ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.: 3 - Sayı/No: 3 : 383-388 (2002)
XIV. Ulusal Matematik Sempozyumu Özel Sayısı/Special Issue for XIVth National Mathematics Symposium

ARAŞTIRMA MAKALESİ/**RESEARCH ARTICLE**

KONVEKS, KOMPAKT KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN MAKSİMAL KONVEKS DEVAM

Khalig G. GUSEINOV[1], **Orhan ÖZER**, **Serkan DÜZCE**

ÖZ

Bu çalışmada, konveks, kompakt küme değerli dönüşümlerin maksimal konveks devamı araştırılmıştır. Konveks devam kavramı ile ilgili sonuçlar diferansiyel içermeler teorisinin bazı problemlerinin araştırılmasında bir araç olarak kullanılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Küme değerli dönüşüm, Türev kümesi, Konveks devam

MAXIMAL CONVEX CONTINUATION FOR CONVEX, COMPACT SET VALUED MAPS

ABSTRACT

In this study, the existence of the maximal convex continuation of the convex, compact set valued maps is investigated. The results obtained for existence of convex continuation, are employed for studying some problems in differential inclusion theory as a tool.

Key Words: Set valued map, Derivative set, Convex continuation

1. GİRİŞ

Bu çalışmada konveks, kompakt küme değerli dönüşümler için maksimal konveks devamın varlığı araştırılmıştır. Konveks, kompakt küme değerli dönüşümler için konveks devamın varlığı özel bir durum için Guseinov vd. (1999)'da, genel durumda ise Guseinov vd. (2001)'de incelenmiştir.

$\mathbb{R}^n$ ile $n-$boyutlu Euclidean uzayını, $A \subset \mathbb{R}^n$ için $intA$ ile A kümesinin içini, ∂A ile A kümesinin sınırını göstereceğiz. $F(\cdot) : X \rightsquigarrow Y$ ile X uzayından Y uzayına küme değerli dönüşümleri, yani $\forall x \in X$ için $F(x) \subset Y$ kümesini karşılık getiren dönüşümleri gösterelim. $F(\cdot) : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümünün grafiğini

$$grF(\cdot) = \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$$

ile gösterelim. Grafiği konveks, kompakt küme olan küme değerli dönüşüme konveks, kompakt küme değerli dönüşüm denir. $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünü ele alalım ve bu küme değerli dönüşümün grafiğini

$$W = grW(\cdot) = \{(t,x) \in [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \mid x \in W(t)\}$$

olarak gösterelim. $(t,x) \in [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n$ için

$$D^+W(t,x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{\delta \to 0+} \frac{d\left(x+\delta v, W(t+\delta)\right)}{\delta} = 0 \right\}$$

$$D^-W(t,x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{\delta \to 0+} \frac{d\left(x-\delta v, W(t-\delta)\right)}{\delta} = 0 \right\}$$

olsun. $D^+W(t,x)$ kümesine,

$$W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$$

küme değerli dönüşümünün (t,x) noktasındaki sağ türev kümesi ve $D^-W(t,x)$ kümesine,

[1]Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü 26470 Eskişehir
E-posta: kguseynov@anadolu.edu.tr

Geliş: 23 Ocak 2002; **Düzeltme:** 18 Ekim 2002; **Kabul:** 12 Kasım 2002.

$W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün (t, x) noktasındaki sol türev kümesi denir. Burada $x \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ için

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \| x - a \|,$$

$\| \cdot \|$ Euclidean normudur.

Küme değerli dönüşümlerin türev kümeleri, küme değerli analizin ve düzgün olmayan analizin birçok problemlerinin incelenmesinde kullanılan alt ve üst Bouligand konileri ile yakından ilgilidir (Aubin ve Frankowska, 1990; Clarke vd., 1998; Guseinov vd., 1985).

Bundan sonra tüm incelemelerimizde

$$W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$$

küme değerli dönüşümünün konveks, kompakt olduğunu varsayacağız. $W(t_0) = W_0$, $W(t_1) = W_1$ olsun. Genelliği bozmadan $W_0 \neq \varnothing$, $W_1 \neq \varnothing$ olduğunu varsayacağız.

Şimdi küme değerli dönüşümler için sola ve sağa konveks devam kavramlarının tanımını verelim.

Tanım 1. *$\alpha > 0$ ve $W^*(\cdot) : [t_0 - \alpha, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü için aşağıdaki koşullar sağlansın.*

- $W^*(t_0 - \alpha) \neq \varnothing$,
- *Her $t \in [t_0, t_1]$ için $W^*(t) = W(t)$,*
- *$gr\ W^*(\cdot) = \{(t, x) \in [t_0 - \alpha, t_1] \times \mathbb{R}^n \mid x \in W^*(t)\}$ konveks küme olsun.*

O zaman $W^*(\cdot) : [t_0 - \alpha, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün sola konveks $\alpha-$devamıdır denir.

Tanım 2. *$\alpha > 0$ ve $W^*(\cdot) : [t_0, t_1 + \alpha] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü için aşağıdaki koşullar sağlansın.*

- $W^*(t_1 + \alpha) \neq \varnothing$,
- *Her $t \in [t_0, t_1]$ için $W^*(t) = W(t)$,*
- *$gr\ W^*(\cdot) = \{(t, x) \in [t_0, t_1 + \alpha] \times \mathbb{R}^n \mid x \in W^*(t)\}$ konveks küme olsun.*

O zaman $W^*(\cdot) : [t_0, t_1 + \alpha] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün sağa konveks $\alpha-$devamıdır denir.

Tanım 3. *$\alpha > 0$ ve $t \rightsquigarrow W^*(t)$, $t \in [t_0 - \alpha, t_1 + \alpha]$ küme değerli dönüşümü için aşağıdaki koşullar sağlansın.*

- $W^*(t_0 - \alpha) \neq \varnothing, W^*(t_1 + \alpha) \neq \varnothing$,
- *Her $t \in [t_0, t_1]$ için $W^*(t) = W(t)$,*
- *$gr\ W^*(\cdot) = \{(t, x) \in [t_0 - \alpha, t_1 + \alpha] \times \mathbb{R}^n \mid x \in W^*(t)\}$ konveks küme olsun.*

O zaman $W^*(\cdot) : [t_0 - \alpha, t_1 + \alpha] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün konveks $\alpha-$devamıdır denir.

Konveks, kompakt küme değerli dönüşümün konveks devamının varlığı, verilen $\varepsilon > 0$ sayısı ve konveks, kompakt değerli ve sürekli $t \rightsquigarrow W(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ küme değerli dönüşümü için, t zamanındaki erişim kümesi ile $W(t)$ kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığı ε sayısını geçmeyen diferansiyel içermenin bulunması probleminin çözümünün incelenmesinde önemli bir rol oynamaktadır (Guseinov vd., 2001; Guseinov vd., 2002; Guseinov vd., 2003; Guseinov ve Ushakov, 2000).

2. KONVEKS DEVAMIN VARLIĞI

$\alpha > 0$, $W_0, W_1 \subset \mathbb{R}^n$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ ve $t \in [t_0 - \alpha, t_1 + \alpha]$ için

$$K_\alpha^L(x_0) \mid (t) = \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha}{\alpha}\right) x_0 + \frac{t - t_0 + \alpha}{\alpha} W_0$$

$$K_\alpha^R(x_1) \mid (t) = \left(1 - \frac{t_1 - t + \alpha}{\alpha}\right) x_1 + \frac{t_1 - t + \alpha}{\alpha} W_1$$

olarak tanımlansın.

Şimdi konveks, kompakt $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü için sola ve sağa konveks $\alpha-$devamın varlığı ile ilgili teoremleri ifade edelim.

Teorem 4. *(Guseinov vd., 2001) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha > 0$ olsun. Keyfi $w \in \partial W_0$ için*

$$D^+ W(t_0, w) \subset D^+ K_\alpha^L(x_0) \mid (t_0, w)$$

ise $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü için t_0'ın soluna konveks $\alpha-$devam vardır ve keyfi $t \in [t_0 - \alpha, t_1]$ için

$$W^*(t) = \begin{cases} K_\alpha^L(x_0) \mid (t) & , \quad t \in [t_0 - \alpha, t_0) \\ W(t) & , \quad t \in [t_0, t_1] \end{cases}$$

olmak üzere, $W^*(\cdot) : [t_0 - \alpha, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün sola konveks $\alpha-$devamıdır.

Burada $D^+ K_\alpha^L(x_0) \mid (t_0, w)$ kümesi

$$t \rightsquigarrow K_\alpha^L(x_0) \mid (t)$$

küme değerli dönüşümünün (t_0, w) noktasındaki sağ türev kümesidir.

Teorem 5. *(Guseinov vd., 2001) $x_1 \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha > 0$ olsun. Keyfi $w \in \partial W_1$ için*

$$D^- W(t_1, w) \subset D^- K_\alpha^R(x_1) \mid (t_1, w)$$

ise $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü için t_1'in sağına konveks $\alpha-$devam vardır ve keyfi $t \in [t_0, t_1 + \alpha]$ için

$$W^*(t) = \begin{cases} W(t) & , \ t \in [t_0, t_1] \\ K_\alpha^R(x_1) \mid (t) & , \ t \in (t_1, t_1 + \alpha] \end{cases}$$

olmak üzere $W^*(\cdot) : [t_0, t_1 + \alpha] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün sağa konveks $\alpha-$devamıdır.

Burada $D^- K_\alpha^R(x_1) \mid (t_1, w)$ kümesi $t \rightsquigarrow K_\alpha^R(x_1) \mid (t)$ küme değerli dönüşümünün (t_1, w) noktasındaki sol türev kümesidir.

Teorem 6. *(Guseinov vd., 2001)*
$\alpha > 0$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ olsun. Keyfi $w_0 \in \partial W_0$ için

$$D^+ W(t_0, w_0) \subset D^+ K_\alpha^L(x_0) \mid (t_0, w_0)$$

ve keyfi $w_1 \in \partial W_1$ için

$$D^- W(t_1, w_1) \subset D^- K_\alpha^R(x_1) \mid (t_1, w_1)$$

olduğunu varsayalım. $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü için konveks $\alpha-$devam vardır ve keyfi $t \in [t_0 - \alpha, t_1 + \alpha]$ için

$$W^*(t) = \begin{cases} K_\alpha^L(x_0) \mid (t) & , \ t \in [t_0 - \alpha, t_0) \\ W(t) & , \ t \in [t_0, t_1] \\ K_\alpha^R(x_1) \mid (t) & , \ t \in (t_1, t_1 + \alpha] \end{cases}$$

olmak üzere, $W^*(\cdot) : [t_0 - \alpha, t_1 + \alpha] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü, $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün konveks $\alpha-$devamıdır.

Örnek 7. V_*, $V^* \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konveks kümeler ve $intV_* \neq \varnothing$, $intV^* \neq \varnothing$ olsun. $t \in [t_0, t_1]$ için

$$W(t) = \left(1 - \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\right) V_* + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} V^*$$

olarak tanımlanan $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün, en az bir $\alpha > 0$ için konveks $\alpha-$devamı vardır.

Şimdi konveks devamın bir özelliğini karakterize eden bir önerme kanıtlayalım.

Önerme 8. *$\alpha > 0$ ve $W^*(\cdot) : [t_0 - \alpha, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün sola konveks $\alpha-$devamı olsun. O zaman $\alpha_* \in (0, \alpha]$ ve $x_* \in W^*(t_0 - \alpha_*)$ olmak üzere, her $t \in [t_0, t_1]$ için*

$$W(t) \subset K_{\alpha_*}^L(x_*) \mid (t)$$

olur.

Kanıt. Seçilen herhangi bir $t^* \in [t_0, t_1]$ için

$$P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) = \\ = \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{t^* - t_0 + \alpha_*}\right) x_* + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{t^* - t_0 + \alpha_*} W(t^*) \tag{1}$$

olmak üzere, $P_{\alpha_*}(x_*) \mid (\cdot) : [t_0 - \alpha_*, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünü tanımlayalım. $t = t_0$ için

$$P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t_0) \subset W_0 \tag{2}$$

olduğunu gösterelim. $x \in P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t_0)$ alalım.

$$x = \left(1 - \frac{\alpha_*}{t^* - t_0 + \alpha_*}\right) x_* + \frac{\alpha_*}{t^* - t_0 + \alpha_*} w^* \tag{3}$$

olacak şekilde $w^* \in W(t^*)$ vardır. $(t_0 - \alpha_*, x_*) \in grW^*(\cdot)$, $(t^*, w^*) \in grW^*(\cdot)$ ve $grW^*(\cdot) \subset [t_0 - \alpha, t_1] \times \mathbb{R}^n$ konveks küme olduğundan $(t_0, x) \in grW^*(\cdot)$ bir başka deyişle

$$x \in W^*(t_0) = W_0$$

olur. O zaman (2) kapsaması doğrudur.

Şimdi her $t \in [t_0 - \alpha_*, t^*]$ için

$$P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) \subset W(t)$$

olduğunu kanıtlayalım.

$$\begin{aligned} P_0 &= P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t_0) \\ &= \left(1 - \frac{\alpha_*}{t^* - t_0 + \alpha_*}\right) x_* + \frac{\alpha_*}{t^* - t_0 + \alpha_*} W(t^*) \end{aligned}$$

diyelim ve $t \in [t_0 - \alpha_*, t^*]$ için

$$Q_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) = \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) x_* + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} P_0$$

olmak üzere, $Q_{\alpha_*}(x_*) \mid (\cdot) : [t_0 - \alpha_*, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünü tanımlayalım. (2) kapsaması ve $K_{\alpha_*}^L(x_*) \mid (\cdot)$ küme değerli dönüşümünün tanımlanışından dolayı her $t \in [t_0 - \alpha_*, t_1]$ için

$$Q_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) \subset K_{\alpha_*}^L(x_*) \mid (t) \tag{4}$$

olduğu açıktır. Her $t \in [t_0 - \alpha_*, t^*]$ için

$$Q_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) = P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t)$$

olduğu kolayca gösterilebilir.
O zaman her $t \in [t_0 - \alpha_*, t^*]$ için (1) ve (4) ifadesinden

$$P_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) = Q_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) \subset K_{\alpha_*}^L(x_*) \mid (t) \tag{5}$$

ve $t = t^*$ için (5) ifadesinden

$$W(t^*) \subset K_{\alpha_*}^L(x_*) \mid (t^*)$$

olduğu bulunur. O halde herhangi bir $t^* \in [t_0, t_1]$ için $W(t^*) \subset K_{\alpha_*}^L(x_*) \mid (t^*)$ olur.

Önerme 9. *$\alpha > 0$ ve $W^*(\cdot) : [t_0, t_1 + \alpha] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün sağa konveks $\alpha-$devamı olsun. O zaman $\alpha_* \in (0, \alpha]$ ve $x_* \in W^*(t_1 + \alpha_*)$ olmak üzere, her $t \in [t_0, t_1]$ için*

$$W(t) \subset K^R_{\alpha_*}(x_*) \mid (t)$$

olur.

Önerme 9, önerme 8'e benzer olarak kanıtlanır.

3. MAKSİMAL KONVEKS DEVAM

Şimdi sola ve sağa maksimal konveks devamın tanımını verelim.

Tanım 10. *$\alpha > 0$ sabit bir sayı ve*

$$W^M_\alpha(t) : [t_0 - \alpha, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$$

küme değerli dönüşümü, $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$, küme değerli dönüşümünün sola bir konveks $\alpha-$devamı olsun. Eğer $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün her $W^*(\cdot) : [t_0 - \alpha, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ sola konveks $\alpha-$devamı için

$$W^*(t_0 - \alpha) \subset W^M_\alpha(t_0 - \alpha)$$

koşulu sağlanıyorsa, $W^M_\alpha(\cdot) : [t_0 - \alpha, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümüne, $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün sola maksimal konveks $\alpha-$devamı denir.

Tanım 11. *$\alpha > 0$ sabit bir sayı ve*

$$W^M_\alpha(t) : [t_0, t_1 + \alpha] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$$

küme değerli dönüşümü, $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün sağa bir konveks $\alpha-$devamı olsun. Eğer $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün her $W^*(\cdot) : [t_0, t_1 + \alpha] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ sağa konveks $\alpha-$devamı için

$$W^*(t_1 + \alpha) \subset W^M_\alpha(t_1 + \alpha)$$

koşulu sağlanıyorsa, $W^M_\alpha(\cdot) : [t_0, t_1 + \alpha] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümüne, $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün sağa maksimal konveks $\alpha-$devamı denir.

Teorem 12. *$\alpha_* > 0$,*

$$M_{\alpha_*} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, w_0 \in W_0 \text{ için } D^+W(t_0, w_0) \subset D^+K^L_{\alpha_*}(x) \mid (t_0, w_0)\} \neq \varnothing$$

olsun. $M^L_{\alpha_*}(\cdot) : [t_0 - \alpha_*, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$, küme değerli dönüşümü

$$M^L_{\alpha_*}(t) = \left(1 - \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) M_{\alpha_*} + \frac{t - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} W_0$$

olarak tanımlansın. O zaman $t \in [t_0 - \alpha_*, t_1]$ için

$$W^M_{\alpha_*}(t) = \begin{cases} M_{\alpha_*}(t) & , \; t \in [t_0 - \alpha_*, t_0) \\ W(t) & , \; t \in [t_0, t_1] \end{cases}$$

olmak üzere, $W^*_\alpha(\cdot) : [t_0 - \alpha, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü, $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün sola maksimal konveks α_*-devamıdır.

Kanıt. Önce

$$W^M_{\alpha_*}(\cdot) : [t_0 - \alpha_*, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$$

küme değerli dönüşümünün, $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola konveks α_*-devamı olduğunu kanıtlayalım. $M_{\alpha_*} \neq \varnothing$ olduğundan $W^M_{\alpha_*}(t_0 - \alpha_*) \neq \varnothing$ ve her $t \in [t_0, t_1]$ için $W^M_{\alpha_*}(t) = W(t)$ olduğu açıktır. Şimdi

$$grW^M_{\alpha_*}(\cdot) \subset [t_0 - \alpha_*, t_1] \times \mathbb{R}^n$$

kümesinin konveks olduğunu kanıtlayalım. Bunun için v', $v'' \in grW^M_{\alpha_*}(\cdot)$ ve $\lambda \in [0, 1]$ alalım. O zaman

$$v' = (t', w'), \; v'' = (t'', w'')$$

olacak şekilde t', $t'' \in [t_0 - \alpha_*, t_1]$ ve $w' \in W^M_{\alpha_*}(t')$, $w'' \in W^M_{\alpha_*}(t'')$ vardır. $t' < t''$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda üç olasılıkla karşılaşırız:

1. $t'' < t_0$ ise $grM^L_{\alpha_*}(\cdot) \subset [t_0 - \alpha_*, t_0] \times \mathbb{R}^n$ konveks olduğundan $(1 - \lambda)v' + \lambda v'' \in grW^M_{\alpha_*}(\cdot)$ olur.

2. $t_0 \leq t'$ ise $grW(\cdot) \subset [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$ konveks olduğundan $(1 - \lambda)v' + \lambda v'' \in grW^M_{\alpha_*}(\cdot)$ olur.

3. $t' < t_0 < t''$ ise $w' \in M^L_{\alpha_*}(t')$ ve $w'' \in W(t'')$ olur. Bu durumda

$$w' = \left(1 - \frac{t' - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*}\right) x_* + \frac{t' - t_0 + \alpha_*}{\alpha_*} w_0$$

olacak şekilde $x_* \in M_{\alpha_*}$ ve $w_0 \in W_0$ vardır. $x_* \in M_{\alpha_*}$ olduğundan her $w \in W_0$ için

$$D^+W(t_0, w) \subset D^+K^L_{\alpha_*}(x_*) \mid (t_0, w)$$

olur. O zaman teorem 4'ten

$$W^*(t) = \begin{cases} K^L_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) & , \; t \in [t_0 - \alpha_*, t_0) \\ W(t) & , \; t \in [t_0, t_1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan

$$W^*(\cdot) : [t_0 - \alpha_*, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$$

küme değerli dönüşümü, $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola konveks α_*-devamıdır.

$K^L_{\alpha_*}(x_*) \mid (\cdot)$ dönüşümünün tanımlanışından $w' \in K^L_{\alpha_*}(x_*) \mid (t')$ olur. $w' \in W^*(t')$ ve $(t', w') \in grW^*(\cdot)$ olur. $w'' \in W(t'')$, $t'' > t_0$ olduğundan

$$W^*(t'') = W(t''),$$

$w'' \in W^*(t'')$ ve $(t'', w'') \in grW^*(\cdot)$ olur. $W^*(\cdot) : [t_0 - \alpha_*, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün sola konveks α_*−devamı olduğundan, keyfi $\lambda \in [0,1]$ için

$$\lambda(t', w') + (1-\lambda)(t'', w'') \in grW^*(\cdot)$$

ve dolayısıyla keyfi $\lambda \in [0,1]$ için

$$\lambda w' + (1-\lambda) w'' \in W^*(\lambda t' + (1-\lambda) t'') \quad (6)$$

olur. $x_* \in M_{\alpha_*}$ olduğundan, keyfi $t \in [t_0 - \alpha_*, t_1]$ için

$$W^*(t) = K^L_{\alpha_*}(x_*) \mid (t) \subset M^L_{\alpha_*}(t) = W^M_{\alpha_*}(t) \quad (7)$$

olacağı açıktır. $W^*(\cdot)$, $W^M_{\alpha_*}(\cdot)$ küme değerli dönüşümlerinin tanımlarından, keyfi $t \in [t_0, t_1]$ için

$$W^*(t) = W^M_{\alpha_*}(t) = W(t) \quad (8)$$

olur. (6), (7) ve (8) ifadelerinden, keyfi $\lambda \in [0,1]$ için

$$\lambda w' + (1-\lambda) w'' \in W^M_{\alpha_*}(\lambda t' + (1-\lambda) t'')$$

ve

$$\lambda(t', w') + (1-\lambda)(t'', w'') \in grW^M_{\alpha_*}(\cdot)$$

olduğu bulunur. Yani $grW^M_{\alpha_*}(\cdot)$ konveks bir kümedir.

O halde $W^M_{\alpha_*}(\cdot) : [t_0 - \alpha_*, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü konvekstir ve $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün sola konveks α_*−devamıdır.

Şimdi $W^M_{\alpha_*}(\cdot) : [t_0 - \alpha_*, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün, $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola maksimal konveks α_*−devamı olduğunu kanıtlayalım. $W^0(\cdot) : [t_0 - \alpha_*, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü, $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sola konveks α_*−devamı olsun. $x_* \in W^0(t_0 - \alpha_*)$ alalım. O zaman önerme 8 uyarınca her $t \in [t_0, t_1]$ için

$$W(t) \subset K^L_{\alpha_*}(x_*) \mid (t)$$

içermesi sağlanır. $W_0 = W(t_0) = K^L_{\alpha_*}(x_*) \mid (t_0)$ olduğundan, keyfi $w \in W_0$ için

$$D^+W(t_0, w) \subset D^+K^L_{\alpha_*}(x_*) \mid (t_0, w)$$

koşulu sağlanır. O halde $x_* \in M_{\alpha_*}$ olur. $x_* \in W^0(t_0 - \alpha_*)$ keyfi seçildiğinden,

$$W^0(t_0 - \alpha_*) \subset W^M_{\alpha_*}(t_0 - \alpha_*)$$

olur. Yani $W^M_{\alpha_*}(\cdot) : [t_0 - \alpha_*, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü, $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün sola maksimal konveks α_*−devamıdır.

Teorem 13. *$\alpha_* > 0$ ve*

$$M_{\alpha_*} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, w_1 \in W_1 \text{ için } D^-W(t_1, w_1) \subset D^-K^R_{\alpha_*}(x) \mid (t_1, w_1)\} \neq \varnothing$$

olsun. $M^R_{\alpha_*}(\cdot) : [t_0, t_1 + \alpha_*] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünü

$$M^R_{\alpha_*}(t) = \left(1 - \frac{t_1 + \alpha_* - t}{\alpha_*}\right) M_{\alpha_*} + \frac{t_1 + \alpha_* - t}{\alpha_*} W_1$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $t \in [t_0, t_1 + \alpha_*]$ için

$$W^M_{\alpha_*}(t) = \begin{cases} W(t) &, \ t \in [t_0, t_1] \\ M_{\alpha_*}(t) &, \ t \in (t_1, t_1 + \alpha_*] \end{cases}$$

olmak üzere, $W^M_{\alpha_*}(\cdot) : [t_0, t_1 + \alpha_*] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü, $W(\cdot) : [t_0, t_1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün sağa maksimal konveks α_*−devamıdır.

Teorem 13, teorem 12'ye benzer olarak kanıtlanır.

KAYNAKÇA

Aubin, J-P. ve Frankowska, H. (1990) *Set Valued Analysis.* Birkhauser, Boston.

Clarke, F.H., Ledyaev, Yu.S., Stern, R.J. ve Wolenski, P.R. (1998) *Nonsmooth Analysis and Control Theory.* Springer, New York.

Guseinov, Kh.G., Özer, O. ve Düzce, S.A. (1999) On the Convex Continuation of the Convex Compact Multivalued Map. *XII. Ulusal Matematik Sempozyumu Bildirileri,* Malatya, Turkey, 27–30. (In Engl.)

Guseinov, Kh.G., Özer, O. ve Düzce, S.A. (2001) On Convexity Properties of Set Valued Maps. *Abstracts of the International Conference on Applicable General Topology,* Ankara, Turkey, 19-20.

Guseinov, Kh. G., Ozer, O. ve Duzce, S. (2002) On the inverse problem of the differential inclusion theory. *ISDG2002, Vol. I, II* (St. Petersburg), St. Petersburg State Univ. Inst. Chem., St. Petersburg, 353–358.

Guseinov, Kh. G., Ozer, O. ve Duzce, S. (2003) On The Construction of Differential Inclusion with Prescribed Integral Funnel, *Mathematical & Computational Applications* 8(1), 119–126.

Guseinov, Kh.G., Subbotin, A.I. ve Ushakov, V.N. (1985) Derivatives for multivalued mappings with applications to game-theoretical problems of control. *Problems of Control and Information Theory* 14(3), 155–167.

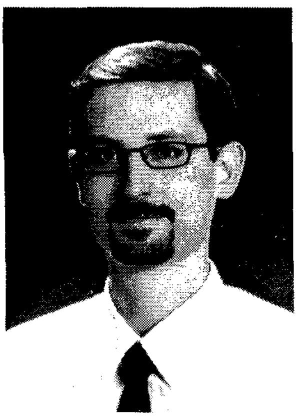
Guseinov, Kh.G. ve Ushakov, V.N. (2000) The Construction of Differential Inclusions with Prescribed Properties. *Differential Equations* 36(4), 488–496.

Khalig G. GUSEINOV

1978 yılında Azerbaycan Devlet Üniversitesi, Mekanik–Matematik fakültesinden mezun oldu. 1985 yılında SSCB Bilimler Akademisi, Ural bölümü Mekanik–Matematik Enstitüsü'nde "Fizik–Matematik Bilimleri Adayı", 1998 yılında "Fizik–Matematik Bilimleri Doktoru" unvanını aldı. Diferansiyel oyunlar teorisi, kontrol teori, diferansiyel denklemler ve içermeler teorisi, küme değerli analiz konularında altmıştan fazla yayını bulunmaktadır.

Orhan ÖZER

1944 yılında Ardahan'da doğdu. 1967'de İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü'nden mezun oldu. İki yıl Kars Alpaslan Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 1969 yılında Hacettepe Üniversitesi'ne asistan olarak girdi ve 1973 yılında doktorasını tamamladı. 1980 yılında doçent, 1987'de profesör oldu. 1993 yılından beri Anadolu Üniversitesi'nde çalışmaktadır.



Serkan DÜZCE

1976 yılında Bursa'da doğdu. 1997 yılında Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü'nden biricilikle mezun oldu. 2000 yılında Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisansını tamamladı. Halen aynı enstitüde doktorasını yapmaktadır.