RIEMANN GEOMETRİSİNDE

BOCHNER TEKNİĞİ

Yüksek Lisans Tezi

Özge ÖZMEN

Eskişehir, 2018

RIEMANN GEOMETRİSİNDE BOCHNER TEKNİĞİ

Özge ÖZMEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat LİMONCU

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Ocak, 2018

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Özge ÖZMEN'in **" Riemann Geometrisinde Bochner Tekniği"** başlıklı tezi **03/01/2018** tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, **Matematik** Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

		Unvanı-Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Prof. Dr. Murat LİMONCU	....
Üye	:	Doç. Dr. Yılmaz DERELİ	....
Üye	:	Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN	....

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Ersin YÜCEL

ÖZET

RIEMANN GEOMETRİSİNDE BOCHNER TEKNİĞİ

Özge ÖZMEN

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ocak, 2018

Danışman: Prof. Dr. Murat LİMONCU

Bu tezde Riemann geometrisinde Bochner tekniği tanıtılmıştır. Bochner tekniğinde kullanılan Riemann metrik tensörü, Levi-Civita bağıntısı, tensör türevi, Riemann eğriliği, Ricci eğriliği, skaler eğrilik gibi bazı temel kavramlar verilmiştir. Bochner formülü elde edilmiştir. Bu formül kullanılarak Riemann geometride iyi bilinen bazı teoremler ispatlanmıştır. Bu teoremler hem orijinal Ricci eğriliğini hem de onun bir modifikasyonunu içermektedir. Ayrıca bu teoremler harmonik vektör alanları, Killing vektör alanları ve konformal Killing vektör alanları ile de ilgilidir. Bu sebepten bu vektör alanları tanımlanmıştır ve bazı özellikleri not edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Riemann Manifoldları, Ricci Eğriliği, Bochner formülü, Bakry-Emery Ricci Eğriliği.

ABSTRACT

THE BOCHNER TECHNIQUE IN RIEMANNIAN GEOMETRY

Özge ÖZMEN

Department of Mathematics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, January, 2018

Supervisor: Prof. Dr. Murat LİMONCU

In this thesis, the Bochner technique is presented in Riemannian geometry. Some basic concepts such as Riemannian metric tensor, Levi-Civita connection, tensor derivation, Riemannian curvature, Ricci curvature, scalar curvature used in Bochner technique are given. The Bochner formula is obtained. Some well-known theorems in Riemannian geometry are proved by use of this formula. These theorems include both the original Ricci curvature and a modification of its. Additionally, these theorems concern with harmonic vector field, Killing vector field and conformal Killing vector field. Hence, these vector fields are defined and their some properties are noted.

Keywords: Riemannian Manifolds, Ricci Curvature, Bochner Formula, Bakry-Emery Ricci Curvature.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında büyük emekleri olan ve her türlü desteklerini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Murat LİMONCU'ya ve değerli hocam Yrd. Doç. Dr. İlknur ATASEVER GÜVENÇ'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Özge ÖZMEN

.../.../2018

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan " bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Özge ÖZMEN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$T_p M$	:	M manifoldunun $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı
$\mathfrak{X}(M)$	:	M manifoldu üzerinde tanımlı vektör alanlarının kümesi
$C^\infty(M)$	:	M manifoldu üzerinde her mertebeden türevi var olan fonksiyonların kümesi
$\mathbf{C}$	:	Kontraksiyon (büzülme) operatörü
g	:	Riemann metrik tensörü
$D_V W$	:	W vektör alanının V vektör alanına göre kovaryant türevi
R	:	Riemann eğriliği
$\mathrm{grad}(f)$	:	f fonksiyonunun gradyant operatörü
$\mathrm{div}(f)$	:	f fonksiyonunun diverjans operatörü
$\mathrm{Hess}(f)$	:	f fonksiyonunun Hessian operatörü
Δf	:	f fonksiyonunun Laplacian operatörü
Ric	:	Ricci eğriliği
S	:	Skaler eğriliği
$\mathrm{Ric}_{\mathrm{BE}}$	:	Bakry-Emery Ricci eğriliği

1. GİRİŞ

Matematikte geometrik analizin yapıldığı en temel alan Riemann manifoldlarıdır. Riemann manifoldlarında analitik bir yöntem olan Bochner Tekniği ilk kez Bochner [3] ve Yano [10] tarafından ortaya konulmuştur. Bu çalışmalarda Bochner Tekniği'nde yer alan temel argümanlar harmonik vektör alanları, Killing vektör alanları, konformal Killing vektör alanları ve Ricci eğriliği gibi Riemann geometrisinin önemli kavramlarıdır. Bu teknik Riemann manifoldlarının geometrisi ve topolojisi ile ilgili bilgiler vermektedir. Son zamanlarda Ricci eğriliğinin modifikasyonları Riemann manifoldlarında sıkça kullanılmaya başlanmıştır [1], [5], [6], [8]. Ricci eğriliğinin bu modifikasyonları Bochner Tekniği'nde de ele alınmıştır [1], [5], [6], [8]. Tez çalışmamızda Bochner Tekniği'nin klasik teoremleri ispatlanmıştır. Sonrasında Ricci eğriliğinin Bakry-Emery [1] tarafından verilen modifikasyonu kullanılarak, Killing vektör alanlarının paralel olmasıyla ilgili bilinen bir teoremin ispatı yapılmıştır. Bu tezde yapılan ispat, Yano'nun [10] konformal Killing vektör alanları ile ilgili teoreminin ispatındaki yöntem ile yapılan bir ispattır.

Tezde sırasıyla

i) Tanjant ve kotanjant vektörler tanımlanacak,

ii) Vektör alanları, 1-formlar ve tensör alanları tanımlanacak,

iii) Riemann metrik tensörü ve Levi-Civita bağıntısı tanımlanacak,

iv) Riemann eğriliğinin tanımı verilecek,

v) grad(f), div(f), Hess(f) gibi bazı diferansiyellenebilir operatörlerler tanımlanacak,

vi) Riemann eğriliğinin kontraksiyonu yardımıyla Ricci eğriliği tanımlanacak,

vii) Harmonik, Killing ve konformal Killing vektör alanlarının tanımları verilip Bochner formülü yardımıyla bu vektör alanlarının paralelliği gösterilecek,

viii) Ricci eğriliğinin bir modifikasyonu olan Bakry-Emery Ricci tensörü tanımlanıp Killing vektör alanlarının paralelliği gösterilecektir.

2. RİEMANN MANİFOLDLARI

Öncelikle türevlenebilir manifoldlarda diferansiyel hesap yapılabilmesini sağlayan temel bazı kavramları tanıtalım. Bu kavramlarla ilgili daha ayrıntılı bilgi için [2] numaralı kaynağa bakılabilir. Ayrıca bu çalışma boyunca, matematiksel ifadelerde kendini tekrar eden altlı üstlü indisler üzerinde toplam olduğu kabul edilecektir.

2.1. Tanjant ve Kotanjant Vektörler

n-boyutlu türevlenebilir bir M manifoldu verilsin. Bir $p \in M$ noktasında, gerçel değerli $C^{\infty}(M)$-sınıfından fonksiyonların kümesinden gerçel sayılar kümesine her $f, h \in C^{\infty}(M)$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

i) $V_p\,(f.h) = V_p(f)\,h(p) + f(p)\,V_p(h)$

ii) $V_p\,(\lambda f + h) = \lambda\,V_p(f) + V_p(h)$

koşullarını sağlayan

$$V_p : C^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna $p \in M$ noktasında bir *tanjant vektör* denir. $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerin kümesi T_pM ile gösterilir. $(T_pM, \mathbb{R})$ ikilisi n-boyutlu bir vektör uzayıdır (bakınız [2]). Dolayısıyla bu vektör uzayının dualinden bahsedilebilir: $p \in M$ noktasındaki T_pM uzayının duali T_p^*M ile gösterilir. $(T_p^*M, \mathbb{R})$ ikilisi de n-boyutlu bir vektör uzayıdır. Öyleyse dual uzay tanımı gereği $\theta_p \in T_p^*M$ elemanları

$$\theta_p : T_pM \to \mathbb{R}$$

biçimindeki $\mathbb{R}$-lineer fonksiyonlardır. T_p^*M nin elemanlarına $p \in M$ noktasındaki *kotanjant vektörleri* denir.

2.2. Vektör Alanları ve 1-Formlar

n-boyutlu türevlenebilir bir M manifoldu üzerinde bir V *vektör alanı*, M manifoldunun noktalarını tanjant vektörlerle eşleştiren bir fonksiyondur. Yani bir V

vektör alanı,

$$\begin{aligned} V : M &\to \bigcup_{p \in M} T_pM \\ q &\mapsto V_q \in T_qM \end{aligned}$$

şeklinde bir fonksiyondur. Bir V vektör alanı ve bir $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonu verildiğinde, $V(f)$ ile gösterilen gerçel değerli fonksiyon $\big(V(f)\big)(p) := V_p(f)$ kuralı ile tanımlanır. Eğer her $f \in C^\infty(M)$ için $V(f) \in C^\infty(M)$ ise V vektör alanı türevlenebilirdir. Tanjant vektör tanımından dolayı bir V vektör alanı her $f, h \in C^\infty(M)$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

i) $V(fh) = V(f)\,h + f\,V(h)$

ii) $V(\lambda f + h) = \lambda V(f) + V(h)$

özelliklerine sahiptir. Vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{X}(M)$ ile gösterilir. $\big(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M)\big)$ ikilisi bir modül yapısına sahiptir (bakınız [2]). $C^\infty(M)$ kümesi birimli ve değişimli bir halkadır.

M manifoldunun noktalarına kotanjant vektörler karşılık getiren fonksiyonlara *1-form* (veya *kovektör alanı*) denir. Yani bir θ 1-formu,

$$\begin{aligned} \theta : M &\to \bigcup_{p \in M} T_p^*M \\ q &\mapsto \theta_q \in T_q^*M \end{aligned}$$

biçiminde bir fonksiyondur. 1-formların kümesi $\mathfrak{X}^*(M)$ ile gösterilir. Kotanjant vektörlerin tanımından dolayı bir $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-formu ve bir $V \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanı için $\theta(V)$ gerçel değerli fonksiyon $\big(\theta(V)\big)(p) := \theta_p(V_p)$ biçiminde tanımlanır. Eğer her $V \in \mathfrak{X}(M)$ için $\theta(V) \in C^\infty(M)$ ise $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-formu türevlenebilirdir. $\big(\mathfrak{X}^*(M), C^\infty(M)\big)$ ikilisi de modül yapısına sahiptir (bakınız [2]). Ayrıca $\big(\theta(V)\big)(p) = \theta_p(V_p)$ tanımından $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-formları her $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ ve her $f \in C^\infty(M)$ için $\theta(fV + W) = f\theta(V) + \theta(W)$ özelliğine $\big(C^\infty(M)$-lineerlik$\big)$ sahiptir.

Şimdi de yukarıda verilen tanımlar yardımıyla tensörleri açıklayalım.

2.3. Tensörler

n-boyutlu türevlenebilir M manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayı ile T_p^*M kotanjant uzayı düşünüldüğünde,

$$T_p : (T_pM)^r \times (T_p^*M)^s \longrightarrow \mathbb{R}$$

biçimindeki $\mathbb{R}$-multilineer fonksiyona $p \in M$ noktasında (r,s)-tipinden bir *tensör* denir. r-mertebesi kovaryant mertebe ve s-mertebesi de kontravaryant mertebe olarak isimlendirilir. $p \in M$ noktasındaki (r,s)-tipinden tensörlerin kümesi $\mathfrak{T}_{rs}(p)$ ile gösterilir. $\Big(\mathfrak{T}_{rs}(p), \mathbb{R}\Big)$ ikilisi n^{r+s}-boyutlu bir vektör uzayıdır.

Benzer bir yaklaşımla, $\Big(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M)\Big)$ vektör alanları ve $\Big(\mathfrak{X}^*(M), C^\infty(M)\Big)$ 1-form modülleri üzerinden

$$T : \mathfrak{X}(M)^r \times \mathfrak{X}^*(M)^s \longrightarrow C^\infty(M)$$

biçimindeki $C^\infty(M)$-multilineer fonksiyona (r,s)-tipinden *tensör alanı* denir. r-mertebesi kovaryant mertebe ve s-mertebesi de kontravaryant mertebe olarak isimlendirilir. (r,s)-tipinden tensör alanlarının kümesi $\mathfrak{T}_{rs}(M)$ ile gösterilir. Daha önceki durumlarda olduğu gibi $\Big(\mathfrak{T}_{rs}(M), C^\infty(M)\Big)$ ikilisi de bir modüldür. Daha önce belirttiğimiz $\theta(fV+W) = f\theta(V) + \theta(W)$ özelliğinden dolayı θ 1-formları $(1,0)$-tipinden kovaryant tensör alanlarıdır. Ayrıca bir V vektör alanı, her $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ için $V(\theta) := \theta(V)$ kuralı ile verilen $V : \mathfrak{X}^*(M) \to C^\infty(M)$ biçiminde bir fonksiyon olarak da düşünülebilir. Bu fonksiyonun $C^\infty(M)$-lineer olduğu açıktır. Dolayısıyla vektör alanları $(0,1)$-tipinden kontravaryant tensör alanlarıdır. $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonları $(0,0)$-tipinden tensör alanları olarak tanımlanırlar. Eğer

$$T : \mathfrak{X}(M)^r \to \mathfrak{X}(M)$$

biçiminde $C^\infty(M)$-multilineer bir fonksiyon varsa, bu fonksiyon $(r,1)$-tipinden bir tensör alanı olarak göz önüne alınabilir (bakınız [2] sayfa 36, 37).

$A \in \mathfrak{T}_{rs}(M)$ ve $B \in \mathfrak{T}_{k\ell}(M)$ olsun. Her $X_1, \ldots, X_r, X_{r+1}, \ldots, X_{r+k} \in \mathfrak{X}(M)$ ve

$\theta^1, \dots, \theta^s, \theta^{s+1}, \dots, \theta^{s+\ell} \in \mathfrak{X}^*(M)$ için

$$(A \otimes B)(X_1, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_{r+k}, \theta^1, \dots, \theta^s, \theta^{s+1}, \dots, \theta^{s+\ell}) :=$$
$$A(X_1, \dots, X_r, \theta^1, \dots, \theta^s) B(X_{r+1}, \dots, X_{r+k}, \theta^{s+1}, \dots, \theta^{s+\ell})$$

olarak tanımlanan $A \otimes B \in \mathfrak{T}_{(r+k)(s+\ell)}(M)$ tensör alanına A ve B tensör alanlarının *tensör çarpımı* denir. $(0,0)$-tipinden bir tensör alanı olan $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonları için, $f \otimes A$ tensör çarpımı $f \otimes A := fA$ olarak tanımlanır. Buradaki "fA" gösterimi modül yapısındaki dışarıdan çarpmadır (bakınız [2]).

Bir $A \in \mathfrak{T}_{rs}(M)$ tensör alanı $r \neq 0$ ve $s \neq 0$ olacak şekilde verilsin. Her $X_1, \dots, X_{r-1} \in \mathfrak{X}(M)$ ve her $\theta^1, \dots, \theta^{s-1} \in \mathfrak{X}^*(M)$ için herhangi bir koordinat sisteminde $1 \leq i \leq r$ ve $1 \leq j \leq s$ olmak üzere

$$(\mathbf{C}_i^j A)(X_1, \dots, X_{r-1}, \theta^1, \dots, \theta^{s-1}) :=$$
$$\sum_{m=1}^{n} A(X_1, \dots, X_{i-1}, \partial_m, \dots, X_{r-1}, \theta^1, \dots, \theta^{j-1}, dx^m, \dots, \theta^{s-1})$$

olarak tanımlanan $(r-1, s-1)$-tipinden $\mathbf{C}_i^j A$ tensör alanına A tensör alanının *kontraksiyonu* denir. Burada $\partial_m = \frac{\partial}{\partial x^m}$ ve dx^m söz konusu koordinat sisteminin koordinat tabanlarıdır. Yukarıda verilen kontraksiyon tanımının koordinat sisteminden bağımsız olduğu Teorem 2.4.4 ün ispatındaki yöntem ile görülebilir.

Vektör alanları ve 1-formlarda olduğu gibi tensör alanları da M manifoldunun noktalarına tensörler karşılık getirirler. Yani (r,s)-tipinden bir T tensör alanı, bir $p \in M$ noktasına $T_p : (T_pM)^r \times (T_p^*M)^s \to \mathbb{R}$ biçimindeki tensörü karşılık getirir (bakınız [2] sayfa 37).

2.4. Riemann Metrik Tensörü

Tanım 2.4.1. *n-boyutlu diferansiyellenebilir bir M manifoldu verilsin. 2. mertebeden kovaryant bir g tensör alanı, ($g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$)*

i) Her $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ için $g(V,W) = g(W,V)$ ve

ii) Her $p \in M$ ve sıfırdan farklı her $X_p \in T_p(M)$ için, $g_p(X_p, X_p) > 0$

koşullarını sağlıyorsa g tensör alanına Riemann metrik tensörü ya da kısaca Riemann metriği denir. M manifoldu da Riemann manifoldu olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.2 (nondejenerelik). *Her $p \in M$ ve sıfırdan farklı her $X_p \in T_p(M)$ için, $g_p(V_p, X_p) = 0 \in \mathbb{R}$ eşitliğini sağlayan tek çözüm $V_p = 0 \in T_p(M)$ ise g, nondejeneredir.*

Teorem 2.4.3. *Bir Riemann metriği nondejeneredir.*

Kanıt. Varsayalım ki g, Riemann metriği nondejenere olmasın. Buna göre en az bir $V_p \neq 0$ vardır öyle ki her $X_p \in T_p(M)$ için $g_p(V_p, X_p) = 0$ olmalıdır. $X_p = V_p$ olarak alınırsa varsayımımızdan dolayı $g_p(V_p, V_p) = 0$ olur. Bu da g, Riemann metriğinin pozitif tanımlı olmasıyla çelişir. □

Herhangi bir $\eta = (x^1, ..., x^n)$ koordinat sisteminde g, Riemann metriği $g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ şeklinde yazılır. Böyle bir koordinat sisteminde, g nondejenere olduğundan $X = \partial_\mu$ alındığında, (her bir $1 \leq \mu \leq n$ için)

$$g_{\mu\alpha} V^\alpha = g_{\mu 1} V^1 + g_{\mu 2} V^2 + \cdots + g_{\mu n} V^n = 0 \tag{2.1}$$

denklem sisteminin tek çözümü $V^i = 0$ dır $(1 \leq i \leq n)$. Öyleyse lineer cebirden bilindiği gibi katsayılar matrisi olan $g_{\mu\alpha}$ nın determinantı sıfırdan farklı olmalıdır yani $\det(g_{\mu\alpha}) \neq 0$ dır. Demek ki $g_{\mu\alpha}$ matrisi bu koordinat sisteminde terslenebilirdir. $(g_{\mu\alpha})^{-1}$ ile gösterilecek olan bu ters matris kullanılarak aşağıdaki 2.mertebeden kontravaryant tensör tanımlanabilir:

Teorem 2.4.4. *Bir $\eta = (x^1, ..., x^n)$ koordinat sisteminde bileşenleri $g^{\mu\nu} := (g_{\mu\nu})^{-1}$ olarak alınan ve*

$$g^{-1} := g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu \tag{2.2}$$

ile tanımlanan 2.mertebeden kontravaryant g^{-1} tensörü koordinat sisteminden bağımsızdır.

Kanıt. Bu koordinat sisteminde ($\eta = (x^1, ..., x^n)$), g^{-1}' in tanımından

$$\begin{aligned} g^{-1}(dx^i, dx^j) &= (g^{\mu\nu}\partial_\mu \otimes \partial_\nu)(dx^i, dx^j) \\ &= g^{\mu\nu}\partial_\mu(dx^i)\partial_\nu(dx^j) \\ &= g^{\mu\nu}\delta^i_\mu\delta^j_\nu \\ &= g^{ij} \end{aligned} \tag{2.3}$$

dir. Demek ki η koordinat sisteminde

$$g^{-1} = g^{-1}(dx^\mu, dx^\nu)\frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{2.4}$$

yazılabilir. Şimdi η dan farklı herhangi bir $\xi = (y^1, y^2, ..., y^n)$ koordinat sistemi alınsın. Aynı sebepten,

$$g^{-1} = g^{-1}(dy^\mu, dy^\nu)\frac{\partial}{\partial y^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial y^\nu} \tag{2.5}$$

olur. η koordinat sistemindeki ifadeden başlanarak,

$$\begin{aligned} g^{-1} &= g^{-1}(dx^\mu, dx^\nu)\frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ &= g^{-1}\Big(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}dy^\alpha, \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}dy^\beta\Big)\frac{\partial y^k}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^k} \otimes \frac{\partial y^l}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial y^l} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^k}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^l}{\partial x^\nu}g^{-1}(dy^\alpha, dy^\beta)\frac{\partial}{\partial y^k} \otimes \frac{\partial}{\partial y^l} \\ &= \delta^k_\alpha\delta^l_\beta g^{-1}(dy^\alpha, dy^\beta)\frac{\partial}{\partial y^k} \otimes \frac{\partial}{\partial y^l} \\ &= g^{-1}(dy^k, dy^l)\frac{\partial}{\partial y^k} \otimes \frac{\partial}{\partial y^l} \\ &= g^{-1}(dy^\mu, dy^\nu)\frac{\partial}{\partial y^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial y^\nu} \end{aligned} \tag{2.6}$$

bulunur. Bu g^{-1} in ξ koordinat sistemindeki karşılığıdır. Buna göre g^{-1} tensörü koordinat sisteminden bağımsızdır. □

g^{-1} tensörünün de nondejenere dahası pozitif tanımlı olduğu görülebilir. Kontraksiyon yardımıyla,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(g^{-1} \otimes g) &= \delta && (2.7) \\ g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} &= \delta^{\mu}_{\alpha} && (2.8) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

2.5. Levi-Civita Bağıntısı

Tanım 2.5.1 (**Kovaryant Türev**). *Diferansiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ fonksiyonu, her $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ için,*

D1) *$D_V W$, V üzerinde $C^\infty(M)$-lineerdir.*

D2) *$D_V W$, W üzerinde $\mathbb{R}$-lineerdir.*

D3) *Her $f \in C^\infty(M)$ için $D_V fW = V(f)W + fD_V W$*

koşullarını sağlıyorsa, D ye bir bağlantı, $D_V W$ ye de W nun V ye göre kovaryant türevi denir. Ayrıca $D_V : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ ye de kovaryant türev operatörü denir.

Böyle bir fonksiyon var mıdır sorusunun yanıtı aşağıda verilecektir. Bunun öncesinde bu sorunun yanıtı için aşağıdaki önermeye ihtiyaç duyulacaktır.

Önerme 2.5.2. *Diferansiyellenebilir bir M Riemann manifoldu üzerinde, her $X, V \in \mathfrak{X}(M)$ için, $\mathfrak{X}(M)$ den $\mathfrak{X}^*(M)$ ye, ($\phi : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(M)$)*

$$(\phi(V))(X) := g(V, X) \tag{2.9}$$

olarak tanımlanan ϕ fonksiyonu bir $C^\infty(M)$-lineer izomorfizmadır.

Kanıt. Öncelikle, ϕ iyi tanımlı mıdır? Yani $\phi(V)$ gerçekten bir 1-form mudur? Her $X, Y, V \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned} (\phi(V))(fX + Y) &= g(V, fX + Y) \\ &= fg(V, X) + g(V, Y) \\ &= f(\phi(V))(X) + (\phi(V))(Y) && (2.10) \end{aligned}$$

olur. Yani $\phi(V)$, $C^\infty(M)$-lineerdir ve $(\phi(V))(X) \in C^\infty(M)$ olduğu açıktır. Görüldüğü gibi $\phi(V)$, bir 1-formdur. Buna göre ϕ, iyi tanımlıdır. ϕ fonksiyonunun izomorfizma olduğu aşağıdaki sonuçlardan elde edilir:

i) $\phi, C^\infty(M)$-lineer midir? Yani $\phi(fV+Y) = f\phi(V) + \phi(Y)$ midir?
Her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned}(\phi(fV+Y))(X) &= g(fV+Y, X) \\ &= fg(V,X) + g(Y,X) \\ &= f(\phi(V))(X) + (\phi(Y))(X) \\ &= (f\phi(V) + \phi(Y))(X)\end{aligned} \tag{2.11}$$

eşitliğinden ϕ nin $C^\infty(M)$-lineer olduğu görülür.

ii) ϕ, bire-bir midir? Yani, $\phi(V) = \phi(W)$ iken $V = W$ mudur?
$\phi(V) = \phi(W)$ ise, her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için $(\phi(V))(X) = (\phi(W))(X)$ olmalıdır. ϕ nin tanımından,

$$g(V,X) = g(W,X) \tag{2.12}$$

dir. Buradan,

$$g(V,X) - g(W,X) = 0 \tag{2.13}$$

eşitliği elde edilir. g nin lineerliğinden,

$$g(V-W,X) = 0 \tag{2.14}$$

olduğu görülür. g, nondejenere olduğundan bu durum ancak $V - W = 0$ iken sağlanır. Buradan da $V = W$ olduğu görülür. ϕ birebir dönüşümdür.

iii) ϕ, örten midir? Yani verilen her bir $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ için $\phi(W) = \theta$ olacak şekilde $W \in \mathfrak{X}(M)$ var mıdır? Verilen bir θ 1-formu herhangi bir koordinat sisteminde $\theta = \sum\limits_i \theta_i dx^i$ olarak yazılabilir. Aranılan $W \in \mathfrak{X}(M)$, bu koordinat sisteminde

$W = \sum\limits_{i,j} g^{ij}\theta_i\partial_j$ dir (W nin koordinat seçiminden bağımsız olduğu Teorem 2.4.4 ün ispatındaki aynı yöntemle görülebilir). Gerçekten de, her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
(\phi(W))(X) &= g(W, X) \\
&= g(\sum_{i,j} g^{ij}\theta_i\partial_j, X) \\
&= g(\sum_{i,j} g^{ij}\theta_i\partial_j, \sum_k X^k\partial_k) \\
&= \sum_{i,j,k} g^{ij}\theta_i X^k g_{jk} \\
&= \sum_i \theta_i X^i \\
&= \theta(X)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için geçerli olduğundan $\phi(W) = \theta$ bulunur. Buna göre, ϕ örtendir. Bu üç özellikten de ϕ fonksiyonunun izomorfizma olduğu görülür.

□

Kimi kaynaklarda $\phi(V)$ 1-formu, V^* ile de gösterilebilir. Bu 1-forma V nin metrik duali denir. Şimdi Tanım 2.5.1 de bahsedilen bağlantının varlığıyla ilgili sorunun yanıtı aşağıdaki gibi verilebilir:

Teorem 2.5.3. *Bir M Riemann manifoldu verilsin. Her $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ için aşağıdaki koşulları sağlayan tek bir D bağıntısı vardır.*

D4) $[V, W] = D_V W - D_W V$

D5) $Xg(V, W) = g(D_X V, W) + g(V, D_X W)$

Bu D bağıntısına M manifoldunun Levi-Civita Bağıntısı denir ve bu bağıntı aşağıdaki Koszul formülü ile karakterize edilir.

$$\begin{aligned}
2g(D_V W, X) &= Vg(W, X) + Wg(X, V) - Xg(V, W) \\
&\quad -g(V, [W, X]) + g(W, [X, V]) + g(X, [V, W])
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Kanıt. D bağıntısının **D1**, **D2**, **D3**, **D4** ve **D5** koşulları yardımıyla Koszul formülü aşağıdaki gibi elde edilir: Formülün sağ tarafı $F(V, W, X)$ ile gösterilsin. $F(V, W, X)$ nin ilk üç terimi **D5** yardımıyla, son üç terimi ise **D4** yardımıyla yazılsın:

$$
\begin{aligned}
F(V, W, X) &= Vg(W, X) + Wg(X, V) - Xg(V, W) \\
&\quad -g(V, [W, X]) + g(W, [X, V]) + g(X, [V, W]) \\
&= g(D_V W, X) + g(W, D_V X) + g(D_W X, V) \\
&\quad +g(X, D_W V) - g(D_X V, W) - g(V, D_X W) \\
&\quad -g(V, D_W X - D_X W) + g(W, D_X V - D_V X) \\
&\quad +g(X, D_V W - D_W V) \\
&= g(D_V W, X) + g(W, D_V X) + g(D_W X, V) \\
&\quad +g(X, D_W V) - g(D_X V, W) - g(V, D_X W) \\
&\quad -g(V, D_W X) + g(V, D_X W) + g(W, D_X V) \\
&\quad -g(W, D_V X) + g(X, D_V W) - g(X, D_W V) \\
&= g(D_V W, X) + g(X, D_V W) \\
&= 2g(D_V W, X) \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Koszul formülü yardımıyla **D1**, **D2**, **D3**, **D4** ve **D5** koşulları aşağıdaki gibi elde edilir:

D1) Koszul formülünden

$$
\begin{aligned}
2g(D_{fX+Y} Z, W) &= (fX + Y)g(Z, W) + Zg(W, fX + Y) - Wg(fX + Y, Z) \\
&\quad -g(fX + Y, [Z, W]) + g(Z, [W, fX + Y]) + g(W, [fX + Y, Z]) \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

olur. g, Riemann metriğinin C^∞-lineerliği, $[W, fX+Y] = W(f)X+f[W, X]+[W, Y]$

ve $[fX+Y,Z]=f[X,Z]+[Y,Z]-Z(f)X$ eşitlikleri yardımıyla,

$$
\begin{aligned}
2g(D_{fX+Y}Z,W) &= fXg(Z,W)+Yg(Z,W)+Z(fg(W,X)) \\
&\quad +Zg(W,Y)-W(fg(X,Z))-Wg(Y,Z) \\
&\quad -fg(X,[Z,W])-g(Y,[Z,W]) \\
&\quad +g(Z,W(f)X+f[W,X]+[W,Y]) \\
&\quad +g(W,f[X,Z]+[Y,Z]-Z(f)X) \\
&= fXg(Z,W)+Yg(Z,W)+Z(f)g(W,X) \\
&\quad +fZg(W,X)+Zg(W,Y)-W(f)g(X,Z) \\
&\quad -fWg(X,Z)-Wg(Y,Z)-fg(X,[Z,W]) \\
&\quad -g(Y,[Z,W])+W(f)g(Z,X)+fg(Z,[W,X]) \\
&\quad +g(Z,[W,Y])+fg(W,[X,Z])+g(W,[Y,Z]) \\
&\quad -Z(f)g(W,X) \\
&= f\Big(Xg(Z,W)+Zg(W,X)-Wg(X,Z) \\
&\quad -g(X,[Z,W])+g(Z,[W,X])+g(W,[X,Z])\Big) \\
&\quad +Yg(Z,W)+Zg(W,Y)-Wg(Y,Z) \\
&\quad -g(Y,[Z,W])+g(Z,[W,Y])+g(W,[Y,Z]) \\
&= fg(2D_XZ,W)+g(2D_YZ,W) \\
&= 2g(fD_XZ+D_YZ,W) \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
2g(D_{fX+Y}Z,W)-2g(fD_XZ+D_YZ,W) &= 0 \qquad (2.20) \\
2g(D_{fX+Y}Z-fD_XZ-D_YZ,W) &= 0 \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

olduğu bulunur. g Riemann metriğinin nondejenere olmasından dolayı, $D_{fX+Y}Z-fD_XZ-D_YZ=0$ dır. Sonuç olarak, $D_{fX+Y}Z=fD_XZ+D_YZ$ eşitliği elde edilir.

D2) Koszul formülünden

$$
\begin{aligned}
2g(D_X(aY+Z),W) &= Xg(aY+Z,W)+(aY+Z)g(W,X) \\
&\quad -W(X,aY+Z)-g(X,[aY+Z,W]) \\
&\quad +g((aY+Z),[W,X])+g(W,[X,aY+Z]) \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

olur. g Riemann metriğinin C^∞-lineerliğinden,

$$
\begin{aligned}
2g(D_X(aY+Z),W) &= aXg(Y,W)+Xg(Z,W)+aYg(W,X) \\
&\quad +Zg(W,X)-aWg(X,Y)-Wg(X,Z) \\
&\quad -ag(X,[Y,W])-g(X,[Z,W])+ag(Y,[W,X]) \\
&\quad +g(Z,[W,X])+ag(W,[X,Y])+g(W,[X,Z]) \\
&= a\Big(Xg(Y,W)+Yg(W,X)-Wg(X,Y) \\
&\quad -g(X,[Y,W])+g(Y,[W,X])+g(W,[X,Y])\Big) \\
&\quad +Xg(Z,W)+Zg(W,X)-Wg(X,Z) \\
&\quad -g(X,[Z,W])+g(Z,[W,X])+g(W,[Z,X]) \\
&= a.2g(D_XY,W)+2g(D_XZ,W) \\
&= 2g(aD_XY+D_XZ,W) \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan,

$$
2g(D_X(aY+Z),W)-2g(aD_XY+D_XZ,W) = 0 \qquad (2.24)
$$

$$
2g(D_X(aY+Z)-aD_XY-D_XZ,W) = 0 \qquad (2.25)
$$

olduğu bulunur. g, nondejenere olduğundan, $D_X(aY+Z)-aD_XY-D_XZ=0$ dır. Sonuç olarak, $D_X(aY+Z)=aD_XY+D_XZ$ eşitliği elde edilir.

D3) Koszul formülünden

$$\begin{aligned}
2g(D_V fW, X) &= Vg(fW, X) + fWg(X, V) - Xg(V, fW) \\
&\quad -g(V, [fW, X]) + g(fW, [X, V]) + g(X, [V, fW]) \\
&= V(fg(W, X)) + fWg(X, V) - X(fg(V, W)) \\
&\quad -g(V, f[W, X] - X(f)W) + fg(W, [X, V]) \\
&\quad +g(X, V(f)W + f[V, W]) \\
&= V(f)g(W, X) + fVg(W, X) + fWg(X, V) \\
&\quad -X(f)g(V, W) - fXg(V, W) - g(V, f[W, X]) \\
&\quad +g(V, X(f)W) + fg(W, [X, V]) + g(X, V(f)W) \\
&\quad +g(X, f[V, W]) \\
&= V(f)g(W, X) + fVg(W, X) + fWg(X, V) \\
&\quad -X(f)g(V, W) - fXg(V, W) - fg(V, [W, X]) \\
&\quad +X(f)g(V, W) + fg(W, [X, V]) + V(f)g(X, W) \\
&\quad +fg(X, [V, W]) \\
&= 2V(f)g(W, X) + f\Big(Vg(W, X) + Wg(X, V) \\
&\quad -Xg(V, W) - g(V, [W, X]) + g(W, [X, V]) \\
&\quad +g(X, [V, W])\Big) \\
&= 2V(f)g(W, X) + 2fg(D_V W, X) \\
&= 2g(V(f)W + fD_V W, X) \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
2g(D_V fW, X) - 2g(V(f)W + fD_V W, X) &= 0 \qquad (2.27) \\
2g(D_V fW - V(f)W - fD_V W, X) &= 0 \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

olduğu bulunur. g, nondejenere olduğundan, $D_V fW - V(f)W - fD_V W = 0$ dır. Sonuç olarak, $D_V fW = V(f)W + fD_V W$ eşitliği elde edilir.

D4) Koszul formülünde ayrı ayrı $D_V W$ ve $D_W V$ oluşturulursa

$$\begin{aligned}
2g(D_V W - D_W V, X) &= 2g(D_V W, X) - 2g(D_W V, X) \\
&= Vg(W, X) + Wg(X, V) - Xg(V, W) \\
&\quad -g(V, [W, X]) + g(W, [X, V]) + g(X, [V, W]) \\
&\quad -Wg(V, X) - Vg(X, W) + Xg(W, V) \\
&\quad +g(W, [V, X]) - g(V, [X, W]) - g(X, [W, V]) \\
&= 2g(X, [V, W]) \\
&= 2g([V, W], X) \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan,

$$2g(D_V W - D_W V, X) - 2g([V, W], X) = 0 \qquad (2.30)$$

$$2g(D_V W - D_W V - [V, W], X) = 0 \qquad (2.31)$$

eşitlikleri elde edilir. g, nondejenere olduğundan, $D_V W - D_W V = [V, W]$ bulunur.

D5) Yukarıdakilerle benzer biçimde gerekli terimler Koszul formülünde oluşturulursa g Riemann metriğinin simetrikliğinden ve Lie parantezinin ters simetrikliğinden, ilk olarak

$$\begin{aligned}
2g(D_X V, W) &= Xg(V, W) + Vg(W, X) - Wg(X, V) \\
&\quad -g(X, [V, W]) + g(V, [W, X]) + g(W, [X, V]) \qquad (2.32) \\
2g(V, D_X W) &= 2g(D_X W, V) \\
&= Xg(W, V) + Wg(V, X) - Vg(X, W) \\
&\quad -g(X, [W, V]) + g(W, [V, X]) + g(V, [X, W]) \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

sonuçları bulunur. Bu ifadeleri taraf tarafa topladığımızda,

$$2g(D_X V, W) + 2g(D_X W, V) = 2Xg(V, W) \qquad (2.34)$$

$$g(D_X V, W) + g(D_X W, V) = Xg(V, W) \qquad (2.35)$$

$$g(D_X V, W) + g(V, D_X W) = Xg(V, W) \qquad (2.36)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi de Koszul formülünü sağlayan D bağıntısının varlığı ve tekliği ispatlanacaktır. Önerme 2.5.2 deki ϕ izomorfizmasının örtenliği D bağıntısının varlığını, birebirliği ise D nin tekliğini gösterir: $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanları seçilsin ve formülün sağ tarafı $\theta_{V,W}(.) = F(V, W, .)$ olarak gösterilsin. Bu fonksiyon seçilmiş V ve W vektör alanlarına karşılık gelen bir 1-formdur. Gerçekten de,

$$\begin{aligned}
\theta_{V,W}(fX+Y) &= F(V,W,fX+Y) \\
&= Vg(W,fX+Y) + Wg(fX+Y,V) \\
&\quad -(fX+Y)g(V,W) - g(V,[W,fX+Y]) \\
&\quad +g(W,[fX+Y,V]) + g(fX+Y,[V,W]) \\
&= V(fg(W,X)) + Vg(W,Y) + W(fg(X,V)) \\
&\quad +Wg(Y,V) - fXg(V,W) - Yg(V,W) \\
&\quad -g(V, W(f)X + f[W,X] + [W,Y]) \\
&\quad +g(W, f[X,V] + [Y,V] - V(f)X) \\
&\quad +g(fX+Y,[V,W]) \\
&= V(f)g(W,X) + f(Vg(W,X)) + Vg(W,Y) \\
&\quad +W(f)g(X,V) + f(Wg(X,V)) + Wg(Y,V) \\
&\quad -fXg(V,W) - Yg(V,W) - W(f)g(V,X) \\
&\quad -fg(V,[W,X]) - g(V,[W,Y]) + fg(W,[X,V]) \\
&\quad +g(W,[Y,V]) - V(f)g(W,X) + fg(X,[V,W]) \\
&\quad +g(Y,[V,W]) \\
&= f\Big(Vg(W,X) + Wg(X,V) - Xg(V,W) \\
&\quad -g(V,[W,X]) + g(W,[X,V]) + g(X,[V,W])\Big) \\
&\quad +Vg(W,Y) + Wg(Y,V) - Yg(V,W) \\
&\quad -g(V,[W,Y]) + g(W,[Y,V]) + g(Y,[V,W]) \\
&= fF(V,W,X) + F(V,W,Y) \\
&= f\theta_{V,W}(X) + \theta_{V,W}(Y) \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Şimdi de verilen V, W vektör alanlarına karşılık gelen bir $D_V W$ vektör alanının tek türlü var olduğu gösterilsin. Bunun için yine Önerme 2.5.2 deki ϕ izomorfizması kullanılacaktır: Bu $\theta_{V,W}$ bir formuna tek bir $Z_0 \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanı karşılık gelir öyle ki $\phi(Z_0) = \theta_{V,W}$ dir (Önerme 2.5.2). Bu eşitliğin sol tarafı ϕ nin tanımından $X \in \mathfrak{X}(M)$ için $(\phi(Z_0))(X) = g(Z_0, X)$ olarak yazılır. Sağ tarafı ise $\theta_{V,W}$ tanımından $X \in \mathfrak{X}(M)$ için $\theta_{V,W}(X) = F(V, W, X)$ şeklinde yazılır. Buna göre,

$$\begin{aligned} (\phi(Z_0))(X) &= \theta_{V,W}(X) && (2.38) \\ g(Z_0, X) &= F(V, W, X) \\ &= 2g(D_V W, X) \\ &= g(2D_V W, X) && (2.39) \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$g(Z_0 - 2D_V W, X) = 0 \qquad (2.40)$$

eşitliği gelir. g nondejenere olduğundan,

$$Z_0 - 2D_V W = 0 \qquad (2.41)$$

dır. Öyleyse,

$$D_V W = \frac{1}{2} Z_0 \qquad (2.42)$$

olduğu görülür. $\square$

Tanım 2.5.4 (Levi-Civita Tensör Türevi). *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. X, M manifoldu üzerinde bir vektör alanı ve D_X Levi-Civita bağıntısından gelen kovaryant türev operatörü olmak üzere, her $V_i \in \mathfrak{X}(M)$, $\theta^j \in \mathfrak{X}^*(M)$ ve $A \in \mathfrak{T}_{rs}(M)$ için,*

$$
\begin{aligned}
(D_X A)(V_1, ..., V_r, \theta^1, ..., \theta^s) \;:=\; & XA(V_1, ..., V_r, \theta^1, ..., \theta^s) \\
& -\sum_{i=1}^{r} A(V_1, .., D_X V_i, .., V_r, \theta^1, ..., \theta^s) \\
& -\sum_{j=1}^{s} A(V_1, ..., V_r, \theta^1, .., D_X \theta^j .., \theta^s) \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanan $D_X : \mathfrak{T}_{rs}(M) \to \mathfrak{T}_{rs}(M)$ fonksiyonuna Levi-Civita tensör türevi denir. Burada "$D_X V_i$" ifadesi V_i nin X e göre Levi-Civita kovaryant türevidir. "$D_X \theta^j$" ifadesi de yine Levi-Civita kovaryant türevine bağlı olan, (her $Y \in \mathfrak{X}(M)$ için)

$$
(D_X \theta^j)(Y) = X(\theta^j(Y)) - \theta^j(D_X Y) \qquad (2.44)
$$

eşitliği ile tanımlıdır. Özel olarak bir $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonunun ((0,0)-tipinde bir tensör alanı) tensör türevi $D_X f := X(f)$ ile tanımlanır.

Her X, $V_i \in \mathfrak{X}(M)$ ve $A \in \mathfrak{T}_{k1}(M)$ için, $A : \mathfrak{X}^k(M) \to \mathfrak{X}(M)$ biçimindeki tensör alanlarının tensör türevi

$$
(D_X A)(V_1, V_2, ..., V_k) = D_X A(V_1, V_2, ..., V_k) - \sum_{i=1}^{k} A(V_1, .., D_X V_i, .., V_k) \qquad (2.45)
$$

olarak tanımlanır.

Tensör türevi, $X \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$
D_X(A \otimes B) := (D_X A) \otimes B + A \otimes (D_X B) \qquad (2.46)
$$

şeklinde Leibniz kuralını sağlar. Burada A ve B herhangi tipte iki tensör alanıdır (Farklı tiplere sahip olabilirler).

(r, s)-tipinde bir A tensörü için $(r \neq 0, s \neq 0)$,

$$
\mathbf{C} D_X A = D_X \mathbf{C} A \qquad (2.47)
$$

eşitliği her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için sağlanır. Burada $\mathbf{C}$ herhangi bir kontraksiyon operatörüdür.

NOT: Bundan sonra kontraksiyon operatörü yukarıdaki gibi "$\mathbf{C}$" ile gösterilecektir. Kontraksiyonun hangi kovaryant ve kontravaryant haznelere göre yapılacağı önemli ise bu haznelerin kodları kontraksiyon operatöründe "$\mathbf{C}_i^j$" şeklinde yazılır. Eğer önemli değilse (tensörlerin simetrikliğinden dolayı) sadece "$\mathbf{C}$" yazılır.

Tanım 2.5.5 (Kovaryant Diferansiyeli). *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. M manifoldu üzerinde r. mertebeden kovaryant ve s. mertebeden kontravaryant bir tensörü, $(r+1)$.mertebeden kovaryant ve s.mertebeden kontravaryant bir tensörle eşleştiren aşağıdaki fonksiyona kovaryant diferansiyeli denir: Her X, $V_i \in \mathfrak{X}(M)$, $\theta^j \in \mathfrak{X}^*(M)$ $(1 \leq i \leq r$ ve $1 \leq j \leq s)$ ve $A \in \mathfrak{T}_{rs}(M)$ için, $D : \mathfrak{T}_{rs}(M) \rightarrow \mathfrak{T}_{(r+1)s}(M)$ kovaryant diferansiyeli*

$$(DA)(X, V_1, ..., V_r, \theta^1, ..., \theta^s) := (D_X A)(V_1, ..., V_r, \theta^1, ..., \theta^s) \tag{2.48}$$

olarak tanımlanır. Burada $D_X A$ Levi-Civita tensör türevidir.

Örnek olarak bir $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonu düşünülürse, her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$(Df)(X) = D_X f = X(f) = df(X) \tag{2.49}$$

olacağından

$$Df = df \tag{2.50}$$

bulunur.

2.6. Riemann Eğriliği

Teorem 2.6.1. *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. D, M nin üzerinde Levi-Civita bağıntısı olmak üzere, her X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ için,*

$$R(X,Y)Z := D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z \tag{2.51}$$

olarak tanımlanan R fonksiyonu $(3,1)$ tipinden bir tensör alanıdır. Bu tensör alanına Riemann eğriliği denir.

Kanıt. **D1**, **D2**, **D3** koşulları ve $[X, fY + V] = X(f)Y + f[X,Y] + [X,V]$ eşitliği yardımıyla R fonksiyonunun Y bileşeni için C^∞-lineer olduğu aşağıdaki gibi ispatlanabilir: Her X, Y, V, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
R(X, fY+V)Z &= D_X D_{fY+V} Z - D_{fY+V} D_X Z - D_{[X,fY+V]} Z \\
&= D_X(fD_Y Z + D_V Z) - (fD_Y D_X Z + D_V D_X Z) \\
&\quad -(D_{X(f)Y+f[X,Y]+[X,V]} Z) \\
&= D_X(fD_Y Z) + D_X D_V Z - fD_Y D_X Z - D_V D_X Z \\
&\quad -\Big(D_{X(f)Y} Z + D_{f[X,Y]} Z + D_{[X,V]} Z\Big) \\
&= X(f) D_Y Z + fD_X D_Y Z + D_X D_V Z - fD_Y D_X Z \\
&\quad -D_V D_X Z - X(f) D_Y Z - fD_{[X,Y]} Z - D_{[X,V]} Z \\
&= f\Big(D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z\Big) + D_X D_V Z \\
&\quad -D_V D_X Z - D_{[X,V]} Z \\
&= fR(X,Y)Z + R(X,V)Z
\end{aligned} \tag{2.52}$$

olduğu görülür.

D1, **D2**, **D3** koşulları ve Lie parantezi yardımıyla R fonksiyonunun Z bileşeni için C^∞-lineer olduğu aşağıdaki gibi ispatlanabilir: Her X, Y, V, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
R(X,Y)(fZ+V) &= D_X D_Y(fZ+V) - D_Y D_X(fZ+V) \\
&\quad -D_{[X,Y]}(fZ+V) \\
&= D_X\Big(Y(f)Z + fD_Y Z + D_Y V\Big) \\
&\quad -D_Y\Big(X(f)Z + fD_X Z + D_X V\Big) \\
&\quad -[X,Y](f)Z - fD_{[X,Y]} Z - D_{[X,Y]} V \\
&= X(Y(f))Z + Y(f) D_X Z + X(f) D_Y Z \\
&\quad +fD_X D_Y Z + D_X D_Y V - Y(X(f))Z \\
&\quad -X(f) D_Y Z - Y(f) D_X Z - fD_Y D_X Z \\
&\quad -D_Y D_X V - [X,Y](f)Z - fD_{[X,Y]} Z \\
&\quad -D_{[X,Y]} V
\end{aligned} \tag{2.53}$$

olduğu görülür. Buradan,

$$\begin{aligned} R(X,Y)(fZ+V) &= f\Big(D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z\Big) \\ &\quad + D_X D_Y V - D_Y D_X V - D_{[X,Y]}V \\ &= fR(X,Y)Z + R(X,Y)V \end{aligned} \tag{2.54}$$

eşitliği sağlanır.

R fonksiyonunun X bileşeni için de C^∞-lineer olduğu yani

$$R(fX+V,Y)Z = fR(X,Y)Z + R(V,Y)Z \tag{2.55}$$

eşitliği benzer şekilde gösterilir. Buna göre R fonksiyonu $(3,1)$ tipinden bir tensör alanıdır. □

NOT (Riemann Eğriliğinin Başka İfadeleri): Riemann eğriliği her $X,Y,Z,V \in \mathfrak{X}(M)$ ve her $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ için aynı gösterimle

$$R(X,Y,Z,\theta) := \theta(R(X,Y)Z) \tag{2.56}$$

ile de ifade edilir. Dahası Riemann eğriliği 4. mertebeden kovaryant bir tensör olarak (aynı gösterimle),

$$R(X,Y,Z,V) := g(R(X,Y)Z,V) \tag{2.57}$$

şeklinde de tanımlanır. (2.56) ve (2.57) eşitlikleri arasındaki ilişki daha doğrusu θ 1-formu ile V vektör alanı arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir: Her $X,Y,Z,V \in \mathfrak{X}(M)$ ve her $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ için, (2.57) eşitliğinden dolayı,

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,V) &= g(R(X,Y)Z,V) \\ &= g(V,R(X,Y)Z) \end{aligned} \tag{2.58}$$

dir. Burada Önerme 2.5.2 den,

$$R(X,Y,Z,V) = \phi(V)\big(R(X,Y)Z\big) \tag{2.59}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $\theta = \phi(V)$ alınıp (2.56) kullanıldığında,

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, V) &= \theta\big(R(X, Y)Z\big) \\ &= R(X, Y, Z, \theta) \end{aligned} \tag{2.60}$$

eşitliği sağlanır.

Önerme 2.6.2. *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. X, Y, Z, V, $W \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere,*

1) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$

2) $g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V)$

3) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ *(Birinci Bianchi Özdeşliği)*

4) $g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y)$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt. **1)** Lie parantezi ters simetrik olduğundan aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z \\ &= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z + D_{[Y,X]}Z \\ &= -(D_Y D_X Z - D_X D_Y Z - D_{[Y,X]}Z) \\ &= -R(Y, X)Z \end{aligned} \tag{2.61}$$

2) g nin lineerliğinden ve **D5** koşulundan aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)V, W) &= g(D_X D_Y V - D_Y D_X V - D_{[X,Y]}V, W) \\ &= g(D_X D_Y V, W) - g(D_Y D_X V, W) \\ &\quad -g(D_{[X,Y]}V, W) \\ &= Xg(D_Y V, W) - g(D_Y V, D_X W) \\ &\quad -\Big(Yg(D_X V, W) - g(D_X V, D_Y W)\Big) \\ &\quad -\Big([X, Y]g(V, W) - g(V, D_{[X,Y]}W)\Big) \end{aligned} \tag{2.62}$$

dir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
g(R(X,Y)V,W) &= Xg(D_YV,W)-g(D_YV,D_XW)\\
&\quad -Yg(D_XV,W)+g(D_XV,D_YW)\\
&\quad -[X,Y]g(V,W)+g(V,D_{[X,Y]}W)\\
&= X(Yg(V,W)-g(V,D_YW))\\
&\quad -(Yg(V,D_XW)-g(V,D_YD_XW))\\
&\quad -Y(Xg(V,W)-g(V,D_XW))\\
&\quad +Xg(V,D_YW)-g(V,D_XD_YW)\\
&\quad -[X,Y]g(V,W)+g(V,D_{[X,Y]}W)\\
&= XYg(V,W)-Xg(V,D_YW)\\
&\quad -Yg(V,D_XW)+g(V,D_YD_XW)\\
&\quad -YXg(V,W)+Yg(V,D_XW)\\
&\quad +Xg(V,D_YW)-g(V,D_XD_YW)\\
&\quad -[X,Y]g(V,W)+g(V,D_{[X,Y]}W)\\
&= g(D_YD_XW-D_XD_YW+D_{[X,Y]}W,V)\\
&= -g(D_XD_YW-D_YD_XW-D_{[X,Y]}W,V)\\
&= -g(R(X,Y)W,V) \qquad (2.63)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir.

3) Bu eşitliğin sol tarafı "$H(X,Y,Z)$" ile gösterilip Jakobi Özdeşliği ve **D4** koşulu kullanılırsa aşağıdaki eşitlik sağlanır. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
H(X,Y,Z) &= R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y\\
&= D_XD_YZ-D_YD_XZ-D_{[X,Y]}Z\\
&\quad +D_YD_ZX-D_ZD_YX-D_{[Y,Z]}X\\
&\quad +D_ZD_XY-D_XD_ZY-D_{[Z,X]}Y \qquad (2.64)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Lie parantezi yardımıyla,

$$\begin{aligned}
H(X,Y,Z) &= -D_{[X,Y]}Z - D_{[Y,Z]}X - D_{[Z,X]}Y \\
&\quad +D_X(D_Y Z - D_Z Y) \\
&\quad +D_Y(D_Z X - D_X Z) \\
&\quad +D_Z(D_X Y - D_Y X) \\
&= D_X[Y,Z] - D_{[Y,Z]}X + D_Y[Z,X] \\
&\quad -D_{[Z,X]}Y + D_Z[X,Y] - D_{[X,Y]}Z \\
&= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \\
&= 0 \qquad (2.65)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4) **3**. koşul kullanılarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned}
g(R(X,Y)V,W) + g(R(Y,V)X,W) + g(R(V,X)Y,W) &= 0 \qquad (2.66)\\
g(R(Y,V)W,X) + g(R(V,W)Y,X) + g(R(W,Y)V,X) &= 0 \qquad (2.67)\\
g(R(X,Y)W,V) + g(R(Y,W)X,V) + g(R(W,X)Y,V) &= 0 \qquad (2.68)\\
g(R(X,V)W,Y) + g(R(V,W)X,Y) + g(R(W,X)V,Y) &= 0 \qquad (2.69)
\end{aligned}$$

Bu eşitlikler taraf tarafa toplanıp **1** ve **2** koşulları uygulandığında,

$$g(R(X,Y)V,W) = g(R(V,W)X,Y) \qquad (2.70)$$

eşitliği ispatlanır.

□

Şimdi de R eğriliğinin kovaryant diferansiyeli olan $DR : \mathfrak{X}^4(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tensörü için aşağıdaki özdeşlik gösterilsin:

Önerme 2.6.3 (İkinci Bianchi Özdeşliği). *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. Her X, Y, Z, $W \in \mathfrak{X}(M)$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.*

$$(D_Z R)(X,Y) + (D_X R)(Y,Z) + (D_Y R)(Z,X) = 0. \qquad (2.71)$$

Kanıt. Kovaryant diferansiyelin tanımından R eğriliği için aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}(D_Z R)(X,Y)W &= D_Z(R(X,Y))W - R(D_Z X,Y)W \\ &\quad - R(X,D_Z Y)W - R(X,Y)D_Z W \\ &= [D_Z, R(X,Y)]W - R(D_Z X,Y)W \\ &\quad - R(X,D_Z Y)W \end{aligned} \tag{2.72}$$

Şimdi de, "$(D_Z R)(X,Y)+(D_X R)(Y,Z)+(D_Y R)(Z,X)$" ifadesinin sıfıra eşit olduğunu ispatlamak için **D4** koşulu, Jakobi Özdeşliği ve Lie parantezinin ters simetrikliği kullanılsın: Önce,

$$\mathfrak{B}_{Z,X,Y} = (D_Z R)(X,Y) + (D_X R)(Y,Z) + (D_Y R)(Z,X) \tag{2.73}$$

notasyonu belirlensin. Bu notasyon altında,

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{Z,X,Y} &= [D_Z, R(X,Y)]W - R(D_Z X,Y)W - R(X,D_Z Y)W \\ &\quad +[D_X, R(Y,Z)]W - R(D_X Y,Z)W - R(Y,D_X Z)W \\ &\quad +[D_Y, R(Z,X)]W - R(D_Y Z,X)W - R(Z,D_Y X)W \\ &= [D_Z, R(X,Y)]W + [D_X, R(Y,Z)]W + [D_Y, R(Z,X)]W \\ &\quad +R([X,Z],Y)W + R([Z,Y],X)W + R([Y,X],Z)W \\ &= [D_Z,[D_X,D_Y]]W - [D_Z, D_{[X,Y]}]W + [D_X,[D_Y,D_Z]]W \\ &\quad -[D_X, D_{[Y,Z]}]W + [D_Y,[D_Z,D_X]]W - [D_Y, D_{[Z,X]}]W \\ &\quad +[D_{[X,Z]}, D_Y]W - D_{[[X,Z],Y]}W + [D_{[Z,Y]}, D_X]W \\ &\quad -D_{[[Z,Y],X]}W + [D_{[Y,X]}, D_Z]W - D_{[[Y,X],Z]}W \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.74}$$

olduğu görülür. □

2.7. Bazı Diferansiyel Operatörler

M manifoldu üzerinde bilinen diferansiyel operatörler şunlardır: gradyant, diverjans ve Laplacian.

Tanım 2.7.1 (gradyant). *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. $f \in C^{\infty}(M)$ olmak üzere, her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için,*

$$g(\mathrm{grad}(f), X) = df(X) = X(f) \tag{2.75}$$

olarak tanımlanan $\mathrm{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$ *vektör alanına f nin gradyantı denir.*

Önerme 2.5.2 deki C^{∞}-lineer izomorfizması düşünüldüğünde, yukarıdaki tanım aşağıdaki gibi de verilebilir: df bir formuna $\phi(V) = df$ ile karşılık getirilen "V" vektör alanı f nin gradyant vektör alanıdır.

Bir $\eta : (x^1, ..., x^n) : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ koordinat komşuluğu üzerinde bir fonksiyonun gradyantı,

$$g(\mathrm{grad}(f), X) \;=\; X(f) \tag{2.76}$$

tanımından $X = \partial_{\nu}$ alındığında

$$\begin{aligned} g((\mathrm{grad}(f))^{\mu}\partial_{\mu}, \partial_{\nu}) &= \partial_{\nu}(f) && (2.77)\\ (\mathrm{grad}(f))^{\mu} g_{\mu\nu} &= \partial_{\nu}(f) && (2.78)\\ (\mathrm{grad}(f))^{\mu} g_{\mu\nu} g^{\nu\kappa} &= g^{\kappa\nu}\partial_{\nu} f && (2.79)\\ (\mathrm{grad}(f))^{\kappa} &= g^{\kappa\nu}\partial_{\nu} f && (2.80) \end{aligned}$$

bulunur. Öyleyse $\mathrm{grad}(f)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}(f) &= (\mathrm{grad} f)^{\mu}\partial_{\mu}\\ &= g^{\mu\nu}\,\partial_{\nu} f\,\partial_{\mu}\\ &= g^{\mu\nu}\,\frac{\partial f}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} && (2.81) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Önerme 2.7.2. *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. $f, h \in C^\infty(M)$ ve $V \in \mathfrak{X}(M)$ için,*

$$\mathrm{grad}(fh) = f\,\mathrm{grad}(h) + h\,\mathrm{grad}(f) \tag{2.82}$$

dir.

Kanıt. $f \in C^\infty(M)$ için $\mathrm{grad}(f) = g^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}(fh) &= g^{\mu\nu}\frac{\partial(fh)}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \\
&= g^{\mu\nu}(\frac{\partial f}{\partial x^\nu}h + f\frac{\partial h}{\partial x^\nu})\frac{\partial}{\partial x^\mu} \\
&= g^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}h + f\,g^{\mu\nu}\frac{\partial h}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \\
&= f\,\mathrm{grad}(h) + h\,\mathrm{grad}(f)
\end{aligned} \tag{2.83}$$

eşitliği bulunur. □

Önerme 2.7.3. *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. $f \in C^\infty(M)$ ve $A \in \mathfrak{T}_{rs}(M)$ için, aşağıdaki eşitlik geçerlidir.*

$$D(fA) = df \otimes A + f\,DA \tag{2.84}$$

Kanıt. V, $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ ve $\theta^j \in \mathfrak{X}^*(M)$ $(1 \leq i \leq r$ ve $1 \leq j \leq s)$ için,

$$\begin{aligned}
D(fA)(V, X_1, ..., X_r, \theta^1, ..., \theta^s) &= (D_V fA)(X_1, ..., X_r, \theta^1, ..., \theta^s) \\
&= \Big(V(f)A + fD_V A\Big)(X_1, ..., X_r, \theta^1, ..., \theta^s) \\
&= (df)(V)\,A(X_1, ..., X_r, \theta^1, ..., \theta^s) \\
&\quad + f\,(D_V A)(X_1, ..., X_r, \theta^1, ..., \theta^s) \\
&= (df \otimes A)(V, X_1, ..., X_r, \theta^1, ..., \theta^s) \\
&\quad + f\,(DA)(V, X_1, ..., X_r, \theta^1, ..., \theta^s) \\
&= (df \otimes A + f\,DA)(V, X_1, ..., X_r, \theta^1, ..., \theta^s)
\end{aligned} \tag{2.85}$$

elde edilir. □

Tanım 2.7.4 (diverjans). *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. Herhangi bir $V \in \mathfrak{X}(M)$ için,*

$$\mathrm{div}V = \boldsymbol{C}(DV) \in C^{\infty}(M) \tag{2.86}$$

olarak tanımlanan fonksiyona V nin diverjansı denir.

Diverjans ifadesi bir koordinat sisteminde şu şekilde gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}V &= \mathbf{C}(DV) \\
&= (DV)^{\mu}_{\mu} \\
&= (DV)(\partial_\mu, dx^\mu) \\
&= (D_{\partial_\mu}V)(dx^\mu) \\
&= (D_{\partial_\mu}V)^\mu \\
&= \delta^\mu_\kappa (D_{\partial_\mu}V)^\kappa \\
&= g^{\mu\nu} g_{\kappa\nu} (D_{\partial_\mu}V)^\kappa \\
&= g^{\mu\nu} (D_{\partial_\mu}V)^\kappa g(\partial_\kappa, \partial_\nu) \\
&= g^{\mu\nu} g((D_{\partial_\mu}V)^\kappa \partial_\kappa, \partial_\nu) \\
&= g^{\mu\nu} g(D_{\partial_\mu}V, \partial_\nu)
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Tanım 2.7.5. *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. Herhangi bir $(r,0)$-tipinde bir A tensörü için, A nın diverjansı*

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}A)(X_1, ..., X_{r-1}) &= \boldsymbol{C}^1_r \boldsymbol{C}^1_1 (g^{-1} \otimes DA) \\
&= g^{\mu\nu} (D_{\partial_\mu}A)(X_1, ..., X_{r-1}, \partial_\nu)
\end{aligned} \tag{2.88}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.7.6. *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. Herhangi bir $(r,1)$-tipinde bir A tensörü verilsin ($A(X_1, ..., X_r) \in \mathfrak{X}(M)$ olacak şekilde). Öyleyse,*

$$\widetilde{A}(X_1, ..., X_r, Y) = g(A(X_1, ..., X_r), Y) \tag{2.89}$$

olarak tanımlanan $(r+1,0)$ tipinde $\widetilde{A}$ tensörü kullanıldığında A nın diverjansı,

$$\begin{aligned} divA &= \boldsymbol{C}^1_{r+1}\boldsymbol{C}^1_1(g^{-1}\otimes D\widetilde{A}) \\ &= g^{\mu\nu}(D_{\partial_\mu}\widetilde{A})(X_1,...,X_r,\partial_\nu) \end{aligned} \tag{2.90}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.7.7. *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. $f\in C^\infty(M)$ ve $V\in\mathfrak{X}(M)$ için,*

$$\mathrm{div} fV = V(f) + f\mathrm{div}V \tag{2.91}$$

dir.

Kanıt. $f\in C^\infty(M)$ ve $V\in\mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned} \mathrm{div} fV &= g^{\mu\nu}g(D_{\partial_\mu}fV,\partial_\nu) \\ &= g^{\mu\nu}g(\partial_\mu fV + fD_{\partial_\mu}V,\partial_\nu) \\ &= g^{\mu\nu}g(\partial_\mu fV,\partial_\nu) + fg^{\mu\nu}g(D_{\partial_\mu}V,\partial_\nu) \\ &= g^{\mu\nu}\partial_\mu f g(V,\partial_\nu) + fg^{\mu\nu}g(D_{\partial_\mu}V,\partial_\nu) \\ &= g(V, g^{\mu\nu}\partial_\mu f\,\partial_\nu) + fg^{\mu\nu}g(D_{\partial_\mu}V,\partial_\nu) \\ &= g(V,\mathrm{grad}(f)) + fg^{\mu\nu}g(D_{\partial_\mu}V,\partial_\nu) \\ &= V(f) + f\mathrm{div}V \end{aligned} \tag{2.92}$$

elde edilir. □

Önerme 2.7.8. *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. $V,W\in\mathfrak{X}(M)$ ve herhangi bir $\lambda\in\mathbb{R}$ için,*

$$\mathrm{div}(\lambda V + W) = \lambda\mathrm{div}(V) + \mathrm{div}(W) \tag{2.93}$$

dir.

Kanıt. Diverjansın tanımı kullanıldığında eşitlik doğrudan elde edilir. □

Tanım 2.7.9 (Hessian). *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. $f \in C^\infty(M)$ olmak üzere, f fonksiyonunun 2.mertebeden kovaryant diferansiyeline Hessian operatörü denir ve*

$$\mathrm{Hess}(f) := D(Df) \tag{2.94}$$

şeklinde gösterilir.

Bu tanım yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}(f)(X,Y) &= D(Df)(X,Y) \\
&= (D_X Df)(Y) \\
&= X\Big((Df)(Y)\Big) - Df(D_X Y) \\
&= X(df(Y)) - df(D_X Y) \\
&= Xg(\mathrm{grad}(f), Y) - g(\mathrm{grad}(f), D_X Y) \\
&= g(D_X \mathrm{grad}(f), Y) + g(\mathrm{grad}(f), D_X Y) \\
&\quad - g(\mathrm{grad}(f), D_X Y) \\
&= g\Big(D_X \mathrm{grad}(f), Y\Big)
\end{aligned} \tag{2.95}$$

eşitliği elde edilir.

Önerme 2.7.10. *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. $f \in C^\infty(M)$ için* Hess(f) *simetriktir yani herhangi iki X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ için,*

$$\Big(\mathrm{Hess}(f)\Big)(X,Y) = \Big(\mathrm{Hess}(f)\Big)(Y,X) \tag{2.96}$$

dir.

Kanıt. Hess(f) nin simetrikliği **D4** ve **D5** koşulları kullanılarak gösterilsin:

Her $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Hess}(f))(X,Y) &= g(D_X \mathrm{grad}(f), Y) \\
&= Xg(\mathrm{grad}(f), Y) - g(\mathrm{grad}(f), D_X Y) \\
&= XY(f) - (D_X Y)(f) \\
&= XY(f) - (D_Y X)(f) - [X,Y](f) \\
&= YX(f) - (D_Y X)(f) \\
&= Yg(\mathrm{grad}(f), X) - g(\mathrm{grad}(f), D_Y X) \\
&= g(D_Y \mathrm{grad}(f), X) \\
&= (\mathrm{Hess}(f))(Y,X) \qquad (2.97)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. □

Önerme 2.7.11. *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. $f, h \in C^\infty(M)$ olmak üzere,*

$$\mathrm{Hess}(fh) = f\,\mathrm{Hess}(h) + h\,\mathrm{Hess}(f) + df \otimes dh + dh \otimes df \qquad (2.98)$$

dir.

Kanıt. Her X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}(fh)(X,Y) &= g(D_X \mathrm{grad}(fh), Y) \\
&= g\Big(D_X(f\mathrm{grad}(h) + h\,\mathrm{grad}(f)), Y\Big) \\
&= g\Big(D_X(f\,\mathrm{grad}(h)) + D_X(h\,\mathrm{grad}(f)), Y\Big) \\
&= g\Big(D_X(f\,\mathrm{grad}(h)), Y\Big) + g\Big(D_X(h\,\mathrm{grad}(f)), Y\Big) \\
&= g\Big(X(f)\mathrm{grad}(h) + fD_X\mathrm{grad}(h), Y\Big) \\
&\quad + g\Big(X(h)\mathrm{grad}(f) + hD_X\mathrm{grad}(f), Y\Big) \\
&= X(f)g(\mathrm{grad}(h), Y) + fg(D_X\mathrm{grad}(h), Y) \\
&\quad + X(h)g(\mathrm{grad}(f), Y) + hg(D_X\mathrm{grad}(f), Y)
\end{aligned}$$
$$(2.99)$$

eşitliği sağlanır. Gradyant tanımının yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}(fh)(X,Y) &= df(X)dh(Y) + f(\mathrm{Hess}(h))(X,Y) \\
&\quad + dh(X)df(Y) + h(\mathrm{Hess}(f))(X,Y) \\
&= (df \otimes dh)(X,Y) + f(\mathrm{Hess}(h))(X,Y) \\
&\quad + (dh \otimes df)(X,Y) + h(\mathrm{Hess}(f))(X,Y) \qquad (2.100)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. □

Tanım 2.7.12 (Laplacian). *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. $f \in C^\infty(M)$ olmak üzere, f fonksiyonunun Laplacian ı (Δf), şu şekilde tanımlıdır:*

$$\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) \qquad (2.101)$$

Bu tanım yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) &= g^{\mu\nu} g(D_{\partial_\mu}\mathrm{grad}(f), \partial_\nu) \\
&= g^{\mu\nu}(\mathrm{Hess}(f))(\partial_\mu, \partial_\nu) \\
&= \mathbf{CC}\left(g^{-1} \otimes \mathrm{Hess}(f)\right) \qquad (2.102)
\end{aligned}$$

olduğu bulunur.

Önerme 2.7.13. *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun.*
f, $h \in C^\infty(M)$ için,

$$\Delta(fh) = f\Delta h + h\Delta f + 2g\Big(\mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(h)\Big) \qquad (2.103)$$

dir.

Kanıt. $f,\, h \in C^{\infty}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
\Delta(fh) &= g^{\mu\nu} g\Big(D_{\partial_\mu}\mathrm{grad}(fh), \partial_\nu\Big) \\
&= g^{\mu\nu} g\Big(D_{\partial_\mu} f\,\mathrm{grad}(h), \partial_\nu\Big) + g^{\mu\nu} g\Big(D_{\partial_\mu} h\,\mathrm{grad}(f), \partial_\nu\Big) \\
&= g^{\mu\nu} g\Big((\partial_\mu f)\mathrm{grad}(h), \partial_\nu\Big) + g^{\mu\nu} g\Big(f D_{\partial_\mu}\mathrm{grad}(h), \partial_\nu\Big) \\
&\quad + g^{\mu\nu} g\Big((\partial_\mu h)\mathrm{grad}(f), \partial_\nu\Big) + g^{\mu\nu} g\Big(h D_{\partial_\mu}\mathrm{grad}(f), \partial_\nu\Big) \\
&= g^{\mu\nu} g\Big((\partial_\mu f)\mathrm{grad}(h), \partial_\nu\Big) + f g^{\mu\nu} g\Big(D_{\partial_\mu}\mathrm{grad}(h), \partial_\nu\Big) \\
&\quad + g^{\mu\nu} g\Big((\partial_\mu h)\mathrm{grad}(f), \partial_\nu\Big) + h g^{\mu\nu} g\Big(D_{\partial_\mu}\mathrm{grad}(f), \partial_\nu\Big) \\
&= g^{\mu\nu} g\Big((\partial_\mu f)\mathrm{grad}(h), \partial_\nu\Big) + f\Delta h \\
&\quad + g^{\mu\nu} g\Big((\partial_\mu h)\mathrm{grad}(f), \partial_\nu\Big) + h\Delta f
\end{aligned} \tag{2.104}$$

bulunur. Aşağıdaki eşitliklerden,

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} g((\partial_\mu f)\mathrm{grad}(h), \partial_\nu) &= (\partial_\mu f) g^{\mu\nu} g(\mathrm{grad}(h), \partial_\nu) \\
&= g(\mathrm{grad}(h), (\partial_\mu f) g^{\mu\nu} \partial_\nu) \\
&= g(\mathrm{grad}(h), \mathrm{grad}(f))
\end{aligned} \tag{2.105}$$

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}((\partial_\mu h)\mathrm{grad}(f), \partial_\nu) &= g(\mathrm{grad}(f), g^{\mu\nu}(\partial_\mu h)\partial_\nu) \\
&= g(\mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(h))
\end{aligned} \tag{2.106}$$

$$\Delta(fh) = f\Delta h + h\Delta f + 2g(\mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(h)) \tag{2.107}$$

olduğu görülür. □

2.8. Ricci ve Skaler Eğrilikleri

Tanım 2.8.1 (Ricci Eğriliği). *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. R, M üzerinde Riemann eğriliği olmak üzere M nin Ricci eğriliği,*

$$\mathrm{Ric} = \boldsymbol{C}_1^1 R \tag{2.108}$$

olarak tanımlanır.

Tanımdan, her $Z, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(Z, Y) &= (\mathbf{C}_1^1 R)(Z, Y) \\ &= R(\partial_l, Z, Y, dx^l) \end{aligned} \tag{2.109}$$

dir. Bu eşitlikte $Z = \partial_\nu$ ve $Y = \partial_\mu$ alınırsa,

$$\mathrm{Ric}(\partial_\nu, \partial_\mu) = R(\partial_l, \partial_\nu, \partial_\mu, dx^l) = R^l_{l\nu\mu} \tag{2.110}$$

olur.

Teorem 2.8.2. *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. M nin Ricci eğriliği simetriktir yani her $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için,*

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{Ric}(Y, X) \tag{2.111}$$

dir.

Kanıt. Her $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(X, Y) &= g^{ij} g(R(\partial_i, X)Y, \partial_j) \\ &= g^{ij} g(R(Y, \partial_j)\partial_i, X) \\ &= -g^{ij} g(R(Y, \partial_j)X, \partial_i) \\ &= g^{ij} g(R(\partial_j, Y)X, \partial_i) \\ &= g^{ji} g(R(\partial_j, Y)X, \partial_i) \\ &= \mathrm{Ric}(Y, X) \end{aligned} \tag{2.112}$$

elde edilir. □

Tanım 2.8.3 (**Skaler Eğriliği**). *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. M manifoldunun Skaler eğriliği,*

$$S = \boldsymbol{CC}(g^{-1} \otimes Ric) \tag{2.113}$$

şeklinde tanımlanır.

3. BOCHNER TEKNİĞİ

Riemann geometride Bochner tekniği ve geometrik analiz ile ilgili bazı temel kaynaklar [3], [4], [7], [9], [10] dur.

3.1. Bochner Formülü

Önce bazı kavramları not edelim:

$i)$ ***Adjointlik***: $(1,1)$ tipinde yani $L : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ formundaki bir tensör alanının adjointi bir g Riemann metriğine göre, her $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$L^* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

$$g(L^*(V), W) = g(L(W), V) \tag{3.1}$$

olarak tanımlanan $(1,1)$ tipindeki yeni L^* tensör alanıdır. Bu tanımın iyi tanımlı olduğu Önerme 2.5.2 kullanılarak hemen görülür. (bakınız sayfa 16 Levi-Civita varlık teklik). Mesela bir W vektör alanının kovaryant diferansiyeli, $DW : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $(DW)(X) = D_X W$ olarak tanımlanmıştı. Öyleyse $(DW)^*$ dan bahsedilebilir.

$ii)$ ***Tensörlerin iç çarpımı***: $F, G \in \mathfrak{T}_{rs}(M)$ olsun. Öyleyse bu tensörlerin iç çarpımı herhangi bir koordinat sisteminde,

$$< F, G >= g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} ... g^{i_r j_r} g_{a_1 b_1} g_{a_2 b_2} ... g_{a_s b_s} F^{a_1 a_2 ... a_s}_{i_1 i_2 ... i_r} G^{b_1 b_2 ... b_s}_{j_1 j_2 ... jr} \tag{3.2}$$

ile tanımlıdır. Bu ifade uygun kontraksiyon kodlaması seçimi ile

$$< F, G >= \underbrace{\mathbf{CC...C}}_{2(r+s)\text{ defa}} (g^{-1} \otimes ... \otimes g^{-1} \otimes g \otimes ... \otimes g \otimes F \otimes G) \tag{3.3}$$

biçimindedir. Özel olarak $F, G \in \mathfrak{T}_{r1}(M)$ ise yani

$$F, G : \mathfrak{X}^r(M) \to \mathfrak{X}(M) \tag{3.4}$$

şeklinde iki tensör alanı varsa bu tensörlerin iç çarpımı yukarıdaki tanım kullanılarak,

$$< F, G >= g^{i_1 j_1} ... g^{i_r j_r} g\big(F(\partial_{i_1}, ..., \partial_{i_r}), G(\partial_{j_1}, ..., \partial_{j_r})\big) \tag{3.5}$$

şeklinde yazılabilir.

iii) ***Simetrik tensörlerde eşitsizlik***: $F \in \mathfrak{T}_{20}$ simetrik bir tensör alanı verilsin. F tensör alanının g Riemann metrik tensöründen büyük ya da küçük olması aşağıdaki gibi tanımlanır: $k \in \mathbb{R}$ ve her $V \in \mathfrak{X}(M)$ için,

1) $F \geq k.g \Leftrightarrow F(V, V) \geq k.g(V, V)$

2) $F \leq k.g \Leftrightarrow F(V, V) \leq k.g(V, V)$

dir. Şimdi Bochner formülünü ispatlayalım:

Önerme 3.1.1 (Bochner Formülü). *(M, g) Riemann manifoldu olsun. Adına Bochner Formülü denilen*

$$div(D_V W) = \mathrm{Ric}(V, W) + V(\mathrm{div} W) + < DV, (DW)^* > \tag{3.6}$$

eşitliği her $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ için geçerlidir.

Kanıt. Her $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(D_V W) &= g^{\mu\nu} g(D_{\partial_\mu} D_V W, \partial_\nu) \\
&= g^{\mu\nu} g(D_{\partial_\mu} D_V W, \partial_\nu) - g^{\mu\nu} g(D_V D_{\partial_\mu} W, \partial_\nu) - g^{\mu\nu} g(D_{[\partial_\mu, V]} W, \partial_\nu) \\
&\quad + g^{\mu\nu} g(D_V D_{\partial_\mu} W, \partial_\nu) + g^{\mu\nu} g(D_{[\partial_\mu, V]} W, \partial_\nu) \\
&= g^{\mu\nu} g(D_{\partial_\mu} D_V W - D_V D_{\partial_\mu} W - D_{[\partial_\mu, V]} W, \partial_\nu) \\
&\quad + g^{\mu\nu} g(D_V (DW)(\partial_\mu), \partial_\nu) + g^{\mu\nu} g(D_{D_{\partial_\mu} V - D_V \partial_\mu} W, \partial_\nu) \\
&= g^{\mu\nu} g(R(\partial_\mu, V) W, \partial_\nu) + g^{\mu\nu} g(D_V (DW)(\partial_\mu), \partial_\nu) \\
&\quad + g^{\mu\nu} g(D_{D_{\partial_\mu} V} W, \partial_\nu) - g^{\mu\nu} g(D_{D_V \partial_\mu} W, \partial_\nu) \\
&= \mathrm{Ric}(V, W) + g^{\mu\nu} g(D_V (DW)(\partial_\mu), \partial_\nu) \\
&\quad + g^{\mu\nu} g((DW)(D_{\partial_\mu} V), \partial_\nu) - g^{\mu\nu} g((DW)(D_V \partial_\mu), \partial_\nu)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

bulunur. Yukarıda **D4** özelliği, "DW" kovaryant diferansiyel tanımı ve eğriliklerin tanımları kullanılmıştır. $\mathfrak{T}_{k1}(M)$ ye ait tensör alanlarının tensör türevi kullanıldığında $\Big($sayfa 18, eşitlik (2.45)$\Big)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(D_V W) &= \mathrm{Ric}(V,W) + g^{\mu\nu} g\Big(D_V(DW)(\partial_\mu) - (DW)(D_V\partial_\mu), \partial_\nu\Big) \\ &\quad + g^{\mu\nu} g((DW)(D_{\partial_\mu} V), \partial_\mu) \\ &= \mathrm{Ric}(V,W) + g^{\mu\nu} g((D_V DW)(\partial_\mu), \partial_\nu) + g^{\mu\nu} g((DW)(D_{\partial_\mu} V), \partial_\nu) \end{aligned} \tag{3.8}$$

bulunur. Buradaki ikinci terim aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} g((D_V DW)(\partial_\mu), \partial_\nu) &= g^{\mu\nu} g((D_V DW)^\gamma_\mu \partial_\gamma, \partial_\nu) \\ &= g^{\mu\nu} (D_V DW)^\gamma_\mu g(\partial_\gamma, \partial_\nu) \\ &= (D_V DW)^\gamma_\mu \delta^\mu_\gamma \\ &= (D_V DW)^\mu_\mu \\ &= \mathbf{C}\,(D_V DW) \\ &= D_V \mathbf{C}\,(DW) \\ &= V(\mathrm{div} W) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Burada (2.86) de verilen diverjans tanımı kullanılmıştır. Denklem (3.9) yukarıda (3.8) de yerine konursa,

$$\mathrm{div}(D_V W) = \mathrm{Ric}(V,W) + V(\mathrm{div} W) + g^{\mu\nu} g((DW)(D_{\partial_\mu} V), \partial_\nu) \tag{3.10}$$

elde edilir. $(1,1)$ tipinden tensör alanı olan DW nin adjointi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(D_V W) &= \mathrm{Ric}(V,W) + V(\mathrm{div} W) + g^{\mu\nu} g((DW)^*(\partial_\nu), D_{\partial_\mu} V) \\ &= \mathrm{Ric}(V,W) + V(\mathrm{div} W) + g^{\mu\nu} g((DW)^*(\partial_\nu), (DV)(\partial_\mu)) \\ &= \mathrm{Ric}(V,W) + V(\mathrm{div} W) + < DV, (DW)^* > \end{aligned} \tag{3.11}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\mathfrak{T}_{r1}(M)$ ye ait tensörler için geçerli olan iç çarpım tanımı kullanılmıştır. $\square$

Şimdi bazı önemli vektör alanlarının tanımlarını verelim:

3.2. Harmonik ve Killing Vektör Alanları

Tanım 3.2.1 (Harmonik Vektör Alanı). *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. Her V, $W \in \mathfrak{X}(M)$ için,*

$$g(D_V\xi, W) = g(D_W\xi, V) \tag{3.12}$$

$\big($yani $D\xi = (D\xi)^*\big)$ ve

$$\operatorname{div}(\xi) = 0 \tag{3.13}$$

koşullarını sağlayan ξ vektör alanına harmonik vektör alanı denir.

Tanım 3.2.2 (Killing Vektör Alanı). *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. Her V, $W \in \mathfrak{X}(M)$ için,*

$$g(D_V\xi, W) = -g(D_W\xi, V) \tag{3.14}$$

$\big($yani $D\xi = -(D\xi)^*\big)$ eşitliğini sağlayan ξ vektör alanına Killing vektör alanı denir.

Sonuç 3.2.3. *ξ Killing vektör alanı,* $\operatorname{div}(\xi) = 0$ *özelliğine sahiptir.*

Kanıt. Her $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\xi) &= g^{\mu\nu} g(D_{\partial_\mu}\xi, \partial_\nu) \\ &= -g^{\mu\nu} g(D_{\partial_\nu}\xi, \partial_\mu) \\ &= -\operatorname{div}(\xi) \end{aligned} \tag{3.15}$$

olur ve $\operatorname{div}(\xi) = 0$ elde edilir. $\square$

Tanım 3.2.4 (Konformal Killing Vektör Alanı). *M, diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olsun. Her V, $W \in \mathfrak{X}(M)$ ve $\rho \in C^\infty(M)$ için,*

$$g(D_V\xi, W) + g(D_W\xi, V) = \rho g(V, W) \tag{3.16}$$

eşitliğini sağlayan ξ vektör alanına konformal Killing vektör alanı denir.

Sonuç 3.2.5. *Konformal Killing vektör alanının tanımında yer alan $\rho \in C^\infty(M)$ fonksiyonunun eşiti*

$$\rho = \frac{2\mathrm{div}\xi}{n} \tag{3.17}$$

dir.

Kanıt. $V = \partial_\mu$ ve $W = \partial_\nu$ vektör alanları için, tanımdan

$$\begin{aligned}
g(D_{\partial_\mu}\xi, \partial_\nu) + g(D_{\partial_\nu}\xi, \partial_\mu) &= \rho g(\partial_\mu, \partial_\nu) && (3.18)\\
g^{\mu\nu}g(D_{\partial_\mu}\xi, \partial_\nu) + g^{\mu\nu}g(D_{\partial_\nu}\xi, \partial_\mu) &= g^{\mu\nu}\rho g(\partial_\mu, \partial_\nu) && (3.19)\\
2\mathrm{div}\xi &= \rho g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} \\
&= \rho.n && (3.20)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikten,

$$\rho = \frac{2\mathrm{div}\xi}{n} \tag{3.21}$$

olduğu görülür. □

Sonuç 3.2.6. *$\xi \in \mathfrak{X}(M)$ herhangi bir konformal Killing vektör alanı olmak üzere,*

$$(D\xi)^* = -D\xi + \frac{2}{n}(\mathrm{div}\xi)\,\mathrm{id} \tag{3.22}$$

dir (Burada id *tensörü* $\mathrm{id}(X) = X$ *olarak tanımlanan* $(1,1)$ *tipinden tensördür.)*

Kanıt. Her $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ için konformal Killing vektör alanı tanımından,

$$\begin{aligned} g((D\xi)(V), W) &= g(D_V \xi, W) \\ &= -g(D_W \xi, V) + \frac{2}{n}\mathrm{div}(\xi) g(V, W) \end{aligned} \tag{3.23}$$

bulunur (bakınız Sonuç 3.2.5). Öyleyse

$$\begin{aligned} g((D\xi)(V), W) &= g(-(D\xi)(W), V) + g(\frac{2}{n}\,\mathrm{div}(\xi) W, V) \\ &= g(-(D\xi)(W) + \frac{2}{n}\,\mathrm{div}(\xi)\,\mathrm{id}(W), V) \end{aligned} \tag{3.24}$$

olmalıdır. Burada $\mathrm{id}(W) = W$ ile tanımlı $(1,1)$ tipinden "id" tensör alanı kullanılmıştır. Bu son eşitlikten

$$g((D\xi)(V), W) = g\Bigg(\Big(-D\xi + \frac{2}{n}\,(\mathrm{div}\xi)\,\mathrm{id}\Big)(W), V\Bigg) \tag{3.25}$$

yazılabilir. $(1,1)$ tipinden tensörlerin adjointi kullanıldığında,

$$g((D\xi)^*(W), V) = g\Bigg(\Big(-D\xi + \frac{2}{n}\,(\mathrm{div}\xi)\,\mathrm{id}\Big)(W), V\Bigg) \tag{3.26}$$

bulunur. Burada g nin nondejenereliği kullanıldığında,

$$(D\xi)^*(W) = \Big(-D\xi + \frac{2}{n}\,(\mathrm{div}\xi)\,\mathrm{id}\Big)(W) \tag{3.27}$$

olur. Bu ifade her $W \in \mathfrak{X}(M)$ için geçerli olduğundan,

$$(D\xi)^* = -D\xi + \frac{2}{n}\,(\mathrm{div}\xi)\,\mathrm{id} \tag{3.28}$$

olarak elde edilir. □

S.Bochner [3] ve K.Yano [10] aşağıdaki teoremleri ispatlamıştır:

Teorem 3.2.7. *(M, g) n-boyutlu, kompakt, kenarsız, yönlendirilmiş, bağlantılı bir Riemann manifold olsun. Eğer,*

$$Ric \geq 0 \tag{3.29}$$

ise tüm harmonik vektör alanları paraleldir. Yani tüm $Y \in \mathfrak{X}(M)$ harmonik vektör alanları için $DY = 0$ dır.

Kanıt. $Y \in \mathfrak{X}(M)$ herhangi bir harmonik vektör alanı olsun.

$$W = D_Y Y \tag{3.30}$$

vektör alanı tanımlansın. Bu vektör alanının diverjansı,

$$\text{div}W = \text{Ric}(Y,Y) + Y(\text{div}Y) + < DY, (DY)^* > \tag{3.31}$$

dir. Harmonik vektör alanlarının tanımından $\text{div}Y = 0$ ve $DY = (DY)^*$ olduğu biliniyor. Demek ki yukarıdaki eşitlik,

$$\text{div}W = \text{Ric}(Y,Y) + < DY, DY > \tag{3.32}$$

şeklinde yazılabilir. Teoremde verilen $\text{Ric} \geq 0$ varsayımı kullanılırsa (böyle tensörlerin eşitsizlik tanımından) $\text{Ric}(Y,Y) \geq 0$ olur ve

$$\text{div}W \geq < DY, DY > \tag{3.33}$$

sonucu elde edilir. Her iki taraf M manifoldu üzerinde integre edilirse,

$$\int_M \text{div}W d\text{vol} \geq \int_M < DY, DY > d\text{vol} \tag{3.34}$$

$$0 \geq \int_M < DY, DY > d\text{vol} \tag{3.35}$$

bulunur. Burada kenarsız ve kompakt manifoldlarda Diverjans Teoremi olarak bilinen (bakınız [7] sayfa 364) ve herhangi bir $V \in \mathfrak{X}(M)$ için geçerli olan

$$\int_M (\text{div}V) d\text{vol} = 0 \tag{3.36}$$

eşitliği kullanılmıştır. Öte yandan, $< DY, DY > \geq 0$ olduğundan (iç çarpım özelliklerinden dolayı)

$$\int_M < DY, DY > d\text{vol} \geq 0 \tag{3.37}$$

dır. (3.35) ve (3.37) eşitsizliklerinden

$$\int_M < DY, DY > d\text{vol} = 0 \tag{3.38}$$

bulunur. Bilindiği gibi $< DY, DY > \geq 0$ olduğundan bu eşitlik ancak ve ancak $< DY, DY >= 0$ durumunda geçerli olur. Öyleyse iç çarpımın pozitif tanımlılığından $DY = 0$ bulunur. □

Teorem 3.2.8. *(M, g) n-boyutlu, kompakt, kenarsız, yönlendirilmiş, bağlantılı bir Riemann manifold olsun. Eğer,*

$$Ric \leq 0 \tag{3.39}$$

ise tüm Killing vektör alanları paraleldir. Yani tüm $X \in \mathfrak{X}(M)$ Killing vektör alanları için $DX = 0$ dır.

Kanıt. $X \in \mathfrak{X}(M)$ herhangi bir Killing vektör alanı olsun.

$$W = D_X X \tag{3.40}$$

vektör alanı tanımlansın. Bu vektör alanının diverjansı,

$$\text{div}W = \text{Ric}(X, X) + X(\text{div}X) + < DX, (DX)^* > \tag{3.41}$$

dir. Killing vektör alanlarının tanımından $\text{div}X = 0$ ve $(DX)^* = -DX$ olduğu biliniyor. Demek ki yukarıdaki eşitlik,

$$\text{div}W = \text{Ric}(X, X) - < DX, DX > \tag{3.42}$$

şeklinde yazılabilir. Teoremde verilen $\text{Ric} \leq 0$ varsayımı kullanılırsa, $\text{Ric}(X, X) \leq 0$

olur ve

$$\mathrm{div}W \leq - < DX, DX > \tag{3.43}$$

sonucu elde edilir. Teorem 3.2.7 nin ispatındaki yöntem burada kullanılırsa, yukarıdaki ifadeden

$$0 \geq \int\limits_M < DX, DX > d\mathrm{vol} \tag{3.44}$$

eşitsizliği ve sonrasında Teorem 3.2.7 nin ispatında verilen aynı sebeplerle

$$\int\limits_M < DX, DX > d\mathrm{vol} = 0 \tag{3.45}$$

bulunur ve $DX = 0$ sonucu elde edilir. □

Aşağıdaki teorem Yano [10] tarafından ispatlanan konformal Killing vektör alanlarının paralelliği ile ilgili olan teoremdir:

Teorem 3.2.9. (M, g) *n-boyutlu, kompakt, kenarsız, yönlendirilmiş, bağlantılı bir Riemann manifold olsun. Eğer,*

$$Ric \leq 0 \tag{3.46}$$

ise tüm konformal Killing vektör alanları paraleldir. Yani tüm $Z \in \mathfrak{X}(M)$ konformal Killing vektör alanları için $DZ = 0$ dır.

Kanıt. $Z \in \mathfrak{X}(M)$ herhangi bir konformal Killing vektör alanı olsun.

$$W := D_Z Z - \mathrm{div}(Z)Z \tag{3.47}$$

vektör alanı tanımlansın. Bu vektör alanının diverjansı,

$$\begin{aligned} \mathrm{div}W &= \mathrm{div}(D_Z Z) - \mathrm{div}\Big(\mathrm{div}(Z)Z\Big) \\ &= \mathrm{div}(D_Z Z) - Z(\mathrm{div}(Z)) - (\mathrm{div}(Z))^2 \end{aligned} \tag{3.48}$$

dir. Bu eşitliğin sağındaki ilk terimde (3.6) de verilen Bochner formülü kullanılırsa,

$$\mathrm{div}W = \mathrm{Ric}(Z,Z) + Z(\mathrm{div}(Z)) + < DZ, (DZ)^* > - Z(\mathrm{div}(Z)) - (\mathrm{div}Z)^2 \quad (3.49)$$

elde edilir. Sonuç 3.2.6 da verilen $(DZ)^*$ eşiti kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \mathrm{div}W &= \mathrm{Ric}(Z,Z) + < DZ, -DZ + \frac{2}{n}(\mathrm{div}Z)\mathrm{id} > - (\mathrm{div}Z)^2 \\ &= \mathrm{Ric}(Z,Z) - < DZ, DZ > + \frac{2}{n}(\mathrm{div}Z) < DZ, \mathrm{id} > - (\mathrm{div}Z)^2 \\ &= \mathrm{Ric}(Z,Z) - < DZ, DZ > + \frac{2}{n}(\mathrm{div}Z)^2 - (\mathrm{div}Z)^2 \\ &= \mathrm{Ric}(Z,Z) - < DZ, DZ > - \frac{n-2}{n}(\mathrm{div}Z)^2 \\ &\leq \mathrm{Ric}(Z,Z) - < DZ, DZ > \end{aligned} \quad (3.50)$$

bulunur. Teoremdeki $\mathrm{Ric} \leq 0$ varsayımından,

$$\mathrm{div}W \leq - < DZ, DZ > \quad (3.51)$$

eşitsizliği elde edilir. Her iki tarafın integrali alındığında Diverjans Teoremi'nden,

$$0 \leq -\int_M < DZ, DZ > d\mathrm{vol} \quad (3.52)$$

sonucuna ulaşılır. Yukarıdaki teoremlerin ispatlarında kullanılan aynı yöntem ile $DZ = 0$ bulunur.

NOT: Yukarıda kullanılan $< DZ, \mathrm{id} >= \mathrm{div}(Z)$ eşitliği şu şekilde görülebilir: $Z \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} < DZ, \mathrm{id} > &= g^{ij} g((DZ)(\partial_i), \mathrm{id}(\partial_j)) \\ &= g^{ij} g(D_{\partial_i} Z, \partial_j) \\ &= \mathrm{div}(Z) \end{aligned} \quad (3.53)$$

eşitliği bulunur. □

Son zamanlarda Ricci eğriliğinin bazı modifikasyonları yukarıdaki teoremlerde orijinal Ricci eğriliği yerine kullanılmıştır [5], [6]. Bu modifikasyonlardan en bilineni

Bakry-Emery [1] tarafından tanımlanan ve $\mathrm{Ric_{BE}}$ ile gösterilen

$$\mathrm{Ric_{BE}} = \mathrm{Ric} - \mathrm{Hess(h)}, \quad h \in C^{\infty}(M) \tag{3.54}$$

eğriliktir. Burada keyfi $h \in C^{\infty}(M)$ fonksiyonu kullanılarak

$$u := exp\,(h) \tag{3.55}$$

pozitif fonksiyonu tanımlanırsa $h = \ln(u)$ olacağından $\mathrm{Ric_{BE}}$ eğriliği,

$$\mathrm{Ric_{BE}} = \mathrm{Ric} - \frac{1}{u}\mathrm{Hess}(u) + \frac{1}{u^2}(du \otimes du) \tag{3.56}$$

şeklinde de yazılabilir. Gerçekten de $\mathrm{Ric_{BE}}$ nin tanımında yer alan $\mathrm{Hess}(h)$ ifadesi her $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Hess}(h))(V,W) &= \Big(\mathrm{Hess}(\ln u)\Big)(V,W) \\
&= g(D_V(\mathrm{grad}(\ln u)), W) \\
&= g(D_V(\frac{1}{u}\mathrm{grad}(u)), W) \\
&= g(\frac{1}{u}D_V\mathrm{grad}(u) + V(\frac{1}{u})\mathrm{grad}(u), W) \\
&= \frac{1}{u}\,g(D_V\mathrm{grad}(u), W) + V(\frac{1}{u})g(\mathrm{grad}(u), W) \\
&= \frac{1}{u}(\mathrm{Hess}(u))(V,W) - \frac{1}{u^2}V(u)W(u) \\
&= \frac{1}{u}(\mathrm{Hess}(u))(V,W) - \frac{1}{u^2}(du \otimes du)(V,W) \\
&= \Big(\frac{1}{u}\mathrm{Hess}(u) - \frac{1}{u^2}(du \otimes du)\Big)(V,W)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

olarak elde edilir. Demek ki,

$$\mathrm{Hess}(h) = \frac{1}{u}\mathrm{Hess}(u) - \frac{1}{u^2}(du \otimes du) \tag{3.58}$$

dir. Bu sonuç $\mathrm{Ric_{BE}}$ nin tanımında yerine konulursa (3.56) eşitliği elde edilir.
NOT: Yukarıda $\mathrm{grad}(\ln(u)) = \frac{1}{u}\mathrm{grad}(u)$ eşitliği kullanılmıştır. Bu eşitlik gradyantın tanımından hemen elde edilebilir.

Şimdi J.Lott [6] tarafından ispatlanan ve Bakry-Emery Ricci eğriliğinin ($\mathrm{Ric_{BE}}$)

yer aldığı aşağıdaki teoremin ispatı verilecektir. Bu çalışmada verilecek olan ispat, Yano'nun [10] konformal Killing vektör alanları ile ilgili teoreminin ispatındaki yöntemle yapılan bir ispattır:

Teorem 3.2.10. ***(J.Lott)*** *(M,g) n-boyutlu, kompakt, kenarsız, yönlendirilmiş, bağlantılı bir Riemann manifold olsun. $h \in C^\infty(M)$ olmak üzere, Ric_{BE} eğriliği*

$$\mathrm{Ric}_{BE} \leq 0 \tag{3.59}$$

eşitsizliğini sağlıyor ise tüm Killing vektör alanları paraleldir. Yani tüm $X \in \mathfrak{X}(M)$ Killing vektör alanları için $DX = 0$ dır.

Kanıt. W ile gösterilen

$$W = uD_XX - g(\mathrm{grad}(u), X)X \tag{3.60}$$

vektör alanı inşa edilsin. Her iki tarafın diverjansı oluşturulursa,

$$\mathrm{div}W = \mathrm{div}(uD_XX) - \mathrm{div}(g(\mathrm{grad}(u), X)X) \tag{3.61}$$

eşitliği elde edilir. Burada (2.91) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \mathrm{div}W &= (D_XX)(u) + u\mathrm{div}(D_XX) - X(g(\mathrm{grad}(u), X)) \\ &\quad -g(\mathrm{grad}(u), X)\mathrm{div}X \end{aligned} \tag{3.62}$$

bulunur. Killing vektör alanlarının paralelliği, **D5** özelliği, Hess(u) tanımı ve (3.42) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \mathrm{div}W &= (D_XX)(u) + u\mathrm{Ric}(X,X) - u < DX, DX > \\ &\quad -g(D_X\mathrm{grad}(u), X) - g(\mathrm{grad}(u), D_XX) \\ &= (D_XX)(u) + u\mathrm{Ric}(X,X) - u < DX, DX > \\ &\quad -g(D_X\mathrm{grad}(u), X) - (D_XX)(u) \\ &= u\mathrm{Ric}(X,X) - u < DX, DX > -g(D_X\mathrm{grad}(u), X) \\ &= u\mathrm{Ric}(X,X) - u < DX, DX > -\mathrm{Hess}(u)(X,X) \end{aligned} \tag{3.63}$$

olduğu sonucuna varılır. $\mathrm{Ric}_{\mathrm{BE}}$ nin (3.56) ile verilen biçimi ve $\mathrm{Ric}_{\mathrm{BE}} \leq 0$ varsayımı kullanılıp her iki taraf u pozitif fonksiyonu ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(X,X) - \frac{1}{u}\mathrm{Hess}(u)(X,X) + \frac{1}{u^2}\,(du \otimes du)(X,X) &\leq 0 && (3.64)\\ u\mathrm{Ric}(X,X) - \mathrm{Hess}(u)(X,X) + \frac{1}{u}\,(du \otimes du)(X,X) &\leq 0 && (3.65) \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin son terimi sağ tarafa atıldığında,

$$u\mathrm{Ric}(X,X) - \mathrm{Hess}(u)(X,X) \leq \frac{-1}{u}\,(du \otimes du)(X,X) \tag{3.66}$$

bulunur. Bu sonuç (3.63) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\mathrm{div}W \leq \frac{-1}{u}\,(du \otimes du)(X,X) - u < DX, DX > \tag{3.67}$$

olduğu görülür. Eşitsizliğin her iki tarafı M manifoldu üzerinde integre edildiğinde,

$$\int\limits_M \mathrm{div}W d\mathrm{vol} \leq \int\limits_M \frac{-1}{u}(du \otimes du)(X,X)d\mathrm{vol} - \int\limits_M u < DX, DX > d\mathrm{vol} \tag{3.68}$$

elde edilir. Diverjans Teoremi'nden,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int\limits_M \frac{-1}{u}(X(u))^2 d\mathrm{vol} - \int\limits_M u < DX, DX > d\mathrm{vol} && (3.69)\\ 0 &\geq \int\limits_M \frac{1}{u}(X(u))^2 d\mathrm{vol} + \int\limits_M u < DX, DX > d\mathrm{vol} && (3.70) \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan u pozitif fonksiyon olduğundan ve iç çarpımın pozitif tanımlılığından,

$$\int\limits_M \frac{1}{u}(X(u))^2 d\mathrm{vol} + \int\limits_M u < DX, DX > d\mathrm{vol} \geq 0 \tag{3.71}$$

sonucuna varılır. (3.70) ve (3.71) eşitliklerinden,

$$\int\limits_M \frac{1}{u}(X(u))^2 d\text{vol} + \int\limits_M u < DX, DX > d\text{vol} = 0 \tag{3.72}$$

elde edilir. Buradan,

$$u < DX, DX >= 0 \ \text{ ve } \ (X(u))^2 = 0 \tag{3.73}$$

olduğu görülür. İç çarpımın pozitif tanımlılığından,

$$DX = 0 \tag{3.74}$$

sonucu çıkar. $\square$

4. SONUÇLAR, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bochner Tekniği'nin temel teoremlerinden ve Bakry-Emery Ricci eğriliğinin kullanıldığı teoremlerden görülmektedir ki Bochner Tekniği bir vektör alanı inşasından hareketle faydalı eşitlikler veya eşitsizlikler elde etme yöntemidir. Yano'nun konformal Killing vektör alanı ile ilgili teoreminin ispatındaki (bakınız [10] sayfa 41) aynı yöntem Teorem 3.2.10 da da genişletilerek kullanılmıştır. Bu tez bu açıdan göstermektedir ki, bu yöntem bundan sonra yapılacak olan modifiye edilmiş Ricci eğriliklerinin kullanıldığı çalışmalarda aktif olarak kullanılabilir.

KAYNAKÇA

[1] Bakry, D., Emery, M., "*Diffusions hypercontractives*", In Seminaire de probabilities XIX. Lectures Notes Math. , **1123**, 177-206, 1985.

[2] Barrett, O., *Semi-Riemann Geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[3] Bochner, S., "*Vector fields and Ricci curvature*", Bull. Amer. Math. Soc. , **52**, 776-797, 1946.

[4] Li, P., *Geometric Analysis*, Cambridge University Press, 2012.

[5] Limoncu, M., "*The Bochner technique and modification of the Ricci Tensor*", Ann. Glob. Anal. Geom. , **36**, 285-291, 2009.

[6] Lott, J., "*Some geometric properties of the Bakry-Emery Ricci Tensor*", Comment. Math. Helv. , **78**, 865-883, 2003.

[7] Petersen, P., *Riemannian Geometry*, Springer, New York, 1998.

[8] Qian, Z., "*Estimates for weighted volumes and applications*", Quart. J. Math. Oxford, **48**, 235-242, 1997.

[9] Wu, H. H., *The Bochner Technique in Differential Geometry*, Mathematical Reports, Volume 3, Part 2, 1988.

[10] Yano, K., "*On harmonic and Killing vector fields*", Ann. Math. , **55**, 38-45, 1952.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	ÖZGE ÖZMEN
Yabancı Dil	:	İNGİLİZCE
Doğum Yeri ve Yılı	:	ESKİŞEHİR - 1986
E-Posta	:	oozmen86@hotmail.com.tr

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2004-2009, Anadolu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Lisans
- 2012-2013, Matematik Öğretmeni, Artvin Arhavi Teknik ve Mesleki Anadolu Lisesi
- 2013-2016, Matematik Öğretmeni, Eskişehir Günyüzü Çok Programlı Anadolu Lisesi
- 2016-2017, Matematik Öğretmeni, Eskişehir Beylikova Müberra-Mehmet Güleç Anadolu İmam Hatip Lisesi