ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.: 3 - Sayı/No: 3 : 395-399 (2002)
XIV. Ulusal Matematik Sempozyumu Özel Sayısı/Special Issue for XIVth National Mathematics Symposium

ARAŞTIRMA MAKALESİ/**RESEARCH ARTICLE**

DİFERANSİYEL İÇERMELERİN İNTEGRAL TÜNELİNE AİT BİR ÖZELLİK

Serpil İZGİ, Mahide KÜÇÜK[1]

ÖZ

Bu çalışmada başlangıç kümesinin dışından alınan bir x_* noktası için diferansiyel içermenin bu noktadan geçen ve her zaman integral tünelin dışında kalan en az bir çözümün varlığı araştırıldı. Bu problem konveks başlangıç kümesine sahip özel tip diferansiyel içermeler için çözüldü.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel içerme, Erişim kümesi, İntegral tünel

A PROPERTY OF INTEGRAL FUNNEL FOR DIFFERENTIAL INCLUSIONS

ABSTRACT

In this study, for any point selected outside the integral funnel of differential inclusion existence of at least one solution of differential inclusion passes through this point and completely remain outside the integral funnel is investigated. This problem is solved for special type of differential inclusions with convex initial set.

Key Words: Differential inclusions, Reachable set, Integral funnel

1. GİRİŞ

$\mathbb{R}^n$ uzayının boş kümeden farklı kompakt alt kümeleri uzayını $K(\mathbb{R}^n)$ ile kompakt konveks alt kümeleri uzayını da $KV(\mathbb{R}^n)$ ile gösterelim. x noktasının $\varepsilon-$komşuluğunu

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \varepsilon\}$$

ile gösterelim. $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ olmak üzere $A \subset K(\mathbb{R}^n)$, $C \subset K(\mathbb{R}^n)$ için A ve C kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı

$$\alpha(A, C) = \inf\{r > 0 : A \subset C + rB,\ C \subset A + rB\}$$

dir.

$$F(.) : \mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^n)$$

dönüşümüne küme değerli dönüşüm denir. $D \subset \mathbb{R}^m$, $f(.) : D \to \mathbb{R}^n$ fonksiyon olsun. $grf(.)$ ile $f(.)$ fonksiyonunun grafiğini gösterelim ve

$$grf(.) = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R}^n : y = f(x)\}$$

şeklinde tanımlayalım.

Tanım 1. *$F(.) : \mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ olsun. $\forall\varepsilon > 0$ ve $x \in B(x_0, \delta)$ için*

$$\alpha(F(x), F(x_0)) \leq \varepsilon$$

olacak biçimde $\exists\delta > 0$ varsa $F(.)$ küme değerli dönüşümüne x_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 2. *$F(.) : \mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ olsun. $\forall\varepsilon > 0$ ve $x \in B(x_0, \delta)$ için*

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B$$

olacak biçimde $\exists\delta > 0$ varsa $F(.)$ küme değerli dönüşümüne x_0 noktasında üstten yarısüreklidir denir.

[1]Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü 26470 Eskişehir
E-posta: mkucuk@anadolu.edu.tr

Geliş: 22 Ocak 2002; **Düzeltme:** 25 Ekim 2002; **Kabul:** 25 Kasım 2002.

Tanım 3.

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \quad t \in [t_0, \theta] \tag{1}$$

ifadesine diferansiyel içerme denir. Hemen hemen her $t \in [t_0, \theta]$ için (1) diferansiyel içermesini sağlayan mutlak sürekli $x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna (1) diferansiyel içermesinin çözümü denir.

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \\ &x(t_0) \in X_0, \quad t \in [t_0, \theta] \end{aligned} \tag{2}$$

ifadesine de Cauchy problemi denir.

Sağ tarafı kompakt konveks değerli üstten yarı sürekli küme değerli dönüşüm olan diferansiyel içermeler için Cauchy probleminin t_0'ın bir komşuluğunda çözümü vardır. (İzgi, 2001) Ayrıca $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü

$$\max\{\|f\| : f \in F(t, x)\} \leq c(1 + \|x\|) \quad c = sabit \tag{3}$$

koşulunu sağlıyorsa Cauchy probleminin çözümleri $[t_0, \theta]$ aralığında tanımlıdır. (İzgi, 2001)

Cauchy probleminin çözümler kümesini $X(t_0, X_0)$ ile gösterelim.

$$\begin{aligned} &X(t; t_0, x_0) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in X(t_0, x_0)\} \\ &H(t_0, x_0) = \{(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n : x \in X(t; t_0, x_0)\} \end{aligned}$$

olsun. $X(t; t_0, X_0)$'a (2) probleminin t zamanında (t_0, X_0) başlangıç kümesindeki erişim kümesi, $H(t_0, X_0)$'a ise integral tüneli denir.

2. İNTEGRAL TÜNELİNE AİT BİR ÖZELLİK

Aşağıdaki teoremde X_0'ın dışında alınan bir x_* noktası için diferansiyel içermenin bu noktadan geçen ve her zaman integral tünelin dışında kalan en az bir çözümünün varlığı problemi

$$F(t, x(t)) = A(t)x(t) + P(t)$$

için doğrulanmıştır.

Teorem 4. *$t \to A(t)$ fonksiyonu $[t_0, \theta]$ aralığında sürekli $n \times n$ boyutlu matris fonksiyon, $P(\cdot) : [t_0, \theta] \to KV(\mathbb{R}^n)$ sürekli küme değerli dönüşüm $X_0 \in KV(\mathbb{R}^n)$ ve $x_* \notin X_0$ olsun. O zaman $\forall\, t \in [t_0, \theta]$ için*

$$x_*(t) \notin X(t; t_0, X_0)$$

olacak biçimde $x_*(\cdot) \in X(t_0, x_*)$ vardır. (veya $gr\ x_*(\cdot) \cap H(t_0, X_0) = \emptyset$)

Kanıt.

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) \in A(t)x(t) + P(t) \\ &x(t_0) \in X_0\ , \quad t \in [t_0, \theta] \end{aligned} \tag{4}$$

Cauchy problemine bakalım.

$t \to \Phi(t, t_0)$ fonksiyonu $n \times n$ boyutlu matris fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} &\tfrac{d\Phi(t,t_0)}{dt} = -\Phi(t, t_0)A(t) \\ &\Phi(t_0, t_0) = E \end{aligned} \tag{5}$$

Cauchy probleminin çözümü olsun. Burada E $n \times n$ boyutlu birim matristir. $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için $\det\ \Phi(t, t_0) \neq 0$ ve $\Phi(t, t_0)$ matrisinin $\Phi^{-1}(t, t_0)$ tersi vardır. Şimdi

$$y(t) = \Phi(t, t_0) \cdot x(t) \tag{6}$$

değişimini yapalım. O zaman (5) ve (6)'dan

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \dot{\Phi}(t, t_0) \cdot x(t) + \Phi(t, t_0)\dot{x}(t) \\ &= -\Phi(t, t_0)\ A(t)x(t) + \Phi(t, t_0)\dot{x}(t) \end{aligned}$$

olur. (4)'e göre $\dot{x}(t) \in A(t)x(t) + P(t)$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) \in -\Phi(t, t_0)\ A(t)x(t) + \Phi(t, t_0)\ A(t)x(t) \\ &+\Phi(t, t_0)P(t) = \Phi(t, t_0)P(t) \end{aligned}$$

olur. $\Phi(t, t_0)P(t) = P_*(t)$ dersek

$$\dot{y}(t) \in P_*(t) \tag{7}$$

olur. $P(\cdot) : [t_0, \theta] \to KV(\mathbb{R}^n)$ sürekli küme değerli dönüşüm $t \to \Phi(t, t_0)$ sürekli $n \times n$ boyutlu matris fonksiyon olduğundan, $P_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to KV(\mathbb{R}^n)$ sürekli küme değerli dönüşüm olur. $\Phi(t_0, t_0) = E$ olduğundan, (6)'ya göre

$$y(t_0) = \Phi(t_0, t_0) \cdot x(t_0) = E \cdot x(t_0) = x(t_0)$$

olur. Bu durumda, (7)'den (4) Cauchy problemi (6) değişiminden sonra

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) \in P_*(t) \\ &y(t_0) \in X_0 \end{aligned} \tag{8}$$

Cauchy problemi gibi yazılır. (8) Cauchy probleminin çözümler kümesini $Y(t_0, X_0)$ ile gösterelim ve

$$\begin{aligned} &Y(t; t_0, X_0) = \{y(t) \in \mathbb{R}^n : y(\cdot) \in Y(t_0, X_0)\} \\ &V(t_0, X_0) = \{(t, y) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n : y \in Y(t; t_0, X_0)\} \end{aligned}$$

olsun. O zaman $\Phi(t_0, t_0) = E$ olduğundan, $\Phi(t_0, t_0)\ X_0 = X_0$ olur ve (6)'dan $\forall\ x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ için $y(\cdot) = \Phi(\cdot, t_0) \cdot x(\cdot) \in Y(t_0, X_0)$ ve tersine, $\forall\ y(\cdot) \in Y(t; t_0, X_0)$ için $x(\cdot) = \Phi^{-1}(t, t_0) \cdot y(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ elde ederiz. Aynı şekilde

$$\begin{aligned} Y(t; t_0, X_0) &= \Phi(t, t_0) \cdot X(t; t_0, X_0) \\ V(t_0, X_0) &= \{(t, \Phi(t, t_0) \cdot x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n : \\ &\qquad x \in X(t; t_0, X_0)\} \end{aligned} \tag{9}$$

olur. $\Phi(t_0,t_0) = E$ olduğundan $\Phi(t_0,t_0) \cdot x_* = x_*$, $\forall\ x(\cdot) \in X(t_0,x_*)$ için $y(\cdot) = \Phi(\cdot,t_0)\cdot x(\cdot) \in Y(t_0,x_*)$ ve $\forall\ y(\cdot) \in Y(t_0,x_*)$ için

$$x(\cdot) = \Phi^{-1}(t,t_0)\cdot y(\cdot) \in X(t_0,x_*)$$

olur. O zaman buradan ve (9)'dan, $x_*(\cdot) \in X(t_0,x_*)$ için

$$x_*(t) \notin X(t;t_0,X_0)\ ,\ t \in [t_0,\theta]$$

ise $y_*(\cdot) = \Phi(\cdot,t_0)\cdot x_*(\cdot) \in Y(t_0,x_*)$

$$y_*(t) \notin Y(t;t_0,X_0)\ ,\ t \in [t_0,\theta]$$

olur ve tersine $y_*(\cdot) \in Y(t_0,x_*)$ için

$$y_*(t) \notin Y(t;t_0,X_0)\ ,\ t \in [t_0,\theta]$$

ise $x_*(\cdot) = \Phi^{-1}(\cdot,t_0)\cdot y(\cdot) \in X(t_0,x_*)$ için

$$x_*(t) \notin X(t;t_0,X_0)\ ,\ t \in [t_0,\theta]$$

olur. Buna göre $\forall\ t \in [t_0,\theta]$ için

$$y_*(t) \notin Y(t;t_0,X_0)$$

olacak şekilde $y_*(\cdot) \in Y(t_0,x_*)$'ın varolduğunu gösterelim. $P_*(\cdot) : [t_0,\theta] \to KV(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün $[t_0,\theta]$ aralığında integrali aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\int_{t_0}^{\theta} P_*(\tau)d\tau = \left\{ \begin{array}{l} \int_{t_0}^{\theta} P(\tau)d\tau : \text{Hemen hemen her} \\ \tau \in [t_0,\theta] \text{ için } P(\tau) \in P_*(\tau) \\ \text{ve } P(\cdot) \text{ fonksiyonu } [t_0,\theta] \\ \text{aralığında integrallenebilirdir} \end{array} \right\}$$

$P_*(\cdot) : [t_0,\theta] \to KV(\mathbb{R}^n)$ sürekli küme değerli dönüşüm olduğundan $\int_{t_0}^{\theta} P_*(\tau)d\tau$ konveks ve kompakt kümedir. (Aumann, 1965)

$$P = \int_{t_0}^{\theta} P_*(\tau)d\tau$$

diyelim. O zaman

$$Y(\theta;t_0,x_*) = x_* + P\ ,\ Y(\theta;t_0,X_0) = X_0 + P$$

olur. $P \subset \mathbb{R}^n$, $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt konveks kümeler olduğundan $x_* + P$ ve $X_0 + P$ kümeleri $\mathbb{R}^n$ uzayında konveks ve kompakt kümelerdir. $x_* \notin X_0$ olduğundan,

$$x_* + P \not\subset X_0 + P \tag{10}$$

olduğunu kanıtlayalım.

Tersini varsayalım, $x_* + P \subset X_0 + P$ olsun. O zaman $\forall\ s \in S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ için

$$\max_{p\in P} \langle s, x_* + p\rangle \le \max_{x\in X_0,\ p\in P} \langle s, x + p\rangle \tag{11}$$

olur. Öteyandan

$$\max_{p\in P} \langle s, x_* + p\rangle = \langle s, x_*\rangle + \max_{p\in P} \langle s, p\rangle$$

ve

$$\max_{x\in X_0,\ p\in P} \langle s, x + p\rangle = \max_{x\in X_0} \langle s, x\rangle + \max_{p\in P} \langle s, p\rangle$$

olduğundan (11)'den $\forall\ s \in S$ için

$$\langle s, x_*\rangle \le \max_{x\in X_0} \langle s, x\rangle \tag{12}$$

olur. Bu durumda X_0 kompakt konveks küme olduğundan (12)'den $x_* \in X_0$ olduğunu elde ederiz. Bu ise $x_* \notin X_0$ olması ile çelişir. Yani (10) doğrudur. Şimdi $p_* \notin X_0 + P$ olan $p_* \in x_* + P$ alalım . Yani

$$p_* \in Y(\theta;t_0,x_*)\ ,\ p_* \notin Y(\theta;t_0,X_0) \tag{13}$$

olsun. $p_* \in Y(\theta;t_0,x_*)$ olduğundan $y_*(\theta) = p_*$ olan $y_*(\cdot) \in Y(t_0,X_*)$ vardır. $\forall\ t \in [t_0,\theta]$ için

$$y_*(t) \notin Y(t;t_0,X_0)$$

olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki

$$y_*(t_*) \in Y(t_*;t_0,X_0)$$

olan bir $t_* \in [t_0,\theta)$ varolsun. $y_* = y_*(t_*)$ diyelim. O halde $(t_*,\ y_*) \in V(t_0,X_0)$ olur. O zaman $\forall\ t_* \in [t_0,\theta)$ için

$$Y(t;t_*,y_*) \subset Y(t;t_0,X_0) \tag{14}$$

elde ederiz.

Şimdi $\forall\ t \in [\ t_*,\theta]$ için $y_*^*(t) = y_*(t)$ olmak üzere $y_*^*(\cdot) : [\ t_*,\theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu tanımlayalım. $y_*(\cdot) \in Y(t_0,X_0)$, $y_*^*(t_*) = y_* \in Y(t_*;t_0,X_0)$ olduğundan $y_*^*(\cdot) \in Y(t_*,y_*)$ olur. O zaman $y_*^*(\theta) \in Y(\theta;t_*,y_*)$ olur. $y_*^*(\theta) = y_*(\theta) = p_*$ olduğundan, $p_* \in Y(\theta;t_*,y_*)$ olur. (14)'den ise $p_* \in Y(\theta;t_0,X_0)$ olduğu elde edilir. Bu ise (13)'le yani $p_* \notin Y(\theta;t_0,X_0)$ ile çelişir. O halde varsayımımız doğru değildir ve $\forall\ t \in [t_0,\theta]$ için

$$y_*(t) \notin Y(t;t_0,X_0)$$

dır. Dolayısıyla $x_*(\cdot) = \Phi^{-1}(\cdot,t_0)\cdot y_*(\cdot)$ için $x_*(\cdot) \in X(t_0,X_*)$ ve $\forall\ t \in [t_0,\theta]$ için $x_*(t) \notin X(t;t_0,X_0)$ olur.

Teorem kanıtlanır.

Teorem'de X_0 konveks küme değilse teorem doğru değildir. Bunun için aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 5.

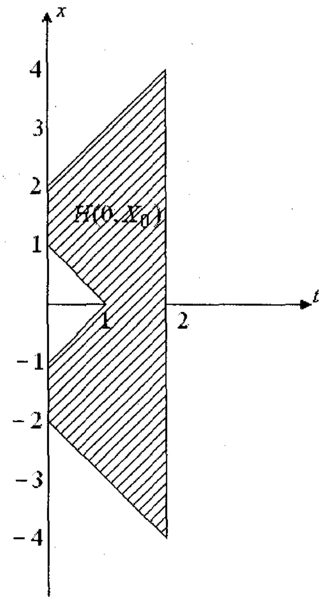
$$\begin{array}{c} \dot{x}(t) \in [-1,1] \\ x(0) \in [-2,-1] \cup [1,2] \text{ , } t \in [0,2] \end{array} \quad (15)$$

Cauchy problemine bakalım.

Bu örnekte $X_0 = [-2,-1] \cup [1,2]$ olup konveks değildir. (15) problemi için $H(0, X_0)$ integral tüneli

$$\begin{array}{l} H(0,X_0) = \{(t,x) \in [0,1) \times \mathbb{R} : \\ x \in [-t-2, t-1] \cup [-t+1, t+2]\} \\ \bigcup\{(t,x) \in [1,2] \times \ \mathbb{R} \ : x \in [-t-2, t+2]\} \end{array} \quad (16)$$

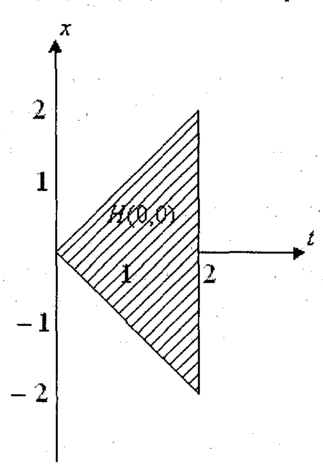
olur.



$x_* = 0$ olsun. O zaman $x_* = 0 \notin X_0$ ve

$$H(0,0) = \{(t,x) \in [0,2] \times \mathbb{R} \ : x \in [-t,t]\} \quad (17)$$

olur. $Y(t;t_0,X_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : (t,x) \in H(t_0,X_0)\}$ olduğundan, (16) ve(17)'den $\forall \ t \in [1,2]$ için



$$Y(t;0,0) \subset Y(t;0,X_0) \quad (18)$$

olur. Bu durumda (18)'den $\forall \ t \in [0,2]$ için $y_*(t) \notin Y(t;0,X_0)$ olacak $y_*(\cdot) \in Y(0,X_0)$ çözümü yoktur.

Örnek 6.

$$F(t,x) = \begin{cases} -1 & , \ x > 0 \\ [-1,1] & , \ x = 0 \qquad t \in [0,2] \\ 1 & , \ x < 0 \end{cases}$$

üstten yarı sürekli küme değerli dönüşümünü alalım. $X_0 = \{0\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{c} \dot{x}(t) \in F(t,x) \\ x(0) = 0 \end{array}$$

Cauchy probleminin tek bir çözümü vardır. Bu başlangıç koşulları için integral tünel $H(0,0) = \{(t,0) \mid t \in [0,2]\}$ dir.

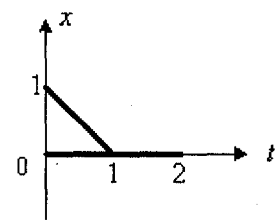
$x_* = 1$ olmak üzere

$$\begin{array}{c} \dot{x}(t) \in F(t,x) \\ x(0) = 1 \end{array}$$

Cauchy probleminin çözümü

$$x(t) = \begin{cases} -t+1 & , \ t \in [0,1] \\ 0 & , \ t \in (1,2] \end{cases}$$

dir.



Böylece 1 noktasından sonraki çözümler aynıdır.

KAYNAKÇA

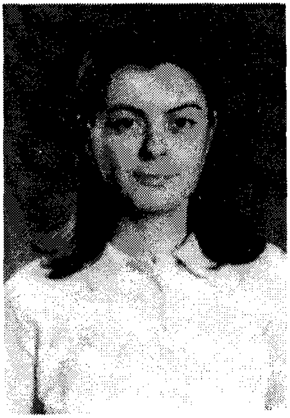
Aubin, J.P. ve Cellina, A. (1984) *Differential Inclusions.* Springer-Verlag, Grunderlehen der math. Wiss.

Aumann, R.J. (1965) Integrals of set-valued functions. *J. Math. An. Appl.*, 12, 1-12.

Clarke, F.H., Ledyaev, Yu.S., Stern, R.J. ve Wolenski, P.R. (1998) *Nonsmooth Anlysis and Control Theory.* Springer-Verlag, New York.

Deimling, K. (1992) *Multivalued Differential Equations.* Walter de Gruyter, Berlin, New York.

İzgi, S. (2001) *Diferansiyel Içermelerin Çözümlerinin Varlığı ve Özellikleri.* Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi.



Serpil İZGİ

1978'de Bursa'da doğdu. 1998'de Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2001 yılında Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisansını tamamladı. Halen aynı enstitüde doktorasını sürdürmektedir ve Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

Mahide KÜÇÜK

1979 yılında Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümünden mezun oldu. 1982'de Yüksek Lisansını ve 1987'de Doktorasını aynı üniversitede tamamladı. 1995'de Doçent, 2000 yılında da Profesör unvanını aldı. Halen Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde görevini sürdürmektedir.