BİKUATERNİYONLARLA DYONLAR VE ELEKTROMANYETİK ENERJİ KORUNUMU

Nur ULUHAN

Yüksek Lisans Tezi

Fizik Anabilim Dalı

Temmuz-2012

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Nur Uluhan'ın **"Bikuaterniyonlarla Dyonlar ve Elektromanyetik Eneji Korunumu"** başlıklı **Fizik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 11.07.2012 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**:Doç. Dr. MURAT TANIŞLI**	**……………..**
Üye	**: Yard. Doç. Dr. ALİ ÇETİN**	**……………..**
Üye	**: Öğr. Gör. Dr. TÜLAY TOLAN**	**……………..**

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ……………… tarih ve ………………sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİKUATERNİYONLARLA DYONLAR VE ELEKTROMANYETİK ENERJİ KORUNUMU

Nur ULUHAN

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Murat TANIŞLI

2012, 40 sayfa

Bu tezde, bikuaterniyon cebri verildikten sonra, elektrik ve manyetik yük içeren dyonlardan bahsedildi. Sekiz bileşenli bikuaterniyonlar, üç boyutlu vektör uzayını ve dört boyutlu kuaterniyon uzayını içerdiklerinden birçok fiziksel nicelik bikuaterniyon cebriyle de incelenebilir. Buradan yola çıkılarak homojen ortamda Maxwell denklemleri ve ayar dönüşümleri kullanılarak genelleştirilmiş alan denklemleri değişme özelliği olmayan, birleşme özelliği olan bikuaterniyon cebri ile dyonlar için elde edildi. Ardından Noether teoremi, ışık ve vektör uzayında Poynting teoreminden bahsedildikten sonra, bikuaterniyonik diferansiyel operatör yardımıyla bikuateniyonlarla elektromanyetik enerji korunumu ve Poynting vektörünü içeren denklem türetildi. Bu gösterimlerin üç boyutlu vektör uzayının genelleştirilmiş hali olduğu ve literatürdeki önceden türetilmiş denklemlerle uygun olduğu da görüldü.

Anahtar Kelimeler: Maxwell Denklemleri, Poynting Teoremi, Manyetik Tek Kutup, Dyon, Bikuaterniyon

ABSTRACT

Master of Science Thesis

DYONS AND ELECTROMAGNETIC ENERGY CONSERVATION WITH BIQUATERNION

Nur ULUHAN

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Physics Program

Supervisor: Doç. Dr. Murat TANIŞLI
2012, 40 pages

In this thesis, after defining of biquaternion algebra, dyons which include electric and magnetic charges are mentioned. Because of eight-component biquaternions containing three-dimensional vector space and four-dimensional quaternion space, many physical quantities are also examined in biquaternion algebra. Based on this information, the generalized field equations are derived by using Maxwell equations and gauge transformations in non-commutative, but associative biquaternion algebra in homogenous media for dyons. Then, Noether theorem, light and Poynting theorem in vector space is introduced, in terms of the differential operator equation that contains biquaternionic electromagnetic energy conservation and Poynting vector, derived from biquaternions. In conclusion, it is seen that these equations in biquaternions are the generalized of three-dimensional vector space and appropriate the equations which are derived in literature before.

Keywords: Maxwell Equations, Poynting Theorem, Magnetic Monopole, Dyon, Biquaternion.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, tecrübeleriyle çalışmalarımda bana yol gösteren, tüm bilgi ve donanımını benimle paylaşan değerli Hocam Sayın Doç. Dr. Murat TANIŞLI'ya en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Tezimin işlemleri, sayfa düzenlemeleri sırasındaki katkılarından dolayı ve manevi olarak da yanımda olan Öğr. Gör. Dr. Tülay TOLAN Hocam'a da ayrıca çok teşekkür ederim.

Çalışmalarımda sık sık tecrübelerinden yararlandığım Arş. Gör. Emre Kansu Hocam'a da teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatımın her anında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, bana güç veren, tahsilimi tamamlamamı sağlayan, her zaman sevincimi ve hüznümü paylaşan canım babam Çetin ULUHAN'a ve birtanecik annem Oya ULUHAN'a sonsuz teşekkür ve sevgilerimi sunarım.

Tezim sırasında bana destek veren Eskişehir Büyükşehir Belediyesi Sosyal Hizmetler Dairesi Başkanı Jale Nur SÜLLÜ Hanım'a ve beni manevi olarak destekleyen Eskişehir Büyükşehir Belediyesi Bilim Deney Merkezi Müdür'ü Didem AYDINMAKİNA Hanım'a ve merkez çalışanlarından sevgili dostlarıma ve diğer bütün dostlarıma da sonsuz teşekkür ederim.

Nur ULUHAN

Temmuz, 2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar (öklid uzayı)
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar uzayı
$\mathbb{H}$	: Kuaterniyon uzayı
i	: Kompleks Birim
$\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{a}}$	: Vektör
a, b, q, p	: Reel sayı, skaler, kompleks birim, kompleks sayı
$\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}$	: Kartezyen koordinat sisteminde sırasıyla x, y, z eksenlerine ait birim vektörler
P, p, Q, q	: Bikuaterniyon
$\vec{\boldsymbol{p}}, \vec{\boldsymbol{q}}$	: Vektör bikuaterniyon
$N(\mathrm{P}), N(\mathrm{Q})$	: Bikuaterniyon normu
$\hat{\boldsymbol{e}}_0, \hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3$	:Bikuaterniyon bazları
P^{-1}, p^{-1}	: Bikuaterniyonun tersi
$\bar{P}, \bar{p}$	: Bikuaterniyonlar için kuaterniyonik eşlenik
P^{*}, p^{*}	: Bikuaterniyonlar için kompleks eşlenik
∂	: Kısmi türev
$\vec{\nabla}$	: 3-boyutlu Gradyent operatörü
$\vec{\boldsymbol{\nabla}}$	: Bikuaterniyon olarak Gradyent operatörünün vektör kısmı
∇	: Bikuaterniyon olarak Gradyent operatörü
.	: Skaler çarpım
$\times$	: Vektörel çarpım
$\square$	: D'alembertiyan operatörü
$\boxdot$	: Kuaterniyonik diferansiyel operatör
$\boxdot^{*}$	: Kuaterniyonik diferansiyel operatörün kompleks eşleniği

1.GİRİŞ

1843’ te William Hamilton’ un kuaterniyonları keşfetmesi ile kompleks sayılarda çalışmalar artmaya başlamıştır. Kuaterniyon özet olarak 4-boyutlu uzay-zamanı incelememize yarayan bir hiper-kompleks sayı sistemidir. Kuaterniyon cebrinin keşfedildiği yıllarda A. Carley, K. Clifford ve J. J. Slyvester gibi İngiliz matematikçiler ve elektromanyetik teoriyi yeniden inşa eden J. C. Maxwell ile P. G. Tait gibi fizikçiler kuaterniyonları kullanarak bu alanlarda çalışmalarının devamını getirmişlerdir. 20. yüzyılın başlarında ise vektör ve tensör cebrini geliştiren fizikçiler, fizikte vektör cebrinin kullanımını benimsetmişlerdir. 20. yüzyılın ortalarına kadar kuaterniyonların pratik kullanımı diğer metotlar ile kıyaslandığında çok azdı. Ancak bu durum robotlar, animasyon ve bilgisayar teknolojisinde ilerleme ile hızla değişti. Bugün kuaterniyonlar özellikle bilgisayar tasarımı, grafiği, animasyon alanlarında kullanılır [1].

Bikuaterniyonlar, fiziksel uygulamalarda son yıllarda artan bir hızla yer almaktadır. Gürlebeck ve Wolfgang bikuaterniyonları özel rölativite teorisi, parçacık mekaniği ve elektromanyetizmaya uygulayarak bikuaterniyonların kendine oldukça geniş bir uygulama alanı bulduğunu göstermişlerdir. Daha sonra da bu konuda çalışmalar artmıştır.

Bugüne kadar fizikteki birçok denklem çeşitli bilim adamları tarafından kuaterniyonlarla yeniden ifade edilmiştir. Chou [2] kinematik ve dinamik diferansiyel denklemleri, Adler [3] kuantum mekaniğini, Jolly [4] kuaterniyon alan teorisinin izomorfik matris temsillerini, Tanışlı ve Özdaş [5] robotik manipülatörlerin kuaterniyon dönüşümü, Negi ve arkadaşları [6] tek kutup dyonlar gibi teorik varlıkları anlatmak için bu sayı cebrini kullanmışlardır.

Dyonlar ise, manyetik ve elektrik yüklerin her ikisinin varlığından esinlenerek ortaya çıkmıştır. Bu nedenle de elektromanyetizmada yapılan çalışmalar dyonlara da uyarlanmıştır. İlk olarak bu uygulamalar t’ Hooft ve Polyakov tarafından yapılmıştır. Günümüzde ise farklı ortamlarda az olmakla birlikte dyonlar farklı çalışmalarla incelenmektedir. Örneğin; Negi ve arkadaşları [6,7] bu alanda oldukça belirgin çalışmalar yapmışlardır.

Poynting teoremi ise; enerji yoğunluğunun, zamanla değişen elektrik ve manyetik alanlar için enerjinin yayılmasını temsil eden bir ifadedir. Elektromanyetik kuvvet tarafından yüklerin üzerine yapılan işin, alanlarda depolanan enerjideki azalma eksi yüzey arasında dışarıya akan enerji olduğunu söyler. Poynting teoremi iş-enerji teoremi olarak da literatürde yer almaktadır [8].

Bu tezde ilk olarak bikuaterniyonların tarihçesi ve cebrine yer verilmiştir. Daha sonra dyonların tarihçesi ve temel tanımları, açıklaması yapılmıştır. Ardından, bikuaterniyonlar ile dyonlar için geçerli olan Maxwell denklemleri elde edilmiştir. Ayrıca, Poynting teoremi bikuaterniyonlarla dyonlar için tanımlanmış ve enerji korunumu bu koşullar altında elde edilmeye çalışılmıştır.

2. BİKUATERNİYON (KOMPLEKS KUATERNİYON)

Öncelikle kuaterniyonların tarihçesini ele alalım: Reel sayıları, bir boyutlu olan hiper-kompleks sayılar olarak düşünebiliriz. Bu reel sayılar, herhangi bir toplam ve çarpım altında cisim özelliklerini sağlarlar. Herhangi bir kompleks sayıyı ise 2-boyutlu olan hiper-kompleks sayı olarak düşünebiliriz ve reel sayıları imajiner kısmı sıfır olan kompleks sayıların bir alt kümesi olarak ele alabiliriz. Buradan hareketle kompleks sayılar da cisim özelliklerini de sağlarlar. Boyutu 2' den büyük hiper–kompleks sayıların herhangi bir kümesi ise cisim özelliklerini sağlamaz. Bu gerçek; $\mathbb{R}^2$ 'de karmaşık sayıların dereceli olmasını ileri süren yüksek derece gelişimini araştıran matematikçileri rahatsız etmiştir. Hamilton 1830 yılından itibaren kompleks sayılar üzerinde çalışmış ve nihayet 1833 yılında iki reel sayıdan oluşan kompleks sayıların bir cebir oluşturduğu sonucuna varmıştır. Bu sonuçtan yola çıkarak çalışmalarını iki kompleks ve bir reel bileşenden oluşan ($q = a + e_1 b + e_2 c$) üçlü sayı sistemi üzerinde yoğunlaşmıştır. Vektör olarak adlandırdığı bu sistem üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabildiği halde bölme işlemi için ise bir metot geliştirememiştir. 1843' de bu sayı sisteminin çarpma işleminde değişme özelliğinin gerçekleşmediğini görerek, çarpma işleminin bu özelliğinden vazgeçmiş ve $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$ özelliğine sahip üç imajiner birim tanımlamıştır. Böylece Hamilton, 'Kuaterniyon' ismini verdiği 4-boyutlu olan sözde hiper-kompleks sayıyı keşfetmiştir. Örnek olarak kuaterniyonlar; kompleks, bölüntülü, dual gibi farklı boyutlarda ve koşullarda ifade edilen sayı cebrinin de temelini oluştururlar. Bölüntülü kuaterniyonlar ise 1849' da James Cockie tarafından ileri sürmüştür. Hamilton ve James Cockie, çarpım operatörleri ile donatılmış 4-boyutlu gerçek vektör uzayı oluşturmuşlardır. Kuaterniyondan farklı olarak, bölüntülü kuaterniyonların böleni sıfır olabilmektedir [9-15]. Kuaterniyonlar aynı reel ve kompleks sayılar gibi bir sayı sistemidir. Reel sayılar bir, kompleks sayılar iki bileşen içerirken kuaterniyonlar dört bileşene sahiptir. Kompleks sayılar reel sayıların bir kombinasyonudur. Dolayısıyla da reel sayılar, kompleks sayıların bir alt kümesidir. Diğer taraftan kuaterniyonlar da iki kompleks sayının kombinasyonundan oluşmuştur. Buna göre kompleks sayılarda kuaterniyonların bir alt kümesi olmalıdır. Bu sonuç, kuaterniyonların hem reel sayılar hem de kompleks sayıları kapsayan daha geniş bir sayı sistemi olduğunu göstermektedir [10]. Fizikte ölçülebilen her şey reel olmak zorundadır. Bu nedenle reel sayılar bilimin doğuşundan itibaren kendilerine her alanda uygulama sahası bulmuştur, öte yandan kompleks sayıların mekanik ve elektriksel uygulamalarda, özellikle devre analizlerinde kullanıldığı da bilinmektedir. Ne yazık ki bu sayı sistemi, uygulamalara sadece iki boyut getirir. 3-boyutlu uygulamalarda ise vektörler çok sık kullanılır. Fakat vektörlerin bazı uygulamalarda yetersiz kaldığı görülmektedir. Kuaterniyonlar vektörleri ifade etmede kullanılabilir. Bu sayı sistemi vektörleri kapsadığı gibi, bunlara ilaveten bir de reel bileşen ortaya koyarak uygulamalara dördüncü bir boyut katar. Kuaterniyonlar bölüm cebrine sahiptir. Kuaterniyon cebri, bileşimli fakat değişimli olmayan ($\hat{\boldsymbol{e}}_0$, $\hat{\boldsymbol{e}}_1$, $\hat{\boldsymbol{e}}_2$, $\hat{\boldsymbol{e}}_3$) gibi dört elemandan oluşur ve bunlardan biri reel, diğer üçü sanaldır [9]. Kuaterniyon cebrinin keşfedildiği yıllarda A. Carley, K. Clifford ve J. J. Slyvester gibi İngiliz matematikçiler ve elektromanyetik teoriyi yeniden inşa eden J. C. Maxwell ile P. G. Tait gibi fizikçiler bu konuya önemli katkıda bulunmuşlardır. 20. yüzyılın başlarında ise vektör ve tensör cebrini geliştiren fizikçiler, fizikte vektör cebrinin kullanımını benimsetmişlerdir. 1878 yıllarında Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa ingilizce olarak yazdığı lineer cebir adlı kitapta kompleks sayılarla ilgili teorisinde ileri sürdüğü çarpımın 3-boyutlu uzaya uygulamanın bir yolunu bulmuş ve özgün çalışma olarak kuaterniyonların çarpımının bizi 3-boyutlu uzayda çalışmaya zorladığını vurgulamıştır; R. Kaya ve Ş. Koçak tarafından kuaterniyonlardan hareketle zayıf kuaterniyonların tanımı yapılarak $\mathbb{R}^3$' ün vektörleri zayıf kuaterniyon uzayına taşınmış ve bölme işleminin bu şekilde daha anlamlı olarak gerçekleştirilebileceği ispat edilmiştir [9–11]. Kuaterniyonların fizikte çok kullanılması ancak E. Schrödinger, W. Heisenberg, P. A. M. Dirac, M. Born ve daha pek çok ünlü fizikçi tarafından 1927 ile 1932 yılları arasında, neredeyse bugün kullandığımız kuantum mekaniğinin bulunuşu ve gelişiminden, yaygınlaşmasından sonra gerçekleşmiştir. 20. yüzyılın başlarında Yale Üniversitesi profesörlerinden Gibbs uygun kuaterniyon için kullanım şeklini Hamilton'un çalışmalarını ve Rodrigues' e ait çalışmalarını anahtar noktalarını buna ilave ederek keşfetti ve çalışmalarını vektör nokta çarpımı ve bugün bildiğimiz vektörel çarpımla tamamlandı. Hemen hemen aynı zamanlarda Albert Einstein 4. boyut için bir kullanım keşfetti. Işık hızını tüm gözlemlerde sabitlemek için uzay ve zaman birimlendirilmeliydi. Burada sonuç, 4. boyut için şekillendirilmişti. Fakat Einstein bir matematik düşkünü olmadığı için sadece lokal olarak işe yarayan parçaları buldu. Einstein; Minkowski' nin uzay zamanını ve Lorentz' in dönüşümünü keşfetmiş ve problemlerin çözümünü gerektiren yardımcıların özel rölativite içinde olduğunu göstermiştir [9]. Türk fizikçilerimizden Prof. Dr. Feza Gürsey de kuaterniyonik ve oktoniyonik yapıların önemini 1950' li yıllarda görüp, bu yapıları ve ilgili istisnai grup ve geometrileri çalışmaları ile fiziğe yerleştirmiştir ve yayınlarıyla katkıda bulunmuştur. Kuaterniyonların temel fizik kanunlarının incelenmesinde oynadığı rolün önemi, özel rölativite ve kuantum mekaniğinin keşfi ile daha iyi anlaşıldı. Simetrik yapıların fark etmesindeki olağan üstü kolaylığı ile kuaterniyonların temel fizik kanunlarında önemli bir rol oynayacağını sezmiştir [9]. Kuaterniyonların fizikte kullanım bulduğu konulardan birisi ve belki de en önemlisi Einstein' ın özel ve genel rölativite teorileridir. Bu teorilerde zaman kavramı, 3-boyutlu uzaydan bağımsız olarak mutlak bir nitelik taşımaz. 4-boyutlu uzay-zamanın her bir noktası, belli bir anda belli bir noktada yer alan bir olguya karşı gelir. Tipik uzay-zaman noktası; ($q_0 = ct$, $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$) kartezyen koordinatları ile temsil edilebilir ve vektörel olarak konum ile skaler zaman değerleri tek bir ifade içinde yer almış olur. Burada t zaman koordinatını, c ise boşlukta ışık hızını göstermektedir. Bu tanımlar yardımıyla uzay-zamanda hareket eden bir noktasal parçacığın konumu $\mathrm{q} = \mathrm{i}q_0 + \hat{\boldsymbol{e}} \,.\, \vec{q}$ ifadesi ile verilen bir bikuaterniyon ile gösterilebilir. Bu ifade de kuaterniyon birimleri $\hat{\boldsymbol{e}} = (\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3)$ üçlüsü ile uzay koordinatları ise $\mathrm{q} = (x, y, z)$ r vektörü ile verilmektedir. $\mathrm{i}^2 = -1$ kompleks sanal birim sayıdır. q kuaterniyonun normu açık olarak yazılırsa; $N(\mathrm{Q}) = \mathrm{q}\bar{q} = -(q_0)^2 + \vec{\boldsymbol{q}} \cdot \vec{\boldsymbol{q}}$ bulunur. Bikuaterniyon cebrinin norm koruyan izomorfizmleri $\mathrm{q} \rightarrow \mathrm{q}' = \mathbf{U}\mathrm{q}\mathbf{U}^{\dagger}$, q kuaterniyonun karşı geldiği uzay-zaman vektörünün Lorentz dönüşümleridir. Böylece Einstein' ın rölativite teorisinin temelini oluşturan Lorentz dönüşümleri bikuaterniyon cebrinin norm koruyan izomorfizmleri ile özleşmiş olmaktadır. İlk kez 1912' de A. W. Conway ve L. Silberstein tarafından özel rölativite teorisi için öne sürülen bu yaklaşım o sırada tensör cebrini yerleştirmeye çalışan fizikçiler arasında da oldukça dikkat çekmiştir [9]. Kuaterniyonlar, uzaysal dönmelerde ve fiziksel büyüklüklerin karakterlerinin belirlenmesinde çok işe yaramaktadır. Ayrıca kuaterniyonlar grup teorisinde ve elemanter parçacıkların sınıflandırılmasında kullanılmaktadır. Uzaysal dönmeler, grup teori uygulamaları, kontrol sistemleri ve robotik uygulamalarında birçok araştırmacı için ilginç bir araç olmuştur. M. Tanışlı tarafından hazırlanan doktora tezinde endüstriyel robot kollarının hareketi kuaterniyonlar tarafından tanımlanmaktadır. Bu çalışmada ayrıca kuaterniyonlar arasındaki her türlü işlemi yapmak için bir algoritma geliştirilmiş ve bu amaçla bilgisayarda kullanılmak üzere Pascal 7.0'da bir paket program hazırlanmıştır. Sonlu dönmeleri ifade etmek için kuaterniyonlar kullanılabilmektedir. Ayrıca, kuaterniyonlar fiziksel büyüklükleri temsil etmek için de kullanılabilmektedir. 1989' da K. Özdaş tarafından skaler ve vektörel büyüklüklerin kuaterniyon uzayına taşınarak birer kuaterniyon olarak nasıl ifade edileceği gösterilmiştir. Kuaterniyon çarpımından farklı olarak kuaterniyonlar için skaler (iç) ve vektörel (dış) çarpma işlemleri tanımlanmıştır. Bu işlemler yardımıyla "iş" ve "tork" gibi büyüklüklerin nasıl ifade edileceği uygulama olarak gösterilmiştir. J. C. K. Chou; hız, ivme ve momentum gibi vektörel büyüklükleri kuaterniyonlarla temsil ederek bunlara ilişkin kinematik ve dinamik diferansiyel denklemleri yazmıştır. M. Tanışlı, robot kinematik denklemlerini üretmek için genel kuaterniyon dönüşümlerini kullanmış ve böylece dönme matrisine göre avantaj sağlayan Euler parametreleri ve dönme matrisleri arasında bir bağıntı ortaya koymuştur. Kuaterniyonlar, kısmi türevli diferansiyel denklemlerle tanımlanabilen dinamik sistemlerin ifade edilmesinde kullanılabilmektedir [10, 12, 13]. Kuaterniyon cebri de kuaterniyonların kullanım alanlarının artmasına paralel olarak gelişme göstermektedir. Kompleks sayı ve kuaterniyon bileşiminden oluşan bikuaterniyonlar, fiziksel uygulamalarda son yıllarda artan bir hızla yer almaktadır. Bunun yanı sıra kuaterniyonlar teorik fizik araştırmalarında oldukça sık kullanılmaktadır. Örneğin, Gürlebeck ve Wolfgang bikuaterniyonları özel rölativite teorisi, parçacık mekaniği ve elektromanyetizmaya uygulayarak bikuaterniyonların kendine oldukça geniş bir uygulama alanı bulduğunu göstermişlerdir. Bugüne kadar fizikteki birçok denklem çeşitli bilim adamları tarafından kuaterniyonlarla yeniden ifade edilmiştir. Bunlardan bazıları şöyledir: J. C. K. Chou kinematik ve dinamik diferansiyel denklemleri, Adler kuantum mekaniğini, D. C. Jolly matris ve kuaterniyonlar arasındaki izomorfizmi, Kugotownsend tarafından kuaterniyonların süper simetrik modellerle olan bağlantısını, K. Morita tarafından kuaterniyonların Dirac teorisindeki rolünü, M. Tanışlı ve K. Özdaş robotik manipülatörlerin pozisyonunun kuaterniyon dönüşümünü, M. Tanışlı akustik enerji korunum denklemini, yine Tanışlı ve Özgür açısal momentum ve Dirac denklemlerini, Negi ve arkadaşları tek kutup dyonlar gibi teorik varlıkları anlatmak için bu sayı cebrini kullanmışlardır [14-16]. Kuantum mekaniğinde elektron spinini tarif ederken kuaterniyon cebri kullanılmaktadır. Bir spinör üzerinde işlem yapan kuantum operatörleri, örneğin, momentum operatörleri 2× 2 matrislerdir. Dolayısıyla kuaterniyonları 2×2 matris gösterimi göz önüne alındığında, kuantum operatörleri kuaterniyonlarla gösterilebilir. Bu yaklaşımla spinörlerin matematik formalizmi 1930' da B. L. Van der Waerden tarafından geliştirildi. Daha sonra bu kavram E. Cartan ve H. Weyl tarafından daha yüksek boyutlu vektör uzayları üzerine genelleştirildi. Bugün spinörler fizikte vektörlerden daha temel rol oynamaktadırlar [9]. Bikuaterniyonlarla Dirac rölativistik denklemlerinin çeşitli formülasyonlarının ilk öncüsü A. W. Conway olarak görülmekle birlikte birçok bilim adamının yazılarında bikuaterniyonlarla kuantum mekaniği K. Morita tarafından yeniden formüle edilmiştir. Leo' nun da kuaterniyon ve bikuaterniyonlarla ilgili çalışmaları vardır [9, 17]. Fiziksel olarak 1927' de Pauli ve 1938' de Dirac elektron spininin tanımı için spinör eşitliklerini gösterdi. 1930' da Juvet ve Saunter, sütun spinörlerini sadece ilk sütunu sıfır olmayan kare matris spinörleri ile yer değiştirdi. 1947' de Marcel Riesz spinörleri Clifford cebirlerinin minimum küçük ideal elemanları olarak düşündü. 1958' de Riesz homojen ve izotropik ortamın özel durumundaki Maxwell denklemlerini, $Cl_{1,3}$ Clifford cebrinde bivektörler ile basit bir eşitlikte özetledi. 1956-1958' de Gürsey H(2)' de 2×2 kuaterniyon matrisleri ile Dirac denklemini yeniden yazdı. 1964' te Kusraanheimoı, Kepler hareketinin spinör düzenini gösterdi. Bu KS-dönüşümü, spinörlerin operatör yönünü vurgular. 1983' te Y. Takahaski ve 1985' te J. Crawford bilineer eş dönüşümlerinden spinörleri tekrar elde etti [18]. 1881' de

Michelson farklı yönlerde ışığın hızını ölçtü. Michelson & Morley 1887' de deneyi tekrarladılar ve ışığın, ışık ortamına göre kaynağın hareketinden bağımsız aynı hızda hareket ettiği sonucuna vardılar. 1887' de Voight, $x'=x-vt,\ t'=t-\frac{vx}{c^2}$ değişkenlerinin değişimine göre sabit kalan dalga denklemini $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}$ - $\frac{1}{c^2}\frac{\partial f^2}{\partial t^2}= 0$ olarak tanımladı. Voight' ın formülleri, direkt ve ters dönüşümler için aynı değildir. Daha sonra simetri için $\sqrt{1-\ (v^2/c^2)}$ oranı ile yeniden faktör tanımını yaptı. 1892' de Fitz Gerald ve Lorentz, bağımsız olarak hareket eden cisimlerin $\sqrt{1-\ (v^2/c^2)}$ oranı ile hareket yönünde kısaldığını varsayarak Michelson & Morley deneyinin bir açıklamasını verdiler [19]. Uzay-zaman olaylarının Lorentz dönüşümleri, 1900' de Larmor tarafından sunuldu, ancak rölativistik Maxwell denklemlerinin kovaryantları, 1903' te H. A. Lorentz tarafından kanıtlandı. 1905' te Einstein, ışık hızının bağımsızlığı ilkesi postülası ile rölavite ilkesini tamamladı. Bu iki ilke, Einstein' ın zaman notasyonunu tekrar gözden geçirmesine sebep oldu ve Lorentz' in kinetiksel dönüşüm yasaları sonucunu çıkarmasını sağladı. Daha sonra Einstein, özel rölativite ilkesini tekrar formüle etti. Böylece Einstein, sadece mekaniksel değil elektromanyetik olguyu da benimser: "Fizik yasaları, bütün referans çerçevelerinde aynı biçime sahiptir." Einstein' ın bu rölativite ilkesi, Maxwell eşitliklerine uygulandığında, ışık hızının bütün referans çerçevelerinde aynı olacağı sonucunun çıkarılacağı ikna edicidir. Rölativite ilkesi ve Maxwell denklemlerinin bilinmesi, Lorentz' in dönüşüm yasalarının sonucunu çıkartmak için yeterlidir. Bugünlerde rölativistik ve rölativite terimleri hemen hemen Einstein ilkesi ile aynıdır [9, 19]. Matematikçiler açısından, Dirac matrisleri aslında Clifford cebrinin generatörlerinin temsilinden başka bir şey değildirler. Kuaterniyon ve Dirac cebri Clifford cebirlerinin özel hali olarak görülmektedir. Nasıl iki elemanlı bir spinör kuaterniyon cebrinin elemanı olarak düşünüyorlarsa dört elemanlı bir Dirac spinörü de aynen öyle Clifford cebrinin bir elemanı olarak düşünülebilir. Soyut Clifford cebirleri günümüzde elektron, nötrino v.b. iki değerli spin taşıyan ve bu nedenle Pauli dışarlama ilkesine uyan fermiyon adını verdiğimiz parçacıkların incelenmesinde, kuantizasyonunda ve süpersimetri kavramlarının geliştirilmesi alanlarında önemli rol oynamaktadır [9]. Kula L. tarafından hazırlanan "Bölünmüş Kuaterniyonlar ve

Geometrik Uygulamaları" doktora tezinde bölüntülü (split) kuaterniyonların Minkowski 3-uzayında (Yarı-Öklit) dönme matrisleri tanımlanmıştır. Hamilton operatörleri ile Minkowski 3-uzayında vida hareketinin gösterimi de yapılmıştır [20]. Matris mekaniğinde özfonksiyonlar birer sütun matrisleri ile gösterilirken, operatörler ise matris elemanları o operatörün beklenen değerlerinden ibaret olan birer matrisle temsil edilirler. Matrisin elemanları, ilgili operatörün o uzaydaki spektrumunu oluşturur. Operatörün temsil eden matrisin mertebesi (boyutu) bağımsız öz fonksiyon uzayının boyutu ile belirlidir. Böylece kuaterniyonların matris temsilleri göz önüne alındığında, fizikte çok fazla uygulama alanı bulduğu açıktır.

2.1. Bikuaterniyon Tanımı

Bikuaterniyon bir hiper-kompleks sayı çeşididir. Q gibi bir bikuaterniyon,

$$Q= Q_0\hat{\boldsymbol{e}}_0 + Q_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + Q_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + Q_3\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

şeklinde yazılır. Burada $(\hat{\boldsymbol{e}}_0, \hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3)$ bazlarını incelersek; $\hat{\boldsymbol{e}}_0 = 1$ skaler birim olarak tanımlanır ve $\hat{\boldsymbol{e}}_i (i = 1,2,3)$ ise komutasyon bağıntısını sağlamayan üçlü oluştururlar ve ${\hat{\boldsymbol{e}}_i}^2 = -1$' dir. Burada bazların çarpım;

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j = -\delta_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_0 + \varepsilon_{ijk}\hat{\boldsymbol{e}}_k$$

kuralına uymaktadır.

Bikuaterniyon, kuaterniyonun kompleks bileşenlisidir. Q bir bikuaterniyon olmak üzere,

$$Q= Q_0\hat{\boldsymbol{e}}_0 + Q_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + Q_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + Q_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada Q_m (m=0,1,2,3) kompleks sayılardır yani,

$$Q_m = a_m + \mathrm{i}b_m \quad (m=0,1,2,3 \text{ ve } \mathrm{i}^2 = -1) \tag{2.2}$$

şeklindedir.

Bu durumda; Q bikuaterniyonu

$$\begin{aligned} Q &= (a_0 + \mathrm{i}b_0)\hat{\boldsymbol{e}}_0 + (a_1 + \mathrm{i}b_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + (a_2 + \mathrm{i}b_2)\hat{\boldsymbol{e}}_2 + (a_3 + \mathrm{i}b_3)\hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ &= (a_0 + \mathrm{i}b_0, a_1 + \mathrm{i}b_1, a_2 + \mathrm{i}b_2, a_3 + \mathrm{i}b_3) = \left(a_0 + \mathrm{i}b_0, \vec{\boldsymbol{a}} + \mathrm{i}\vec{\boldsymbol{b}}\right) \\ &= \left(Q_0, \vec{\boldsymbol{Q}}\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

ile verilir. Burada

Q_0: Bikuaterniyonun skaler bileşeni ve

$\vec{\boldsymbol{Q}} = Q_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + Q_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + Q_3\hat{\boldsymbol{e}}_3$: Bikuaterniyonun vektörel bileşeni

dir. a_i ve $b_i (i = 0,1,2,3)$ ise reel sayılardır. $\hat{\boldsymbol{e}}_0, \hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3$ bikuaterniyonun baz elemanlarıdır. i ise,

$i^2 = -1$

koşulunu sağlayan kompleks bir sayıdır [21].

2.2. Bikuaterniyon Cebri

2.2.1. Skaler Birim Eleman

Bikuaterniyon cebrinin çarpma işlemine göre skaler birim elemanı ise, $\hat{\boldsymbol{e}}_0$=1' dir. Buna göre,

$$1Q = Q1 = Q \tag{2.4}$$

olacaktır [21].

2.2.2. İki Bikuaterniyonun Eşitliği

P ve Q gibi iki bikuaterniyonun birbirine eşit olabilmesi için karşılıklı elemanlarının eşit olması gerekir. P ve Q bikuaterniyonları

$$P = (a_0 + ib_0)\hat{\boldsymbol{e}}_0 + (a_1 + ib_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + (a_2 + ib_2)\hat{\boldsymbol{e}}_2 + (a_3 + ib_3)\hat{\boldsymbol{e}}_3$$
$$= P_0\hat{\boldsymbol{e}}_0 + P_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + P_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + P_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 = \left(P_0, \vec{\boldsymbol{P}}\right)$$
$$Q = (c_0 + id_0)\hat{\boldsymbol{e}}_0 + (c_1 + id_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + (c_2 + id_2)\hat{\boldsymbol{e}}_2 + (c_3 + id_3)\hat{\boldsymbol{e}}_3$$
$$= Q_0\hat{\boldsymbol{e}}_0 + Q_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + Q_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + Q_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 = \left(Q_0, \vec{\boldsymbol{Q}}\right)$$

ise bu iki bikuaterniyonun eşitliği;

$a_0 + ib_0 = c_0 + id_0,\ a_1 + ib_1 = c_1 + id_1,$

$a_2 + ib_2 = c_2 + id_2,\ a_3 + ib_3 = c_3 + id_3$

şeklindedir ya da daha açık bir şekilde,

P=Q ise $P_0 = Q_0,\ P_1 = Q_1,\ P_2 = Q_2,\ P_3 = Q_3$

olmalıdır [21].

2.2.3. Bikuaterniyonlarda Toplama ve Çıkarma İşlemi

İki bikuaterniyonun toplamı veya farkı, bu iki bikuaterniyonun karşılıklı elemanlarının toplam veya farklarından oluşan bir diğer bikuaterniyondur. P ve Q iki bikuaterniyon olmak üzere;

$$\begin{aligned} P\pm Q &= (P_0 \pm Q_0)\hat{\boldsymbol{e}}_0 + (P_1 \pm Q_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + (P_2 \pm Q_2)\hat{\boldsymbol{e}}_2 + (P_3 \pm Q_3)\hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ &= [P_0 \pm Q_0,\ P_1 \pm Q_1,\ P_2 \pm Q_2,\ P_3 \pm Q_3] \end{aligned} \tag{2.5}$$

ile verilir. Görüldüğü gibi sonuç yine bir bikuaterniyon olmaktadır [21].

2.2.4. Bikuaterniyonlarda Çarpma İşlemi

P ve Q gibi iki bikuaterniyonun çarpımının sonucu yine bir bikuaterniyon olmaktadır ve aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} PQ &= (P_0\hat{\boldsymbol{e}}_0 + P_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + P_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + P_3\hat{\boldsymbol{e}}_3)(\, Q_0\hat{\boldsymbol{e}}_0 + Q_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + Q_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + Q_3\hat{\boldsymbol{e}}_3) \\ &= [(a_0 + \mathrm{i}b_0)\hat{\boldsymbol{e}}_0 + (a_1 + \mathrm{i}b_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + (a_2 + \mathrm{i}b_2)\hat{\boldsymbol{e}}_2 + (a_3 + \mathrm{i}b_3)\hat{\boldsymbol{e}}_3] \\ &\quad [(c_0 + \mathrm{i}d_0)\hat{\boldsymbol{e}}_0 + (c_1 + \mathrm{i}d_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + (c_2 + \mathrm{i}d_2)\hat{\boldsymbol{e}}_2 + (c_3 + \mathrm{i}d_3)\hat{\boldsymbol{e}}_3] \\ &= (a_0c_0 - a_1c_1 - a_2c_2 - a_3c_3 - b_0d_0 + b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3)\hat{\boldsymbol{e}}_0 \\ &\quad + \mathrm{i}(a_0d_0 - a_1d_1 - a_2d_2 - a_3d_3 + b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3)\hat{\boldsymbol{e}}_0 \\ &\quad + (a_0c_1 + a_1c_0 + a_2c_3 - a_3c_2 - b_0d_1 - b_1d_0 - b_2d_3 + b_3d_2)\hat{\boldsymbol{e}}_1 \\ &\quad + \mathrm{i}(a_0d_1 + a_1d_0 + a_2d_3 - a_3d_2 + b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2)\hat{\boldsymbol{e}}_1 \\ &\quad + (a_0c_2 - a_1c_3 + a_2c_0 + a_3c_1 - b_0d_2 + b_1d_3 - b_2d_0 - b_3d_1)\hat{\boldsymbol{e}}_2 \\ &\quad + \mathrm{i}(a_0d_2 - a_1d_3 + a_2d_0 + a_3d_1 + b_0c_2 - b_1c_3 + b_2c_0 + b_3c_1)\hat{\boldsymbol{e}}_2 \\ &\quad + (a_0c_3 + a_1c_2 - a_2c_1 + a_3c_0 - b_0d_3 - b_1d_2 + b_2d_1 - b_3d_0)\hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ &\quad + \mathrm{i}(a_0d_3 + a_1d_2 - a_2d_1 + a_3d_0 + b_0c_3 + b_1c_2 - b_2c_1 + b_3c_0)\hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ &= P_0Q_0 - \vec{\boldsymbol{P}}.\vec{\boldsymbol{Q}} + P_0\vec{\boldsymbol{Q}} + \vec{\boldsymbol{P}}Q_0 + \mathrm{i}\vec{\boldsymbol{P}} \times \vec{\boldsymbol{Q}} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Görüldüğü gibi iki bikuaterniyonun çarpımı yine bir bikuaterniyondur. Karşılık gelen bileşenler cinsinden PQ=A ifadesi,

$$A = A_0\hat{\boldsymbol{e}}_0 + A_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + A_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + A_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \qquad A_i \epsilon \mathbb{C} (i = 0,1,2,3)$$

$$\begin{aligned} A_0\hat{\boldsymbol{e}}_0 &= (a_0c_0 - a_1c_1 - a_2c_2 - a_3c_3 - b_0d_0 + b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3)\hat{\boldsymbol{e}}_0 \\ &\quad + \mathrm{i}(a_0d_0 - a_1d_1 - a_2d_2 - a_3d_3 + b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3)\hat{\boldsymbol{e}}_0 \\ A_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 &= (a_0c_1 + a_1c_0 + a_2c_3 - a_3c_2 - b_0d_1 - b_1d_0 - b_2d_3 + b_3d_2)\hat{\boldsymbol{e}}_1 \\ &\quad + \mathrm{i}(a_0d_1 + a_1d_0 + a_2d_3 - a_3d_2 + b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2)\hat{\boldsymbol{e}}_1 \end{aligned}$$

$$A_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 = (a_0c_2 - a_1c_3 + a_2c_0 + a_3c_1 - b_0d_2 + b_1d_3 - b_2d_0 - b_3d_1)\hat{\boldsymbol{e}}_2$$
$$+\mathrm{i}(a_0d_2 - a_1d_3 + a_2d_0 + a_3d_1 + b_0c_2 - b_1c_3 + b_2c_0 + b_3c_1)\hat{\boldsymbol{e}}_2$$
$$A_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 = (a_0c_3 + a_1c_2 - a_2c_1 + a_3c_0 - b_0d_3 - b_1d_2 + b_2d_1 - b_3d_0)\hat{\boldsymbol{e}}_3$$
$$+\mathrm{i}(a_0d_3 + a_1d_2 - a_2d_1 + a_3d_0 + b_0c_3 + b_1c_2 - b_2c_1 + b_3c_0)\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

ile verilir [21].

2.2.5. Bir Bikuaterniyonun Eşleniği

Bir bikuaterniyon için, $\hat{\boldsymbol{e}}_1$, $\hat{\boldsymbol{e}}_2$, $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ bazları ve i kompleks birim sebebiyle kuaterniyonik eşlenik ve kompleks eşlenik olmak üzere iki tür eşlenik tanımlanır. Kuaterniyonun eşleniği; bikuaterniyonun vektörel kısmının işaretinin değiştirilmesiyle elde edilirken, $\bar{Q}$ ile gösterilebilir ve

$$\bar{Q} = Q_0\hat{\boldsymbol{e}}_0 + Q_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + Q_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + Q_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 = \left[Q_0, -\vec{\boldsymbol{Q}}\right] \tag{2.7}$$

şeklinde ifade edilir. Daha net bir şekilde yazacak olursak;

$$\mathrm{Q} = (a_0 + \mathrm{i}b_0)\hat{\boldsymbol{e}}_0 + (a_1 + \mathrm{i}b_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + (a_2 + \mathrm{i}b_2)\hat{\boldsymbol{e}}_2 + (a_3 + \mathrm{i}b_3)\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

ise

$$\bar{Q} = (a_0 + \mathrm{i}b_0)\hat{\boldsymbol{e}}_0 - (a_1 + \mathrm{i}b_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1 - (a_2 + \mathrm{i}b_2)\hat{\boldsymbol{e}}_2 - (a_3 + \mathrm{i}b_3)\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

eşitliğine denktir.

Kompleks eşlenik; bir bikuaterniyonun kompleks katsayılarının eşlenikleri alınarak elde edilir ve

$$Q^* = Q_0^*\hat{\boldsymbol{e}}_0 + Q_1^*\hat{\boldsymbol{e}}_1 + Q_2^*\hat{\boldsymbol{e}}_2 + Q_3^*\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{2.8}$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$Q_0^* = a_0 - \mathrm{i}b_0$$
$$Q_1^* = a_1 - \mathrm{i}b_1$$
$$Q_2^* = a_2 - \mathrm{i}b_2$$
$$Q_3^* = a_3 - \mathrm{i}b_3$$

dür. Bikuaterniyonun kompleks eşlenik ifadesini daha açık bir şekilde yazacak olursak;

$$Q^* = (a_0 + \mathrm{i}b_0)^*\hat{\boldsymbol{e}}_0 + (a_1 + \mathrm{i}b_1)^*\hat{\boldsymbol{e}}_1 + (a_2 + \mathrm{i}b_2)^*\hat{\boldsymbol{e}}_2 + (a_3 + \mathrm{i}b_3)^*\hat{\boldsymbol{e}}_3$$
$$= (a_0 - \mathrm{i}b_0)\hat{\boldsymbol{e}}_0 + (a_1 - \mathrm{i}b_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + (a_2 - \mathrm{i}b_2)\hat{\boldsymbol{e}}_2 + (a_3 - \mathrm{i}b_3)\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

elde edilir.

P ve Q gibi iki bikuaterniyon olmak üzere, P ve Q çarpımlarının kuaterniyon eşleniği için;

$$(\overline{PQ})=\overline{Q}\overline{P} \quad (2.9)$$

şeklinde özelliği geçerlidir. P ve Q gibi iki bikuaterniyonun çarpımının kompleks eşleniği ise;

$$(PQ)^{*}=Q^{*}P^{*} \quad (2.10)$$

olarak verilir [21].

2.2.6. Bikuaterniyonun Normu

Bir Q bikuaterniyonunun normu, kendisi ile kuaterniyon eşleğinin çarpımına eşittir yani;

$$\mathcal{N}(\mathrm{Q})=\mathrm{Q}\bar{Q}=\bar{Q}\mathrm{Q}=Q_0^2+Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2 \quad (2.11)$$

dir. Bu işlem sonucu elde edilen nicelik kompleks skalerdir. Ama bir bikuaterniyonun normu $\mathcal{N}(\mathrm{Q})=0$ olabileceğinden Q' ya bir sıfır bölen denir. Bikuaterniyon cebri bu nedenle bir bölüm cebri oluşturmayacaktır.

İki bikuaterniyon çarpımının normu ise,

$$\mathcal{N}(\mathrm{PQ})=(PQ)(\overline{PQ})=PQ\bar{Q}\bar{P}=\mathcal{N}(\mathrm{P})N(\mathrm{Q}) \quad (2.12)$$

şeklinde normlarının çarpımına eşittir [21].

2.2.7. Bir Bikuaterniyonun Tersi

Normu sıfırdan farklı her Q bikuaterniyonu için Q^{-1} ile ifade edilen bir tersi mevcuttur.

$\mathcal{N}(\mathrm{Q})=\mathrm{Q}\bar{Q}=\bar{Q}\mathrm{Q}$ olduğunu daha önce belirtmiştik. Eğer buradan Q^{-1}' i elde edecek olursak, bikuaterniyonun tersi ifadesi,

$$Q^{-1}=\frac{\bar{Q}}{N(Q)} \quad (2.13)$$

ile verilir. Bir bikuaterniyonun tersi ile kendisinin çarpımı 1'e eşittir. Yani,

$$\mathrm{Q}Q^{-1}=Q^{-1}\mathrm{Q}=1 \quad (2.14)$$

dir. Bikuaterniyon cebri çarpma işlemi göz önüne alındığında çarpım değişimli değildir, genel olarak P ve Q gibi iki bikuaterniyon olmak üzere,

$$QP \neq PQ \tag{2.15}$$

olarak tanımlanır. O halde bikuaterniyonlar değişimli olmayan fakat birleşimli bir cebir oluştururlar [21].

2.2.8. Bikuaterniyonlarda Bölme İşlemi

Q; normu sıfır olmayan bir bikuaterniyon olmak üzere,

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = 1$$

koşulunu sağlayan Q^{-1} bikuaterniyonunun Q bikuaterniyonunun tersi olduğunu daha önce belirtmiştik. Aynı zamanda Q gibi bir bikuaterniyonun normunu da;

$$N(Q) = Q\bar{Q} = \bar{Q}Q = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2$$

olduğunu göstermiştik. Buradan;

$$\frac{Q\bar{Q}}{N(Q)} = 1$$

eşitliğini yazabiliriz. O halde açıkça;

$$Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{N(Q)}$$

olduğu açıktır. Yani bir Q bikuaterniyonunun tersi, kendi kuaterniyon eşleniğinin normuna bölümüyle elde edilen bir bikuaterniyon olmaktadır.

Bir P bikuaterniyonunu bir Q bikuaterniyonuna bölmek demek P' yi Q^{-1} ile çarpmak demektir. Ancak iki bikuaterniyonun çarpımı değişme özelliğine sahip olmadığından $(Q^{-1}P \neq PQ^{-1})$, P bikuaterniyonunun bir Q bikuaterniyonuna farklı şekilde iki bölümü tanımlanabilir [21]:

$$\frac{P}{Q} = \begin{Bmatrix} Q^{-1}P = \frac{\bar{Q}}{N(Q)}P: \text{Soldan Bölme} \\ PQ^{-1} = P\frac{\bar{Q}}{N(Q)}: \text{Sağdan Bölme} \end{Bmatrix} \tag{2.16}$$

2.2.9. Birim Bikuaterniyon

Normu bir olan bikuaterniyona birim bikuaterniyon denir. Yani, Q bikuaterniyon olmak üzere;

$$N(Q) = Q\bar{Q} = \bar{Q}Q = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = 1 \tag{2.17}$$

ise Q' ya birim bikuaterniyon denilir [21].

3. DYONLAR

Manyetik tek kutuplar, açık bir şekilde, sırf izole edilmiş manyetik yüklerin varlığının kuantize olmuş elektrik yüklerinden esinlenerek, Maxwell denklemlerine uygun olarak ortaya konulmaktadır. Dyonlar konusundaki yeni fikirler t' Hooft ve Polyakov tarafından Yang-Mills' in ayar dönüşümlerinde bulunan manyetik kutupların klasik çözümleri geliştirilerek yapılmıştır. Yüksek enerji fiziğinde tek kutupların varlığı sorusu ve dyonlar hep uğraştırıcı ve ilgi çekici bir konu olmuştur. Bundan önce, Dirac' ın tek kutuplu parçacıkları temel parçacıklardı, fakat t' Hooft ve Polyakov parçacıkları karmaşık, genişletilmiş, belirli kütleleri olan cisimler ve pürüzsüz yüzey sağlayan yüklü alanlarda önemli rol oynayan sınırlı boyutları vardır, ayrıca alanın dışında hızla alan konfigürasyonu - aynı Dirac değişmeli tek kutbundaki gibi – yok olur [7].

Fizikte, dyon elektrik ve manyetik yükleri olan 4-boyutlu varsayımsal parçacıktır. Genelde manyetik yükler sıfır elektrik yüklü ve manyetik tek kutbu olan parçacık olarak anılır. Birçok büyük ve birbiri ile ilişkili teoriler manyetik tek kutuplar ve dyonların varlığını tahmin ederek ortaya atılmıştır [22].

Dirac kuantum mekaniksel elektrik yükü e olan parçacıkla manyetik yükü g olan parçacığın eğer sadece $eg=2\pi n$ (n=sabit) olursa uyumlu olacağını gösterilmiştir. Julian Schwinger ve Daniel Zwanzinger kuarklara fenomenolojik alternatif olarak 1969' da ilk defa öneride bulunanlar olmuşlardır. Julia ve Zee, t' Hooft - Polyakov değişmeyen tek kutup teorisini genişletmişlerdir (parçacıkların aynı anda elektrik ve manyetik yük taşıdıkları madde olan dyonu açıklar). Tek kutupların özgürce hareketinden küresel yüklerin dönme derecesinin yarı-klasik kuantizasyonundan otomatik olarak ortaya çıkması dyonları da içine alan temel tek kutupların kuantum mekaniksel uyarımını açıklar. Tek kutupların ve dyonların potansiyellerinin önemine rağmen, şekilleri biçimsiz ve açık olmayan şekilde kovaryant olarak açıklamaya neden olmuştur. Bu yüzden, dyonların genelleştirilmiş elektromanyetik alanlarda kendine özgü ve açık kovaryant teorileri iki tane 4-potansiyel kullanmak şartıyla sicim varlığından kaçınmak amacıyla oluşturulmuştur. Dirac' ın teorisini elektrik ve manyetik yük taşıyan dyonlar için genelleştirmişlerdir. Kuantum mekaniksel teori, iki parçacığın elektrik ve manyetik yüklerinin $(e_1,\ g_1)$ ve $(e_2,\ g_2)$ olması durumunda $\frac{e_1 g_1 - e_2 g_2}{4\pi c}$ şeklinde kolayca hesaplanabilir. Beklendiği gibi bu değer eğer $e_1 g_2 - e_2 g_1 = 2\pi n \hbar c$ ise sabit değer alır. Dyonlara uyarlanan bu teori non-abelian (değişmez) özellik taşır. Tek kutupların özgürce hareket etmesi küresel yükün rotasyon derecesinin yarı-klasik kuantizasyonu ile otomatik olarak artan dyonları kuantum mekaniksel uyarılmış tek kutupların içine girer. Dünyanın sıfır olmayan boşluk açısı bakımından CP (charge-parity, yük-parite) bozunumunun açıklanmasıyla, tek kutupların önemi artmış ve Dirac kuantizasyon durumu dyonlar için genelleştirilerek dyonların analog elektrik yüklerinin olduğunu söyler ve 1974' te bu modeli J/Ψ meson özelliklerine sahip bir parçacığın varlığını tahmin ederek yeni bir buluşta bulunmuştur. Buna göre, kendince tutarlı ve açıkça kovaryant bir teori dyonlara genelleştirilmiş elektromanyetik alanlar için geliştirilmiştir. Fakat yine de dyonlar için sınırlı kalmaktadır. Witten etkisi, 1979' daki makalesinde Edward Witten tarafından dyon yükünün $\frac{e\theta}{2\pi}$ şeklinde belirtir, burada elektrik yüklerinin eşit, manyetik yük ile θ açısının çarpımından bulunabileceğini gösterir. Eğer teori CP simetrisini korursa dyonların bütün elektrik yükleri sabittir. Diğer taraftan, doğrusal yer çekimi ve elektromanyetik alanlar arasındaki benzerlik Einstein' ın yerçekiminin lineer denklemindeki asimetriyi ortaya çıkarır ve manyetik tek kutbun gravitasyonel olduğu ortaya çıkar. Gravitasyonel yüklerin (ağırlıkları) hızına bağlı olan yeni alanı (Heavisidian) açıklayan Maxwell eşitlikleri gibi lineer gravitasyon için kovaryant alan eşitleri Cattani tarafından türetilmiştir [6, 23].

Öte yandan, elektrodinamiğin kuaterniyonik formülasyonun Maxwell' e uzanan – gerçek (Hamilton) kuaterniyonu Treatise on Electricity and Magnetism kitabında kullanmasına kadar – tarihi vardır. Kuaterniyon analizi o zamandan beri tekrar düzenli aralıklarla bulunmuş ve Maxwell eşitlikleri kuaterniyonlarla yeniden yazılmıştır. Negi ve arkadaşları da dyonların elektromanyetik alanlarda kuaterniyonik formülasyonu üzerine çalışmışlardır. Ayrıca dyonların diğer kuantum eşitliklerini uygun ve açık şekilde analiz etmişlerdir. Teori izotropik homojen ortamda ikililik geçişleri altında değişmez kalmasını göstermiştir. Elektrik ve manyetik yük varlığında Maxwell eşitlikleri zamana bağlı olarak kuaterniyon analiziyle geliştirilmiş ve hareketli yüklerin klasik problem çözümlerinden elde edilmiştir. Chiral ve homojen olmayan ortamda zamana bağlı genelleştirilmiş Dirac-Maxwell (GDM) ele alınmış ve klasik problem çözümleri elde edilmiştir. Kuaterniyon formülasyonu da dyonlara uygulanmıştır. Dyonlar için genelleştirilmiş elektromanyetik alanların monokromatik alanları yavaşça değişen ortamlarda uygun durumlar için ele alınmıştır. Dyonların kompleks açıklaması ile birleştirilerek kuaterniyon analizinde kullanılmıştır [7].

4. HOMOJEN ORTAMDA DYONLAR İÇİN BİKUATERNİYONLARLA GENELLEŞTİRİLMİŞ ALAN EŞİTLİKLERİ

Manyetik tek kutupların varlığını düşünerek, SI birim sistemiyle boşlukta simetrik genelleştirilmiş Maxwell-Dirac diferansiyel eşitlikleri bikuaterniyonlarla şu şekilde ifade edilebilir: (bu çalışmada alışılmış olarak c=$\hbar$=1 olarak ele alınmıştır)

$$\nabla.\mathrm{D} = -\frac{\nabla\mathrm{D} + \overline{\nabla\mathrm{D}}}{2}$$

bikuaterniyonlarda olduğu için $\nabla\mathrm{D}$ ifadesini önce bulalım:

$$\nabla\mathrm{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_3\right)(D_0\hat{\boldsymbol{e}}_0 + D_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + D_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + D_3\hat{\boldsymbol{e}}_3)$$

$$= \frac{\partial D_0}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_3 - \frac{\partial D_3}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\partial D_0}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_2 - \frac{\partial D_1}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_3 - \frac{\partial D_2}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial D_3}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_1 \frac{\partial D_0}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_3 + \frac{\partial D_1}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_2 - \frac{\partial D_2}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \frac{\partial D_3}{\partial z}$$

$$\overline{\nabla\mathrm{D}} = -\frac{\partial D_0}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \frac{\partial D_1}{\partial x} - \frac{\partial D_2}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_3 + \frac{\partial D_3}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_2 - \frac{\partial D_0}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\partial D_1}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_3 - \frac{\partial D_2}{\partial y}$$

$$- \frac{\partial D_3}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \frac{\partial D_0}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_3 - \frac{\partial D_1}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\partial D_2}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \frac{\partial D_3}{\partial z}$$

$$\nabla\mathrm{D} + \overline{\nabla\mathrm{D}} = -2\frac{\partial D_1}{\partial x} - 2\frac{\partial D_2}{\partial y} - 2\frac{\partial D_3}{\partial z}$$

$$\nabla.\mathrm{D} = -\frac{-2\frac{\partial D_1}{\partial x} - 2\frac{\partial D_2}{\partial y} - 2\frac{\partial D_3}{\partial z}}{2} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}.\vec{\boldsymbol{D}} = \rho_e \qquad (4.1)$$

Benzer şekilde aynı çarpımlar $\nabla.\mathrm{B}$ için de yapılırsa;

$$\nabla.\mathrm{B} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}.\vec{\boldsymbol{B}} = \mu\rho_m \qquad (4.2)$$

elde edilebilir. $\nabla\times\mathrm{E}$ ifadesini bulmak için bikuaterniyonların özelliklerinden yararlanalım:

$$\nabla\times\mathrm{E} = \frac{\nabla\mathrm{E} - \overline{\nabla\mathrm{E}}}{2\mathrm{i}}$$

denklem eşitliği ile

$$\nabla\mathrm{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_3\right)(E_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + E_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + E_3\hat{\boldsymbol{e}}_3)$$

$$= -\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_3 - \frac{\partial E_3}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_2 - \frac{\partial E_1}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_3 - \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_1$$

$$+ \frac{\partial E_1}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_2 - \frac{\partial E_2}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \frac{\partial E_3}{\partial z}$$

$$\overline{\nabla \mathrm{E}} = -\frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{E}_2}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_3 + \frac{\partial \mathrm{E}_3}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_3 - \frac{\partial \mathrm{E}_2}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{E}_3}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_1$$

$$-\frac{\partial E_1}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\partial E_2}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \frac{\partial E_3}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathrm{E} = 2\frac{\partial E_2}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_3 - 2\frac{\partial E_3}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_2 - 2\frac{\partial E_1}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_3 + 2\frac{\partial E_3}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + 2\frac{\partial E_1}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_2 - 2\frac{\partial E_2}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_1$$

$$= \frac{2(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{E}})}{2\mathrm{i}} = -(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{E}})\mathrm{i} = -\left(-\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} - \frac{\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{m}}}{\varepsilon}\right)\mathrm{i} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\mathrm{i} + \frac{\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{m}}}{\varepsilon}\mathrm{i} \qquad (4.3)$$

elde edilir. $\nabla \times \mathrm{H}$ ifadesi için;

$$\nabla \times \mathrm{H} = \frac{2(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{H}})}{2\mathrm{i}} = -(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{H}})\mathrm{i} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}\mathrm{i} - \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{e}}\mathrm{i} \qquad (4.4)$$

bulunabilir. Burada ρ_e ve ρ_m, sırasıyla elektrik ve manyetik yük yoğunlukları, $\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{e}}$ ve $\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{m}}$ise akım yoğunluklarıdır. $\vec{\boldsymbol{D}}$ elektrik indüksiyon vektörü, $\vec{\boldsymbol{E}}$ elektrik alan, $\vec{\boldsymbol{B}}$ manyetik indüksiyon vektörü ve $\vec{\boldsymbol{H}}$ manyetik alandır.

Dyonların elektrik ve manyetik alanları potansiyeller cinsinden ayar dönüşümlerine uygun olarak şu şekilde verilebilir [22]:

$$\mathrm{E} = -\nabla\varphi_e - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} - \nabla \times \mathrm{A}' \qquad (4.5)$$

$$\mathrm{B} = -\nabla\varphi_m - \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial t} + \nabla \times \mathrm{A} \qquad (4.6)$$

Burada φ_e ve φ_m elektrik ve manyetik skaler potansiyeller, A ve A′ elektrik ve manyetik vektör potansiyeller ve $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ olup elektromanyetik dalgaların yayılım hızıdır. Vektör potansiyelleri

$$\mathrm{A} = (\varphi_e, \vartheta\vec{\boldsymbol{A}}) = \varphi_e\hat{\boldsymbol{e}}_0 + (A_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + A_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + A_3\hat{\boldsymbol{e}}_3)\,\vartheta$$

$$\mathrm{A}' = (\vartheta\varphi_m, \vec{\boldsymbol{A}'}) = \vartheta\varphi_m\hat{\boldsymbol{e}}_0 + (A'_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + A'_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + A'_3\hat{\boldsymbol{e}}_3)$$

olarak tanımlanabilir. Ψ’ yi elektrik ve manyetik alanlar cinsinden yazılabilen bir bikuaterniyon olarak ele alalım:

$$\Psi = \mathrm{E} - \mathrm{i}\vartheta\mathrm{B} = E_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + E_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + E_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 - \mathrm{i}\vartheta(B_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + B_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + B_3\hat{\boldsymbol{e}}_3)$$

$$= -\nabla\varphi_e - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} - \nabla \times \mathrm{A}' - \mathrm{i}\vartheta\left(-\nabla\varphi_m - \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial t} + \nabla \times \mathrm{A}\right)$$

φ skaler potansiyel ve V vektör potansiyel olarak bu bikuaterniyonları birleştirip

$$\varphi = \varphi_e - \mathrm{i}\vartheta\varphi_m$$

$$\mathrm{V} = \mathrm{A} - \mathrm{i}\frac{\mathrm{A}'}{\vartheta}$$

şeklinde yazalım [22]. Ψ artık şu halde tanımlanabilir:

$$\Psi = -\nabla(\varphi_e - \mathrm{i}\vartheta\varphi_m) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{A} - \mathrm{i}\frac{\mathrm{A}'}{\vartheta}\right) - \nabla \times (\mathrm{A}' + \mathrm{i}\vartheta\mathrm{A})$$

$$= -\nabla\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{V} - \mathrm{i}\vartheta\nabla \times \left(\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{i}\vartheta} + \mathrm{A}\right)$$

$$= -\nabla\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{V} - \mathrm{i}\vartheta\nabla \times \left(\mathrm{A} - \mathrm{i}\frac{\mathrm{A}'}{\vartheta}\right)$$

$$= -\nabla\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{V} - \mathrm{i}\vartheta\nabla \times \mathrm{V} \tag{4.7}$$

Ψ' nin diverjansını ise,

$$\nabla.\Psi = \nabla.(\mathrm{E} - \mathrm{i}\vartheta\mathrm{B}) = \nabla.\mathrm{E} - \mathrm{i}\vartheta\nabla.\mathrm{B} = \frac{\rho_e}{\varepsilon} - \mathrm{i}\vartheta\mu\rho_m = \frac{\rho_e}{\varepsilon} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\mu\rho_m$$

$$= \frac{\rho_e}{\varepsilon} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}\rho_m = \frac{1}{\varepsilon}\left(\rho_e - \frac{\mathrm{i}\rho_m}{\vartheta}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{4.8}$$

ve Ψ' nin rotasyonelini,

$$\nabla \times \Psi = \nabla \times (\mathrm{E} - \mathrm{i}\vartheta\mathrm{B})$$

$$\nabla \times \mathrm{B} = -(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{B}})\mathrm{i} = -\left(\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} + \mu\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{e}}\right)$$

ise

$$\nabla \times \Psi = \nabla \times (\mathrm{E} - \mathrm{i}\vartheta\mathrm{B}) = \nabla \times \mathrm{E} - \mathrm{i}\vartheta(\nabla \times \mathrm{B})$$

$$= \frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\mathrm{i} + \frac{\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{m}}}{\varepsilon}\mathrm{i} - \mathrm{i}\vartheta\left(-\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} - \mu\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{e}}\right)\mathrm{i} = -\vartheta\left(\mu\vec{\boldsymbol{J}} + \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial\vec{\boldsymbol{\Psi}}}{\partial t}\right) \tag{4.9}$$

olarak bulunur. Burada ρ ve $\vec{\boldsymbol{J}}$

$$\rho = \rho_e - \frac{\mathrm{i}\rho_m}{\vartheta}$$

$$\vec{\boldsymbol{J}} = \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{e}} - \mathrm{i}\vartheta\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{m}}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

D' Alembertian operatörü Ψ' ye uygulandığında elde edilen sonucu şöyle yazarız:

$$\boxdot = \frac{\mathrm{i}}{v}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_2 - \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

olmak üzere,

$$\boxdot\boxdot^* = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square$$

dir ve D' Alembertian operatörü ile

$$\mathrm{S} = \square\Psi = \left(\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\Psi = \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \nabla^2\Psi$$

olacak şekilde burada S parametresini bulmaya çalışalım. $\nabla^2\Psi$ için $\nabla \times (\nabla \times \Psi)$' den yararlanalım:

$$\nabla \times (\nabla \times \Psi) = \nabla \times \left[-\vartheta\left(\mu\vec{\boldsymbol{J}} + \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial\vec{\boldsymbol{\Psi}}}{\partial t}\right)\right]$$

$$\nabla \times (\nabla \times \Psi) = \nabla(\nabla . \Psi) - \nabla^2\Psi = \frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho - \nabla^2\Psi$$

ise $\nabla^2\Psi$ için

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho - \nabla \times \left[-\vartheta\left(\mu\vec{\boldsymbol{J}} + \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial\vec{\boldsymbol{\Psi}}}{\partial t}\right)\right]$$

işlemini yapalım:

$$\nabla \times \left[-\vartheta\left(\mu\vec{\boldsymbol{J}} + \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial\vec{\boldsymbol{\Psi}}}{\partial t}\right)\right] = -\left[\vartheta\mu\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{J}} + \frac{1}{\vartheta}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{\Psi}}\right)\right]$$

$$= -\left\{\vartheta\mu\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{J}} + \frac{1}{\vartheta}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vartheta\left(\mu\vec{\boldsymbol{J}} + \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial\vec{\boldsymbol{\Psi}}}{\partial t}\right)\right]\right\}$$

$$= -\left(\vartheta\mu\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{J}} + \mu\frac{\partial\vec{\boldsymbol{J}}}{\partial t} + \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{\Psi}}}{\partial t^2}\right)$$

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho + \left(\vartheta\mu\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{J}} + \mu\frac{\partial\vec{\boldsymbol{J}}}{\partial t} + \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{\Psi}}}{\partial t^2}\right)$$

$$S = \square\Psi = -\frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho - \left(\vartheta\mu\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{J}} + \mu\frac{\partial\vec{\boldsymbol{J}}}{\partial t} + \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{\Psi}}}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{\Psi}}}{\partial t^2}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho - \vartheta\mu\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{J}} - \mu\frac{\partial\vec{\boldsymbol{J}}}{\partial t} \tag{4.10}$$

olarak bulunur. Ayrıca dyonlar için başka bir genelleştirme daha yaparsak;

$$\mathrm{B} = \nabla \times \mathrm{V}$$

olduğunu biliyoruz. Maxwell denklemlerinde yerine yazıldığında;

$$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathrm{V}$$

‘dir. Böylece

$$\nabla \times \left(\mathrm{E} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}\right) = 0$$

ve Landau ayarından yola çıkarak

$$\mathrm{E} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = -\nabla\varphi$$

olacaktır. D’ Alembertian operatörünün V vektör potansiyel alanına uygulamasını:

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathrm{V})$$

$$\mathrm{D} = \varepsilon\mathrm{E} = \varepsilon\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla \times \mathrm{H} = \mathrm{J} + \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu}\nabla \times (\nabla \times \mathrm{V}) = \mathrm{J} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathrm{V}) = \mu\mathrm{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla(\nabla.\mathrm{V}) - \nabla^2\mathrm{V} = \mu\mathrm{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla^2\mathrm{V} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial t^2} = -\mu\mathrm{J}$$

$$\Box\mathrm{V} = \mu\mathrm{J} \tag{4.11}$$

şeklinde elde ederiz. Burada $\Box\varphi$ için;

$$\nabla\cdot\mathrm{D} = \varepsilon\nabla.\mathrm{E} = \varepsilon\nabla.\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial t}\right) = \rho$$

$$-\frac{\rho}{\varepsilon} = \nabla.\left(\nabla\varphi + \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial t}\right) = \nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla.\mathrm{V} = \nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

$$= \nabla^2\varphi - \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

$$\Box\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\mu\rho = \vartheta^2\mu\rho \tag{4.12}$$

sonucu elde edilebilir [6, 7, 22].

5. ELEKTROMANYETİZMADA ENERJİ KORUNUMU

Fizikte birçok uygulamalardaki birçok problemin çözümü gerekli korunum yasalarıyla sağlanabilir. Başlıca korunum yasaları: enerjinin korunumu, lineer (çizgisel) momentumun korunumu ve açısal momentumun korunumu şeklinde örneklendirilebilir. Söz konusu olan bu korunum denklemlerinin geçerli olduğu sistemler ise Noether Teoremi(1) altında toplanabilir. Mekanik ve klasik elektromanyetizmada enerjinin korunumundan söz edilebilir. İş yapabilme yeteneği olan enerji, korunumlu bir kavramdır ve enerjinin bir türden başka bir türüne dönüşümü ya da ısı yoluyla kaybı ancak söz konusu olabilir. Bu bölümde elektromanyetizmadaki enerji korunumu vektörel ele alınacaktır.

5. 1. Elektromanyetik Bir Dalga Olarak Işık

Faraday bilindiği gibi zamanla değişen manyetik alanların elektrik alan ürettiğini bulmuştur. Bu fikirden yola çıkarak, Maxwell de zamanla değişen elektrik alanlarla manyetik alanların ortaya çıkabileceğini öne sürmüştür. Maxwell'in bu hipotezi deneysel sonuçlarla kanıtlanmayıp tamamen simetri düşüncesinden kaynaklanmıştır. Yani, ivmeli olarak hareket eden elektrik yüklerinin boş uzayda sonsuza kadar yayılan birbirine bağlantılı elektrik ve manyetik değişiklikler oluşturduğunu hipotezi ileri sürülmüştür. Bu hipoteze göre, elektrik ve manyetik alan bileşenleri hem birbirlerine hem de hareket yönlerine dik dalgalardır. Elektromanyetik bir dalganın elektrik ve manyetik alanları birlikte değişmektedir. Maxwell' in hipotezinin doğru olabilmesi için, elektromanyetik

---

(1) Noether teoremi, bir fiziksel sistemde ayırt edilebilir her simetrinin oluşturacağı etkiye ilişkin bir korunum yasası olduğunu belirtir. Fiziksel bir sistemin etkisi, bir Lagrangian fonksiyonunun tümlevi olup buna göre sistemin tutumu en az eylem prensibine göre belirlenebilir. Bu teoreme göre Lagrangian; zamandan bağımsızsa bu sistemde enerjinin korunduğu, uzayda yer değişiminden (öteleme) etkilenmiyorsa bu sistemde momentumun korunduğu, uzay içinde dönmeden etkilenmiyorsa bu sistemde açısal momentumun korunduğu ortaya çıkmaktadır. Yeni ufuklar açan bu teoremi Emmy Noether 1915' te kanıtlanmış olup 1918' de yayınlanmıştır [24, 25].

dalgaların olması ve sürekli olarak değişen elektrik ve manyetik alanların birbirlerine elektromanyetik indüklemesiyle tanımladığı simetri düşüncesinin varlığı bulunmalıdır [25].

Maxwell, ε_0 boş uzayın elektriksel sabiti veya permitivite sabiti ve μ_0 boş uzayın manyetik geçirgenliği veya permeabilite sabiti olmak üzere boş uzayda elektromanyetik dalgaların hızının c=2,998.10^{8}m/s şeklinde verildiğini göstermiştir. Bulunan değerin ışık dalgalarının yayılma hızıyla aynı olduğunu gören Maxwell, ışığın elektromanyetik bir dalga olduğu kanısına varmıştır:

$$\varepsilon_0 = 8,854.10^{-12}\mathrm{C\,/\,N.m^2} \tag{5.1}$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\mathrm{N\,/A^2} \tag{5.2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2{,}998.10^8\mathrm{m/s} \cong 3.10^8\mathrm{m/s} \tag{5.3}$$

5. 2. Poynting Teoremi

Maxwell denklemleriyle, elektromanyetizmadaki enerji korunumu birçok çalışmada sıklıkla çalışılmıştır [26]. Bu bölümde Poynting vektörü ve teoremine ait sıklıkla kullanılan elektriksel akım formu ele alınmıştır. Maxwell denklemlerinin Gauss veya CGS birim sistemindeki halleri genel anlamda,

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{D}} = 4\pi\rho_e \tag{5.4}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = 0 \tag{5.5}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \tag{5.6}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c}\vec{\mathbf{J}}_e + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \tag{5.7}$$

ile verilmektedir. Özel bir koşul altında $\varepsilon_0 = \mu_0 = c = 1$ biçiminde alınmasıyla bu denklemler,

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho_e \tag{5.8}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = 0 \tag{5.9}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \tag{5.10}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = 4\pi\vec{\mathbf{J}}_e + \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \tag{5.11}$$

haline dönüşmektedir. Elektrik yük yoğunluğu ile elektriksel akım yoğunluğu yokluğunda ise bu denklemler boyutsuz formda,

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = 0 \tag{5.12}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = 0 \tag{5.13}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \tag{5.14}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \tag{5.15}$$

olarak yazılabilirler. Denklem (5.12) – (5.15) ile tanımlanan ortamı göz önüne alalım. Faraday yasasını gösteren (5.14) ifadesini soldan $\vec{\mathbf{B}}$ manyetik akı yoğunluğu ve Ampere-Maxwell yasasını ifade eden (5.15) ifadesini ise yine soldan $\vec{\mathbf{E}}$ elektrik alan vektörleriyle çarpıp sonuç taraf tarafa çıkartıldığında,

$$\vec{\mathbf{E}}.\left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}\right) + \vec{\mathbf{B}}.\left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}\right) + \vec{\mathbf{E}}.\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{B}}.\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0 \tag{5.16}$$

ifadesi elde edilmektedir. Daha önce de değinildiği gibi birbirlerine dik elektrik ve manyetik alan vektörleri elektromanyetik dalganın ilerleme yönüne de diktir. Elektromanyetik dalganın ilerleme yönü, aynı zamanda dalgaya ait enerji akısı olan $\vec{\mathbf{S}}$ vektörünün de yönüdür. Yani, (5.1) – (5.3)' te bulunan ortamın elektriksel ve manyetik geçirgenlik sabitleri ile ışık hızı arasındaki çıkarım, ışığın elektromanyetik enerji taşıyan dalga paketlerinden oluştuğunu göstermektedir. $\vec{\mathbf{S}}$ vektörü elektromanyetik enerji akısını ifade eden Poynting vektörünü ve u terimi ise elektromanyetik enerji yoğunluğunu göstermek üzere bu terimler aşağıdaki şekilde gösterilebilirler [27]:

$$\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(E^2 + B^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{B}}.\vec{\mathbf{B}}\right) \tag{5.18}$$

Denklem (5.16), $\vec{\nabla}.\left(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right) = \vec{\mathbf{B}}.\left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}\right) - \vec{\mathbf{A}}.\left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}\right)$ vektör özdeşliği kullanılarak (5.17) ve (5.18) ile,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{S}} = 0 \tag{5.19}$$

biçiminde yazılabilir [27]. Elektrodinamikte iş-enerji teoreminin karşılığı olarak bilinen Poynting teoreminden yola çıkarak elde edilen bu ifade, elektromanyetik enerji korunum denklemi olarak adlandırılır. Birim zamanda birim alanlar tarafından aktarılan enerjiye Poynting vektörü adı verilir.

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}\right) \tag{5.20}$$

Özel olarak, $\vec{\mathbf{S}} \,.\, d\vec{\mathbf{a}}$ birim zamanda sonsuz küçük $d\vec{\mathbf{a}}$ yüzeyinden geçen enerjidir.

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{du_{em}}{dt} - \oint_S \vec{\mathbf{S}} \,.\, d\vec{\mathbf{a}} \tag{5.21}$$

Yükler üzerinde yapılan iş W onların mekanik enerjisini artıracaktır. u_{mek} ile enerji yoğunluğunu gösterirsek

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\int_v u_{mek}\, d\tau \tag{5.22}$$

yazabiliriz ve alanların enerji yoğunluğu u_{em} ile gösterdiğimiz takdirde ise,

$$u_{em} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\varepsilon_0} B^2\right) \tag{5.23}$$

olur, o zaman

$$\frac{d}{dt}\int_v (u_{em} + u_{mek})\, d\tau = -\int_S \vec{\mathbf{S}} \,.\, d\vec{\mathbf{a}} = -\int_v \left(\vec{\nabla} . \vec{\mathbf{S}}\right) d\tau$$

ve buradan

$$\frac{d}{dt}\int_v (u_{em} + u_{mek}) = -\vec{\nabla} . \vec{\mathbf{S}} \tag{5.24}$$

Poynting teoreminin diferansiyel şekli elde edilir [8].

Şimdi homojen ortamda dyonlar için kompleks kuaterniyonlarla Poynting teoremini elde edelim:

Öncelikle diferansiyel operatörünün kuaterniyonik formunu tanımlayalım [22]:

$$\boxdot = \left(-\frac{\mathrm{i}}{v}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_3\right) \tag{5.25}$$

Bu işlemcinin kompleks eşleniği

$$\boxdot^* = \left(\frac{\mathrm{i}}{v}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_3\right) \tag{5.26}$$

olur. Bu iki işlemcinin çarpımı ise

$$\boxdot\boxdot^* = \left(-\frac{\mathrm{i}}{v}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_3\right)\left(\frac{\mathrm{i}}{v}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_3\right)$$

$$= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \square \tag{5.27}$$

bize D' Alembertian operatörünü verir. Ψ elektrik ve manyetik alanlar cinsinden yazılabilen bikuaterniyondur:

$$\Psi = \mathrm{E} - \mathrm{i}v\mathrm{B} = E_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + E_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + E_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 - \mathrm{i}vB_1 e_1 - \mathrm{i}vB_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 - \mathrm{i}vB_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{5.28}$$

Ψ' nin eşleniği de,

$$\Psi^* = \mathrm{E} + \mathrm{i}v\mathrm{B} = E_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + E_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + E_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 + \mathrm{i}vB_1 e_1 + \mathrm{i}vB_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \mathrm{i}vB_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{5.29}$$

şeklinde tanımlanır.

Öncelikle diferansiyel işlemcinin kompleks eşleniği $\boxdot^*$, Ψ' ye uygulansın:

$$
\begin{aligned}
\boxdot^*\,\Psi = &\left(\frac{\mathrm{i}}{v}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_1+\frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_2+\frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_3\right)\\
&\left(E_1\hat{\boldsymbol{e}}_1+E_2\hat{\boldsymbol{e}}_2+E_3\hat{\boldsymbol{e}}_3-\mathrm{i}vB_1\hat{\boldsymbol{e}}_1-\mathrm{i}vB_2\hat{\boldsymbol{e}}_2-\mathrm{i}vB_3\hat{\boldsymbol{e}}_3\right)\\
&=\frac{\mathrm{i}}{v}\frac{\partial E_1}{\partial t}\hat{\boldsymbol{e}}_1+\frac{\mathrm{i}}{v}\frac{\partial E_2}{\partial t}\hat{\boldsymbol{e}}_2+\frac{\mathrm{i}}{v}\frac{\partial E_3}{\partial t}\hat{\boldsymbol{e}}_3+\frac{\partial B_1}{\partial t}\hat{\boldsymbol{e}}_1+\frac{\partial B_2}{\partial t}\hat{\boldsymbol{e}}_2+\frac{\partial B_3}{\partial t}\hat{\boldsymbol{e}}_3\\
&-\frac{\partial E_1}{\partial x}+\frac{\partial E_2}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_3-\frac{\partial E_3}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_2+\mathrm{i}v\frac{\partial B_1}{\partial x}-\mathrm{i}v\frac{\partial B_2}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_3+\mathrm{i}v\frac{\partial B_3}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_2\\
&-\frac{\partial E_1}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_3-\frac{\partial E_2}{\partial y}+\frac{\partial E_3}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_1+\mathrm{i}v\frac{\partial B_1}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_3+\mathrm{i}v\frac{\partial B_2}{\partial y}-\mathrm{i}v\frac{\partial B_3}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_1\\
&+\frac{\partial E_1}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_2-\frac{\partial E_2}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_1-\frac{\partial E_3}{\partial z}-\mathrm{i}v\frac{\partial B_1}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_2+\mathrm{i}v\frac{\partial B_2}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_1+\mathrm{i}v\frac{\partial B_3}{\partial z}\\
&=\underbrace{-\frac{\partial E_1}{\partial x}-\frac{\partial E_2}{\partial y}-\frac{\partial E_3}{\partial z}+\mathrm{i}v\frac{\partial B_1}{\partial x}+\mathrm{i}v\frac{\partial B_2}{\partial y}+\mathrm{i}v\frac{\partial B_3}{\partial z}}_{\mathrm{A}}\\
&+\underbrace{\left(\frac{\mathrm{i}}{v}\frac{\partial E_1}{\partial t}+\frac{\partial E_3}{\partial y}-\frac{\partial E_2}{\partial z}+\frac{\partial B_1}{\partial t}-\mathrm{i}v\frac{\partial B_3}{\partial y}+\mathrm{i}v\frac{\partial B_2}{\partial z}\right)}_{\mathrm{B}}\hat{\boldsymbol{e}}_1\\
&+\underbrace{\left(\frac{\mathrm{i}}{v}\frac{\partial E_2}{\partial t}-\frac{\partial E_3}{\partial x}+\frac{\partial E_1}{\partial z}+\frac{\partial B_2}{\partial t}+\mathrm{i}v\frac{\partial B_3}{\partial x}-\mathrm{i}v\frac{\partial B_1}{\partial z}\right)}_{\mathrm{C}}\hat{\boldsymbol{e}}_2\\
&+\underbrace{\left(\frac{\mathrm{i}}{v}\frac{\partial E_3}{\partial t}+\frac{\partial E_2}{\partial x}-\frac{\partial E_1}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial t}-\mathrm{i}v\frac{\partial B_2}{\partial x}+\mathrm{i}v\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)}_{\mathrm{D}}\hat{\boldsymbol{e}}_3
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

Bu sonuç Ψ^* ile soldan çarpılsın:

$$
\begin{aligned}
\Psi^*\,\boxdot^*\,\Psi = &\left(E_1\hat{\boldsymbol{e}}_1+E_2\hat{\boldsymbol{e}}_2+E_3\hat{\boldsymbol{e}}_3+\mathrm{i}vB_1e_1+\mathrm{i}vB_2\hat{\boldsymbol{e}}_2+\mathrm{i}vB_3\hat{\boldsymbol{e}}_3\right)\\
&\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\hat{\boldsymbol{e}}_1+\mathrm{C}\hat{\boldsymbol{e}}_2+\mathrm{D}\hat{\boldsymbol{e}}_3\right)
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki denklemin skaler kısmı,

$$
Sc(\Psi^*\,\boxdot^*\,\Psi)=(-E_1\mathrm{B}-E_2\mathrm{C}-E_3\mathrm{D}-\mathrm{i}vB_1\mathrm{B}-\mathrm{i}vB_2\mathrm{C}-\mathrm{i}vB_3\mathrm{D}) \tag{5.31}
$$

olacaktır. Ψ^* ile $\boxdot^*\,\Psi$ ifadesinin bikuaterniyon skaler çarpımı,

$$
\begin{aligned}
\Psi^{*}.\ \boxdot^{*}\Psi &= -\tfrac{1}{2}\left(\Psi^{*}\boxdot^{*}\Psi+\overline{\Psi^{*}\boxdot^{*}\Psi}\right)\\
&= -\tfrac{1}{2}\left[-2\left(E_1\mathrm{B}+E_2\mathrm{C}+E_3\mathrm{D}+\mathrm{i}vB_1\mathrm{B}+\mathrm{i}vB_2\mathrm{C}+\mathrm{i}vB_3\mathrm{D}\right)\right]\\
&= E_1\mathrm{B}+E_2\mathrm{C}+E_3\mathrm{D}+\mathrm{i}vB_1\mathrm{B}+\mathrm{i}vB_2\mathrm{C}+\mathrm{i}vB_3\mathrm{D}\\
&= \tfrac{\mathrm{i}}{v}E_1\frac{\partial E_1}{\partial t}+E_1\frac{\partial E_3}{\partial y}-E_1\frac{\partial E_2}{\partial z}+E_1\frac{\partial B_1}{\partial t}-\mathrm{i}vE_1\frac{\partial B_3}{\partial y}+\mathrm{i}vE_1\frac{\partial B_2}{\partial z}\\
&\quad+\tfrac{\mathrm{i}}{v}E_2\frac{\partial E_2}{\partial t}-E_2\frac{\partial E_3}{\partial x}+E_2\frac{\partial E_1}{\partial z}+E_2\frac{\partial B_2}{\partial t}+\mathrm{i}vE_2\frac{\partial B_3}{\partial x}-\mathrm{i}vE_2\frac{\partial B_1}{\partial z}\\
&\quad+\tfrac{\mathrm{i}}{v}E_3\frac{\partial E_3}{\partial t}+E_3\frac{\partial E_2}{\partial x}-E_3\frac{\partial E_1}{\partial y}+E_3\frac{\partial B_3}{\partial t}-\mathrm{i}vE_3\frac{\partial B_2}{\partial x}+\mathrm{i}vE_3\frac{\partial B_1}{\partial y}\\
&\quad-B_1\frac{\partial E_1}{\partial t}+\mathrm{i}vB_1\frac{\partial E_3}{\partial y}-\mathrm{i}vB_1\frac{\partial E_2}{\partial z}+\mathrm{i}vB_1\frac{\partial B_1}{\partial t}+v^2B_1\frac{\partial B_3}{\partial y}\\
&\quad-v^2B_1\frac{\partial B_2}{\partial z}-B_2\frac{\partial E_2}{\partial t}-\mathrm{i}vB_2\frac{\partial E_3}{\partial x}+\mathrm{i}vB_2\frac{\partial E_1}{\partial z}+\mathrm{i}vB_2\frac{\partial B_2}{\partial t}\\
&\quad-v^2B_2\frac{\partial B_3}{\partial x}+v^2B_2\frac{\partial B_1}{\partial z}-B_3\frac{\partial E_3}{\partial t}+\mathrm{i}vB_3\frac{\partial E_2}{\partial x}-\mathrm{i}vB_3\frac{\partial E_1}{\partial y}\\
&\quad+\mathrm{i}vB_3\frac{\partial B_3}{\partial t}+v^2B_3\frac{\partial B_2}{\partial x}-v^2B_3\frac{\partial B_1}{\partial y}\\
&= \frac{\mathrm{i}}{2v}\frac{\partial E^2}{\partial t}+\frac{\mathrm{i}v}{2}\frac{\partial B^2}{\partial t}+\mathrm{i}v\vec{\boldsymbol{\nabla}}.\left(\vec{\boldsymbol{E}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\right)+\vec{\boldsymbol{E}}.\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}-\vec{\boldsymbol{B}}.\frac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\\
&\quad+\vec{\boldsymbol{E}}.\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{E}}\right)+v^2\vec{\boldsymbol{B}}.\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\right)\\
&= \frac{\mathrm{i}}{2v}\frac{\partial}{\partial t}\left(E^2+v^2B^2\right)+\mathrm{i}v\vec{\boldsymbol{\nabla}}.\left(\vec{\boldsymbol{E}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\right)-\frac{1}{\varepsilon}\left(\vec{\boldsymbol{E}}.\vec{\boldsymbol{J}}_m+\vec{\boldsymbol{B}}.\vec{\boldsymbol{J}}_e\right)
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

olacaktır. Denklemdeki $(E^2+v^2B^2)$ ifadesi enerji yoğunluğunu, $\vec{\boldsymbol{E}}\times\vec{\boldsymbol{B}}$ ifadesi ise Poynting teoremini bikuaterniyon olarak vermektedir. O zaman

$$\Psi^{*}.\ \boxdot^{*}\Psi=\frac{\mathrm{i}}{2v}\frac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{i}v\vec{\boldsymbol{\nabla}}.\vec{\boldsymbol{S}}-\frac{1}{\varepsilon}\left(\vec{\boldsymbol{E}}.\vec{\boldsymbol{J}}_m+\vec{\boldsymbol{B}}.\vec{\boldsymbol{J}}_e\right)\tag{5.33}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+2v^2\vec{\boldsymbol{\nabla}}.\vec{\boldsymbol{S}}=-2\mathrm{i}\frac{v}{\varepsilon}\left(\vec{\boldsymbol{E}}.\vec{\boldsymbol{J}}_m+\vec{\boldsymbol{B}}.\vec{\boldsymbol{J}}_e\right)-2\mathrm{i}v\left(\Psi^{*}.\ \boxdot^{*}\Psi\right)\tag{5.34}$$

şeklinde bikuaterniyonlar için enerji korunum ifadesi elde edilir.

6. SONUÇ

Kompleks kuaterniyonlar daha çok genel ve özel rölativite, elektromanyetizma ve kuantum mekaniğinde fiziksel denklemleri daha anlaşılır şekilde temsil etmek ve yüksek boyutlu uzayda çözmek için fizikte çok yaygın kullanılmaktadır.

Kompleks kuaterniyonlar iki kuaterniyonun ‘i’ kompleks sayısı ile yeniden yazılmasıyla elde edilen değişmeli olmayan bir cebir oluşturmaktadır. Kuaterniyonlarla ifade edilen tüm denklemleri kompleks kuaterniyonlarla da ifade etmek mümkündür. Bunun yanında kompleks uzayda temsil edilen ifadeleri kompleks kuaterniyonlarla gösterebiliriz. Bu cebir aynı zamanda kompleks dört-vektör cebri ile de benzerlik taşımaktadır.

Bu çalışmada ayar denklemleri kullanılarak dyonlar için enerji korunum denklemleri yeniden formüle edildi. Sonuçta kompleks kuaterniyon cebri ile elektromanyetizmadaki denklemler türetilerek Poynting Teoremi kompleks kuaterniyonlarla gösterildi. Dyonik Plazma, manyetohidrodinamik denklemleri sağladığı, ayrıca fizikteki belirli korunum yasalarını içerdiği bir durum olarak göz önüne alındığında elde edilen ve yukarıda önerilen denklemler için yeni bir araştırma alanı olarak karşımıza çıkmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Şahin N., *Clifford Cebrinin Fiziksel Uygulamaları*, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2006.

[2] Chou J. C. K, "Quaternion kinematic and dynamic differential equations", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **8 (1)**, 53-64, 1992.

[3] Adler S. L., *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields*, Oxford University Press, New York, A.B.D, 1995.

[4] Jolly D. C., "Isomorphic matrix representation of quaternion field theories", *Lettere Al Nuovo Cimento*, **39(9)**, 185-188, 1984.

[5] Tanışlı M. ve Özdaş K., "Application of Quaternion Representation to Stanford Manipulator", *Balkan Physics Letters*, **5(2)**, 65-68, 1997.

[6] Negi O. P. S., Dehnen H., Karnatak G. ve Bisht P. S., *Generalization of Schwinger-Zwanzinger Dyon to Quaternion*, 2010, http://arxiv.org/pdf/1012.0279.pdf

[7] Bisht P. S., Karnatak G. ve Negi O. P. S., "Generalized Gravi-Electromagnetism", *Int. J. Theor. Phys.*, **49**, 1344-1356, 2010.

[8] Griffiths D. J. (Çev: Prof. Dr. Basri Ünal), *Elektromanyetik Teori*, Gazi Kitabevi, Ankara, 2003.

[9] Soydaş M., *Bikuaterniyonların Modern Fiziğe Uygulaması*, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2003.

[10] Özdaş K. ve Özdaş A., "Fiziksel Niceliklerin Kuaterniyonlarla Temsili", *Anadolu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Dergisi*, **1-2**, 101-113, 1989.

[11] http://www.yorumla.net/biyografi/6061-vidinli-huseyin-tevfik-pasa.html

[12] Tanışlı M., *Uzaysal Dönmelerin ve Robot Kollarının Pozisyonun Kuaterniyon Dönüşümleri ile İncelenmesi*, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 1995.

[13] Tanışlı M., Özdaş K. ve Özdaş A., "An Application of General Quaternion Transformation for Robotics Position", *Anadolu Üniverisitesi Fen Fakültesi Dergisi*, **3**, 55-68, 1997.

[14] Tanışlı M., "The Quaternionic Energy Conservation Equation for Acustic", *Acta Physiva Slovaca*, **53**, 253-258, 2003.

[15] Tanışlı M. ve Özgür G., "Biquaternionic Represations of Angular Momentum and Dirac Equation", *Acta Physiva Slovaca*, **53**, 243-252, 2003.

[16] Negi O. P. S. ve Bisht P. S., "Revisiting Quaternion Formulation and Electromagnetism", *Il Nuovo Cimento*, **113B**, 1449-1467, 1998.

[17] De Leo S., *Quaternion and Special Relativity*, 1995. http://arxiv.org/pdf/hep-th/9508011.pdf

[18] Baylis W. E., *Clifford (Geometric) Algebra with Applications in Physics*, Matematics and Engineering, Boston, A. B. D.,1996.

[19] Lounesto P., *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge University Press, New York, A. B. D., 1997.

[20] Kula L., *Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları*, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2003.

[21] Özgür G., *Bikuaternionların Alternatif Cebirlerinin Karşılaştırılması ve Bikuaternionik Dirac Denklem*i, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2002.

[22] Singh J., Bisht P. S.ve Negi O. P. S., "Quaternion analysis for generalized electromagnetic fields of dyons in an isotropic medium", *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **40,** 9137-9147, 2007.

[23] http://en.wikipedia.org/wiki/Dyon

[24] http://tr.wikipedia.org/wiki/Noether_teoremi

[25] Noether, E. (Çev: Tavel, M. A), "Invariant Variation Problems", *Nachr.v. d. Ges. d. Wiss.*, 235-257, 1918.

[26] Poynting, J. H., "On the Transfer of Energy in the Electromagnetic Field", *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **175**, 343 – 361, 1884.

[27] Kansu M. E., Tanışlı M., Demir S., "Electromagnetic Energy Conservation with Complex Octonions", *Turkish Journal of Physics*, doi:10.3906/fiz-1109-18, 2012.