ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.: 3 - Sayı/No: 3 : 401-404 (2002)
XIV. Ulusal Matematik Sempozyumu Özel Sayısı/Special Issue for XIVth National Mathematics Symposium

ARAŞTIRMA MAKALESİ/**RESEARCH ARTICLE**

GCD MATRİSİNİN KARAKTERİSTİK POLİNOMU ÜZERİNE

Ercan ALTINIŞIK[1]

ÖZ

$S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ elemanları pozitif tamsayılar olan bir küme olsun. (x_i, x_j), x_i ve x_j tamsayılarının en büyük ortak bölenini göstermek üzere $n \times n$ tipindeki $(S) = (s_{ij}) = ((x_i, x_j))$ matrisine, S kümesi üzerinde en büyük ortak bölen (Greatest Common Divisor, GCD) matrisi denir. Bu çalışmada GCD matrisinin karakteristik polinomunun katsayıları Euler'in toplam fonksiyonu ve S kümesi üzerinde tanımlanan bir (0-1) matrisinin, alt matrislerinin determinantları cinsinden hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: GCD matrisi, Euler'in toplam fonksiyonu, Çarpan kapalı küme, Karakteristik polinom

ON THE CHARACTERISTIC POLYNOMIAL OF THE GCD MATRIX

ABSTRACT

Let $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ be a set of distinct positive integers. The $n \times n$ matrix $(S) = (s_{ij})$, where $s_{ij} = (x_i, x_j)$, the greatest common divisor of x_i and x_j , is called the greatest common divisor (GCD) matrix on S . In this paper, coefficients of the characteristic polynomial of the GCD matrix are calculated in terms of Euler's totient function and determinants of submatrices of a (0-1) matrix defined on S.

Key Words: The GCD matrix, Euler's totient function, Factor closed set, Characteristic polynomial

1. GİRİŞ

Bu bölümde, Beslin ve Ligh (1989) tarafından ilk kez çalışılan GCD matrisleri tanıtılacak ve bu matrislerle ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1. *$S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ elemanları farklı pozitif tamsayılar olan bir küme olsun. (x_i, x_j) , x_i ve x_j tamsayılarının en büyük ortak bölenini göstermek üzere $n \times n$ tipindeki $(S) = (s_{ij}) = ((x_i, x_j))$ matrisine, S kümesi üzerinde en büyük ortak bölen (Greatest Common Divisor, GCD) matrisi denir.*

Tanım 2. *Elemanları pozitif tamsayılar olan bir S kümesinin her elemanının pozitif tamsayı bölenleri yine S kümesinin elemanları oluyorsa, S kümesine çarpan kapalıdır (Factor Closed, FC) denir.*

Herhangi bir pozitif tamsayı kümesinin çarpan kapalı bir pozitif tamsayı kümesi tarafından kapsanacağı açıktır. $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesini kapsayan en küçük çarpan kapalı kümeye S kümesinin çarpan kapanışı denir ve $\bar{S}$ ile gösterilir. Bu çalışmada, aksi belirtilmedikçe, $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ elemanları farklı pozitif tamsayılar olan bir kümeyi ve $\bar{S} = \{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m\}$, S kümesinin çarpan kapanışını belirtecektir.

Teorem 3. *$n \times m$ tipinde $A = (a_{ij})$ matrisi*

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{\phi(x_j)} & , \quad x_j \mid x_i \quad \ni x_i \in S \quad ve \quad x_j \in \bar{S} \\ 0 & , \quad aksi\ halde \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde S kümesi üzerindeki GCD matrisi (S) , $(S) = AA^T$ şeklinde

[1]Selçuk Üniversitesi, Akören Ali Rıza Ercan Meslek Yüksekokulu Kayasu Yolu Perçinlik Mevkii 42460 Akören - Konya
E-posta: altinisikercan@hotmail.com

Geliş: 15 Şubat 2002; **Kabul:** 25 Kasım 2002.

yazılabilir. Burada A^T , A matrisinin transpozudur. (Beslin ve Ligh, 1989)

Sonuç 4. *$S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ çarpan kapalı ise ϕ , Euler'in toplam fonksiyonu olmak üzere*

$$\det(S) = \phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_n).$$

(Li, 1990)

$\lambda_j = \phi(d_j)$ olmak üzere

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$$

köşegen matrisi ve

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 \quad , \quad x_j \mid x_i \quad \ni x_i \in S \quad ve \quad x_j \in \bar{S} \\ 0 \quad , \quad \text{aksi halde} \end{cases} \tag{1}$$

olmak üzere $n \times m$ tipinde $E = (e_{ij})$ matrisi tanımlansın. Bu taktirde Teorem 1 de verilen $A = (a_{ij})$ matrisi, $A = E\Lambda^{1/2}$ olarak yazılabilir. Burada $\Lambda^{1/2} = diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_m})$ dir. (Beslin ve Ligh, 1989)

Sonuç 5. *$S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi üzerindeki (S) GCD matrisi, $(S) = E\Lambda E^T$ şeklinde yazılabilir. (Li, 1990)*

Li (1990) çalışmasında, çarpan kapalı olmayan $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi üzerindeki GCD matrisinin determinantının değerini aşağıdaki teoremle vermiştir.

Teorem 6. *$E = (e_{ij})$, elemanları (1) ile verilen matris ve $E_{(k_1,k_2,...,k_n)}$ matrisi, $E = (e_{ij})$ matrisinin $k_1, k_2, ..., k_n$ inci sütunları hariç diğer sütunlarının silinmesi ile elde edilen $E = (e_{ij})$ matrisinin bir alt matrisi olsun. $\bar{S} = \{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m\}$, S kümesinin çarpan kapanışı olmak üzere $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi üzerindeki GCD matrisinin determinantı,*

$$\det(S) = \sum_{1 \le k_1 < ... < k_n \le m} \left[\left(\det E_{(k_1,...,k_n)} \right)^2 \phi(x_{k_1})...\phi(x_{k_n}) \right] \tag{2}$$

2. TEMEL SONUÇLAR

Bu bölümde ilk olarak, $\bar{S}$ kümesi yerine $\bar{S}$ kümesini kapsayan çarpan kapalı bir pozitif tamsayı kümesi alınması durumunda Teorem 2 nin iddiasının değişmeyeceği gösterilecektir. Sonra $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesinin bir alt kümesi üzerindeki GCD matrisinin determinantının Teorem 2 yardımıyla hesaplanabileceği ispatlanacaktır. Bütün bunların ışığında $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesinin r elemanlı alt kümeleri üzerindeki GCD matrislerinin determinantları toplamı, elemanları (1) ile verilen $E = (e_{ij})$ matrisinin uygun mertebeli alt matrislerinin determinantları ve Euler'in toplam fonksiyonu cinsinden hesaplanacaktır. Son olarak bu teoremden hareketle, çalışmamızın esas sonucu verilecektir.

Yardımcı Teorem 7.

$$S' = \{x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_u\}$$

, $\bar{S}$ kümesini kapsayan çarpan kapalı bir pozitif tamsayı kümesi olsun. $n \times u$ tipinde $G = (g_{ij})$ matrisi

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 \quad , \quad x_j \mid x_i \quad \ni x_i \in S \quad ve \quad x_j \in S' \\ 0 \quad , \quad \text{aksi halde} \end{cases} \tag{3}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde S kümesi üzerindeki GCD matrisinin determinantı

$$\det(S) = \sum_{1 \le k_1 < ... < k_n \le u} \left(\det G_{(k_1,...,k_n)} \right)^2 \phi(x_{k_1})...\phi(x_{k_n}). \tag{4}$$

Kanıt. $\bar{S} = \{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m\}$, $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesinin çarpan kapanışı olduğundan her $j = m+1, m+2, \ldots, u$ için x_j pozitif tamsayıları, S kümesinin hiçbir elemanını bölmeyecektir. Buradan $E = (e_{ij})$, elemanları (1) ile verilen $n \times m$ tipinde matris ve $0_{n\times(u-m)}$, $n \times (u-m)$ tipinde sıfır matrisi olmak üzere G matrisi, $G = [E_{n\times m}, 0_{n\times(u-m)}]$ şeklinde yazılabilir. Öyleyse (4) toplamında $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ olmak üzere $\exists k_j \in \{m+1, m+2, \ldots, u\}$ ise $\det G_{(k_1,k_2,...,k_n)} = 0$ olacaktır. Buradan

$$\sum_{1 \le k_1 < ... < k_n \le u} \left(\det G_{(k_1,...,k_n)} \right)^2 \phi(x_{k_1})...\phi(x_{k_n}) \tag{5}$$

toplamında $k_1, k_2, ..., k_n$ leri

$$1 \le k_1 < k_2 < ... < k_n \le m$$

şeklinde kısıtlayabiliriz. O halde (5) toplamı, (2) eşitliğinin sağ tarafına eşit olur. Bu da ispatı tamamlar.

$S_t^{(r)} = \{x_{t_1}, x_{t_2}, ..., x_{t_r}\}$, $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesinin r elemanlı bir alt kümesi olsun. $E = (e_{ij})$, elemanları (1) ile verilen matris olmak üzere

$$E\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_r \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_r \end{pmatrix},$$

$E = (e_{ij})$ matrisinin $t_1, t_2, \ldots, t_r$ yinci satırları ve $k_1, k_2, \ldots, k_r$ yinci sütunları hariç diğer tüm satır ve sütunlarının silinmesi ile elde edilen $E = (e_{ij})$ matrisinin bir alt matrisi olsun.

Yardımcı Teorem 8. *$S_t^{(r)}$ kümesi üzerindeki GCD matrisinin determinantı,*

$$\det\left(S_t^{(r)}\right) = \sum_{1 \le k_1 < ... < k_r \le m} \left[\left(\det E\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix} \right)^2 \phi(x_{k_1})...\phi(x_{k_r}) \right].$$

Kanıt. $S_t^{(r)}$ kümesinin çarpan kapanışı

$$\bar{S}_t^{(r)} = \{x_{t_1}, x_{t_2}, ..., x_{t_r}, x_{t_{r+1}}, ..., x_{t_s}\}$$

olsun. $S_t^{(r)}$ kümesi üzerindeki GCD matrisinin $ij-$ elemanı,

$$\begin{aligned} \left(S_t^{(r)}\right)_{ij} &= (x_{t_i}, x_{t_j}) = \sum_{\substack{x_{t_k}|x_{t_i} \\ x_{t_k}|x_{t_j}}} \phi(x_{t_k}) \\ &= \sum_{k=1}^{s} \phi(x_{t_k}) e_{t_i t_k} e_{t_j t_k} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada $e_{t_i t_j}$, elemanları (1) ile verilen $E = (e_{ij})$ matrisinin $t_i t_j-$ elemanıdır. Bu taktirde $\left(S_t^{(r)}\right)$ matrisi,

$$\left(S_t^{(r)}\right) = E^{(t_1,t_2,\ldots,t_r)} \Lambda^{(t_1,t_2,\ldots,t_r)} (E^{(t_1,t_2,\ldots,t_r)})^T$$

şeklinde yazılabilir. Burada $E^{(t_1,t_2,\ldots,t_r)}$ ve $\Lambda^{(t_1,t_2,\ldots,t_r)}$ matrisleri, sırasıyla $E = (e_{ij})$ ve $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ matrislerinin $t_1, t_2, \ldots, t_r$ inci satırları hariç diğer satırlarının silinmesi ile elde edilen, $E = (e_{ij})$ ve Λ matrislerinin alt matrisleridir. Diğer taraftan

$$\bar{S}_t^{(r)} = \{x_{t_1}, x_{t_2}, ..., x_{t_r}, x_{t_{r+1}}, ..., x_{t_s}\} \subset \bar{S}$$

olduğundan Teorem 2 ve Yardımcı Teorem 1 den ispat hemen elde edilir.

Teorem 9. *$S = \{x_1, ..., x_n\}$ kümesinin r elemanlı alt kümeleri üzerindeki GCD matrislerinin determinantları toplamı a_r ise*

$$a_r = \sum_{\substack{1 \le t_1 < \ldots < t_r \le n \\ 1 \le k_1 < \ldots < k_r \le m}} \left[\left(\det E \begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix} \right)^2 \cdot \phi(x_{k_1}) \ldots \phi(x_{k_r}) \right]. \quad (6)$$

Kanıt. $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin her farklı $\{t_1, t_2, \ldots, t_r\}$ alt kümesi için

$$S_t^{(r)} = \{x_{t_1}, x_{t_2}, ..., x_{t_r}\} \subseteq S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

olacağı açıktır. Diğer bir ifadeyle $1 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_r \le n$ olacak şekilde her farklı $(t_1, t_2, ..., t_r)$ sıralı r lisi için $S_t^{(r)} = \{x_{t_1}, x_{t_2}, ..., x_{t_r}\} \subseteq S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olur. O halde Yardımcı Teorem 2 gereği, ele alınan alt matrisler üzerindeki GCD matrislerinin determinantları toplamı (6) ile verilen toplamın değeri olacaktır.

Teorem 10. *$S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi üzerindeki GCD matrisinin karakteristik polinomu*

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (-\lambda)^n + a_1 (-\lambda)^{n-1} + a_2 (-\lambda)^{n-2} \\ &\quad + \ldots + a_{n-1} (-\lambda) + a_n \end{aligned}$$

olsun. Bu taktirde $r = 1, 2, \ldots, n$ için

$$a_r = \sum_{\substack{1 \le t_1 < \ldots < t_r \le n \\ 1 \le k_1 < \ldots < k_r \le m}} \left[\left(\det E \begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix} \right)^2 \phi(x_{k_1}) \ldots \phi(x_{k_r}) \right].$$

Kanıt. (S) matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \det((S) - \lambda I) \\ &= (-\lambda)^n + a_1 (-\lambda)^{n-1} + a_2 (-\lambda)^{n-2} \\ &\quad + \ldots + a_{n-1} (-\lambda) + a_n \end{aligned}$$

olsun. Burada $r = 1, 2, \ldots, n$ için a_r katsayısı, (S) matrisinin r yinci mertebeden prensibal minörlerinin toplamına eşittir. (S) matrisinin r yinci mertebeden prensibal minörleri, S kümesinin r elemanlı alt kümeleri üzerindeki GCD matrislerinin determinantlarıdır. O halde Teorem 3 gereği ispat hemen elde edilir.

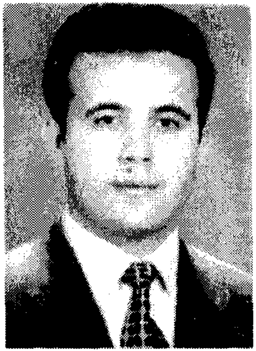
3. TARTIŞMA

Bu çalışmada kısaca, GCD matrisinin karakteristik polinomunun katsayılarını, elemanları (1) ile verilen E matrisinin uygun mertebeli alt matrislerinin determinantları ve Euler'in toplam fonksiyonu cinsinden hesaplamış olduk. Ayrıca $n \times n$ GCD matrisi pozitif tanımlı ve simetrik olduğundan n tane farklı reel karakteristik değeri vardır. Buradaki yöntem her ne kadar uzun olsa da, Teorem 4 GCD matrisinin karakteristik değerlerini Euler'in toplam fonksiyonu ve elemanları (1) ile verilen E matrisinin uygun mertebeli alt matrislerinin determinantları cinsinden hesaplama veya hiç olmazsa tahmin etme olanağı verecektir. Bu konudaki çalışmalarımız devam etmektedir.

KAYNAKÇA

Beslin, S. and Ligh, S. (1989). Greatest common divisor matrices. *Linear Algebra Appl.* 118, 69-76.

Li Z. (1990). The determinants of GCD matrices. *Linear Algebra Appl.* 134, 137-143.



Ercan ALTINIŞIK

1973 yılında Tire ‘de doğdu. Lisans öğrenimini 1994 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi’nde, yüksek lisansı aynı Üniversitede 1998 yılında tamamladı. Doktorasını 2001 yılında Selçuk Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında tamamladı. Halen Selçuk Üniversitesi Akören Meslek Yüksekokulunda öğretim üyesi olarak görev yapmaktadır.