KENDİNE BENZER FONKSİYONLAR

Derya ÇAKMAK
Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Temmuz – 2004

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Derya ÇAKMAK 'ın **Kendine Benzer Fonksiyonlar** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, **Yüksek Lisans** tezi 09.07.2004 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı - Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	Prof.Dr. Şahin KOÇAK	
Üye	Prof.Dr. Aladdin ŞAMİLOV	
Üye	Doç.Dr. Mehmet ÜREYEN	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 08.09.2004 tarih ve 29/3 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Altuğ İFTAR
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KENDİNE BENZER FONKSİYONLAR

Derya ÇAKMAK

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şahin KOÇAK
2004, 63 Sayfa

Kümeler için "kendine benzerlik" kavramı fraktal geometrinin temel bir kavramıdır. Ancak fonksiyonlar için "kendine benzerlik" kavramı üzerinde genel bir uzlaşı yoktur. Fonksiyon grafiğinin bir küme olarak kendine benzer olma koşulu, fonksiyonun kendine benzerliği için tam tatminkar görünmemektedir.

Bu çalışmada, fraktaller üzerindeki harmonik analizin kavramları yardımıyla, Sierpinski Üçgeni örneği üzerinde, fonksiyonların kendine benzerliği için yeni bir tanım öneriyor ve aralıklar için Barnsley tarafından verilmiş olan fraktal İnterpolasyon teoremini Sierpinski Üçgeni üzerindeki bir fraktal interpolasyon teoremine genelleştiriyoruz.

Anahtar Kelimeler: **Kendine Benzer Fonksiyon, Fraktal İnterpolasyon, Harmonik Fonksiyon, Büzülme Dönüşümü, Sierpinski Üçgeni**

ABSTRACT

Master of Science Thesis

SELF SIMILAR FUNCTIONS

Derya ÇAKMAK

Anadolu University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Prof. Dr. Şahin KOÇAK

2004, 63 Pages

The notion of "self-similarity" for sets is a fundamental concept of fractal geometry. But there is no agreement on the concept of "self-similarity" for functions. The condition of the self similarity of the graph of a function as a set is not a satisfactory approach for self similarity of functions.

In this study we propose a new definition for self-similarity of functions on the example of the Sierpinski Gasket using the concepts of harmonic analysis on fractals. Then we have generalized the fractal interpolation theorem on intervals given by Barnsley to a fractal interpolation theorem on the Sierpinski Gasket.

Keywords: **Self Similar Functions, Fractal Interpolation, Harmonic Function, Contraction Mapping, Sierpinski Gasket.**

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen sayın Prof.Dr. Şahin KOÇAK 'a ve çalışma süresince her türlü desteğiyle yanımda olan sayın Arş.Gör. Yunus ÖZDEMİR' e en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{H}(X)$	X in boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinin uzayı
IFS	İtere Fonksiyon Sistemi
SG	Sierpinski Üçgeni
V_m	m. aşamadaki köşe noktaları kümesi
Δ	SG üzerindeki Laplace operatörü
$\mathcal{H}^0$	SG üzerinde harmonik fonksiyonlar uzayı

1 GİRİŞ

Bu bölümde çalışma sırasında kullanılan bazı genel kavramlar ve bilgiler verilmektedir.

1.1 Büzülme Dönüşümleri ve Atraktörler

(X, d) tam bir metrik uzay olmak üzere, X in boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinin uzayı $\mathcal{H}(X)$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{H}(X) = \{A : A \subset X,\ A \neq \emptyset \text{ ve } A \text{ kompakt}\}$$

şeklinde tanımlanır. $x \in X$ ve $B \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere x noktasının B kümesine olan uzaklığı ise

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\}$$

olarak tanımlanır. B kümesi kompakt ve $d(x, y)$ sürekli bir fonksiyon olduğundan dolayı bu tanım anlamlıdır. Yani

$$\{d(x, y) : y \in B\}$$

kümesi bir en küçük elemana sahiptir. Şimdi bu tanımdan yararlanarak X in kompakt alt kümeleri arasındaki uzaklığı tanımlayalım. $A, B \in \mathcal{H}(X)$ olsun. Bu durumda A kümesinin B kümesine olan uzaklığı

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\}$$

biçiminde tanımlanır. Benzer biçimde A ve B kümelerinin kompaktlığı ve metriğin sürekliliğinden dolayı bu tanım da anlamlıdır. O halde $A, B \in \mathcal{H}(X)$ kümeleri için

$$d(A, B) = d(x_0, y_0)$$

olacak şekilde $x_0 \in A$ ve $y_0 \in B$ noktaları vardır. Fakat X üxerinde tanımlı d metriği $\mathcal{H}(X)$ uzayı üzerinde bir metrik değildir.

Bunun sebeblerinden biri ise kolayca görüleceği üzere $\forall A, B \in \mathcal{H}(X)$ için

$$d(A, B) = d(B, A)$$

eşitliğinin sağlanmamasıdır.

Şimdi X metrik uzayı üzerindeki d metriğine bağlı olarak $\mathcal{H}(X)$ uzayı üzerinde bir metrik tanımlayalım.

Tanım 1.1 *(X, d) tam bir metrik uzay ve $A, B \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere*

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$

değerine A ile B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı denir.

h fonksiyonunun $\mathcal{H}(X)$ üzerinde bir metrik olduğu kolaylıkla görülebilir.

Teorem 1.1 *(X, d) tam bir metrik uzay olsun. Bu durumda $(\mathcal{H}(X), h)$ uzayı da tam bir metrik uzaydır [1].*

(X, d) tam metrik uzay olmak üzere, X in boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinin uzayının uygun bir metrik tanımlayarak tam uzay olduğunu gördük. Çalışmamız doğrultusunda şimdiki amacımız ise bu tam metrik uzay üzerinde bir büzülme dönüşümü tanımlamak olacaktır.

Tanım 1.2 *(X, d) bir metrik uzay ve $f : X \longrightarrow X$ fonksiyonu verilsin. $\forall\, x, y \in X$ için*

$$d(f(x), f(y)) \leq s\ d(x, y)$$

olacak şekilde bir $0 \leq s < 1$, $s \in \mathbb{R}$ varsa f ye bir büzülme dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan s sayısına da f nin büzülme katsayısı denir.

Tanım 1.3 *(X, d) bir metrik uzay ve $f : X \longrightarrow X$ fonksiyonu verilsin.*

$$f(x^*) = x^*$$

eşitliğini sağlayan bir $x^* \in X$ noktası varsa, x^* noktasına f nin sabit noktası denir.

(X,d) bir metrik uzay olmak üzere $f : X \to X$ dönüşümünü düşünelim. f nin iterasyonları $f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), ..., f^{(n+1)}(x) = f \circ f^n(x) = f(f^n(x)), ...$

$$f^n : X \to X, n = 0, 1, 2, ...$$

dönüşümleridir. Bu noktada çalışmamızda sürekli olarak kullandığımız önemli bir teoremi verelim.

Teorem 1.2 (Büzülme Teoremi) *(X,d) tam bir metrik uzay ve $f : X \to X$ büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda f nin bir tek $x^* \in X$ sabit noktası vardır ve keyfi $x \in X$ için $\{f^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi f nin x^* sabit noktasına yakınsar. Yani $\forall\ x \in X$ için*

$$\lim_{n \to \infty} f^n(x) = x^*$$

dir [1].

Yani bir tam metrik uzay üzerinde tanımlı bir büzülme dönüşümünün bir sabit noktası vardır ve tektir. Ayrıca bu sabit nokta uzaydan alınan keyfi bir elemanın f altında iterasyonuyla elde edilir.

Yardımcı Teorem 1.1 *(X,d) bir metrik uzay ve $w : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda w süreklidir [1].*

(X,d) bir metrik uzay olmak üzere $w : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda bir $A \in \mathcal{H}(X)$ için

$$w(A) = \{w(x) \mid x \in A\}$$

kümesinin de Yardımcı Teorem 1.1 gereği $\mathcal{H}(X)$ in bir elemanı olacağı açıktır. O halde (X,d) metrik uzayı üzerinde verilen bir w büzülme dönüşümü yardımıyla $(\mathcal{H}(X), h)$ metrik uzayı üzerinde bir büzülme dönüşümü tanımlanabilir.

Yardımcı Teorem 1.2 *(X,d) bir metrik uzay ve $w : X \to X$ büzülme katsayısı s olan bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda $\forall\ B \in \mathcal{H}(X)$ için*

$$w : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$$
$$w(B) = \{w(x) \mid x \in B\}$$

olarak tanımlanan w dönüşümü de $(\mathcal{H}(X), h)$ uzayında büzülme katsayısı s olan bir büzülme dönüşümüdür [1].

Yardımcı Teorem 1.3 *(X, d) bir metrik uzay h Hausdorff metriği olmak üzere $\forall\ B, C, D, E \in \mathcal{H}(X)$ için*

$$h(B \cup C, D \cup E) \leq \max\{h(B, D), h(C, E)\}$$

dir [1].

Yardımcı Teorem 1.4 *(X, d) bir metrik uzay olmak üzere $\{w_n \mid n = 1, 2, ..., N\}$ dönüşümleri $(\mathcal{H}(X), h)$ uzayında büzülme katsayıları sırasıyla s_n olan büzülme dönüşümleri olsun. Bu durumda $\forall\ B \in \mathcal{H}(X)$ için*

$$\begin{aligned} &W : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X) \\ &W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \cdots \cup w_N(B) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan W dönüşümü de bir büzülme dönüşümüdür ve büzülme katsayısı

$$s = \max\{s_n \mid n = 1, 2, ..., N\}$$

dir [1].

Tanım 1.4 *(X, d) tam bir metrik uzay olmak üzere, $n = 1, 2, ..., N$ için büzülme katsayıları sırasıyla s_n olan $w_n : X \to X$ büzülme dönüşümlerinin kümesine (hiperbolik) itere fonksiyon sistemi (IFS) denir. Ayrıca, bir IFS, büzülme katsayısı*

$$s = \max\{s_n \mid n = 1, 2, ..., N\}$$

olmak üzere

$$\{X; w_n, n = 1, 2, ..., N\}$$

şeklinde gösterilir.

Büzülme teoreminin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem kolayca ispatlanabilir.

Teorem 1.3 *Büzülme katsayısı s olan $\{X; w_n, n = 1, 2, ..., N\}$ hiperbolik itere fonksiyon sistemi verilsin. Bu durumda $\forall\ B \in \mathcal{H}(X)$ için*

$$W : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$$
$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \cdots \cup w_N(B) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B)$$

olarak tanımlanan W dönüşümü de $(\mathcal{H}(X), h)$ tam metrik uzayı üzerinde büzülme katsayısı s olan bir büzülme dönüşümüdür. Yani $\forall\ B, C \in \mathcal{H}(X)$ için

$$h(W(B), W(C)) \leq sh(B, C)$$

olacak şekilde $0 \leq s < 1, s \in \mathbb{R}$ vardır. Ayrıca

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(A)$$

olacak şekilde bir tek $A \in \mathcal{H}(X)$ vardır ve $\forall B \in \mathcal{H}(X)$ için

$$A = \lim_{n \to \infty} W^n(B)$$

dir.

Tanım 1.5 *Teorem 1.3 de ifade edilen $A \in \mathcal{H}(X)$ sabit noktasına IFS nin atraktörü denir. Ayrıca bir küme bir IFS nin atraktörü ise kendine benzer küme adını alır.*

İncelemelerimiz sırasında kolaylık açısından yukarıda bahsi geçen IFS nin atraktörünü

$$\mathcal{A}\{w_1, w_2, ..., w_N\}$$

olarak göstereceğiz. Bu durumda

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(A)$$

ise

$$\mathcal{A}\{w_1, w_2, ..., w_N\} = A$$

dir. Ve keyfi bir $B \in \mathcal{H}(X)$ için

$$A = \lim_{n \to \infty} W^n(B)$$

dir.

1.2 Fraktal İnterpolasyon Fonksiyonları

Tanım 1.6 $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ *olmak üzere*

$$\{(x_i, F_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 0, 1, 2, ..., n\}$$

kümesine bir veri kümesi denir. Bu noktalardan geçen

$$f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}, \text{ sürekli ve } f(x_i) = F_i$$

fonksiyonuna bu veri kümesine karşılık gelen bir interpolasyon fonksiyonu ve $(x_i, F_i) \in \mathbb{R}^2$ *noktalarına da interpolasyon noktaları denir.*

Bu durumda f fonksiyonuna bu veri kümesini interpole eder denir. Açıktır ki bir veri kümesi verildiğinde ona karşılık gelen birçok interpolasyon fonksiyonu vardır. Fakat parçalı lineer tek bir interpolasyon fonksiyon olacağı da açıktır. Bu durumda bu tek türlü belirli olan fonksiyona da parçalı interpolasyon fonksiyon denir. Açıktır ki bu fonksiyon $x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, ..., n$ için

$$f(x) = F_{i-1} + \frac{F_i - F_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})$$

olarak tanımlıdır. Fraktal interpolasyon fonksiyonları ise grafiği özel bir itere fonksiyon sisteminin atraktörü olarak belirlenir. Şimdi bu fonksiyonların tanımlanışını adım adım görelim.

$$\{(x_i, F_i) \mid i = 0, 1, 2, ..., n\}$$

veri kümesi verilsin. $\mathbb{R}^2$ de atraktörü (x_i, F_i) noktalarından geçen sürekli bir f fonksiyonunun grafiği olan bir itere fonksiyon sistemi aranmaktadır. Fakat genel durum hakkında söz sahibi olmak zor olacağından, bu düşüncemizi afin dönüşümlere kısıtlayalım. O halde

$$w_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$w_i(x, y) = (a_i x + e_i, c_i x + d_i y + f_i)$$

olmak üzere

$$\{\mathbb{R}^2; w_i, i = 1, 2, ..., n\}$$

itere fonksiyon sistemini düşünelim. Amacımız bu itere fonksiyon sisteminin atraktörünün bu noktalardan geçen sürekli bir fonksiyonun grafiği olmasıdır.

$$w_i(x_0, F_0) = (x_{i-1}, F_{i-1})$$

$$w_i(x_n, F_n) = (x_i, F_i)$$

koşulları ile bir $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ kümesi için $w_0(A), w_1(A), ..., w_n(A)$ kümelerinin uç uca eklenmesi sağlanmaktadır. Bu durumda

$$\begin{aligned} (a_i x_0 + e_i, c_i x_0 + d_i F_0 + f_i) &= (x_{i-1}, F_{i-1}) \\ (a_i x_n + e_i, c_i x_n + d_i F_n + f_i) &= (x_i, F_i) \end{aligned}$$

olacaktır. Buradan

$$\begin{aligned} a_i x_0 + e_i &= x_{i-1} \\ a_i x_n + e_i &= x_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_i x_0 + d_i F_0 + f_i &= F_{i-1} \\ c_i x_n + d_i F_n + f_i &= F_i \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu sistemde tek parametreye bağlı olarak $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ belirlenir. Parametre olarak d_i alınırsa

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{x_i - x_{i-1}}{x_n - x_0} \\ e_i &= x_i - a_i x_n = \frac{x_n x_{i-1} - x_0 x_i}{x_n - x_0} \\ c_i &= \frac{F_i - F_{i-1}}{x_n - x_0} - d_i \frac{F_n - F_0}{x_n - x_0} \\ f_i &= F_i - c_i x_n - d_i F_n \\ &= \frac{x_n F_{i-1} - x_0 F_i}{x_n - x_0} - d_i \frac{x_n F_0 - x_0 F_n}{x_n - x_0} \end{aligned}$$

elde edilir. Parametre olarak d_i nin seçilmesinin nedeni; w_i dönüşümlerinin $y-$eksenine paralel doğru parçasını yine $y-$eksenine paralel bir doğru parçasına resmetmesidir. Yani L, $y-$eksenine paralel bir doğru parçası iken $w_i(L)$ de y-eksenine paraleldir. Ayrıca $w_i(L)$ nin uzunluğunun L doğru parçasının uzunluğuna oranı da d_i dir. Yani d_i, x sabit tutulduğunda $y-$ekseni boyunca değişim oranını vermektedir. d_i ye düşey ölçüm çarpanı denilir. O halde d_i yi parametre seçerek her bir dönüşümün düşey ölçümünü açık olarak belirtmiş olacağız. Amacımız bu dönüşümleri $\mathbb{R}^2$ nin keyfi bir altkümesine uygulayıp itere

ettirerek sürekli bir fonksiyon grafiğini elde etmekti. O halde büzülme teoreminin koşulları gereği, w_i dönüşümlerinin büzülme dönüşümü olması gerekmektedir. Şimdi bununla ilgili yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 1.5 *$n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, olmak üzere*

$$\{(x_i, F_i) \mid i = 0, 1, ..., n\}$$

veri kümesine ilişkin $0 \leq d_i < 1$ ve $i = 1, ..., n$ için

$$\{\mathbb{R}^2; w_i \ , i = 1, ..., n\}$$

itere fonksiyon sistemi verilsin. $0 < \theta < \min\{\frac{1-|a_i|}{1+|c_i|} \mid i = 1, ..., n\}$ olmak üzere

$$d_\theta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$d_\theta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + \theta\,|y_1 - y_2|$$

biçiminde tanımlanan d_θ, $\mathbb{R}^2$deki Öklid metriğine denk bir metriktir ve w_i dönüşümleri bu metriğe göre büzülme dönüşümleridir [1].

Teorem 1.4 (FRAKTAL İNTERPOLASYON TEOREMİ) *$n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere*

$$\{(x_i, F_i) \mid i = 0, 1, 2, ..., n\}$$

veri kümesine ilişkin

$$\{\mathbb{R}^2; w_i, i = 1, 2, ..., n\}$$

itere fonksiyon sistemi verilsin. Ayrıca $i = 1, 2, ..., n$ için

$$0 \leq d_i < 1$$

ve G, IFS nin atraktörü olsun. Bu durumda G

$$\{(x_i, F_i) \mid i = 0, 1, 2, ..., n\}$$

veri kümesini interpole eden bir $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ *sürekli fonksiyonunun grafiğidir. Yani* $f(x_i) = F_i$ *olmak üzere*

$$G = \{(x, f(x)) \mid x_0 \leq x \leq x_n\}$$

dir [1].

Tanım 1.7 *Yukarıdaki teoremde ifade edilen IFS nin atraktörü olan* f *fonk siyonuna*

$$\{(x_i, F_i) \mid i = 0, 1, 2, ..., n\}$$

veri kümesine karşılık gelen fraktal interpolasyon fonksiyonu denir.

1.3 Sierpinski Üçgeni Üzerinde Harmonik Fonksiyonlar

Tanım 1.8 $(\mathbb{R}^2, d_{euc})$ *tam metrik uzayında* p_1, p_2, p_3 *noktaları kenar uzunluğu 1 birim olan bir eşkenar üçgenin köşe noktaları olsun.* $u_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, i = 1, 2, 3$ $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ *ve* $p_i = (p_i^{(1)}, p_i^{(2)})$ *olmak üzere*

$$u_i(x) = (\frac{x^{(1)} + p_i^{(1)}}{2}, \frac{x^{(2)} + p_i^{(2)}}{2})$$

şeklinde tanımlanan büzülme dönüşümleri olmak üzere

$$\{\mathbb{R}^2; u_1, u_2, u_3\}$$

itere fonksiyon sisteminin atraktörüne Sierpinski üçgeni (SG)denir (Şekil 1.1).

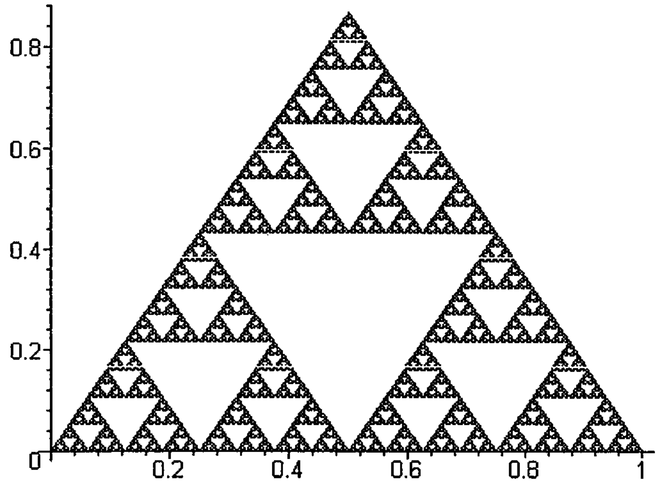
Bu durumda

$$\mathcal{A}\{u_1, u_2, u_3\} = SG$$

dir. Yani

$$u_1(SG) \cup u_2(SG) \cup u_3(SG) = SG$$

dir.



Şekil 1.1: Sierpinski Üçgeni (SG)

İlk adımdaki köşe noktaları kümesini $V_0 = \{p_1, p_2, p_3\}$ ile göstereceğiz. $m \geq 1$ için

$$U : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{H}(\mathbb{R}^2), U(A) = u_1(A) \cup u_2(A) \cup u_3(A)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} V_m &= \bigcup_{i=1}^{3} u_i(V_{m-1}) = u_1(V_{m-1}) \cup u_2(V_{m-1}) \cup u_3(V_{m-1}) \\ &= U(V_{m-1}) = U^m(V_0) \end{aligned}$$

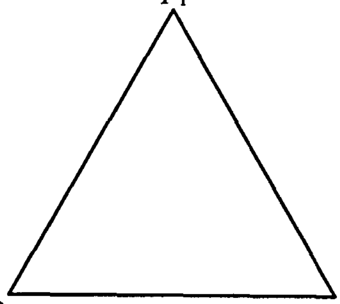
biçiminde tanımlanan kümeye m. adımdaki köşe noktaları kümesi denir. Tanımlanışından dolayı

$$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m$$

olacağı açıktır.Ayrıca, G_0 (Şekil 1.2) köşe noktaları 1 birim olan eşkenar üçgen olmak üzere m. aşamadaki grafiği

$$G_m = \bigcup_{i=1}^{3} u_i(G_{m-1}) = u_1(G_{m-1}) \cup u_2(G_{m-1}) \cup u_3(G_{m-1})$$

olarak gösterilir [4].



Şekil 1.2: G_0

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \{(p_1,p_2),(p_1,p_3),(p_2,p_3)\} \\
B_1 &= \{(u_i(p_k),u_i(p_l)) \mid 1 \le k < l \le 3, 1 \le i \le 3\} \\
&\vdots \\
B_m &= \{(u_{i1} \circ \cdots u_{im}(p_k), u_{i1} \circ \cdots u_{im}(p_l)) \mid 1 \le k < l \le 3, 1 \le i_1,...,i_m \le 3\}
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanan B_m ye de m. adımdaki kenarların kümesi diyeceğiz.

$$V_* = \bigcup_{m \ge 0} V_m$$

olsun. V_* ın kapanışı bize yukarıda tanımlanan Sierpinski Üçgenini verecektir. Yani

$$\overline{V_*} = SG$$

dir. Şimdi çalışmamızda kullanılan bazı notasyonları verelim.

$$\{1,2,3\}^m = \{w_1 w_2 ... w_m \mid 1 \le w_1, w_2, ..., w_m \le 3\}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda $w \in \{1,2,3\}^m$ için

$$
\begin{aligned}
u_w &= u_{w_1} \circ u_{w_2} \circ \cdots \circ u_{w_m} \\
u_w(SG) &= (u_{w_1} \circ u_{w_2} \circ \cdots \circ u_{w_m})(SG)
\end{aligned}
$$

dir. Ayrıca $i = 1,2,3$ ve $w \in \{1,2,3\}^m$ için

$$p_i(w) = u_w(p_i)$$

dir. Bu notasyonlarla

$$V_m = \bigcup_{w \in \{1,2,3\}^m} u_w(V_0), \quad u_w(V_0) = \{p_1(w), p_2(w), p_3(w)\}$$

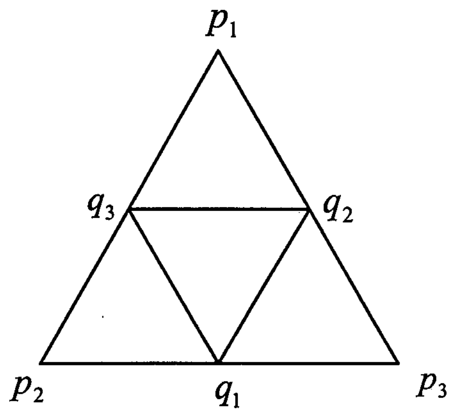
olarak yazılabilir.

Şimdi Sierpinski üçgeni üzerinde harmonik fonksiyonu tanımlamak için gerekli bazı kavramları tanımlayalım.

Şekil 1.3 de görüldüğü gibi q_1 noktası için V_1 köşe noktaları kümesinde q_1 e B_1 de bağlı olan 4 tane nokta vardır. Bu noktalar şekilden de görüleceği üzere p_2, p_3, q_2 ve q_3 dir. Benzer şekilde q_2 noktası için p_1, p_3, q_1, q_3 ve q_3 noktası için de p_1, p_2, q_1, q_2 olmak üzere 4 nokta vardır. Fakat p_1, p_2 ve p_3 noktaları için bu özellikteki noktalar 2 tanedir. Örneğin p_1 noktası için; q_2 ve q_3 dir. Benzer şekilde bir $p \in V_m$ noktası içinde V_m köşe noktaları kümesinde p ye B_m de bağlı olan noktalar vardır. Bu noktalar $p \in V_m \setminus V_0$ ise 4, $p \in V_0$ için 2 tanedir. Bir $p \in V_m$ için bu şekildeki noktaların kümesi $V_{m,p}$ ile gösterilir ve

$$V_{m,p} = \{q \in V_m \mid (p,q) \text{ veya } (q,p) \in B_m\}$$

olarak tanımlanır.



Şekil 1.3: G_1

Tanım 1.9 $l(V_m) = \{f \mid f : V_m \to \mathbb{R}\}$ *olmak üzere*

$$H_m : l(V_m) \to l(V_m)$$

$f \in l(V_m)$ için

$$H_m f(p) = \sum_{q \in V_{m,p}} (f(q) - f(p))$$

olarak tanımlanan H_m operatörüne (V_m, B_m) grafiği üzerindeki ayrık laplasiyen denir.

SG üzerinde tanımlı gerçel değerli sürekli fonksiyonların kümesi $C(SG)$ ile gösterilir ve

$$C(SG) = \{f \mid f : SG \to \mathbb{R},\ f \text{ sürekli}\}$$

olarak tanımlanır. Şimdi Sierpinski üçgeni üzerindeki harmonik fonksiyonu tanımlayacağız.

Tanım 1.10 *$f \in C(SG)$ olmak üzere eğer $\forall m \geq 1$ ve $\forall p \in V_m \backslash V_0$ için*

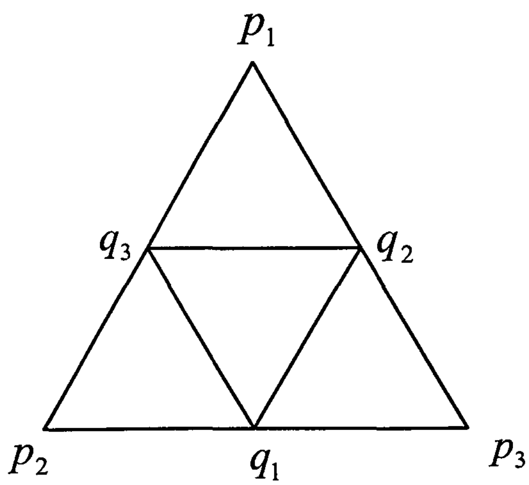
$$H_m f(p) = 0$$

ise f ye harmonik fonksiyon denir.

p_1, p_2, p_3 köşe noktalarında sırasıyla α, β, γ değerleri verilsin. Acaba bu değerleri V_1 köşe noktaları kümesine

$$H_1 f(p) = 0$$

olacak şekilde nasıl genişletebiliriz.



Şekil 1.4: G_1

$$
\begin{aligned}
(H_1 f)(q_1) &= f(p_2) + f(p_3) + f(q_2) + f(q_3) - 4f(q_1) = 0 \\
(H_1 f)(q_2) &= f(p_1) + f(p_3) + f(q_1) + f(q_3) - 4f(q_2) = 0 \\
(H_1 f)(q_3) &= f(p_1) + f(p_2) + f(q_1) + f(q_2) - 4f(q_3) = 0
\end{aligned}
$$

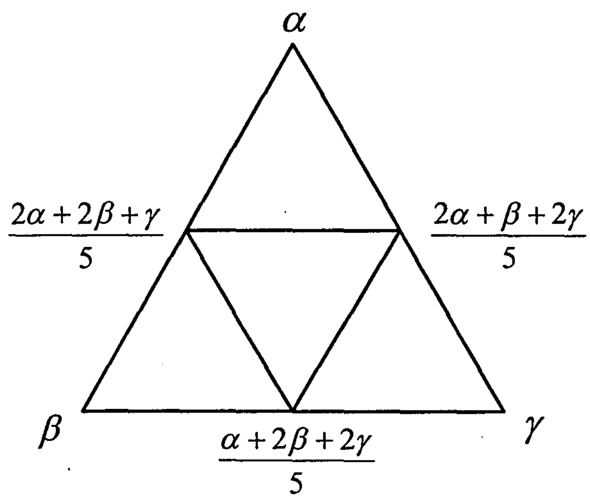
olması istenilmektedir. O halde bu sistem α, β ve γ ya bağlı olarak çözülürse

$$
\begin{aligned}
f(q_1) &= \frac{\alpha + 2\beta + 2\gamma}{5} \\
f(q_2) &= \frac{2\alpha + \beta + 2\gamma}{5} \\
f(q_3) &= \frac{2\alpha + 2\beta + \gamma}{5}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{pmatrix} f(q_1) \\ f(q_2) \\ f(q_3) \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(p_1) \\ f(p_2) \\ f(p_3) \end{pmatrix}
$$

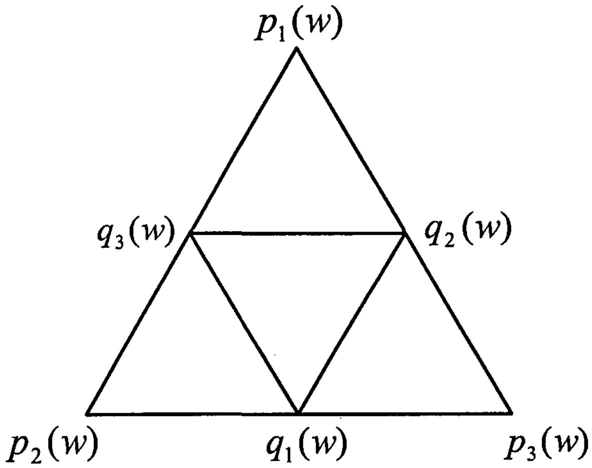
olarak yazılabilir.



Şekil 1.5: V_1 de harmonik fonksiyon

Bu durumda f nin $V_1 \backslash V_0$ köşe noktalarındaki değerleri V_0 köşe noktalarındaki değerler yardımıyla bulunmaktadır. Aslında aralarındaki bu ilişki bir kurala bağlıdır. Dikkat edilecek olunursa bulunan bu değerler o noktanın V_0

da komşu noktalardaki değerlerin iki katı ile karşı noktadaki değerin tek katı toplamının beşe bölümüdür. Aslında bir sonraki aşamada da aynı algoritma geçerlidir. Çünkü bir sonraki aşamada herbir küçük üçgen için aynı mantık geçerli olacaktır.



Şekil 1.6: $w \in \{1,2,3\}^m$ için $u_w(G_0)$

Dolayısıyla herhangi bir $w \in \{1,2,3\}^m$ için $p_1(w), p_2(w), p_3(w)$ noktalarındaki değerler biliniyorken

$$H_{m+1}f(q_i(w)) = 0$$

denklemi çözülerek

$$\begin{pmatrix} f(q_1(w)) \\ f(q_2(w) \\ f(q_3(w)) \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(p_1(w)) \\ f(p_2(w)) \\ f(p_3(w)) \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir [2].

Yani eğer fonksiyon harmonik ise ve sınırdaki değerleri biliniyor ise tek türlü belirlidir ve bu algoritmayla hesaplanabilir. Şimdi bununla ilgili bir teorem verelim.

Teorem 1.5 *Keyfi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ değerleri verildiği takdirde $f(p_1) = \alpha, f(p_2) = \beta, f(p_3) = \gamma$ olacak şekilde bir tek harmonik fonksiyon vardır [2].*

Tanım 1.11 *$f \in C(SG)$ ve $p \in V_m \backslash V_0$ için*

$$(\Delta_m f)(p) = \frac{3}{2} 5^m (H_m f)(p)$$

olmak üzere

$$\max_{m \to \infty} \{ |(\Delta_m f)(p) - \varphi(p)| \ \ p \in V_m \backslash V_0 \} = 0$$

olacak şekilde bir $\varphi \in C(SG)$ varsa φ ye SG üzerinde f nin Laplasiyeni denir ve

$$\Delta f = \varphi$$

olarak gösterilir. Burada Δ ya Laplace operatörü denir.

Bu durumda bir f harmonik fonksiyonu için açıktır ki

$$\Delta f = 0$$

dır.

2 KENDİNE BENZER FONKSİYONLAR

2.1 Kendine Benzer Fonksiyon Kavramına Yaklaşımlar

(X, d) tam bir metrik uzay ve $u_i : X \to X, i = 1, 2, ..., n$ büzülme dönüşümleri olmak üzere $\mathcal{A}(u_1, u_2, ..., u_n) = A$ olsun. A üzerinde tanımlı gerçel değerli sürekli bir fonksiyonun kendine benzer olması ne demektir?

Genel durum hakkında fikir sahibi olmak için, öncelikle kapalı bir aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyonun kendine benzer olmasının ne demek olduğunu tartışalım. Bu durumda akla gelecek en makul yaklaşım, kümelerin kendine benzerliği kavramından yola çıkarak, grafiği kendine benzer bir küme olan fonksiyona kendine benzerdir demek olacaktır. Bu ise $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunun grafiğinin bir hiperbolik itere fonksiyon sisteminin atraktörü olması demektir. Şu halde, tüm itere fonksiyon sistemlerine hakim olmak zor olacağından bu itere fonksiyon sistemlerinin özel bir sınıfı olan

$$w_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, w_i(x, y) = (a_i x + e_i, c_i x + d_i y + f_i), i = 1, ..., n \tag{1}$$

afin lineer dönüşümlerini ele alalım. Bu durumda ilk olarak amacımız,

$$\{\mathbb{R}^2; w_i, i = 1, ..., n\}$$

itere fonksiyon sisteminin atraktörü A nın, hangi koşullar altında sürekli bir f fonksiyonun grafiği olduğunu görmektir. Yani, bir f fonksiyonunun grafiği G_f olmak üzere

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} w_i(A) = G_f \tag{2}$$

eşitliğinin var olması için w_i dönüşümleri hangi koşulları sağlamalıdır?

Öncelikle w_i dönüşümleri büzülme dönüşümü olmalı ve yukarıdaki eşitliği sağlamalıdır. İlk etapta büzülme olduğunu kabul edip, bu eşitliği sağlayan w_i dönüşümlerinin hangi özellikleri sağlaması gerektiğini araştıralım.

w_i dönüşümünün birinci bileşenini ele alalım. Birinci bileşen x e bağlıdır dolayısıyla sadece x ekseni üzerinde bir dönüşümdür. Ayrıca bu dönüşüm kapalı aralığı kapalı bir aralığa resmeder. İlk olarak akla gelen (2) eşitliğinin sağlanması gerektiğinden bu dönüşümlerin büzülme olması, yani aralığı büzmesi gerektiğidir. Ancak bu durumda sadece büzülme olmasını istemek yeterli olmayabilir. Büzülme olabilir fakat büzüp aralığın dışına öteleyebilir veya aralığın içinde kalacak şekilde büzse bile aralığı doldurmayabilir. Örneğin $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $y = k$ sabit fonksiyonu da bir büzülmedir ancak böyle bir durumda (2) eşitliği sağlanmaz. O halde söz konusu bu durumlara engel olmak için bu dönüşümün $[a, b]$ aralığını, içinde kalacak şekilde bir alt aralığa resmetmesi ve tamamen aralığı doldurması için de görüntü kümelerinin tek noktada kesişmeleri istenebilir. Bu durumda $[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

olmak üzere $a_i x + e_i$ dönüşümü, $[a, b]$ aralığını $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığına resmetsin, yani

$$\begin{aligned} a_i a + e_i &= x_{i-1} \\ a_i b + e_i &= x_i \end{aligned}$$

olsun. Bu eşitlikler çözülerek,

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{x_i - x_{i-1}}{b - a} \\ e_i &= x_i - a_i b = \frac{b x_{i-1} - a x_i}{b - a} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi w_i dönüşümünün ikinci bileşeninin katsayıları için yeterli koşullar arayalım. $(x, f(x)) \in G_f$ iken (2) eşitliğinden $w_i(x, f(x)) \in G_f$ olmalıdır. Bu durumda

$$w_i(x, f(x)) = (a_i x + e_i, c_i x + d_i f(x) + f_i)$$

olmak üzere

$$(a_i x + e_i, c_i x + d_i f(x) + f_i) = (a_i x + e_i,\ f(a_i x + e_i))$$

olmalıdır. Yani

$$c_i x + d_i f(x) + f_i = f(a_i x + e_i)$$

olmalıdır. $x = a$ *için*

$$c_i a + d_i f(a) + f_i = f(x_{i-1})$$

$x = b$ için

$$c_i b + d_i f(b) + f_i = f(x_i)$$

elde edilir. Bu 3 bilinmeyenli 2 denklem d_i ye bağlı olarak çözülürse,

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{b-a} - d_i \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \\ f_i &= f(x_i) - c_i b - d_i f(b) \\ &= \frac{bf(x_{i-1}) - af(x_i)}{b-a} - d_i \frac{bf(a) - af(b)}{b-a} \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca $n \geq 2$ ve $|d_i| < 1$ ise yardımcı teorem (1.5) gereğince w_i ler d_θ metriğine göre büzülmedir ve yukarıda elde edilen katsayılardan sadece c_i ve f_i, d_i ye bağlı olarak değiştiği için $|d_i| < 1$ olduğu takdirde

$$\{\mathbb{R}^2; w_i, i = 1, ..., n\}$$

IFS hiperboliktir, yani w_i dönüşümleri büzülmedir ve atraktörü bir fonksiyonun grafiği olabilir.

Burada $i = 1, 2, ..., n$ için $u_i(x) = a_i x + e_i$ olmak üzere

$$\mathcal{A}(u_1, u_2, ..., u_n) = [a, b]$$

olduğuna dikkat edelim.. Ayrıca $v_i(x, y) = c_i x + d_i y + f_i$ olmak üzere (1) eşitliği

$$w_i(x, y) = (u_i(x), v_i(x, y))$$

şeklinde yazılabilir. Bu incelemelerden sonra u_i ve v_i yukarıda tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere kendine benzer fonksiyon tanımını aşağıdaki gibi yapabiliriz;

"$f : [a,b] \to R$ sürekli fonksiyonu, $A(u_1, u_2, ..., u_n) = [a,b]$ olmak üzere $x' \in u_i([a,b])$ için

$$f(x') = v_i(u_i^{-1}(x'), f(u_i^{-1}(x')))$$

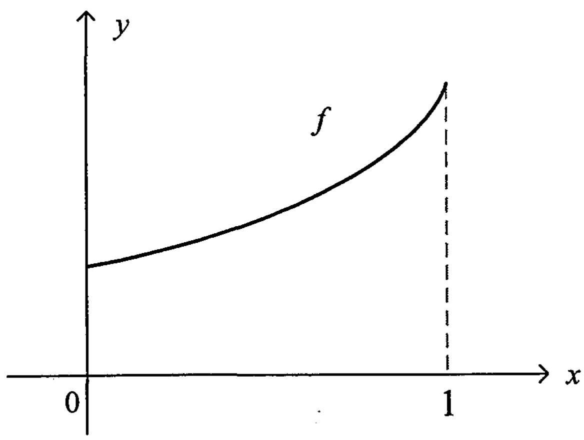
eşitliğini sağlıyorsa f ye kendine benzerdir diyelim."

Ancak bu tanım kapalı aralık üzerinde tanımlı, gerçel değerli bir f fonksiyonu için anlamlı olarak görülse de, bunu herhangi bir atraktör üzerinde tanımlı fonksiyonlara genellemek imkansız olacaktır. Çünkü $A = SG$ için yukarıda tanımlanan v_i fonksiyonu anlamını yitirecektir.

O halde bu yaklaşımdan vazgeçip fonksiyonlar için "kendine benzerlik" kavramını yeniden ele alalım. Kolaylık açısından $[a,b]$ kapalı aralığını $[0,1]$ aralığı olarak alalım. Bu küme,

$$\begin{aligned} u_1 &: [0,1] \to [0,1], u_1(x) = \frac{x}{2} \\ u_2 &: [0,1] \to [0,1], u_2(x) = \frac{x+1}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

büzülme dönüşümleri olmak üzere, bu dönüşümlerin oluşturduğu itere fonksiyon sisteminin atraktörüdür. Yani $\mathcal{A}(u_1, u_2) = [0,1]$ dir. Şimdi $[0,1]$ aralığı üzerinde grafiği Şekil 2.1 de verilen f fonksiyonunu düşünelim.



Şekil 2.1: $[0,1]$ de bir f fonksiyonu

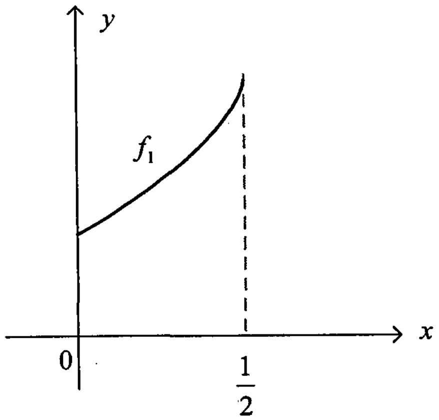
Bu fonksiyonun kendine benzer olması için ilk yaklaşımımız şöyle olabilir: Fonksiyonun grafiğinin $[0, \frac{1}{2}]$ aralığı üzerinde kalan kısmı ile, $[\frac{1}{2}, 1]$ aralığı üzerinde kalan kısımları tüm aralık üzerindeki grafikle aynı olabilir. Bu durumda

$$f_1 : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}, \ f_1(x) = f(2x) = f(u_1^{-1}(x))$$
$$f_2 : [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}, \ f_2(x) = f(2x-1) = f(u_2^{-1}(x))$$

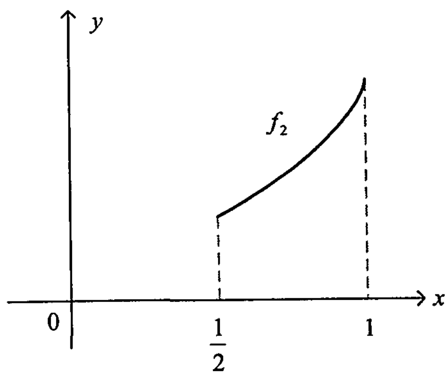
olmak üzere

$$f \mid_{[0,\frac{1}{2}]} = f_1, \ f \mid_{[\frac{1}{2},1]} = f_2 \tag{4}$$

olmalıdır.

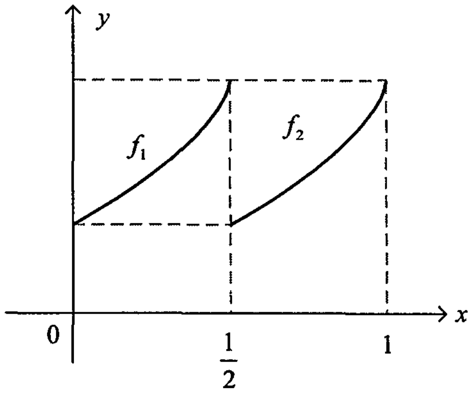


Şekil 2.2: $f_1(x) = f(2x)$ fonksiyonu



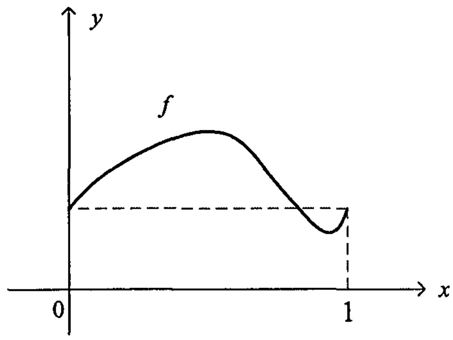
Şekil 2.3: $f_2(x) = f(2x-1)$ fonksiyonu

Bu durumda f nin grafiği aşağıdaki gibi olmalıdır.



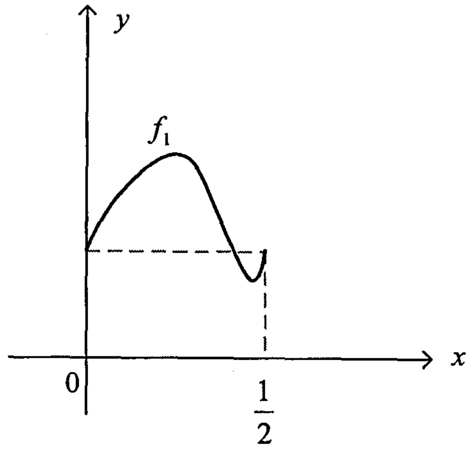
Şekil 2.4: f_1 ve f_2 fonksiyonları

Öncelikle, Şekil 2.4 de görüleceği üzere, ele alınan fonksiyonun bu yaklaşıma göre kendine benzer olabilmesi için $x = 0$ ve $x = 1$ de aldığı değerlerin aynı olması gerekir, yani $f(0) = f(1)$ olmalıdır. Aksi takdirde $x = \frac{1}{2}$ noktasına farklı iki değer karşılık gelecek, dolayısıyla f nin fonksiyon oluşuyla çelişecektir. Bu durumda, ele alınan fonksiyonun başlangıç ve bitiş değerleri aynı olmalıdır. O halde f sınır noktalarında aynı değerlere sahip, grafiği aşağıdaki gibi verilen fonksiyon olsun (Şekil 2.5).

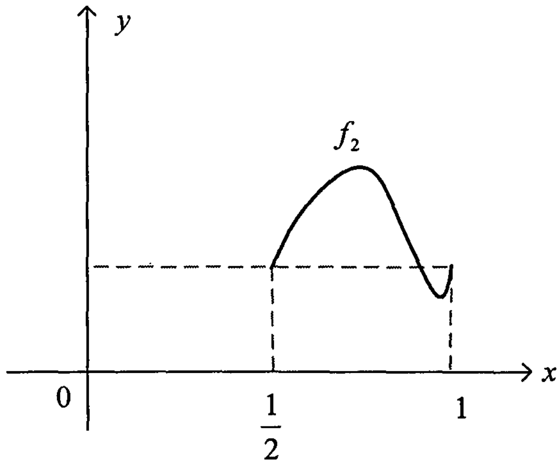


Şekil 2.5: $[0, 1]$ de $f(0) = f(1)$ olan bir f fonksiyonu

Bu durumda f_1 ve f_2 fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibi olacaktır.

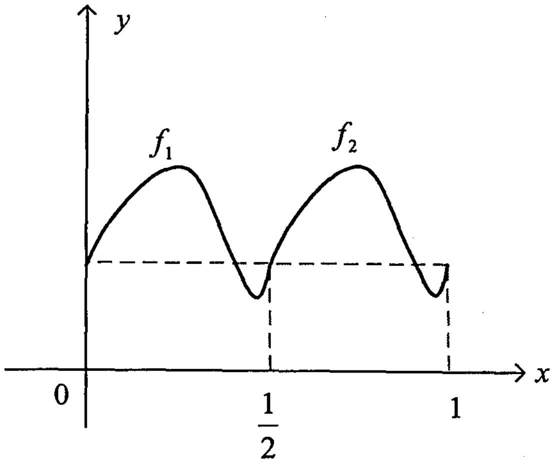


Şekil 2.6: $f_1(x) = f(2x)$ fonksiyonu



Şekil 2.7: $f_2(x) = f(2x-1)$ fonksiyonu

$x \in [0, \frac{1}{2}]$ için $f(x) = f_1(x)$ ve $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ için $f(x) = f_2(x)$ olması gerektiğinden f nin grafiği aşağıdaki gibi olmalıdır.



Şekil 2.8: f_1 ve f_2 fonksiyonları

(4) eşitliğinden açıktır ki f fonksiyonunun $x = 0, x = \frac{1}{2}$ ve $x = 1$ de aldığı değerler eşittir. Bu düşüncemizi ilerletirsek,

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{4} \text{ için, } f(\frac{1}{4}) = f_1(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{2}) \Rightarrow f(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{2}) \\
x &= \frac{3}{4} \text{ için, } f(\frac{3}{4}) = f_2(\frac{3}{4}) = f(\frac{1}{2}) \Rightarrow f(\frac{3}{4}) = f(\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

elde edilir ki buradan

$$f(0) = f(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{4}) = f(1)$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{8} \text{ için, } f(\frac{1}{8}) = f_1(\frac{1}{8}) = f(\frac{1}{4}) \Rightarrow f(\frac{1}{8}) = f(\frac{1}{4}) \\
x &= \frac{3}{8} \text{ için, } f(\frac{3}{8}) = f_1(\frac{3}{8}) = f(\frac{3}{4}) \Rightarrow f(\frac{3}{4}) = f(\frac{3}{8}) \\
x &= \frac{5}{8} \text{ için, } f(\frac{5}{8}) = f_2(\frac{5}{8}) = f(\frac{1}{4}) \Rightarrow f(\frac{5}{8}) = f(\frac{1}{4}) \\
x &= \frac{7}{8} \text{ için, } f(\frac{7}{8}) = f_2(\frac{7}{8}) = f(\frac{3}{4}) \Rightarrow f(\frac{3}{4}) = f(\frac{7}{8})
\end{aligned}$$

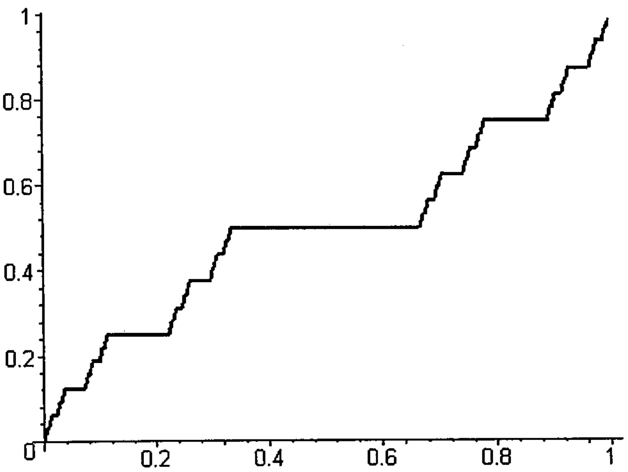
elde edilir. Dolayısıyla

$$f(0) = f(\frac{1}{8}) = f(\frac{1}{4}) = f(\frac{3}{8}) = f(\frac{1}{2}) = f(\frac{5}{8}) = f(\frac{3}{4}) = f(\frac{7}{8}) = f(1)$$

bulunur. Böylece görülüyor ki, f fonksiyonu bu aralıkta sayılabilir sonsuz noktada aynı değeri almalıdır. Bu sayılar $[0, 1]$ de yoğun olduğundan ve f sürekli olduğundan $\forall x \in [0, 1]$ için $f(x) = c$ dir, yani f sabittir.

Bu yaklaşımın sonucunda ise sadece sabit fonksiyonların kendine benzer olduklarını gördük ki bu da çok katı bir kısıtlamadır. En azından "Şeytan Merdiveni" nin kendine benzer olmasını istediğimizden, Şeytan Merdiveni örneğinden yola çıkarak yeni yaklaşımlara doğru ilerleyelim.

Grafiği aşağıda verilen Şeytan Merdivenini düşünelim.



Şekil 2.9: Şeytan Merdiveni

Grafiğin, $[0, \frac{1}{3}]$ aralığı üzerindeki parçası, grafiğin tamamının $\frac{1}{2}$ oranında büzülmesiyle elde edilir. Benzer olarak $[\frac{2}{3}, 1]$ aralığı üzerindeki parçası, grafiğin tamamının $\frac{1}{2}$ oranında büzülüp $y-$ekseni boyunca $\frac{1}{2}$ ötelenmesiyle elde edilir. Görülüyor ki

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(3x) & ; \quad x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{1}{2} & ; \quad x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{1}{2} f(3x-2) + \frac{1}{2} & ; \quad x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

şeklindedir. Bu durumda

$$u_1(x) = \frac{x}{3}, u_2(x) = \frac{x+1}{3}, u_3(x) = \frac{x+2}{3}$$

$$\mathcal{A}(u_1, u_2, u_3) = [0, 1]$$

ve

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{1}{2}f(3x) = \frac{1}{2}f(u_1^{-1}(x)) \\
f_2(x) &= \frac{1}{2} = 0f(u_2^{-1}(x)) + \frac{1}{2} \\
f_3(x) &= \frac{1}{2}f(3x-2) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}f(u_3^{-1}(x)) + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

olmak üzere $x \in u_i[0,1]$ için

$$f(x) = f_i(x), i = 1,2,3$$

dır.

Bu örneğin ışığında yeni kendine benzerlik yaklaşımımız şu şekilde olacaktır, öyle ki bu yaklaşımımıza göre en azından Şeytan Merdiveni kendine benzer olacaktır;

"$\mathcal{A}(u_1, u_2, ..., u_n) = A$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin.

$$f_i : u_i(A) \to \mathbb{R}, f_i(x') = \alpha_i f(u_i^{-1}(x')) + \beta_i$$

olmak üzere her $x' \in u_i(A)$ için

$$f(x') = f_i(x')$$

eşitliği sağlayacak şekilde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ varsa, f ye kendine benzerdir denir."

Şimdi bu tanıma göre Sierpinski üçgeni üzerinde kendine benzer fonksiyonları araştıralım.

Örnek 2.1 *$\mathbb{R}^2$, öklid metriğiyle bir tam metrik uzaydır. Köşe noktaları* $(0,0), (1,0)$ *ve* $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ *olan Sierpinski üçgeni*

$$
\begin{aligned}
u_1 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, u_1(x,y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}) \\
u_2 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, u_2(x,y) = (\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}) \\
u_3 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, u_3(x,y) = (\frac{x+\frac{1}{2}}{2}, \frac{y+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2})
\end{aligned}
$$

büzülme dönüşümleri olmak üzere bu dönüşümlerin oluşturduğu itere fonksiyon sisteminin atraktörüdür. Yani

$$\mathcal{A}(u_1, u_2, u_3) = SG$$

dir (Şekil 1.1).

Şimdi bu büzülme dönüşümlerinin atraktörü olan bu küme üzerinde

$$f : SG \to \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$$

fonksiyonunu düşünelim. Acaba bu fonksiyon kendine benzer midir? Yani $i = 1, 2, 3$, $(x', y') \in u_i(SG)$ *için*

$$f(x', y') = \alpha_i f(u_i^{-1}(x', y')) + \beta_i$$

olacak şekilde α_i, β_i *katsayıları var mıdır?*

$i = 1$ *olsun.* $(x', y') \in u_1(SG)$ *için*

$$f(x', y') = \alpha_1 f(2x', 2y') + \beta_1 \Rightarrow x' + y' = \alpha_1 2(x' + y') + \beta_1$$

olacak şekilde $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ *olmalıdır. Bu ise kolayca görüleceği üzere* $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ *ve* $\beta_1 = 0$ *olması durumunda sağlanır.*

$i = 2$ *olsun.* $(x', y') \in u_2(SG)$ *için*

$$f(x', y') = \alpha_2 f(2x' - 1, 2y') + \beta_2 \Rightarrow x' + y' = \alpha_2 2(x' + y') - \alpha_2 + \beta_2$$

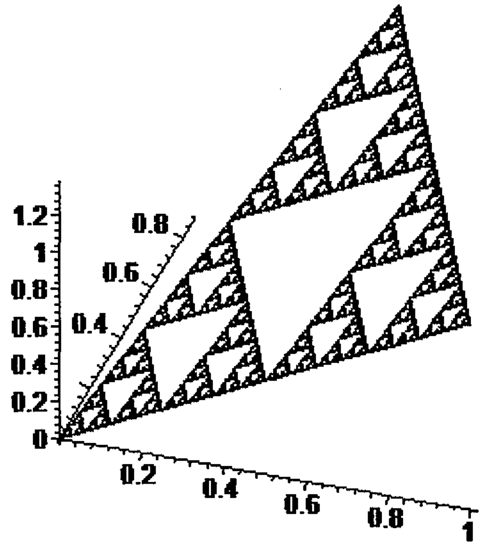
olacak şekilde $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$ *olmalıdır. Bu eşitlik de* $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ *ve* $\beta_2 = \frac{1}{2}$ *olduğunda sağlanır.*

$i = 3$ *olsun.* $(x', y') \in u_3(SG)$ *için*

$$\begin{aligned} f(x', y') &= \alpha_3 f(2x' - \frac{1}{2}, 2y' - \frac{\sqrt{3}}{2}) + \beta_3 \\ &\Rightarrow x' + y' = \alpha_3 2(x' + y') - \alpha_3 \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + \beta_3 \end{aligned}$$

olacak şekilde $\alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{R}$ *olmalıdır.* $\alpha_3 = \frac{1}{2}$ *ve* $\beta_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$ *olması durumunda sağlanacaktır.*

O halde SG üzerinde tanımlanan ve Şekil 2.10 da grafiği verilen f fonksiyonu *kendine benzer bir fonksiyondur.*



Şekil 2.10: SG üzerinde $f(x,y) = x + y$ fonksiyonu

Örnek 2.2

$$f : SG \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = xy$$

fonksiyonunu ele alalım.

Acaba bu fonksiyon da kendine benzer midir? Yani $i = 1, 2, 3$, $(x', y') \in u_i(SG)$ *için*

$$f(x', y') = \alpha_i f(u_i^{-1}(x', y')) + \beta_i$$

olacak şekilde α_i, β_i*katsayıları var mıdır?*

$i = 1$ *olsun.* $(x', y') \in u_1(SG)$ *için*

$$f(x', y') = \alpha_1 f(2x', 2y') + \beta_1 \Rightarrow x'y' = \alpha_1 4x'y' + \beta_1$$

olacak şekilde $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ *olmalıdır. Bu eşitlik* $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ *ve* $\beta_1 = 0$ *olması durumunda sağlanır.*

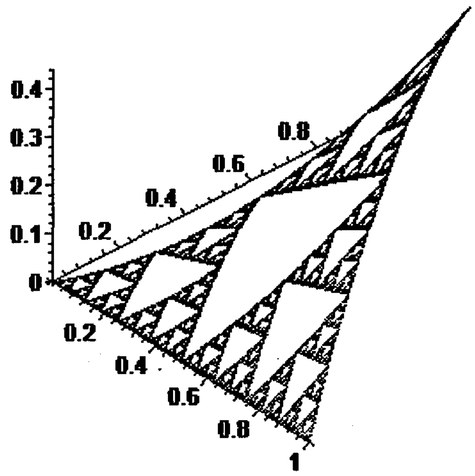
$i = 2$ olsun. $(x', y') \in u_2(SG)$ için

$$\begin{aligned} f(x',y') &= \alpha_2 f(2x'-1, 2y') + \beta_2 \\ &\Rightarrow x'y' = \alpha_2 4x'y' - \alpha_2 2y' + \beta_2 \\ &\Rightarrow (1-4\alpha_2)x'y' - 2\alpha_2 y' + \beta_2 = 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$ olmalıdır. Bu eşitliğin $\forall (x', y') \in u_2(SG)$ için sağlanması gerektiğinden,

$$\begin{aligned} 1 - 4\alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_2 &= 0 \\ \beta_2 &= 0 \end{aligned}$$

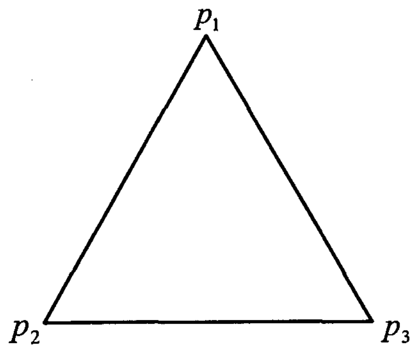
olmalıdır. Fakat bu sistemin bir çözümü yoktur. O halde Şekil 2.11 de grafiği verilen f fonksiyonu kendine benzer değildir.



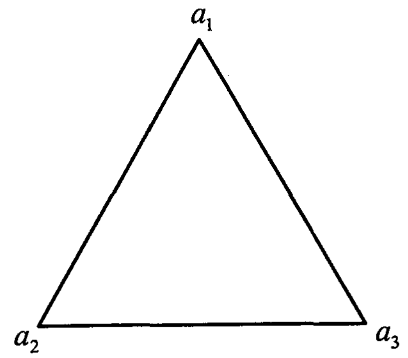
Şekil 2.11: SG üzerinde $f(x,y) = xy$ fonksiyonu

Örneklerden Sierpinski üzerinde tanımlı bir fonksiyonun burada tanımlandığı manada kendine benzer olması için afin lineer olması gerektiği sezilmektedir. Bu sezgiyi kontrol etmek için Sierpinski üzerinde tanımlı bir fonksiyonun kendine benzer olması için hangi özellikte olması gerektiğini inceleyelim.

p_1, p_2, p_3 köşe noktalarında sırasıyla a_1, a_2, a_3 değerleri verilsin. Bu değerleri SG ye nasıl genişletmeliyiz ki ortaya çıkan f fonksiyonu bu manada kendine benzer bir fonksiyon olsun. Şimdi bu fonksiyonu adım adım oluşturmaya çalışalım.



Şekil 2.12: G_0



Şekil 2.13: V_0 da fonksiyon değerleri

Biliyoruz ki

$$u_1(x) = \frac{x+p_1}{2}, u_2(x) = \frac{x+p_2}{2}, u_3(x) = \frac{x+p_3}{2}$$

olmak üzere

$$SG = \mathcal{A}(u_1, u_2, u_3)$$

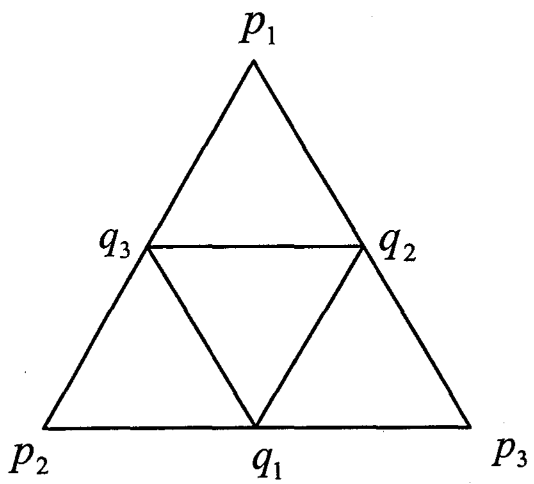
dir. Öncelikle f nin kendine benzer olması için $\forall\ x' \in u_i(SG)$, $i = 1, 2, 3$ için

$$f(x') = \alpha_i f(u_i^{-1}(x')) + \beta_i$$

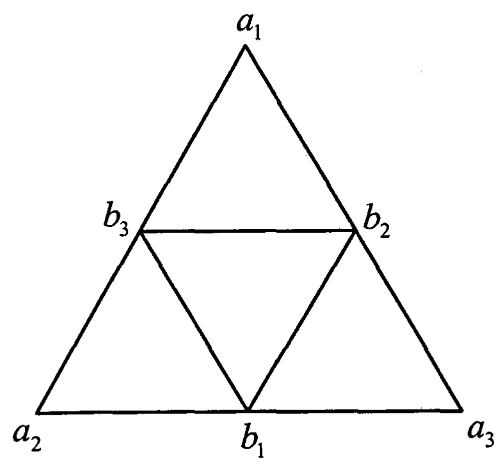
olacak şekilde α_i, $\beta_i \in \mathbb{R}$ sayılarının varolması gerekir. İlk olarak

$$V_1 = \{p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3\}$$

köşe noktalarında sırasıyla $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ değerlerini alan f fonksiyonu için sağlanması gereken eşitlikleri yazalım.



Şekil 2.14: G_1



Şekil 2.15: V_1 de fonksiyon değerleri

$p_1, q_2, q_3 \in u_1(SG)$ ve

$$u_1^{-1}(p_1) = p_1, u_1^{-1}(q_2) = p_3, u_1^{-1}(q_3) = p_2$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 a_1 + \beta_1 \\ b_2 &= \alpha_1 a_3 + \beta_1 \\ b_3 &= \alpha_1 a_2 + \beta_1 \end{aligned}$$

dir. 1. ve 3. denklemlerden,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{b_3 - a_1}{a_2 - a_1} \\ \beta_1 &= a_1 - \alpha_1 a_1 = \frac{a_1 a_2 - b_3 a_1}{a_2 - a_1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu değerler 2. denklemde yerine yazılarak,

$$(a_2 - a_1)b_2 + (a_1 - a_3)b_3 = a_1 a_2 - a_1 a_3$$

elde edilir. Benzer biçimde, $p_2, q_1, q_3 \in u_2(SG)$ ve

$$u_2^{-1}(p_2) = p_2, u_2^{-1}(q_1) = p_3, u_2^{-1}(q_3) = p_1$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} a_2 &= \alpha_2 a_2 + \beta_2 \\ b_1 &= \alpha_2 a_3 + \beta_2 \\ b_3 &= \alpha_2 a_1 + \beta_2 \end{aligned}$$

dir. 1. ve 3. denklemlerden,

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{b_3 - a_2}{a_1 - a_2} \\ \beta_2 &= a_2 - \alpha_2 a_2 = \frac{a_1 a_2 - b_3 a_2}{a_1 - a_2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu değerler 2. denklemde yerine yazılarak,

$$(a_1 - a_2)b_1 + (a_2 - a_3)b_3 = a_1 a_2 - a_2 a_3$$

elde edilir. Benzer olarak $q_1, q_2, p_3 \in u_3(SG)$ ve

$$u_3^{-1}(p_3) = p_3, u_3^{-1}(q_1) = p_2, u_3^{-1}(q_2) = p_1$$

olduğundan

$$\begin{aligned} a_3 &= \alpha_3 a_3 + \beta_3 \\ b_2 &= \alpha_3 a_1 + \beta_3 \\ b_1 &= \alpha_3 a_2 + \beta_3 \end{aligned}$$

dir. 1. ve 3. denklemlerden

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{b_1 - a_3}{a_2 - a_3} \\ \beta_3 &= a_3 - \alpha_3 a_3 = \frac{a_2 a_3 - b_1 a_3}{a_2 - a_3} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu değerler 2. denklemde yerine yazılarak

$$(a_3 - a_1)b_1 + (a_2 - a_3)b_2 = a_2 a_3 - a_1 a_3$$

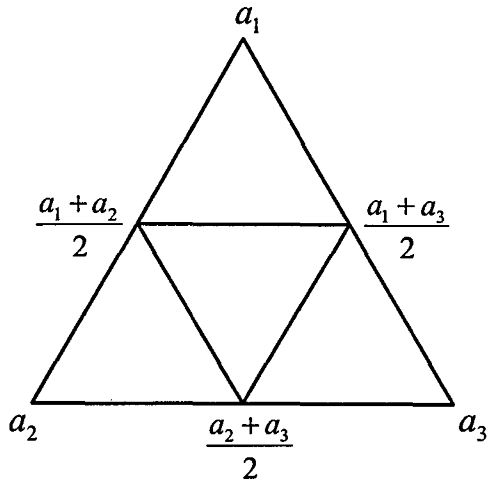
elde edilir. Son olarak

$$\begin{aligned} (a_2 - a_1)b_2 + (a_1 - a_3)b_3 &= a_1 a_2 - a_1 a_3 \\ (a_1 - a_2)b_1 + (a_2 - a_3)b_3 &= a_1 a_2 - a_2 a_3 \\ (a_3 - a_1)b_1 + (a_2 - a_3)b_2 &= a_2 a_3 - a_1 a_3 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözülerek

$$b_1 = \frac{a_2 + a_3}{2}, b_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}, b_3 = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

elde edilir.



Şekil 2.16: V_1 de kendine benzer fonksiyonun alması gereken değerleri

Dikkat edecek olursak bu değerler o noktayı orta nokta kabul eden kenarın uç noktalarındaki değerler toplamının yarısıdır (Şekil 2.16). Bulunan değerler

$$\alpha_1 = \frac{b_3 - a_1}{a_2 - a_1}, \alpha_2 = \frac{b_3 - a_2}{a_1 - a_2}, \alpha_3 = \frac{b_1 - a_3}{a_2 - a_3}$$

eşitliklerinde yerine yazılarak

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$$

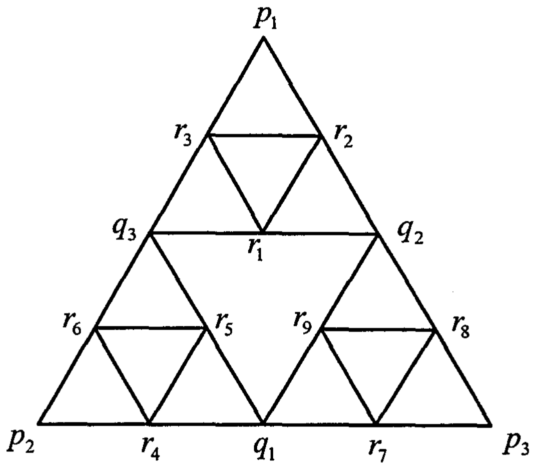
elde edilir. Benzer biçimde

$$\beta_i = a_i - \alpha_i a_i$$

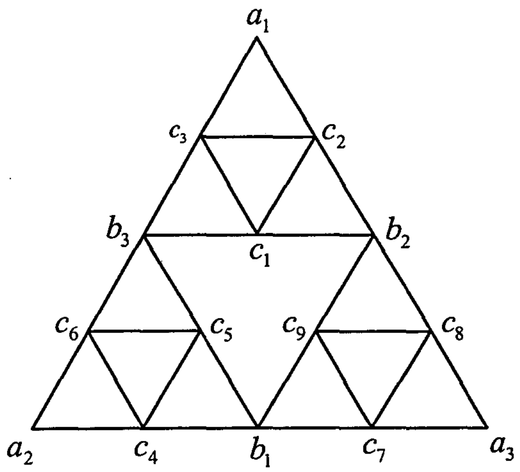
$i = 1, 2, 3$ eşitliklerinde yerine yazılarak da

$$\beta_i = \frac{a_i}{2}$$

elde edilir. Şimdi $V_2 \backslash V_1$ deki noktalar için gerekli eşitlikleri yazalım.,



Şekil 2.17: G_2



Şekil 2.18: V_2 de fonksiyon değerleri

$r_1, r_2, r_3 \in u_1(SG)$ ve

$$u_1^{-1}(r_1) = q_1, u_1^{-1}(r_2) = q_2, u_1^{-1}(r_3) = q_3$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} c_1 &= \alpha_1 b_1 + \beta_1 \\ c_2 &= \alpha_1 b_2 + \beta_1 \\ c_3 &= \alpha_1 b_3 + \beta_1 \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{b_1+a_1}{2} = \frac{\frac{a_2+a_3}{2}+a_1}{2} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_3}{2}}{2} = \frac{b_2+b_3}{2}\\
c_2 &= \frac{b_2+a_1}{2}\\
c_3 &= \frac{b_3+a_1}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. $r_4, r_5, r_6 \in u_2(SG)$ için de

$$u_2^{-1}(r_4) = q_1, u_2^{-1}(r_5) = q_2, u_2^{-1}(r_6) = q_3$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
c_4 &= \alpha_2 b_1 + \beta_2\\
c_5 &= \alpha_2 b_2 + \beta_2\\
c_6 &= \alpha_2 b_3 + \beta_2
\end{aligned}$$

dir. Buradan α_2 ve β_2 yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
c_4 &= \frac{b_1+a_2}{2}\\
c_5 &= \frac{b_2+a_2}{2} = \frac{\frac{a_1+a_3}{2}+a_2}{2} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_2+a_3}{2}}{2} = \frac{b_1+b_3}{2}\\
c_6 &= \frac{b_3+a_2}{2}
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $r_7, r_8, r_9 \in u_3(SG)$ için de

$$u_3^{-1}(r_7) = q_1, u_3^{-1}(r_8) = q_2, u_3^{-1}(r_9) = q_3$$

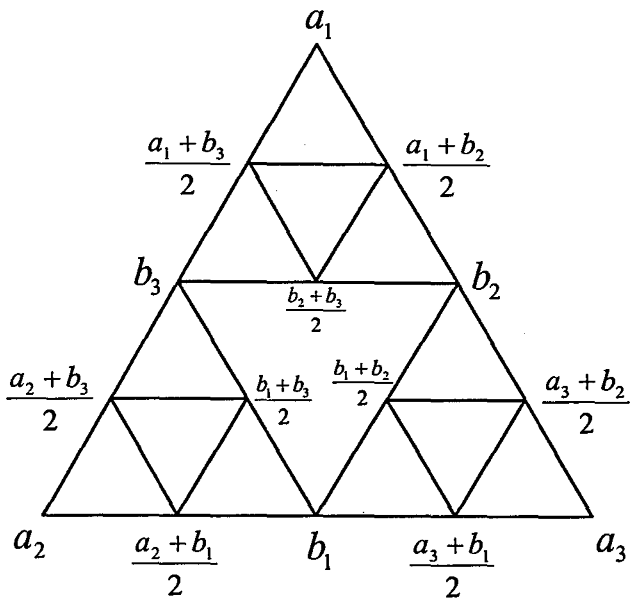
olduğundan

$$\begin{aligned}
c_7 &= \alpha_3 b_1 + \beta_3\\
c_8 &= \alpha_3 b_2 + \beta_3\\
c_9 &= \alpha_3 b_3 + \beta_3
\end{aligned}$$

dir. α_3 ve β_3 yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
c_7 &= \frac{b_1+a_3}{2}\\
c_8 &= \frac{b_2+a_3}{2}\\
c_9 &= \frac{b_3+a_3}{2} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+a_3}{2} = \frac{\frac{a_1+a_3}{2}+\frac{a_2+a_3}{2}}{2} = \frac{b_1+b_2}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Görülüyor ki yine bulunan bu değerler o noktayı orta nokta kabul eden kenarın uç noktalarındaki değerler toplamının yarısıdır (Şekil 2.19).



Şekil 2.19: V_2 de kendine benzer fonksiyonun alması gereken değerler

Bu incelemeler sonucunda herhangi bir aşamadaki nokta için de aynı özelliğin korunduğunu tümevarım yöntemiyle görelim. Yani m. aşamadaki köşe noktaları için o noktalardaki değerler o noktayı orta nokta kabul eden doğru parçasının uç noktalarındaki değerler toplamının yarısı olsun. Acaba $(m+1)$. aşamadaki köşe noktaları için de aynı özellik korunur mu? Şimdi keyfi bir $x \in V_{m+1}$ alalım. $\exists\ i = 1, 2, 3$ için $x \in u_i(SG)$ dir. O halde

$$f(x) = \frac{1}{2} f(u_i^{-1}(x)) + \frac{a_i}{2} \qquad (5)$$

dir. $y = u_i^{-1}(x) \in V_m$ dir. V_m deki noktalar için kabulümüz gereği x' ve x'' $u_i^{-1}(x)$ i orta nokta kabul eden doğru parçasının uç noktaları olmak üzere $f(y)$, bu noktalara karşılık gelen değerlerin aritmetik ortalamasıdır. Yani

$$f(y) = \frac{f(x') + f(x'')}{2}$$

dir. Bu durumda (5) eşitliği

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}f(y) + \frac{a_i}{2} \\
f(x) &= \frac{\frac{f(x')+f(x'')}{2} + a_i}{2} = \frac{\frac{f(x')+a_i}{2} + \frac{f(x'')+a_i}{2}}{2}
\end{aligned}
$$

haline dönüşür. Şimdi $\frac{f(x')+a_i}{2}$ ve $\frac{f(x'')+a_i}{2}$ değerlerinin x i orta nokta kabul eden doğru parçasının uç noktalarına karşılık gelen değerler olduğunu görelim. u_i dönüşümü $y \in V_m$ noktasının bulunduğu doğru parçasını tam olarak $x \in V_{m+1}$ noktasının bulunduğu doğru parçasına resmeder. $u_i(x')$ ve $u_i(x'')$ noktalarına karşılık gelen değerler

$$
\begin{aligned}
f(u_i(x')) &= \frac{1}{2}f(u_i^{-1}(u_i(x'))) + \frac{a_i}{2} \\
&= \frac{f(x') + a_i}{2}
\end{aligned}
$$

olur. Benzer biçimde

$$
\begin{aligned}
f(u_i(x'')) &= \frac{1}{2}f(u_i^{-1}(u_i(x''))) + \frac{a_i}{2} \\
&= \frac{f(x'') + a_i}{2}
\end{aligned}
$$

olur. Şimdiye kadar oluşturulan f fonksiyonu hakkında sadece $m \geq 1$ olmak üzere herbir $x \in V_m$ için $f(x)$ in x i orta nokta kabul eden herbir doğru parçasının uç noktalara karşılık gelen değerlerin toplamının yarısı olduğunu biliyoruz. Şimdi bu özelliği sağlayan bir f fonksiyonunun afin lineer olduğunu görmeye çalışacağız.

Yardımcı Teorem 2.1 *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$f(x, y) = ax + by + c$$

biçiminde olması için gerek ve yeter koşul f nin $\mathbb{R}^2$ de alınan her doğru parçasının orta noktasındaki değerinin uç noktalardaki değerlerin aritmetik ortalaması olmasıdır. Yani doğru parçasının uç noktaları x_0 ve x_1 olmak üzere

$$f(\frac{x_0 + x_1}{2}) = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}$$

olmasıdır.

Kanıt. $\Longrightarrow$Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x, y) = ax + by + c$$

olsun. $\mathbb{R}^2$ de uç noktaları $x_0 = (x_0^1, x_0^2), x_1 = (x_1^1, x_1^2)$ olan keyfi bir L doğru parçası alalım.

$$\begin{aligned}
f(\frac{x_0 + x_1}{2}) &= f(\frac{x_0^1 + x_1^1}{2}, \frac{x_0^2 + x_1^2}{2}) \\
&= a\frac{x_0^1 + x_1^1}{2} + b\frac{x_0^2 + x_1^2}{2} + c \\
&= a\frac{x_0^1}{2} + b\frac{x_0^2}{2} + \frac{c}{2} + a\frac{x_1^1}{2} + b\frac{x_1^2}{2} + \frac{c}{2} \\
&= \frac{ax_0^1 + bx_0^2 + c}{2} + \frac{ax_1^1 + bx_1^2 + c}{2} \\
&= \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu da istenilen eşitliği verir.

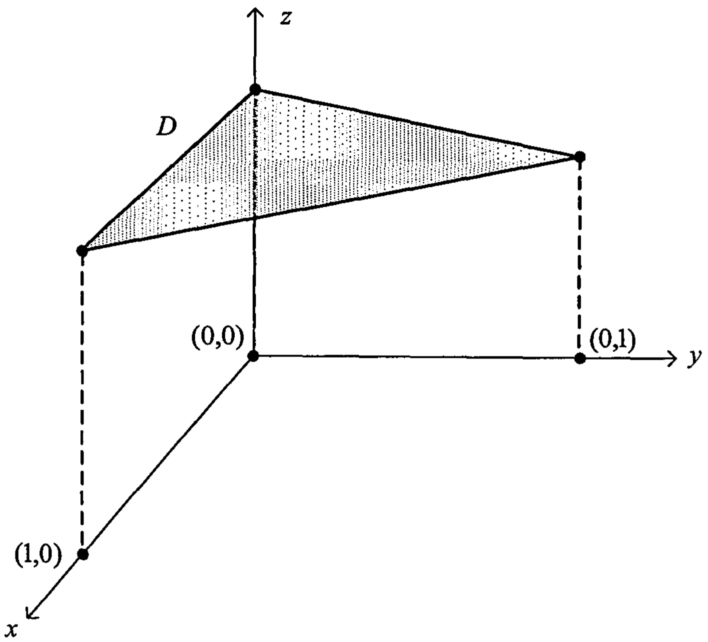
$\Longleftarrow$Şimdi her L doğru parçası için bu özelliğin sağlandığını kabul edip f nin $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax+by+c$ şeklinde olduğunu görelim. $(0, 0, f(0, 0))$, $(1, 0, f(1, 0))$, $(0, 1, f(1, 0))$ noktalarından geçen D düzleminin denklemi (Şekil 2.20)

$$\begin{vmatrix} x & y & z - f(0,0) \\ 1 & 0 & f(1,0) - f(0,0) \\ 0 & 1 & f(0,1) - f(0,0) \end{vmatrix} = 0$$

dır. Bu determinantı açarsak

$$(f(0,0) - f(1,0))x + (f(0,0) - f(0,1))y + z - f(0,0) = 0$$

denklemi elde edilir.



Şekil 2.20: $(0,0), (0,1)$ ve $(1,0)$ noktalarından geçen düzlem

Şimdi $(1,1,f(1,1))$ noktasının, bu üç noktanın oluşturduğu düzlemde bulunduğunu görelim. Yani

$$f(0,0)-f(1,0)-f(0,1)+f(1,1)=0$$

olduğunu görelim. L_1, $(0,0)$ ile $(1,1)$ noktasını birleştiren doğru parçası, L_2 de $(1,0)$ ile $(0,1)$ noktalarını birleştiren doğru parçası olmak üzere $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ her iki doğrunun da orta noktasıdır (Şekil 2.21). Kabulümüzden dolayı L_1 doğrusu için,

$$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{f(0,0)+f(1,1)}{2}$$

ve L_2 doğrusu için de

$$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{f(0,1)+f(1,0)}{2}$$

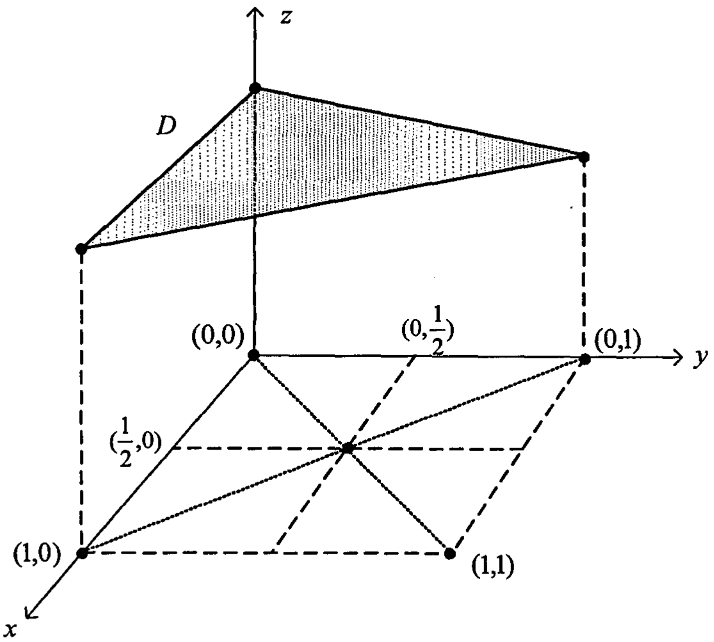
dir. Yani

$$f(0,0)+f(1,1)=f(0,1)+f(1,0)$$

dır. O halde

$$f(0,0)+f(1,1)-f(0,1)-f(1,0)=0$$

dır. Bu da $(1, 1, f(1, 1))$ noktasının düzlem denklemini sağladığını yani düzlem üzerinde olduğunu gösterir.



Şekil 2.21: $(0, 0), (0, 1)$ ve $(1, 0)$ noktalarından geçen düzlem

Şimdi $\forall\ k \in \mathbb{N}$ için $a, b = 0, 1, ..., 2^k$ olmak üzere $(\frac{a}{2^k}, \frac{b}{2^k}, f(\frac{a}{2^k}, \frac{b}{2^k}))$ şeklindeki noktalarında bu düzlem üzerinde olduğunu görelim.

$$\mathrm{A}_k = \{(\frac{a}{2^k}, \frac{b}{2^k}, f(\frac{a}{2^k}, \frac{b}{2^k})) \mid a, b = 0, 1, ..., 2^k\} \subset D$$

olsun. Şimdi

$$\mathrm{A}_{k+1} = \{(\frac{a}{2^{k+1}}, \frac{b}{2^{k+1}}, f(\frac{a}{2^{k+1}}, \frac{b}{2^{k+1}})) \mid a, b = 0, 1, ..., 2^{k+1}\} \subset D$$

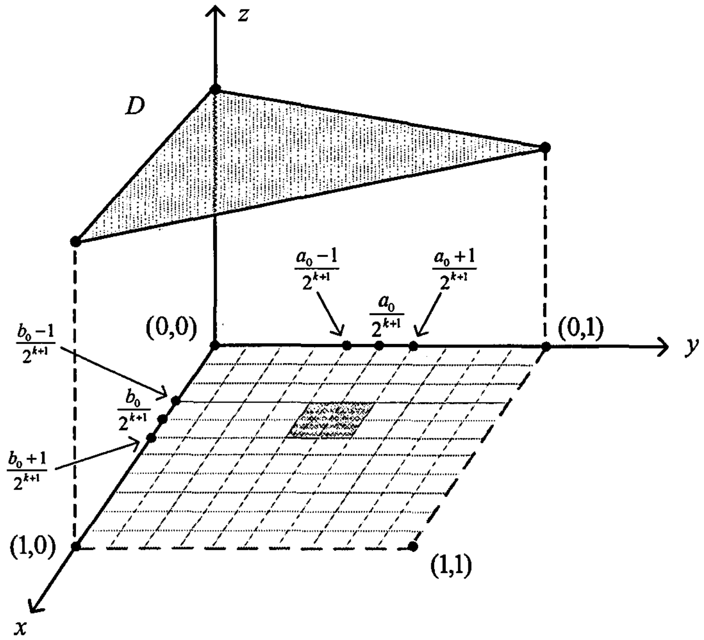
olduğunu görelim. Bunun için keyfi bir

$$(\frac{a_0}{2^{k+1}}, \frac{b_0}{2^{k+1}}, f(\frac{a_0}{2^{k+1}}, \frac{b_0}{2^{k+1}})) \in \mathrm{A}_{k+1}$$

alalım. Bu durumda Şekil 2.22 de görüleceği üzere

$$(\frac{a_0 - 1}{2^{k+1}}, \frac{b_0 - 1}{2^{k+1}}, f(\frac{a_0 - 1}{2^{k+1}}, \frac{b_0 - 1}{2^{k+1}})),$$
$$(\frac{a_0 + 1}{2^{k+1}}, \frac{b_0 - 1}{2^{k+1}}, f(\frac{a_0 + 1}{2^{k+1}}, \frac{b_0 - 1}{2^{k+1}})),$$
$$(\frac{a_0 - 1}{2^{k+1}}, \frac{b_0 + 1}{2^{k+1}}, f(\frac{a_0 - 1}{2^{k+1}}, \frac{b_0 + 1}{2^{k+1}})),$$
$$(\frac{a_0 + 1}{2^{k+1}}, \frac{b_0 + 1}{2^{k+1}}, f(\frac{a_0 + 1}{2^{k+1}}, \frac{b_0 + 1}{2^{k+1}}))$$

noktaları A_k nın elemanıdır.



Şekil 2.22: $(0,0),(0,1)$ ve $(1,0)$ noktalarından geçen düzlem ve bölüntüler

O halde D düzlemini A_k daki

$$(\frac{a_0-1}{2^{k+1}},\frac{b_0-1}{2^{k+1}},f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}},\frac{b_0-1}{2^{k+1}}))$$
$$(\frac{a_0+1}{2^{k+1}},\frac{b_0-1}{2^{k+1}},f(\frac{a_0+1}{2^{k+1}},\frac{b_0-1}{2^{k+1}}))$$
$$(\frac{a_0-1}{2^{k+1}},\frac{b_0+1}{2^{k+1}},f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}},\frac{b_0+1}{2^{k+1}}))$$

noktalarını baz alarak şöyle de ifade edebiliriz.

$$\begin{vmatrix} x-\frac{a_0-1}{2^{k+1}} & y-\frac{b_0-1}{2^{k+1}} & z-f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}},\frac{b_0-1}{2^{k+1}}) \\ \frac{1}{2^k} & 0 & f(\frac{a_0+1}{2^{k+1}},\frac{b_0-1}{2^{k+1}})-f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}},\frac{b_0-1}{2^{k+1}}) \\ 0 & \frac{1}{2^k} & f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}},\frac{b_0+1}{2^{k+1}})-f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}},\frac{b_0-1}{2^{k+1}}) \end{vmatrix}=0$$

Bu determinantı açarak

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^{2k}}(z-f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}},\frac{b_0-1}{2^{k+1}})) \\ &+\frac{1}{2^k}(f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}},\frac{b_0-1}{2^{k+1}})-f(\frac{a_0+1}{2^{k+1}},\frac{b_0-1}{2^{k+1}}))(x-\frac{a_0-1}{2^{k+1}}) \\ &+\frac{1}{2^k}(y-\frac{b_0-1}{2^{k+1}})(f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}},\frac{b_0-1}{2^{k+1}})-f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}},\frac{b_0+1}{2^{k+1}}))=0 \end{aligned}$$

düzlem denklemini elde ederiz. Denklemi $\frac{1}{2^k}$ ile sadeleştirerek,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^k}(z - f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}}, \frac{b_0-1}{2^{k+1}}))\\
&+(f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}}, \frac{b_0-1}{2^{k+1}}) - f(\frac{a_0+1}{2^{k+1}}, \frac{b_0-1}{2^{k+1}}))(x - \frac{a_0-1}{2^{k+1}})\\
&+(y - \frac{b_0-1}{2^{k+1}})(f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}}, \frac{b_0-1}{2^{k+1}}) - f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}}, \frac{b_0+1}{2^{k+1}})) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $(\frac{a_0}{2^{k+1}}, \frac{b_0}{2^{k+1}}, f(\frac{a_0}{2^{k+1}}, \frac{b_0}{2^{k+1}}))$ noktasının düzlem üzerinde olduğunu görelim. Yani düzlem denkleminde

$$x = \frac{a_0}{2^{k+1}}, y = \frac{b_0}{2^{k+1}}, z = f(\frac{a_0}{2^{k+1}}, \frac{b_0}{2^{k+1}})$$

yazarak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^k}(f(\frac{a_0}{2^{k+1}}, \frac{b_0}{2^{k+1}}) - f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}}, \frac{b_0-1}{2^{k+1}}))\\
&+\frac{1}{2^{k+1}}(f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}}, \frac{b_0-1}{2^{k+1}}) - f(\frac{a_0+1}{2^{k+1}}, \frac{b_0-1}{2^{k+1}}))\\
&+\frac{1}{2^{k+1}}((f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}}, \frac{b_0-1}{2^{k+1}}) - f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}}, \frac{b_0+1}{2^{k+1}})) = 0
\end{aligned}$$

olduğunu görelim. Düzlem denkleminde gerekli işlemler yapılarak elde edilen

$$\frac{1}{2^k}f(\frac{a_0}{2^{k+1}}, \frac{b_0}{2^{k+1}}) - \frac{1}{2^{k+1}}f(\frac{a_0+1}{2^{k+1}}, \frac{b_0-1}{2^{k+1}}) - \frac{1}{2^{k+1}}f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}}, \frac{b_0+1}{2^{k+1}}) = 0$$

eşitliği görelim. L, $(\frac{a_0+1}{2^{k+1}}, \frac{b_0-1}{2^{k+1}})$ ile $(\frac{a_0-1}{2^{k+1}}, \frac{b_0+1}{2^{k+1}})$ noktalarını birleştiren doğru parçası olmak üzere $(\frac{a_0}{2^{k+1}}, \frac{b_0}{2^{k+1}})$ bu doğru parçasının orta noktasıdır. O halde kabulümüzden dolayı

$$f(\frac{a_0}{2^{k+1}}, \frac{b_0}{2^{k+1}}) = \frac{f(\frac{a_0+1}{2^{k+1}}, \frac{b_0-1}{2^{k+1}}) + f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}}, \frac{b_0+1}{2^{k+1}})}{2}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^k}f(\frac{a_0}{2^{k+1}}, \frac{b_0}{2^{k+1}}) - \frac{1}{2^{k+1}}f(\frac{a_0+1}{2^{k+1}}, \frac{b_0-1}{2^{k+1}}) - \frac{1}{2^{k+1}}f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}}, \frac{b_0+1}{2^{k+1}})\\
&= \frac{1}{2^k}\frac{f(\frac{a_0+1}{2^{k+1}}, \frac{b_0-1}{2^{k+1}})+f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}}, \frac{b_0+1}{2^{k+1}})}{2}\\
&-\frac{1}{2^{k+1}}f(\frac{a_0+1}{2^{k+1}}, \frac{b_0-1}{2^{k+1}}) - \frac{1}{2^{k+1}}f(\frac{a_0-1}{2^{k+1}}, \frac{b_0+1}{2^{k+1}})\\
&= 0
\end{aligned}$$

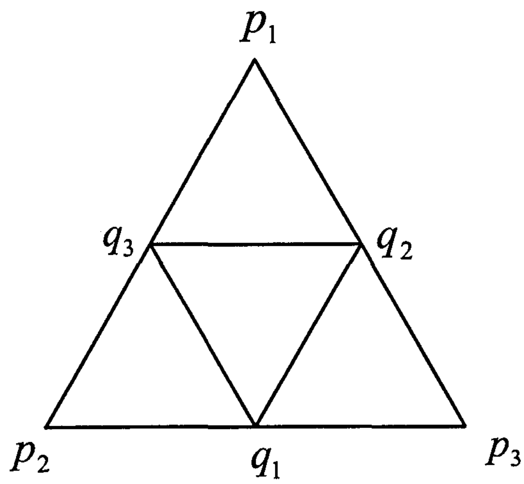
dır. O halde $\forall\ k \in \mathbb{R}$ için $\mathrm{A}_k \subset D$ dir.

$$\mathrm{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}_k$$

olmak üzere A, $[0,1]\times[0,1]$ de yoğun olduğundan ve f sürekli olduğundan keyfi bir $x \in [0,1] \times [0,1]$ de bu düzlem üzerindedir. Benzer mantıkla $\mathbb{R}^2$ deki tüm noktaların bu düzlem üzerinde olduğu gösterilebilir. O halde f afin lineerdir.

■

Sonuç olarak, SG üzerinde bu anlamda kendine benzer fonksiyonlar sadece afin lineer fonksiyonlardır. Acaba SG üzerinde harmonik fonksiyonlar da kendine benzer midir? Örneğin f, p_1, p_2, p_3 köşe noktalarında sırasıyla $1, 0, 0$, değerlerini alıp harmonik genişleyen fonksiyon olsun.



Şekil 2.23: G_1

Bu durumda $f(q_1) = \frac{1}{5}, f(q_2) = \frac{2}{5}, f(q_3) = \frac{2}{5}$ dir. f nin kendine benzer olması için $x' \in u_3(SG)$ için

$$f(x') = \alpha_3 f(u_3^{-1}(x')) + \beta_3$$

olacak şekilde $\alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{R}$ sayıları bulunmalıdır. Sırasıyla $q_1, q_2, p_3 \in u_3(SG)$

için istenilen eşitlikler yazılırsa

$$\begin{aligned} f(q_1) &= \alpha_3 f(u_3^{-1}(q_1)) + \beta_3 \\ f(q_2) &= \alpha_3 f(u_3^{-1}(q_2)) + \beta_3 \\ f(p_3) &= \alpha_3 f(u_3^{-1}(p_3)) + \beta_3 \end{aligned}$$

olacak şekilde $\alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{R}$ sayılarının varlığını araştıralım. $u_3^{-1}(q_1) = p_2$, $u_3^{-1}(q_2) = p_1$, $u_3^{-1}(p_3) = p_3$ olduğu gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} &= \beta_3 \\ \frac{2}{5} &= \alpha_3 + \beta_3 \\ 0 &= \beta_3 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Fakat bu sistem tutarsızdır. Görülüyor ki ilk adımda bile bu eşitliği sağlayacak α_3, β_3 sayıları yoktur. O halde SG üzerinde harmonik fonksiyonlar bu manada kendine benzer değildir.

Bu tanımın da ışığında başka bir yaklaşım şöyle elde edilebilir. Bu tanıma göre

$$f_i : u_i(A) \to \mathbb{R}, f_i(x') = \alpha_i f(u_i^{-1}(x')) + \beta_i$$

olarak tanımlanan f_i fonksiyonu f nin bir fonksiyonu idi. Acaba f nin herhangi bir fonksiyonu için de uygun bir yaklaşım elde edilebilir mi? Yani v_i, f nin bir fonksiyonu olmak üzere

$$f_i(x') = v_i(f(u_i^{-1}(x'))) = v_i(f(x))$$

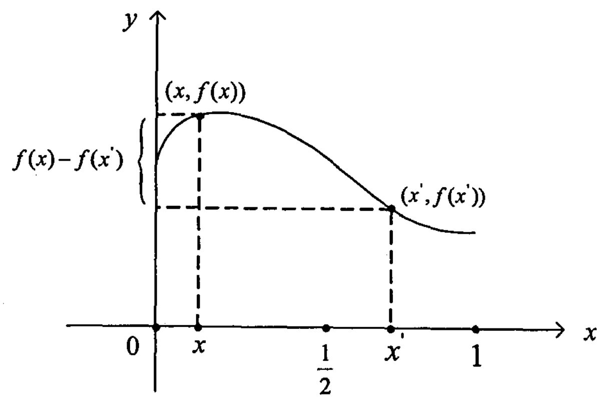
alındığı takdirde hangi fonksiyonlar kendine benzerdir. Örneğin β_i, x in bir fonksiyonu olmak üzere

$$v_i(f(x)) = \alpha_i f(x) + \beta_i(x)$$

olabilir. Bu durumda $x = u_i^{-1}(x')$ olmak üzere

$$f_i(x') = v_i(f(x)) = \alpha_i f(u_i^{-1}(x')) + \beta_i(u_i^{-1}(x'))$$

dir. Bu durumu incelemek için kolaylık açısından aralık üzerinde bu manada hangi fonksiyonların kendine benzer olduğunu araştıralım. Örneğin f grafiği aşağıda verilen $[0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun.



Şekil 2.24: Bir f fonksiyonunun kendine benzerlik yaklaşımı

Şekil 2.24 de $[0,1]$ aralığının $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ bölüntüsü üzerinde bir f fonksiyonu ele alınmıştır. Yani

$$u_1(x) = \frac{x}{2}, u_2(x) = \frac{x+1}{2}$$

olmak üzere

$$\mathcal{A}\{u_1, u_2\} = [0,1]$$

dir. Acaba f bu manada kendine benzer midir? Bu durumda $i = 1, 2$ ve bir $x' \in u_i([0,1])$ için

$$f_i(x') = \alpha_i f(u_i^{-1}(x')) + \beta_i(u_i^{-1}(x'))$$

olmak üzere

$$f(x') = f_i(x')$$

eşitliği sağlanmalıdır.

Şekil 2.24 de de görüleceği üzere, u_2 ye karşılık gelen v_2 fonksiyonu öyle bir fonksiyon olmalı ki, bir $x' \in [\frac{1}{2}, 1]$ noktası u_2^{-1} fonksiyonu ile geri çekildiğinde, elde edilen $x \in [0,1]$ noktasının f altındaki resmine v_2 uygulandığında, tam olarak x' noktasının f altındaki görüntüsü elde edilmelidir. Benzer biçimde v_1 fonksiyonu da aynı özelliği taşımalıdır. Şu halde v_i, x sabit tutulduğunda $y-$ekseni üzerinde tanımlı tek değişkenli ayarlama fonksiyonu olarak düşünülebilir. Yani, $x \in u_i([0,1])$ ve $x' = u_i(x)$ olmak üzere

$$v_{i,x}(y) = y - [f(x) - f(x')]$$

olarak alınabilir. Bu durumda verilen keyfi f fonksiyonu ve $i = 1, 2$ için

$$\alpha_i = 1,\ \beta_i(x) = f(u_i(x)) - f(x)$$

şeklinde alırsak

$$v_i(f(x)) = v_{i,x}(f(x)) = \alpha_i f(x) + \beta_i(x)$$

olacaktır.

$$\begin{aligned} f_i(x') &= v_i(f(x)) = v_i(f(u_i^{-1}(x'))) \\ &= f(u_i^{-1}(x')) + \beta_i(u_i^{-1}(x')) \\ &= f(u_i^{-1}(x')) + [f(u_i(u_i^{-1}(x'))) - f(u_i^{-1}(x'))] \\ &= f(x') \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Keyfi alınan bir f fonksiyonu için

$$\alpha_i = 1,\ \beta_i(x) = f(u_i(x)) - f(x)$$

olarak alındığı takdirde

$$f(x') = f_i(x')$$

elde edilir. Bu ise $[0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlı bütün sürekli fonksiyonların kendine benzer olması demektir. Bu ise istenilen bir sonuç değildir. O halde β_i x in keyfi bir fonksiyonu olarak alınamaz. Dolayısıyla v_i f in herhangi bir fonksiyonu olarak genellenemez.

β_i, Barnsley'in fonksiyonlar için kendine benzerlik yaklaşımından hareketle

$$\beta_i(x) = c_i x + f_i$$

olarak seçilebilir. Fakat bu durumun da genel atraktör yapısına uymadığını daha önce söylemiştik. Bu durumda β_i afin lineer fonksiyonu atraktörün yapısına uygun olarak seçilebilir. Yani A atraktörü $\mathbb{R}^2$ öklidyen uzayının alt kümesi ise $x = (x_1, x_2) \in A$ için

$$\beta_i(x) = \gamma_i x_1 + \delta_i x_2 + \eta_i$$

olarak almak mantıklı olacaktır. Benzer şekilde atraktör $\mathbb{R}^n$ öklidyen uzayın bir alt kümesi ise β_i $\mathbb{R}^n$ üzerindeki afin lineer fonksiyonların atraktör üzerine kısıtlanmışı olarak alınabilir. Örneğin SG için bu durumu inceleyecek olursak β_i, $\mathbb{R}^2$ öklidyen uzayı üzerindeki afin lineer dönüşümlerin SG üzerine kısıtlanmışı olarak alınabilir. Yani

$$\beta_i(x, y) = c_i x + d_i y + f_i$$

olabilir. Bu durumda SG üzerinde yeni kendine benzerlik anlayışımız şöyle olacaktır.

"$f : SG \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $x' \in u_i(SG)$ için

$$f(x') = \alpha_i f(u_i^{-1}(x')) + \beta_i(u_i^{-1}(x'))$$

olacak sekilde $\alpha_i, c_i, d_i, f_i \in \mathbb{R}$ varsa f ye kendine benzerdir denir."

SG üzerinde afin lineer dönüşümler bu anlamda da kendine benzer olurlar. Acaba SG üzerinde harmonik fonksiyonlar kendine benzer olur mu? Bunu istememizin nedeni ise SG üzerinde harmonik fonksiyonlar

$$\Delta f = 0$$

eşitliğini sağlayan fonksiyonlardır. Burada Δ Laplace operatörü gerçel sayılar üzerinde tanımlı gerçel değerli fonksiyonlar için türev operatörü olarak düşünülürse, harmonik fonksiyonlar SG üzerinde sabit fonksiyonlar olarak düşünülebilir. Yani harmonik fonksiyonlara bu gözle bakılacak olunursa kendine benzer olmasını beklemek mantıklı olacaktır. Fakat kolayca doğrulanacağı üzere harmonik fonksiyonlar için yukarıdaki eşitlikleri sağlayacak α_i, c_i, d_i, f_i katsayıları yoktur. Yani harmonik fonksiyonlar bu manada kendine benzer değildir. Düşüncemizi, atraktörün yapısı ile ilgili olarak önceki tanımımızla da paralel olacak şekilde ilerletirsek harmonik fonksiyonlar da sabitler gibi düşünülebileceği için, β_i kendisi de bir harmonik fonksiyon olarak alınabilir. Şimdi söz konusu bu durumu ele alalım. Strichartz ve ark. [3] tarafından Sierpinski üçgeni üzerindeki harmonik fonksiyonların uzayı $\mathcal{H}^0$ ile gösterilmiştir. Aynı notasyonu burada da kullanacak olursak,

$$\mathcal{H}^0 = \{f : SG \to \mathbb{R} \mid \Delta f = 0\}$$

dir. Köşe noktaları p_1, p_2, p_3 olan Sierpinski üçgeni

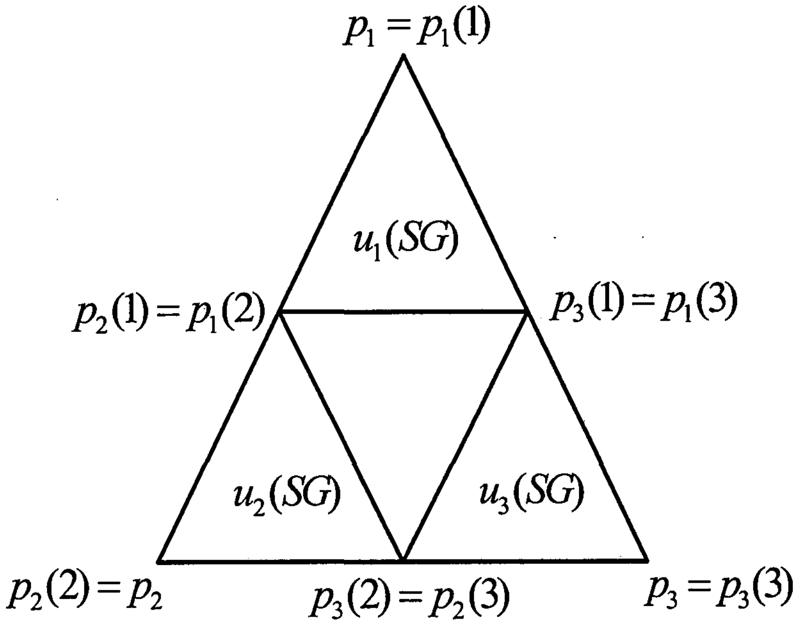
$$u_1(x) = \frac{x+p_1}{2}, u_2(x) = \frac{x+p_2}{2}, u_3(x) = \frac{x+p_3}{2}$$

olmak üzere $\{\mathbb{R}^2; u_1, u_2, u_3\}$ itere fonksiyon sisteminin atraktörüdür. Bu durumda $\mathcal{A}\{u_1, u_2, u_3\} = SG$ olmak üzere $f : SG \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun kendine benzerliğini şöyle tanımlayabiliriz. $\forall x' \in u_i(SG)$ $i = 1, 2, 3$ için

$$f(x') = \alpha_i f(u_i^{-1}(x')) + \beta_i(u_i^{-1}(x'))$$

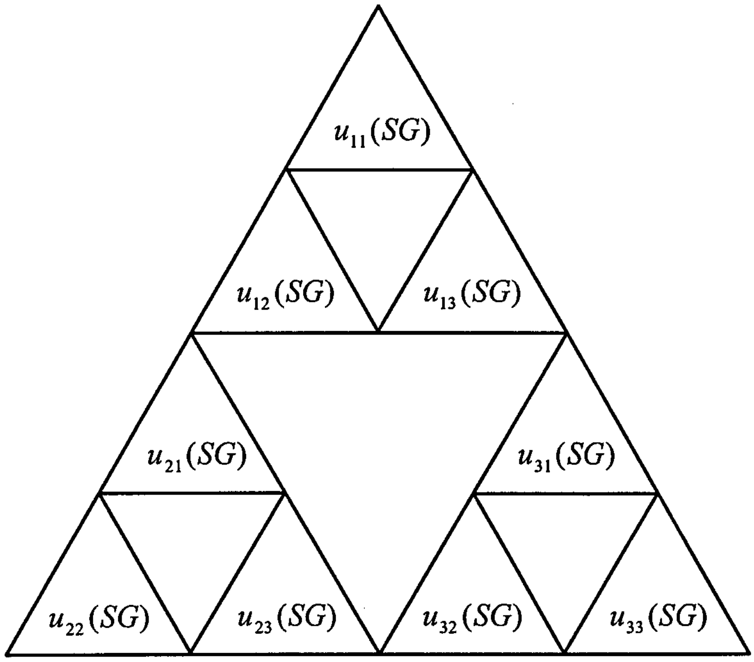
olacak şekilde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i \in \mathcal{H}^0$ varsa f ye kendine benzerdir diyelim.

Fakat elbette atraktörü SG olan daha başka itere fonksiyon sistemleri de vardır.



Şekil 2.25: $w = 1, 2, 3$ için $u_w(SG)$

Örneğin, $i, j = 1, 2, 3$ için $u_{ij}(x) = u_i(u_j(x))$ olmak üzere $\mathcal{A}\{u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{31}, u_{32}, u_{33}\} = SG$ dir.



Şekil 2.26: $w \in \{1,2,3\}^2$ için $u_w(SG)$

Benzer mantıkla $\{1,2,3\}^m = \{w_1 w_2 \cdots w_m \mid 1 \le w_1, w_2, ..., w_m \le 3\}$ ve $w \in \{1,2,3\}^m$ için

$$u_w = u_{w_1 w_2 ... w_m}(x) = u_{w_1}(u_{w_2}(...u_{w_m}(x)...))$$

olmak üzere

$$\mathcal{A}\{u_w\}_{w\in\{1,2,3\}^m} = SG$$

olduğu açıktır. Bu durumda SG üzerinde kendine benzer fonksiyon tanımı aşağıdaki gibi olacaktır.

Tanım 2.1 *$\mathcal{A}\{u_w\}_{w\in\{1,2,3\}^m} = SG$ olmak üzere $f : SG \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall\ x' \in u_w(SG)$ için*

$$f(x') = \alpha_w f(u_w^{-1}(x')) + \beta_w$$

olacak şekilde $\alpha_w \in \mathbb{R}$, $\beta_w \in \mathcal{H}^0$ ve m doğal sayısı var ise f ye SG üzerinde kendine benzer fonksiyon denir.

Örnek 2.3 *SG üzerinde tanımlı harmonik fonksiyonlar kendine benzer fonksiyonlardır.*

f, SG de harmonik bir fonksiyon olsun. $\mathcal{A}\{u_1, u_2, u_3\} = SG$ olmak üzere $x' \in u_i(SG), i = 1, 2, 3$ için

$$f(x') = \alpha_i f(u_i^{-1}(x')) + \beta_i(u_i^{-1}(x'))$$

eşitliğini sağlayacak $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ve $\beta_i \in \mathcal{H}^0$ olduğunu görelim. $x = u_i^{-1}(x')$ dersek $x \in SG$ dir. Bu durumda yukarıdaki eşitlik

$$f(u_i(x)) = \alpha_i f(x) + \beta_i(x)$$

eşitliğine dönüşür. f harmonik bir fonksiyon olmak üzere $\beta_i : SG \to \mathbb{R}$

$$\beta_i(x) = f(u_i(x))$$

olarak tanımlanan β_i fonksiyonunun da SG nin tamamı üzerinde harmonik olacağı açıktır. O halde $\alpha_i = 0$ ve $\beta_i(x) = f(u_i(x))$ olarak alınırsa istenilen eşitlik sağlanır dolayısıyla harmonik fonksiyonlar kendine benzer olur.

Örnek 2.4 *$\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı afin lineer fonksiyonların SG üzerine kısıtlanmışı kendine benzerdir.*

$\mathcal{A}\{u_1, u_2, u_3\} = SG$ olmak üzere $x' \in u_i(SG)$ için

$$f(x') = \alpha_i f(u_i^{-1}(x')) + \beta_i(u_i^{-1}(x'))$$

olacak şekilde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ve $\beta_i \in \mathcal{H}^0$ olduğunu görelim.

β_i fonksiyonunu şöyle tanımlayalım. Biliyoruz ki V_0 köşe noktaları kümesinde keyfi değerler verildiği takdirde V_0 da bu değerlere eşit ve SG üzerinde harmonik olan bir tek fonksiyon vardır. Ayrıca V_0 da verilen değerler her üç noktada da birbirine eşit ise bu durumda SG üzerine harmonik olarak genişleyen fonksiyon SG nin tamamında aynı değere sahip harmonik fonksiyon olacaktır. O halde $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\beta_i(x) = c$$

sabit fonksiyonu SG üzerinde harmonik fonksiyondur. Bu durumda afin lineer bir f fonksiyonu için $x' \in u_i(SG)$ olmak üzere

$$f(x') = \alpha_i f(u_i^{-1}(x')) + c$$

olacak şekilde $\alpha_i, c \in \mathbb{R}$ sayılarının varlığını ise daha önce görmüştük.

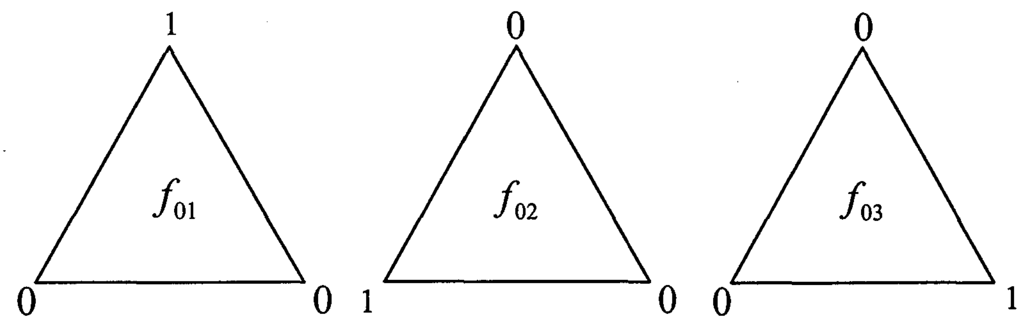
Şimdi SG üzerinde bir f fonksiyonunun kendine benzerliği için gerek ve yeter koşul arayalım.

$\mathcal{A}\{u_w\}_{w\in\{1,2,3\}^m} = SG$ olmak üzere $f : SG \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f kendine benzer ise bu durumda $\forall\ x' \in u_w(SG)$ için

$$f(x') = \alpha_w f(u_w^{-1}(x')) + \beta_w$$

olacak şekilde $\alpha_w \in \mathbb{R}$, $\beta_w \in \mathcal{H}^0$ vardır.

Şimdi



Şekil 2.27: $\mathcal{H}^0$ ın tabanları

sınır değerleriyle verilen f_{01}, f_{02}, f_{03} harmonik fonksiyonlarını düşünelim [3]. $\{f_{01}, f_{02}, f_{03}\}$, $\mathcal{H}^0$ ın bir tabanıdır [3]. Bu durumda β_w harmonik fonksiyonu f_{01}, f_{02}, f_{03} fonksiyonları cinsinden tek türlü olarak belirlidir. O halde $x \in SG$ için

$$\beta_w(x) = \beta_{w1} f_{01}(x) + \beta_{w2} f_{02}(x) + \beta_{w3} f_{03}(x)$$

olacak şekilde $\beta_{w1}, \beta_{w2}, \beta_{w3} \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. Bu durumda $x' \in u_w(SG)$ $w \in \{1,2,3\}^m$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(x') &= \alpha_w f(u_w^{-1}(x')) + \beta_w(u_w^{-1}(x')) \\ &= \alpha_w f(u_w^{-1}(x')) + \beta_{w1} f_{01}(u_w^{-1}(x')) + \beta_{w2} f_{02}(u_w^{-1}(x')) + \beta_{w3} f_{03}(u_w^{-1}(x')) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Tersine bu eşitliği sağlayacak şekilde α_w $\beta_{w1}, \beta_{w2}, \beta_{w3} \in \mathbb{R}$ sayıları var ise f kendine benzer olacaktır. O halde $\mathcal{A}\{u_w\}_{w\in\{1,2,3\}^m} = SG$ olmak üzere $f : SG \overset{s\ddot{u}rekli}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ fonksiyonunun kendine benzer olması için gerek ve yeter koşul $x' \in u_w(SG)$ $w \in \{1,2,3\}^m$ olmak üzere

$$f(x') = \alpha_w f(u_w^{-1}(x')) + \beta_{w1} f_{01}(u_w^{-1}(x')) + \beta_{w2} f_{02}(u_w^{-1}(x')) + \beta_{w3} f_{03}(u_w^{-1}(x'))$$

olacak şekilde α_w $\beta_{w1}, \beta_{w2}, \beta_{w3} \in \mathbb{R}$ olmasıdır.

2.2 Sierpinski Üçgeni Üzerinde Kendine Benzer Fonksiyonlar İçin İnterpolasyon Problemi

Şimdi SG üzerinde tanımlı kendine benzer fonksiyonlar için interpolasyon problemini ele alalım. Yani SG nin herhangi bir bölüntüsü ve bu bölüntü üzerinde keyfi değerler verildiği takdirde bu noktalardan geçen kendine benzer fonksiyonun varlığını araştıralım. Genel duruma adapte olabilmek amacıyla öncelikle V_1 üzerinde keyfi değerler verildiği takdirde bu noktalardan geçen bir kendine benzer fonksiyonun varlığını araştıralım. $f_0 : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda $f : SG \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $f \mid_{V_1} = f_0$ olacak şekilde bir kendine benzer bir fonksiyon bulmayı amaçlayalım.

$\mathcal{F} = \{f : SG \overset{s\ddot{u}rekli}{\longrightarrow} \mathbb{R} \mid f(p_1) = f_0(p_1), f(p_2) = f_0(p_2), f(p_3) = f_0(p_3)\}$ fonksiyon uzayını tanımlayalım. $\mathcal{F}$ uzayı üzerinde $f, g \in \mathcal{F}$ için

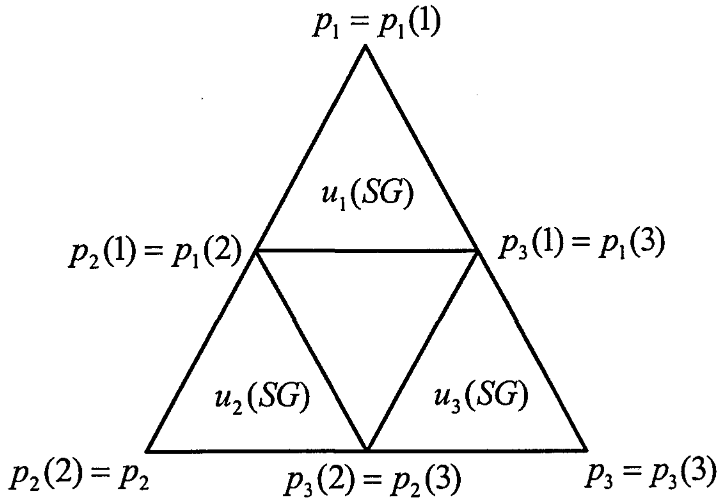
$$d(f,g) = \max_{x\in SG}\{|f(x) - g(x)|\}$$

metriğini tanımlayalım. $(\mathcal{F}, d)$ bu tanımlanan metrik ile tam metrik uzaydır. Amacımız $(\mathcal{F}, d)$ tam metrik uzayı üzerinde büzülme olacak şekilde uygun bir operatör tanımlamaktır. Daha sonraki amaç ise Büzülme teoremi gereğince bu operatörün sabit noktasının verilen noktalardan geçen kendine benzer fonksiyon olduğunu görmek olacaktır.

Bu mantıkla hareket edilirse $(\mathcal{F}, d)$ uzayı üzerinde $f \in \mathcal{F}$ ve $x' \in u_i(SG)$ için

$$(\mathcal{T}f)(x') = \alpha_i f(u_i^{-1}(x')) + \beta_{i1} f_{01}(u_i^{-1}(x')) + \beta_{i2} f_{02}(u_i^{-1}(x')) + \beta_{i3} f_{03}(u_i^{-1}(x'))$$

şeklinde bir $\mathcal{T}$ operatörü tanımlamak yerinde olacaktır. $\mathcal{T}$ operatörünün sabit noktasının verilen sınır değerlerinden geçen kendine benzer fonksiyon olması istenildiğinden, $\mathcal{T}f$ in de sınır noktalarında f_0 ile aynı değeri alması istenilecektir. Bu takdirde $V_0 \subset V_1$ olduğundan $\mathcal{T}f$ in V_0 da da f_0 ile aynı değeri alacağı açıktır. Ayrıca $V_1 \backslash V_0$ daki noktalar iki farklı şekilde elde edildiği için $\mathcal{T}f$ de bu noktalarda iki farklı şekilde tanımlıdır. Dolayısıyla istenilen bu eşitlikler aynı zamanda, aynı noktaya referans eden iki farklı temsilin $\mathcal{T}f$ altında aynı değerlere sahip olduğunu yani $\mathcal{T}f$ in iyi tanımlı olduğunu göstermektedir.



Şekil 2.28: $w = 1, 2, 3$ için $u_w(SG)$

Bu doğrultuda $p_1(i), p_2(i)$ ve $p_3(i)$ $i = 1, 2, 3$ noktaları için istenilen eşitlikler yazılırsa

$$
\begin{aligned}
f_0(p_1(i)) &= \mathcal{T}f(p_1(i)) \\
&= \alpha_i f(u_i^{-1}(p_1(i))) + \beta_{i1} f_{01}(u_i^{-1}(p_1(i))) + \beta_{i2} f_{02}(u_i^{-1}(p_1(i))) \\
&\quad + \beta_{i3} f_{03}(u_i^{-1}(p_1(i))) \\
f_0(p_2(i)) &= \mathcal{T}f(p_2(i)) \\
&= \alpha_i f(u_i^{-1}(p_2(i))) + \beta_{i1} f_{01}(u_i^{-1}(p_2(i))) + \beta_{i2} f_{02}(u_i^{-1}(p_2(i))) \\
&\quad + \beta_{i3} f_{03}(u_i^{-1}(p_2(i))) \\
f_0(p_3(i)) &= \mathcal{T}f(p_3(i)) \\
&= \alpha_i f(u_i^{-1}(p_3(i))) + \beta_{i1} f_{01}(u_i^{-1}(p_3(i))) + \beta_{i2} f_{02}(u_i^{-1}(p_3(i))) \\
&\quad + \beta_{i3} f_{03}(u_i^{-1}(p_3(i)))
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$u_i^{-1}(p_1(i)) = p_1, u_i^{-1}(p_2(i)) = p_2, u_i^{-1}(p_3(i)) = p_3$$

$$
\begin{aligned}
f_{01}(p_1) &= 1, f_{02}(p_2) = f_{03}(p_3) = 0 \\
f_{02}(p_2) &= 1, f_{02}(p_1) = f_{02}(p_3) = 0 \\
f_{03}(p_3) &= 1, f_{03}(p_1) = f_{03}(p_2) = 0
\end{aligned}
$$

olduğundan yukarıdaki eşitlikler

$$
\begin{aligned}
f_0(p_1(i)) &= \alpha_i f(p_1) + \beta_{i1} \\
f_0(p_2(i)) &= \alpha_i f(p_2) + \beta_{i2} \\
f_0(p_3(i)) &= \alpha_i f(p_3) + \beta_{i3}
\end{aligned}
$$

haline dönüşür. $f \in \mathcal{F}$ olduğundan $f(p_1) = f_0(p_1)$, $f(p_2) = f_0(p_2)$ ve $f(p_3) = f_0(p_3)$ olduğu da gözönüne alınarak $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3}$ katsayıları verilen f_0 fonksiyonuna ve α_i ye bağlı olarak çözülürse

$$
\begin{aligned}
\beta_{i1} &= f_0(p_1(i)) - \alpha_i f_0(p_1) \\
\beta_{i2} &= f_0(p_2(i)) - \alpha_i f_0(p_2) \\
\beta_{i3} &= f_0(p_3(i)) - \alpha_i f_0(p_3)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. O halde $f \in \mathcal{F}$ ve $x' \in u_i(SG)$ olmak üzere $u_i^{-1}(x') = x$ dersek

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}f)(x') &= \alpha_i f(x) + [f_0(p_1(i)) - \alpha_i f_0(p_1)]f_{01}(x) + [f_0(p_2(i)) - \alpha_i f_0(p_2)]f_{02}(x) \\ &\quad + [f_0(p_3(i)) - \alpha_i f_0(p_3)]f_{03}(x)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Şimdi bir $f \in \mathcal{F}$ için $\mathcal{T}f \in \mathcal{F}$ olduğunu görelim. Bunun için öncelikle

$$(\mathcal{T}f)(p_1) = f_0(p_1), (\mathcal{T}f)(p_2) = f_0(p_2), (\mathcal{T}f)(p_3) = f_0(p_3)$$

olduğu açıktır. Ayrıca $f \in \mathcal{F}$ olduğundan $\mathcal{T}f$ her bir $u_i(SG)$ de süreklidir. $V_1 \backslash V_0$ daki noktalar da da iyi tanımlı olduğundan dolayı $\mathcal{T}f$ SG nin tamamı üzerinde süreklidir.

Şimdi $\mathcal{T}$ operatörünün büzülme olması için gerekli koşulları araştıralım. $f, g \in \mathcal{F}$ için

$$d(\mathcal{T}f, \mathcal{T}g) \leq sd(f, g)$$

olacak şekilde $0 \leq s < 1$ gerçel sayısının varlığını araştıralım.

$$d(\mathcal{T}f, \mathcal{T}g) = \max_{x \in SG}\{|(\mathcal{T}f)(x) - (\mathcal{T}g)(x)|\}$$

dir. $SG = u_1(SG) \cup u_2(SG) \cup u_3(SG)$ olduğundan bir $x' \in u_i(SG)$ için

$$\begin{aligned}\left|(\mathcal{T}f)(x') - (\mathcal{T}g)(x')\right| &= |\alpha_i| \left|f(u_i^{-1}(x') - g(u_i^{-1}(x'))\right| \\ &\leq |\alpha_i| \, d(f, g)\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $s = \max_{i=1,2,3}\{|\alpha_i|\}$seçersek her $x \in SG$ için

$$|(\mathcal{T}f)(x) - (\mathcal{T}g)(x)| \leq sd(f, g)$$

olur. Dolayısıyla

$$d(\mathcal{T}f, \mathcal{T}g) \leq sd(f, g)$$

elde edilir. Bu durumda $0 < |\alpha_i| < 1$ seçilirse $0 < s < 1$ olur, yani $\mathcal{T}$ büzülme olur. O halde $\mathcal{T}$ nin tek bir f sabit noktası vardır. Bu durumda

$$\mathcal{T}f = f$$

olacağından dolayı $x' \in u_i(SG)$ olmak üzere dersek

$$\begin{aligned} f(x') &= \alpha_i f(u_i^{-1}(x')) + [f_0(p_1(i)) - \alpha_i f_0(p_1)] f_{01}(u_i^{-1}(x')) \\ &\quad + [f_0(p_2(i)) - \alpha_i f_0(p_2)] f_{02}(u_i^{-1}(x')) \\ &\quad + [f_0(p_3(i)) - \alpha_i f_0(p_3)] f_{03}(u_i^{-1}(x')) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla f kendine benzerdir ve

$$f \mid_{V_0} = f_0$$

dır.

Ayrıca $\forall i = 1,2,3$ için $\alpha_i = 0$ olması durumunda ise $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3}$ katsayıuları tek türlü olarak belirlidir. Bu durumda ise aranılan kendine benzer fonksiyon verilen f_0 fonksiyon değerleriyle her bir $u_1(SG), u_2(SG)$ ve $u_3(SG)$ kümelerine harmonik olarak genişleyen, yani parçalı harmonik bir fonksiyondur. Çünkü,(6) eşitliğinde $\forall i = 1,2,3$ için $\alpha_i = 0$ yazılırsa $\mathcal{T}$ operatörünün sabit noktası f olmak üzere $x' \in u_i(SG)$, $i = 1,2,3$ için

$$\begin{aligned} f(x') &= f_0(p_1(i)) f_{01}(u_i^{-1}(x')) + f_0(p_2(i)) f_{02}(u_i^{-1}(x')) \\ &\quad + f_0(p_3(i)) f_{03}(u_i^{-1}(x')) \end{aligned}$$

olacaktır. f_{01}, f_{02} ve f_{03} fonksiyonları SG de harmonik ve harmonik fonksiyonların lineer birleşimi de harmonik olacağından eşitliğin sağ tarafı SG de harmonik bir fonksiyondur. Dolayısıyla bu eşitlikten $i = 1,2,3$ için $f \mid_{u_i}$ harmoniktir. Ayrıca f nin V_1 e kısıtlanmışı f_0 olacağından f her bir küçük üçgenin köşe noktalarında f_0 ile aynı değere sahip olacaktır. $i = 1,2,3$ için $u_i(SG)$ nin $p_1(i), p_2(i), p_3(i)$ köşe noktalarında bu değere sahip ve harmonik bir tek fonksiyon olacağından f, iddia ettiğimiz gibi parçalı harmonik bir fonksiyon olacaktır.

Yapılan bu incelemeler sonucu V_1 köşe noktaları kümesi üzerinde keyfi değerler verildiği takdirde bu noktalardan geçen bir tek kendine benzer fonksi yonun varlığından söz edebiliriz. V_1 için izlenilen bu yolla SG nin herhangi bir bölüntüsü ve bu bölüntüye karşılık keyfi değerler verildiği takdirde bu noktalardan geçen kendine benzer bir fonksiyonun varlığı sezilmektedir. Şimdi bununla ilgili olarak aşağıdaki teoremi ifade ve ispat ediyoruz.

Teorem 2.1 *$f_0 : V_m \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde*

$$f \mid_{V_m} = f_0$$

ve $\forall w \in \{1,2,3\}^m$ için

$$0 < |\alpha_w| < 1$$

olacak şekilde bir tek $f : SG \to \mathbb{R}$ kendine benzer fonksiyonu vardır.

Kanıt.

$$u_1(x) = \frac{x + p_1}{2}, u_2(x) = \frac{x + p_2}{2}, u_3(x) = \frac{x + p3}{2}$$

ve $w = w_1 w_2 ... w_m \in \{1,2,3\}^m$ için

$$u_{w_1 w_2 ... w_m}(x) = \frac{u_{w_1 w_2 ... w_{m-1}}(x) + p_{w_m}(w_1 w_2 ... w_{m-1})}{2}$$

olmak üzere

$$\mathcal{A}\{u_w\}_{w \in \{1,2,3\}^m} = SG$$

dir. Şimdi

$$\mathcal{F} = \{f : SG \overset{sürekli}{\to} \mathbb{R} \mid f(p_1) = f_0(p_1),\ f(p_2) = f_0(p_2),\ f(p_3) = f_0(p_3)\}$$

fonksiyon uzayını tanımlayalım. $f, g \in \mathcal{F}$ olmak üzere

$$d(f,g) = \max_{x \in SG}\{|f(x) - g(x)|\}$$

metriği ile $(\mathcal{F}, d)$ bir tam metrik uzaydır. Şimdi tamamen V_1 dekine benzer mantıkla $(\mathcal{F}, d)$ tam metrik uzayı üzerinde büzülme olacak şekilde uygun bir operatör tanımlayalım. Daha sonra büzülme teoremi gereğince bu operatörün sabit noktasının istenilen kendine benzer fonksiyon olmasını isteyeceğiz. Dolayısıyla bu mantıkla hareket edersek $(\mathcal{F}, d)$ uzayı üzerinde $f \in \mathcal{F}$ ve $x' \in u_w(SG)$ için

$$(\mathcal{T}f)(x') = \alpha_w f(u_w^{-1}(x')) + \beta_{w1} f_{01}(u_w^{-1}(x')) + \beta_{w2} f_{02}(u_w^{-1}(x')) + \beta_{w3} f_{03}(u_w^{-1}(x'))$$

şeklinde bir $\mathcal{T}$ operatörü tanımlamak yerinde olacaktır. $\mathcal{T}$ operatörünün sabit noktasının V_k da f_0 ile aynı değerleri almasını istediğimizden dolayı, $\mathcal{T}f$ in de

V_k da f_0 ile aynı değerleri alması gerekmektedir. Bu doğrultuda $p_1(w), p_2(w)$ ve $p_3(w)$ noktaları için istenilen eşitlikleri yazarsak

$$\begin{aligned}
f_0(p_1(w)) &= \mathcal{T}f(p_1(w)) \\
&= \alpha_w f(u_w^{-1}(p_1(w))) + \beta_{w1} f_{01}(u_w^{-1}(p_1(w))) + \beta_{w2} f_{02}(u_w^{-1}(p_1(w))) \\
&\quad + \beta_{w3} f_{03}(u_w^{-1}(p_1(w))) \\
f_0(p_2(w)) &= \mathcal{T}f(p_2(w)) \\
&= \alpha_w f(u_w^{-1}(p_2(w))) + \beta_{w1} f_{01}(u_w^{-1}(p_2(w))) + \beta_{w2} f_{02}(u_w^{-1}(p_2(w))) \\
&\quad + \beta_{w3} f_{03}(u_w^{-1}(p_2(w))) \\
f_0(p_3(w)) &= \mathcal{T}f(p_3(w)) \\
&= \alpha_w f(u_w^{-1}(p_3(w))) + \beta_{w1} f_{01}(u_w^{-1}(p_3(w))) + \beta_{w2} f_{02}(u_w^{-1}(p_3(w))) \\
&\quad + \beta_{w3} f_{03}(u_w^{-1}(p_3(w)))
\end{aligned}$$

elde edilir. $u_w^{-1}(p_1(w)) = p_1$, $u_w^{-1}(p_2(w)) = p_2$, $u_w^{-1}(p_3(w)) = p_3$

$$\begin{aligned}
f_{01}(p_1) &= 1, f_{01}(p_2) = f_{01}(p_3) = 0 \\
f_{02}(p_2) &= 1, f_{02}(p_1) = f_{02}(p_3) = 0 \\
f_{03}(p_3) &= 1, f_{03}(p_1) = f_{03}(p_2) = 0
\end{aligned}$$

olduğundan yukarıdaki eşitlikler

$$\begin{aligned}
f_0(p_1(w)) &= \alpha_w f(p_1) + \beta_{w1} \\
f_0(p_2(w)) &= \alpha_w f(p_2) + \beta_{w2} \\
f_0(p_3(w)) &= \alpha_w f(p_3) + \beta_{w3}
\end{aligned}$$

haline dönüşür. Ayrıca $f \in \mathcal{F}$ olduğundan $f(p_1) = f_0(p_1)$, $f(p_2) = f_0(p_2)$ ve $f(p_3) = f_0(p_3)$ dır. Bu ifadeler de yukarıdaki eşitliklerde yerine yazılarak $\beta_{w1}, \beta_{w2}, \beta_{w3}$ değerleri α_w ye bağlı olarak çözülürse

$$\begin{aligned}
\beta_{w1} &= f_0(p_1(w)) - \alpha_w f_0(p_1) \\
\beta_{w2} &= f_0(p_2(w)) - \alpha_w f_0(p_2) \\
\beta_{w3} &= f_0(p_3(w)) - \alpha_w f_0(p_3)
\end{aligned}$$

olarak bulunur O halde $\mathcal{T}$ operatörü $x' \in u_w(SG)$ için

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}f)(x') &= \alpha_w f(u_w^{-1}(x')) + [f_0(p_1(w)) - \alpha_w f_0(p_1)]f_{01}(u_w^{-1}(x')) \\ &\quad +[f_0(p_2(w)) - \alpha_w f_0(p_2)]f_{02}(u_w^{-1}(x')) \\ &\quad +[f_0(p_3(w)) - \alpha_w f_0(p_3)]f_{03}(u_w^{-1}(x'))\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Şimdi $f \in \mathcal{F}$ iken $\mathcal{T}f \in \mathcal{F}$ olduğunu görelim. Bunun için öncelikle $i = 1, 2, 3$ için

$$(\mathcal{T}f)(p_i) = f_0(p_i)$$

olduğunu daha sonra da $\mathcal{T}f$ in SG nin tamamı üzerinde sürekli bir fonksiyon olduğunu göstermeliyiz. Şimdi

$$(\mathcal{T}f)(p_1) = f_0(p_1)$$

olduğunu görelim. $w = 11\cdots1$ olmak üzere $p_1 \in u_w$ olduğundan

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}f)(p_1) &= \alpha_w f(u_w^{-1}(p_1)) + [f_0(p_1(w)) - \alpha_w f_0(p_1)]f_{01}(u_w^{-1}(p_1)) \\ &\quad +[f_0(p_2(w)) - \alpha_w f_0(p_2)]f_{02}(u_w^{-1}(p_1)) \\ &\quad +[f_0(p_3(w)) - \alpha_w f_0(p_3)]f_{03}(u_w^{-1}(p_1))\end{aligned}$$

dir. $p_1(w) = u_w(p_1)$ olduğundan $u_w^{-1}(p_1(w)) = p_1$ ve $w = 11\cdots1$ için $p_1(w) = p_1$, $f_{01}(p_1) = 1$, $f_{02}(p_1) = f_{03}(p_1) = 0$ olduğundan

$$(\mathcal{T}f)(p_1) = \alpha_w f_0(p_1) + [f_0(p_1) - \alpha_w f_0(p_1)] = f_0(p_1)$$

dir. Benzer şekilde $w = 22\cdots2$ olmak üzere $p_2 \in u_w(SG)$ dir. O halde

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}f)(p_2) &= \alpha_w f(u_w^{-1}(p_2)) + [f_0(p_1(w)) - \alpha_w f_0(p_1)]f_{01}(u_w^{-1}(p_2)) \\ &\quad +[f_0(p_2(w)) - \alpha_w f_0(p_2)]f_{02}(u_w^{-1}(p_2)) \\ &\quad +[f_0(p_3(w)) - \alpha_w f_0(p_3)]f_{03}(u_w^{-1}(p_2))\end{aligned}$$

dir.

$$u_w^{-1}(p_2) = p_2, p_2(w) = p_2$$

$$f_{00}(p_2) = f_{02}(p_2) = 0, f_{01}(p_2) = 1$$

olduğundan

$$(\mathcal{T}f)(p_2) = \alpha_w f_0(p_2) + [f_0(p_2) - \alpha_w f_0(p_2)] = f_0(p_2)$$

olarak elde edilir. $w = 33\cdots 3$ için $p_3 \in u_3(SG)$ olduğundan

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}f)(p3) &= \alpha_w f(u_w^{-1}(p_3)) + [f_0(p_1(w)) - \alpha_w f_0(p_1)]f_{01}(u_w^{-1}(p_3)) \\ &+[f_0(p_2(w)) - \alpha_w f_0(p_2)]f_{02}(u_w^{-1}(p_3)) \\ &+[f_0(p_3(w)) - \alpha_w f_0(p_3)]f_{03}(u_w^{-1}(p_3))\end{aligned}$$

dir.

$$u_w^{-1}(p_3) = p_3, p_3(w) = p_3$$

$$f_{01}(p_3) = f_{02}(p_3) = 0, f_{03}(p_3) = 1$$

olduğundan

$$(\mathcal{T}f)(p_3) = \alpha_w f(p_3) + [f_0(p_3) - \alpha_w f_0(p_3)] = f_0(p_3)$$

dir. Şimdi $\mathcal{T}f$ in SG nin tamamı üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. $\mathcal{T}f$ her bir $w \in \{1,2,3\}^m$ için $u_w(SG)$ de süreklidir. $\mathcal{T}f$, V_k/V_0 daki noktalarda iki farklı biçimde belirlidir. $\mathcal{T}f$ in sürekli hatta daha önce fonksiyon olabilmesi için bu farklı belirlemeden elde edilen değerlerin aynı olduğunu görmeliyiz. Bu durumda $\mathcal{T}f$ zaten sürekli olacaktır. Şimdi keyfi bir $p_i(w) \in V_k/V_0$ alalım. Bu durumda

$$p_i(w) = p_j(w')$$

olacak şekilde $j = 1,2,3$ ve $w' \in \{1,2,3\}^m$ vardır. $\mathcal{T}f$ in tanımlanışından dolayı

$$\mathcal{T}f(p_i(w)) = f_0(p_i(w))$$

$$\mathcal{T}f(p_j(w')) = f_0(p_j(w'))$$

dir. $p_i(w) = p_j(w')$ ve f_0 bir fonksiyon olduğundan dolayı

$$f_0(p_i(w)) = f_0(p_j(w'))$$

dir. Yani

$$\mathcal{T}f(p_i(w)) = \mathcal{T}f(p_j(w'))$$

dir. Yani $\mathcal{T}f$ süreklidir. Şimdi $|\alpha_w| < 1$ için $\mathcal{T}$ nin bir büzülme dönüşümü olduğunu gösterelim. $\mathcal{T}f, \mathcal{T}g \in \mathcal{F}$ olduğundan

$$d(\mathcal{T}f, \mathcal{T}g) = \max_{x \in SG}\{|(\mathcal{T}f)(x) - (\mathcal{T}g)(x)|\}$$

şeklindedir. Keyfi bir $x' \in u_w(SG)$ için

$$\begin{aligned} \left|(\mathcal{T}f)(x') - (\mathcal{T}g)(x')\right| &= |\alpha_w| \left|f(u_w^{-1}(x')) - g(u_w^{-1}(x'))\right| \\ &\leq |\alpha_w|\, d(f,g) \end{aligned}$$

dir.

$$s = \max_{w \in \{1,2,3\}^m}\{|\alpha_w|\}$$

olmak üzere $|s| < 1$ dir. O halde $x \in SG$ için

$$|(\mathcal{T}f)(x) - (\mathcal{T}g)(x)| \leq s d(f,g)$$

dir. Sonuç olarak

$$d(\mathcal{T}f, \mathcal{T}g) \leq s d(f,g)$$

dir, yani $\mathcal{T}$ $|\alpha_w| < 1$ için büzülmedir. Büzülme teoremi gereğince

$$Tf^* = f^*$$

olacak şekilde bir tek $f^* \in \mathcal{F}$ vardır ve $f^* |_{V_k} = f_0$ dır. Bu durumda $\beta_{w1}, \beta_{w2}, \beta_{w3}$ bulunan değerler olmak üzere $x' \in u_w(SG)$ $w \in \{1,2,3\}^m$ için

$$f^*(x') = \alpha_w f^*(u_w^{-1}(x')) + \beta_{w1} f_{01}(u_w^{-1}(x')) + \beta_{w2} f_{02}(u_w^{-1}(x')) + \beta_{w3} f_{03}(u_w^{-1}(x'))$$

dir. Yani f^* kendine benzerdir. ■

V_1 dekine benzer olarak $\forall w \in \{1,2,3\}^m, \alpha_w = 0$ olması durumunda aranan kendine benzer fonksiyon her bir $u_w(SG)$ küçük üçgenine verilen f_0 fonksiyonunun değerleri ile harmonik olarak genişleyen parçalı harmonik fonksiyondur.

KAYNAKLAR

[1] BARNSLEY, M. F., *Fractals Everywhere*, London: Academic Press, (1993).

[2] YAMAGUTI, M., HATA, M.ve KIGAMI, J., *Mathematics of Fractals,* USA: American Mathematical Society, (1997).

[3] NEEDLEMAN, J., STRICHARTZ, R. S., TEPLYAEV, A. ve YUNG, P., *Calculus On The Sierpinski Gasket I: Polynomials, Exponentials And Power Series*, Preprint, (2003).

[4] DALRYMPLE, K., STRICHARTZ, R. S. ve VINSON, J. P., *Fractal Differential Equations on the Sierpinski Gasket,* The Journal of Fourier Analysis and Applications, **5**, 203-284 (1999).