SERİLERİN ORTAYA ÇIKIŞI:
ARŞİMET VE MADHAVA ÖRNEĞİ

Yüksek Lisans Tezi
Emre İNCEKALAN
Eskişehir 2018

SERİLERİN ORTAYA ÇIKIŞI:
ARŞİMET VE MADHAVA ÖRNEĞİ

Emre İNCEKALAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Bünyamin DEMİR

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Haziran 2018

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Emre İNCEKALAN'ın "**Serilerin Ortaya Çıkışı: Arşimet ve Madhava Örneği**" başlıklı tezi 07/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri		**Unvanı Adı Soyadı**	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	:	Prof. Dr. Bünyamin DEMİR	....
Üye	:	Prof. Dr. Ziya AKÇA	....
Üye	:	Doç. Dr. Yunus ÖZDEMİR	....

Prof. Dr. Ersin YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

SERİLERİN ORTAYA ÇIKIŞI:ARŞİMET VE MADHAVA ÖRNEĞİ

Emre İNCEKALAN

Matematik Anabilim Dalı
Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Haziran 2018

Danışman: Prof. Dr. Bünyamin DEMİR

Bu tezde, Arşimed'in bir parabol kesiminin alanını hesaplama yöntemi ve Madhava'nın seriler konusundaki çalışmaları, özellikle π sayısını serilerle hesaplama yöntemi incelenmiştir. Bununla birlikte farklı medeniyetlerin serilerle ilgili yaklaşımlarına örnekler verilmiştir. Seriler XIX. yüzyıla gelininceye kadar farklı medeniyetlerde emekleme denilebilecek tarzda uygulama alanları bulmuştur. Örneğin Mısırlılarda ve Mezopotamyalılardaki serileri çağrıştıran örnekler incelendikten sonra, Yunanlıların çalışmaları ele alınmakla birlikte Eudoxos'un tüketim metodundan belirli integralin çıkış noktası sayılan ayrıca Arşimet'in de kullanmış olduğu Eudoxos'un tüketme yöntemi ile dairenin alanı hesaplanmıştır. Batıdaki seri hesaplamaları ise Yunan matematikçiler tarafından $a_1 + a_2 + \cdots$ sonsuz toplamı yerine $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ keyfi olan sonlu toplamlarıyla uğraşmışlardır. Aslında, potansiyel olarak bu ikisi arasındaki fark ellerinde olan sonsuzlukla alakalıdır.

Anahtar Kelimeler: Pi, Sonsuz seriler, Arşimet, Madhava, Tüketme metodu

ABSTRACT

ARISING OF SERIES : SAMPLE OF ARCHIMEDES AND MADHAVA

Emre İNCEKALAN

Department of Mathematics
Anadolu University, Graduate School of Science , June 2018

Supervisor: Prof. Dr. Bünyamin DEMİR

In this thesis, the method of calculating the field of a parabola section of Archimedes and Madhava's series of studies on the series, especially the method of calculating the number with series is examined. However, examples of different civilizations' approaches to the series have been given. Series XIX. in the centuries until the cradle of different civilizations can be called as the application areas were found. For example, after examining the examples that relate to the series in Egypt and Mesopotamia, the area of the area was calculated by Eudoxos 'method of consumption, where Archimedes was also used as the starting point of the definite integral of Eudoxos' consumption method with the study of the Greeks. In the West, serial calculations were dealt with by the Greek mathematicians with the finite sum, which is the arbitrary, rather than the infinite sum. In fact, the potential difference between these two is related to their infinity notion.

Keywords: Pi, Infinite series, Archimedes, Madhava, Exhaustion method

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada danışmanın Prof. Dr. Bünyamin DEMİR’e katkılarından dolayı sonsuz teşekkür ederim. Hiçbir zaman desteğini ve sabrını esirgemeyen biricik eşim Merve İNCEKALAN’a teşekkür ederim.

Emre İNCEKALAN

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

07/06/2018

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan ``bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde ``intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Emre İNCEKALAN

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Seriler XIX. yüzyıla gelininceye kadar farklı medeniyetlerde emekleme denilebilecek tarzda uygulama alanları bulmuştur. Bu çalışmada öncelikle Mısırlılarda ve Mezopotamyalılardaki serileri çağrıştıran örnekler incelendikten sonra, Yunanlıların çalışmaları ele alınmıştır. Burada da Arşimed'in tüketme yöntemini kullanarak bir parabol kesiminin alanını hesaplaması üzerinde ayrıntılı olarak durulmuştur.

Sonra Hintlilerin XIV. Yüzyılda seriler konusunda yaptıkları incelendikten sonra, Madhava'nın π sayısını seriler yardımıyla hesaplama yöntemi üzerinde durulmuştur.

Sangamagrama'lı Madhava Hindistan'ın Kerala eyaletinin Sangamagrama kasabasında yaşayan matematikçi ve astronomdur. Madhava 1340 yılında doğmuş 1425 yılında ölmüştür. Madhava Kerala Matematik ve Astronomi okulunun kurucusu olarak kabul edilmektedir.

Madhava bir dizi trigonometrik fonksiyon için sonsuz serili yaklaşımı kullanan ilk kişidir. Madhava sonsuz serili yaklaşımını "antik matematiğin sonlu prosedürlerinden, limit geçişlerini sonsuza dek geçirmek için belirleyici adım" olarak adlandırdı. Ortaçağ'ın en büyük matematikçi-gökbilimcilerinden biri olan Madhava, sonsuz seriler, hesap, trigonometri, geometri ve cebir çalışmalarına öncü katkılar sağlamıştır.

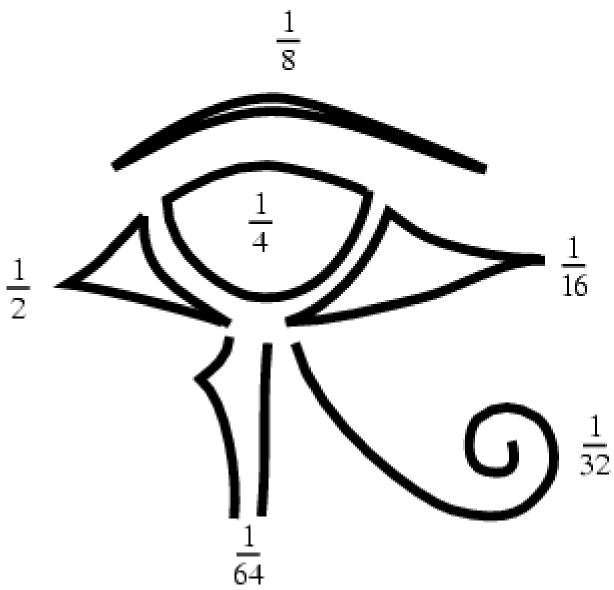
Bazı bilim adamları, Madhava'nın çalışmalarının, Kerala okulunun yazılarıyla, Cezvit misyonerler ve eski Muzıris limanı çevresinde faaliyet gösteren tüccarlar aracılığıyla Avrupa'ya gittiğini de ileri sürmektedir. Sonuç olarak, daha sonraki Avrupadaki analiz ve hesaplama alanındaki gelişmeler üzerinde bir etkisi olduğunu düşünmektedirler.

Son olarak Batıda seriler konusundaki ilk hesaplamalara örnekler verilmiştir.

2. MISIRLILAR

Mısırlılarda seri fikrine yaklaşan iki örnekten söz edebiliriz. Bunlardan birincisi Horus'un gözü efsanesidir. Aydın Sayılı'nın *Mısırlılarda ve Mezopotamyalılarda Matematik, Astronomi ve Tıp* adlı kitabında bu efsane şöyle anlatılmakta:

Geleneğe göre, Horus'un gözü Seth adlı tanrı tarafından parçalanmıştı. Bu parçaları Toth adlı tanrı (ibis kuşu ile temsil edilen tanrı) bir araya getirerek Horus'u yeniden göz sahibi etmişti. Bu gözün muhtelif kısımlarını temsil eden kesirlerin toplamı 63/64 etmektedir. Bu sebeple, Thot'un sihir yoluyla buradaki noksanı tamamladığı kabul edilmektedir.



Şekil 2.1. *Horus'un gözü*

Şekilde de görüldüğü gibi Horus'un gözünün parçaları farklı kesirlere karşılık gelmektedir. Mısırlı kâtipler bu temsili parçaları ilgili kesiri ifade etmek için de kullanmışlar. Kesirlere baktığımızda

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64}$$

geometrik dizi şeklinde sıralandıklarını görüyoruz.

Bu parçaların toplamı

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$$

dir. Toplam 1 tam etmiyor. Yani gözün 63/64 lük kısmı eksik. Bunun da sihirle tamamlandığını kabul ediyorlar. Buradaki toplam $r = {}^{1}\!/_{2}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

geometrik serisinin ilk 6 teriminin toplamından başka bir şey değil. Acaba toplamaya devam etseler gözün tamamına, giderek yaklaşacaklarının fakat hiçbir zaman ulaşamayacaklarının farkındamıydılar. Bunu bilemeyiz. Fakat 6 adım gittikten sonra, gözü tamamlamak için sihire sığınmaları işin içinden çıkamalalarının bir sonucu olabilir. Bu seri Zeno paradoksunda da karşımıza çıkıyor. Zeno MÖ V. yüzyılda yaşamış Yunanlı filozoftur. Akla gelen ikinci soru: Zeno Paradoksunu düşünürken ne derece Horus'un gözünden etkilenmiştir?

Mısırlılarda kesir olarak sadece payı 1 olan sayılar düşünülmekte idi. Bunun iki istisnası $2/3$ ve $3/4$ kesirleridir. Diğer kesirler, çözülmesi gereken bir problem olarak algılanmakta idi. Örneğin $6/10$ kesrini

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$$

Olarak iki ayrı (payı 1 olan) kesirin toplamı olarak düşünüyorlardı. Hatta $2/n$ şekildeki kesirler için uzun tablolar hazırlamışlardı. Rhind Papirüsünde $n = 3$ ten $n = 101$ e kadar olan tek sayılar için uzun bir liste bulunmaktadır:

$$2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$

$$2\times\frac{1}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$

$$2\times\frac{1}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$$

$$2\times\frac{1}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$$

$$2 \times \frac{1}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$$

$$2 \times \frac{1}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$$

.

.

.

$$2 \times \frac{1}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$$

.

.

.

$$2 \times \frac{1}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

Bu tablolar çarpma ve bölme işlemlerinde kullandıklarında iki katını alma ve ikiye bölme yöntemlerinde işlerine yarıyordu.

Mısırlılarda serilerle ilişkilendirebileceğimiz ikinci örnek yine Rhind Papirüsünde bulunan bir problemdir. Bu problem [1] de şöyle verilmiş:

7 evde 7'şer kedi var; her kedi 7'şer fare öldürüyor; her fare 7'şer başak yiyor; her başaktan 7'şer ölçü ürün alınıyor. Hepsi ne eder?

Bu problem de geometrik serilerle ilgilidir. 7 ev var, $7 \times 7 = 49$ kedi var, $7 \times 7 \times 7 = 343$ fare var, $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$ başak var ve $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 16807$ ölçü ürün var. Hepsinin toplamı 19607 olarak veriliyor. Bu toplamı

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Dolayısıyla bu da $r = 7$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

geometrik serisinin ilk 5 teriminden başka bir şey değil. Bu problemin benzerlerine yakın zamanda dahi rastlanmakta [2]. Her hâlde problemi kurgulayan mısırlı kâtip *bu serinin* ne kadar hızlı büyüdüğünün farkında olmalı.

3.MEZOPOTAMYALILAR

Mezopotamyalılardan kast edilen; Sümerler, Akadlar ve Babillilerdir. Bu uygarlıklar Mısırlılara göre çok daha gelişmiş bir sayı sistemine sahiplerdi. 60 lık sayı sistemi kullandılar. Günümüzde özellikle zaman ve açı ölçümlerinde bu uygarlıkların etkilerini görmekteyiz. [1] de Mezopotamyalı matematikçilerin aritmetik ve geometrik dizilerin toplamlarını bulmakta güçlük çekmedikleri yazılmakta ve aşağıdaki örnek verilmektedir.

Bilinmeyen bir mesafe 30 parmak uzunluğundaki bir cetvelle ölçülüyor. Fakat cetvel her defasında uzunluğundan bir parmak kaybediyor. Nihayet, cetvel uzunluğu bir parmağa inince mesafenin ölçülmesi de sona eriyor. Mesafe ne kadardır?

Çözüm,

$$30 + 29 + 28 + \cdots + 3 + 2 + 1 = \frac{30}{2}(30 + 1) = 465$$

şeklinde, yani bir aritmetik dizi toplamı olarak sunuluyor ve doğru sonuç bulunuyor.

Bir diğer tablette de,

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^8 + 2^9 = 2^9 + (2^9 - 1)$$

şeklinde bir çözüm veriliyor.

Aynı tablette 1'den 10 sayısına kadar olan tamsayıların kareleri toplamı verilmektedir. Çözüm aşağıdaki şu doğru formülü tazammun ediyor:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = (1 \times \frac{1}{3} + n \times \frac{2}{3})(1 + 2 + 3 + \cdots + n).$$

Görüldüğü gibi Mezopotamyalıların bazı serilerin toplamlarıyla ilgili formülleri vardı. Fakat Aydın Sayılı'nın da belirttiği gibi bu formüllere nasıl ulaştıkları bilinmiyor. Yine Aydın Sayılı Yunanlıların bu konularda Mezopotamyalılardan faydalanmış oldukları tesbitinde bulunuyor.

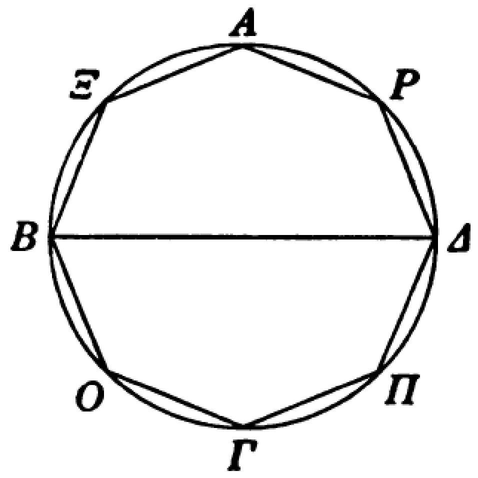
4.KNIDOS'LU EUDOXOS

Zamanın en parlak ve en ünlü kişiliklerinden biri olan Eudoxos sadece matematikçi değil aynı zamanda bir hekim ve özellikle bir astronom olarak da çok ünlü idi. Aynı zamanda mükemmel bir hatip, filozof ve coğrafyacı idi. Daha sonraki zamanlara ait bir standart kronoloji eseri olan Apollodoros kroniğine göre Eudoxos M.Ö. 368 civarında zirveye erişti. Buradan kendisinin M.Ö. 400 civarında doğduğunu çıkarmışlardır. Eudoxos 53 yaşında doğduğu şehir olan Ege denizi kıyısındaki Knidos şehrinde çok saygıdeğer ve büyük bir bilim insanı olarak ölmüştür.

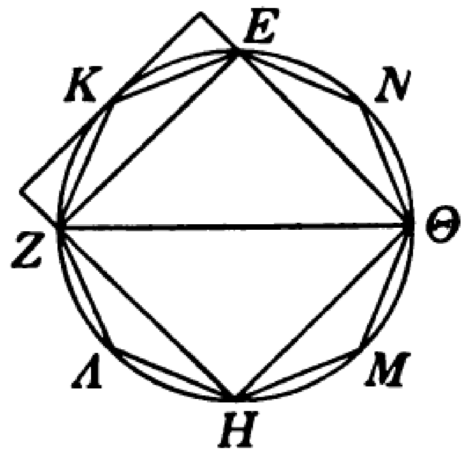
Eudoxos gökyüzündeki burçların ve sabit yıldızların doğuş ve batışlarının tasviri ile, meslektaşları arasında hayranlık uyandıran, ama yarım yüzyıl sonra yerini daha iyi sistemlere bırakmak zorunda kalan, teorik astronomisinden de daha büyük bir ün sağlamıştı. Bu tasvirin büyük bir kısmını Zodyakın oniki işareti ve bu işaretlerin başlangıç noktaları ile aynı zamanda doğan veya batan yıldızlar hakkında vermiş olduğu bilgiler teşkil etmektedir. Bundan başka Eudoxos en önemli sabit yıldızların ilk ve son görünme tarihleri, hava tahminleri, gece-gündüz eşitliği noktaları ve yaz ve kış dönemi noktalarını içeren bir daimi takvim tasarlamıştı.

Şimdi de Eudoxos'un tüketim metodundan bahsedelim. Belirli integralin çıkış noktası sayılan ayrıca Arşimet'in de kullanmış olduğu Eudoxos'un tüketme yöntemi ile dairenin alanını hesaplayalım.

Farz edelim ki verilen iki dairenin alanları bunların $B\Delta$ ve $Z\Theta$ çapları üzerine çizilen karelerle orantılı olmasın. Bu takdirde $B\Delta^2$'nin $Z\Theta^2$'ye oranı, birinci dairenin alanının ikinci daireninkinden ya daha büyük, ya daha küçük olan bir Σ alanına olan oranına eşit olurdu. Önce Σ alanının ikinci dairenin alanından daha küçük olduğunu farz edelim ve ikinci dairenin içine bir $EZH\theta$ karesi çizelim. Bu kare dairenin yarısından daha büyüktür, çünkü dairenin dışına çizilen kare içine çizilenin tam iki katı olup, dairenin alanı dışına çizilen kareninkinden daha küçüktür. Şimdi $EZ, \dots$ yayları K, Λ, M, N noktalarında iki eşit parçaya ayrılır ve $EKZ\Lambda HM\Theta N$ sekizgeni çizilir.



Şekil 4.1. *Daire ve sekizgen*



Şekil 4.2. *Daire ve çokgenin alanlarının karşılaştırılması*

EKZ ..., üçgenlerinin her biri kendine ait daire parçasının yarısından daha büyüktür. Bu yayları iki eşit parçaya bölme işlemini birçok kere tekrarlarsak, sonunda öyle bir takım daire parçaları geriye kalır ki, bunların alanları toplamı, $EZH\Theta$ dairesi ile Σ alanı arasındaki farktan daha küçük olur. Şu halde bölme işleminin bu son adımında elde edilen daire içine çizilmiş çokgenin alanı Σ alanından daha büyüktür. Şimdi birince dairenin içine bu son çokgene benzer bir $A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P$ çokgeni çizersek, $B\Delta^2$'nin $Z\Theta^2$'ye oranı birinci dairedeki çokgenin ikinci dairedeki benzer çokgene olan oranına eşittir. Şu halde birinci dairenin Σ alanına oranı, birinci dairedeki çokgenin ikinci dairedekine olan oranına eşittir. Bu sonuncu orantıdaki orta terimleri aralarında değiştirirsek:

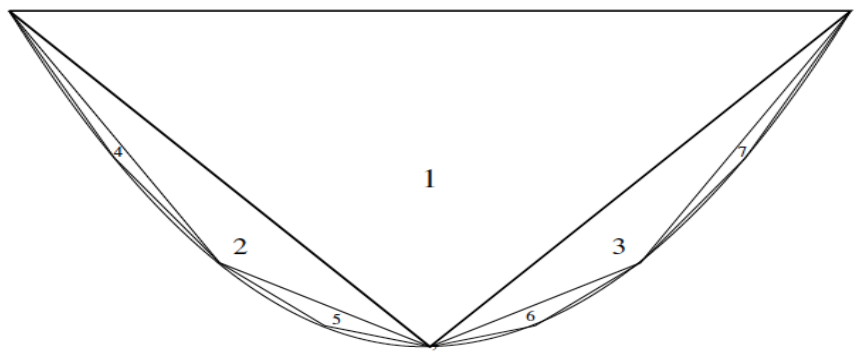
$$\text{Birinci daire: Birinci çokgen} = \Sigma\text{: ikinci çokgen}$$

elde edilir. Ama birinci daire birinci çokgenden daha büyük ve Σ da ikinci çokgenden daha küçüktür. Böylelikle bir çelişkiye varılmış olur.

Σ'nın ikinci daireden daha büyük olması hali ise, iki dairenin aralarında değiştirilmesi suretiyle yukarıdaki hale indirgenebilir; böylelikle bu halde de bir çelişki elde edilmiş olur. O zaman iki dairenin alanlarının oranı $B\Delta^2$'nin $Z\Theta^2$'ye oranına eşittir ki, ispatı istenen de budur.

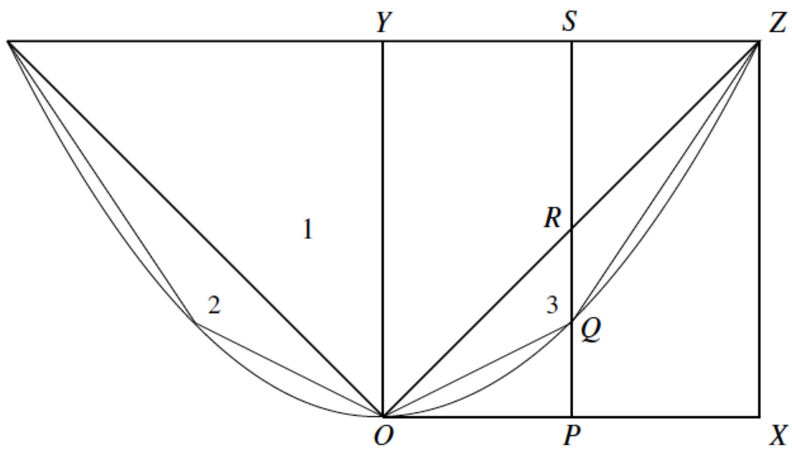
5.ARŞİMET'İN TÜKETME YÖNTEMİYLE PARABOL KESİMİNİN KARELENMESİ

Arşimet "287-212 M.Ö." tüketme yöntemini "the method of exhaustion" herhangi bir parabol kirişi çizilerek oluşturulan kesimin alanını bulmak için kullandı. Arşimet parabol kesiminin içine kesimle aynı tabana ve eşit yüksekliğe sabit bir üçgen çizerek kesimin alanını tüketmeye başlar. Bu yöntemi açarsak öncelikle parabolü üzerinde incelikle çalışmamızı kolaylaştırmak için parabolün simetri eksenine dik olan kirişten kesiyor. Arşimet parabol kesimini $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ üçgenlerin alanları şeklinde isimlendirerek aşağıdaki şekilde bölmüştür.



Şekil 5.1. *Parabolik kesit*

Bu şekilde oluşturulacak olan üçgenler parabol kesiminin tamamını doldurmaya çalışmıştır. Böylelikle şaşırtıcı bir biçimde oluşan çokgenin alanı bir geometrik seriye dönüşmüştür. Şimdi alanların nasıl oluştuğuna bakalım.



Şekil 5.2. *Parabolik kesitin alanının bölgelere ayrılması*

Parabolün tanımından $OP = \frac{1}{2}OX$ ise $PQ = \frac{1}{4}PS$'dir. Diğer taraftan $SR = \frac{1}{2}PS$ böylece $QR = \frac{1}{4}PS$'dir. Şimdi

$$\Delta_3 = Alan(RQZ) + Alan(OQR$$

olduğu Şekil 4.10'dan görülmektedir. Bu iki üçgenin aynı tabana (RQ) ve aynı yüksekliğe ($OP = PX$) sahip olduğu dikkate alındığından alanlarının eşit olduğu görülür. Böylece yükseklikleri aynı olan RQZ ve SRZ üçgenlerinden RQZ üçgeninin tabanı SRZ üçgeninin tabanının iki katı olduğu sonucuna varılır. Bu bilgiler ışığında

$$\Delta_3 = Alan(SRZ) = \frac{1}{4}Alan(OYZ) = \frac{1}{8}\Delta_1$$

Simetriden

$$\Delta_2 = \Delta_3,$$

Burdan

$$\Delta_2 + \Delta_3 = \frac{1}{4}\Delta_1.$$

Böylelikle benzer işlemleri uyguladığımızda

$$\Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_7 = \frac{1}{16}\Delta_1$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse sonuç olarak parabol kesiminin alanının

$$\Delta_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots\right) = \frac{4}{3}\Delta_1$$

olduğu görülür.

Tabi ki Arşimet sonsuz serileri kullanmadı bunun yerine tüketme yöntemini kullandı, yani yeteri kadar çok Δ_i üçgenleri alarak parabol kesiminin alanı$< \frac{4}{3}\Delta_1$ olduğunu gösterdi.

6.KERALA’DA MATEMATİK VE MADHAVA’NIN ÇALIŞMALARI

Madhava’dan önce her ne kadar Keralada matematik ile ilgili çalışmalar olsada, Madhava'nın ortaçağ Kerala'sında zengin bir matematik geleneğinin oluşması için yaratıcı fikirler sağladığı açıkça görülmektedir.

Bununla birlikte Madhava’nın özgün çalışmalarının birçoğu kayıptır. Sonraki Kerala matematikçilerinden, özellikle de Nilakantha Somayaji(1500’ler) Tantrasangraha'daki çalışmasında, sinθ ve arctanθ da dahil olmak üzere çeşitli sonsuz serilerin açılımlarının kaynağı olarak Madhava’nın çalışmalarından bahsetmektedir.

16. yüzyıl metni Mahajyanayana prakara (Büyük Şekiller Hesaplama Yöntemi) Madhava'yı π hesabı için birkaç dizi türevinin kaynağı olarak göstermektedir. Jyesthadeva'nın Yuktibhaşa (1530), Malayalam'da yazdığı bu seride,

$$\frac{1}{x^2+1}$$

x = tanθ vb. gibi polinomlar için Taylor serisi açılımları ile ilgili kanıtlar sunulmuştur.

Madhava'nın çalışmaları açıkça bazı tartışmaların neden olmaktadır. Muhtemelen Jyesthadeva’nın öğrencisi olan Sankara Variyar'dan yaptığı çalışma Yukti-dipikada (aynı zamanda Tantrasangraha-vyakhya olarak da bilinir), sinθ, cosθ ve arctanθ için seri genişletmelerin yanı sıra yarıçaplı ve ark uzunluğa sahip bazı hesaplarda sunmaktadır. Çeşitli versiyonları Yuktibhaşa'da da görünür.

Rajagopal ve Rangachari orijinal Sanskritçesinden çokça bahsederek Nilakantha tarafından Madhava'ya atfedildiği için, bazı diğer formların Madhava'nın eseri olabileceğini savunulmuştur.

Diğer yandan erken dönem metin Karanapaddhati'nin (1375-1475) veya Mahajyanayana prakara'nın Madhava tarafından yazılmış olabileceğini düşünülmektedir. Fakat bu pek mümkün görünmemektedir.

Karanapaddhati, daha erken dönemdeki Kerale matematik metni Sadratnamala'nın yanısıra Tantrasangraha ve Yuktibhaşa ile birlikte Charles Matthew Whish tarafından 1834'te yayınlanan ve Fluxion'un keşfedilmesinde Newton'un önceliğine dikkat çeken ilk makale olarak da kabul edildi. 20. yüzyılın ortalarında, Rus bilim adamı Jushkevich Madhava'nın mirasını tekrar gözden geçirdi. Kerala okuluna kapsamlı bir bakış 1972 yılında Sarma tarafından sağlandı.

6.1. Kerala Matematik ve Astronomi Okulu

Kerala astronomi ve matematik okulu, Madhava'nın öncesinde en az iki yüzyıl boyunca gelişme göstermiştir. Jyesthadeva'da ifade edildiği gibi sankalita olarak adlandırılan integrasyon kavramını kullanılmıştır:

İntegrasyon, bir değişken (pada) ve değişkenin karesinin (varga) yarısına eşit olduğu şekilde belirtilmiştir; Yani xdx integrali $\frac{x^2}{2}$'ye eşittir. Bu açıkça integral hesabı işlemine bir başlangıçtır. Bununla ilgili bir sonuçta, eğri altındaki alanın integrali olduğu belirtilmiştir. Bu sonuçların çoğu Avrupa'da birkaç yüzyıl öncesinde Avrupa ile benzer sonuçların keşfedildiğini ortaya koymaktadır. Birçok bakımdan Jyeshthadeva'nın Yuktibhasa, dünyanın ilk hesap metni olarak kabul edilebilir

Kerala Okulu ayrıca astronomide çok daha fazla çalışma yapmıştır; Gerçekten de astronomik hesaplamalar için analizle ilgili tartışılacak ve değerlendirilecek tahminlerden çok daha fazla gelişmeler elde edilmiştir.

Kerala okulu ayrıca dil bilimine katkıda bulunmuştur (dil ve matematik arasındaki ilişki eski bir Hint geleneğidir, bkz. Katyayana). Kerala'nın ayurvedik ve şiirsel gelenekleri de bu okula dayandıralabilir. Ünlü şair Narayaneeyam, Narayana Bhattathiri tarafından bestelenmiştir.

6.2.Madhava Sonsuz Serileri

Madhava'nın matematiğe birçok katkısı arasında sinüs, kosinüs, tanjant ve arctangent'ın trigonometrik fonksiyonları için sonsuz seriyi ve bir dairenin çevresi hesaplamanın birçok yöntemini keşfetti. Madhava'nın serilerinden biri, Madhava tarafından keşfedilen, ters teğet için kuvvet serilerinin türetilmesini ve kanıtını içeren Yuktibhasa metninden bilinmektedir. Metinde Jyeşthadeva seriyi aşağıdaki şekilde açıklıyor:

İlk terim, verilen sinüsün ve istenen yayın yarıçapının, yayın kosinüsüyle bölünmesinin ürünüdür. Sonraki terimler, ilk terim sinüsün karesi ile art arda çarpılarak, kosinüsün karesine bölünen tekrarlama süreci ile elde edilir.

Tüm terimler daha sonra 1, 3, 5, ... numaralı tek sayılara bölünürler. Yay, sırasıyla, tek sıra ve çift sıra sıralamalarını ekleyip çıkararak elde edilir.

Burada yayın ya da onun tamamlayıcısının sinüsünün hangisi küçükse, verilen sinüs olarak alınması gerektiği belirtilmiştir. Aksi halde, yukarıdaki yinelemeyle elde edilen terimler kaybolan büyüklüğe eğilmez.

Bu eşitlik;

$$r\theta = \frac{r \sin\theta}{cos\theta} - \left(\frac{1}{3}\right) r \frac{(sin\theta)^5}{(cos\theta)^5} + \left(\frac{1}{5}\right) r \frac{(sin\theta)^5}{(cos\theta)^5} - \left(\frac{1}{7}\right) r \frac{(sin\theta)^7}{(cos\theta)^7} + \cdots$$

ve

$$\theta = tan\theta - \frac{tan^5\theta}{5} - \frac{tan^7\theta}{7} + \cdots$$

şeklinde gösterilir.

Bu dizi, geleneksel olarak Gregory dizisi olarak bilinmekteydi (Madhava'dan üç yüzyıl sonra James Gregory tarafından keşfedilen). Bu belirli seriyi Jyesthadeva'nın eseri olarak ele alınsa bile, Gregory'den bir yüzyıl önce ortaya çıkmıştır ve Madhava tarafından benzer nitelikteki diğer sonsuz seriler hazırlanmıştır. Bugün, Madhava-Gregory-Leibniz serisi olarak anılmaktadır.

6.3. Madhava'nın Trigonometri Çalışması

Madhava doğru bir sinüs tablosu hazırladı. Yirmi dört eşit aralıklarla çeyrek daireyi işaretleyerek, her birine karşılık gelen yarım akordun (sinüslerin) uzunluğunu verdi. Bu değerlerin seri açılımlarına dayanarak hesaplanmış olabileceğine inanılmaktadır;

$$\sin q = q - \frac{q3}{3!} + \frac{q5}{5!} - \frac{q7}{7!} + \ldots$$

$$\cos q = 1 - \frac{q2}{2!} + \frac{q4}{4!} - \frac{q6}{6!} + \ldots$$

6.4. Pi'nin değeri

Madhava'nın matematik sabiti pi'nin değeri üzerindeki çalışmaları Büyük Sinüs Yöntemleri ("Mahajyanayana prakara'da ") kitabıdır. Sarma gibi bazı bilim adamları bu kitabın Madhava tarafından kendisinin yazmış olabileceğini düşünse de, muhtemelen 16. yüzyılın halefinin eseridir. Bu metin, genişlemelerin çoğunu Madhava'ya atfediyor ve şu an Madhava-Leibniz serisi olarak bilinen π'nin sonsuz serisi;

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$

ark-teğet fonksiyonunun güç serisi genişlemesinden elde ettiği bulgulara dayanmaktadır. Bununla birlikte, en etkileyici şey, toplamı n terim hesapladıktan sonra hata için bir düzeltme terimi olan R_n verdiğidir. Madhava, düzeltme terimi R_n için üç ifade vermiştir:

$$R_n = \frac{1}{4n}, \text{ veya}$$

$$R_n = \frac{n}{4n^2+1}, \text{ veya}$$

$$R_n = \frac{n^2+1}{4n^3+5n}.$$

Burada üçüncü düzeltme π'nin son derece doğru hesaplamalarına neden olur. Madhava'nın bu düzeltme terimlerini nasıl bulmuş olabileceği açık değildir. Ayrıca orijinal sonsuz π serisini dönüştürerek sonsuza kadar yakınsayan bir dizi vermiş, sonsuz seriyi elde etmiştir.

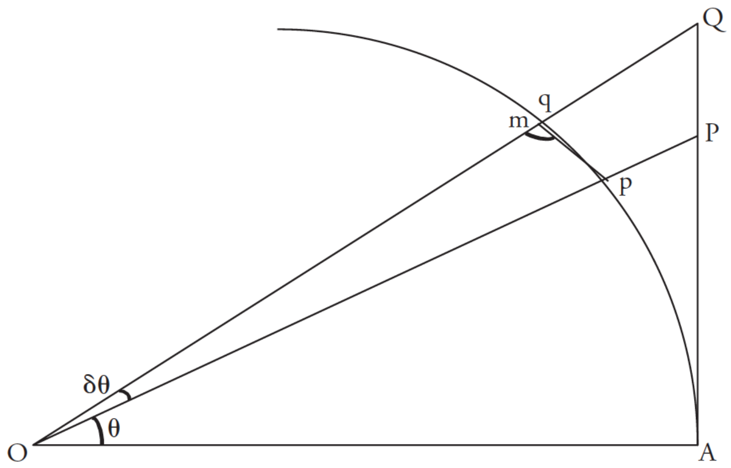
$$\pi = \sqrt{12}(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \cdots)$$

Pi'nin yaklaşık değerini hesaplamak için ilk 21 terimi kullanarak, ondalık basamağı (3.14159265359) olan doğru bir değer elde etmiştir. 3.1415926535898 değerinin, 13 ondalık doğru değeri, 5. yüzyıldan beri verilen π için en doğru yaklaşımlardır. Bu değer Madhava'ya atfedilir fakat takipçilerininde bu değeri elde etmiş olabileceği sanılır.

Madhava'dan önce genelde kabul edilen Sadratnamala metni,

π = 3.14159265358979324'ün şaşırtıcı derecede doğru bir değerini (17 ondalık basamak için doğru) verir. Buna dayanarak, R. Gupta, bu metnin Madhava tarafından bulunduğunu savunmaktadır.

6.5. Madhava - Gregory Serisi : Derivasyon



Şekil 6.1. *Merkezi O olan daire dilimine teğet durumlu dik üçgen*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

sayısını hesaplamak için 5 adım vardır.

1.Adım: $\partial\theta = arc\ pq \approx pm = \frac{\partial(\tan\theta)}{1+\tan^2\theta}, OA = Op = 1$

2. Adım: Böylece ,

$$\theta = \int \frac{dt}{1+t^2} = \int (1 - t^2 + t^4 - \cdots) dt = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots$$

$t = \tan\theta$ olmak üzere.

3.Adım: Burada göstereceğimiz

$$n \to \infty, |t| < 1 \text{ olduğunda } (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \to 0$$

4. Adım: Ya da

$$\arctan\theta = \tan\theta - \frac{\tan^3\theta}{3} + \frac{\tan^5\theta}{5} - \cdots, \tan\theta \leq 1 \qquad (*)$$

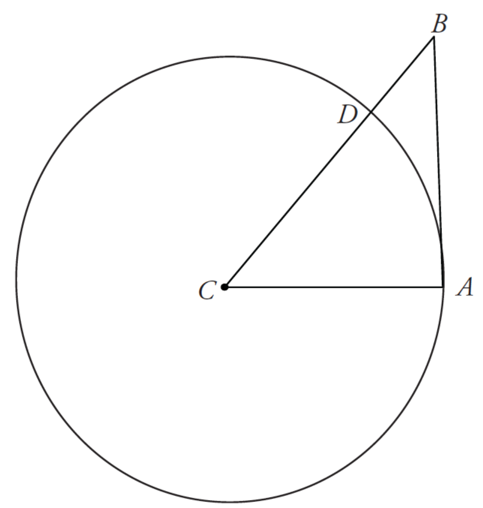
5. Adım:

$\tan\theta = 1$ iken $\theta = 45^{\circ} = \frac{\pi}{4}$ olmak üzere yukarıdaki (*) serisi

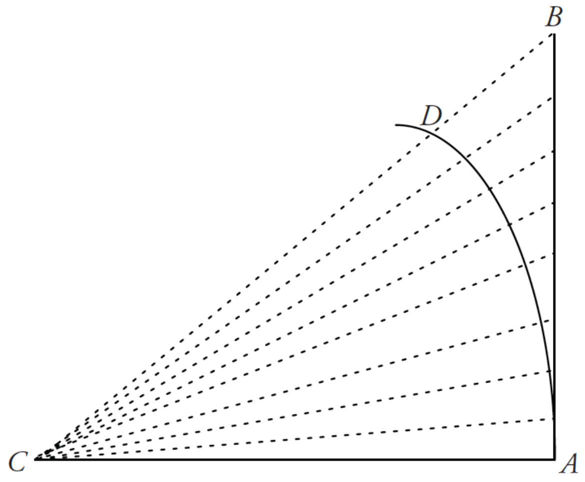
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \qquad (**)$$

serisine dönüşür.

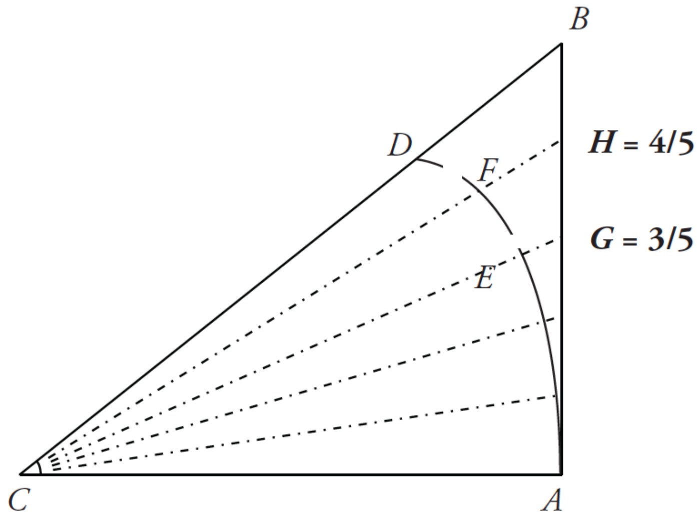
Şimdi burada Kerala matematikçilerinin (**) ile verilen seriyi nasıl türettikleri gösterilecektir.



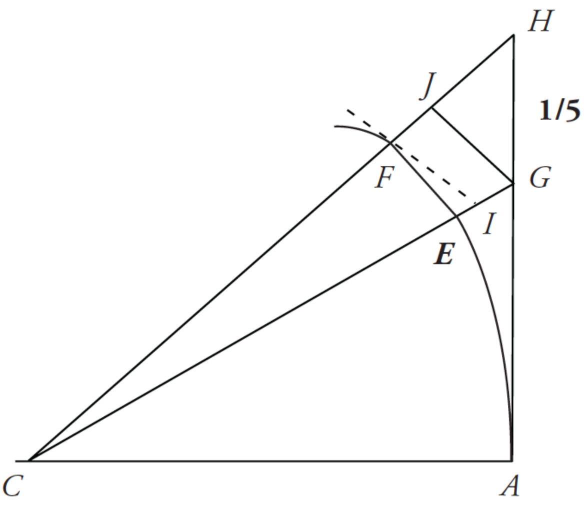
Şekil 6.2. *Dairenin merkezi C ve bir köşesi C olan daireye teğet üçgen*



Şekil 6.3. *ABC üçgeninin dilimlenişi*



Şekil 6.4 *ABC üçgeninin dilimlenişi ve oranlar*



Şekil 6.5. *FE yayınına JG'ye paralel olacak şekilde teğet oluşturulması*

İspat: GJH ve CAH dik üçgenleri şekilde görüldüğü gibi benzerlerdir. Böylece

$$\frac{GJ}{AC} = \frac{GH}{CH}$$

Burada $AC = 1$ ve $GH = \frac{1}{5}$ değerlerini yerine koyduğumuzda

$$GJ = \frac{1/5}{CH}.$$

Yukarıdakine benzer şekilde CFI ve CJG dik üçgenleri de benzerdir. Buradan,

$$\frac{FI}{GJ} = \frac{CF}{CJ} \Rightarrow FI = \frac{GJ \cdot CF}{CJ}$$

.

$CF = 1$ olduğundan

$$FI = \frac{GJ}{CJ}, \tag{6.1}$$

n büyüdükçe GH küçüldüğünden CH'ın yaklaşık değeri CJ olur. Yani,

$$\frac{CH}{CJ} \approx 1$$

(6.1) eşitliği kullanılırsa

$$\mathrm{FI} = \frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{CJ}} \cdot \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CH}}$$

Böylece

$$\mathrm{FI} = \frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{CH}}$$

$$\mathrm{FI} = \frac{\frac{1/5}{\mathrm{CH}}}{\mathrm{CH}} = \frac{1/5}{\mathrm{CH}^2} \tag{6.2}$$

CAH dik üçgeninin hipotenüsü CH olduğundan

$$CH^2 = CA^2 + AH^2 = 1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

(6.2) kullanılırsa

$$\mathrm{FI} = \frac{1/5}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^2}$$

Buradan FE yayının değeri

$$\mathrm{arcFE} \approx \mathrm{FI} \approx \frac{1/5}{1+(4/5)^2} \qquad (6.3.)$$

Genel durumda (6.3) eşitliğindeki kesrin payındaki $1/5, 1/n$ ile degiştirilecektir ve paydasındaki $4/5$, AH uzunluğunu belirten kesirle degiştirilecektir. Görülüyor ki $n = 5$ aldığımızda AD yayı yaklaşık olarak her biri FE yayına karşılık gelen 5 tane küçük yay toplamına eşittir. Bu durumda AD yayının yaklaşık değeri

$$\frac{1/5}{1+(1/5)^2} + \frac{1/5}{1+(2/5)^2} + \frac{1/5}{1+(3/5)^2} + \frac{1/5}{1+(4/5)^2} + \frac{1/5}{1+(5/5)^2} \tag{6.4}$$

Biz bu toplamı genellersek keyfi n büyük sayısı için (6.4)'in genelleştirilmiş hali

$$\frac{1/n}{1+(1/n)^2} + \frac{1/n}{1+(2/n)^2} + \cdots + \frac{\frac{1}{n}}{1+\left(n-\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1/n}{1+(n/n)^2}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(n-\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right) \tag{6.5}$$

sonucu çıkar. $|r|<1$ için

$$1+r+r^2+r^3+\cdots=\frac{1}{1-r}$$

$s>0$ olmak üzere $r=-s$ alınırsa

$$1-s+s^2-s^3+\cdots=\frac{1}{1+s} \tag{6.6}$$

(6.5)'deki her bir terim için (6.6)'daki formül uygulanırsa

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}=1-\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^4-\left(\frac{1}{n}\right)^6+\cdots$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}=1-\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^4-\left(\frac{2}{n}\right)^6+\cdots$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{3}{n}\right)^2}=1-\left(\frac{3}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^4-\left(\frac{3}{n}\right)^6+\cdots$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}=1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{n-1}{n}\right)^4-\left(\frac{n-1}{n}\right)^6+\cdots$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}=1-\left(\frac{n}{n}\right)^2+\left(\frac{n}{n}\right)^4-\left(\frac{n}{n}\right)^6+\cdots$$

olmak üzere her bir terimi alt alta toplarsak, (6.5) sonucunu elde ederiz,

(6.5)'in son terimi

$$n \to \infty, \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right] = \frac{1}{2n} \to 0 \quad \text{olur.}$$

$$\frac{1}{n}\left(\begin{array}{c}(n-1) - \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2}{n^2} \\ +\dfrac{1^4+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4}{n^4} \\ -\dfrac{1^6+2^6+3^6+\cdots+(n-1)^6}{n^6}\end{array}\right)$$

.

.

.

$$= \frac{n-1}{n} - \frac{1}{n^3}[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]$$

$$+\frac{1}{n^5}[1^4+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4]$$

$$-\frac{1}{7}[1^6+2^6+3^6+\cdots+(n-1)^6]$$

.

.

. (6.7)

$$n \to \infty, \ \frac{1}{n^{k+1}}[1^k+2^k+3^k+\cdots+(n-1)^k] \to \frac{1}{1+k} \tag{6.8}$$

(6.7)’deki toplamda (6.8)’i uygularsak

$$-\frac{1}{n^3}[1^2 + 2^3 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2] = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{n^5}[1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + \left(n-1)^4\right] = \frac{1}{5}$$

$$-\frac{1}{n^7}[1^6 + 2^6 + 3^6 + \cdots + (n-1)^6] = -\frac{1}{7}$$

.

.

.

Bunlarla birlikte

$$arcAD = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

elde edilir.

Bu durumda

$$C = 4d - \frac{4d}{3} + \frac{4d}{5} - \frac{4d}{7} + \cdots$$

$$C = 4d(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

$$= \ 4d\left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \cdots\right)$$

$$= 4d\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99} + \cdots\right)$$

$$= 8d\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \cdots\right)$$

$$= 8d\left(\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1} + \frac{1}{10^2 - 1} + \cdots\right)$$

$$= \frac{8d}{2^2-1} + \frac{8d}{6^2-1} + \frac{8d}{10^2-1} + \cdots$$

$$\frac{C}{2} = \frac{4d}{2^2-1} + \frac{4d}{6^2-1} + \frac{4d}{10^2-1} + - \cdots \qquad A$$

$$C = 4d\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots\right)$$

$$= \ 4d\left(1 - \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\right) - \left(\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{9}\right) - \left(\tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{13}\right) \ldots\right)$$

parantezlerdeki işlemleri yaparsak

$$= 4d\left(1 - \tfrac{2}{15} - \tfrac{2}{63} - \tfrac{2}{143} - \cdots\right)$$

$$= 4d\left(1 - \frac{2}{4^2-1} - \frac{2}{8^2-1} - \frac{2}{12^2-1} - \cdots\right)$$

elde edilir.

$$C \ = \left(4d - \frac{8d}{4^2-1} - \frac{8d}{8^2-1} - \frac{8d}{12^2-1} - \cdots\right)$$

$$\frac{C}{2} = 2d - \frac{4d}{4^2-1} + \frac{4d}{8^2-1} + \frac{4d}{12^2-1} + - \cdots \qquad \mathrm{B}$$

$$\frac{C}{2} = \frac{4d}{2^2-1} + \frac{4d}{6^2-1} + \frac{4d}{10^2-1} + \cdots$$

$$\frac{C}{2} = 2d - \frac{4d}{4^2-1} - \frac{4d}{8^2-1} - \frac{4d}{12^2-1} - \cdots$$

$$A + B = C = 2d + \frac{4d}{2^2-1} - \frac{4d}{4^2-1} + \frac{4d}{6^2-1} - \frac{4d}{8^2-1} + \frac{4d}{10^2-1} - \frac{4d}{12^2-1} + \cdots$$

$$(-1)^n \frac{4d}{(2n+1)^2+2}$$

$$C(n) = 2d + \frac{4d}{2^2-1} + \frac{4d}{4^2-1} + \cdots + (-1)^{n+1} \ \frac{4d}{(2n)^2-1}$$

$$C = \sqrt{12}\ \left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{3^2.5} - \frac{1}{3^3.7} + \cdots\right)$$

$$C = 3d + \left(\frac{4d}{3^3 - 3} - \frac{4d}{5^3 - 5} - \frac{4d}{7^3 - 7} + \cdots\right)$$

d=1 için

$$C = 3 + 4\left(\frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \cdots\right)$$

sonucu elde edilir.

6.6. Batıda Seri Hesapları

Yunan matematikçiler $a_1 + a_2 + \cdots$ sonsuz toplamı yerine $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ keyfi olan sonlu toplamlarıyla uğraşmışlardır. Aslında, bu ikisi arasındaki fark potansiyel olarak ve ellerinde olan sonsuzlukla alakalıdır. Aslına bakılırsa Zeno paradoksu (Dichotomy paradox) cok açıktır ki örnek verecek olursak,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$

sonsuz serisi 1’e eşittir. Arhimedes ise parabolik segmentin alanını bulmuştur.

Bu alanı veren sonsuz seri

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{4}{3}$$

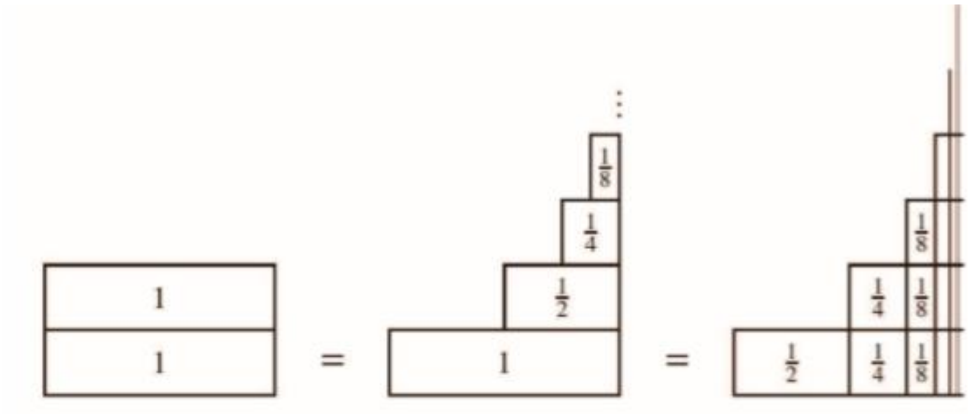
Yukarıdaki iki serinin eşsitine baktığımız zaman

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1 - r}, |r| < 1$$

geometrik serisinin özel sonuçlarıdır. Orta Çağda yukarıdaki ilk sonsuz seri örneğine baktığımızda geometrik serilerden önce bulunduğu görülmüştür. 1350’lerde yazılmış Liber calculationum kitabında sözel olarak görülür ki

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots = 2$$

dir.1350’li yıllarda Oresme geometrik ispat olarak sonsuz serinin toplamının 2 olduğunu göstermiştir.



Oresme’nin başka bir önemli çalışması da ıraksak harmonik serilerin keşfidir.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$>1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

Görülüyor ki bu harmonik seri ıraksaktır.

Serilerin Toplamı

Archimedes aşağıdaki toplamla ilgilenmiştir

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots$$

1650 yıllarında ise Mengoli tarafından

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n.(n+1)}$$

Serisi verilmiştir.

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n.(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Bu eşitlikte n $\rightarrow\infty$ toplamın 1 olduğu görülür. Mengoli'nin o dönemde karşılaştığı ilk sert problem

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}$$

sonsuz toplamıdır ki uğraşmaları da başarısızlıkla sonuçlanmıştır. Jakob Bernoulli ve Johan Bernoulli kardeşler 1704 yılında Mengoli toplamını yeniden genişletmişlerdir. Bernoulli kardeşler Mengoli'nin $\sum\frac{1}{\mathrm{n(n+1)}}$ serisini yeniden keşfederek ve$\sum\frac{1}{\mathrm{n}^2-1}$ serisini toplayarak benzer serileri toplayabildiler, ancak $\sum\frac{1}{\mathrm{n}^2}$ serisinin kendisinin toplamını özel durumlarda elde edebilmişlerdir, örneğin

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)$$

Bu soruyu sonunda 1734 yılında Euler, Jakob Bernoulli'nin vefatından çok sonra

çözmüştür. Aslında bu toplamın $\frac{\pi^2}{6}$ olduğunu duyduktan sonra Johan Bernoulli, Euler'in çözümüne benzer kendi kendine bir ispat yöntemi geliştirdi. Euler(1707 1783) seri manüpilasyonunun en büyük virtüzörüydü ve $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ serisine verdiği ilk toplam onun en cüretkar sonuçlarındandır. Farzedelim ki

$\frac{sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \cdots = 0$

olsun. Bu durumda bu eşitliğin kökleri $x_1 = \pi^2, x_2 = (2\pi)^2, r_3 = (3\pi)^2$, ... fakat x sıfır olamaz çünkü $\frac{sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ değeri 1'e eşit olur. Şimdi polinomal bir eşitlkiğe baktığımızda

$$1 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

Polinomunun $x = x_{1,} x_2, \ldots, x_n$ kökleridir. Descartes çarpanlara ayırma teorimine göre

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{x_n}\right)$$

Böylece

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = x'in\ katsayısı = -a_1$$

2.dereceden denklem için

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 = 1 - \frac{x}{x_1} - \frac{x}{x_2} + \frac{x^2}{x_1 x_2}$$

$$-a_1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

3.dereceden denklem için

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = \frac{x^3}{x_1 x_2 x_3} + \frac{x^2}{x_1 x_2} + \frac{x^2}{x_1 x_3} + \frac{x^2}{x_2 x_3} - \frac{x}{x_1} - \frac{x}{x_2} - \frac{x}{x_3} + 1$$

$$-a_1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

4. dereceden denklem için .

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = \frac{x^4}{x_1 x_2 x_3 x_4} - \frac{x^3}{x_1 x_2 x_3} - \frac{x^3}{x_1 x_2 x_4} - \frac{x^3}{x_1 x_3 x_4} - \frac{x^3}{x_2 x_3 x_4} + \frac{x^2}{x_1 x_2} + \frac{x^2}{x_1 x_3} + \frac{x^2}{x_2 x_3} + \frac{x^2}{x_1 x_4} + \frac{x^2}{x_2 x_4} + \frac{x^2}{x_3 x_4} - \frac{x}{x_1} - \frac{x}{x_2} - \frac{x}{x_3} - \frac{x}{x_4} + 1$$

$$-a_1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$$

n. dereceden denklem için

$$-a_1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \cdots \frac{1}{x_n}$$

(4.1) denkleminde köklerin $x_1 = \pi^2, x_2 = (2\pi)^2, x_3 = (3\pi)^2, \ldots$

$ayrıca - a = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$ olduğundan

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \cdots = \frac{1}{6}$$

Buradan

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots += \frac{\pi^2}{6}$$

mükemmel sonucu elde edilir.

7 . SONUÇ

Bu tezde, Arşimed'in bir parabol kesiminin alanını hesaplama yöntemi ve Madhava'nın seriler konusundaki çalışmaları, özellikle π sayısını serilerle hesaplama yöntemi incelenmiştir. Bununla birlikte farklı medeniyetlerin serilerle ilgili yaklaşımlarına örnekler verilmiştir. Seriler XIX. yüzyıla gelininceye kadar farklı medeniyetlerde emekleme denilebilecek tarzda uygulama alanları bulmuştur. Örneğin Mısırlılarda ve Mezopotamyalılardaki serileri çağrıştıran örnekler incelendikten sonra, Yunanlıların çalışmaları ele alınmakla birlikte Eudoxos'un tüketim metodundan belirli integralin çıkış noktası sayılan ayrıca Arşimet'in de kullanmış olduğu Eudoxos'un tüketme yöntemi ile dairenin alanı hesaplanmıştır. Ayrıca bu tezde Euler' in

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots += \frac{\pi^2}{6}$$

Eşitliğini nasıl bulduğuna yer verilmiştir.

KAYNAKÇA

[1] Sayılı, Aydın; Mısırlılarda ve Mezopotamyalılarda Matematik, Astronomi ve Tıp, Türk Tarih Kurumu Basımavi, Ankara, 1991.

[2] Bellos, Alex; Alex's Adventures in Numberland, Bloomsbury Publishing Plc, London, 2010.

[3] Robins,Gay; Shute, Charles; The Rhind Mathematical Papyrus, Dover Publications, New York, 1987.

[4] Reimer, David; Count Like an Egyptian, Princeton University Press, New Jersey, 2014.

[5] Van Der Waerden, B. L., Science Awakening, Oxford University Press, New York, 1961.

[6] Stillwell, John; Mathematics and Its History, Springer Media, 2010.

[7] Joseph, George Gheverghese; A Passage to Infinity: Medieval Indian Mathematics from Kerala and Its Impact, SAGE Publications Pvt. Ltd, 2009.

[8] Ferraro, Giovanni, The Rise and Development of the Theory of Series up to the Early 1820s, Springer, 2008.

[9] Hairer, E., Wanner, G., Analysis by Its History, Springer, 2008.

[10] Körle, Hans-Heinrich, Infinite Series in a History of Analysis, De Gruyter, 2015.