

KARIŞIMLARIN DİELEKTRİK SABİTİ

Tevfik Ünaldı /

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliđi Uyarınca
Fizik Anabilim Dalı
Katıhal Fiziđi Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Önder Orhun

Şubat-1989

Tevfik Ünalđı'nın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "KARIŞIMLARIN DIELEKTRİK SABİTİ" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

17./02./1989

Üye : Prof. Dr. Muhsin ZOR

Üye : Doç. M. Selami KILIŞKAYA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Önder ORHUN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 17.ŞUBAT. 1989
gün ve 203/9.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Rüstem Kaya

ÖZET

Dielektrik malzemeler, günümüz elektrik-elektronik mühendisliğinde oldukça geniş uygulama alanlarına sahiptir. Her dielektrik malzeme için bağıl dielektrik sabiti adı verilen boyutsuz bir nicelik mevcut olup, bu sabitin büyüklüğü malzemenin cinsine bağlı olarak değişmektedir. Eğer, saf haldeki malzemelerin dielektrik sabitleri, bizim için gerekli olan dielektrik sabiti değerinden farklıysa, bu malzemeleri, başka saf malzemelerle karıştırarak istenen dielektrik sabitli malzeme elde edilebilir.

Karışımlar, dielektrik özellikleri bakımından bileşenleri paralel konumda bulunan karışımlar, bileşenleri seri konumda bulunan karışımlar, istatistiksel karışımlar ve matris karışımlar olmak üzere dört grupta toplanabilir. Her karışım türü için ayrı ayrı bağıntılar mevcutken, bir karışıma ait çeşitli hacimsel kesir değerlerinde daha yaklaşık değerler veren birden fazla bağıntı elde edilmiştir.

İki saf dielektrik maddeyle bu dört karışım türü ayrı ayrı oluşturulduğunda her karışım için farklı dielektrik sabiti değeri elde edilir. Dolayısıyla, arzu edilen bir dielektrik sabitine sahip dielektrik madde oluşturulmak istendiğinde, karışımı oluşturan bileşenlerin dielektrik sabitleri önemli rol oynar ve bunlardan oluşacak karışıma ait karışım türünün seçilmesi gerekir.

Bu çalışmada, çeşitli karışım türleri ve onların özel karışımları üzerine ileri sürülen teoriler biraraya getirilmeye çalışılmış ve bunlar arasındaki benzerlik ve farklılıklar ortaya konarak karşılaştırılmaları yapılmıştır.

SUMMARY

Dielectric materials, nowadays, find widest applications in the fields of electric-electronic engineering. There is a dimensionless quantity for each dielectric material, namely relative dielectric constant, magnitude of which depends on the kind of material. If the dielectric constants of the pure materials are different from the required value, the material which has desired dielectric constant, can be produced as the mixture which is made of these pure materials and other pure materials.

According to their dielectric properties, the mixtures can be classified into four groups: the mixtures whose components are connected in parallel, the mixtures whose components are connected in series, the statistical mixtures and the matrix mixtures. While there are different relations for each class of the mixture, more than one relations, each of which gives the values which are very close to each other, are obtained for the different volume fractions of a mixture.

If these four classes of mixtures are produced by two pure dielectric materials separately, the dielectric constant of each mixture is obtained differently from each other. For this reason, if we want to produce the dielectric material with the desired dielectric constant, the components of mixture play important role and the class of mixture which is made of these components, is needed to be chosen.

In this study, the theories on several classes of mixtures and their special mixtures have been gathered together and while the similarities and differences between these theories have been explained, their comparisons were done.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı, yüksek lisans tezi olarak bana yeren ve çalışmalarım sırasında bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren Sayın Yrd. Doç. Dr. Önder ORHUN'a, tezin yazımı sırasında benden yardımlarını esirgemeyen Arş. Grv. Murat TANIŞLI, Teknisyen Zülkarni DELİL ve tüm mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiii
SİMGELER DİZİNİ	xiv
1. GİRİŞ	1
2. ELEKTRİK ALANDA DIELEKTRİĞİN DAVRANIŞI	3
2.1. Düzgün Bir Elektrik Alanda Dielektriğin Davranışı	3
2.1.1. Dielektrik sabiti	3
2.1.2. Dielektriklerin sınıflandırılması	7
2.1.3. Elektronik kutuplanma	10
2.1.4. İyonik kutuplanma	11
2.1.5. Dipol kutuplanması	11
2.2. Değişken Bir Elektrik Alanda Dielektriğin Davranışı	13
2.2.1. Kutuplanma ve deplasman	13
2.2.2. Kompleks dielektrik sabiti ve dielektrik kayıp açısı	15
3. DIELEKTRİK SABİTİ İLE İLGİLİ TEORİLER	17
3.1. Polar Dipollerle İlgili Teoriler	17
3.1.1. Debye teorisi	17

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
3.1.2. Onsager teorisi	20
3.1.3. Onsager ve Debye eşitliklerinin karşılaştırılması	21
3.2. Cole Teorisi	22
3.3. Polar Olmayan Dipollerle İlgili İstatistiksel Teoriler	24
3.3.1. Kirkwood teorisi	24
3.3.2. Fröhlich teorisi	25
4. KARIŞIM TEORİLERİ VE DİELEKTRİK SABİTLERİ	27
4.1. Bileşenleri Paralel Konumda Bulunan Karışımlar	27
4.2. Bileşenleri Seri Konumda Bulunan Karışımlar	29
4.3. İstatistiksel Karışımlar	32
4.3.1. Wiener teorisi	33
4.3.2. Lichtenecker-Rother teorisi	34
4.3.3. Clausius-Mossotti teorisi	36
4.3.4. Bileşenlerin oluşturduğu karışımlar teorisi	37
4.3.5. Landau-Lifshitz, Beer, Odelevsky ve Payne-Cross teorileri	39
4.3.6. Aritmetik karışım teorisi	41
4.3.7. İstatistiksel karışım ifadelerinin genelleştirilmiş formları	46
4.4. Matris Karışımlar	47
4.4.1. Rayleigh teorisi	47
4.4.2. Böttcher teorisi	49
4.4.3. Bruggeman teorisi	50

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
4.4.4. Looyenga teorisi	50
4.4.5. Hanai teorisi	53
4.4.6. Maxwell teorisi	55
4.4.7. Maxwell-Wagner, Odelevsky ve iletken bileşen içeren Bruggeman teorileri	58
5. SONUÇ	60
KAYNAKLAR DİZİNİ	64

EKLER

1. Debye Eşitliğinin Türetilmesi
2. Onsager Eşitliğinin Türetilmesi
3. Kirkwood Eşitliğinin Türetilmesi
4. Fröhlich Eşitliğinin Türetilmesi
5. Karışımlar İçin Clausius-Mossotti Eşitliğinin Türetilmesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. Coulomb yasası örneği	3
2.2. Kondansatör gösterimi	4
2.3. Kutuplanmış bir dielektrikte yük dizilişi	5
2.4. Polar molekül gösterimi	7
2.5. a) CO ₂ , b) H ₂ O moleküllerinin şematik olarak gösterimi	8
2.6. Metan (CH ₄) molekülü	9
2.7. Kayıp açının gösterimi	15
3.1. $(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2)\rho_m$ cm ³ /gr kutuplanmasının çeşitli ρ_m gr/cm ³ yoğunluklarda ϵ ve $\sqrt{\epsilon}$ ifadelerine göre değişimi	18
3.2. Molar kutuplanmanın 1/T'ye göre değişimi	18
3.3. Sanal dielektrik katsayısının sanal kısmının gerçel kısmına göre çiziminden bulunan Debye yarı-dairesi	19
3.4. a) ϵ_2 statik dielektrik sabitli bir ortama yerleştirilmiş ϵ_1 statik dielektrik sabitli a yarıçaplı küre, b) Bu sisteme E alanının uygulanması durumu	20
3.5. Sanal dielektrik katsayısının sanal kısmının, gerçel kısmına göre çizimiyle bulunan Cole-Cole daire yayı	24
4.1. İki dielektrik maddenin paralel bağlı durumundaki kondansatör	27
4.2. n tane farklı bileşenin paralel bağlı durumda olduğunu gösteren kondansatör modeli	28
4.3. İki dielektrik maddenin seri bağlı durumundaki kondansatör modeli	29
4.4. n tane farklı dielektriğin seri bağlı durumda olduğunu gösteren kondansatör modeli	30

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.5. Doyurulmuş kağıt kondansatörün (yoğunluğu 1000 kg/cm ³) ϵ^* dielektrik sabitinin doymuş bileşiğin $\epsilon_{i,c}$ dielektrik sabitine göre değişimi	32
4.6. Karışımdaki miktarlarına göre A ve B gibi iki bileşenli karışımın dielektrik sabiti	33
4.7. Karışımdaki siklohegzanol miktarına göre, siklohegzanol (C ₆ H ₁₁ .OH) ve etil asetat (C ₂ H ₅ COO.CH ₃) gibi iki polar sıvılı bir karışımın ϵ^* dielektrik sabiti	33
4.8. Lichtenecker-Rother teorisine uyan hesaplamalar için kullanılan nomogram	34
4.9. Köpük polistrenin D* yoğunluğuna göre dielektrik sabiti	34
4.10. BaTiO ₃ ve NaNbO ₃ karışımının karışımdaki NaNbO ₃ hacimsel kesrine göre ϵ^* değişimi	40
4.11. BaTiO ₃ ve NaNbO ₃ karışımının karışımdaki NaNbO ₃ hacimsel kesrine göre 10 ⁴ / ϵ^* değişimi	40
4.12. İki bileşenli bir karışımın karışım miktarlarına göre TC ϵ^* değişimi	42
4.13. Sığası sıcaklıkla değişmeyen kondansatör için a) Paralel, b) Seri bağlı durum	42
4.14. Elektriksel porsalenin sıcaklığa göre dielektrik sabitinin değişimi	43
4.15. C ₆ H ₆ benzen ve CCl ₄ karbontetraklorür maddelerinin dielektrik sabitlerinin sıcaklığa göre değişimi	43
4.16. Sığası sıcaklıkla değişmeyen kondansatör için bir dielektrik karışımın bileşenlerinin hesaplanması	44
4.17. Tidolün kütle miktarına göre sürekli eğri ϵ^* , kesikli eğri tidol-timag seramik materyallerin TC ϵ^* değişimi	44

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>		<u>Sayfa</u>
4.18.	Matris karışım	47
4.19.	Farklı iki dielektrikten oluşmuş karışımın hacimsel kesrine göre ϵ^* değişimi	56
4.20.	İki fazlı karışımın deneysel ve teorik değerlerinin gösterimi	56
4.21.	TiO ₂ 'nin dielektrik sabitinin gözenek miktarına göre değişimi	57
4.22.	Cıvanın hacimsel kesrine göre vazelin ve cıva karışımının ϵ^* dielektrik sabiti	59

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. Normal basınç ve sıcaklık altında polar olmayan dielektrikler için ışığın kırılma indisi n_k , n_k^2 ve ϵ_r değerleri	10
2.2. İyonik kristaller için n_k , n_k^2 ve ϵ_r değerleri	11
2.3. Polar sıvı ve gazlar için n_k , n_k^2 ve ϵ_r değerleri	12
4.1. 25 °C'deki CCl ₄ ile benzen karışımının dielektrik sabitinin teorik ve deneysel değerleri	37
4.2. 25 °C'deki CCl ₄ ile siklohegzan karışımının dielektrik sabitinin teorik ve deneysel değerleri	38
4.3. 25 °C'deki benzen ile siklohegzan karışımının dielektrik sabitinin teorik ve deneysel değerleri	38
4.4. Matris karışımların ölçümlerinden hareketle bazı katı maddelerin ϵ_2 dielektrik sabitleri	52
4.5. Dielektrik ortamda dağılmış iletken materyalli bazı matris sistemler için ϵ^* değerleri	54

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
ϵ	Mutlak dielektrik sabiti
ϵ_k	Kompleks dielektrik sabiti
ϵ_r	Bağıl dielektrik sabiti veya dielektrik sabiti
ϵ_0	Boşluğun mutlak dielektrik sabiti
ϵ'	Gerçel dielektrik sabiti
ϵ''	Sanal dielektrik sabiti
ϵ_∞	Sonsuz frekanstaki dielektrik sabiti
ϵ^*	Karışımın dielektrik sabiti
ϵ_i	i'inci bileşenin dielektrik sabiti
$\Delta\epsilon^*$	Karışımın dielektrik sabiti değişimi
E	Elektrik alan
E_1	Kondansatör levhaları ve bu levhalara bitişik dielektrik yüzeyleri üzerindeki yüklerden dolayı oluşan alan
E_2	Küre yüzeyi üzerindeki kutuplanma yüklerinden dolayı oluşan alan
E_3	Küresel bölgedeki moleküllerden dolayı oluşan alan
E_G	Kovuk alanı
E_R	Tepki alanı
E_i	İç elektrik alan
E_T	Toplam elektrik alan
E_0	Sabit elektrik alan
ϵ_c	Selilozun dielektrik sabiti
$\epsilon_{j,c}$	Doymuş bileşiğin dielektrik sabiti
TCE^*	Karışımın dielektrik sabitinin sıcaklık katsayısı
TCC^*	Karışım sığasının sıcaklık katsayısı
U	Potansiyel fark
h	Dielektrik kalınlık
V	Hacim
p	Dipol moment

SİMGELER DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
P	Kutuplanma
μ	Sürekli dipol moment
F_e	Elektriksel kuvvet
\hat{a}_r	Birim vektör
-e	Elektron yükü
e'	Elektrik alan yönü
q	Elektriksel yük
Q	Toplam elektriksel yük
χ_e	Dielektrik süseptibilite
σ	Yüzeysel yük yoğunluğu
S	Kondansatör levhalarının yüzölçümü
dS	Diferansiyel yüzey elemanı
D	Elektriksel deplasman
C	Kondansatör sığası
C_0	Boş kondansatör sığası
n_k	Kırılma indisi
τ	Durulma zamanı
η_v	Viskozite katsayısı
α	Elektriksel kutuplanabilirlik
k	Boltzmann sabiti
T	Mutlak sıcaklık
ω	Frekans
ϕ	Faz farkı
δ	Kayıp açısı
M	Moleküler ağırlık
ρ_m	Madde yoğunluğu
N	Avogadro sayısı
a	Molekül yarıçapı
x	Konum elemanı
x_i	Kütlesel kesir
dx	Diferansiyel konum elemanı
U(x,E)	Konum ve elektrik alan bağımlı potansiyel enerji

SİMGELER DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
μ_i	i'inci moleküle ait sürekli dipol moment
P_i	i'inci moleküle ait dipol moment
g	Korelasyon parametresi
N_i	Birim hacimdeki molekül sayısı
μ_g	Gaz fazındaki maddenin sürekli dipol momenti
$d\omega$	Katı açısı elemanı
L	Langevin fonksiyonu
y	Hacimsel kesir
y_i	i'inci bileşenin hacimsel kesri
D_p	Kağıdın yoğunluğu
D_c	Selilozun yoğunluğu
C^*	Karışımın toplam sığası
k_h	Doymuş bileşiğin hacim kayıp faktörü
n	Bileşen sayısı
D^*	Karışımın yoğunluğu
D_i	i'inci bileşenin yoğunluğu
$(N_i)_m$	Karışımın 1 m ³ 'ündeki i'inci bileşenin molekül sayısı
$(N_i)_p$	Saf bileşenin 1 m ³ 'ündeki i'inci bileşenin molekül sayısı
$\phi(\epsilon^*)$	ϵ^* 'a ait genel fonksiyon gösterimi
η^*	İletken faz içeren karışımın dielektrik sabiti
$\tilde{\omega}^*$	Karışımın elektriksel iletkenliği
F	Yerel alan

1. GİRİŞ

Bir dış elektrik alan etkisi altında iç yükleri sınırlı yer-değişimleri yapan yada polar molekülleri yönelen böylece iç yapısı tanımlanabilen yalıtkan bir madde şeklindeki dielektrikler hakkında bilgiler, XIX'uncu yüzyılın sonlarına doğru kutuplanma olayının açıklanmasıyla gelişmiştir.

Maddenin dielektrikliğini belirleyen nicelik ise dielektrik sabiti adını alan, maddenin kendi iç yüklerinin ve dipollerinin bir dış alanla etkileşimlerinden kaynaklanan sığa ve iletkenlik değişimlerini belirleyen katsayı olarak karşımıza çıkar. Bir maddenin dielektrik sabiti, sıcaklık, basınç, yoğunluk ve neme bağlı olarak farklı değerlere ulaşabilmektedir.

Her dielektrik maddenin farad/metre boyutunda mutlak dielektrik sabiti olmasının yanında, bu niceliğin boşluğun mutlak dielektrik sabitine oranı şeklinde bulunan boyutsuz bir bağıl dielektrik sabiti de vardır. Bağıl dielektrik sabiti hava için 1.0006, cam için 4-7 arası, rutil için 100, porselen için 6, damıtılmış su için 80, yarıiletken materyallerden silisyum için 11.7, germanyum için 15.8 olarak bulunmuştur.

Saf veya bileşik haldeki iki madde karışım oluşturduğunda, bu iki maddenin seri olarak bir kondansatörün levhaları arasına yerleştirilmesi halinde bulunan dielektrik sabiti değeri, aynı maddenin levhalar arasına paralel olarak yerleştirildiğinde bulunan dielektrik sabiti değeri ve bu maddelerin istatistiksel karışımı halinde bulunan dielektrik sabiti değeri birbirinden farklıdır. Aynı olaylar katı-sıvı, sıvı-sıvı karışımları içinde söz konusu olmakla birlikte tüm karışımların kimyasal olarak birbirlerini etkilemedikleri varsayımından yola çıkılır.

Bir başka karışım şekli matris karışımlardır. Bütün karışımlar her ne kadar istatistiksel karışımlara benzerlik gösterse de matris karışımlarda dağılma fazında bulunan katılandırılmış madde olarak isimlendirilen maddelerin küresel parçacıklardan oluşması gereklidir. Bu küresel parçacıkların boyutları birbirlerine eşit olabildikleri gibi birbirlerine eşit olmasalarda matris karışımın

niteliği değişmez. Matris karışımlara örnek olarak viskoz bir ortama atılmış demir tozlarından oluşan karışımı, gözenekli yapılara sahip maddeleri verebiliriz.

Karışımları yukarıda belirtildiği gibi dört grupta toplamak mümkün olmakla birlikte bu gruplardaki karışımlar birbirlerine oldukça benzerlik göstermektedir. Örneğin, bileşenleri seri ve paralel bağlı olma durumları istatistiksel karışımlar grubuna girse de kendi özel formülleri yardımıyla açıklanabilirler. Matris karışımlarda da durum benzerlik göstermektedir. Örneğin, dağılma fazı küresel parçacıklardan oluşmuyor ve düzenli bir dağılım göstermiyorsa, matris karışımlar istatistiksel karışımlar grubuna sokulabilirler.

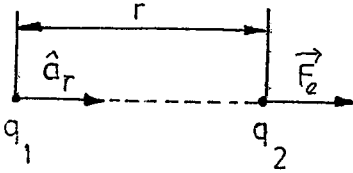
Karışımların dielektrik sabitlerini hesaplamada birden fazla formülün ileri sürülmesi ve hatta aynı tip karışımlar için dahi birden fazla formülün verilmesi olayın ilginç taraflarından birisidir. İleri sürülen formüller birbirlerinden farklı görünümde olmalarının yanında bir kısmı bazı özel karışımlarda daha doğru sonuç verirlerken diğer karışımlarda bu uyumdan uzaklaşırlar. Bununla birlikte, aynı karışımdaki çeşitli hacimsel kesir değerleri için bile farklı bağantılar kullanılarak deneyle teori arasındaki uyum gözlenebilir. Durum böyle olunca aynı tip karışımları oluşturan maddeler farklılaştıkça ileri sürülen formüllerin yaklaşık sonuç vermesi açısından seçimi gerekir.

2. ELEKTRİK ALANDA DİELEKTRİĞİN DAVRANIŞI

2.1. Düzgün Bir Elektrik Alanda Dielektriğin Davranışı

2.1.1. Dielektrik sabiti

Dielektriklerin başlıca özelliği, bir dış elektrik alan etkisi altında kutuplanmalarıdır. XIX. yüzyılın sonlarına doğru ortaya atılan kutuplanma olayı, dielektrikteki elektriksel dipollerin elektrik alan doğrultusunda dizilmesi işlemidir. Elektrik alan etkisindeki bir dielektrikte iki vektör tanımlanabilir: Bunlardan birisi \vec{E} elektrik alan şiddeti vektörü, diğeri ise \vec{P} kutuplanma vektörüdür. Elektriksel alan şiddeti, birim yüke etkileyen elektriksel kuvvet olarak tanımlanır. Aralarında r kadar uzaklık bulunan q_1 ve q_2 gibi iki noktasal yükten q_1 'in q_2 'ye uyguladığı kuvvet ise Coulomb yasasına,



Şekil 2.1. Coulomb yasası örneği.

$$\vec{F}_z = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \quad (2.1)$$

şeklindedir. Burada \hat{a}_r ,

Şekil 2.1'de gösterildiği gibi q_1 'den q_2 'ye doğru yönelmiş birim vektör, ϵ_r dielektriği karakterize eden boyutsuz bir parametredir ve bağıl dielektrik sabiti veya sadece dielektrik sabiti olarak isimlendirilir. ϵ_0 ise boşluğun mutlak dielektrik sabitidir ve SI birim sisteminde değeri yaklaşık olarak,

$$\epsilon_0 \simeq 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

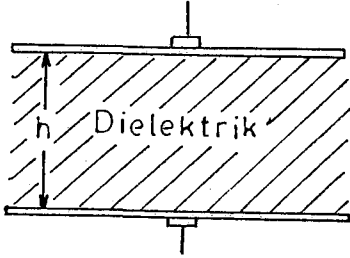
dir.

Yukarıda değindiğimiz Coulomb yasası gereğince birim yükten r kadar uzakta q noktasal yükü tarafından oluşturulan elektriksel alan şiddeti,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \quad (2.2)$$

şeklindedir.

Şekil 2.2'de gösterildiği gibi iletken düzlem levhaları arasında h kalınlıklı bir dielektrik madde bulunan kondansatörün içindeki bütün noktalardaki elektriksel alan şiddeti sabit ve,



Şekil 2.2. Kondansatör gösterimi.

$$E = \frac{U}{h} \quad (2.3)$$

dir, burada U , kondansatörün levhaları arasındaki elektriksel gerilimdir. Eş.(2.3), kondansatördeki dielektrik maddenin homojen olması durumunda geçerlidir ve ϵ_r dielektrik sabiti bütün noktalarda aynıdır. Homojen dielektrikli bir kondansatörde dielektrik maddenin bütün noktalarındaki elektrik alan şiddeti, kondansatör levhaları arasındaki elektriksel gerilimle orantılı olup, dielektriğin ϵ_r dielektrik sabitine bağlı değildir.

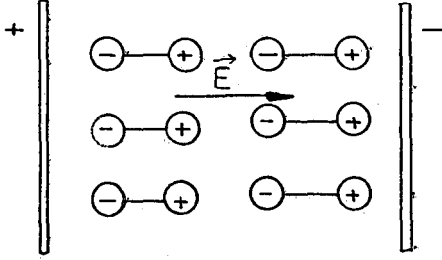
Bir dış elektrik alanda bulunan dielektriğin P kutuplanması sayısal olarak hesaplanabilir. Eğer bir dış elektrik alan mevcut değilse, moleküllerin sahip oldukları elektriksel momentler, dielektrikte net bir moment oluşturmayacak şekilde istatistiksel olarak yönelirler. Dielektriğe bir dış alan uygulandığında elektriksel momentler Şekil 2.3'deki gibi belirli bir şekilde yöneleceklerdir, bu sebeple dielektriğin moleküllerinin oluşturduğu net elektriksel moment artık sıfırdan farklı olacaktır. Bu durumda dielektriğin V hacmindeki elektriksel moment $\sum \vec{p}$ ise, birim hacimdeki elektriksel moment,

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{V} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır ve kutuplanma olarak isimlendirilir. Bir noktadaki kutuplanmanın büyüklüğü dielektriğin o noktasındaki elektrik alan şiddetiyle orantılıdır. Bu büyüklükler arasındaki oranı çarpanı, boşluğun mutlak dielektrik sabiti ϵ_0 ile dielektriğin boyutsuz bir parametresi olan χ_e dielektrik süseptibilitenin çarpımına eşittir ve dolayısıyla kutuplanma vektörü,

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (2.5)$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 2.3. Kutuplanmış bir dielektrikte yük dizilişi.

Lineer olmayan dielektriklerde (ferroelektrikler) \vec{P} ile \vec{E} vektörleri arasındaki ilişki tensör yardımıyla ifade edilir.

σ C/m²'lik yüzeysel yük yoğunluğuna sahip levhalar arasında bulunan S m² yüzölçümlü, h kalınlıklı bir dielektriğin elektrik momenti,

$$\sigma \cdot S \cdot h$$

dir. Dielektriğin hacmi $V = S \cdot h$ m³ olduğundan kutuplanma,

$$P = \sigma$$

şeklinde dir. Böylece kutuplanma bir dielektrikteki yüzeysel sınır yük yoğunluğuna eşittir. \vec{P} ve \vec{E} vektörlerinden başka bir noktadaki \vec{D} elektriksel deplasman vektörü,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.6)$$

olarak ifade edilir. Diğer taraftan deplasman ve elektrik alan şiddeti arasındaki bağlantı,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (2.7)$$

dir. Eş.(2.6) ve Eş.(2.7)'den,

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (2.8)$$

bulunur. Herhangi bir maddenin χ_e değeri pozitif olduğundan, ϵ_r değeri daima birden büyük olacaktır. Boşluk için $\chi_e = 0$ olacağından $\epsilon_r = 1$ olacaktır.

Elektriksel deplasman, Gauss teoreminden bulunabilir. Gauss teoremince belli bir hacmi kapatan kapalı bir yüzeyden geçen elektriksel deplasman akısı, bu hacmin içinde kalan serbest yüklerin cebirsel toplamına eşittir,

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q \quad (2.9)$$

Burada, $d\vec{S}$ bir yüzey elemanıdır ve bu formül dielektriğin ϵ_r dielektrik sabitini içermez. \vec{E} vektör alanı, farklı ϵ_r dielektrik sabitlerine sahip bir dielektrikte \vec{D} vektöründen daha karmaşıktır. Örneğin, çeşitli ϵ_r dielektrik sabitli dielektrik tabakalardan oluşan bir düzlem kondansatördeki her bir tabakada \vec{E} 'nin değerlerinin farklı olmasına rağmen bütün tabakalarda \vec{D} 'nin değeri aynıdır.

Her bir kondansatör levhasındaki serbest yükün toplam büyüklüğü Q ile gösterilirse, Q yükü kondansatör levhaları arasındaki U elektriksel gerilimiyle orantılıdır:

$$Q = C U \quad (2.10)$$

C orantı katsayısı kondansatörün sığasıdır. Kondansatör levhaları arasında ϵ_r dielektrik sabitli bir dielektrik madde olması durumundaki sığa ile kondansatör levhaları arasında boşluk bulunmasındaki sığa arasındaki bağıntı,

$$C = \epsilon_r C_0 \quad (2.11)$$

olarak verilir. Buradan görülebileceği gibi, kondansatörün bir dielektrik maddeyle dolu olması durumundaki sığası, kondansatörün boş olması durumundaki sığasından daha büyüktür ve C sığası ϵ_r dielektrik sabitiyle orantılıdır (Tareev, 1975).

Aynı zamanda bir kondansatörün sığası, h dielektrik kalınlığına ve her bir levhanın S yüzölçümüne bağlıdır, buna göre SI birim sisteminde sığa,

$$C = \epsilon_r \frac{\epsilon_0 S}{h}$$

$$C = \epsilon_r \frac{8,85 \times 10^{-12} S}{h} \text{ F} \quad (2.12)$$

burada h , metre ve S , metrekare cinsindedir. CGS birim sisteminde bu formül,

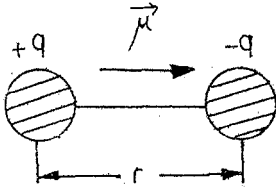
$$C = \epsilon \frac{S}{4\pi h} \quad (2.13)$$

şeklinde ifade edilebilir.

2.1.2. Dielektriklerin sınıflandırılması

Dielektrikler, polar ve polar olmayan dielektrikler şeklinde iki gruba ayrılabilir.

Dielektriklerin bu sınıflandırılması, dielektriklerin elektriksel, fiziksel ve kimyasal özellikleri bakımından son derece önemlidir. Bir dış elektrik alan uygulanmadığı zaman, eğer dielektriğin oluşturduğu net bir elektriksel moment yoksa, bu tür dielektriklere polar olmayan dielektrikler adı verilir, yani dış alan yok iken bu maddelerin moleküllerinin herbirinde pozitif ve negatif yüklerin kütle merkezleri çakışır. Dolayısıyla bu tür moleküllere polar olmayan molekül denir. Bazı maddelerin moleküllerinin herbirinde negatif yüklerin kütle merkeziyle pozitif yüklerin



Şekil 2.4. Polar molekül gösterimi.

kütle merkezleri çakışık olmayabilir. Bu durumda dış bir alan olmadığı halde dipol moment sıfırdan farklı olur. Böylelikle dipol momente sahip moleküle polar molekül, böyle moleküllerden oluşmuş dielektriğe de polar dielektrik denir. Bazen böyle bir dipol Şekil 2.4'de gösterildiği gibi sürekli dipol olarak isimlendirilebilir.

Bir polar molekülün elektrik momentinin büyüklüğü,

$$\mu = q r \quad (2.14)$$

burada q , molekülün pozitif yükü, r negatif ve pozitif yük arasındaki mesafe olan dipol koludur. Polar molekülün elektriksel mo-

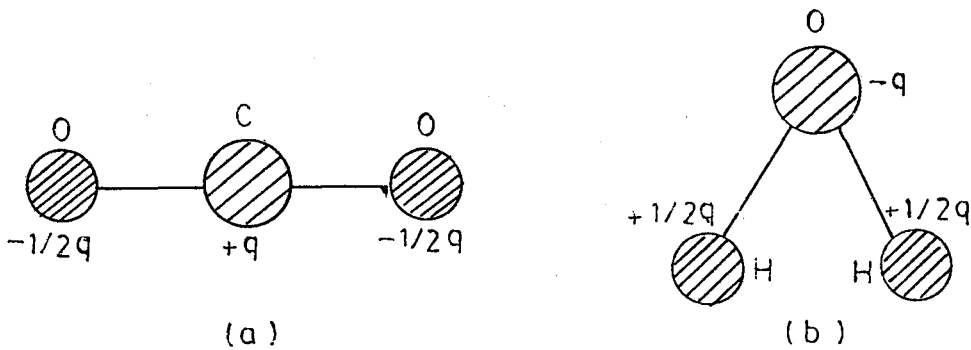
menti 10^{-30} C.m. mertebesindedir.

Polar olmayan maddenin molekülünde $r = 0$ olduğundan $\mu = 0$ dır. μ elektrik moment vektörel bir nicelik olup yönü Şekil 2.4 de gösterildiği gibi $+q$ 'dan $-q$ 'ya doğrudur.

Maddenin μ momentinin deneysel olarak belirlenmesiyle o maddenin moleküler yapısı hakkında bir fikir edinilebilir. Örneğin, simetrik olarak düzenlenmiş, yani simetri eksenine sahip moleküllerin polar olmadığı söylenebilir. Çünkü, bu durumda molekülün pozitif ve negatif yüklerinin yük merkezleriyle molekülün simetri eksenini çakışmaktadır. Diğer taraftan simetrik olmayan moleküller daima polardır.

Böylece tek atomlu durumlarda (He, Ne, Ar, Kr, Xe) ve iki özdeş atomun homopolar bağlandığı moleküller (H_2 , N_2 , Cl_2) polar değil iken, KI gibi iyonik bileşik moleküller çok büyük dipol momente sahiptirler. KI için $\mu = 23 \times 10^{-30}$ C.m. olup K^+ 'dan I^- 'ye doğru yönelmiştir.

Molekülün dipol momente sahip olup olmadığı onun kimyasal formülüne bakılarak kestirilemez. Örneğin, karbondioksit ve suyun formülleri CO_2 ve H_2O olarak yazılır ve bunların birbirine benzer olduğu söylenebilir. Oysa Şekil 2.5'de gösterildiği gibi CO_2 mo-

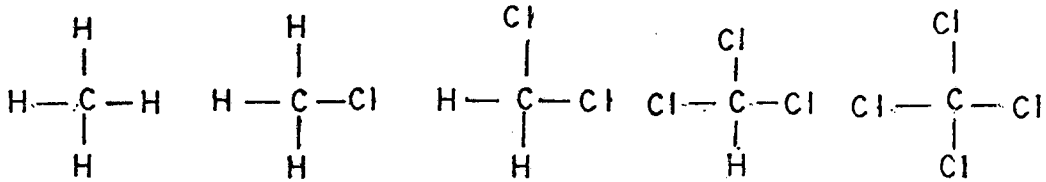


Şekil 2.5. a) CO_2 , b) H_2O moleküllerinin şematik olarak gösterimi.

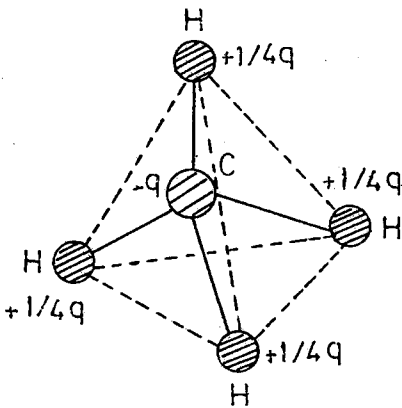
lekülü simetrik yapıya sahip olduğundan polar değildir. Buna karşılık H_2O molekülü ikizkenar üçgen biçiminde olduğundan tam olarak polar özellik gösterir.

Tüm hidrokarbonlar polar değil veya çok zayıf polardır. Bununla birlikte, hidrojen atomunun yerine halojen atomları F, Cl, Br, I veya -OH, -NH₂, NO₂ grupları yerleştirilirse $\mu \neq 0$ olan simetrik olmayan moleküller oluşur.

En basit hidrokarbon olan metanı gözönüne alalım. Metan molekülü Şekil 2.6'da gösterildiği gibi merkezinde bir C atomu, köşelerde H atomu bulunan tetrahedral yapıya sahiptir. Moleküldeki bir H atomuyla Cl atomunu değiştirirsek, metil klorür CH₃Cl, iki tanesiyle değiştirirsek metil klorid CH₂Cl₂, üç tanesiyle yer değiştirirsek kloroform CHCl₃ ve sonunda H atomları bağlanırsa karbontetraklorür CCl₄ elde edilir. Bunların yapısal formülleri sırasıyla,



şeklindedir. Formüllerden metan için simetriden dolayı $\mu = 0$ olduğu görülebilir. CH₃Cl, CH₂Cl₂ ve CHCl₃ molekülleri simetrik değildir ve μ değerleri sırasıyla 6.2×10^{-30} , 5.19×10^{-30} ve 3.8×10^{-30} C.m.'dir. CCl₄ molekülünde simetrik olduğundan $\mu = 0$ 'dır (Tareev, 1975).



Şekil 2.6. Metan (CH₄) molekülü

tiyle söz konusu parçacığa etkiyen \vec{E} elektrik alan şiddeti arasında,

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad (2.15)$$

şeklinde bir bağıntı sözkonusudur. Burada, α parçacığının kutuplanabilirliği olan orantı katsayısıdır. SI birim sisteminde $F.m^2$, CGS birim sisteminde cm^3 'dür.

2.1.3. Elektronik kutuplanma

Elektronik kutuplanma atom çekirdeklerine göre elektronların yerdeğiştirmesi olarak tanımlanır. Bu tür bir kutuplanma bütün

Çizelge 2.1. Normal basınç ve sıcaklık altında polar olmayan dielektrikler için ışığın kırılma indisi n_k , n_k^2 ile ϵ_r değerleri (Tareev, 1975).

Dielektrik	Faz	n_k	n_k^2	ϵ_r
Parafin	Katı	1.44	2.10	2.2
Polistren		1.55	2.40	2.6
Kükürt		1.92	3.69	3.8
Elmas		2.40	5.76	5.7
Karbontetra- klorür, CCl_4	Sıvı	1.46	2.13	2.24
Benzen, C_6H_6		1.50	2.25	2.28
Toluen, C_7H_8		1.50	2.25	2.39
Transformatör yağı		1.50	2.25	2.25
Hidrojen, H_2	Gaz	1.00014	1.00028	1.00027
Oksijen, O_2		1.00027	1.00054	1.00055
Azot, N_2		1.00030	1.00060	1.00060
Etil, C_2H_4		1.00065	1.00130	1.00138

atom veya iyonlarda meydana gelir. Bir dielektrik, kutuplanmanın diğer çeşitlerini gösterse de bütün dielektriklerde elektronik kutuplanma gözlenebilir. Bir dış alan mevcut olması durumunda elektronik kutuplanma 10^{-15} s. gibi çok kısa bir zaman aralığında meydana gelir. $n_k = \sqrt{\epsilon_r}$ ifadesine uyan homopolar nötr dielektrikler,

sadece elektronik kutuplanmaya sahiptirler. Katı, sıvı ve gaz hallerindeki polar olmayan dielektrikler için bu durum Çizelge 2.1'de gösterilmiştir.

2.1.4. İyonik kutuplanma

İyonik kutuplanma heteropolar (çok kutuplu) moleküldeki iyonların karşılıklı olarak yerdeğiştirmelerinden kaynaklanır.

Çizelge 2.2. İyonik kristaller için η_k , η_k^2 ve ϵ_r değerleri (Tareev, 1975).

Dielektrik	η_k	η_k^2	ϵ_r
Potasyum klorür, KCl	1.49	2.22	4.8
Sodyum klorür, NaCl	1.54	2.37	6.0
Kalsit, CaCO_3	1.66	2.78	6.1
Kurşunoksit, PbO	2.60	6.76	26.0
Rutil, TiO_2	2.70	7.30	114.0

İyonik kutuplanma 10^{-13} - 10^{-12} s. gibi çok kısa bir zaman aralığında meydana gelir. Bu süre elektronik kutuplanma süresinden daha da kısadır. İyonik kutuplanma gözlenen maddelerde $\epsilon_r > \eta_k^2$ ifadesi geçerlidir. Çizelge 2.2'de bazı dielektrik maddeler için bu durumun doğruluğu görülebilir.

2.1.5. Dipol kutuplanması

Polar dielektrikler dipol veya yönelme kutuplanması yapma eğilimindedirler. Bu tür kutuplanmanın esası Debye tarafından açıklanmıştır. Dipol kutuplanması elektrik alan etkisiyle moleküllerin ısıl hareketlerinin düzenlenişinden ortaya çıkar. Dipol kutuplanması yalnızca amorf viskoz maddelerde, sıvılarda ve gazlarda açık bir şekilde ortaya çıkar. Kristal maddelerde dipoller erime sıcaklığının altındaki bir sıcaklıkta yönelemezler ve dipol kutuplanması bu tür maddelerde meydana gelmez. Ancak herşeye rağmen

men moleküllerin gevşek olarak bağlı olduğu kristallerde dipol kutuplanması oluşabilir. Bu olaya en iyi örnek buzlu sudur (Omar, 1975).

Bir dielektrikte polar/moleküllerin $\sum p$ momenti, gerilimin kesilmesinden itibaren t süresi içinde üstel şekilde azalarak,

$$\sum p = \sum p_0 \exp(-t/\tau) \quad (2.16)$$

değerine düşer. Burada τ , oluşan momentin eski durumuna dönmesine kadar geçen süre olup durulma zamanı adını alır.

Çizelge 2.3. Polar sıvı ve gazlar için η_k , η_k^2 ve ϵ_r değerleri (Tareev, 1975).

Dielektrik	Faz	η_k	η_k^2	ϵ_r
Kloroform, CHCl ₃	Sıvı	1.446	2.09	5.1
Klorobenzen, C ₆ H ₅ Cl		1.523	2.33	10.3
Nitrobenzen, C ₆ H ₅ -NO ₂		1.553	2.41	36.5
Su, H ₂ O		1.333	1.78	81.0
Amonyak, NH ₃	Gaz	1.00018	1.00037	1.00072
Hidroklorür, HCl		1.00045	1.00090	1.00300

η_v viskoziteli sıvı bir ortamda dönen bir molekülün küresel Debye modeli için durulma zamanı,

$$\tau = 4\pi \frac{\eta_v r^3}{kT}$$

$$\tau = \frac{3\eta_v V}{kT}$$

(2.17)

şeklindedir, burada r molekül yarıçapı, V molekül hacmi, k Boltzmann sabiti ve T mutlak sıcaklıktır.

Örneğin, normal sıcaklıkta r yarıçapı 2×10^{-10} m, η_v değeri 1 mNs/m^2 olan su için $\tau = 10^{-11}$ s.'dir. Bu çok küçük bir değerdir, fakat büyük viskoziteli ve büyük moleküllü maddeler için τ 'nin çok büyük olacağı beklenir.

Çizelge 2.3'de görülebileceği gibi dipol kutuplanmaya sahip maddelerde, iyonik yerdeğiştirmeye neden olan polar maddelerdeki gibi dielektrik sabiti ışığın kırılma indisinin karesinden daha büyüktür.

2.2. Değişken Bir Elektrik Alanda Dielektriğin

Davranışı

2.2.1. Kutuplanma ve deplasman

Kondansatör levhaları arasında zamana bağlı $E(t)$ elektrik alan şiddeti, dielektrikte zamana bağlı $P(t)$ kutuplanmasını oluşturur. Kutuplanmanın zamana bağımlılığı kutuplanmaya uğrayan yüklerin yerdeğiştirmesinin zamanla değiştiğini göstermektedir. $P(t)$ ile $E(t)$ arasındaki bağıntı Eş.(2.5)'e benzer olarak,

$$P(t) = \chi E(t) \quad (2.18)$$

şeklindedir, burada χ süseptibilitesi sıcaklığa, basınca ve dielektriğin bileşimine bağlı olup zamana bağlı değildir.

$D(t)$ ile $E(t)$ arasındaki bağıntı,

$$D(t) = \epsilon E(t) \quad (2.19)$$

olup, burada;

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e \quad (2.20)$$

dir. Sinüzoidal elektrik alan,

$$E(t) = E_0 \cos \omega t \quad (2.21)$$

şeklinde olup, E 'nin zamanla değişimi Eş.(2.19)'dan da görülebileceği gibi D 'nin de zamanla değiştiğini, bir başka deyişle periyodik olduğunu gösterir. Ancak $D(t)$ ile $E(t)$ arasında ϕ kadar bir faz

farkı mevcuttur,

$$D(t) = D_0 \cos(\omega t - \phi) \quad (2.22)$$

burada D_0 sinüzoidal değişimin genliğidir. Sinüzoidal elektrik alanının frekansı değiştiğinde ϕ faz farkıda değişecektir. Frekans son derece küçük olduğunda ϕ sıfır olacaktır.

Sinüzoidal elektrik deplasman iki kısma ayrılır, bunlardan biri elektrik alanla aynı faza, diğeri ise $\pi/2$ faz farkına sahiptir,

$$D(t) = D_0 \cos \phi \cos \omega t + D_0 \sin \phi \sin \omega t \quad (2.23)$$

Bu eşitlik,

$$\cos \phi(\omega) = \epsilon'(\omega) E_0 / D_0 \quad (2.24)$$

$$\sin \phi(\omega) = \epsilon''(\omega) E_0 / D_0 \quad (2.25)$$

gösterimleriyle tekrar yazılırsa,

$$D(t) = \epsilon'(\omega) E_0 \cos \omega t + \epsilon''(\omega) E_0 \sin \omega t \quad (2.26)$$

şekline dönüşür. Bu eşitlikte $D(t)$ ile $E(t)$ arasındaki bağıntı ϵ' ve ϵ'' , D_0 ve Eş.(2.22)'de kullanılan ϕ faz farkı nicelikleriyle tanımlanmıştır.

Statik durumda ise frekans sıfırdır ve dolayısıyla Eş.(2.26),

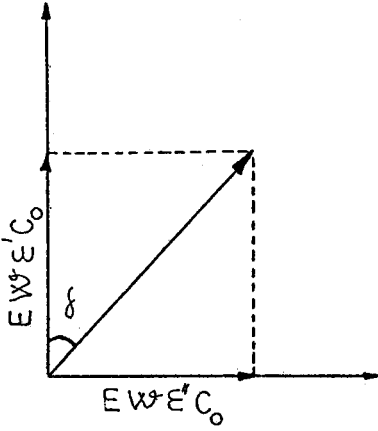
$$D(t) = \epsilon'(0) E_0 \quad (2.27)$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu bağıntı Eş.(2.19) ile karşılaştırılırsa, $\epsilon'(0)$ 'ın ϵ' 'na eşit olduğu görülebilir. Yukarıda bahsedilen $\epsilon'(\omega)$ ve $\epsilon''(\omega)$ ifadeleri sırasıyla frekansa bağlı dielektrik sabiti ve dielektrik kayıptır. Frekansın sonsuza yaklaşması durumunda $\epsilon'(\omega) \rightarrow \epsilon_\infty$ olur (Böttcher and Bordewijk, 1978; Chelkowski, 1980).

2.2.2. Kompleks dielektrik sabiti ve dielektrik kayıp açısı

C_0 sızgallı ideal bir kondansatör, ani bir kutuplanmaya uğradığında yüklenme akımı veya kapasitif akım, $E \omega \epsilon' C_0$ alternatif potansiyelle 90° 'lik bir faz farkı yapar (Moody and Thomas, 1971).

Kutuplanma dolayısıyla enerji kayıplarının mevcut olduğu bir kondansatörde, Ohm kanununa göre, akım potansiyelle aynı fazda olan $E \omega \epsilon'' C_0$ bileşenine sahiptir. Bu kayıp akım absorpsiyonla ölçülebilir ve alan enerjisinin kaybı olarak da bilinir. Vektörel olarak toplam akım, yüklenme akımıyla kayıp akımın toplamıdır. Yüklenme şiddeti vektörü ile toplam akım şiddeti vektörü arasındaki açı δ ile gösterilir ve kayıp açısı olarak isimlendirilir. Buna göre,



Şekil 2.7. Kayıp açısının gösterimi.

$$\tan \delta = \frac{\text{kayıp akımı}}{\text{yüklenme akımı}}$$

$$\tan \delta = \frac{E \omega \epsilon'' C_0}{E \omega \epsilon' C_0}$$

$$\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \quad (2.28)$$

burada ϵ' ve ϵ'' daha öncedinde bahsedildiği gibi sırasıyla gerçel dielektrik sabiti yada sadece dielektrik sabiti ve sanal dielektrik sabitidir.

Kompleks dielektrik sabiti ise,

$$\epsilon_k = \epsilon' - i\epsilon'' \quad (2.29)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Burada ϵ' ve ϵ'' ifadeleri Debye tarafından ω frekansı ve τ durulma zamanı cinsinden,

$$\epsilon' = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (2.30)$$

$$\epsilon'' = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_\infty) \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (2.31)$$

şeklinde bulunmuştur (Martinelli et al, 1985; Bergman, 1981; Delsignore et al, 1983; Smyth, 1955).

3. DIELEKTRİK SABİTİ İLE İLGİLİ TEORİLER

3.1. Polar Dipollerle İlgili Teoriler

3.1.1. Debye teorisi

Debye, iç alana ait Lorentz eşitliğinden yararlanarak, bir dielektriğin herhangi bir noktasında tek bir moleküle etki eden E elektrik alan şiddetinin,

a) Kondansatör levhaları ve bu levhalara bitişik dielektrik yüzeyleri üzerindeki yüklerden dolayı oluşan E_1 alanı,

b) Moleküllü bir küreye benzeterek küre yüzeyi üzerindeki kutuplanma yüklerinden dolayı oluşan E_2 alanı ve

c) Küresel bölgeye komşu moleküllerden dolayı oluşan E_3 alanının toplamı olduğunu kabul ederek Debye eşitliği olarak bilinen,

$$(\epsilon - 1)M / (\epsilon + 2) \rho_m = 4\pi N (\alpha \cdot \mu^2 / 3kT) / 3\epsilon_0 \quad (3.1)$$

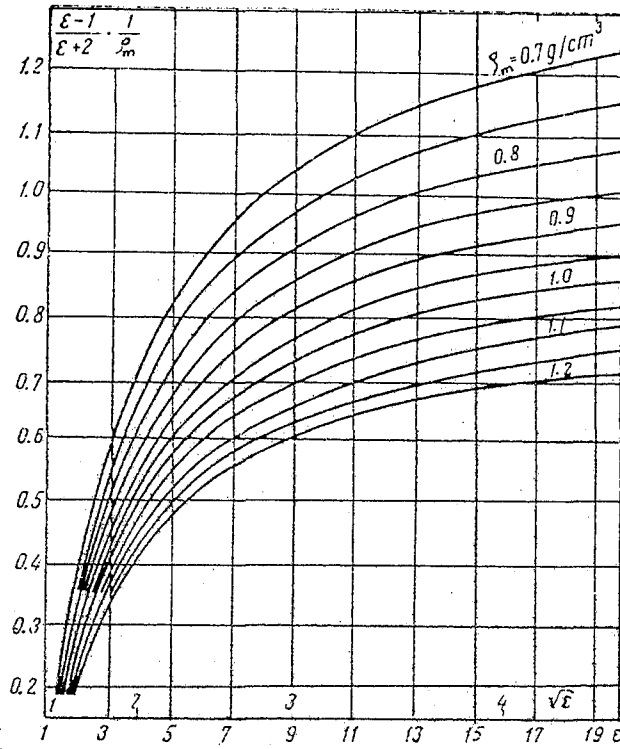
eşitliği ortaya çıkarılmıştır (Bkz. EK 1). Burada M, maddenin moleküler ağırlığı, ρ_m maddenin yoğunluğu, N Avogadro sayısı ve k Boltzmann sabitidir (Hill et al, 1969).

Debye eşitliği iki varsayıma dayanır: Birincisi dipoller üzerine komşulardan dolayı etkiyen kuvvetlerin etkili olmaması, ikincisi yerel alanın E_3 bileşeninin sıfır olmasıdır. İlk varsayım sıvılar için eşitliğin geçerliliğini sınırlar (kristal materyaller için geçerlidir), ikinci varsayım ise, gaz fazından başka polar olmayan çözücülerdeki polar moleküllü sulu çözeltilerinde geçerlidir.

Debye eşitliğinden hareketle aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir:

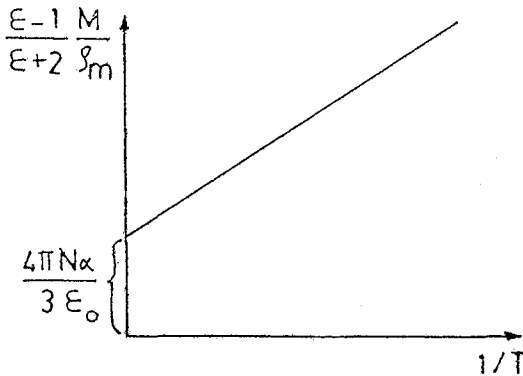
i) Polar olmayan bir materyal için molar kutuplanabilirlik $[(\epsilon - 1)M / (\epsilon + 2) \rho_m]$ sıcaklık ve basınca bağlı bir sabittir (Minkin et al, 1970). Böyle bir maddenin yoğunluğundaki bir artma dielektrik sabitinin artmasına yolaçacaktır (Bkz. Şekil 3.1).

ii) Polar bir madde için molar kutuplanabilirlik sıcaklığın yükselmesiyle azalır, çünkü sıcaklığın artışı kutuplanmayı azaltır.



Şekil 3.1. $(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2) \rho_m \text{ cm}^3/\text{gr}$ kutuplanmasının çeşitli $\rho_m \text{ gr/cm}^3$ yoğunluklarda ϵ ve $\sqrt{\epsilon}$ ifadelerine göre değişimi (Tareev, 1975).

Molar kutuplanabilirlik ile $1/T$ arasındaki değişim Şekil 3.2'de gösterildiği gibi doğru orantılıdır.



Şekil 3.2. Molar kutuplanmanın $1/T$ 'ye göre değişimi (Tareev, 1975).

iii) Eş.(3.1)'in sol tarafı ϵ 'nun sonsuza yaklaşmasıyla M/ρ_m 'ya yaklaşır ve M/ρ_m oranını geçemez. α , $\mu^2/3kT$ 'nin yanında ihmal edildiğinde,

$$T = \frac{4\pi N \rho_m \mu^2}{9 M k \epsilon_0} \quad (3.2)$$

sonucu bulunur. Bu sıcaklığın altındaki sıcaklıklarda kutuplanma büyük olur ve oldukça büyük iç alanlar mev-

cuttur. Moleküller, bir dış elektrik alanın olmaması durumunda dipolları birbirine paralel olacak şekilde kendi kendilerine dizilirler ve materyal, ferromagnetizme benzerliğinden dolayı ferroelektrik olarak isimlendirilir.

Zamanla değişen alanlar durumunda dielektrik sabitinin frekans bağımlılığı Debye tarafından,

$$\epsilon_k = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{1 + i\omega\tau} \quad (3.3)$$

olarak verilir. Burada daha önceden de bahsedildiği gibi ϵ_∞ , frekansın sonsuza gitmesi halindeki dielektrik sabiti, ϵ_0 frekansın sıfır olmasına karşılık gelen dielektrik sabiti ve τ durulma zamanıdır. ϵ_k 'ya ait gerçel ve sanal kısımlar,

$$\epsilon' = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (3.4)$$

$$\epsilon'' = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_\infty)\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (3.5)$$

şeklindedir.

ϵ' ve ϵ'' birbirleri cinsinden ifade edilirse,

$$\left(\epsilon' - \frac{\epsilon_0 + \epsilon_\infty}{2}\right)^2 + (\epsilon'')^2 = \frac{1}{4}(\epsilon_0 - \epsilon_\infty)^2 \quad (3.6)$$

şeklinde bir daire denklemini elde edilir. Bu yarı-dairenin herhangi bir noktasına ϵ_∞

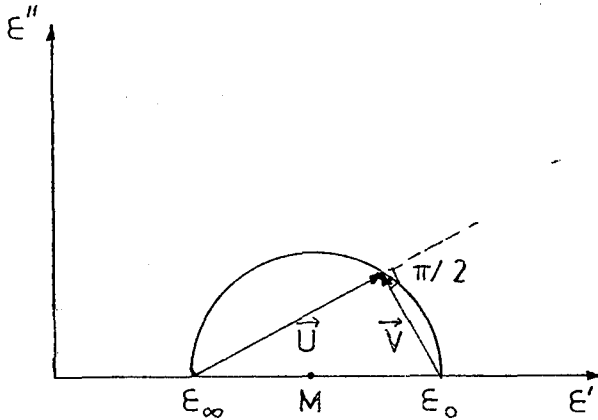
ve ϵ_0 'a birleştirilen $|\vec{U}|$ ve $|\vec{V}|$ nin farkı sabit olup,

$$|\vec{U} - \vec{V}| = \epsilon_0 - \epsilon_\infty$$

dur. Şekil 3.3'den de görülebileceği gibi, ϵ' üzerindeki izdüşümler,

$$\begin{aligned} |\vec{U}'| &= \epsilon' - \epsilon_\infty \\ |\vec{V}'| &= \epsilon_0 - \epsilon' \end{aligned}$$

dır. Bu vektörlerin skaler çarpımlarının



Şekil 3.3. Sanal dielektrik katsayısının sanal kısmının gerçel kısmına göre çiziminden bulunan Debye yarı-dairesi (Orhun, 1981).

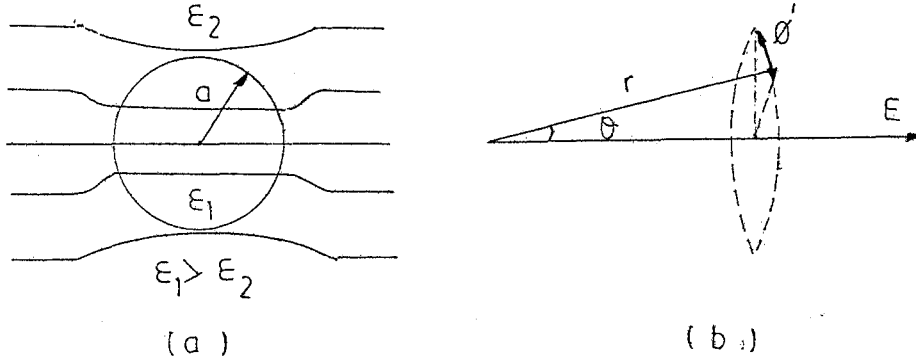
sıfır olması $\epsilon_0 - \epsilon_\infty$ uzunluklu doğru parçasınının her zaman $\pi/2$ lik bir açıyla görülebileceğini gösterir (Orhun, 1981; Hill et al, 1969).

3.1.2. Onsager teorisi

Onsager teorisi bir moleküldeki yerel alanın hesaplanması ile ilgilidir. Molekül, ϵ_2 statik dielektrik sabitli sürekli bir ortamda küresel bir kovuğun merkezindedir. a yarıçaplı bu kovuk, N Avogadro sayısı olmak üzere,

$$4\pi N a^3 / 3 = 1$$

şeklinde tanımlanmıştır, küresel kovukların hacimleri toplamı materalin toplam hacmine eşittir.



Şekil 3.4. a) ϵ_2 statik dielektrik sabitli bir ortama yerleştirilmiş ϵ_1 statik dielektrik sabitli a yarıçaplı küre, b) Bu sisteme E alanının uygulanması durumu.

İki parçadan oluşan bir kovuktaki iç alan:

- i) \vec{E}_G kovuk alanı, uygulanan dış alan tarafından boş kovukta oluşturulur,
- ii) \vec{E}_R tepki alanı, kovuk çevresindeki dipoller tarafından oluşturulan kutuplanma dolayısıyla kovukta meydana gelir.

Şekil 3.4'de bir E elektrik alanındaki ϵ_1 dielektrik sabitli küre gösterilmektedir. Onsager \vec{E}_G ve \vec{E}_R alanlarıyla birlikte kürenin içinde ve dışında oluşan U_1 ve U_2 potansiyellerini hesaplayarak

statik dielektrik sabiti için kendi adıyla anılan eşitliği (Bkz. EK 2),

$$\frac{(\epsilon - \eta_k^2)(2\epsilon + \eta_k^2)}{\epsilon(\eta_k^2 + 2)^2} = \frac{4\pi N \mu^2}{9kT \epsilon_0} \quad (3.7)$$

bulmuştur (Minkin et al, 1970).

3.1.3. Onsager ve Debye eşitliklerinin karşılaştırılması

Debye eşitliğinin bir başka yazım şekli,

$$4\pi P = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E$$

$$4\pi P = 4\pi N \left(\alpha + \frac{\mu^2}{3kT} \right) E_T \quad (3.8)$$

olup burada,

$$E_T = (\epsilon + 2) E / 3 \quad (3.9)$$

olarak verilir.

Onsager eşitliği ise,

$$4\pi P = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E$$

$$4\pi P = 4\pi N \left(\alpha + A \mu^2 / 3kT \right) A_g E \quad (3.10)$$

şeklinde olup,

$$g = 3\epsilon / (2\epsilon + 1) \quad (3.11)$$

dir. A sabiti,

$$A = (2\epsilon + 1)(\eta_k^2 + 2) / 3(2\epsilon + \eta_k^2) \quad (3.12)$$

olarak verilir.

Matematiksel olarak ϵ dielektrik sabitinin artmasıyla E alanı da artacaktır, bunun yanında Onsager kovuk alanının etkisinden dolayı A çarpanının $(\eta_k^2 + 2)/3$ 'ü aşmaması nedeniyle, E_T en çok $3\epsilon/2$ değerini alabilir.

Onsager teorisi, Debye teorisini sınırlayan E_3 alanının sıfır olma şartını gözönüne almaz, fakat diğer yaklaşımları olduğu gibi kabul eder (Böttcher, 1973). Bir başka deyişle moleküller üzerinde komşularından dolayı oluşan kuvvetler yoktur, böylece di-

pol momentler Langevin yasasına uyan bir dağılım gösterirler.

3.2. Cole Teorisi

Cole teorisi numunenin μ sürekli momentli, ν hacimli ve N_i tane molekülden oluştuğunu kabul eder,

$$\mu_i \sum p = 0$$

burada μ_i , i'inci moleküle ait sürekli moment, $\sum p$ numunede oluşan toplam momenttir ve genellikle bir dış E_0 alanı tarafından oluşturulur,

$$\langle p \cdot e' \rangle = N_i E_0 \cdot N_i \langle \mu_i \cdot \mu \rangle E_0 / 3kT$$

$$\langle p \cdot e' \rangle = N_i E_0 + p_i E_0 / 3kT \quad (3.13)$$

Eşitliğin sağ tarafında bulunan ortalamadaki "0" terimi, ortalamanın sıfır alanda tayin edildiğini gösterir,

$$p_i = N_i \langle \mu_i \cdot \bar{p}_i \rangle$$

$$p_i = N_i \frac{9E}{(2E+1)(E+2)} \langle \mu_i \cdot \bar{p}_i \rangle \quad (3.14)$$

μ_i sabit olduğunda \bar{p}_i kürenin tümünün ortalama momentidir.

Molekülün momentindeki artışı hesaplamak için Onsager'in kullandığı model,

$$\bar{\mu}_i = \frac{(2E+1)(\eta_k^2+2)}{3(2E+1)(E+2)} \mu_i \quad (3.15)$$

sonucunu verir. Böylece genel olarak,

$$p_i = \frac{9N_i E}{(2E+1)(E+2)} \frac{(\eta_k^2+2)(2E+1)}{3(2+\eta_k^2)} g \mu^2 \quad (3.16)$$

şeklinde verilir, burada g , daha öncede bahsedildiği gibi korelasyon parametresidir.

$\langle p \cdot e' \rangle$ eşitliğindeki ilk terim η_k^2 cinsinden ifade edilirse,

$$\frac{\eta_k^2 - 1}{\eta_k^2 + 2} = \frac{4\pi N_i \alpha}{3\nu E_0} \quad (3.17)$$

statik dielektrik sabiti,

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{\eta_k^2 - 1}{\eta_k^2 + 2} + \frac{4\pi N_i}{3V\epsilon_0} \frac{3\epsilon(\eta_k^2 + 2)g\mu^2}{(\epsilon + 2)(2\epsilon + \eta_k^2)3kT} \quad (3.18)$$

olarak elde edilir (Minkin et al, 1970).

Frekansa bağımlı dielektrik sabiti Cole teorisine göre,

$$\epsilon_k = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{1 + (i\omega\tau)^{1-\alpha}} \quad (3.19)$$

şeklinde olup eşitlikteki büyüklüklerin anlamları Debye eşitliğindeki gibidir. Bu eşitliğin, Debye eşitliğinden tek farkı, paydadaki sanal terimin üstüne gelen $(1 - \alpha)$ 'dir. α terimi Cole-Cole parametresi olarak isimlendirilir.

Eş.(3.3) ve Eş.(3.19)'dan, $x = \log(\omega\tau)$ olmak üzere,

$$\epsilon' - \epsilon_\infty = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_\infty)[1 + (\omega\tau)^{1-\alpha} \sin(1/2)\alpha\pi]}{1 + 2(\omega\tau)^{1-\alpha} \sin(1/2)\alpha\pi + (\omega\tau)^{2(1-\alpha)}}$$

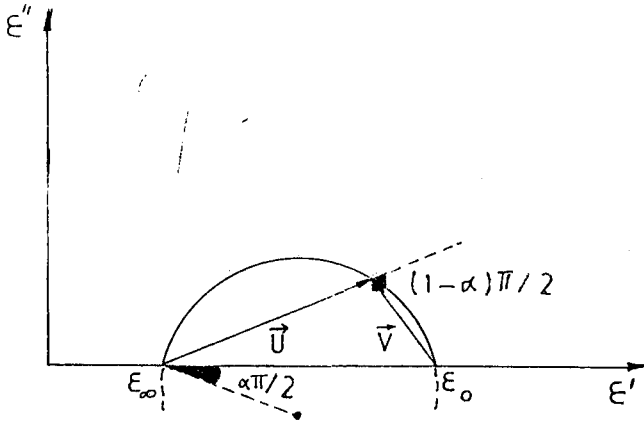
$$\epsilon' - \epsilon_\infty = \frac{1}{2}(\epsilon_0 - \epsilon_\infty) \left[1 - \frac{\sinh(1-\alpha)}{\cos(1-\alpha)x + \cos(1/2)\alpha\pi} \right] \quad (3.20)$$

$$\epsilon'' = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_\infty)(\omega\tau)^{1-\alpha} \cos(1/2)\alpha\pi}{1 + 2(\omega\tau)^{1-\alpha} \sin(1/2)\alpha\pi + (\omega\tau)^{2(1-\alpha)}}$$

$$\epsilon'' = \frac{1/2(\epsilon_0 - \epsilon_\infty) \cos(1/2)\alpha\pi}{\cosh(1-\alpha)x + \sin(1/2)\alpha\pi} \quad (3.21)$$

elde edilir. ϵ' ve ϵ'' ifadeleri birbirleri cinsinden ifade edilirse,

$$\left[\frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{2} \sec(1/2)\alpha\pi \right]^2 = \left[\epsilon' - \frac{\epsilon_0 + \epsilon_\infty}{2} \right]^2 + \left[\epsilon'' + \left(\frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{2} \right) \tan(1/2)\alpha\pi \right]^2 \quad (3.22)$$



Şekil 3.5. Sanal dielektrik katsayısının sanal kısmının, gerçel kısma göre çizimiyle bulunan Cole-Cole daire yayı (Orhun, 1981).

dir. \vec{U} ve \vec{V} 'nin arasındaki açı daima $(1 + \alpha) \pi/2$ kalır.

Cole-Cole parametresi, ϵ_∞ 'dan geçen yarıçap doğrultusunun ϵ' eksenine yaptığı açı olan $\alpha \pi/2$ 'nin bilinmesiyle belirlenebilir (Orhun, 1981).

3.3. Polar Olmayan Dipollerle İlgili İstatistiksel Teoriler

Debye ve Onsager teorilerinin herbiri yarı-istatistiksel olarak isimlendirilebilir. İstatistiksel teoriler, dipolar kutuplanabilirlik probleminin ilk kısmını çözmeye yönelik istatistiksel tartışmada kullanılırlar ve yerel alan ifadelerini bulmak için özel bir dielektrik model üzerine kurulurlar. Kirkwood ve daha sonra Fröhlich, statik dielektrik sabiti için belli bir ifade bulmaya çalışmışlar, tamamen istatistiksel metodlar kullanmışlar ve yerel alanları ihmal etmişlerdir (Beine et al, 1986).

3.3.1. Kirkwood teorisi

Kirkwood, bir \mathcal{V} küresel hacmindeki n-tane dipolden oluşan p dipol momentli bir materyalin E_0 gibi sabit bir değere sahip düzgün bir dış alana konulduğunu kabul eder. Numunenin iç tarafındaki E_1 alanı $3E_0/(\epsilon + 2)$ 'ye eşittir. Dipollerin konumları ve yö-

olmak üzere bir daire denklemi elde edilir.

Şekil 3.5

de görülen yayın herhangi bir noktasını ϵ_0 ve ϵ_∞ a birleştiren $|\vec{U}|$ ve $|\vec{V}|$ 'nin farkları sabit olup,

$$|\vec{U} - \vec{V}| = \epsilon_0 - \epsilon_\infty$$

ve ϵ' eksenindeki izdüşümleri,

$$|\vec{U}'| = \epsilon' - \epsilon_\infty; |\vec{V}'| = \epsilon_0 - \epsilon'$$

nelmeleri x ve $x+dx$ arasında istatistiksel teoriye göre bulunması olasılığı,

$$\int p(x, E_0) dx = \frac{\exp[-U(x, E_0)/kT]}{\int \exp[-U(x, E_0)/kT] dx} \quad (3.23)$$

şeklindedir ve integral, sistemin mümkün bütün değerleri üzerinden alınır.

Uygulanan ϵ alanı yönünde i 'inci moleküldeki momentin ortalama bileşenini bulmak için, sistemin bütün mümkün değerleri üzerinden ortalama alınırsa,

$$\langle \mu_i \cdot e' \rangle = \frac{\int (\mu_i \cdot e') \exp[-U(x, E_0)/kT] dx}{\int \exp[-U(x, E_0)/kT] dx} \quad (3.24)$$

olarak ifade edilir.

$\langle \mu_i \cdot e' \rangle$ değeri,

$$\begin{aligned} \langle \mu_i \cdot e' \rangle &= \langle \mu \cdot \bar{\mu} \rangle E_0 / 3kT \\ \langle \mu_i \cdot e' \rangle &= \frac{9E}{(\epsilon_0 + 2)(2\epsilon + 1)} \frac{g\mu^2}{3kT} E_0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

sonucundan hareketle, Kirkwood eşitliği,

$$\frac{(\epsilon - 1)(2\epsilon + 1)}{3\epsilon} = \frac{4\pi N}{V E_0} \frac{g\mu^2}{3kT} \quad (3.26)$$

olarak bulunur (Bkz. EK 3).

3.3.2. Fröhlich teorisi

Fröhlich teorisinde, Debye teorisine benzer şekilde, sürekli bir ortama sahip oldukça büyük bir numunenin içinde makroskopik boyutlu bir küresel bölge alınır. Bu küresel bölge \vec{r}_1 deplasman vektörlü e_1 elementer yüklü parçacıkları verir. $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_1)$ deplasman vektörleri kısaca x ile gösterilir. E alanı uygulandığında x konumunda bulunan yüklerin potansiyel enerjisi ise $U(x, E)$ ile gösterilir.

Küresel bölge x' in fonksiyonu olarak $p(x)$ dipol momentine sahipse, alan yönündeki ortalama moment,

$$\langle \mu \cdot e' \rangle = \frac{\int (p(x) \cdot e') \exp[-U(x,E)/kT] dx}{\int \exp[-U(x,E)/kT] dx} \quad (3.27)$$

şeklindedir.

Onsager kovuk alanı,

$$E_G = \frac{3E}{2E+1} \quad (3.28)$$

olmak üzere $\langle \mu \cdot e' \rangle$ ifadesi,

$$\langle \mu \cdot e' \rangle = \frac{E_G}{3kT} \langle p^2 \rangle \quad (3.29)$$

şekline dönüşecektir (Minkin et al, 1970). Buradan bazı yaklaşımlarla polar olmayan dipoller için Fröhlich eşitliği,

$$\frac{(\epsilon-1)(2\epsilon+1)}{3\epsilon} = \frac{4\pi N_i}{V\epsilon_0} \frac{\langle p \cdot \bar{p} \rangle}{3kT} \quad (3.30)$$

olarak bulunur (Bkz. EK 4).

4. KARIŞIM TEORİLERİ VE DİELEKTRİK SABİTLERİ

4.1. Bileşenleri Paralel Konumda Bulunan Karışımlar

Bu tip karışımları incelemek için, öncelikle birbirlerine göre paralel konumda bulunan iki homojen dielektrikten oluşan karışımı ele alalım.

Karışımın ϵ^* olarak göstereceğimiz dielektrik sabitini bir kondansatör modeliyle hesaplamak alışıl gelmiş yöntemlerden biridir. Kesim 2.1'de bahsedildiği gibi, birbirlerinden h kadar uzakta bulunan S yüzölçümlü levhalardan oluşan kondansatörün içindeki alan,

$$E = U / h \quad (4.1)$$

şeklindedir. Böyle bir kondansatörün içinde ϵ_r dielektrik sabitli bir madde bulunması halinde kondansatörün sığası,

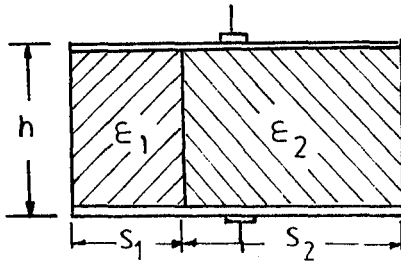
$$C = \epsilon S / h \quad (4.2)$$

olarak verilir. Burada ϵ mutlak dielektrik sabitidir ve boşluğun

mutlak dielektrik sabitiyle bağıl dielektrik sabitinin çarpımı olarak,

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (4.3)$$

şeklinde verilir.



Şekil 4.1. İki dielektrik maddenin paralel bağlı durumundaki kondansatör.

Şekil 4.1'de gösterildiği gibi, ϵ_1 ve ϵ_2 dielektrik sabitli iki homojen dielektrikten oluşan sistemin sığası,

$$C^* = C_1 + C_2 \quad (4.4)$$

olarak ifade edilebilir. Eğer, eş.(4.2)'ye benzer şekilde,

$$C_1 = \epsilon_1 \epsilon_0 S_1 / h \quad ; \quad C_2 = \epsilon_2 \epsilon_0 S_2 / h \quad (4.5)$$

oldukları kabul edilirse, Eş.(4.4) ve Eş.(4.5)'den;

$$C^* = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 S_1}{h} + \frac{\epsilon_2 \epsilon_0 S_2}{h} \quad (4.6)$$

bulunur. Burada C_1 ve C_2 ifadeleri sırasıyla ϵ_1 ve ϵ_2 dielektrik sabitli maddelerin kondansatör sığaları, S_1 ve S_2 yüzeysel kesirler, h dielektrik kalınlığı veya levhalar arasındaki mesafedir.

Eş.(4.6)'daki benzer terimler gruplandığında,

$$C^* = \epsilon_0 (\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2) / h \quad (4.7)$$

olacaktır. Eşitliğin sağ tarafı $(S_1 + S_2) / (S_1 + S_2)$ ifadesiyle çarpılırsa,

$$C^* = \frac{\epsilon}{h} (\epsilon_1 \frac{S_1}{S_1 + S_2} + \epsilon_2 \frac{S_2}{S_1 + S_2}) (S_1 + S_2) \quad (4.8)$$

şekline dönüşecektir. Eş.(4.8) bir başka şekilde,

$$C^* = \frac{\epsilon^* \epsilon_0 (S_1 + S_2)}{h} \quad (4.9)$$

ifade edilirse, burada ϵ^* ;

$$\epsilon^* = \epsilon_1 \frac{S_1}{S_1 + S_2} + \epsilon_2 \frac{S_2}{S_1 + S_2} \quad (4.10)$$

olacaktır. Bundan başka,

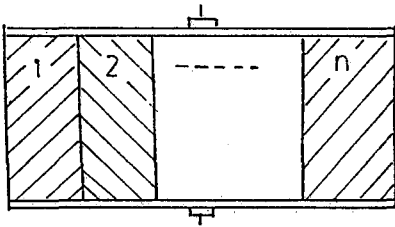
$$y_1 = \frac{S_1}{S_1 + S_2} \quad (4.11)$$

$$y_2 = \frac{S_2}{S_1 + S_2}$$

y_1 ve y_2 dielektrik karışımın birinci ve ikinci bileşenlerinin hacimsel kesirleri olmak üzere, karışımın ϵ^* dielektrik sabiti,

$$\epsilon^* = y_1 \epsilon_1 + y_2 \epsilon_2 \quad (4.12)$$

şeklinde yazılabilir. Eş.(4.12)'den de görülebileceği gibi, karışımı oluşturan bileşenlerin homojen olmalarına karşılık karışım homojen değildir. Eş.(4.11)'den de y_1 ve y_2 özhacimlerinin toplamı-



Şekil 4.2. n tane farklı bileşenin paralel bağlı durumda olduğunu gösteren kondansatör modeli.

nın ise,

$$y_1 + y_2 = 1 \quad (4.13)$$

olduğu görülebilir.

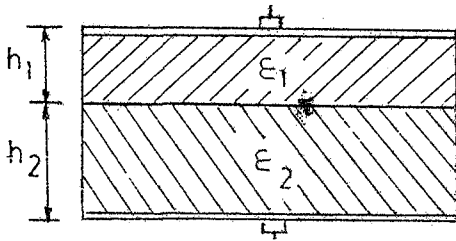
Sonuç olarak, n tane farklı dielektrik maddeden oluşmuş sistem için genel karışım ifadesi,

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n y_i \epsilon_i \quad (4.14)$$

şeklinde olacaktır (Tareev, 1975; Bergman, 1978).

4.2. Bileşenleri Seri Konumda Bulunan Karışımlar

Önceki kesimde açıklandığı gibi paralel bağlı kondansatör modeline benzer şekilde seri bağlı kondansatör modelini ele alalım.



Şekil 4.3. İki dielektrik madde-
denin seri bağlı
durumdaki kondan-
satör modeli.

Şekil 4.3'de görüldüğü gibi h_1 kalınlıkla S yüzölçümüne sahip ϵ_1 dielektrik sabitli madde ile h_2 kalınlıklı S yüzölçümüne sahip ϵ_2 dielektrik sabitli madde birbirlerine göre seri konumdadırlar. Böyle bir sistemin C^* sığası iki ayrı kondansatörün seri bağlı durumuna benzer şekilde,

$$\frac{1}{C^*} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (4.15)$$

olarak yazılabilir. Bileşenlerin ayrı ayrı sığaları,

$$C_1 = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 S}{h_1} \quad ; \quad C_2 = \frac{\epsilon_2 \epsilon_0 S}{h_2} \quad (4.16)$$

olarak kabul edilip Eş.(4.16)'yı Eş.(4.15)'de yerleştirirsek,

$$\frac{1}{C^*} = \frac{h_1}{\epsilon_1 \epsilon_0 S} + \frac{h_2}{\epsilon_2 \epsilon_0 S} \quad (4.17)$$

eşitliği bulunur. Paydalar eşitlenirse,

$$\frac{1}{C^*} = \frac{\epsilon_2 h_1 + \epsilon_1 h_2}{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_0 S} \quad (4.18)$$

bulunur. Eğer sistemin ϵ^* mutlak dielektrik sabiti cinsinden sı-
ğayı yazarsak,

$$C^* = \frac{\epsilon^* \epsilon_0 S}{h_1 + h_2} \quad (4.19)$$

olur. Eş.(4.18) ve Eş.(4.19)'un karşılaştırılması ile ϵ^* mutlak dielektrik sabitine ait aşağıdaki ifade bulunur:

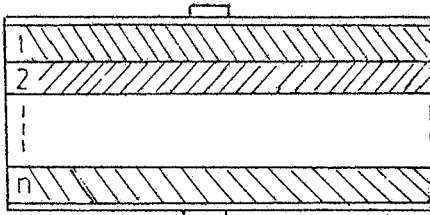
$$\epsilon^* = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_2 h_1 + \epsilon_1 h_2} (h_1 + h_2) \quad (4.20)$$

Bu ifadenin tersi alınır ve düzenlenirse,

$$\frac{1}{\epsilon^*} = \frac{\epsilon_2 h_1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \frac{1}{h_1 + h_2} + \frac{\epsilon_1 h_2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \frac{1}{h_1 + h_2}$$

$$\frac{1}{\epsilon^*} = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{h_1}{h_1 + h_2} + \frac{1}{\epsilon_2} \frac{h_2}{h_1 + h_2} \quad (4.21)$$

ifadesi bulunur. Eşitlikte,



Şekil 4.4. n tane farklı dielektriğin seri bağlı durumda olduğunu gösteren kondansatör modeli.

$$y_1 = \frac{h_1}{h_1 + h_2}$$

$$y_2 = \frac{h_2}{h_1 + h_2} \quad (4.22)$$

y_1 ve y_2 karışımdaki bileşenlerin özhacimleri olmak üzere,

$$\frac{1}{\epsilon^*} = \frac{y_1}{\epsilon_1} + \frac{y_2}{\epsilon_2} \quad (4.23)$$

karişımın dielektrik sabiti ifadesi bulunabilir.

Eş.(4.23), n tane bileşenin olması durumunda genelleştirilmiş bir formda yazılırsa,

$$\frac{1}{\epsilon^*} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\epsilon_i} \quad (4.24)$$

bulunmuş olur.

Bu tip karişıma örnek olarak V.Renne'in ileri sürdüğü ifadeler verilebilir. V.Renne, seri bağılı katı seliloz ve havadan oluşan bir kondansatör modeli oluşturmuştur. Bu modelde, katı seliloz tabakalarının arasında bulunan hava yerine bir bileşik veya içinde hava kabarcıkları bulunan kağıt kullanılabilir.

Eş.(4.23)'den hareketle V.Renne tarafından kağıdın dielektrik sabitini hesaplamak üzere üç temel formül ileri sürülmüştür:

i) Kuru doyurulmamış kağıt için,

$$\epsilon^* = \frac{1}{1 - D_p/D_c [1 - (1/\epsilon_c)]} \quad (4.25)$$

ii) Sıvı bir bileşikle doyurulmuş kağıt için (kağıt üzerindeki deliklerden havanın dışarı atılarak doymuş bir sıvı bileşik yardımıyla doymuş hale getirilerek),

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon_{i.c}}{1 - D_p/D_c [1 - (\epsilon_{i.c}/\epsilon_c)]} \quad (4.26)$$

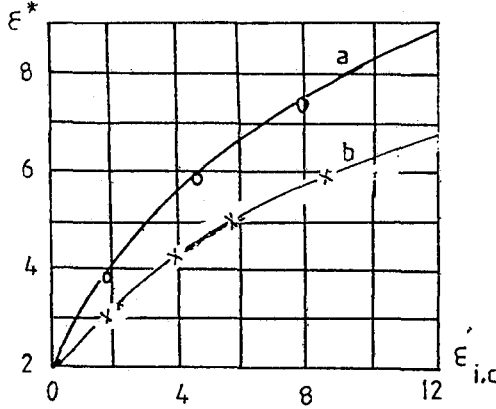
iii) Katılaşabilen bir bileşik ile doyurulmuş kağıt için,

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon_c \epsilon_{i.c}}{\epsilon_c y_p (1 - k_h) + \epsilon_c \epsilon_{i.c} y_p k_h + \epsilon_{i.c} (1 - y_p)} \quad (4.27)$$

Burada, ϵ_c selilozun yaklaşık 6.5'e eşit olan dielektrik sabiti, $\epsilon_{i.c}$ doymuş bileşiğin dielektrik sabiti, D_p kağıdın yoğunluğu, D_c selilozun yoğunluğu, k_h doymuş bileşiğin hacim kayıp çarpanı, y_p gözenekli kağıdın gözeneklilik çarpanı,

$$y_p = 1 - \frac{D_p}{D_c} \quad (4.28)$$

olarak verilir.



Şekil 4.5. Doyurulmuş kağıt kondansatörün (yoğunluğu 1000 kg/m^3) ϵ^* dielektrik sabitinin, doymuş bileşiğin $\epsilon'_{i,c}$ dielektrik sabiti değişimi
 Eğri a- Sıvı bileşik
 Eğri b- $k_h = 15\%$ olan katı bileşik
 o : Sıvı bileşiğe ait
 x : Katı bileşiğe ait deneysel veri
 (Tareev, 1975).

Şekil 4.5'de sıvı ve katı bileşiklerle doyurulmuş, 1000 kg/m^3 lük yoğunluğa sahip kağıt kapasitörün dielektrik sabiti değerleri gösterilmektedir.

Gaz katkılı katı bir dielektriğin dielektrik sabiti için yukarıdaki formüller karşılaştırıldığında formüller bazı yaklaşımlarla birbirine dönüşebileceklerdir. Bu yaklaşımlardan bazıları, gaz fazı için dielektrik sabiti 1 ve yoğunluğuda 0'dır.

Eş.(4.27)'de $\epsilon'_{i,c}$ 'nin

1'e eşit olduğu varsayılırsa Eş.(4.25)'e dönüşebilir. Bundan başka, k_h kayıp çarpanı sıfıra eşit kabul edilirse Eş.(4.27), Eş.(4.26)'ya dönüşebilir.

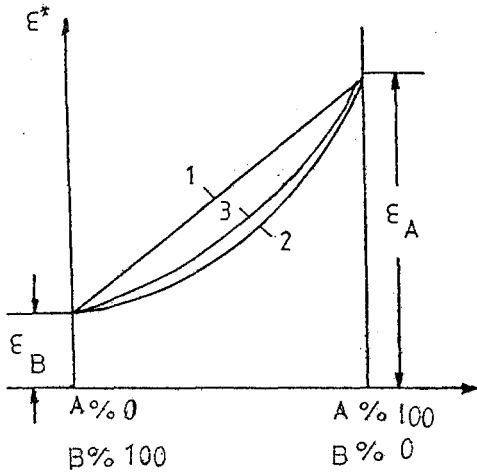
4.3. İstatistiksel Karışımlar

İstatistiksel karışımlar, bileşenlerinin gelişigüzel dağılım gösterdiği karışımlar olup düzensiz karışımlar olarakta bilinir. Bu tip karışımlar daha önceden verilen Şekil 4.1 ve Şekil 4.3'deki dağılımı göstermemekle birlikte dielektrik sabiti değerleri, bileşenleri seri ve paralel bağlı karışımların dielektrik sabitleri arasında yer alır, bir başka deyişle iki karışım arasında dağılım gösterir. Ayrıca istatistiksel karışımlara örnek olarak, köpük materyallerden oluşan karışımlar, sıvı-sıvı karışımları, toz halindeki karışımlar vb. verilebilir.

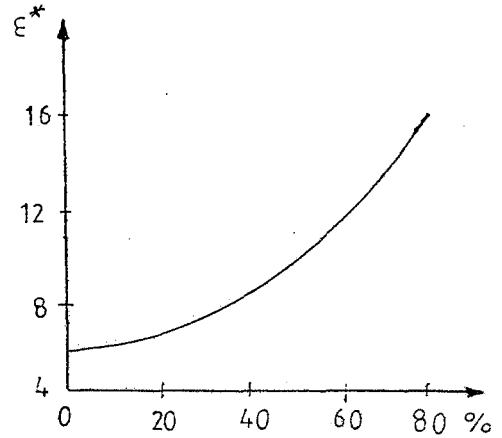
4.3.1. Wiener teorisi

Karışım formülleri, matematiksel olarak türetilebildikleri gibi, deneysel verilerden hareket ederek tamamen empirik olarak da elde edilebilirler.

Wiener ise istatistiksel karışımın dielektrik sabitinin deneysel verilerden hareketle Eş.(4.12) ve Eş.(4.23) ile tanımlanan



Şekil 4.6. Karışımındaki miktarlarına göre A ve B gibi iki bileşenli karışımın dielektrik sabiti Karışımındaki bileşenlerin,
1- Paralel,
2- Seri,
3- İstatistiksel dağılımı
(Tareev, 1975).



Şekil 4.7. Karışımındaki siklohegzanol miktarına göre, siklohegzanol ($C_6H_{11}.OH$) ve etil asetat ($C_2H_5COO.CH_3$) gibi iki polar sıvılı bir karışımın ϵ^* dielektrik sabiti
(Tareev, 1975).

değerler arasında yer alabilmekte olduğunu kabul etmiştir. Bu durum Wiener tarafından,

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\epsilon_i}} \leq \epsilon^* \leq \sum_{i=1}^n y_i \epsilon_i \quad (4.29)$$

şeklinde formalize edilmiş ve Şekil 4.6'daki grafik ile açık bir şekilde gösterilmiştir. Burada ϵ^* , Eş.(4.12) ve Eş.(4.26)'da olduğu gibi karışımın dielektrik sabiti olarak ifade edilir, ϵ_i bi-

leşenlerin dielektrik sabiti, y_i karışımındaki bileşenlerin hacimsel kesirleri ve n sistemdeki bileşenlerin sayısıdır.

Bundan başka, $z \neq 2$ olmak üzere istatistiksel karışımlar için öne sürülen ifade,

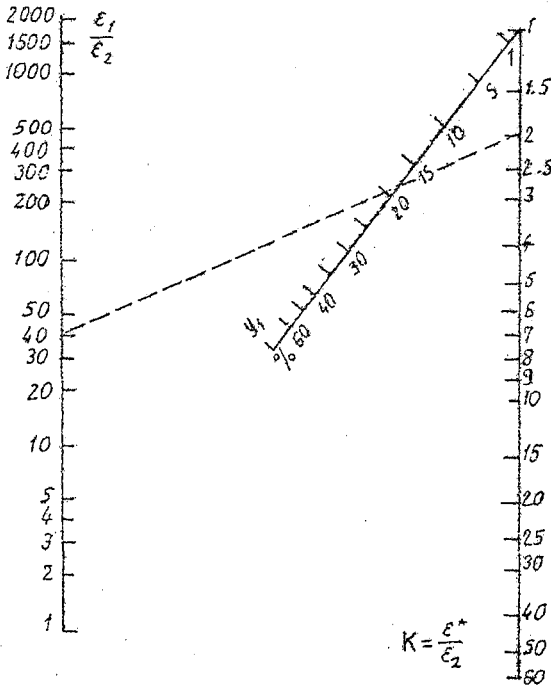
$$\frac{\epsilon^* - 1}{\epsilon^* + 2} = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\epsilon_i - 1}{\epsilon_i + z} \quad (4.30)$$

şeklindedir.

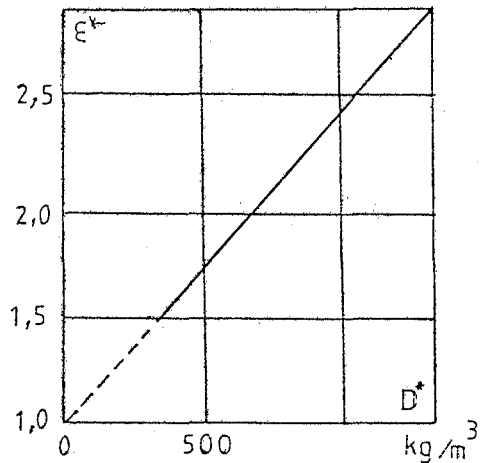
Şekil 4.7'de ise N.Langton ve D.Matthews tarafından incelenen karışımındaki bileşenlerin oranına göre iki polar sıvı dielektrik karışımının ϵ^* 'a bağlı değişimi gösterilmiştir.

4.3.2. Lichtenecker-Rother teorisi

İstatistiksel karışımlarla ilgili Lichtenecker-Rother teorisi, iki bileşenli bir karışıma ait karışımın logaritmik yasası o-



Şekil 4.8. Lichtenecker-Rother teorisine uyan hesaplamalar için kullanılan nomogram (Tareev, 1975).



Şekil 4.9. Köpük polistrenin D^* yoğunluğuna göre ϵ^* dielektrik sabiti (Tareev, 1975).

arak da isimlendirilir. Karışımlarla ilgili logaritmik yasa,

$$\log \epsilon^* = y_1 \log \epsilon_1 + y_2 \log \epsilon_2 \quad (4.31)$$

olarak ifade edilir. n bileşenli bir karışım için genel bir form-
da yazılacak olursa,

$$\log \epsilon^* = \sum_{i=1}^n y_i \log \epsilon_i \quad (4.32)$$

sonucu elde edilir (Tveekrem, 1978).

Lichtenecker-Rother teorisi köpük materyallerin dielektrik sabitini hesaplamada kullanılmaktadır. Köpük ve gözenekli plastikler-polimerler gaz ile doyurulmuş çok sayıda küçük gözeneklere sahiptirler. Bu durumda köpük materyalin ϵ^* dielektrik sabiti, katı materyalin ϵ dielektrik sabiti, köpük materyalin D^* yoğunluğu ve katı materyalin D yoğunluğu arasındaki bağıntı,

$$\log \epsilon^* = \frac{D^*}{D} \log \epsilon \quad (4.33)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlikten görülebileceği gibi, köpük plastiğin ϵ^* dielektrik sabitinin logaritması ile onun D^* yoğunluğu arasında doğrusal bir bağımlılık vardır ve bu durum grafikte doğrusal bir çizgi olarak belirtilir. Şekil 4.9, köpük polistren için böyle bir çizimi gösteriyor. Bu çizim, $\epsilon = 2.6$ ve $D = 1050 \text{ kg/m}^3$ olan deneysel veriler için Eş.(4.33) ile de doğrulanmaktadır.

Şekil 4.8'de ise, Eş.(4.31) temeli üzerine kurularak çizilmiş pratik hesaplamalar için kullanışlı olan bir nomogram gösterilmiştir. Bu nomogram, Lichtenecker-Rother tarafından köpük materyal karışımların dielektrik sabitlerini bulmak için deneysel veriler yardımıyla çizilmiştir. Şekilde sol düşey eksen $\epsilon_1 > \epsilon_2$ olmak koşuluyla ϵ_1 / ϵ_2 oranını, sağ düşey eksen ϵ^* / ϵ_2 oranını ve eğik doğru parçası ise birinci bileşenin hacimsel kesrinin yüzde olarak miktarını (y_1) göstermektedir. Ayrıca şekildeki kesikli çizgide problemin çözümü için çizilen örneği göstermektedir. Buna göre, dielektrik sabiti $\epsilon_1 = 114$ olan rutil (TiO_2) içeren plastiğin dielektrik sabiti $\epsilon_2 = 2.85$ olan (ki bu saf bir polimerin dielektrik

sabitinden iki kat daha büyük olan plastik içindir) politrifloro-
kloroetilen içeren plastiğin bileşenleri arasındaki oran,

$\epsilon_1 / \epsilon_2 = 40$ ve $\kappa = \epsilon^* / \epsilon_2$ dolayısıyla $\kappa = 2$ olsun. $\epsilon_1 / \epsilon_2 = 40$
ile $\kappa = 2$ noktalarını birleştiren doğru parçasının y_1 eğik doğru
parçasını kestiği nokta olan 18 sayısı karışımda % 18 rutil, % 82
politriflorokloroetilen olması gerektiğini belirtir.

4.3.3. Clausius-Mossotti teorisi

Clausius-Mossotti teorisi polar olmayan bileşenlere sahip
istatistiksel karışımların dielektrik sabitinin hesaplanması için
türetilmiş olup, Kesim 3'de bahsedildiği gibi,

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} \sum_i N_i \alpha_i \quad (4.34)$$

şeklinde verilir ve buradan saf bileşikler için Clausius-Mossotti
eşitliği,

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N \alpha$$

olacaktır, burada N Avogadro sayısı, α kutuplanabilirliktir. Polar
olmayan karışımlar için ise eşitlik,

$$\frac{\epsilon^* - 1}{\epsilon^* + 2} = \frac{4\pi}{3} \sum_i N_i \left[\frac{3}{4\pi N} \frac{\epsilon_i - 1}{\epsilon_i + 2} \right]$$

$$\frac{\epsilon^* - 1}{\epsilon^* + 2} = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\epsilon_i - 1}{\epsilon_i + 2} \quad (4.35)$$

olarak verilir, burada ϵ^* karışımın dielektrik sabiti, ϵ_i saf du-
rumda i 'inci bileşenin dielektrik sabiti ve y_i i 'inci bileşenin
hacimsel kesrini gösterir. Aynı zamanda y_i ,

$$y_i = \frac{(N_i)_m}{(N_i)_p} \quad (4.36)$$

olarak tanımlanır, burada $(N_i)_m$; karışımın 1 m^3 'ündeki i 'inci bile-
şen moleküllerinin sayısı, $(N_i)_p$ saf bileşenin 1 m^3 'ündeki molekül-
lerinin sayısıdır.

Clausius-Mossotti eşitliğinin düzenlenmesi sonucu,

$$\frac{\epsilon - 1}{12\pi\epsilon} = \sum_i \frac{N_i \alpha_i}{2\epsilon + 1 - \alpha_i(\epsilon - 1)/a_i^3} \quad (4.37)$$

eşitliğine benzer şekilde karışımlara uygulanması durumunda,

$$\frac{\epsilon^* - 1}{12\pi\epsilon^*} = \sum_i \frac{N_i \alpha_i}{2\epsilon^* + 1 - \alpha_i(\epsilon^* - 1)/a_i^3} \quad (4.38)$$

elde edilir (Böttcher, 1973). Burada α_i , daha önceden de bahsedildiği gibi i'inci bileşenin kutuplanabilirliği ve a_i ise i'inci bileşenin molekül yarıçapıdır (Bkz. EK 5).

4.3.4. Bileşiklerin oluşturduğu karışımlar teorisi

Böttcher, istatistiksel karışımlar için Eş.(4.35) ve Eş.(4.38)'in yerine çok küçük bir farklılık gözlenebilen aynı zamanda da bileşenlerin paralel bağlı olması durumuna karşılık gelen,

$$\epsilon^* = \sum_i y_i \epsilon_i \quad (4.39)$$

eşitliğini gözönüne almıştır. Eş.(4.35) ve Eş.(4.38) ifadelerinin

Çizelge 4.1. 25 °C'deki CCl₄ ile benzen karışımının dielektrik sabitinin⁴ teorik ve deneysel değerleri (Böttcher, 1973).

Mol % CCl ₄	Deneysel	Teorik	
		Eş.(4.35)	Eş.(4.39)
0.00	2.2744	—	—
5.01	2.2748	2.2719	2.2720
27.85	2.2664	2.2602	2.2598
48.56	2.2578	2.2507	2.2508
81.02	2.2409	2.2362	2.2362
96.17	2.2317	2.2304	2.2304
100.00	2.2285	—	—

Çizelge 4.2. 25 °C'deki CCl₄ ile siklohegzan karışımının dielektrik sabitinin teorik ve deneysel değerleri (Böttcher, 1973).

Mol % siklohegzan	Deneysel	Teorik	
		Eş.(4.35)	Eş.(4.39)
0.00	2.2285	—	—
14.37	2.1938	2.1922	2.1932
47.34	2.1190	2.1166	2.1180
63.07	2.0862	2.0737	2.0862
87.48	2.0395	2.0389	2.0394
94.32	2.0277	2.0268	2.0294
100.00	2.0174	—	—

den yararlanılarak Pijpers tarafından bazı karışımlar için yapılan deneysel ve teorik çalışma sonuçları Çizelge 4.1, Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3'de gösterilmiştir.

Pijpers tarafından yapılan çalışmalar polar olmayan iki bi-

Çizelge 4.3. 25 °C'deki benzen ile siklohegzan karışımının dielektrik sabitinin teorik ve deneysel değerleri (Böttcher, 1973).

Mol % siklohegzan	Deneysel	Teorik	
		Eş.(4.35)	Eş.(4.39)
0.00	2.2744	—	—
7.63	2.2482	2.2462	2.2466
42.35	2.1409	2.1390	2.1394
70.28	2.0729	2.0729	2.0726
86.64	2.0421	2.0427	2.0403
98.95	2.0216	2.0193	2.0134
100.00	2.0174	—	—

leşik olan karbontetraklorür ve benzen karışımında değişik teorik ve deneysel değerler arasındaki farkın çok küçük olduğunu göstermiştir. Bununla sebebi dielektrik sabitleri arasındaki farkın çok küçük olmasından dolayıdır. Aynı zamanda Çizelge 4.1'den de görülebileceği gibi deneysel değerler teorik olarak elde edilen değerlerden daha büyük değerlere sahiptir.

Çizelge 4.2'de ise polar olmayan karbontetraklorür ve polar sikloheksanın oluşturduğu karışım için teorik değerler ile deneysel değerler arasındaki fark büyüktür. Benzen ve sikloheksan karışımı içinde aynı durum gözlenir. Bileşiklerin dielektrik sabitleri arasındaki fark arttıkça teorik değerler arasındaki farkla birlikte deneysel ve teorik değerler arasındaki farkta artmaktadır.

4.3.5. Landau-Lifshitz, Beer, Odelevsky ve Payne-Cross teorileri

Yukarıda bahsettiğimiz istatistiksel karışım teorilerinden başka burada dört ifadeye daha yer vereceğiz.

n tane bileşenden oluşmuş istatistiksel karışımların dielektrik sabitlerinin hesaplanmasında, L.Landau ve E.Lifshitz ifadesi,

$$\sqrt[3]{\epsilon^*} = \sum_{i=1}^n y_i \sqrt[3]{\epsilon_i} \quad (4.40)$$

benzer şekilde Beer ifadesi,

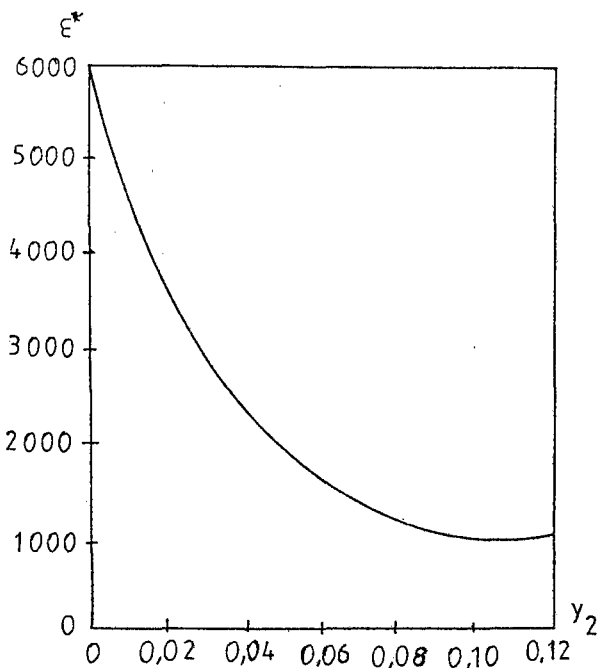
$$\sqrt{\epsilon^*} = \sum_{i=1}^n y_i \sqrt{\epsilon_i} \quad (4.41)$$

olarak verilir.

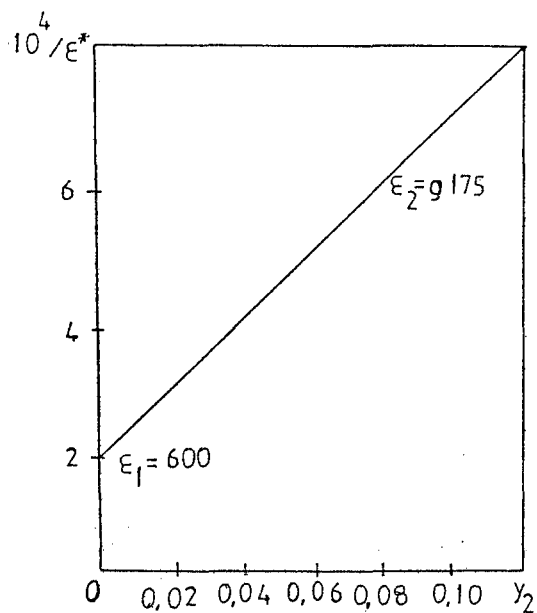
İki bileşenli istatistiksel karışımlar için V.Odelevsky tarafından öne sürülen ifade,

$$\epsilon^* = A + \sqrt{A^2 + \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{2}} \quad (4.42)$$

şeklinde olup burada A,



Şekil 4.10. BaTiO₃ ve NaNbO₃ karışımının karışımdaki NaNbO₃ hacimsel kesrine göre ϵ^* değişimi (Payne and Cross, 1984).



Şekil 4.11. BaTiO₃ ve NaNbO₃ karışımının karışımdaki NaNbO₃ hacimsel kesrine göre $10^4/\epsilon^*$ değişimi (Payne and Cross, 1984).

$$A = \frac{1}{4} [(3y_1 - 1)\epsilon_1 + (3y_2 - 1)\epsilon_2]$$

olarak verilir (Tareev, 1975).

İstatistiksel karışımlar için burada vereceğimiz dördüncü ve son ifade D.A.Payne ve L.E.Cross tarafından deneysel sonuçlarla da doğrulanarak önesürülen ifade,

$$\frac{1}{\epsilon^*} = \left[\frac{g}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right] y_2 + \frac{1}{\epsilon_1} \quad (4.43)$$

olarak verilir. Burada g , karışıma bağlı bir parametredir (Payne and Cross, 1984).

Eş.(4.43), dielektrik sabiti $\epsilon_1 = 6000$ olan BaTiO₃ ve dielektrik sabiti $\epsilon_2 = g 175$ olan NaNbO₃ karışımına uygulandığında Şekil 4.10 ve Şekil 4.11'deki sonuçlara ulaşılabilir. Eş.(4.43)'de

verilen g parametresi bu karışım için 0.80 olarak alınır.

Yukarıdaki ifadelerde de geçerli olmak üzere istatistiksel karışımların dielektrik sabitlerinin tayin edildiği ifadelerde ortaya çıkan durumları kısaca ele alalım. Bu durumları dört maddede özetleyebiliriz:

i) Wiener ve benzer şekilde diğer kesirli olan ifadelerde, karışımdaki ϵ_i değerinin değişmesi durumunda oran değişecek ve buna bağlı olarakta ϵ^* karışımın dielektrik sabiti değeri de değişecektir.

ii) ϵ_i ve ϵ^* değerleri yerine oranda $\epsilon_0 \epsilon_i$ ve $\epsilon_0 \epsilon^*$ mutlak dielektrik sabitleri gelse de ifadeler geçerliliğini koruyacaktır.

iii) Bütün bileşenler için ϵ_i değerlerinin aynı olması durumunda, ϵ^* karışımın dielektrik sabiti değeri bu tek değere karşılık gelecektir.

iv) Karışım tek bir bileşeni içeriyorsa, bir başka deyişle $n = 1$ ve $y_1 = 1$ olması durumunda ϵ^* karışımın dielektrik sabiti ϵ_1 birinci bileşenin dielektrik sabitine karşılık gelecektir.

4.3.6. Aritmetik karışım teorisi

Aritmetik karışım teorisi sıcaklıkla değişim katsayısı ifadesine dayanmaktadır. u , sıcaklığa bağlı bir fonksiyon olmak üzere u 'nun sıcaklıkla değişim katsayısı,

$$TC U = \frac{1}{U} \frac{dU}{dT} \quad (4.44)$$

veya

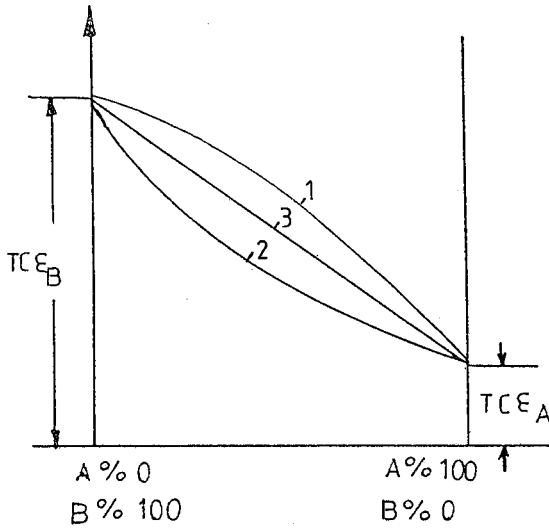
$$TC U = \frac{d}{dT} (\ln u) \quad (4.45)$$

olarak verilir.

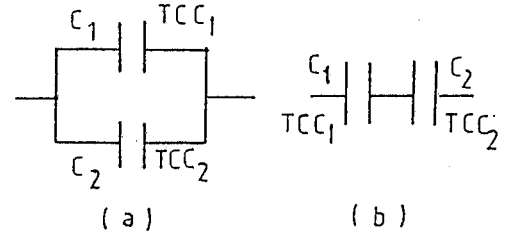
Logaritmik karışım yasası olan Eş.(4.31)'den hareketle,

$$TC \epsilon^* = y_1 TC \epsilon_1 + y_2 TC \epsilon_2 \quad (4.46)$$

ifadesi elde edilir ve eşitlik "Aritmetik Karışım Yasası" olarak i-



Şekil 4.12. İki bileşenli bir karışımın karışım miktarlarına göre $TC \epsilon^*$ değişimi
1-Paralel,
2-Seri bağlı durum,
3-İstatistiksel dağılım (Tareev, 1975).



Şekil 4.13. Sığası sıcaklıkla değişmeyen kondansatör için a) Paralel, b) Seri bağlı durum.

simlendirilir. Burada $TC \epsilon^*$, $TC \epsilon_1$ ve $TC \epsilon_2$ nicelikleri sırasıyla karışımın, birinci bileşenin ve ikinci bileşenin dielektrik sabitlerinin sıcaklıkla değişim katsayılarıdır.

Şekil 4.12'deki 3 nolu doğrusal grafik Eş.(4.32)'de verilen logaritmik yaklaşım, 1 ve 2 nolu eğrisel grafikler ise sırasıyla Eş.(4.12)'deki paralel bağlı durum ve Eş.(4.23)'deki seri bağlı durum yaklaşımıyla elde edilirler.

Eş.(4.46), n bileşenli genel bir durum için,

$$TC \epsilon^* = \sum_{i=1}^n y_i TC \epsilon_i \quad (4.47)$$

şekline dönüşecektir.

Şekil 4.13'deki sığası sıcaklıkla değişmeyen kondansatör durumunu ele alalım. Şekil 4.13 (a)'daki paralel bağlı durum için sığanın,

$$C^* = C_1 + C_2 \quad (4.48)$$

şeklinde olduğu daha önceden de verilmişti. Kondansatörün toplam sığasının sıcaklıkla değişim katsayısı,

$$TC C^* = TC(C_1 + C_2)$$

$$TC C^* = \frac{1}{C^*} \frac{dC^*}{dT}$$

$$TC C^* = \frac{1}{C^*} \left(\frac{dC_1}{dT} + \frac{dC_2}{dT} \right) \quad (4.49)$$

olarak verilir. Sıcaklıkla değişim katsayısı ifadesinden hareketle,

$$\frac{dC_1}{dT} = C_1 TC C_1 \quad (4.50)$$

ve benzer şekilde,

$$\frac{dC_2}{dT} = C_2 TC C_2 \quad (4.51)$$

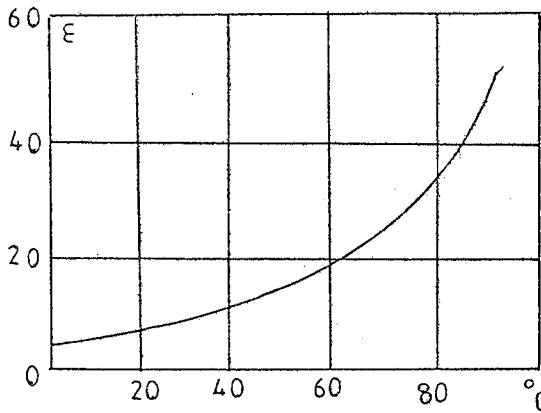
şeklinde olup,

$$TC C^* = \frac{C_1 TC C_1 + C_2 TC C_2}{C_1 + C_2} \quad (4.52)$$

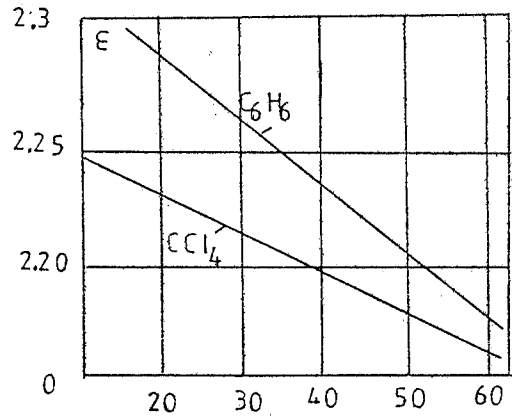
sığanın sıcaklıkla değişmemesi halinde, $TC C^* = 0$ olacağından,

$$C_1 TC C_1 + C_2 TC C_2 = 0 \quad (4.52)$$

sonucu elde edilir.



Şekil 4.14. Elektriksel porsalenin sıcaklığa göre ϵ dielektrik sabitinin değişimi (Tareev, 1975).



Şekil 4.15. C_6H_6 benzen ve CCl_4 klorotetraklorür maddelerinin dielektrik sabitlerinin sıcaklığa göre değişimi (Tareev, 1975).

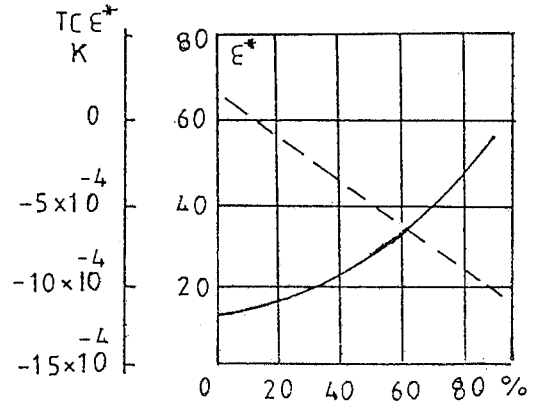
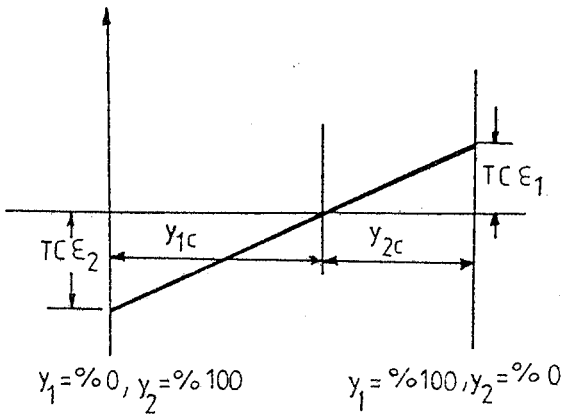
Şekil 4.13 (b)'deki seri bağlı sistemin sığası,

$$\frac{1}{C^*} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (4.54)$$

dolayısıyla,

$$C^* = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (4.55)$$

şeklindedir. $U = Ax^m y^n z^p$ şeklinde olduğu kabul edilirse, Eş.(4.55)



Şekil 4.16. Sığası sıcaklıkla değişmeyen kondansatörde bir dielektrik karışımın bileşenlerinin hesaplanması (Tareev, 1975).

Şekil 4.17. Tidolün kütle miktarına göre sürekli eğri ϵ^* , kesikli eğri tidol-timag seramik materyallerin $TC\epsilon^*$ değişimi (Tareev, 1975).

de, $A=1$, $x=C_1$, $m=1$, $y=C_2$, $n=1$, $z=C_1+C_2$ ve $p=-1$ olmak üzere,

$$TC\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right) = TC C_1 + TC C_2 - TC (C_1 + C_2) \quad (4.56)$$

buradan,

$$TC(C_1 + C_2) + TC\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right) = TC C_1 + TC C_2 \quad (4.57)$$

olarak bulunur. $TC(C_1+C_2)$ ifadesinin Eş.(4.52)'deki değeri yerine yazılıp sifıra eşitlenirse,

$$(C_1 + C_2)TC C_1 + (C_1 + C_2)TC C_2 - C_1 TC C_1 - C_2 TC C_2 = 0 \quad (4.58)$$

buradan,

$$C_2 TC C_1 + C_1 TC C_2 = 0 \quad (4.59)$$

sonucu elde edilir.

Bu sonuçlardan hareketle, iki bileşenli istatistiksel karışımından meydana gelmiş sığası sıcaklıkla değişmeyen kondansatör için, $TC \epsilon^* = 0$ olduğu kabul edilerek,

$$y_1 TC \epsilon_1 + y_2 TC \epsilon_2 = 0 \quad (4.60)$$

bulunur.

Şekil 4.14 ve Şekil 4.15'de gösterildiği gibi bazı maddelerin dielektrik sabitleri sıcaklık arttığında artma gösterirken, bazı maddelerin dielektrik sabitleride sıcaklık arttığında azalma gösterir. Bu özelliklere sahip iki dielektrikten oluşan sığası sıcaklıkla değişmeyen bir kondansatör yapıldığında sıcaklığın artması veya azalması durumunda sistemin dielektrik sabitinde fazla bir değişme gözlenmeyecektir. (Tveekrem, 1978; Payne and Cross, 1984; Cohn and Greer, 1986).

Şekil 4.16'da y_{1c} ve y_{2c} değerleri,

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (4.61)$$

ifadesinden yararlanarak hesaplanabilir. Burada y_i hacimsel kesirler ve x_i kütleli kesirlerdir,

$$y_i = x_i \frac{D^*}{D_i} \quad ; \quad x_i = y_i \frac{D_i}{D^*} \quad (4.62)$$

olup D^* ,

$$D^* = \sum_{i=1}^n y_i D_i \quad (4.63)$$

olarak verilir, burada D^* ve D_i sırasıyla karışımın ve bileşenlerin yoğunluklarıdır (Diğet, 1986).

Şekil 4.17'de ise bileşim miktarlarına göre tidol-timag seramikler için ϵ^* ve $TC \epsilon^*$ değişimi gösteriliyor. Burada sığası sıcaklıkla değişmeyen materyal % 90 timag ve % 10 tidol içermektedir.

4.3.7. İstatistiksel karışım ifadelerinin genelleştirilmiş formları

İstatistiksel karışımların ϵ^* dielektrik sabitlerini hesaplamada kullanılan formüllerin bir çoğu genel bir formda yazılabilir,

$$\Phi(\epsilon) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi(\epsilon_i) \quad (4.64)$$

burada Φ genel bir fonksiyon gösterimi olup, $\phi(\epsilon^*)$ ve $\phi(\epsilon_i)$ sırasıyla karışıma ve i'inci bileşene ait dielektrik sabitleri cinsinden fonksiyonlar olarak verilir.

Eş.(4.12)'de fonksiyon $\Phi(\epsilon) = \epsilon$, bileşenlerin seri bağlı olduğu Eş.(4.23)'de $\Phi(\epsilon) = 1/\epsilon$ ve Eş.(4.30), Eş.(4.31) ve Eş.(4.40) ifadelerinde fonksiyon $\Phi(\epsilon)$ 'a uygunluk gösterir.

İstatistiksel karışımların genelleştirilmiş formdaki ifadeleri aşağıdaki şekilde verilir:

i) Logaritmik karışım yasasında,

$$\Phi(\epsilon) = \log \epsilon \quad (4.65)$$

ii) Landau-Lifshitz eşitliğinde,

$$\Phi(\epsilon) = \sqrt[3]{\epsilon} \quad (4.66)$$

iii) Beer eşitliğinde,

$$\Phi(\epsilon) = \sqrt{\epsilon} \quad (4.67)$$

iv) Clausius-Mossotti eşitliğinde,

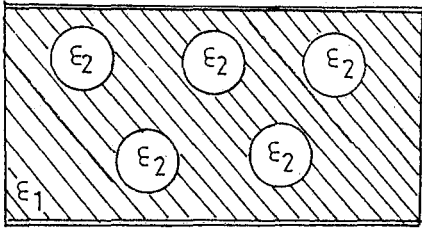
$$\Phi(\epsilon) = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \quad (4.68)$$

v) $z \neq 2$ olmak üzere Wiener eşitliğinde,

$$\Phi(\epsilon) = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + z} \quad (4.69)$$

4.4. Matris Karışımlar

Matris karışımlar Şekil 4.18'de gösterildiği gibi ϵ_1 dielektrik sabitli bir ortamda bulunan ϵ_2 dielektrik sabitli küreler



Şekil 4.18. Matris karışım

şeklindedir, bir başka deyişle ϵ_2 dielektrik sabitli kürelerin etrafı hacimsel olarak ϵ_1 dielektrik sabitli maddeyle kaplanmıştır. Böyle bir matris karışımın ϵ^* dielektrik sabiti değeri, istatistiksel sistemlerin daha önce bahsedilen formüllerinden doğru bir şekilde hesaplanmaları mümkündür, böylece

Eş.(4.32) ifadesi ve Şekil 4.8'deki grafiğin gerçekte tipik matris karışımlar olan köpük plastikler için geçerli olduğu söylenebilir. Bununla birlikte, matris karışımların dielektrik sabitlerini hesaplamak için daha başka ifadeler de verilmesi mümkündür.

4.4.1. Rayleigh teorisi

Rayleigh teorisi, matris karışımların dielektrik sabitlerinin bulunması için öne sürülen en eski teorilerden biridir (Böttcher and Bordewijk, 1978). Rayleigh teorisi eşit boyutlu küresel parçacıkların kübik dizilişi için türetilmiştir. Bir tek parçacık üzerindeki alan, yaklaşık olarak sadece dış alana eşittir. Çünkü, diğer parçacıkların oluşturduğu alanlar birbirlerini yok ederler. Bu sebeple, bir dış elektrik alan etkisi altında bulunan tek bir küresel parçacıkta oluşan dipol moment,

$$\vec{p} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} a^3 \vec{E} \quad (4.70)$$

şeklinde olup, n tane küresel parçacıktan meydana gelen sistemde oluşan dipol moment ise;

$$\vec{p} = n \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} a^3 \vec{E} \quad (4.71)$$

olarak verilir. Burada n, karışımdaki küresel parçacıkların sayısı olmak üzere ϵ , tek bir parçacığın dielektrik sabiti ve a, tek

bir parçacığın yarıçapı olsun. Sistemde oluşan moment, parçacıklar sisteminin ϵ^* görünen dielektrik sabiti ve parçacıklar topluluğunun içinde bulunduğu küresel bölgenin a yarıçapı cinsinden ifade edilirse;

$$\vec{p} = \frac{\epsilon^* - 1}{\epsilon^* + 2} a^{*3} \vec{E} \quad (4.72)$$

olur. Eş.(4.71) ve Eş.(4.72)'den,

$$\frac{\epsilon^* - 1}{\epsilon^* + 2} = y \quad \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \quad (4.73)$$

olarak bulunur, burada y ;

$$y = \frac{n a^3}{a^{*3}} \quad (4.74)$$

şeklinde olup, parçacıkların tümünün karışımdaki hacimsel kesrini gösterir.

Eş.(4.73), ϵ_1 dielektrik sabitli bir ortamda bulunan ϵ_2 dielektrik sabitli küresel parçacıklar durumuna dönüştürülebilir. Küresel parçacıklardan oluşan bir sistem ϵ_1 dielektrik sabitli bir ortamla çevrelenmiştir. Eğer böyle bir sisteme uygulanan elektrik alan homojen ve E 'ye eşitse, kürenin dışındaki potansiyel, tek bir küre için;

$$\phi = \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{a^3}{r^3} - 1 \right) Ez \quad (4.75)$$

şeklinde olup n tane küre için,

$$\phi = \left(n \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{a^3}{r^3} - 1 \right) Ez \quad (4.76)$$

olarak verilir, burada z , molekülün konumunu silindirik koordinatlarda tanımlamaktadır. Karışımın ϵ^* dielektrik sabiti cinsinden potansiyel,

$$\phi = \left(\frac{\epsilon^* - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon^*} \frac{a^{*3}}{r^3} - 1 \right) Ez \quad (4.77)$$

şeklindedir, burada r ; molekülün konum vektörünün büyüklüğüdür.

Eş.(4.76) ve Eş.(4.77)'nin karşılaştırılmasıyla,

$$\frac{\epsilon^* - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon^*} = y_2 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \quad (4.78)$$

burada y_2 , küresel parçacıkların oluşturduğu fazın hacimsel kesri olup;

$$y_2 = \frac{n a^3}{a^{*3}} \quad (4.79)$$

şeklinde verilir.

Eş.(4.78)'den hareketle,

$$\epsilon^* = \epsilon_1 \left[1 + \frac{3y_2(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{2\epsilon_1 + \epsilon_2 - y_2(\epsilon_2 - \epsilon_1)} \right] \quad (4.80)$$

matris karışımlar için Rayleigh ifadesi elde edilmiş olur.

4.4.2. Böttcher teorisi

Eş.(4.73) ve Eş.(4.78) ifadelerine göre y hacimsel kesrinin artması durumunda Eş.(4.80)'de bazı yetersizlikler ortaya çıkar. Bundan dolayı düzgün dış alanların olması durumunda karışımın dielektrik sabitini hesaplamak için Böttcher tarafından bir teori geliştirilmiştir. Matris karışımının her bir bileşenindeki alan, matris karışımı oluşturan ϵ_2 dielektrik sabitli bir küredeki alana eşit alınır. Matris karışımının toplam kutuplanması,

$$\vec{p} = \frac{\epsilon^* - 1}{4\pi} \vec{E} \quad (4.81)$$

ve dolayısıyla,

$$\vec{p} = y_1 \frac{\epsilon_1 - 1}{4\pi} \left(\frac{3\epsilon^*}{2\epsilon^* + \epsilon_1} \vec{E} \right) + y_2 \frac{\epsilon_2 - 1}{4\pi} \left(\frac{3\epsilon^*}{2\epsilon^* + \epsilon_2} \vec{E} \right) \quad (4.82)$$

eşitliğiyle verilir. Parantez içindeki terimler bileşenlerin oluşturdukları alanlardır (Böttcher, 1945).

Eş.(4.81) ve Eş.(4.82)'den,

$$\frac{\epsilon^* - 1}{3\epsilon^*} = y_1 \frac{\epsilon_1 - 1}{2\epsilon^* + \epsilon_1} + y_2 \frac{\epsilon_2 - 1}{2\epsilon^* + \epsilon_2} \quad (4.83)$$

buradan da,

$$\frac{\epsilon^* - \epsilon_1}{3\epsilon^*} = y_2 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon^* + \epsilon_2} \quad (4.84)$$

Böttcher eşitliği elde edilir. y_2 'nin küçük değerleri için

Eş.(4.78) ile Eş.(4.84)'ün birbirlerine eşdeğer olduğu söylenebilir.

4.4.3. Bruggeman teorisi

Bir matris karışımın dielektrik sabitini bulmak için diğer bir ifade Bruggeman tarafından verilmiştir. Bruggeman, y_2 'nin küçük değerleri için Eş.(4.78)'den hareket ederek, matris karışımın sonsuz küçük $\Delta\vartheta/\vartheta$ kesri eğer 2.bileşene ait y_2 hacimsel kesri ile değiştirilirse, dielektrik sabitinin de buna paralel şekilde değişeceği sonucunu elde etmiştir. Eğer, $\epsilon^*(y_2)$ dielektrik sabiti karışımın geri kalan kısmı cinsinden tanımlanırsa, görünen dielektrik sabitinin değişimi Eş.(4.78) ve Eş.(4.84) ile verilir, bu durum için eşitlik;

$$\frac{\Delta\epsilon^*}{3\epsilon^*} = \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} \frac{\epsilon_2 - \epsilon^*}{2\epsilon^* + \epsilon_2} \quad (4.85)$$

şeklinde yazılabilir. Burada y_2 hacimsel kesrinin değişimi,

$$\Delta y_2 = \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} (1 - y_2) \quad (4.86)$$

olarak verilir. Eş.(4.85) ve Eş.(4.86)'nın karşılaştırılmasıyla,

$$\frac{d\epsilon^*}{dy_2} = \frac{3\epsilon^*}{1 - y_2} \frac{\epsilon_2 - \epsilon^*}{2\epsilon^* + \epsilon_2} \quad (4.87)$$

şeklinde bir diferansiyel ifade bulunur. $\epsilon^*(y_2=0) = \epsilon_1$,

$\epsilon^*(y_2=1) = \epsilon_2$ sınır koşulları çerçevesinde çözüm,

$$\frac{\epsilon_2 - \epsilon^*}{3\sqrt{\epsilon^*/\epsilon_1}} = (1 - y_2)(\epsilon_2 - \epsilon_1) \quad (4.88)$$

matris karışımlar için Bruggeman eşitliğini verir (Bruggeman, 1935).

4.4.4. Looyenga eşitliği

Looyenga teorisi, çift matris veya karışımın dielektrik sabitinin bütün bileşim üzerinde aynı olduğunu kabul eder. Bir başka deyişle küresel bileşik bir sistem, kendileri çok fazlıdır, ancak $y_1^a y_2^a$ ve $y_1^b y_2^b$ bileşimleri son derece küçük farka sahiptirler.

Eğer, bu sistemler karışımın y_a ve y_b kesirleri oluyorsa,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_a y_1^a + y_b y_1^b \\ y_2 &= y_a y_2^a + y_b y_2^b \end{aligned} \quad (4.89)$$

a ve b bölgelerinin dielektrik sabitleri yalnızca y_2^a ve y_2^b kesirlerine bağlıdır ve y_2 'ye göre Taylor serileri cinsinden ifade edilebilir. Seride ikinci mertebeden sonrası alınmadığı takdirde,

$$\begin{aligned} \epsilon_a^* &= f(y_2^a) \\ \epsilon_a^* &= f(y_2) + (y_2^a - y_2) f'(y_2) + \frac{1}{2} (y_2^a - y_2)^2 f''(y_2) \\ \epsilon_a^* &= f(y_2) + y_b (y_2^a - y_2^b) f'(y_2) + \frac{1}{2} y_b^2 (y_2^a - y_2^b)^2 f''(y_2) \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\epsilon_b^* = f(y_2) + (y_b - 1)(y_2^a - y_2^b) f'(y_2) + \frac{1}{2} (y_b - 1)^2 (y_2^a - y_2^b)^2 f''(y_2) \quad (4.91)$$

olarak bulunur. Burada y_a ve y_b , sırasıyla a'nın ve b'nin son karışımındaki hacimsel kesri, y_1 ve y_2 , 1.ve 2. bileşenin son karışımındaki hacimsel kesri, y_1^a ve y_2^a , a'nın 1.ve 2. bileşendeki hacimsel kesri ve y_1^b ve y_2^b , b'nin 1.ve 2. bileşendeki hacimsel kesridir.

Looyenga, bütün bileşim için benzer matris bir sistemle aynı olan yukarıda tanımlanmış sistemin gerçek dielektrik sabiti olduğunu kabul eder, ancak $(y_2^a - y_2^b)^2$ terimi eksiktir ve bu dielektrik sabiti Eş.(4.84)'deki ϵ_a^* ve ϵ_b^* dielektrik sabitleri cinsinden,

$$\frac{\epsilon^* - \epsilon_a^*}{3\epsilon^*} = y_b \frac{\epsilon_b^* - \epsilon_a^*}{2\epsilon^* - \epsilon_a^*} \quad (4.92)$$

olarak yazılabilir. Eş.(4.92), tekrar yazıldığında,

$$\frac{\epsilon_b^* - \epsilon^*}{3\epsilon^*} = y_b \frac{\epsilon_b^* - \epsilon_a^*}{\epsilon^* - \epsilon_a^*} - 1 \quad (4.93)$$

Eş.(4.90) ve Eş.(4.91) yerlerine yazılır, $y_2^a - y_2^b \rightarrow 0$ olduğu vakit limit alınırsa,

$$2[f'(y_2)]^2 = 3f(y_2)f''(y_2) \quad (4.94)$$

diferansiyel ifadesi bulunur. $f(0) = \epsilon_1$, $f(1) = \epsilon_2$ koşullarıyla çözüm sonucunda,

Çizelge 4.4. Matris karışımların ölçümlerinden hareketle bazı katı maddelerin ϵ_2 dielektrik sabitleri (Böttcher, 1978).

Karışım	y_2	ϵ^*	Eş.(4.96)	Eş.(4.97)	Eş.(4.98)	Eş.(4.99)
CCl ₄ - CBr ₄ 'de dağılmış KCl karışımı $\epsilon_1=2.372$	0.05	2.465	4.85	4.83	4.84	4.72
	0.10	2.563	4.89	4.85	4.87	4.76
	0.15	2.657	4.83	4.78	4.80	4.71
	0.20	2.758	4.84	4.77	4.80	4.72
	0.25	2.864	4.86	4.78	4.82	4.74
	0.30	2.965	4.83	4.74	4.78	4.72
	0.35	3.075	4.83	4.74	4.79	4.72
	0.40	3.184	4.82	4.73	4.77	4.72
	0.45	3.296	4.81	4.72	4.76	4.72
CCl ₄ - C ₆ H ₆ 'da dağılmış NH ₄ Cl karışımı $\epsilon_1=2.230$	0.05	2.39	8.10	7.88	7.98	7.04
	0.10	2.56	8.16	7.77	7.96	7.09
	0.20	2.92	8.10	7.47	7.76	7.09
	0.30	3.31	8.01	7.26	7.59	7.07
	0.40	3.71	7.77	7.04	7.35	6.97
	0.50	4.13	7.54	6.87	7.15	6.88
CCl ₄ 'deki cam küre- ciklerin- den olu- şan karı- şım $\epsilon_1=2.228$	0.05	2.317	4.61	4.59	4.60	4.49
	0.10	2.411	4.66	4.62	4.64	4.53
	0.15	2.510	4.70	4.64	4.67	4.57
	0.20	2.611	4.71	4.64	4.67	4.58
	0.25	2.714	4.71	4.63	4.67	4.58
	0.30	2.824	4.74	4.64	4.69	4.61
	0.35	2.949	4.80	4.69	4.75	4.67

$$\epsilon^* = \left[\epsilon_1^{1/3} + y_2 \left(\epsilon_2^{1/3} - \epsilon_1^{1/3} \right) \right]^3 \quad (4.95)$$

Looyenga eşitliği bulunmuş olur (Looyenga, 1965).

Eş.(4.80), Eş.(4.84), Eş.(4.88) ve Eş.(4.95)'in matris karışımların dielektrik sabitine göre ϵ_1 dielektrik sabitli bir ortamda dağılmış ϵ_2 dielektrik sabitli faz için tekrar yazılırsa,

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 \left[1 + \frac{3(\epsilon^* - \epsilon_1)}{\gamma_2(2\epsilon_1 + \epsilon^*) - (\epsilon^* - \epsilon_1)} \right] \quad (4.96)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon^* \frac{2(\epsilon^* - \epsilon_1) + 3\gamma_2 \epsilon_1}{3\gamma_2 \epsilon^* - (\epsilon^* - \epsilon_1)} \quad (4.97)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 + \frac{\epsilon^* - \epsilon_1}{1 - (1 - \gamma_2) \sqrt[3]{\epsilon^*/\epsilon_1}} \quad (4.98)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 \left[1 + \frac{(\sqrt[3]{\epsilon^*/\epsilon_1} - 1)}{\gamma_2} \right]^3 \quad (4.99)$$

şeklinde olacaklardır.

Çizelge 4.4'deki değerler farklı boyutlu toz maddeler içindir. Açıkça görülebileceği gibi, Eş.(4.97) ve Eş.(4.99)'un, Eş.(4.96) ve Eş.(4.98)'den daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir.

4.4.5. Hanai teorisi

Yukarıda verilen Rayleigh, Böttcher, Bruggeman ve Looyenga teorileri iletken bileşenleri de içeren matris karışımlara uygulandığında yetersiz kaldığından, Hanai bu tip matris karışımlar için bazı yaklaşımlarda bulunarak çeşitli ifadeleri ileri sürmüştür.

İletken bileşenleri içeren karışımlar için Eş.(4.80), Eş.(4.84), Eş.(4.88) ve Eş.(4.95) ifadelerinde ϵ^* , ϵ_1 ve ϵ_2 gösterimleri yerine η^* , η_1 ve η_2 gösterimleri yazılabilir. Bu gösterimler çerçevesinde matris karışımında küresel olarak dağılmış iletken faz için,

$$\eta_2 = \epsilon_2 + (4\pi\sigma_2)/i\omega \quad (4.100)$$

şeklinde dir. Burada ω sinüzoidal elektrik alanının frekansıdır. Karışımda diğer bir faz ise,

$$\eta_1 = \epsilon_1 \quad (4.101)$$

olup bu faz diğer faz gibi iletken değildir. Eş.(4.100)'de $\omega = 0$ da η_2 sonsuza yaklaşacaktır. Bu ise karışımın iletkenliğinin sonsuza yaklaşması gibi deneyle uyumlu olmayan bir sonuca bizi götür-

cektir. Bu nedenle bir matris karışımın iletkenliği,

$$\sigma^* = y_2 \sigma_2 \quad (4.102)$$

ile tanımlanmıştır. Eş.(4.84)'den yararlanarak,

$$\frac{\eta^* - \epsilon_1}{3\eta^*} = y_2 \quad (4.103)$$

sonucu elde edilir. Yukarıdaki ifadenin $\eta^* = 0$ 'daki çözümü,

$$\eta(0) = \frac{\epsilon_1}{1 - 3y_2} \quad (4.104)$$

olarak bulunur. Bu ifade, Böttcher eşitliğine uygun olarak matris

Çizelge 4.5. Dielektrik ortamda dağılmış iletken materyalli bazı matris sistemler için ϵ^* değerleri (Böttcher, 1978).

Karışım	y_2	Eş.(4.103)	Eş.(4.105)	Eş.(4.106)	Deneysel
Lanolin/ vazalindeki civa karı- şımı, $\epsilon_1 = 2.5$	0.235	8.47	4.80	5.58	5.66
	0.280	15.63	5.42	6.70	6.70
	0.330	250.00	6.19	8.31	8.28
Beziryacağı ve demir karışımı $\epsilon_1 = 3.85$	0.0051	3.41	3.91	3.91	3.92
	0.0138	4.01	4.00	4.01	4.00
	0.0292	4.22	4.20	4.21	4.19
	0.0742	4.95	4.78	4.85	5.04
	0.1535	7.14	5.94	6.35	6.62
Madeni yağ ve demir karışımı $\epsilon_1 = 2.39$	0.0055	2.43	2.43	2.43	2.43
	0.0129	2.48	2.48	2.49	2.48
	0.0286	2.60	2.61	2.61	2.59
	0.0730	2.95	3.00	3.06	3.03
	0.1550	3.71	3.96	4.47	4.27

sistemdeki bütün durumlar için geçerli değildir. Eş.(4.104), $y_2 < 1/3$ için geçerlidir. Eş.(4.80) ve Eş.(4.88), matris sistemle-

rin özel durumlarını içermekle birlikte, sıfır frekans değerlerinde belli dielektrik sabitine sahiptirler:

$$\epsilon^*(0) = \epsilon_1 \left(1 + \frac{3\gamma_2}{1 - \gamma_2}\right) \quad (4.105)$$

$$\epsilon^+(0) = \epsilon_1 (1 - \gamma_2) \quad (4.106)$$

Çizelge 4.5'de dielektrik ortamda dağılmış iletken materyalli matris karışımlar için Eş.(4.103), Eş.(4.105), Eş.(4.106) ve deneysel işlemlerden bulunan ϵ^+ karışımının dielektrik sabiti değerlerini göstermektedir. Düşük γ_2 hacimsel kesirleri için üç eşitlikten bulunan değerlerin birbirlerine çok yakın olduğu görülmektedir. Fakat, yüksek hacimsel kesirler için Eş.(4.106), deneyle en uyumlu sonuçlar vermektedir. Aynı dielektrik sabitli iletken olmayan malzemelere bu bağıntılar uygulandığında deneysel değerlerle teorik olarak hesaplanan değerler birbirlerinden uzaklaşır.

Eş.(4.80)'den hareketle karışımın dielektrik sabitinin frekansa bağımlılığı,

$$\epsilon^*(\omega) = \epsilon_1 \left[1 + \frac{3\gamma_2 [\epsilon_2 - \epsilon_1 + (4\pi\sigma_2) / i\omega]}{2\epsilon_1 + \epsilon_2 + (4\pi\sigma_2) / i\omega - \gamma_2 [\epsilon_2 - \epsilon_1 - (4\pi\sigma_2) / i\omega]} \right]$$

$$\epsilon^*(\omega) = \epsilon_\infty^* + \frac{\epsilon^*(0) - \epsilon_\infty^*}{1 + i\omega\tau^*} \quad (4.107)$$

olarak verilir, bu ise Debye eşitliğinden başka bir şey değildir. Burada, $\epsilon^*(0)$ ve ϵ_∞^* sırasıyla sıfır ve sonsuz frekans değerlerindeki dielektrik sabitleri ve τ^* ,

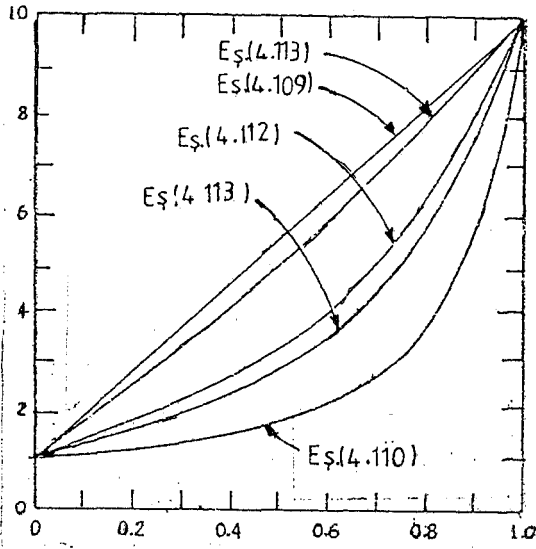
$$\tau^* = \frac{2\epsilon_1 + \epsilon_2 - \gamma_2(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{4\pi\sigma_2(1 - \gamma_2)} \quad (4.108)$$

şeklinde tanımlanmış olup karışımın durulma sabiti olarak isimlendirilir (Böttcher, 1978).

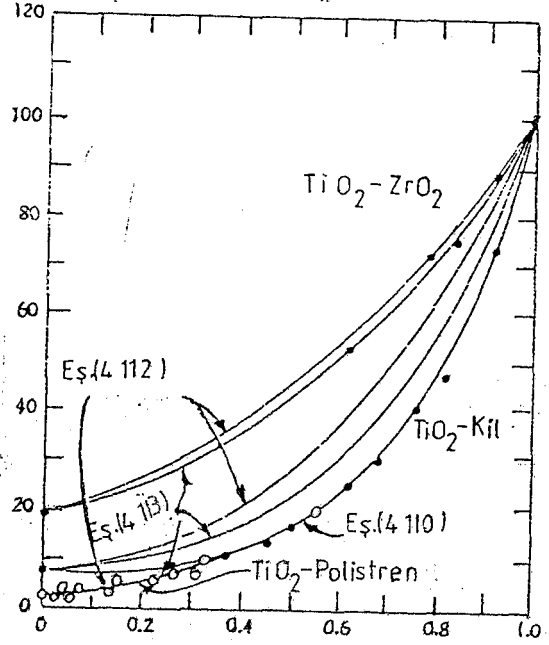
4.4.6. Maxwell teorisi

Seri ve paralel bağlı bileşenler içeren karışımlar için geçerli olan ifadeleri tekrar ele alalım.

ϵ_1 ve ϵ_2 dielektrik sabitli iki bileşenin paralel bağlı ol-



Şekil 4.19. Farklı iki dielektrikten oluşmuş karışımın hacimsel kesrine göre ϵ^* değişimi (Kingery et al, 1976).



Şekil 4.20. İki fazlı karışımın deneysel ve teorik değerlerinin gösterimi (Kingery et al, 1976).

ması durumunda karışımın ϵ^* dielektrik sabiti,

$$\epsilon^* = y_1 \epsilon_1 + y_2 \epsilon_2 \quad (4.109)$$

ve seri bağlı olması durumundaki karışımın dielektrik sabiti,

$$\frac{1}{\epsilon^*} = \frac{y_1}{\epsilon_1} + \frac{y_2}{\epsilon_2} \quad (4.110)$$

şeklinde idi.

Eş.(4.109) ve Eş.(4.110), genel bir empirik bağıntının özel durumlarını içeriyor:

$$\epsilon^* = \sum_{i=1}^n y_i \epsilon_i \quad (4.111)$$

Logaritmik karışım yasası ise,

$$\log \epsilon^* = \sum_{i=1}^n y_i \log \epsilon_i \quad (4.112)$$

şeklinde olup, bu ifade Eş.(4.109) ve Eş.(4.110)'daki dağılımlar

arasında bir değere sahiptir.

Matris bir sistem için karışımın dielektrik sabiti, Maxwell tarafından,

$$\epsilon^* = \frac{y_1 \epsilon_1 \left(\frac{2}{3} + \frac{\epsilon_2}{2\epsilon_1} \right) + y_2 \epsilon_2}{y_1 \left(\frac{2}{3} + \frac{\epsilon_2}{3\epsilon_1} \right) + y_2} \quad (4.113)$$

olarak bulunmuştur (Kingery et al, 1976).

TiO₂ ile ilgili bazı veriler A.Buchner tarafından verilmiştir. TiO₂ çok yüksek bir dielektrik sabitine sahip olmakla birlikte yukarıdaki ifadelere uygulandığında iyi sonuçlar verir ve diğer karışımlar içinde iyi bir test materyali oluşturmaktadır (Bkz. Şekil 4.19).

Şekil 4.20'de ise TiO₂'nin hacimsel kesrine göre dielektrik sabitinin değişimi gösterilmiştir. TiO₂ hacimsel kesrinin büyük

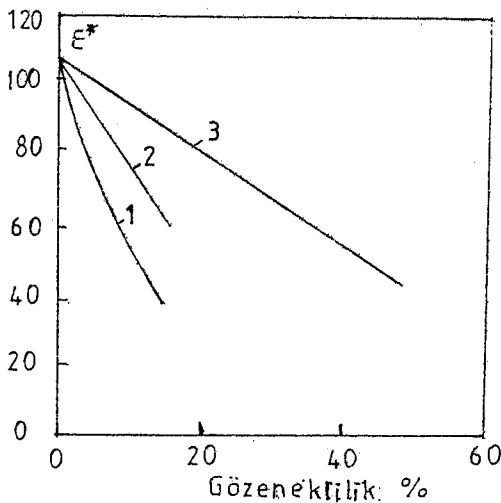
değerleri için Eş.(4.110),

Eş.(4.112) ve Eş.(4.113)'den

elde edilen grafikler giderek birbirlerine yaklaşmaktadır. Yüksek hacimsel kesir

değerlerinde seri, logaritmik

karışımlar ve Maxwell bağıntısı birbiriyle uyumludur.



Şekil 4.21. TiO₂'nin dielektrik sabitinin gözenek miktarına göre değişimi (Kingery et al, 1976).

Maddelerin gözenekli

oluşları onların kendilerine

özgü bir özelliğidir.

Şekil 4.21'de de bu gözenekliliğe göre TiO₂ çok kristalli

maddenin dielektrik sabitinin

değişimi gösterilmiştir.

Aynı zamanda şekilde

üç farklı fırınlama süresi

gözeneklilik

gözeneklilik artmaktadır. Fırınlama süresi arttıkça gözeneklilik azalmaktadır.

Şekildeki kollarda sağdan sola gidildikçe fırınlama süresi

artmaktadır. Açıkça görülebileceği gibi gözenekliliğin artmasıyla

dielektrik sabitinde azalma meydana gelir. Bunun sebebi ise, düşük dielektrik sabitli gözeneklerin yüksek dielektrik sabitli ortamda bulunmalarındır. Doğaldır ki gözenek veya boşluk miktarı arttıkça karışımın dielektrik sabiti azalma gösterecektir.

Eş.(4.109) ve Eş.(4.113), matris karışımında gözenekliliğin düşük olması durumunda geçerli olmasına karşılık yine de eşitlikler, gözenekliliğin yüksek olması durumunda bir çok maksatla yaklaşık bir sonuç vermesi açısından kullanılabilir.

4.4.7. Maxwell-Wagner, Odelevsky ve iletken bileşen içeren Bruggeman teorileri

Daha önceden de belirttiğimiz gibi, karışım ifadeleri matematiksel olarak türetildikleri gibi tamamen deneysel sonuçlara uyması açısından empirik olarakta verilebilirler. Burada vereceğimiz matris karışım ifadelerinde de empirik bağıntılar söz konusudur.

Kesim 4.4.6'da verilen Maxwell ifadesinden farklı olarak ϵ_1 dielektrik sabitli ortamda dağılmış ϵ_2 dielektrik sabitli küreciklerden oluşan matris karışım için, y_2 katkı maddesinin hacimsel kesri olmak üzere Maxwell-Wagner ifadesi,

$$\epsilon^* = \epsilon_1 \frac{2\epsilon_1 + \epsilon_2 + 2y_2(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{2\epsilon_1 + \epsilon_2 - y_2(\epsilon_2 - \epsilon_1)} \quad (4.114)$$

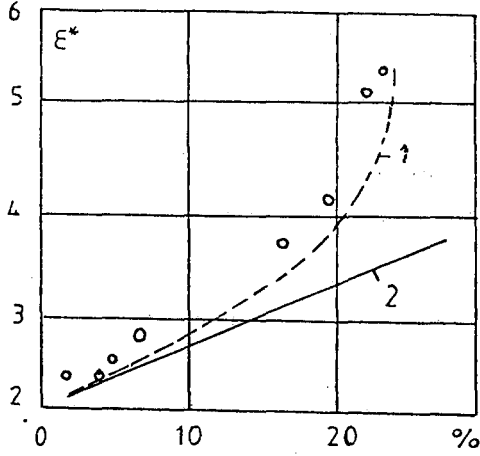
şeklindedir.

Matris karışımlar için bir başka ifade ise Odelevsky tarafından,

$$\epsilon^* = \epsilon_1 \left(1 + \frac{y_2}{\frac{1-y_2}{3} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1}} \right) \quad (4.115)$$

olarak verilmiştir.

Bu kesimdeki matris sistemler, dielektrik ortama mükemmel olmayan bir dielektrik bileşenin girdirilmesiyle oluşturulmuştur. Dolayısıyla böyle bir sistemin ϵ^* dielektrik sabitini hesaplariken ikinci bileşen, yani ϵ_1 dielektrik ortamına katılanan madde ilet-



Şekil 4.22. Civanın hacimsel kesrine göre vazelin ve civa karışımının ϵ^* dielektrik sabiti. Küçük daireler deneysel değerleri gösterir.
1-Eğrisi Eş.(4.116)'dan,
2-Eğrisi Eş.(4.117)'den hesaplanmıştır (Tareev, 1975).

ken olduğundan, $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ olarak kabul edilmiştir. Artık böyle bir sistemde karışımın dielektrik sabiti bulunurken tek bir bileşenin, onunda ϵ_1 , olduğu kabul edilir. Bu matris sistem daha önce de bahsedilen iletken bileşenler içeren matris sistemlere benzemektedir. Dolayısıyla, böyle bir matris sistemin dielektrik sabiti, Bruggeman tarafından;

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon_1}{(1-\gamma_2)^3} \quad (4.116)$$

olarak verilmiştir.

İletken bileşenleri içeren matris karışımların ϵ^* değeri $\epsilon \rightarrow \infty$ durumunda yukarıda olduğu gibi matris karışımlar için ileri sürülen ifadelerden hesaplanabilir. Gerçekte bir iletkenin dielektrik sabitinden söz etmek mümkün olmamakla birlikte Eş.(4.114) ve Eş.(4.115)'de $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ ve γ_2 'nin birden çok küçük olması durumunda,

$$\epsilon^* = \epsilon_1 (1 + 3\gamma_2) \quad (4.117)$$

ifadesi bulunabilir. Bu eşitlik ve yukarıdaki diğer eşitlikten bulunan sonuçlara göre yapılan çizim Şekil 4.22'de gösterilmiştir (Tareev, 1975).

5. SONUÇ

Dört grupta topladığımız karışımların ilki olan bileşenleri paralel konumda bulunan karışımlara ait dielektrik sabiti,

$$\epsilon^* = \sum_{i=1}^n y_i \epsilon_i \quad (4.14)$$

ifadesiyle, ikincisi olan bileşenleri seri konumda bulunan karışımlara ait dielektrik sabiti ise,

$$\frac{1}{\epsilon^*} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\epsilon_i} \quad (4.24)$$

ifadesiyle verilir.

İstatistiksel karışımlar haliyle ilgili Wiener teorisine göre, bu tür karışımların dielektrik sabiti,

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\epsilon_i}} \leq \epsilon^* \leq \sum_{i=1}^n y_i \epsilon_i \quad (4.29)$$

olarak verilir. İfade, istatistiksel karışımlara ait dielektrik sabitinin bileşenlerin seri ve paralel konumda bulunduğu durumlara ait değerler arasında yer aldığını göstermektedir.

Lichtenecker-Rother teorisince iki bileşenden oluşan istatistiksel karışımın belirli bir dielektrik sabitine sahip olması halinde, bileşenlerin hangi oranlarda katıldığını hesaplamak üzere oluşturulan nomogram oldukça kullanışlıdır.

İstatistiksel karışımlar için ileri sürülen bağıntılardan biri de,

$$\frac{\epsilon^*-1}{\epsilon^*+2} = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\epsilon_i-1}{\epsilon_i+2} \quad (4.35)$$

ifadesiyle verilen Clausius-Mossotti eşitliğidir.

Dielektrik sabitleri birbirlerine çok yakın olan dielektriklerden oluşmuş karışımlar için ise, bileşenleri paralel konumda bulunan karışımlar için de geçerli olan ifade kullanılır.

Karbontetraklorür, benzen ve siklohegzanın birbirleriyle oluşturdıkları karışımlar, sonuçları bakımından ilginçtir. Karbontetraklorür ve benzen karışımında her iki bileşende polar değildir ve Eş.(4.14) ile Eş.(4.35)'den bulunan sonuçlar birbirlerine oldukça yakınlık gösterir. Karbontetraklorür ve siklohegzan karışımıyla benzen ve siklohegzan karışımlarında teorik ve deneysel değerler arasındaki farkta büyüktür. Zira siklohegzan polardır.

Matris karışımlar için ileri sürülen teorilerden birisi Rayleigh teorisidir. Bir matris karışımın dielektrik sabiti, eşit boyutlu küresel parçacıklardan oluşmuş kübik bir diziliş göstermesi durumunda,

$$\epsilon^* = \epsilon_1 \left[1 - \frac{3\gamma_2 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{2\epsilon_1 + \epsilon_2 - \gamma_2 (\epsilon_2 - \epsilon_1)} \right] \quad (4.80)$$

olup; γ hacimsel kesrinin büyük olması durumunda Böttcher teorisine göre,

$$\frac{\epsilon^* - 1}{3\epsilon^*} = \gamma_2 \frac{\epsilon_2 - \epsilon^*}{2\epsilon^* + \epsilon_2} \quad (4.84)$$

olup; γ 'nin küçük olması durumunda Bruggeman teorisine göre,

$$3 \frac{\epsilon_2 - \epsilon^*}{\sqrt{\epsilon^* / \epsilon_1}} = (1 - \gamma_2) (\epsilon_2 - \epsilon_1) \quad (4.88)$$

olup; çift matris durumunda Looyenga teorisine göre,

$$\epsilon^* = \left[\epsilon_1^{1/3} + \gamma_2 (\epsilon_2^{1/3} - \epsilon_1^{1/3}) \right]^3 \quad (4.95)$$

şeklindedir.

$\text{CCl}_4/\text{CBr}_4$ 'de dağılmış KCl karışımı, $\text{CCl}_4/\text{C}_6\text{H}_6$ 'da dağılmış NH_4Cl karışımı ve CCl_4 'de dağılmış cam küreciklerden oluşmuş karışımlar üzerinde yapılan çalışmalar, Böttcher ve Looyenga eşitliklerinin, Rayleigh ve Bruggeman eşitliklerinden daha iyi sonuçlar verdiğini ortaya çıkarmıştır.

Hanai ise matris karışımları oluşturan bileşenlerin birinin

iletken maddeden olması durumunda Eş.(4.84)'ün,

$$\frac{\eta^* - \epsilon_r}{3\eta^*} = \gamma_2 \quad (4.103)$$

şekline, Eş.(4.80)'in,

$$\epsilon^*(0) = \epsilon_1 \left(1 + \frac{3\gamma_2}{1 - \gamma_2} \right) \quad (4.105)$$

şekline ve Eş.(4.88)'in ise

$$\epsilon^*(0) = \epsilon_1 (1 - \gamma_2) \quad (4.106)$$

şekline dönüşebileceğini bulmuştur. Lanolin/vazalindeki civa karışımı, Bezir yağı ve demir karışımı ile madeni yağ ve demir karışımı üzerinde yapılan çalışmalarda üç eşitlikten de elde edilen sonuçların birbirine uyumlu olduğu fakat, yüksek hacimsel kesirler için son eşitliğin daha iyi sonuçlar verdiği ortaya çıkarılmıştır. Ancak, yukarıda verilen üç eşitliğin aynı hacimsel kesirli iletken olmayan malzemelere uygulanması halinde çok farklı sonuçlar verdiği saptanmıştır.

Bir karışımın dielektrik sabiti, logaritmik karışım yasasına göre,

$$\log \epsilon^* = \sum_{i=1}^n \gamma_i \log \epsilon_i \quad (4.112)$$

Maxwell teorisine göre,

$$\epsilon^* = \frac{\gamma_1 \epsilon_1 \left(\frac{2}{3} + \frac{\epsilon_2}{3\epsilon_1} \right) + \gamma_2 \epsilon_2}{\gamma_1 \left(\frac{2}{3} + \frac{\epsilon_2}{3\epsilon_1} \right) + \gamma_2} \quad (4.113)$$

şeklindedir.

TiO₂-kil karışımı için Eş.(4.14), TiO₂-ZrO₂ karışımı için Maxwell eşitliği ve TiO₂-polistren karışımı için Eş.(4.112), daha

iyi sonuçlar vermiştir.

Karışımların dielektrik sabitlerinin hesaplanmasında bazı özel tip karışımlarda yetersizlikler görülmektedir. Oysa, aynı tip karışımlar için bile birden fazla formülün ileri sürülmüş olması, olayın karmaşıklığını ortaya koymaktadır. Ancak, dielektrik karışımın, karışım türünün ve ileri sürülen formüllerden bazılarının seçilmesi karışımın dielektrik sabitinin hesaplanmasını kolaylaştıracaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Beine, A. H., Dachwitz, E., Wodniok, L., et al, 1986, On the assessment of dielectric relaxation parameters of liquids, Z. Naturforsch, 41 a, 1060-1070 p.
- Bergman, D. J., 1981, Bounds for the complex dielectric constant of a two-component composite material, Physical Review B, 23, G, 3058-3065 p.
- Bergman, D. J., 1978, The dielectric constant of a composite materials-a problem in classical physics, Physics Reports, 43, 9, 377-407 p.
- Böttcher, C. J. F., 1973, Theory of electric polarization, Elsevier Scientific Publishing Company, 1, 377 p.
- Böttcher, C. J. F. and Bordewijk, P., 1978, Theory of electric polarization, Elsevier Scientific Publishing Company, 2, 561 p.
- Böttcher, C. J. F., 1945, Rec. Trav. Chim., 64, 47 p.
- Bruggeman, D. A. G., 1935, Ann. Physik, 5-24, 636 p.
- Chelkowski, A., 1980, Dielectric physics, Elsevier Scientific Publishing Company, 396 p.
- Cohn, R. H. and Greer, S. C., 1986, Condensed phases and macromolecules, J. Phys. Chem., 90, 4163-4166 p.
- Delsignore, M., Merajver, S., Eyring, E. M., et al, 1983, Molecular relaxation dynamics of aqueous macrocycles: 15C5 water mixtures, Journal of molecular liquids, 26, 117-138 p.
- Diget, R., 1986, Density dependence of refractive index and static dielectric constant, Physics, 139-140 B, 126-130 p.
- Hill, E. N., Vaughan, E. W., Price, A. M., et al, 1969, Dielectric properties and molecular behaviour, Van Nostrand Reinhold Company, 279 p.
- Kingery, W. D., Bowen, H. K. and Uhlmann, D. R., 1976, Ceramics, John Wiley and Sons, 1032 p.
- Looyenga, H., 1965, Physica, 31, 401 p.
- Martinelli, M., Rolla, P. A. and Tombari, E., 1985, A method for dielectric loss measurements by a microwave cavity in fixed resonance condition, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques,

33, 9, 779-783 p.

- Minkin, V. I., Osipov, O. A. and Zhdanov, Y. A., 1970, Dipol moment in organic chemistry, Plenum Press, 285 p.
- Moody, G. J. and Thomas, J. D. R., 1971, Dipol moments in inorganic chemistry, University Press, 83 p.
- Omar, M. A., 1975, Elementary solid state physics, Addison-Wesley Publishing Company, 669 p.
- Orhun, Ö., 1981, Amonyumhidrojensülfatın dielektrik özelliklerinin incelenmesi, Doktora tezi, Eskişehir Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi, 134 s.
- Payne, D. A. and Cross, L. E., 1984, Microstructure-property relations for dielectric ceramics II: The Brick-Wall model of polycrystalline microstructure, Microstructure and Properties of Ceramic Materials, North-Holland Physics Publishing, 380-390 p.
- Smyth, C. P., 1955, Dielectric behaviour and structure dielectric constant and loss, dipol moment and molecular structure, Mc Graw-Hill Book Company, 199 p.
- Tareev, B., 1975, Physics of dielectric materials, English Translation, Mir Publishers, 270 p.
- Tveekrem, J. L., Cohn, R. H. and Greer, S. C., 1978, The effect of critical fluctuations on chemical equilibrium, J. Chem. Phys., G, 3602-3606 p.

EK.1. DEBYE EŞİTLİĞİNİN TÜRETİLMESİ

Elektrik alanda dipolar molekül topluluğunun sürekli momentleri Boltzmann yasasına uygun olarak dağılım gösterirler. Elektrik alanla θ açısı yapan μ dipol momentinin sahip olduğu potansiyel enerji,

$$U = -\mu F \cos \theta \quad (1)$$

ve Boltzmann yasasına göre θ ortalama açılı $d\omega$ katı açısı içinde dipollerin bulunma olasılığı,

$$\frac{\int \mu \cos \theta \exp[(\mu F \cos \theta) / kT] d\omega}{\int \exp[(\mu F \cos \theta) / kT] d\omega}$$

dır. $d\omega$ katı açı elemanı θ ile $\theta + d\theta$ yarıaçı konisi arasında değerler alabilir, böylece $d\omega = 2\pi \sin \theta d\theta$. Dipol momentin alan doğrultusundaki ortalama bileşeni,

$$\begin{aligned} \mu \langle \cos \theta \rangle &= \frac{\int_0^\pi \mu \cos \theta \exp[(\mu F \cos \theta) / kT] \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \exp[(\mu F \cos \theta) / kT] \sin \theta d\theta} \\ \mu \langle \cos \theta \rangle &= \frac{\int_{-1}^{+1} \mu x \exp(\mu F x / kT) dx}{\int_{-1}^{+1} \exp(\mu F x / kT) dx} \end{aligned} \quad (2)$$

Burada $\langle \cos \theta \rangle$, $\cos \theta$ 'nın ortalama değeri olup $x = \cos \theta$ olarak alınmıştır. İntegraller alınırca,

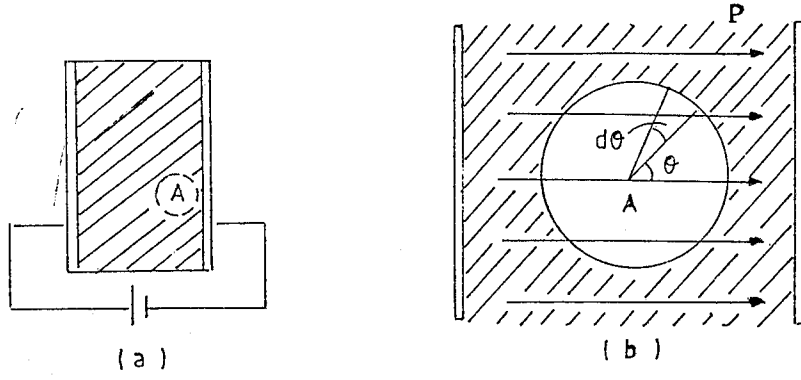
$$\langle \cos \theta \rangle = \coth(\mu F / kT) - (kT / \mu F)$$

$$\langle \cos \theta \rangle = L(\mu F / kT) \quad (3)$$

Burada $L(y) = \coth y - (1/y)$ ifadesi "Langevin Fonksiyonu" olarak isimlendirilir.

E, genellikle $\mu F / kT \ll 1$ olacaktır. Örneğin, $\mu = 10^{-18}$ esb ve $T = 273$ °K olduğu kabul edilirse,

$$\begin{aligned} kT / \mu &= (1,38 \times 10^{-16}) (273) / 10^{-18} \\ kT / \mu &\approx 10^7 \text{ volt cm}^{-1} \end{aligned}$$



Şekil E.1. a) Dielektrikteki bir molekül, b) Molekülün kutuplanma durumu.

dir ve uygulanan alan genellikle daha küçüktür. $y \ll 1$ durumunda,

$$\coth y \simeq \frac{1+y^2/2!}{y+y^3/3!}$$

$$\coth y \simeq \frac{1}{y} + \frac{y}{3} \quad (4)$$

buradan,

$$L(y) \simeq \frac{y}{3} \quad (5)$$

$\mu E/kT \ll 1$ durumunda dipollerden dolayı kutuplanma,

$$P_{\text{dip.}} = N_i \mu \langle \cos \theta \rangle$$

$$P_{\text{dip.}} = \frac{N_i \mu^2 F}{3kT} \quad (6)$$

dir. Burada N_i , birim hacimdeki dipol moment sayısıdır. Toplam kutuplanma,

$$P = N_i (\alpha + \mu^2/3kT) E \quad (7)$$

Uygulanan E alanına göre F yerel alanını bulmak için toplam kutuplanma olduğu gibi kalır.

İç alanın Lorentz eşitliğince bir dielektrikle dolu kondansatörün içindeki alan,

$$E = V/h$$

$$E = 4\pi Q/C \quad (8)$$

Dielektriğin herhangi bir A noktasındaki tek bir moleküle etkiyen F alanını bulmaya çalışalım (Şekil E.1). Bu alan, komşu moleküllerin kutuplanmasına bağlı olacaktır. A yarıçaplı küre, kondansatörün boyutlarıyla kıyaslandığında oldukça küçük ama, molekülün boyutlarıyla kıyaslandığında oldukça büyüktür, böylece ϵ dielektrik sabitli homojen bir ortamdaki gibi küre dışında da materyalden bahsetmek mümkündür. Kürenin içindeki materyal, tek tek moleküllerin düzenlenmesiyle oluşmuştur. Kutuplanma, kondansatör levhalarına dik ve küre yüzeyi üzerinde $P \cos \theta$ 'dir. Burada θ , Şekil E.1 (b)'de gösterilen açıdır. A'daki alan $E_1 = 4\pi Q/\epsilon_0$, E_2 ve E_3 olmak üzere üç tanedir.

E_2 alanını hesaplamak nisbeten basittir. Küre yüzeyi üzerinde θ ve $\theta + d\theta$ açılarıyla tanımlanan bir yüzey elemanı alınırsa bu $2\pi r^2 \sin\theta d\theta$ yüzölçümüne ve kutuplanmanın normal bileşenine eşit yüzeysel yük yoğunluğuna sahiptir, yani $P \cos \theta$ 'dir. Simetri-den dolayı A'da P'ye dik alan oluşmaz, P'ye paralel yönde bir alan oluşur,

$$\frac{(\text{yüzey})(\text{yüzeyce yük yoğ.})(\cos \theta)}{\epsilon_0 (\text{uzaklık})^2} = \frac{(2\pi r^2 \sin\theta d\theta)(P \cos \theta)(\cos \theta)}{\epsilon_0 r^2}$$

θ üzerinden integral alınırsa,

$$E_2 = \frac{2\pi}{\epsilon_0} \int_0^\pi P \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

$$E_2 = \frac{4\pi P}{3\epsilon_0} \quad (9)$$

E_3 alanını, moleküllerin uzaydaki dağılımını bilmediğimiz sürece hesaplamak mümkün değildir. Özel bir durumda, moleküller kübik bir yapı gösteriyorlarsa, E_3 sifıra eşittir. İdeal bir gaz içinde E_3 sifırdır, böylece;

$$E_T = E_1 + E_2 \quad (10)$$

$$E_T = E + 4\pi P / 3\epsilon_0$$

$$4\pi P = (\epsilon - 1)\epsilon_0 E$$

$$E_T = (\epsilon - 2)E / 3 \quad (11)$$

Eş.(11) ile kutuplanma ifadesinden,

$$P = N_i (\alpha + \mu^2 / 3kT) E$$

$$P = N_i (\alpha + \mu^2 / 3kT) (\epsilon + 2)E / 3 \quad (12)$$

ve dolayısıyla,

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = 4\pi N_i (\alpha + \mu^2 / 3kT) / 3\epsilon_0 \quad (13)$$

Bu eşitlik, dielektrik sabiti için Debye eşitliğidir. Dielektrik sabiti materyalin N_i yoğunluğuna bağlıdır. Eğer, materyal M moleküler ağırlığına ve ρ_m yoğunluğuna sahipse, $N_i = N \rho_m / M$ 'dir, burada N , Avogadro sayısı olmak üzere Debye eşitliği,

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{M}{\rho_m} = 4\pi N (\alpha + \mu^2 / 3kT) / 3\epsilon_0 \quad (14)$$

şeklinde yazılabilir.

EK.2. ONSAGER EŞİTLİĞİNİN TÜRETİLMESİ

Sistemdeki alan,

$$\nabla^2 U = 0 \quad (1)$$

Laplace denklemiyle hesaplanır, burada $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ şeklindedir. Küresel bölgenin içindeki ve dışındaki potansiyeller sırasıyla U_1 ve U_2 olup bunların Şekil 3.4'de gösterildiği gibi r ve θ 'ya bağlı olduğu, θ 'den bağımsız olduğu görülebilir. Potansiyeller θ 'nın tam bir fonksiyonu olacaktır, böylece çözümde $\sin \theta$ ifadesi değil $\cos \theta$ ifadesinin gelmesi beklenir. Küresel bölgenin dışındaki noktalarda E alanı ($U = -E r \cos \theta$ potansiyeline benzer), kutuplanma yüklerinin oluşturduğu alanla etkileşeceklerdir. Bu kutuplanma yüklerinin bir dipole çok benzediği söylenebilir, çünkü çok küçük bir uzaklıkla ayrılmış pozitif ve negatif yükler şeklindedirler. Bundan dolayı küresel bölgenin dış ve iç bölgesindeki potansiyeller sırasıyla,

$$U_2 = -E r \cos \theta + (A \cos \theta) / r^2 \quad (2)$$

$$U_1 = B r \cos \theta + (B' \cos \theta) / r^2 \quad (3)$$

şeklindedir. Eş.(2)'nin ikinci terimi kutuplanma yükleri tarafından oluşturulan potansiyeldir ve A sabiti sınır koşullarından bulunabilir. Eş.(3)'de ise $B' = 0$ olduğunu söyleyebiliriz, aksi takdirde r 'nin sıfıra yaklaşması durumunda U_1 sonsuza yaklaşacaktır. $r=a$ yüzeyindeki sınır koşulları şöyle yazılabilir: D 'nin normal bileşeni,

$$-\epsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial r} = -\epsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial r} \quad (r=a \text{ 'daki})$$

ve E_1 'nin teğetsel bileşeni,

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} \quad (r=a \text{ 'daki})$$

Bunlar,

$$\begin{aligned} \epsilon_2 (E \cos \theta + 2A \cos \theta / a^3) &= \epsilon_1 (-B \cos \theta) \\ -E \sin \theta + A \sin \theta / a^3 &= B \sin \theta \end{aligned} \quad (4)$$

şeklindedir ve sabitler için çözümü,

$$\frac{A}{a^3} = - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} E$$

$$B = - \frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} E$$

olarak bulunur. Potansiyeller,

$$U_1 = - \frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} E r \cos \theta \quad (5)$$

$$U_2 = - E r \cos \theta - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{E \cos \theta}{r^2} a^3 \quad (6)$$

şeklindedir. Böylece kürenin iç tarafındaki alan,

$$\vec{E}_i = \frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} \vec{E} \quad (7)$$

ve Onsager modeline göre $\epsilon_1 = 1$ ve $\epsilon_2 = \epsilon$ olduğuna göre kovuk alanı,

$$\vec{E}_G = \frac{3\epsilon}{2\epsilon + 1} \vec{E} \quad (8)$$

olacaktır.

Onsager alanını hesaplamak için, bir dış alanın olmaması durumunda $\theta = 0^\circ$ yönündeki eksenlerle kürenin merkezindeki bir noktada p dipol momenti dikkate alınır. Dolayısıyla dipol, küre yüzeyi üzerinde kutuplanmaya neden olacaktır ve potansiyelleri önceki forma oldukça benzer olduğunu kabul eder. Bu durumda $E=0$ alınır ve $B'=0$ olarak kabul edilemez, çünkü p dipolü kürenin merkezindeki bir yerde oluşur. Bu durumda potansiyeller,

$$U_2 = A \cos \theta / r^2 \quad (9)$$

$$U_1 = B r \cos \theta + B' \cos \theta / r^2 \quad (10)$$

olarak bulunur. Önceden olduğu gibi, $r=a$ 'daki sınır koşulları kabul edilip çıkan eşitlikler çözümlerse, sabitler arasındaki bağıntılar aşağıdaki şekilde bulunur:

$$A = \frac{3 \epsilon_1}{2 \epsilon_2 + \epsilon_1} B'$$

$$B = - \frac{2 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{2 \epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{B'}{a^3}$$

Bu sabitler, potansiyel ifadelerinde yerlerine yazılırsa,

$$U_1 = - \frac{2 (\epsilon_2 - \epsilon_1) B' r \cos \theta}{2 \epsilon_2 + \epsilon_1 a^3} + \frac{B' \cos \theta}{r^2} \quad (11)$$

$$U_2 = \frac{3 \epsilon_1}{2 \epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{B' \cos \theta}{r^2} \quad (12)$$

olarak bulunur. Eğer, küre yarıçapının sonsuza yaklaştığı kabul edilirse,

$$U_1 = p \cos \theta / \epsilon_0 \epsilon_1 r^2$$

$$B' = p / \epsilon_0 \epsilon_1$$

ve genelde,

$$U_1 = - \frac{2 (\epsilon_2 - \epsilon_1) p r \cos \theta}{(2 \epsilon_2 + \epsilon_1) \epsilon_0 \epsilon_1 a^3} + \frac{p \cos \theta}{\epsilon_0 \epsilon_1 r^2} \quad (13)$$

$$U_2 = \frac{3 \epsilon_1}{2 \epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{p \cos \theta}{\epsilon_0 \epsilon_1 r^2} \quad (14)$$

yazılabilir. U_1 'deki ikinci terim sadece dipolün kendisinin oluşturduğu potansiyeli, ilk terim ise kürenin yüzeyi üzerinde dipol yüklerinden dolayı oluşturulan potansiyeli gösterir. $\epsilon_1 = 1$ ve $\epsilon_2 = \epsilon$ Onsager yaklaşımını kullanarak tepki alanı için,

$$\vec{E}_R = \frac{2 (\epsilon - 1)}{2 \epsilon + 1} \frac{\vec{p}}{a^3} \frac{1}{\epsilon} \quad (15)$$

ifadesi bulunur.

Molekül üzerine etkiyen iç alan,

$$\vec{E}_i = \vec{E}_G + \vec{E}_R$$

$$\vec{E} = g \vec{E}_i + \frac{r \vec{p}}{a^3} \quad (16)$$

şeklindedir, burada;

$$g = 3 \epsilon / (2 \epsilon + 1)$$

$$r = 2 (\epsilon - 1) / (2 \epsilon + 1) \epsilon$$

\vec{E} sonsuza yaklaştığında Onsager iç alanı belli bir değere, Debye iç alanı ise sonsuza yaklaşır.

p_T toplam momenti, sürekli μ momentlerinin vektörel toplamıdır ve $\propto E$ momenti yerel alan tarafından oluşturulmuştur,

$$\begin{aligned}\vec{p}_T &= \vec{\mu} + \alpha \vec{E}_i \\ \vec{p}_T &= \vec{\mu} + \alpha g \vec{E} + \frac{r \alpha \vec{p}_T}{a^3} \\ \vec{p}_T &= \frac{\vec{\mu} + \alpha g \vec{E}}{1 - \frac{r \alpha}{a^3}}\end{aligned}\quad (17)$$

Bu eşitlik tepki alanının molekülün toplam momentiyile nasıl artma olduğunu göstermektedir. \vec{p}_T ifadesi iç alan ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= g \vec{E} + \frac{r/a^3}{1 - r\alpha/a^3} (\vec{\mu} + \alpha g \vec{E}) \\ \vec{E}_i &= \frac{g \vec{E} + r \vec{\mu}/a^3}{1 - r\alpha/a^3}\end{aligned}\quad (18)$$

şeklinde iç alan ifadesi bulunur.

Molekül üzerine etkiyen döndürme kuvveti,

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{p}_T \times \vec{E}_i \\ \vec{C} &= \frac{(\vec{\mu} + \alpha g \vec{E}) \times (g \vec{E} + r \vec{\mu}/a^3)}{(1 - r\alpha/a^3)^2} \\ \vec{C} &= \frac{(g - r g \alpha/a^3)}{1 - r\alpha/a^3} \vec{\mu} \times \vec{E} \\ \vec{C} &= \frac{g}{1 - r\alpha/a^3} \vec{\mu} \times \vec{E}\end{aligned}\quad (19)$$

şeklindedir. Sonuç olarak, yatayla θ açısı yapan bir alanla dipol enerjisi,

$$U = - \frac{g}{1 - r\alpha/a^3} \mu E \cos\theta \quad (20)$$

Boltzmann eşitliğini kullanarak $\langle \cos \theta \rangle$ 'nın değerini Debye teorisindeki gibi hesaplanırsa,

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{g}{1 - r\alpha/a^3} \frac{\mu E}{3kT} \quad (21)$$

sonucu bulunur. Alana paralel moment ifadesi,

$$\frac{\mu \langle \cos \theta \rangle + \alpha g E}{1 - r\alpha/a^3} = \frac{g}{(1 - r\alpha/a^3)^2} \frac{\mu^2 E}{3kT} + \frac{\alpha g}{1 - r\alpha/a^3} E \quad (22)$$

böylece kutuplanma,

$$P = \frac{\epsilon_0}{4\pi} (\epsilon - 1) E$$

$$P = \frac{Ng}{1 - r\alpha/a^3} \left(\alpha + \frac{1}{1 - r\alpha/a^3} \frac{\mu^2}{3kT} E \right) \quad (23)$$

olacaktır.

Onsager,

$$\frac{\eta_k^2 - 1}{\eta_k^2 + 2} = \frac{\alpha}{\epsilon_0 a^3} \quad (24)$$

ve η_k^2 'ye göre,

$$1 - r\alpha/a^3 = 3(2\epsilon + \eta_k^2)/(2\epsilon + 1)(\eta_k^2 + 2)$$

$$4\pi N\alpha/\epsilon_0 = 3(\eta_k^2 - 1)/(\eta_k^2 + 2)$$

bağıntılarında bir "iç kırılma indisi" tanımlanmıştır.

Bu durumda, statik dielektrik sabiti için Onsager eşitliği,

$$\frac{(\epsilon - \eta_k^2)(2\epsilon + \eta_k^2)}{\epsilon(\eta_k^2 + 2)^2} = \frac{4\pi N\mu^2}{9kT\epsilon_0} \quad (25)$$

şeklinde verilir.

EK.3. KIRKWOOD EŞİTLİĞİNİN TÜRETİLMESİ

i'inci moleküldeki momentin ortalama bileşeni,

$$\langle \mu_i \cdot e' \rangle = \frac{\int (p_i \cdot e') \exp[-U(x, E_0)/kT] dx}{\int \exp[-U(x, E_0)/kT] dx} \quad (1)$$

şeklindedir.

Alan içinde bulunan x konumundaki numunenin enerjisi, alanın olmaması durumunda aynı konumdaki enerji cinsinden ifade edilebilir. Numunenin sıfır alanda x konumunda olduğu kabul edilir. Bu durumda yaklaşık p(x) gibi bir dipol momente sahip olacaktır. Dipollerin konumları değişmediğinde E₀ alanı uygulanırsa, uygulanan alandan dolayı enerjideki değişim,

$$U(x, E_0) - U(x, 0) = -p(x) E_0 \quad (2)$$

olacaktır. Yukarıdaki eşitliklerde Boltzmann faktörü,

$$\exp[-U(x, E_0)/kT] = \exp[-U(x, 0)/kT] \exp[p(x) E_0/kT]$$

şeklinde yazılabilir. Eğer p(x)E₀/kT ≪ 1 durumunda seriye açılırsa, p(x)E₀/kT ifadesinin ihmal edilebileceği görülebilir.

Boltzmann faktörü,

$$\langle \mu_i \cdot e' \rangle = \frac{\int (p_i \cdot e') [1 + p(x) E_0/kT] \exp[-U(x, 0)/kT] dx}{\int [1 + p(x) E_0/kT] \exp[-U(x, 0)/kT] dx} \quad (3)$$

Yukarıdaki ifadenin ikinci terimi ilkiyle kıyaslandığında ihmal edilebilir ve ifade,

$$\int \exp[-U(x, 0)/kT] dx = \bar{J}^{-1} \quad (4)$$

biçimine dönüşür. İfadenin ikinci terimi bu yolla ihmal edilemez, çünkü görülebileceği gibi ilk terim sıfırdır. İfadedeki ilk terim,

$$\bar{J} \int (\mu_i \cdot e') \exp[-U(x, 0)/kT] dx$$

olup, bu simetriden dolayı sıfır olan alanın varlığında seçilen bir yönde i'inci molekülün ortalama momentidir. Böylece,

$$\langle \mu_i \cdot e' \rangle = \int (\mu_i \cdot e') [p(x) E_0 / kT] \exp[-U(x,0) / kT] dx$$

$$\langle \mu_i \cdot e' \rangle = \langle (\mu_i \cdot e') [p(x) \cdot e'] \rangle E_0 / kT \quad (5)$$

ifadesi bulunur, burada son ortalama $E_0 = 0$ durumunu gösterir, zira ağırlık çarpanı $\exp[-U(x,0)/kT]$ 'dir. Dolayısıyla,

$$\langle \mu_i \cdot e' \rangle = \langle \mu_i \cdot p(x) \rangle E_0 / 3kT \quad (6)$$

Kirkwood iki aşamada $\langle \mu_i \cdot p(x) \rangle$ ortalamasını hesaplamıştır: İlki rastgele bütün değerleri alan i'inci molekülün dışındaki bütün moleküller için,

$$\langle \mu_i \cdot e' \rangle = \langle \mu_i \cdot \bar{p}_i \rangle E_0 / 3kT \quad (7)$$

dir, burada \bar{p}_i tek bir i'inci moleküle sahip numunenin ortalama momentidir. Sonraki ortalama l'inci molekülün bütün değerleri üzerindedir. Çünkü bu ortalamanın sonucu numunenin yüzeyine yakın az sayıdaki molekülün dışındaki bütün moleküller için aynı olacaktır,

$$\langle \mu_i \cdot p \rangle = \langle \mu_i \cdot \bar{p}_i \rangle$$

$$\langle \mu_i \cdot p \rangle = \langle \mu_i \cdot \bar{p} \rangle \quad (8)$$

p momentini molekülün içindeki herhangi bir yerde sabittir, ama diğerleri iki kısma ayrılabilen rastgele bütün mümkün değerleri alabilir. Momentin biri sabit molekül tarafından homojen numunede oluşur, diğeri onun etrafında dönen moleküllerin yerel alanlarından kaynaklanan momenttir. Kirkwood'a göre bu iki durum aşağıdaki şekilde açıklanmıştır: r_0 yarıçaplı küre, numunenin molekülüdür. Bu küre, homojen ve moleküllerle karşılaştırıldığından yeterince büyük ama, numuneyle (R yarıçaplı) kıyaslandığında yeterince küçük olmalıdır. Bu durumlar, $r_0 \rightarrow \infty$ ve $R/r_0 \rightarrow \infty$ durumlarında yazılabilir. Kirkwood,

$$\bar{\mu} = \lim_{\substack{r_0 \rightarrow \infty \\ R/r_0 \rightarrow \infty}} \bar{p}(R_0, r_0) \quad (9)$$

şeklinde kürenin oldukça küçük momentini tanımlar. Bütün kürenin \bar{p}_T momentini,

$$\bar{p}_T = \bar{\mu} + \int P d\psi \quad (10)$$

olarak yazılabilir, burada integral r_0 yarıçaplı kürenin dışındaki numune üzerinden alınır ve P kutuplanması numunenin içindeki U_i potansiyeline göre ifade edilebilir,

$$4\pi \vec{P} = -\epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{\nabla} U_i$$

$$4\pi \int \vec{P} d\psi = -\epsilon_0 (\epsilon - 1) \int \vec{\nabla} U_i d\psi$$

$$4\pi \int P d\psi = -\epsilon_0 (\epsilon - 1) \int_{\text{dış}} U_i dS + \epsilon_0 (\epsilon - 1) \int_{\text{iç}} U_i dS$$

burada son taraftaki iki integral bütün küre yüzeyi üzerinden ve r_0 yarıçaplı küresel bölgenin yüzeyi üzerinden alınır. Numunenin içindeki U_i potansiyeli ve numunenin dışındaki U_d potansiyeli dipol uzaklığı olan x 'in kuvveti cinsinden seriye açılabilir. İntegraller $r_0 \rightarrow \infty$ ve $R/r_0 \rightarrow \infty$ sınır koşullarında hesaplanabilir,

$$\bar{p}_T = \frac{9\epsilon}{(\epsilon + 2)(2\epsilon + 1)} \bar{\mu} \quad (11)$$

burada $\bar{\mu}$, eğer yerel düzenleme yoksa p dipol momentine eşittir. İntegralde,

$$\bar{\mu} = g \mu \quad (12)$$

olarak yazılabilir, burada g korelasyon parametresidir. Buna göre,

$$\langle \mu_i \cdot e' \rangle = \langle \mu \cdot \bar{p}_T \rangle \epsilon_0 / 3kT$$

$$\langle \mu_i \cdot e' \rangle = \frac{9\epsilon}{(\epsilon + 2)(2\epsilon + 1)} \frac{g \mu^2}{3kT} \epsilon_0 \quad (13)$$

dir. Dielektrik sabiti cinsinden tanımlanmış denklem,

$$\epsilon_0 (\epsilon - 1) = 4\pi (\epsilon + 2) M / 3\psi \epsilon_0 \quad (14)$$

0 halde,

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi M}{3V\epsilon_0 E_0}$$

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi N \langle \mu_i \cdot e' \rangle}{3V\epsilon_0 E_0} \quad (15)$$

$\langle \mu_i \cdot e' \rangle$ için yukarıda bulunan değer yerine yazılırsa, polar olmayan dipollerin Kirkwood eşitliği bulunmuş olur,

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi N}{3V\epsilon_0} \frac{g\epsilon}{(\epsilon + 2)(2\epsilon + 1)} \frac{g\mu^2}{3kT}$$

$$\frac{(\epsilon - 1)(2\epsilon + 1)}{3\epsilon} = \frac{4\pi N}{3V\epsilon_0} \frac{g\mu^2}{3kT} \quad (16)$$

EK.4. FROHLICH EŞİTLİĞİNİN TÜRETİLMESİ

Küresel bölge x 'in fonksiyonu olarak $p(x)$ dipol momentine sahipse, alan yönündeki ortalama moment,

$$\langle \mu \cdot e' \rangle = \frac{\int [p(x) \cdot e'] \exp[-U(x,E)/kT] dx}{\int \exp[-U(x,E)/kT] dx} \quad (1)$$

şeklindedir. Kirkwood teorisindeki gibi $U(x,E)$ enerjisi, $U(x,0)$ cinsinden ifade edilebilir. Onsager kovuk alanına eşit,

$$\vec{E}_G = \frac{3E}{2E+1} \vec{E} \quad (2)$$

alanının $p(x)$ momentine tesirinden dolayı enerjideki değişim,

$$U(x, E) - U(x,0) = -\vec{p}(x) \cdot \vec{E}_G(x) \quad (3)$$

olacaktır ve böylece Boltzmann çarpanı $\vec{p}(x) \cdot \vec{E}_G/kT$ serisine genişletilir ve yüksek mertebeli terimler seride ihmal edilirse,

$$\exp[-U(x,E)/kT] = [1 + \vec{p}(x) \cdot \vec{E}_G/kT] \exp[-U(x,0)/kT] \quad (4)$$

bulunur.

Alan yönünde küresel bölgenin ortalama momenti,

$$\langle \mu \cdot e' \rangle = \frac{\int [p(x) \cdot e'] [1 + \vec{p}(x) \cdot \vec{E}_G/kT] \exp[-U(x,0)/kT] dx}{\int [1 + \vec{p}(x) \cdot \vec{E}_G/kT] \exp[-U(x,0)/kT] dx} \quad (5)$$

şeklinde olup sadeleştirme yapılırsa,

$$\langle \mu \cdot e' \rangle = \int [p(x) \cdot e']^2 (E_G/kT) \exp[-U(x,0)/kT] dx$$

$$\langle \mu \cdot e \rangle = \frac{E_G}{3kT} \int p^2(x) \exp[-U(x,0)/kT] dx$$

$$\langle \mu \cdot e \rangle = \frac{E_G}{3kT} \langle p^2 \rangle \quad (6)$$

burada $\langle p^2 \rangle$, alan uygulandığında küresel bölgede oluşan mo-

mentin karésinin ortalaması olup,

$$\langle p^2 \rangle = N_i \langle P \cdot \bar{P} \rangle \quad (7)$$

dir. Bu formülde, N_i molekül sayısı, \bar{p} ortalama momenttir. Önceden bulunan $\langle p \cdot e' \rangle$ eşitliğinde $\langle p^2 \rangle$ için bu ifade yerine yazılırsa,

$$\langle p \cdot e' \rangle = \frac{3E}{2E+1} \frac{\langle p^2 \rangle}{3kT} E$$

$$\langle p \cdot e' \rangle = \frac{3E}{2E+1} \frac{N_i \langle P \cdot P \rangle}{3kT} E \quad (8)$$

ifadesi bulunur ve,

$$\frac{4\pi P}{E} = \epsilon_0(E-1) \quad (9)$$

$$\frac{4\pi P}{E} = \frac{3E}{2E+1} \frac{4\pi N_i \langle P \cdot \bar{P} \rangle}{3kT} \quad (10)$$

burada N_i , birim hacimdeki atomların, moleküllerin veya hücrelerin sayısıdır. O halde,

$$\frac{(E-1)(2E+1)}{3E} = \frac{4\pi N_i}{\epsilon_0} \frac{\langle P \cdot \bar{P} \rangle}{3kT} \quad (11)$$

şeklinde polar olmayan dipoller için Fröhlich eşitliği elde edilmiş olur.

EK.5. KARIŞIMLAR İÇİN CLAUSIUS-MOSSOTTI EŞİTLİĞİNİN
TÜRETİLMESİ

Saf bileşikler için Clausius-Mossotti eşitliği daha önceden
de verildiği gibi,

$$\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} = \frac{4\pi}{3} N\alpha \quad (1)$$

şeklindedir. Eşitliğin türetilmesinde iç alan, kovuk ve etki alan-
larının toplamı olarak verilir,

$$\vec{E}_i = \vec{E}_G + \vec{E}_R \quad (2)$$

burada kovuk alanı,

$$\vec{E}_G = \frac{3\epsilon}{2\epsilon+1} \vec{E} \quad (3)$$

ve etki alan faktörü,

$$f = \frac{1}{a^3} \frac{2(\epsilon-1)}{2\epsilon+1} \quad (4)$$

olmak üzere etki alanı,

$$\vec{E}_R = f \vec{p}$$

$$\vec{E}_R = \vec{E}_G \frac{f\alpha}{1-f\alpha} \quad (5)$$

olacaktır. Eş.(3) ve Eş.(5) ve Eş.(2)'den hareketle,

$$\vec{E}_i = \vec{E}_G \frac{1}{1-f\alpha} \quad (6)$$

bulunur. Eş.(4); Eş.(6)'da yerine yazılırsa,

$$\vec{E}_i = \frac{2\epsilon}{2\epsilon-1} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{a^3} \frac{2(\epsilon-1)}{2\epsilon+1}} \vec{E}$$

$$\vec{E}_i = \frac{3\epsilon}{2\epsilon+1 - \frac{2\alpha}{a^3} (\epsilon-1)} \vec{E} \quad (7)$$

Polar olmayan bir sistem için,

$$\frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E} = \sum_i N_i \alpha_i (\vec{E}_i)_i \quad (8)$$

şeklinde olup Eş.(7) ve Eş.(8)'den,

$$\frac{\epsilon - 1}{12\pi \epsilon} = \sum_i \frac{N_i \alpha_i}{-2\epsilon + 1 - 2 \frac{\alpha_i}{a_i^3} (\epsilon - 1)} \quad (9)$$

Clausius-Mossotti eşitliği elde edilir.