ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.: 3 - Sayı/No: 3 : 409-411 (2002)
XIV. Ulusal Matematik Sempozyumu Özel Sayısı/Special Issue for XIVth National Mathematics Symposium

ARAŞTIRMA MAKALESİ/**RESEARCH ARTICLE**

PEARSON EĞRİ AİLESİ ÜZERİNE BİR İNCELEME

Mehmet GÜNGÖR[1], Mahmut IŞIK, Sinan ÇALIK

ÖZ

Bu çalışmada, Pearson eğri ailesinin bir genişlemesi ve bu genişleme sınıfına ait bazı olasılık dağılım fonksiyonları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, Olasılık dağılım fonksiyonu, Pearson eğri ailesi.

ON PEARSON CURVE FAMILY

ABSTRACT

In this study, an extension of Pearson curve family and some probability distribution functions which belongs to this extension class are given.

Key Words: Probability density function, Probability distribution function, Pearson curve family.

1. GİRİŞ

Sürekli bir X tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu (*pdf*) f ve olasılık dağılım fonksiyonu (*cdf*) F olsun. $0 < p < 1$ olmak üzere

$$F^{-1}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\} = \sup\{x : F(x) < p\} \tag{1.1}$$

ifadesi genel anlamda, F'nin ters fonksiyonu olarak ifade edilir. Şimdi kullanacağımız iki kavramı tanıtalım. u ve v sırasıyla, F'nin soldaki ve sağdaki son noktalarını göstersin. O halde, (1.1)'den

$$u = \inf\{x : F(x) > 0\} = F^{-1}(0) \tag{1.2}$$

ve

$$v = \sup\{x : F(x) < 1\} = F^{-1}(1) \tag{1.3}$$

ifadeleri yazılabilir. Burada u; ya $-\infty$ yada sonlu ve v; ya $+\infty$ yada sonludur (Balakrishnan and Cohen, 1991), (Galambos, 1987), (Reiss, 1989), (Serfling, 1980).

2. PEARSON EĞRİ AİLESİNİN BİR GENİŞLEMESİ

a_1, a_2, a_3 ve a_4 reel sabitler olmak üzere Pearson eğri ailesi,

$$\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{d[f(x)]}{dx} = \frac{a_4 - x}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2} \tag{2.1}$$

olarak ifade edilir (Freund, 1971), (Güngör and Asil, 1995). Burada $f(x)$, X'in *pdf*'sidir. Şimdi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ve a_6 reel sabitler ve

$$q(x) = \frac{a_4 + a_5 x + a_6 x^2}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2} \tag{2.2}$$

olmak üzere Pearson eğri ailesinin bir genişlemesi,

$$F(x) = \int_u^x \left(\exp\left[\int q(t)\,dt\right]\right) dt \tag{2.3}$$

[1]Fırat Üniversitesi, Matematik Bölümü, Elazığ, TÜRKİYE
E-posta: mgungor@firat.edu.tr

Geliş: 29 Mart 2002; **Düzeltme:** 04 Kasım 2002; **Kabul:** 29 Kasım 2002.

eşitliğiyle ve sırasıyla (1.2) ve (1.3)'de ifade edilen u ve v'lerin gözönüne alınmasıyla

$$F(v) = 1 \qquad (2.4)$$

sınır şartına göre verilebilir.

İstatistikte önemli dağılımların çoğunun uygun sabitlerin seçilmesiyle (2.1)'i sağladığı bilinmektedir. Bu çalışmada önce, (2.1) 'i de sağlayan iki dağılım verilecektir. Daha sonra, (2.1)'i sağlamayan fakat genişleme sınıfına ait olan iki dağılım belirtilecektir. Şimdi, (2.1)'i de sağlayan iki dağılım verelim.

1) $u = 0$, $v = +\infty$, $a_1 = a_3 = a_4 = 0$ ve $a_2 = 1$ seçilirse (2.1)'de *pdf* ve *cdf*'lerin genel özelliklerinin göz önüne alınmasıyla standart üstel dağılım fonksiyonu elde edilir.
($0 \leq x < +\infty$ olmak üzere $F(x) = 1 - e^{-x}$)

2) $u = -\infty$, $v = +\infty$, $a_1 = a_3 = 1/2$ ve $a_2 = a_4 = 0$ seçilirse (2.1)'de *pdf* ve *cdf*'lerin genel özelliklerinin göz önüne alınmasıyla standart Cauchy dağılım fonksiyonu elde edilir.
($-\infty < x < +\infty$ olmak üzere $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctgx$)

Şimdi ise (2.1)'e ait olmayıp (2.3) ile ifade edilen ve (2.4) sınır şartını sağlayan genişleme sınıfına ait söz konusu iki dağılım verelim.

1) $u = 0$, $v = +\infty$, $a_1 = a_3 = a_5 = 0$, ve $a_2 = a_4 = 1$ ve $a_6 = -1$ seçilirse (2.3) eşitliği ve (2.4) sınır şartından standart Rayleigh dağılım fonksiyonu elde edilir.
($0 < x < +\infty$ olmak üzere $F(x) = 1 - e^{-x^2/2}$)

2) $u = 0$, $v = 1$, a_1, a_2 ve a_3'den en az biri sıfırdan farklı ve $a_4 = a_5 = a_6 = 0$ seçilirse (2.3) eşitliği ve (2.4) sınır şartından standart düzgün dağılım fonksiyonu elde edilir.
($0 < x < 1$ olmak üzere $F(x) = x$)

3. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, (2.1)'i sağlayan normal, gamma, beta vs. dağılımların hepsi verilmedi. Ancak istatistikteki söz konusu pek çok dağılımın (2.1)'i sağladığı açıktır. Ayrıca bu çalışmada, (2.1)'i de sağlayan ve (2.1)'i sağlamayıp (2.3) ifadesini ve (2.4) sınır şartını sağlayan ikişer örnek verildi. Burada şunu da önemle belirtelim ki, söz konusu *cdf*'lerin standart halleri değil de bir, iki veya daha fazla parametreli halleri bulunmak istense bu durum uygun sabitlerin seçimiyle mümkün olabilir. Örneğin, (2.1)'de $a_2 = a_3 = 0$ ve $a_1 > 0$ alınırsa standart halde olmayan normal dağılımın *pdf*'si ve $a_1 = a_3 = a_4 = 0$ ve $a_2 > 0$ alınırsa standart halde olmayan üstel dağılımın *pdf*'si bulunur. Eğer söz konusu dağılımların, her iki veya herhangi bir taraftan kesilmiş *cdf*'leri bulunmak istense o zaman, kesilmiş dağılımların tanımı ve uygun u ve v'lerin seçimiyle söz konusu *cdf*'ler bulunabilir. Örneğin, standart üstel dağılımın her iki taraftan (u ve v'den) kesilmiş dağılımının *cdf*'si,

$$F_{uv}(x) = \frac{F(x) - F(u)}{F(v) - F(u)} = \frac{e^{-u} - e^{-x}}{e^{-u} - e^{-v}} \qquad (3.1)$$

olarak verilebilir. (3.1)'de uygun u ve v'lerin seçilmesiyle söz konusu dağılımların her iki veya herhangi bir taraftan kesilmiş halleri bulunabilir.

Söz konusu *cdf*'ler için bir çok sınıflama vardır (Arnold, 1990), (Balakrishnan and Basu, 1995), (Freund and Walpole, 1980). Bunlardan biri üstel aile kavramıdır. Ayrıca, aynı diferensiyel denklem tarafından tanımlanan sınıflamalar da vardır (Güngör and Çatalbaş, 2001a), (Güngör and Çatalbaş, 2001b). Bu çalışmalarda, standart haller dışında söz konusu *cdf*'lerin parametreli ve kesilmiş hallerine ait irdelemeler de mevcuttur.

Bu çalışmada, (2.1)'den bir dağılımın *pdf* 'si ve (2.3) – (2.4)'den ise söz konusu dağılımların *cdf*'si direkt olarak elde edilmektedir. Bu durum, bazen büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

Ayrıca (2.2)'deki katsayılarla söz konusu dağılımların parametreleri arasındaki ilişkiler de irdelenebilir.

KAYNAKÇA

Arnold, B.C. (1990). A Flexible Family of Multivariate Pareto Distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference* 24, 249-258.

Balakrishnan, N. ve Basu, A.P. (1995). *The Exponential Distribution.* Gordon and Breach Publishers, The Netherlands.

Balakrishnan, N. ve Cohen, A.C. (1991). *Order Statistics and Inference.* Academic Press, Inc., London.

Freund, J.E. (1971). *Mathematical Statistics.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Freund, J.E. ve Walpole, R.E. (1980). *Mathematical Statistics.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Galambos, J. (1987). *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics.* Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Malabar, Florida.

Güngör, M. ve Çatalbaş, N. (2001*a*) On Some Probability Distribution Functions Obtained by a Special Differential Equation. *J. of Inst. of Math. and Comp. Sci.* 14(1), 23-25.

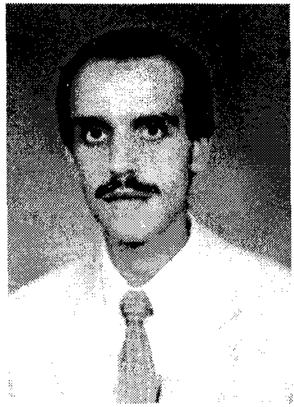
Güngör, M. ve Çatalbaş, N. (2001*b*). On Some Probability Distribution Functions Obtained by Riccati

Differential Equation. *J. of Inst. of Math. and Comp. Sci.* 14(1), 79-81.

Güngör, M. ve Asil, V. (1995). The Normality of Exponential Distribution in the Matrix Form. *Hacettepe Bulletin of Natural Sciences and Engineering* 24, 3-8.

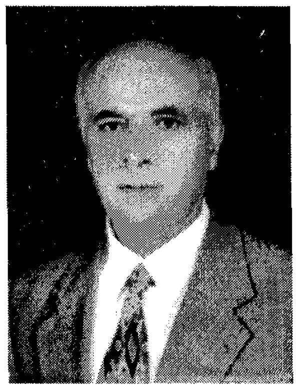
Reiss, R.-D. (1989). *Approximate Distributions of Order Statistics.* Springer-Verlag, New York.

Serfling, R.J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics.* John Wiley & Sons, Inc., Canada.



Mehmet GÜNGÖR

1964 yılında Malatya'da doğdu. 1985 yılında Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 1988 yılında yüksek lisans, 1992 yılında doktorasını tamamladı. Halen, Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde öğretim üyesi olarak çalışmaktadır.



Mahmut IŞIK

1960 yılında Urfa'da doğdu. 1984 yılında Fırat Üniversitesi, Fen–Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 1995 yılında yüksek lisans, 2002 yılında doktorasını tamamladı. Halen, Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde öğretim görevlisi olarak çalışmaktadır.

Sinan ÇALIK

1965 yılında Elazığ'da doğdu. 1987 yılında Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 1998 yılında yüksek lisans, 2002 yılında doktorasını tamamladı. Halen, Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde öğretim görevlisi olarak çalışmaktadır.