ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.: 3 - Sayı/No: 3 : 421-425 (2002)
XIV. Ulusal Matematik Sempozyumu Özel Sayısı/Special Issue for XIVth National Mathematics Symposium

ARAŞTIRMA MAKALESİ/**RESEARCH ARTICLE**

SZASZ TİPİ OPERATÖRLERLE POLİNOM AĞIRLIKLI UZAYLARDA YAKLAŞIM

Nurhayat İSPİR[1]

ÖZ

Bu çalışmada pozitif eksenin tamamında Szasz tipi operatörlerle sürekli fonksiyonlara ağırlıklı yaklaşım ve yaklaşım hızı üzerine teoremler ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Szasz tipi operatör, Ağırlıklı yaklaşım, Süreklilik modülü, Yaklaşım hızı.

APPROXIMATION BY SZASZ TYPE OPERATORS IN POLYNOMIAL WEIGHT SPACES

ABSTRACT

The theorems on weighted approximation and the rate of approximation of continuous functions by Szasz type operators on all positive axis are established.

Key Words: Szasz type operator, Weighted approximation, Modulus of continuity, Rate of convergence.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada Szasz tipi

$$L_n(f,x) = (chnx)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^{2k}}{(2k)!} f\left(\frac{2k}{n}\right), \qquad (1)$$

$$n \in N,\ N := \{1, 2, ...\},\ x \geq 0$$

operatörünün $[0, \infty)$ da tanımlı, sürekli f fonksiyonlarına yaklaşım teoremi ağırlıklı uzaylarda verilecek, bir ağırlıklı süreklilik modülü tanımlanarak bunun yardımı ile yaklaşım hızı elde edilecektir.

Lineer pozitif operatörler dizisinin pozitif yarı eksende sürekli fonksiyonlara yaklaşım özelliklerinin incelendiği çalışmalarda yaklaşım teoremleri ya $[0, \infty)$ un bir sonlu alt aralığında veya noktasal olarak verilmektedir (Altomare ve Campiti (1994)). Lesniewicz ve Rempulska (1997) tarafından Szasz tipi operatörlerin yaklaşım özellikleri üstel ağırlıklı uzaylarda araştırılmış ve yaklaşım teoremi uzayın normunda değil sup normda verilmiş yaklaşım hızı ise noktasal olarak bulunmuştur. Walzack (2000) genelleştirilmiş Szasz operatörler ile $[0, \infty) \times [0, \infty)$ da sürekli fonksiyonlara ağırlıklı yaklaşım teoremlerini Lesniewicz ve Rempulska'ın (1997) çalışmasına benzer olarak elde etmiştir. Her iki çalışmanın da ilham kaynağı Becker, Kucharski ve Nessel'in (1978)

$$S_n(f,x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{(k)!} f\left(\frac{k}{n}\right), n \in N, x \geq 0$$

olarak tanımlanan Szasz operatörleri ile ilgili çalışmasıdır.

Bu çalışmanın amacı, pozitif yarı eksenin tamamında (1) ile tanımlanan Szasz tipi operatörler yardımı ile sürekli fonksiyonlara ağırlıklı yaklaşım ve yaklaşım hızı üzerine teoremler vermektir.

[1]Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500 Beşevler Ankara
E-posta: nispir@gazi.edu.tr

Geliş: 01 Şubat 2002; **Düzeltme:** 04 Kasım 2002; **Kabul:** 02 Aralık 2002.

2. AĞIRLIKLI UZAYLARDA YAKINSAKLIK VE YAKLAŞIM HIZI

Burada ilk olarak, polinom ağırlıklı uzaylarda (1) operatörünün $[0,\infty)$ da sürekli fonksiyonlara yakınsaklık koşulları verilecektir. Bunun için Gadzhiev'in ((1974), (1976)) ağırlıklı uzaylarda verdiği Korovkin tipi teorem kullanılacaktır.

Teorem A (Gadzhiev (1974), (1976)). $\varphi(x)$, x in sürekli ve artan bir fonksiyonu ve M_f sadece f ye bağlı bir sabit olmak üzere $B_\rho \, |f(x)| \leq M_f \, \rho(x)$, , $\rho(x) = 1+\varphi^2(x)$, $-\infty < x < \infty$, koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfı olsun. B_ρ üzerindeki norm $||f(x)||_\rho = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} \frac{|f(x)|}{1+\varphi^2(x)}$ ile verilsin. C_ρ, $\mathbf{R}$ (reel sayılar kümesi) de sürekli olan $f \in B_\rho$ fonksiyonlarının sınıfını ve C_ρ^k, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k$ (k, f ye bağlı bir sabit) koşulunu sağlayan $f \in C_\rho$ fonksiyonlarının sınıfını göstersin.

C_ρ dan B_ρ dönüşüm yapan pozitif lineer operatörlerin öyle bir $\{T_n\}$ dizisi bulunabilir ki bu T_n ler için

$$\lim_{n\to\infty} ||T_n(\varphi^\nu, x) - \varphi^\nu(x)||_\rho = 0, \quad \nu = 0,1,2$$

koşuları sağlanır ve bu durumda her $f \in C_\rho^k$ için

$$\lim_{n\to\infty} ||T_n(f,x) - f(x)||_\rho = 0$$

dır. Fakat öyle bir $f^* \in C_\rho \,/ C_\rho^k$ vardır ki

$$\lim_{n\to\infty} ||T_n(f^*,x) - f^*(x)||_\rho \geq 1$$

dir.

Teorem A nın bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem B (Gadjiev vd (1998)). $\{a_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ olacak biçimdeki pozitif sayıların bir dizisi olsun. C_ρ dan B_ρ ya tanımlı $\{T_n\}$ pozitif lineer operatörler dizisi için eğer

$$\lim_{n\to\infty} ||T_n(\varphi^\nu, x) - \varphi^\nu(x)||_{\rho,[0,a_n]} = 0, \quad \nu = 0,1,2$$

koşulları gerçekleniyorsa bu durumda her $f \in C_\rho^k$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} ||T_n(f,x) - f(x)||_{\rho,[0,a_n]} = 0$$

dır. Burada

$$||f||_{\rho,[0,a_n]} = \sup_{x\in[0,a_n]} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

dir (Gadzhiev vd, 1998).

Teorem B dikkate alınarak Teorem A da $\mathbf{R}$ yerine $[0,\infty)$ alınması halinde aşağıdaki tanımları ve yaklaşım teoremini verebiliriz.

$B_\rho\,[0,\infty)$; f, $[0,\infty)$ da tanımlı ve

$$|f(x)| \leq M_f \, \rho(x), \quad x \in [0,\infty)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayını göstersin. Burada ρ ağırlık fonksiyonu $\rho(x) = 1 + x^2$ olup M_f, f ye bağlı bir sabiti göstermektedir.

$C_\rho\,[0,\infty)$, $[0,\infty)$ da sürekli olan bütün $f \in B_\rho\,[0,\infty)$ fonksiyonlarının alt uzayını ve $C_\rho^{k_f}\,[0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\rho(x)} = k_f < \infty$ koşulunu sağlayan bütün $f \in C_\rho\,[0,\infty)$ fonksiyonlarının alt uzayını göstersin.

Bu uzaylar her $f \in C_\rho\,[0,\infty)$ için

$$||f||_{\rho,[0,\infty)} = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

ağırlıklı normu ile birer normlu uzaydır.

Teorem 1. $\{L_n\}$, (1) ile verilen operatörlerin bir dizisi olsun.

$L_n : C_\rho\,[0,\infty) \to B_\rho\,[0,\infty)$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olup eğer $\nu = 0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty} ||L_n(t^\nu, x) - x^\nu||_{\rho,[0,\infty)} = 0$$

ise bu durumda her $f \in C_\rho^{k_f}\,[0,\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} ||L_n(f,x) - f(x)||_{\rho,[0,\infty)} = 0$$

dır.

Kanıt. L_n operatörünün lineer pozitif operatör olduğu açıktır. Operatörün tanımı kullanılarak

$$L_n(1,x) = 1, \tag{2}$$

$$L_n(t,x) = x\tanh nx, \tag{3}$$

$$L_n(t^2,x) = x^2 + \frac{x}{n}\tanh nx, \; x \in [0,\infty), n \in N \tag{4}$$

olduğu görülebilir. $\rho(x) = 1 + x^2$, $x \in [0,\infty)$ için

$$\begin{aligned} L_n(\rho,x) &= (chnx)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^{2k}}{(2k)!}\rho\left(\frac{2k}{n}\right) \\ &= (chnx)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^{2k}}{(2k)!}\left(1+\left(\frac{2k}{n}\right)^2\right) \\ &= L_n(1,x) + L_n(t^2,x) \\ &\leq 2\rho(x) \end{aligned}$$

olup

$$|L_n(f,x)| \leq L_n\left(\frac{f}{\rho}\rho;x\right) \leq ||f||_{\rho,[0,\infty)} \, L_n(\rho;x)$$

ifadesinden dolayı L_n, $C_\rho\,[0,\infty)$ dan $B_\rho\,[0,\infty)$ uzayına dönüşüm yapar.

Diğer taraftan, (2) eşitliği dikkate alındığında $\nu=0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(1,x)-1\|_{\rho,[0,\infty)}=0$$

olduğu açıktır. Aynı zamanda (3) eşitliğinden

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \frac{|L_n(t,x)-x|}{1+x^2} \le \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{|x(1-\tanh nx)|}{1+x^2} + \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{1+x^2}$$

olup $r\in N$, $n\in N$, $x\ge 0$ olmak üzere

$$0\le x^r(1-\tanh nx)=\frac{2x^r}{e^{2nx}+1}<2^{1-r}r!n^{-r} \quad (5)$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t,x)-x\|_{\rho,[0,\infty)}=0$$

elde edilir. Benzer şekilde (4) eşitliği ve (5) eşitsizliği yardımı ile

$$\lim_{n\to\infty} \left\|L_n(t^2,x)-x^2\right\|_{\rho,[0,\infty)}=0$$

bulunur. Dolayısıyla $\varphi(x)=x$ olmak üzere Teorem A nın hipotezleri gerçeklenmiş olduğundan her $f\in C_\rho^{k_f}\,[0,\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f,x)-f(x)\|_{\rho,[0,\infty)}=0$$

sonucu elde edilir.

Şimdi $\{L_n\}$ operatörler dizisinin yaklaşım hızını vermek için $[0,\infty)$ da bir ağırlıklı süreklilik modülü tanımlamak istiyoruz.

Bilinen $\omega(f,\delta)$ 1. süreklilik modülü $\delta\to 0$ iken açık aralıklarda ve sonsuz aralıkta sıfıra gitmez. Bu özelliği gerçekleyecek biçimde bir $\Omega(f;\delta)$ ağırlıklı süreklilik modülünü her $f\in C_\rho^{k_f}\,[0,\infty)$ için

$$\Omega(f;\delta)=\sup_{|h|\le\delta,\,x\in[0,\infty)} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+h^2)\,(1+x^2)}$$

olarak tanımlayalım. 1. süreklilik modülü için bildiğimiz özellikler bazı farklılıklarla $\Omega(f;\delta)$ için sağlanır:

Lemma (Gadzhiev ve İspir (1999)). $f\in C_\rho^{k_f}\,[0,\infty)$ ve $\Omega(f;\delta)$ yukarıda tanımlanan ağırlıklı süreklilik modülü olsun. Bu durumda,

1. $\Omega(f;\delta),\delta$ ya göre pozitiftir ve monoton artan fonksiyondur.

2. Her $f\in C_\rho^{k_f}\,[0,\infty)$ için,

$$\lim_{\delta\to 0}\Omega(f;\delta)=0$$

dır.

3.Bir m doğal sayısı için

$$\Omega(f;m\delta)\le 2m(1+\delta^2)\Omega(f;\delta)$$

olup herhangi $\lambda>0$ için

$$\Omega(f;\lambda\delta)\le 2(1+\lambda)(1+\delta^2)\Omega(f;\delta) \quad (6)$$

dır.

Şimdi L_n operaörleri ile $f\in C_\rho^{k_f}\,[0,\infty)$ fonksiyonları için yaklaşım hızı ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2. $f\in C_\rho^{k_f}\,[0,\infty)$ ve yeterince büyük n için

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \frac{|L_n(f,x)-f(x)|}{(1+x^2)^2} \le K\Omega(f,n^{-1/2}) \quad (7)$$

olup burada K, n den bağımsız bir sabittir.

Kanıt. $\Omega(f,\delta)$ ağırlıklı süreklilik modülünün tanımı kullanılarak her $f\in C_\rho^{k_f}\,[0,\infty)$ ve $x,t\in[0,\infty)$ için

$$|f(t)-f(x)|\le(1+x^2)(1+(t-x)^2)\Omega(f;|t-x|)$$

ve (6) dan

$$|f(t)-f(x)|\le 4\left(\frac{|t-x|}{\delta_n}+1\right)\Omega(f;\delta_n)(1+x^2)(1+(t-x)^2) \quad (8)$$

yazılabilir. (8) eşitsizliği göz önüne alınarak L_n pozitif lineer operatörü için

$$\begin{aligned}|L_n(f,x)-f(x)| &\le L_n\left(|f(t)-f(x)|\right)\\ &\le 4\Omega(f;\delta_n)(1+x^2)(chnx)^{-1}\cdot\\ &\quad \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(nx)^{2k}}{(2k)!}\left(1+\left(\frac{2k}{n}-x\right)^2\right)\left(1+\frac{\left|\frac{2k}{n}-x\right|}{\delta_n}\right)\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeyi

$$|L_n(f,x)-f(x)|\le 4\Omega(f;\delta_n)(1+x^2)(A_1+A_2+A_3+A_4) \quad (9)$$

biçiminde yazalım. Burada

$$A_1=(chnx)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^{2k}}{(2k)!}=1$$

olduğu açıktır. A_2 ifadesi yazılıp Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}A_2 &= \frac{(chnx)^{-1}}{\delta_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^{2k}}{(2k)!}\left|\frac{2k}{n}-x\right|\\ &\le \frac{1}{\delta_n}\left((chnx)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^{2k}}{(2k)!}\left(\frac{2k}{n}-x\right)^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$L_n((t-x)^2,x) = \left(2x^2 - \frac{3x}{n}\right)(1-\tanh nx) + \frac{x}{n}$$

ve her $n \in N$, $x \in [0,\infty)$ için

$$0 \le L_n((t-x)^2,x) \le 3\frac{x+1}{n}$$

olduğundan (Lesniewicz ve Rempulska (1997)), A_2 için

$$A_2 \le \frac{1}{\delta_n}\left(3\frac{x+1}{n}\right)^{1/2}$$

elde edilir.

Aynı zamanda

$$A_3 = (chnx)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^{2k}}{(2k)!}\left(\frac{2k}{n}-x\right)^2$$

olup

$$A_3 \le 3\frac{x+1}{n}$$

yazılır.

$$\begin{aligned}
A_4 &= \frac{(chnx)^{-1}}{\delta_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^{2k}}{(2k)!}\left|\frac{2k}{n}-x\right|\left(\frac{2k}{n}-x\right)^2 \\
&= (chnx)^{-1}\sum_{\left|\frac{2k}{n}-x\right|<\delta}\frac{(nx)^{2k}}{(2k)!}\frac{\left|\frac{2k}{n}-x\right|}{\delta_n}\left(\frac{2k}{n}-x\right)^2 \\
&\quad +(chnx)^{-1}\sum_{\left|\frac{2k}{n}-x\right|\ge\delta}\frac{(nx)^{2k}}{(2k)!}\frac{\left|\frac{2k}{n}-x\right|}{\delta_n}\left(\frac{2k}{n}-x\right)^2 \\
&\le (chnx)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^{2k}}{(2k)!}\left(\frac{2k}{n}-x\right)^2 \\
&\quad +\frac{(chnx)^{-1}}{\delta_n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^{2k}}{(2k)!}\left(\frac{2k}{n}-x\right)^4
\end{aligned}$$

dir. L_n operatörünün tanımı dikkate alınarak ve bir dizi hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
L_n((t-x)^4,x) &= 8x^4(1-\tanh nx) \\
&\quad +\frac{12}{n}x^3(1-\tanh nx) \\
&\quad +\frac{4}{n}x^2(1-\tanh nx) \\
&\quad -\frac{x}{n^3}+\frac{3x^2}{n^2}+\frac{x}{n}
\end{aligned}$$

olduğu gösterilebilir. (5) eşitsizliği kullanılarak her $n \in N$ ve $x \in [0,\infty)$ için

$$L_n((t-x)^4,x) \le 47\frac{(x^2+x+1)}{n}$$

bulunur. Bu son eşitsizlik ve A_3 eşitsizliği gözönüne alındığında

$$A_4 \le 3\frac{x+1}{n} + \frac{47}{\delta_n^2}\frac{(x^2+x+1)}{n}$$

dir. (9) ifadesinde bu değerler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
|L_n(f,x)-f(x)| &\le 4\Omega(f;\delta_n)(1+x^2) \\
&\quad \left[1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{3(x+1)}{n}}\right. \\
&\quad \left. +\frac{6(x+1)}{n}+\frac{47}{\delta_n^2}\frac{(x^2+x+1)}{n}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\delta_n = n^{-1/2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
|L_n(f,x)-f(x)| &\le 4(1+x^2)\Omega(f;n^{-1/2})\,[1+ \\
&\quad \sqrt{3(x+1)}+6(x+1) \\
&\quad +47(x^2+x+1)]
\end{aligned}$$

olup yeterince büyük n ler için (7) sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

KAYNAKÇA

Altomare, F. and Campiti M. (1994). *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications.* Walter de Gruyter, Berlin, New York.

Becker, M., Kucharski, D. and Nessel, R.J. (1978). Global approximation theorems for Szasz-Mirakjan operators in exponential weight spaces. *Linear Spaces and Approximation. (Proc.Conf. Oberwolfach, 1977).* Birkhauser Verlag, Basel, ISNM 40, 319-333.

Gadjiev, A.D. (1974). The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of P.P.Korovkin. *Dokl.Akad.Nauk SSSR, 218(5), 1001-1004 (In Russian). Soviet Math.Dokl.* 15(5), 1433-1436 (In English).

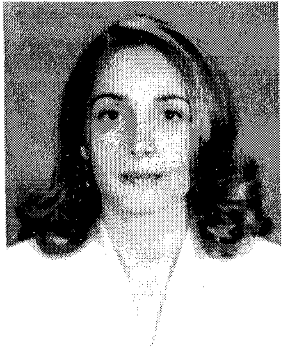
Gadzhiev, A.D. (1976). On P.P.Korovkin type theorems. *Math.Zametki* 20(5), 781-786 (In Russian). English translated in Math. Notes 20(5-6), 996-998.

Gadjiev A.D., Efendiev,İ. ve İbikli, E. (1998). Generalized Bernstein-Cholodowsky polonomials. *Rocky Mt. Jour. Math.* 28(4), 1267-1277.

Gadzhiev, A.D. and İspir, N. (1999). On a Sequence of Linear Positive Operators in Weighted Spaces. *Proc. Inst. Math. Mech.* XI, 45-56.

Lesniewicz, M. and Rempulska, L. (1997). Approximation by some operators of the Szasz-Mirakjan type in exponential weight spaces. *Glasnik Math.* 35(52), 57-69.

Walczak, Z. (2000). On certain modified Szasz-Mirakjan operators for functions of two variables. *Demonstratio Math.* XXXIII(1), 91-100.



Nurhayat İSPİR

1982 yılında Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 1984 yılında yüksek lisansını, 1989 yılında doktorasını tamamladı. Halen Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde öğretim üyesidir.