\left(X_\nu^k, V_k\right) \exp\left(-\frac{1}{\nu}\left(t - t_k\right)\right)$$

olur. Buradan (5.4.32) eşitsizliği uyarınca

$$\begin{aligned} h\left(X_\nu\left(t; t_k, V\left(t_k\right)\right), X_\nu\left(t; t_k, X_\nu^k\right)\right) \leq r\nu &\left[\exp\left(-\frac{1}{\nu}\left(t - t_k\right)\right)\right. \\ &\left. - \exp\left(-\frac{1}{\nu}\left(t - t_0\right)\right)\right] \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Her $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için $X_\nu\left(t; t_k, X_\nu^k\right) = X_\nu\left(t; t_0, V\left(t_0\right)\right)$ olduğundan, (5.4.33) uyarınca her $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$\begin{aligned} h\left(X_\nu\left(t; t_0, V\left(t_0\right)\right), W\left(t\right)\right) &\leq h\left(X_\nu\left(t; t_0, V\left(t_0\right)\right), X_\nu(t; t_k, V\left(t_k\right))\right) \\ &\quad + h\left(X_\nu(t; t_k, V\left(t_k\right)), W\left(t\right)\right) \\ &\leq r\nu\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}\left(t - t_0\right)\right)\right] \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Yani

$$h\left(X_\nu\left(t; t_0, V\left(t_0\right)\right), W\left(t\right)\right) \leq r\nu\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}\left(t - t_0\right)\right)\right] \qquad (5.4.34)$$

eşitsizliğinin sağlandığı bulunur. Böylece (5.4.31) eşitsizliği kanıtlanmıştır. (5.4.34) eşitsizliğinden $t_* \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$h\left(X_\nu\left(t_*; t_0, V\left(t_0\right)\right), W\left(t_*\right)\right) \leq r\nu\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}\left(t_* - t_0\right)\right)\right]$$

olur. $t_* \in [t_0, \theta]$ keyfi seçildiğinden her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h(X_\nu(t; t_0, V\left(t_0\right)), W(t)) \leq r\nu\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_0)\right)\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Teorem kanıtlanmış olur.

Teorem 5.4.5 yardımıyla şu önerme kanıtlanabilir.

Önerme 5.4.6. *$\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$, (A) koşulunu sağlayan bir küme değerli dönüşüm olsun. $W(\cdot)$, (5.4.4) ile verilen küme değerli dönüşüm olmak üzere, her $\nu \in (0, \nu(\varepsilon)]$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$h(X_\nu(t; t_0, V\left(t_0\right)), W(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $\nu(\varepsilon) \in (0, \alpha)$ vardır.

Kanıt. $\nu_* \in (0, \alpha)$ olsun. $r_* > 0$ (5.4.24) ile verilen sayı olmak üzere $r \in [r_*, \infty)$ olsun. $\nu(\varepsilon) \leq \min\left\{1, \nu_*, \dfrac{\varepsilon}{2r}\right\}$ olarak seçilsin. Teorem 5.4.5 uyarınca her $\nu \in (0, \nu(\varepsilon)]$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h(X_\nu(t; t_0, V(t_0)), W(t)) \leq r\nu \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}(\theta - t_0)\right)\right] \tag{5.4.35}$$

olur.

$$0 \leq \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}(\theta - t_0)\right)\right] \leq 1$$

olduğundan (5.4.35) uyarınca

$$h(X_\nu(t; t_0, V(t_0)), W(t)) \leq r\nu \tag{5.4.36}$$

eşitsizliği sağlanır. $\nu(\varepsilon) \leq \dfrac{\varepsilon}{2r}$ olduğundan, (5.4.36) eşitsizliğinden her $\nu \in (0, \nu(\varepsilon)]$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h(X_\nu(t; t_0, V(t_0)), W(t)) \leq r\nu \leq r\nu(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olduğu bulunur.

Teorem 5.4.7. *$\varepsilon > 0$, $\sigma(\varepsilon)$ önerme 5.1.1 ve $\nu(\varepsilon)$ önerme 5.4.6 ile verilmiş sayılar, $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ dönüşümü (A) koşulunu sağlayan bir küme değerli dönüşüm olsun. Her $\nu \in (0, \nu(\varepsilon)]$ sayısı ve $[t_0, \theta]$ aralığının $\Delta \leq \sigma(\varepsilon)$ koşulunu sağlayan her $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \theta\}$ düzgün parçalanışı ve her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$h(X_\nu(t; t_0, V(t_0)), V(t)) \leq \varepsilon$$

olur. Burada $\Delta = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, \ldots m-1$ olarak tanımlanan sayıdır.

Kanıt. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Önerme 5.1.1 uyarınca $[t_0, \theta]$ aralığının $\Delta \leq \sigma(\varepsilon)$ koşulunu sağlayan her

$$\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \theta\}$$

düzgün parçalanışı ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h(V(t), W(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.4.37}$$

olur. Önerme 5.4.6 uyarınca her $\nu \in (0, \nu(\varepsilon)]$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h(X_\nu(t; t_0, V(t_0)), W(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (5.4.38)$$

olduğu elde edilir. (5.4.37), (5.4.38) eşitsizliklerinden her $\nu \in (0, \nu(\varepsilon)]$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h(X_\nu(t; t_0, V(t_0)), V(t)) \leq h(X_\nu(t; t_0, V(t_0)), W(t)) + h(W(t), V(t)) \leq \varepsilon$$

olduğu elde edilir.

Önerme 5.1.2 ve teorem 5.4.5 kullanılarak şu teorem kanıtlanabilir.

Teorem 5.4.8. *$V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$, (A) koşulunu ve L sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlayan bir küme değerli dönüşüm olsun.*

$$\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \theta\},$$

$[t_0, \theta]$ aralığının bir düzgün parçalanışı ve $r_* > 0$ (5.4.25) ile tanımlanan sayı olsun. Keyfi $\nu \in (0, \nu_*]$ ve $r \in [r_*, \infty)$ sayısı ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h(X_\nu(t; t_0, V(t_0)), V(t)) \leq L \cdot \Delta + r\nu \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_0)\right)\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

$V(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sürekli, her $t \in [t_0, \theta]$ için $V(t) \subset \mathbb{R}^n$ konveks, kompakt küme olduğu, ancak her $t \in [t_0, \theta]$ için $int\, V(t) \neq \emptyset$ olmadığı durumda da teorem 5.4.7 doğrudur. Bu durumda teoremi kanıtlamak için bir önerme kanıtlanacaktır.

Önerme 5.4.9. *$X_* \subset \mathbb{R}^n$, $Y_* \subset \mathbb{R}^n$ kompakt kümeler olsun. Keyfi $\nu \in (0, \nu_*]$ sayısı ve her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$h(X_\nu(t; t_0, X_*), X_\nu(t; t_0, Y_*)) \leq h(X_*, Y_*) \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_0)\right) \qquad (5.4.39)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. $\nu \in (0, \nu_*]$ ve

$$\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \theta\}$$

$[t_0, \theta]$ aralığının bir düzgün parçalanışı olsun. Keyfi $t_* \in [t_0, \theta]$ seçilsin. $t_* = t_0$ ise (5.4.39) eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. $t_* \neq t_0$ olsun. Bu durumda $t_* \in (t_k, t_{k+1}]$ olacak biçimde bir $k = 0, 1, ..., m-1$ vardır. $(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$ için $F_\nu(t, x) = F_\nu^0(t, x)$ olarak tanımlandığından, sonuç 5.3.3 uyarınca, her $t \in [t_0, t_1]$ için

$$h(X_\nu(t; t_0, X_*), X_\nu(t; t_0, Y_*)) \leq h(X_*, Y_*) \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_0)\right) \tag{5.4.40}$$

eşitsizliği sağlanır.

(5.4.11) diferansiyel içermesinin, (t_0, X_*) ve (t_0, Y_*) kümelerinden çıkan, t_1 anındaki erişim kümelerini sırasıyla $X_\nu^1 = X_\nu(t_1; t_0, X_*)$, $Y_\nu^1 = X_\nu(t_1; t_0, Y_*)$ ile gösterilsin. (5.4.40) eşitsizliğinden

$$h\left(X_\nu^1, Y_\nu^1\right) \leq h(X_*, Y_*) \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t_1 - t_0)\right) \tag{5.4.41}$$

olduğu elde edilir.

$(t, x) \in [t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n$ için $F_\nu(t, x) = F_\nu^1(t, x)$ olduğundan, sonuç 5.3.3 ve (5.4.41) eşitsizliğinden her $t \in [t_1, t_2]$ için

$$\begin{aligned} h(X_\nu(t; t_0, X_\nu^1), X_\nu(t; t_0, Y_\nu^1)) &\leq h\left(X_\nu^1, Y_\nu^1\right) \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_1)\right) \\ &\leq h(X_*, Y_*) \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_0)\right) \end{aligned} \tag{5.4.42}$$

eşitsizliği sağlanır.

Her $t \in [t_1, t_2]$ için

$$X_\nu(t; t_0, X_\nu^1) = X_\nu(t; t_0, X_*), \quad X_\nu(t; t_0, Y_\nu^1) = X_\nu(t; t_0, Y_*) \tag{5.4.43}$$

olduğu açıktır. (5.4.42) ve (5.4.43) uyarınca, her $t \in [t_1, t_2]$ için

$$h(X_\nu(t; t_0, X_*), X_\nu(t; t_0, Y_*)) \leq h(X_*, Y_*) \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_0)\right) \tag{5.4.44}$$

olduğu bulunur.

$i \leq k$ ve her $t \in [t_{i-1}, t_i]$ için

$$h(X_\nu(t; t_0, X_*), X_\nu(t; t_0, Y_*)) \leq h(X_*, Y_*) \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_0)\right) \qquad (5.4.45)$$

olduğu varsayılsın. Şimdi her $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$h(X_\nu(t; t_0, X_*), X_\nu(t; t_0, Y_*)) \leq h(X_*, Y_*) \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_0)\right) \qquad (5.4.46)$$

eşitsizliğinin sağlandığı kanıtlanacaktır.

(5.4.11) diferansiyel içermesinin (t_0, X_*) ve (t_0, Y_*) kümelerinden çıkan t_k anındaki erişim kümelerini sırasıyla $X_\nu^k = X_\nu(t_k; t_0, X_*)$, $Y_\nu^k = X_\nu(t_k; t_0, Y_*)$ ile gösterilsin. (5.4.45) eşitsizliğinden dolayı

$$h\left(X_\nu^k, Y_\nu^k\right) \leq h(X_*, Y_*) \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t_k - t_0)\right) \qquad (5.4.47)$$

olur. $(t, x) \in [t_k, t_{k+1}] \times \mathbb{R}^n$ için $F_\nu(t, x) = F_\nu^k(t, x)$ olduğundan, sonuç 5.3.3 ve (5.4.47) eşitsizliğinden, her $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$\begin{aligned} h(X_\nu(t; t_0, X_\nu^k), X_\nu(t; t_0, Y_\nu^k)) &\leq h\left(X_\nu^k, Y_\nu^k\right) \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_k)\right) \\ &\leq h(X_*, Y_*) \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_0)\right) \qquad (5.4.48) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Her $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$X_\nu(t; t_0, X_\nu^k) = X_\nu(t; t_0, X_*), \quad X_\nu(t; t_0, Y_\nu^k) = X_\nu(t; t_0, Y_*)$$

olduğundan, (5.4.48) eşitsizliğinden, her $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$h(X_\nu(t; t_0, X_*), X_\nu(t; t_0, Y_*)) \leq h(X_*, Y_*) \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_0)\right)$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Bir başka deyişle (5.4.46) kanıtlanmıştır. Buradan her $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$h(X_\nu(t; t_0, X_*), X_\nu(t; t_0, Y_*)) \leq h(X_*, Y_*) \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_0)\right)$$

ve özel olarak

$$h(X_\nu(t_*; t_0, X_*), X_\nu(t_*; t_0, Y_*)) \leq h(X_*, Y_*) \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t_* - t_0)\right)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülmüş olur. $t_* \in [t_0, \theta]$ keyfi seçildiğinden kanıt tamamlanmıştır.

Şimdi $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün aşağıdaki koşulu sağladığı varsayılacaktır.

(B) $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ sürekli, konveks değerli küme değerli dönüşüm olsun.

(B) koşulunda (A) koşulundan farklı olarak $\forall t \in [t_0, \theta]$ için $int\, V(t) \neq \emptyset$ olması istenmemektedir. Bu durumda da her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h(X(t; t_0, V(t_0)), V(t)) \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan

$$\dot{x} \in F(t, x)$$

diferansiyel içermesi bulunabilir.

$\gamma > 0$ sayısı verilsin. $t \in [t_0, \theta]$ için

$$V_\gamma(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, V(t)) \leq \gamma\}$$

olarak tanımlansın. $V_\gamma(\cdot)$ küme değerli dönüşümü süreklidir, her $t \in [t_0, \theta]$ için $V_\gamma(t) \subset \mathbb{R}^n$ konveks, kompakt kümedir ve $int\, V_\gamma(t) \neq \emptyset$ olur. Yani $V_\gamma(\cdot)$ küme değerli dönüşümü (A) koşulunu sağlar.

Teorem 5.4.10. *$\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $V(\cdot) : [t_0, \theta] \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünü (B) koşulunu sağlasın. Her $\nu \in (0, \nu(\varepsilon)]$ sayısı ve $[t_0, \theta]$ aralığının $\Delta \leq \sigma(\varepsilon)$ koşulunu sağlayan her $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \theta\}$ düzgün parçalanışına karşılık her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$h(X_\nu(t; t_0, V(t_0)), V(t)) \leq \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $\nu(\varepsilon) \in (0, \alpha)$ ve $\sigma(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. Burada $\Delta = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, \ldots m-1$ olarak tanımlanan sayı ve $X(t; t_0, V(t_0))$, (5.4.11) diferansiyel içermesinin $(t_0, V(t_0))$ başlangıç kümesinden çıkan, t anındaki erişim kümesidir.

Kanıt. $\gamma = \dfrac{\varepsilon}{3}$ olsun. $V_\gamma(\cdot)$ küme değerli dönüşümü (A) koşulunu sağladığından teorem 5.4.7 uyarınca her $\nu \in (0, \nu(\varepsilon)]$ sayısı ve $[t_0, \theta]$ aralığının $\Delta \leq \sigma(\varepsilon)$ koşulunu sağlayan her $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \theta\}$ düzgün parçalanışına karşılık her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h(X_\nu(t; t_0, V_{\varepsilon/3}(t_0)), V_{\varepsilon/3}(t)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{5.4.49}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $\nu(\varepsilon) \in (0, \alpha)$ ve $\sigma(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$$h(V_{\varepsilon/3}(t_0), V(t_0)) = \frac{\varepsilon}{3}$$

olduğundan, önerme 5.4.9 uyarınca her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h(X_\nu(t; t_0, V_{\varepsilon/3}(t_0)), X_\nu(t; t_0, V(t_0)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \exp\left(-\frac{1}{\nu}(t - t_0)\right) \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{5.4.50}$$

eşitsizliği sağlanır.

Her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h(V_{\varepsilon/3}(t), V(t)) = \frac{\varepsilon}{3} \tag{5.4.51}$$

olduğu açıktır.

(5.4.49) - (5.4.51) eşitsizliklerinden her $\nu \in (0, \nu(\varepsilon)]$ ve $\Delta \leq \sigma(\varepsilon)$ koşulunu sağlayan her $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \theta\}$ düzgün parçalanışına karşılık, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} h(X_\nu(t; t_0, V(t_0)), V(t)) &\leq h\left(X_\nu(t; t_0, V(t_0)), X_\nu(t; t_0, V_{\varepsilon/3}(t_0))\right) + \\ &\quad + h(X_\nu(t; t_0, V_{\varepsilon/3}(t_0)), V_{\varepsilon/3}(t)) + h(V_{\varepsilon/3}(t), V(t)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığı elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] AUBIN, J-P. ve FRANKOWSKA, H., *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, USA (1990).

[2] BERGE, C., *Espaces Topologiques, Fonctions Multivoques*, 2nd ed., Dunod, Paris, France (1966).

[3] HAUSDORFF, F., *Set Theory*, Chelsea, New York, USA (1962).

[4] HU, S. ve PAPAGEORGıOU, N.S., *Handbook of Multivalued Analysis, Volume I: Theory*, Kluwer Academic Press, (1997).

[5] KURATOWSKI, K., *Topology, Vol. I, (Transl. J. Jaworowski)*, Academic Press, New York, USA (1966).

[6] KURATOWSKI, K., *Topology, Vol. II, (Transl. J. Jaworowski)*, Academic Press, New York, USA (1968).

[7] AUBIN, J-P. ve CELLINA, A., *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, (1984).

[8] BOULIGAND, G., *Sur les surfaces dépourvues de points hyperlimites*, Ann. Polon. Math., **9**, 32-41 (1930).

[9] BOULIGAND, G., *Introduction à la Géométrie Infinitésimal Directe*, Gauthier Villars, Paris, France (1932).

[10] DEMYANOV, D.F. ve RUBINOV, A.M., *Constructive Nonsmooth Analysis*, Peter Lang, Frankfurt, Germany (1995).

[11] DUBOVITSKIJ, D. ve MILJUTIN, A.A., *Necessary Conditions for a Weak Extremum in the General Problem of Optimal Control*, Nauka (In Russian), (1971).

[12] GUSEINOV, KH.G., SUBBOTIN, A.I. ve USHAKOV, V.N., *Derivatives for multivalued mappings with applications to game theoretical problems of control*, Problems of Control and Information Theory, **14**, 155-167 (1985).

[13] GUSEINOV, KH.G. ve USHAKOV, V.N., *Strongly and weakly invariant sets with respect to a differential inclusions, their derivatives and applications to control problems*, Different. Equat., **26**, 1399-1405, (1990).

[14] MINCHENKO, L. ve VOLOSEVICH, A., *Some aspects of differentiability of multifunctions*, Preprints of the 11th IFAC International Workshop Control Applications of Optimization, 3-6 July, St. Petersburg, Russia, 1, 239-243 (2000).

[15] PAPPALARDO, M., *Tangent cones and Dini derivatives*, J. Optimiz. Theory Appl., **70**, 97-107 (1991).

[16] SACH, P.H., *Differentiability of set valued maps in Banach spaces*, Math. Nachr., **138**, 215-235 (1988).

[17] URSESCU, C., *Tangent set's calculus and necessary conditions for extremality*, SIAM J. on Contr. Optimiz., **20**, 563-574 (1982).

[18] WANG, Y., A, *Characterization of paratingent cone and P-subderivative with applications in nonsmooth analysis*, Acta Math. Sin. New Ser., **7**, 181-192 (1991).

[19] WARD, D., *The quantification tangent cones*, Can. J. Math., **40**, 3, 666-694 (1988).

[20] CLARKE, F.H., LEDYAEV, YU., STERN, R.J. ve WOLENSKI, P.R., *Nonsmooth Analysis and Control Theory,* Springer-Verlag, New York, USA (1998).

[21] CLARKE, F.H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley Intersciences, New York, USA (1983).

[22] LUC, D.T., *A strong mean value theorem and applications*, Nonlinear Anal. Theory, Math. Appl., **26**, 5, 915-925 (1996).

[23] BANKS, H.T. ve JACOBS, M.Q., *A differential calculus for multifunctions*, J. MAth. Anal. Appl., **29**, 246-272 (1970).

[24] CARISTI, J., *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions*, Trans. AMS, **215**, 241-251 (1976).

[25] CELLINA, A., COLOMBO, G. ve FONDA, A., *Approximate selections and fixed points for upper semi-continuous maps with decomposable values*, Proc. AMS, **98**, 663-666 (1986).

[26] DOWNING, D. ve KIRK, W., *A generalization of Caristi's theorem with applications to nonlinear mapping theory*, Pasific J. Math., **69**, 339-346 (1977).

[27] HIMMELBERG, C., *Fixed points of compact multifunctions*, J. Math. Anal. Appl., 205-207 (1972).

[28] KAKUTANI, S., *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J., **8**, 457-459 (1941).

[29] NADLER, S.B., *Multivalued contraction mappings*, Pasific J. Math., **30**, 475-488 (1969).

[30] ÖZER, O. ve TÜRKOĞLU, D., *Some fixed point theorems for multivalued mappings*, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi Dergisi, **4**, 83-96 (1998).

[31] SOLTANOV, K. N., *On equations with continuous mappings in Banach spaces*, Funct. Anal. Appl., **33,** 1, 76–79 (1999).

[32] AUMANN, R.J., *Integrals of set-valued maps*, J. Math. Anal. Appl., **12**, 1-12 (1965).

[33] NIKOLSKII, M.S., *On the alterne Integral of Pontriagin*, Math. USSR Sbornik, **44**, 125-132 (1983).

[34] OLECH, C., *Lexicographical order, range of integral and bang-bang principle*, Mathematical Theory of Control, Academic Press, New York, 35-45 (1967).

[35] OLECH, C., *Existence Theory in Optimal Control, In Control Theory and Topics in Functional Analysis*, International Atom. Energy. Agency, 291-328 (1976).

[36] OLECH, C., *Lectures on the integration of set-valued functions,* Preprint SISSA (1987).

[37] PONTRIAGIN, L.S., *Linear differential games of pursuit*, Mat. Sb., **112**, 307-380 (1980).

[38] EKELAND, I. ve VALADIER, M., *Representation of set-valued mappings*, J. Math. Anal. Appl., **35**, 621-629 (1971).

[39] ORNELAS, A., *Parametrization of Caratheodory multifunctions*, SISSA Report #51/88/M, Trieste, Italy (1988).

[40] ORNELAS, A., *Parametrization of Caratheodory multifunctions*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, **83**, 33-44 (1990).

[41] CASTAIN, CH. ve VALADIER, M., *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math.#580 (1977).

[42] CELLINA, A., *A theorem on the approximation of set-valued mappings,* Rend. Ac, Na. Lincei, **47**, 429-433 (1969).

[43] CELLINA, A., *Approximation of set-valued functions and fixed point theorems*, Annali Mat. Pura. Appl., **82**, 17-24 (1969).

[44] FILIPPOV, A.F., *On certain questions in the theory of optimal control*, SIAM J. Control , **1**, 1, 76-84 (1962).

[45] GRUNBAUM, B., *Convex Polytopes,* J. Wiley-Intersciences, (1967).

[46] LEESE, S.J., *Measurable selections in normed spaces*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **19**, 147-150 (1974).

[47] MICHAEL, E., *Continuous selections I*, Annals of Math., **63**, 361-381 (1956).

[48] MICHAEL, E., *Continuous selections II*, Annals of Math., **64**, 562-580 (1956).

[49] MICHAEL, E., *Continuous selections III,* Annals of Math., **65**, 375-390 (1957).

[50] MINTY, G., *A theorem on monotone sets in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl., **11**, 434-439 (1967).

[51] ROCKAFELLAR, R.T. ve WETS, R., *Variational systems, An Introduction, In Multifunctions and Integrands: Stochastic Analysis, Approximation and Optimization* ed. Salinetti G., Springer-Verlag, Lecture Notesin Math.#1091, 1-54 (1983).

[52] ROCKAFELLAR, R.T., *Monotone Process of Convex and Concave Type*, Mem. of AMS#77 (1967).

[53] ROCKAFELLAR, R.T., *Convex Analysis,* Princeton University Press, USA (1970).

[54] TRIF, T., *Holder continuity of generalized convex set-valued mappings,* Journal of Math. Anal. nad Appl., **255**, 44-57 (2001).

[55] MARCHAUD, A., *Sur les champs des demi-cones et les equations differentielles du premier ordre*, Bull. Soc. Math. France, **62**, 1, 1-38 (1934).

[56] ZAREMBA, S.C., *Sur les equations au paratingent*, Bull. Sci. Math., **60**, 139-160 (1936).

[57] KRASOVSKII, N.N. ve SUBBOTIN, A.I., *Positional Differential Games*, Moscow, Nauka, USSR (1974).

[58] FILIPPOV, A.F., *Classical solutions of differential equations with multivalued right hand side*, SIAM J. Control, **5**, 609-621 (1967).

[59] FRANKOWSKA, H. ve OLECH, C., *Boundary solutions to differential inclusions*, J. Diff. Eqs., **44**, 156-165 (1982).

[60] HALKIN, H., *Topological aspects of optimal control*, Contr. Diff. Eqns., **3**, 377-385 (1964).

[61] HERMES, H., *On the closure and convexity of attainable sets in finite and infinite dimensions*, SIAM J. Control, **5**, 3, 409-417 (1967).

[62] WAZEWSKI, T., *Sur une generalization de la notion des solution d'une equation au contingent*, Bull. acad. Pol. Sci., **10**, 11-15 (1962).

[63] WAZEWSKI, T., *On an optimal control problem*, Proc. Conference Differential Equations and Their Applications, 229-242, Prague(1962), 1963.

[64] CLARKE, F.H., *Generalized gradients and applications*, Trans. Amer. Math. Soc., **205**, 247-262 (1975).

[65] CLARKE, F.H., *The maximum principle under minimal hypothesis*, SIAM J. Control Optim., **14**, 1078-1091 (1976).

[66] PANASYUK, A.I. ve PANASYUK, V.I., *On one equation generated by differential inclusion*, Math. Notes, **27**, 3, .429-437 (1980).

[67] WOLENSKI, P., *The exponential formula for the reachable set of Lipschitz differential inclusion*, SIAM J. Contr. Optimiz., **28**, 5, 1148-1161 (1990).

[68] DEIMLING, K., Multivalued Differential Equations, D.Gruyter, Berlin (1992).

[69] GUSEINOV, KH.G. ve USHAKOV, V.N., *Strongly and weakly invariant sets with respect to a differential inclusions*, Soviet Math. Dokl., **38**, 3, 603-605 (1989).

[70] HADDAD, G., *Monotone trajectories of differential inclusions and functional differential inclusion with memory*, Israel J. of Math., **39**, 1, 83-100 (1981).

[71] KANNAI, Z. ve TALLOS, P., *Viable trajectories of nonconvex differential inclusions*, Nonl. Anal. Theory Math. and Appl., **18**, 3, 295-306 (1992).

[72] KURZHANSKI, A.B. ve FILIPPOVA, T.F., *Dynamics of the set of viable trajectories to a differential inclusion: the evolution equation*, Problems Contr. Inform. Theory, **17**, 137-144 (1988).

[73] LEDYAYEV, YU.S., *Criteria for viability of trajectories of non autonomous differential inclusion and their applications*, Preprint CMR - 1583, Centre de Recherches Math., Univ. de Montreal, 1-22 (1988).

[74] PAPAGEORGIOU, N.S., *Viable and periodic solutions for differential inclusions in Banach spaces*, Kobe J. Math., **5**, 1, 29-42 (1988).

[75] PAPAGEORGIOU, N.S., *Viability theorems for nonautonomous differential inclusions with nonconvex domain,* Math. Jap., **40**, 1, 67-77 (1994).

[76] TALLOS, P., *Viability problems for nonautonomous differential inclusions*, SIAM J. on Contr. Optimiz., **29**, 2, 253-263 (1991).

[77] CRANDALL, M.G. ve LIONS, P.L., *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **277**, 1-22 (1983).

[78] FLEMING, W.H. ve SOUGANIDIS, P.E., *PDE-viscosity solution approach to some problems of large deviations*, Ann. Scuol. norm. super. Pisa, Cl. sci., **13**, 2, 171-192 (1986).

[79] FRANKOWSKA, H., *Optimal trajectories associated to a solution of contingent Hamilton-Jacobi equation,* Proc. 26th IEEE Conf. Decis. and Contr., Los Angeles, Dec. 9-11, 1987, New York, 1, 727-732 (1987).

[80] ISHII, H., *Uniqueness of unbounded viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations*, Indiana Univ. Math. J., **33**, 5, 721-748 (1984).

[81] SUBBOTIN, A.I., *Generalization of the main equation of differential game theory*, J. Optim. Theory and Appl., **43**, 1, 103-133 (1984).

[82] SUBBOTIN, A.I. ve TARASYEV, A.M., *Stability properties of the value function of a differential game and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Probl. Contr. and Inform. Theory, **15**, 6, 451-463 (1986).

[83] SUBBOTIN, A.I., *Discontinuous solutions of a Dirichlet-type boundary value problem for the first-order partial differential equation,* J. Numer. Anal. Math. Modelling, **8**, 2, 145-164 (1993).

[84] SUBBOTIN, A.I., *Generalized solutions of first order partial differential equations. The dynamical optimization perspective*, Birkhäuser, (1995).

[85] SUBBOTINA, N.N., SUBBOTIN, A.I. ve TRET'JAKOV, V.E., *Stochastic and deterministic control, Differential Inequalities*, Ibid. **14**, 6, 405-419 (1985).

[86] VINTER, R.B., *Is the costate variable the state derivative of the value function?*, Proc. 25th IEEE Conf. Decis. and Contr., Athens, Dec.10-12, 1986, New York, (1986).

[87] LIONS, P.L. ve SOUGANIDIS, P.E., *Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Belmann's and Isaacs equations*, SIAM J. Control and Optim., **23**, 566-583 (1985).

[88] SOUGANIDIS, P.E., *Max-min representations and product formulas for the viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations with applications to differential games*, Nonlinear Anal. theory, Math. and Appl., **9**, 3, 217-257 (1985).

[89] SUBBOTIN, A.I., *Minimax and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Moscow, Nauka, USSR (1991).

[90] ACHHAB, M.E. ve WERTZ, V., *On reachable sets for a class of nonlinear systems with constraints*, J. of Math. Anal. and Appl., **229,** 105-118 (1999).

[91] CHERNOUSKO, F.L., *State Estimation for Dynamic Systems*, SRC Press, Boca Raton, FL, USA (1993).

[92] COLONIUS, F. ve KLIENMANN, W., *The Dynamics of Control*, Birkhäuser, (2000).

[93] KURZHANSKII, A.B. ve VALYI, I., *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*, Birkhäuser, Boston, USA (1996).

[94] KURZHANSKII, A.B. ve VARAIYA, P., *Reachability under disturbances.* In: 38th Annual Allerton Conference on Communications, Control and Computing, University of Ilinois, **224**, 403-411 (2000).

[95] NIKOL'SKII, M.S., *A method for approximating reachable sets for a differential inclusion*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **28**, 1252-1254 (1988).

[96] NIKOL'SKII, M.S., *The approximation of reachable sets for a controllable process*, Mat. Zametki, **41**, 71-76 (1987).

[97] SZOLNOKI, D., *Algorithms for reachablity problems. Dissertation,* Institut für Mathematik, Universität Augsburg, Augsburg, (2001).

[98] USHAKOV, V.N. ve KHRIPUNOV, A.P., *The approximate construction of integral cones of differential inclusions*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **34**, 965-977 (1994).

[99] BOUDAOUD, M. ve RZEZUCHOWSKI, T., *On differential inclusions with prescribed solutions*, Cas.Pestov. Math., **114**, 3., 289-293 (1989).

[100] GUSEINOV, KH.G. ve USHAKOV, V.N., *On construction of differential inclusion with prescribed properties*, Different. Equat., **36**, 4, 488-496 (2000).

[101] USHAKOV V.N. ve BABALIYEV, T., *On One Inverse Problem of the Differential Inclusion Theory*, Different. Equat., **34**., .4., 447-453 (1998).

[102] GUSEINOV, KH. G, OZER, O. ve DUZCE, S. A., *On the Construction of Differential inclusions with prescribed Integral funnel*, Math.& Comp. Appl., **8**, 119-127 (2003).

[103] AUBIN, J-P., L'analyse non linéaire et ses motivations économiques, Masson, Paris, France (1984).

[104] BLAGODATSKIKH, V. I. ve FILIPPOV, A. F., *Differential inclusions and optimal control*, Proc. Steklov Inst. Math., **114**, 199-256 (1986).

[105] GUSEINOV, KH.G. ve USHAKOV, V. N., *Differential properties of integral funnels and stable bridges.* J. Appl. Math. Mech., **55**, 1, 56–61 (1991).