

OPTİK ÖRGÜDE ULTRASOĞUK ATOMLAR

Yüksek Lisans Tezi

Saadet BURGU

Eskişehir, 2016

OPTİK ÖRGÜDE ULTRASOĞUK ATOMLAR

Saadet BURGU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Fizik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Cem YÜCE**

**Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Nisan 2016**

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Saadet Burgu'nun "**Optik Örgüdeki Ultrasonik Atomlar**" başlıklı **Fizik** Anabilim Dalındaki Yüksek Lisans Tezi 18/01/2016 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Ad-Soyad

İmza

Üye(Tez Danışmanı): Prof. Dr. CEM YÜCE

Üye : Prof. Dr. MURAT TANIŞLI

Üye : Prof. Dr. ABDULLAH ALĞIN

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yöneyim Kurulu'nun tarih vekararı ile onaylanmıştır.

ÖZET

OPTİK ÖRGÜDE ULTRASOĞUK ATOMLAR

Saadet BURGU

Fizik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Nisan, 2016

Danışman: Prof. Dr. Cem YÜCE

Bu çalışmada lazer ışığıyla oluşturulan üç-boyutlu periyodik potansiyelli optik örgünün Bose-Einstein yoğuşması içine yüklenmesi ele alınmıştır. Harmonik potansiyelde tuzaklanmış ultra-soğuk bozonların özellikleri incelenmiştir. Bloch ve Wannier fonksiyonları kullanılarak bu gibi sistemlerin bant yapıları tartışılmıştır. Parabolik potansiyelli zamana bağlı bir boyutlu optik örgüde sıkı bağlanma yaklaşıklığı kullanarak, bu sistemlerin kuantum etkileri çalışılmıştır. Bu amaçla Gross Pitaevskii eşitliği ve Schrödinger denklemi kullanılmıştır. Atomik hareketi tanımlayan dinamik denklemi çözülmüştür. Titreşimli bir optik örgüde Bose-Einstein Yoğuşmasının dinamik yerleşimi anlatılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bose-Einstein Yoğuşması, Optik Örgü, Gross - Pitaevski Denklemi, Bloch Fonksiyonları

ABSTRACT

ULTRACOLD ATOMS IN OPTICAL LATTICE

Saadet BURGU

Physics Program

Anadolu University, Graduate School of Sciences, April, 2016

Supervisor: Prof. Dr. Cem YÜCE

In this thesis, a Bose-Einstein condensate is loaded into a three-dimensional optical lattice potential formed by a standing wave laser light field. Ultracold bosons trapped harmonic plus optical potential is studied. The band structure together with Bloch functions and Wannier basis are discussed for this system. Using tight-binding method, corresponding discrete equation and investigate quantum dynamics for a modulated optical potential is derived. Analytical solution and perform numerical computation are found. Dynamical localization in our system is reported.

Keywords: Bose-Einstein Condensation, Optical Lattice, Gross-Pitaevski Equation, Bloch Functions

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalardan bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilmeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan ‘bilimsel intihal tespit programı’yla tarandığını ve hiçbir şekilde ‘intihal içermediğini’ beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkan tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Saadet BURGU

Babama....

İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
ETİK VE İLKELERE UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	v
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
GİRİŞ	1
1. BOSE-EINSTEIN YOĞUŞMASI.....	2
2. LAZERLE SOĞUTMA.....	6
3. HARMONİK TUZAK	10
4. ETKİLEŞMEYEN BOZON GAZLARI.....	12
4.1. Geçiş Sıcaklığı (T_c).....	12
5. ZAYIF ETKİLEŞEN BOSE GAZI	18
5.1. Bogoliubov Yaklaşımı	21
5.2. Gross-Pitaevskii Denklemi.....	22
6. OPTİK ÖRGÜ	24
6.1. Korunumlu Potansiyel	27
6.2. Ultrasoğuk Atomlar	28
7. PERİYODİK POTANSİYELDE BİR ELEKTRONUN DALGA DENKLEMİ	29
8. BLOCH FONKSİYONLARI	32
8.1. Bloch Titreşimi	32
9. WANNIER FONKSİYONLARI.....	33

10. BOSE YOĞUŞMALI ATOMLAR	35
11. DİNAMİK YERELLEŞME	36
12. OPTİK ÖRGÜDE BANT YAPISI.....	39
12.1. Bloch Bantları	39
13. HARMONİK+OPTİK ÖRGÜ	41
14. ORTALAMA ALAN DİNAMİĞİ	43
15.SONUÇ.....	46
KAYNAKÇA	49
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simge	Açıklama
$n(r)$	Yoğunluk Dağılımı
ω_{\perp}	Radyal Frekans
λ'	Anizotropi Parametresi
λ_{dB}	de Broglie Dalga Boyu
g	Atomlar Arası Etkileşmeleri İfade Eden Terim
$V_{\text{tuzak}}(r)$	Atomların Tutulduğu Tuzak Potansiyelini
$V_{\text{ör}}(x)$	Örgü Potansiyeli
J	Tünelleme Matris Elemanı
$E_{n,q}$	Sistemin Öz-enerjileri
$F(t)$	Dış Kuvvet
Ω	Potansiyel Enerji
E_R	Geri Tepme Enerjisi
μ	Kimyasal Potansiyeli

GİRİŞ

Aşırı soğuk alkali atomik gazının Bose-Einstein yoğuşması (BEC), deneysel olarak 1995 yılında gerçekleştirilmiştir [1]. Bu deneyle, kuantum gazlarının hem manyetik tuzaklar hem de optik örgüler içindeki davranışları incelenmiştir. BEC uygulamaları için gerekli bilgi ve deneysel olanaklar, 1995 yılından bu yana hızlı bir şekilde artmıştır. 2000 yılına kadar geçen zaman içerisinde yapılan çalışmalarda BEC karakterize edilmiştir. Özellikle, optik örgü içindeki yoğuşma ve tuzaklanmış yoğuşma içindeki girdaplar üzerine yapılan çalışmalar, bu konuya olan ilgiyi her gün daha da artırmıştır [1].

Bu çalışmada optik örgü ve harmonik tuzağın birlikte kullanıldığı bir sistem ele alınmıştır ve ultrasoğuk atomların dinamik yapısı incelenmiştir.

1. BOSE-EINSTEIN YOĞUŞMASI

Bose-Einstein istatistiğine uyan parçacıklar için bir Pauli dışarlama ilkesi yoktur. Bu nedenle, alçak sıcaklıktaki davranışları fermiyonlardan çok farklı olur; birbirinden uzak kalmak bir yana, alçak sıcaklıkta hep birlikte taban durumuna inmeye çalışırlar. Yine, klasik istatistik mekanikle açıklanamayan kuantum etkiler bozon sistemlerinde de deneysel olarak gözlenir. Örneğin; fotonların kara cisim ışımaya spektrumu, sıvı 4He izotopunun 2.17K sıcaklığı altında süperakışkan faza geçişi vb. gibi.

Bose-Einstein yoğuşması bir tür faz geçiştir. BEC tıpkı buharın su damlaları halinde yoğuşması gibidir. Ancak bu, momentum uzayında bir yoğunlaşmadır. Yani, bozonlar gazın hacmi içinde bir yere toplanmazlar, sadece enerji ve momentumları olabilecek en düşük düzeyde olur [2].

BEC, deneysel olarak 1995 yılında rubidyum, sodyum ve lityum alkali atomlarında gözlenmiştir [3]. E. Cornell, C. Wiemann ve W. Ketterle, bu başarılarından dolayı 2001 yılında Nobel Fizik Ödülü'nü almışlardır. Bu tür sistemler sıradan katı, sıvı ve gazlardan pek çok yönüyle farklıdır. Düşük sıcaklıklarda oldukça seyreltik olan maddenin bu yeni halinde atomların makroskobik bir bölümü, aynı kuantum durumuna yerleşirler ve lazer tarafından oluşturulan ışık dalgası gibi ortak bir madde dalgası oluştururlar. Gaz fazındaki bu kuantum akışkanının özellikleri hem deneysel hem de teorik açıdan oldukça fazla ilgi görmekle birlikte, makroskobik bir ölçekte kuantum fenomenlerinin incelenmesine de olanak sağlar. Çünkü bütün faz değişimleri atomlar ve moleküller arasındaki kuvvetlerle açıklanırken BEC, kuantum mekaniği yasalarının bir sonucu olarak oluşur.

BEC, atomik bulutunun merkezinde parçacık yoğunluğu $10^{13}-10^{15} \text{ cm}^{-3}$ mertebesindedir. Bu durum oda sıcaklığı ve atmosferik basınç altında havadaki moleküllerin yoğunluğu olan 10^{19} cm^{-3} ile kıyaslanacak olursa, BEC'in ne kadar seyreltik olduğu daha net görülebilir. BEC'in elde edildiği ilk deneyde, başlangıç noktası oda sıcaklığındaki rubidyum atomlarıydı. Bu atomlar altı doğrultudaki lazer ışınları tarafından 10 μK mertebesindeki sıcaklıklara kadar soğutulabildiler [3].

1995 yılındaki deneyler BEC için bir dönüm noktası olmuştur. BEC makroskobik ölçekte kuantum mekaniksel özellikleri gösteren örneklerden biridir. Alkali atomlarla yapılan deneyler, kuantum istatistiksel mekaniğinin teorik öngörülerinin karşılığı olması nedeniyle oldukça önemlidir. Bu deneyler parçacıkların

kuantum davranışlarının makroskobik boyutta araştırılmasını sağlayan eşsiz bir fırsattır. Bu nedenle bozon sistemlerine ve BEC olayına olan ilgi son yıllarda oldukça artmıştır [4].

BEC, çok sayıda bozonun bulunduğu sistemlerde çok düşük sıcaklıklarda oluşan bir faz değişikliğidir. 1995 yılında alkali atomların zayıf etkileşimli seyreltilmiş buharıyla yapılan bir seri deney sonucunda gözlenmiştir [5]. Bu deneylerde atomlar önce manyetik tuzaklarla hapsedilmiş ve mutlak sıfır sıcaklığına yakın sıcaklıklara kadar soğutulmuştur. Bu sıcaklıklar mikrok Kelvin mertebesindedir. Atomlar sınırlayıcı tuzakın kapatılmasını takiben yayılmaya terk edilmiş ve optiksel işlemler uygulanmıştır. Belli bir sıcaklığın altında hız dağılımında sıfır hız civarında keskin bir pikin gözlenmesi, BEC'in açık bir kanıtı olmuştur [5].

BEC, faz uzay yoğunluğu yeterince geniş olduğu zaman veya de Broglie dalga boyu parçacıklar arası mesafeye genişletildiği zaman, özdeş boson gazında faz geçişi olmasıdır. Yoğuşmanın oluşması için

$$n \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mKT} \right)^{3/2} > 2,612 \quad (1.1)$$

kriteri sağlanmalıdır. Burada n atom yoğunluğunu gösterir. BEC'nin başarılmasında yoğunluğunun yeterince geniş yapılması veya sıcaklığın Eş. (1.1)'i sağlayacak kadar düşük olması gerekir.

BEC'de elastik olmayan çarpışmalar önemli bir rol oynar ve tuzaklanmış türlerin seviyesini değiştirir. Bu işlem tuzaklanmamış seviyeleri ortaya çıkarır. Aynı zamanda elastik olmayan işlemde kinetik enerji ortaya çıkararak ısınmasına sebep olur.

Üç boyutlu yeniden oluşumu içeren elastik olmayan çarpışmalar, yoğuşma ve yoğuşma biçimi için önemlidir. Çünkü bunlar ısınmaya sebep verdiği gibi elastik olmayan çarpışmalar buharlaştırarak soğutmayı etkileyebilir. Yoğuşmanın ömrünü çarpışma işlemleri tanımlar. Eğer vakum yeterince düşük değilse geri zemindeki sıcak gaz atom türleri tuzaklanan veya yoğunlaşan atomlar ile çarpışabilir. Bu yüzden atomlara momentum transfer edilir. Geri zemindeki gaz atomları tipik olarak 300 K mertebesinde enerjilere sahip olduklarında soğuk atomlar tuzaktan atılması için yeterince enerji alır. Ayrıca, birkaç tane atom yollanarak çarpışma çok az miktarda momentum transferi yapabilir. Fakat hala bu durum tuzaklanmış atomlar üretir. Bu

sorun manyetik atom tuzaklarında gözlenmiştir. Hatta vakum yeterince iyi bir seviyede ise tuzaklanmış türlerin arasında elastik olmayan çarpışmalar tuzaklanmış gaz veya yoğunlaşmaların ömrünü sınırlayabilir [6].

Tuzakta birbiri ile etkileşmeyen Bose-Einstein (BE) gazı özellikleri istatistiksel mekanik aracılığıyla belirlenebilir. Sistemin denge durumundaki özellikleri, enerji spektrumunun sürekli olduğu yarı-klasik yaklaşım ile hesaplanabilir. Bu yaklaşımın geçerli olabilmesi için sıcaklık, $\Delta\epsilon$ birbirine komşu iki enerji seviyesi arasındaki fark olmak üzere $(\Delta\epsilon/k)$ 'dan büyük olmalıdır [3].

Bu başlıkta yarı-klasik kelimesinden kasıt, ışığın elektrik alan bileşeni klasik, atomların enerji seviyesi kuantum mekaniksel olarak inceleniyor olmasıdır. Nötr bir atom değişken bir \vec{E} elektrik alanına yerleştiğinde $\omega = 2\pi f$ açısal frekansıyla salınır. Elektrik alan \vec{d} dipol momenti içerir. Dipol momentin kompleks bileşeniyle aynı frekansta salınır. Yani;

$$\vec{d} = \alpha(\omega)\vec{E} \quad (1.2)$$

$\alpha(\omega)$ kompleks kutuplaşabilirlik ve ω frekansına bağlıdır. Elektrik alandaki atomun enerjisi pertürbasyon teorisi kullanılarak hesaplanabilir. Elektrik alan için dipol yaklaşımında, etkileşim Hamiltonyeni

$$H' = -\vec{d} \cdot \vec{E} \quad (1.3)$$

haline gelir. Dipol moment ise

$$\vec{d} = -e \sum_j \vec{r}_j \quad (1.4)$$

dir ve \vec{r}_j elektronların konum operatörüdür. ω frekanslı zamana bağlı elektrik alan

$$E(r, t) = E_0(r) \cos \omega t = \frac{E_0(r)}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (1.5)$$

şeklinde yazılabilir. Atomik sistemin her $|\Psi\rangle$ durumu, $|n\rangle$ pertürbe olmamış durumlar cinsinden aşağıdaki gibi açılabilir:

$$|\Psi\rangle = \sum_n a_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle \quad (1.6)$$

Zamana bağlı Schrodinger denklemi

$$i\hbar\dot{a}_n = \sum_k \langle n|H'|k\rangle a_k(t) e^{i\omega_{nk}t} \quad (1.7)$$

halini alır. $\omega_{nk} = (E_n - E_k)/\hbar$ [7].

2. LAZERLE SOĞUTMA

Lazer ile soğutma kavramı ilk olarak 1968 yılında Letokhov, 1970 yılında A. Ashkin tarafından öne sürüldü [8]. Bu konuda farklı çalışmalar yürütüldüğü yıllarda ilk defa lazer ışığının serbest atomları soğutmada kullanılabileceğini gösterdiler. Lazer ile soğutmadaki amaç, foton-atom saçılmasında “Doppler etkisini” kullanarak atomların ortalama hızlarını düşürmek ve bu yolla onların sıcaklığını düşürmektir.

Lazerle soğutma ile ulaşılan sıcaklıklar, oldukça düşük olmasına rağmen BEC’in gözlenmesine yeterli olmadığından yoğunlaşmayı elde etmek için gereken yol, geliştirilen soğutma yöntemlerinin birleştirilmesinden geçmektedir. İlk olarak, lazerle soğutulan parçacıklar buharlaştırma yöntemi ile ikinci bir soğutmaya tabi tutulur. Buharlaştırarak soğutmadaki amaç, yüksek enerjili atomların tuzaktan kaçmasına izin vermektir. Böylece tuzak içerisinde düşük enerjili parçacıklar kalır [8].

MikroKelvin sıcaklık bölgesine ulaşmak, iki işlemin birleştirilmesi ile mümkün olur. Lazer, önce gazı soğutur. Daha sonra soğutulan seyreltik gaz manyetik tuzaklarla hapsedilir. İkinci durumda zorlamalı buharla soğutma, tuzak derinliği azaltılır ve enerjisi fazla olan atomların çarpışma sonucunda kaçması sağlanır. Geriye kalan atomlar yeniden ısı olarak daha düşük sıcaklıklara gider. BEC deneylerinde kuantum yozlaşması sıcaklıkları 500 nK ve 2 μ K arasında ve yoğunlukları 10^{14} ve 10^{15} cm^{-3} arasında olur. En geniş yoğunlaşma Na’da 30 milyon atom ve H’de 1 milyar atomdur ve en küçüğü birkaç yüz atomu içerir. Manyetik tuzaga bağlı olarak yoğunlaşmanın şekli yaklaşık olarak hem 10-50 μm çaplı yuvarlak veya yaklaşık 15 μm çaplı ve 300 μm uzunluğunda sigara şekline sahiptir [6].

Kuantum dejenere gazları elde edebilmek için esas teknik soğutma tekniğidir. Çünkü yüksek sıcaklıktaki seyreltik atomlar klasik olarak davranır. Atomların de-Broglie dalga boyları $\lambda_{dB} = \hbar / (2\mu k_B T)^{1/2}$, atomlar arası mesafeyle karşılaştırıldığında küçüktür. Seyreltik gazdaki atomların soğutulması ile de Broglie dalgaboyu λ_{dB} , atomlar arası mesafeye eşitlenmeye başladığı zaman kuantum yozlaşma durumu başlar. Atomik dalga paketleri üst üste biner ve gaz ayırt edilemeyen parçacıklar haline dönüşür ve “kuantum çorbası” tabiri ile tanımlanır. Eğer atomlar bozon ise aynı kuantum seviyeyi oluşturan atom bulutu olarak tanımlanan yoğunlaşma belli bir sıcaklıkta ortaya çıkar (bu ideal gaz için $n\lambda_{dB} = 612,23$ şartına bağlıdır [6]).

BEC deneylerinin yapılabilmesi için gerekli olan çok düşük sıcaklıklara

ulaşmak, 1980'lerde nötral atomların lazerle soğutma tekniklerinin gelişmesinden sonra mümkün olmuştur. Lazerle soğutma BEC deneylerinin hepsinde kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde, aynı açısız frekansa ve aynı şiddete sahip iki lazer demeti birbirine zıt olacak şekilde yerleştirilir. Lazer demetinin frekansı, kullanılan gazın uyarılma durumu ile taban durum arasındaki atomik geçiş frekansı aralığında seçilir [4].

Aynı kuantum durumunda bulunan milyarlarca fotonun oluşturduğu lazer ışını soğutulmak istenen atoma gönderildiğinde atomu yavaşlatabilir. Burada ilk koşul, gönderilen fotonların atomlarla etkileşmelerinin ardından geliş enerjilerinden daha büyük enerjiyle geri saçılmış olmalarıdır. Bu yüzden lazer ışığının frekansı yani enerjisi buna göre ayarlanmalıdır. Bu yolla maddeler mutlak sıfırın (0 K) milyarda bir derece üzerine kadar (nanokelvin mertebesine kadar) soğutulabilirler. İkinci koşul ise lazer ışığının frekansının içinden geçeceği maddenin atomlarının enerji düzeyleri arasındaki farkla uyumlu olmasıdır. Böyle olmazsa atomlar bu ışığa tepki vermezler ve fotonlar atomlar tarafından soğurulmadan geçip gider [9].

Atomların yavaşlaması atomların dışarıdan foton soğurması ile gerçekleşir. Çünkü foton soğurma ile atomun momentumunu değiştirir. Doppler kayması olarak bilinen, atomun enerjisini azaltma yöntemi sayesinde, atom sürekli olarak hareket yönü doğrultusunda momentum soğurur [8]. Atomun lazere doğru bir ötelenme hareketi varsa, Doppler etkisinden ötürü, lazer ışını rezonans frekansına yakın olarak algılar. Bu durumda atom, bir foton ve bu fotonun momentumunu soğurarak uyarılmış üst enerji seviyesine geçer, aynı zamanda da yavaşlamış olur. Elektron kısa bir süre sonra kendiliğinden alt enerji düzeyine geçerken, atomun yaydığı foton herhangi bir yönde hareket edecektir. Dolayısıyla, istatistiksel olarak, yayılan fotonun atoma aktaracağı ortalama ötelenme hızı sıfırdır. Böylece lazer ışını kaynağına doğru belirli bir hızla hareket eden atom yavaşlatılmış olur. Ancak, zıt yönde hareket ediyorsa, yine Doppler etkisinden ötürü rezonanstan uzaklaşır, bu durumda lazer ışınıyla etkilenmez [9].

Lazer ile soğutma düzeneğinde atomlar hapsedilemez, sadece ortalama hızları düşürülür. Eğer üç boyutlu bir lazer düzeneği sağlanırsa, atomlar tüm serbestlik dereceleri doğrultusunda soğutulabilir. Lazer ve değişen manyetik alanın birlikte kullanılması ile oluşturulan Manyetik Optik Tuzak (MOT), atomlar üzerinde konuma bağlı bir kuvvet uygulayarak uzayın belli bir kısmında bu soğuk atom bulutunu bir arada tutabilir. Manyetik alan ile etkileşen atomlar, Zeeman yarılmasına maruz kalır.

Atomlar, manyetik alanın sıfır olduğu tuzak merkezine doğru geri çağırıcı bir kuvvet algırlarlar [8].

Atomun iki zıt yönde, bir lazer çiftiyle aydınlatılması sağlandığında, atomların yavaşlaması ve gazın soğuması beklenir. Çünkü atom hangi yönde hareket ederse etsin, o yönden gelecek ışın tarafından yavaşlatılmış olur.

Eğer atom, ışına doğru hareket ediyorsa ve ışının atom tarafından soğurulması isteniyorsa, ışının durağan bir atom için gerekli olan frekanstan biraz daha düşük bir frekansa sahip olması gerekir [9]. Doppler kayması nedeniyle atom lazerin frekansını olduğundan daha düşük görür [4]. Uyarıldıktan sonra, yüz milyonda bir saniye gibi bir süre sonunda, bu uyarılmış atom, ışına yapacaktır. Atomun ışımından sonra, bu foton akışından yeni bir foton tekrar soğurulabilir. Eğer her yönden uygun frekansa sahip fotonlar geliyorsa, atom hangi yöne hareket ederse o yönden gelen fotonlarca yavaşlatma etkisi uygulanacaktır [9].

Nötr atomlar için periyodik bir potansiyel oluşturmanın en kolay yolu, bir ışık alanındaki atomların karşılaştığı ışık-kaymasından yararlanmak olacaktır. Bu, bir boyutta, doğrusal olarak polarize edilmiş, zıt yönlerde yayılan, paralel ya da dik polarizasyona sahip iki lazer demetinin üst üste binmesiyle başarılabilir.

θ açısına sahip bir-boyutlu optik örgüde, komşu kuyular arasındaki d mesafesi (örgü sabiti),

$$d = \frac{\pi \sin(\theta/2)}{k_l} \quad (2.1)$$

ile bir örgü oluşturan iki lazer demeti arasındaki θ açısı aracılığıyla değiştirilebilir.

Burada k_l , lazer dalga numarasıdır [10].

Atomik örnekle, duran ışık dalgalarını üst üste bindirerek farklı çeşitlerde periyodik örgü potansiyelleri yaratılabilir. Duran dalgalar zıt yönlerde ilerleyen demetlerin doğrusal polarizasyon ile girişmesi sonucunda oluşur.

Bir 2D ve 3D sistemi oluşturmak için, sırasıyla iki ve üç tane duran dalga üst üste bindirilir. Demetler birbirine diktir, böylece basit bir kübik örgü oluştururlar. 2D örgü için her ekseninde aynı frekanstaki ışık kullanılır [11].

BEC deneylerinin yapılabilmesi için çok düşük sıcaklıklara ulaşmak gerekir. Atom ve moleküller üzerinde spektroskopik gözlemler yapmak, yüksek hızla hareket

ettikleri sürece, çok kesin sonuçlar vermeyecektir. Bir sistemde parçacıkların kinetik enerjilerini kaybetmesi hızlarının azalacağı anlamına gelmektedir. Sıcaklık, bir parçacık sistemi için bir anlama sahiptir ve böylece bir sistemin kinetik enerjisi sıcaklığın parametrik bir ölçüsüdür. Dolayısıyla, sistemdeki parçacıkların kinetik enerjilerini azaltmak fiziksel olarak sistemin sıcaklığını düşürmeye yani soğutmaya karşılık gelir. Diğer yandan tuzaklama ise atomun tüm serbestlik dereceleri doğrultusunda hareketlerini kısıtlama olarak bilinir.

En iyi gözlem yapılan deneyler, düşük boyutlu yapılar ve atomlar arası kuvvetli etkileşme olan deneyleridir. Bu sistemler optik örgü içinde BEC'in oluşmasını sağlar. Optik örgü karşılıklı olan ve birbirine dik üç boyutlu olarak yerleştirilmiş lazerden oluşan bir yapıdır. Optik tuzağın derinliği uygulanan lazer ışınının yoğunluğu ile orantılıdır. Eğer üç boyutlu olarak yerleştirilmiş lazerlerin iki tanesinin yoğunluğu diğerinden fazla ise atomlar yoğunluğun düşük olduğu doğrultuda hareket ederler. Böylece iki boyutlu bir yapı oluşturulur ve parçacıklar bir boyutta hareket ederler. Yeterince yüksek ışın yoğunluğu gönderilirse oluşturulan iki boyutlu tüp benzeri yapılar arasında geçiş imkansız hale gelir ve sistem etkin olarak bir boyutlu olur. Tüp eksenine boyundaki parçacığın hareketi üçüncü lazerin yoğunluğu değiştirilerek modüle edilebilir. Böyle yapılar deneysel olarak (Kinoshita vd., 2004) [12] tarafından çalışılmış ve kuvvetli etkileşme gösteren Bose gazının özellikleri anlaşılacak için kullanılmıştır.

Diğer bir durum ise bir boyuttaki ışın yoğunluğunun diğer iki boyuttan daha yüksek olduğu durumdur. Bu durumda atomik bulut küçük disk şeklinde küçük gruplara bölünür. Lazer ışınının yoğunluğu değiştirilerek her potansiyel kuyusunda birkaç parçacık tuzaklanabilir ve diğer potansiyel tuzağından bağımsız olarak parçacıklar buldukları potansiyel kuyusu içinde hareket ettirilebilir. Her bir potansiyel kuyusu aynı yöntem kullanılarak bağımsız olarak döndürülebilir. Bunlar binlerce parçacıktan oluşan BEC'in oluşturulması için kullanılır. Parçacıklar arası etkileşme geniş bir aralığa taşınabilir ve yüksek bir hassasiyetle kontrol edilebilir. Burada parçacıklar arası etkileşmeyi değiştirmenin birkaç yolu vardır. En yaygın olanı saçılma uzunluğunun değiştirilmesidir. Bu geçişlerde dışarıdan uygulanan manyetik alanla sağlanabilir. Atomların saçılma uzunluğu manyetik alana bağlıdır [8].

3. HARMONİK TUZAK

3-boyutlu optik örgünün örgü potansiyeli, koordinat eksenlerine paralel birbirlerine dik üç lazer ışınının gönderilmesiyle oluşturulur ve potansiyelin genel formu;

$$V_{\text{ör}}(r) = V_x \sin^2(kx) + V_y \sin^2(ky) + V_z \sin^2(kz) \quad (3.1)$$

V_x, V_y, V_z lazer ışın yoğunluklarıyla orantılı genliklerdir. Harmonik tuzak potansiyeli ise;

$$V_{\text{tuzak}}(r) = \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (3.2)$$

olup, atomlar üzerindeki toplam dış potansiyel $V_{\text{dış}}(r) = V_{\text{tuzak}}(r) + V_{\text{ör}}(r)$ şeklindedir.

Atomların hareketi yalnızca bir yönde mümkün olan (örneğin, z yönünde) bir boyutlu bir Bose gazı, parçacık hareketi iki yönde (x ve y yönünde) kısıtlanarak oluşturulur. Bu, V_x ve V_y genlikleri artırılarak mümkün olur. Eğer $V_z = 0$ ise Bose gazı bir boyutlu tüplere tuzaklanır. Eğer $V_z \neq 0$, fakat V_x ve V_y 'ye göre küçükse bir boyutlu bir örgü, z yönünde komşu atomlar arasında tünelleme yaparak oluşur.

Optik bir örgüdeki bozonların tek-bileşenli sistemler için klasik modeli, Bose-Hubbard modelidir [13].

Böyle bir sistem için tek-parçacık enerji seviyeleri,

$$\varepsilon_{n_x, n_y, n_z} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_z \quad (3.3)$$

ifadesi ile verilir. Burada $\{n_x, n_y, n_z\}$ sayıları pozitif tam sayılardır [9].

Atomları bir arada tutabilmek için küresel veya eksenel simetriye sahip tuzaklar kullanılabilir. Genellikle tuzak potansiyeli V_{tuzak} , eksenel simetrik harmonik salıncı potansiyeli

$$V_{tuzak} = V_{tuzak}(r_{\perp}, z) = \frac{1}{2}M(\omega_{\perp}^2 r_{\perp}^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (3.4)$$

ile verilir. Burada $r_{\perp} = (x^2 + y^2)^{(1/2)}$ radyal koordinat, ω_{\perp} radyal frekanstır. Eksenel (ω_z) ve radyal frekanslar (ω_{\perp}) arasındaki oran, tuzağın asimetrisini tayin eden λ' anizotropi parametresini verir. Anizotropi parametresi,

$$\lambda' \equiv \frac{\omega_z}{\omega_{\perp}} \quad (3.5)$$

ile verilir. Bu anizotropi parametresi Eş.(3.4)'e yerleştirildiğinde

$$V_{tuzak} = \frac{1}{2}M\omega_{\perp}^2 (r_{\perp}^2 + \lambda'^2 z^2) \quad (3.6)$$

bulunur.

Anizotropi parametresi λ' 'nün büyük olduğu ($\lambda' \gg 1$) durumunda tuzak potansiyeli gözleme (pancake) adı verilen bir şekilde, λ' 'nün küçük olduğu ($\lambda' \ll 1$) durumunda ise puro (cigar) adı verilen şekilde ele alınır [1].

4. ETKİLEŞMEYEN BOZON GAZLARI

Sıfır sıcaklıkta ($T = 0$ K) etkileşmeyen bir Bose gazı tamamen yoğuşmuştur ve tüm N parçacıklar, özdeş tek-parçacık dalga fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu nedenle çok-parçacıklı dalga fonksiyonu, $\psi_N(r_1, r_2, \dots, r_N)$ özdeş tek-parçacık dalga fonksiyonları $\phi(r_i)$ üzerinden çarpım ile bulunur:

$$\psi_N(r_1, r_2, \dots, r_N) = \prod_{i=1}^N \phi(r_i) \quad (4.1)$$

Böyle bir BEC, makroskobik dalga fonksiyonuyla $\psi(r)$ ile tanımlanabilir [11]:

$$\psi(r) = \sqrt{N}\phi(r) \quad (4.2)$$

ki, bu da, normalizasyondan farklı olarak, içine doğru yoğuşmanın olduğu, tekil parçacık hali $\phi(r)$ 'nin Schrödinger dalga fonksiyonudur [11].

Etkileşmeyen bir Bose gazı ve homojen olmayan bir sistem için, bu tek-parçacık hali sadece, sınırlayan potansiyelin tek-parçacık taban halidir. Bir harmonik tuzakta mesela, taban durum dalga fonksiyonu bir Gauss dalga fonksiyonudur ve periyodik bir potansiyel için taban durumu, tek-parçacık dalga fonksiyonu $q = 0$ kuazi-momentumuyla bir Bloch dalga fonksiyonudur [11].

4.1. Geçiş Sıcaklığı (T_c)

BEC'in gözlenebilmesi için gerekli sıcaklık, durum yoğunluğundan hareketle hesaplanabilir. Yoğuşma oranı ise, tuzaklanan parçacıkların içinden ne kadarlık bir bölümünün yoğuşmayı oluşturduğunun belirlenebilmesini sağlar [3].

BEC'de geçiş sıcaklığı T_c , düşük enerji durumlarının makroskopik sayıda parçacık tarafından işgal edilmesinin ortaya çıktığı en yüksek sıcaklık olarak tanımlanır. Parçacık sayısı çok büyük olduğunda sıfır nokta enerjisi ihmal edilebilir ve böylece en düşük enerji (ϵ_{min}) sıfıra eşitlenir. Bu durumda, uyarılmış durumlarda bulunan toplam

parçacık sayısı, ε enerjisi etrafındaki $d\varepsilon$ aralığında bulunan durumların sayısı $g(\varepsilon) d\varepsilon$ olmak üzere,

$$N_{uy} = \int_0^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) f(\varepsilon) \quad (4.3)$$

olarak verilir. Burada $f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$ BE dağılım fonksiyonudur. Uyarılmış durumlardaki bu parçacık sayısı, kimyasal potansiyel $\mu = 0$ alındığında en yüksek değere ulaşır. Geçiş sıcaklığı T_c , parçacıkların toplam sayısının kendilerine uyarılmış durumlarda yeterince yer bulmaları durumuyla belirlenir.

Sistemin temel durumunda, tüm atomlar en düşük tek-parçacıklı kuantum durumunda yoğunlaşırlar ve yoğunluk dağılımı $n(r)$, tuzak içindeki tek-parçacık için temel durum dalga fonksiyonunun $\phi_0(r)$ şeklini alır. Etkileşimsiz parçacıklar için yoğunluk şöyle verilebilir [9]:

$$n(r) = N |\phi_0(r)|^2 \quad (4.4)$$

Burada N parçacık sayıdır [9].

Fiziksel davranış açısından gazları, klasik ve kuantum gazları olarak iki sınıfa ayırmak mümkündür. BEC sadece kuantum gazlarında gözlenen bir olaydır ve bu açıdan klasik gazlardan farklılığının incelenmesi gerekir.

İçerisinde N tane molekülden oluşan V hacimli bir kutunun bir ısı banyosunda olduğu büyük kanonik topluluk olsun. Gazın bir molekülünün herhangi bir parçacığını bir durumda bulunma olasılığı ile tanımlanan mümkün olan durumların sayısı, moleküllerin sayısı ile listelenebilir. Buna göre, 1.nci durumda bulunan molekül n_1 , 2.nci durumda bulunan molekül n_2 ve r .nci durumda bulunan molekülde n_r durumunu işgal eder [8]. Toplam molekül sayısı seviyelerdeki parçacık sayısının toplamı cinsinden

$$N = \sum_r n_r \quad (4.5)$$

ile verilir. Sistem yeterince büyük seçildiğinde enerji seviyeleri birbirine oldukça yakın olacağından moleküllerin enerjileri girilebilir durumların sayısı ile ilişkilendirilir. Moleküllerin enerjileri

$$E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_r \quad (4.6)$$

olarak sıralanır. Gazların teorisinde momentumu p olan bir m kütleli parçacığa eşlik eden de Broglie dalga boyu (λ_{dB}) yaklaşık olarak,

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \quad (4.7)$$

ısı dalga boyuna eşittir. Burada h Plank sabiti, k_B Boltzman sabiti, T ise gazın sıcaklığıdır. Bir gazın parçacık yoğunluğu n ile gösterilirse, bir parçacığın çevresindeki hacim ($1/n$) ve parçacıklar arasındaki ortalama uzaklık $(1/n)^{1/3}$ olur. Böylece gazları sınıflandırmak üzere aranılan kriter elde edilir. Isıl dalga boyu ile parçacıklar arasındaki mesafe karşılaştırılırsa,

$$\lambda \ll \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \text{Klasik gaz} \quad (4.8)$$

$$\lambda \gg \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \text{Kuantum gazı} \quad (4.9)$$

ayrımı yapılabilir [8]. Başka bir ifade ile parçacıklar arasındaki uzaklık ısı dalga boyundan büyük ise de Broglie dalgaları yeterli ölçüde girişim yapamazlar. Bu tip parçacıklar Newton mekaniğine uyarlar ve gaz klasiktir. Ancak parçacıkların de Broglie dalga boyları moleküller arası ortalama serbest yola yakın veya eşit büyüklükte ise girişim ortaya çıkar. Gaz artık kuantum rejimindedir.

Kuantum fiziğinde bir gazın fiziksel davranışını anlayabilmek için kuantum istatistiği bakış açısından girilebilir durumların sayısını ve diğer özelliklerini bilmek gereklidir. Kuantum mekaniğine göre girilebilir durumların sayısı (n_1, n_2, \dots) seti bütün keyfi değerleri alamaz, kısıtlamalar vardır. Kuantum mekaniğin açıdan bakıldığında birbirinden ayırt edilemeyen parçacıkların bulunduğu çok-parçacıklı bir sistemin toplam

dalga fonksiyonu, parçacıkların yer değiştirmesine göre ya simetrik ya da antisimetrik olmalıdır [8]. Parçacıkların dalga fonksiyonunun simetrik ya da antisimetrik olmasını parçacığın sahip olduğu spin belirler. Spin, kuantum mekaniğine ait bir kavramdır ve parçacığı temsil eden dalga fonksiyonunun bir dönme operasyonu altında parçacığı tekrar yaratması olarak tanımlanır. Bir kuantum parçacığı için spin, \hbar veya $(\hbar/2)$ 'nin tam katları değerlerine sahip olabilir. \hbar 'ın tam katları olursa bozon, $(\hbar/2)$ 'nin tam katları olursa fermiyon adı verilir.

BEC nasıl meydana geldiğini göstermek için kütlesi sıfırdan farklı bir bozon gazının fiziksel davranışı ele alınır. Bozon gazları, spini bir tam sayıya eşit olan atomlardan oluşur. Bir bozon gazının dağılım fonksiyonu,

$$n_i = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} \quad (4.10)$$

bağıntısı ile verilir. Sistemdeki tüm parçacıkların sayısı ise,

$$N = \sum_i n_i = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} \quad (4.11)$$

olur. Burada ε_i , kinetik enerjiyi ve μ , kimyasal potansiyeli gösterir. k_B Boltzman sabiti ve T mutlak sıcaklık olmak üzere $\beta = 1/k_B T$ ile verilir. Parçacıkların ısı de Broglie dalga boyu $\lambda_{dB} = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T}$ olarak hesaplanabilir. Dalga boyunun sıcaklık ile ters orantılı olduğu denklemden görülebilmektedir. Sistem sıcaklığı düşürülmeye başlandığında, parçacıkları temsil eden de Broglie dalga boyu büyüklüğü artmaktadır. Parçacık sayısı yoğunluğu ile orantılı olarak bir

$T_c \cong 3.31 \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{mk_B}$ kritik sıcaklığında dalga paketlerinin üst üste binmesi başlar ve sıcaklık, T , azaldıkça güçlenir [8]. V hacim olmak üzere, üç boyutta serbest parçacık için durum yoğunluğu,

$$g(\varepsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} \quad (4.12)$$

şeklinde ($s=0$) olan bozonlar için yazılabilir.

(4.11) bağıntısı; (4.12) eşitliğinden yararlanarak aşağıdaki forma dönüştürülebilir:

$$N = \frac{2\pi V (2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}}{(e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1)} d\varepsilon, \quad (\mu < 0) \quad (4.13)$$

elde edilir. Sistemin sıcaklığı azaldığında uyarılmış durumdaki parçacıkların sayısı azalırken taban durumdaki parçacıkların sayısı artmaya başlar. Sıcaklık düşürüldüğünde en düşük enerjili taban durumda dahi ($\varepsilon = 0$), doluluk sayısı negatif olamayacağına göre Bose gazında kimyasal potansiyel ($-\infty < \mu \leq 0$) olmasını gerektirir ve sıcaklık düşükçe kimyasal potansiyel μ 'de küçülür. $\mu = 0$ iken $T = T_c$ 'de minimum kritik bir T_c sıcaklığı tanımlar. Bu kritik sıcaklıktan düşük sıcaklıklarda bir bozon gazının faz değiştireceğine açıkça işaret eder.

Eş. (4.13)'ten dolayı taban enerji düzeyindeki, enerjisi ve momentumu sıfır olan parçacıkların sayısı,

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \quad (4.14)$$

ile verilir. Yine Eş. (4.13) göz önüne alınırsa, uyarılmış durumda parçacık sayısı,

$$N_{\varepsilon>0} = \frac{V4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{(e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1)} \quad (4.15)$$

ile verilir [8]. Böylece toplam parçacık sayısı, (4.14) ve (4.15) eşitliklerinden yararlanarak,

$$N = N_0 + N_{\varepsilon>0} \quad (4.16)$$

olarak göz önüne alınabilir.

Bozonik gazlar için T_c kritik sıcaklığının üstünde, taban durumdaki parçacıklar tamamen ihmal edilebilirler. Fakat kritik T_c sıcaklığının altında kimyasal potansiyel

sıfıra gider. Kritik sıcaklığın altında enerjisi sıfırdan farklı parçacıkların sayısı (4.15) bağıntısı $\mu = 0$ alınarak,

$$\left(\frac{N_{\varepsilon>0}}{N}\right) = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \quad (4.7)$$

elde edilir [8]. Sonuç olarak, $(N_{\varepsilon>0}/N_0)$ oranı toplam parçacık sayısı içinde enerjisi $\varepsilon > 0$ olanların kesrini verirken, kalan parçacıkların

$$\left(\frac{N_0}{N_1}\right) = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \quad (4.8)$$

oranı ise enerjisi ve momentumu sıfır olan parçacıkların kesrini verir. Kritik sıcaklığın üstünde taban durumdaki parçacıkların sayısı ihmal edilecek kadar az sayıda iken sıcaklık geçiş sıcaklığının altına düşürüldüğünde parçacıkların çok büyük bir kısmı taban durumda bulunur. Taban enerjisine ulaşan parçacıkların enerjisi ve momentumları sıfır olur. Bu şekilde parçacıkların çok büyük bir kısmı taban durumda bulunmasına BEC adı verilir. Yoğuşmanın en önemli fiziksel sonucu, sistemde bulunan tüm bozonik parçacıkların aynı taban enerji durumuna ulaşarak tek bir parçacık gibi davranması şeklinde özetlenebilir [8].

BEC deneylerinde lazerle soğutma yöntemine uygun olmaları nedeniyle alkali atomlar tercih edilir. Bu atomların optik geçişleri lazer ışınlarına oldukça uygundur ve oldukça düşük sıcaklıklara kadar soğutulabilir. Bu yöntemle alkali atomlar için 100 μ K mertebesindeki sıcaklıklara kadar inilebilir [4]. Alkali atomların enerji seviyelerinin yapısı lazere dayalı tekniklere oldukça iyi uyarlar. Çünkü, optik geçişleri mevcut lazerlerle uyarılabilir ve iç enerji seviyeleri çok düşük sıcaklıklara kadar soğutmaya elverişlidir [8].

5. ZAYIF ETKİLEŞEN BOSE GAZI

Bu bölümde, BEC'in atomlar arasındaki etkileşimlerinin olduğu durum ele alınmıştır. Tartışma, s-dalgası saçılma uzunluğunun parçacıklar arasındaki ortalama mesafeden çok daha küçük olduğunda düzensiz bozon gazının sıfır derece özelliklerini tarif eden Gross-Pitaevskii denkleminin dayalıdır. Bu amaçla ilk önce, ortalama alan yaklaşımı içinde parçacıklar arasındaki etkileşimin de göz önüne alınması halinde sıfır sıcaklıkta Gross-Pitaevskii denkleminin bir türetimi sunulacaktır [9].

Bozonik atomlardan oluşan bir soğuk seyreltik gazdaki atom-atom etkileşmesi elastik ikili çarpışmalar tarafından domine edilir ve saçılma teorisi çerçevesinde ele alınabilir [11].

Taban durum özelliklerini hesaplamak için küresel simetrik harmonik bir tuzak ile eliptik harmonik bir tuzağı,

$$V_{dış}(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega_{ho}^2 r^2 & (Küresel) \\ \frac{1}{2} m [\omega_{ho}^2 (x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2] & (Eliptik) \end{cases} \quad (5.1)$$

şeklinde düşünelim. Burada ω_{ho}^2 tuzağın potansiyel gücünü tanımlar. Eliptik tuzakta, $\omega_{ho} = \omega_{\perp}$ ifadesi xy düzlemindeki tuzak frekansıdır ve ω_z , z doğrultusundaki frekanstır. Denkleminde belirtilen eliptik tuzakta $T = 0$ K'de tek bir bozonun ortalama titreşim genliği $\langle x^2 \rangle = (\hbar/2m\omega_{ho})$ şeklindedir [5,14].

Bu çalışmadaki amaç, zayıf etkileşimli Bose sistemlerinde BEC'in genel özelliklerini tartışmaktır. Bu amaçla bozonlar arası etkileşmeyi göstermek için bir sert küre potansiyeli yani,

$$V_{iç}(r) = \begin{cases} \infty & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (5.2)$$

şeklinde bir potansiyel kullanılmıştır. Buradaki a , bozonların sert küre çapıdır. Eğer bozonlar arası mesafe a 'dan daha büyük bir r mesafesi ise $V_{iç}(r)$ sıfırdır, oysa $r \leq a$ gibi bir mesafede bozonlar bir araya gelmeye çalışırlarsa, potansiyelin değeri sonsuzdur.

BEC, yoğunluğun $10^{12} - 10^{14} \text{par}/\text{cm}^3$ olduğu, 100 nK civarındaki sıcaklıklarda alkali gazlarda oluşmaya başlar. BEC'in teorisi, ikili çarpışmaların yüksek mertebeli çarpışmalardan daha sık olduğu durumlar için geliştirilmiştir. Bu oldukça iyi bilinen seyrek gaz yaklaşımıdır. Seyreklik şartı atomlar arası mesafenin, atomlar arası kuvvetlerin menziline daha büyük olduğu durumda gerçekleşir. Sert merkezli bir potansiyel de olası bir fiziksel parametre olarak alınabilir. Seyreklik; atomik dalga boyunun merkez çapıyla karşılaştırıldığında uzun olması durumunda olur, yani $\lambda_T \gg a$ veya $ka \ll 1$ olur, burada $k = 2\pi/\lambda_T$ şeklindedir. $ka \ll 1$ durumunda sert merkezli bir potansiyel yolu ile etkileşen, iki parçacığın saçılması, a saçılma mesafesine sahip bir s dalgasıdır. Bu saçılma mesafesi genelde birkaç nanometre mertebesindedir. Bu nedenle seyreklik parametresi gerçekten de oldukça küçüktür ($\sqrt{na^3} \sim 10^{-3}$) [5,14]. Bu şartlar altında atomlar arası kuvvetler $V(r, r') = g\delta(r - r')$ şeklindeki etkileşmelerle modellenir. Burada

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (5.3)$$

çiftlenim sabitidir, a 'nın pozitif değeri atomlar arası itmeyi belirlerken, negatif değeri atomların birbirini çektiği durumu gösterir.

Seyrek durumda, her atom etkin bir potansiyel enerji yolu ile çevresindeki tüm atomlardan etkilenir ve kuantum dalgalanmaları nedeniyle yoğunlaşmanın azalması, $\sqrt{na^3}$ seyreklik parametresi ile ölçeklendirildiğinden oldukça küçüktür. Bu şartlarda sıfır sıcaklıktaki gaz, tamamıyla yoğunlaşma dalga fonksiyonuyla karakterize edilir [5,14].

Yoğunlaşma dalga fonksiyonu, Gross-Pitaevskii (GP) denklemi olarak bilinen doğrusal olmayan bir Schrödinger denklemi ile belirlenir. Düşük sıcaklıkta seyrek sistemlerde BEC üzerine olan çalışmalarda GP denklemi oldukça önemli bir rol oynar. Bu denklem doğrusal ve doğrusal olmayan geçiş olgusunu tanımladığı gibi taban durumu da tanımlar. Ancak GP denklemi, güçlü etkileşimlerin olduğu sistemlere uygulanamaz [5,14].

Yoğunlaşmanın biçimlenmesinde kritik bir adım, buharlaştırarak soğutma işlemi ile kritik yoğunluk ve sıcaklığın başarılmasıdır. Bu işlemler ile sıcak atomlar, çarpışmadan sonra tuzaktan çıkarken geriye kalanlar yeniden gazın termalize olması için daha düşük sıcaklıklara gider. Elastik çarpışmalar buharlaştırarak soğutma için gereklidir.

Yoğuşmanın kararlılığı ve özellikleri elastik saçılma mesafesinin işaretine ve genliğine bağlıdır. İki ve üç boyutlu elastik olmayan çarpışmalar parçalanma işlemine sebep olur. Bu işlem yoğuşmanın biçimlenme zamanını belirler. Bu yüzden bu çarpışmalar hidrojen atomu gibi alkali türler için çok ilginç olmakta ve çoğu deneysel ve teoriksel çalışmalara konu olmaktadır.

Yoğuşmaların temel özelliklerinin anlaşılmasında çok daha başarılı bulunan bir teori, ortalama alan veya Hartree-Fock teorisine dayanır. Bu teoriye göre yoğuşma dalga fonksiyonu,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{tuzak} + NU_0 |\Psi|^2 \right) \Psi = \mu \Psi \quad (5.4)$$

denklemleri ile tanımlanır [6]. Burada V_{tuzak} yoğuşmayı biçimler ve

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_0 \quad (5.5)$$

potansiyeli atom-atom etkileşme enerjisini temsil eder [6]. Ayrıca Eş. (5.4)'te verilen μ kimyasal potansiyel, N atoma sahip yoğuşmaya daha fazla parçacık eklemek için ihtiyaç duyulan enerji olarak tarif edilir. Gross-Pitaevski denklemi veya doğrusal olmayan Schrödinger denklemi çok-cisimli dalga fonksiyonu $\Psi(1, \dots, N) = \prod_{i=1}^N \phi(i)$, her bir boson tarafından doldurulan singlet taban-seviye orbitalleri ile temsil edilir.

Atom etkileşmesinin etkisi, yoğuşma yoğunluğunu ve s-saçılma mesafesine bağlı olarak doğrusal olmayan Schrödinger denklemi ile verilir. Atom etkileşmesini içermeyen ideal bir gazda saçılma mesafesi ($a_0 = 0$) sıfır olur. Böyle bir ideal gazda, Eş. (5.4)'te yoğuşma dalga fonksiyonu tam olarak tuzaklama potansiyelinin taban seviyesinde olduğunu gösterir ve sıfır nokta hareketi olarak bilinir. Denklemlerde atomlar yoğuşmaya eklendiğinde atomik etkileşme terimi yoğuşma dalga fonksiyonunu etkileyen baskın bir terim olur. Yoğuşmanın şekli ağırlıklı olarak saçılma; mesafesine, parçacık sayısına ve U_0 teriminin büyüklüğüne bağlıdır.

Son yıllarda BEC'ye yön verebilecek birçok teori ortaya çıktı. Bu teoriler olayı açıklamak için basit teorileri kullandılar. Örneğin BEC dinamiği Gross-Pitaevski denklemi veya doğrusal olmayan Schrödinger denklemi ile tanımlanırken, çarpışma

dinamiği basit Radyal denklemin çözümüne dayanır. Buradaki zorluk, atomların etkileşmesini belirleyen itici ve çekici potansiyelin üstel ve ters kuvvet terimleri içermesidir. Bu terimler denklemin tam çözümünü zorlaştırır. Ancak çözüm için belli yaklaşımlar kullanmak gerekir. Bu yaklaşımlar yarı-klasik, nümerik ve belli koşullar altında tam çözüme yakın çözümlerden oluşur [6].

5.1. Bogoliubov Yaklaşımı

Bir seyreltik gaz için, sistem bir ortalama alan tanımı ile tarif edilebilir. Ortalama alan tanımının temel fikri, ilk olarak 1947'de Bogoliubov tarafından geliştirilmiş olup, bozonik alan operatörüne yoğunlaşma katkısını ayırmaktır [11].

Bogoliubov yaklaşımı sıfır sıcaklıktaki zayıf etkileşimli bozon gazları için geliştirilmiştir. Üst seviyelerdeki bozonların ihmal edilebildiği makroskopik yoğunlaşma limitinde Bogoliubov yaklaşımında kullanılan dalga fonksiyonu Gross-Pitaevskii denklemleri ile verilir. Gross-Pitaevskii denklemi, düşük yoğunlukta yoğunlaşan atomların fazla olduğu durumlarda, BEC olayının ortalama-alan teorisini oldukça iyi tanımlar [4].

Eğer gaz yeterince seyreltik ise makroskopik dalga fonksiyonu ile tanımlanır. Bu nedenle, bozonik alan operatörü $\psi(r, t)$, kompleks bir fonksiyon ve dalgalanan bir alan operatörü $\delta \psi(r, t)$ olan beklenen değeri $\psi(r, t) = \langle \psi(r, t) \rangle$ ile değiştirilebilir [11]:

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) + \delta \hat{\psi}(\vec{r}, t) \quad (5.6)$$

Dalgalanmalar ihmal edildiğinde, hesaplamalar doğrusal olmayan bir Schrodinger denkleminin formunda olan Gross-Pitaevskii denklemine dayanır [11].

Dış bir potansiyelle sınırlandırılmış, birbirleriyle etkileşen N tane bozonun çok cisim Hamiltonyeni

$$H = \int dr \psi^\dagger(r) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{dış}(r) \right] \psi(r) + \frac{1}{2} \int dr dr' \psi^\dagger(r) \psi^\dagger(r') V(r-r') \psi(r') \psi(r) \quad (5.7)$$

şeklindedir. Buradaki $\psi(r)$ ve $\psi^\dagger(r)$ bozonların alan operatörleridir. Bunlar sırasıyla, r konumunda bir parçacığı yok etme ve yaratma operatörleridir. $V(r - r')$ ise etkileşen iki cisim arasındaki atomlar arası potansiyeldir [7,11].

BEC, bir optik lazerin bir elektromanyetik dalganın en klasik formunu yayınlaması gibi, bir madde dalgasının en “klasik” formunu temsil eder. Ancak, bu dev madde dalgasının altında, ayrık atomlar çok önemli bir taneciklilik, bir başka deyişle, bu madde dalgası alanının kuantizasyonunu sergiler. Buna, bugüne kadar BEC’lerle yapılan deneylerle erişilemiyordu. Bununla beraber, böyle bir kuantizasyonun, maddenin dalga doğası için bazı sonuçlara yol açması gerektiği fark edilmişti [11].

5.2. Gross-Pitaevskii Denklemi

Tamamen yoğunlaşmış durumda, tüm bozonlar aynı en düşük enerjili tek-parçacık durumundadır. Bu durumda N -parçacık sisteminin dalga fonksiyonunu şu şekilde yazılabilir:

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \prod_{i=1}^N \phi_0(r_i) \quad (5.8)$$

Eş. (4.1)’de ifade edilmişti. Burada tek-parçacık dalga fonksiyonu $\phi_0(r)$ normalize edilir, yani

$$\int dr |\phi_0(r)|^2 = 1 \quad (5.9)$$

şeklindedir.

Bu dalga fonksiyonu iki atom birbirine yakinken atomlar arası etkileşimden kaynaklanan korelasyonları içermez. Bu etkiler elimine edilmiş ve sadece kısa dalga boylu etkileri tanımlayan etkin temas potansiyeli $U_0 \delta(r - r')$ dikkate alınmıştır. Ortalama alan yaklaşımında, parçacıklar arası ortalama mesafeden daha az olan uzunluk ölçeklerinde etkin olan etkileşimler açık olarak dikkate alınmaz. Etkin etkileşim bu yüzden U_0 ’a eşittir ve sistemin etkin Hamiltoniyen operatörü şu şekilde yazılabilir [9]:

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i^2}{2m} + V(r_i) \right] + U_0 \sum_{i < j} \delta(r_i - r_j) \quad (5.2.3)$$

şeklindedir.

Oldukça düşük sıcaklıklarda zayıf etkileşimli bozonlardan oluşan sistemlerde gözlenen BEC, Gross-Pitaevskii denklemi olarak bilinen lineer olmayan Schrödinger eşitliğinden başka bir şey değildir.

Gross-Pitaevskii eşitliği, N bozonlu sistemin yoğunluk formunu içeren ortalama alan denklemdir. Bu eşitlik ilk defa 1961 yılında Gross ve Pitaevskii tarafından ayrı ayrı bulunmuştur. $\Psi(r)$ yoğunlaşmış sistemin dalga fonksiyonu olmak üzere Gross-Pitaevskii eşitliği aşağıdaki denklem tarafından verilir [15].

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{tuzak}}(r) + g|\psi(r, t)|^2 \right) \psi(r, t) \quad (5.10)$$

Burada $V_{\text{tuzak}}(r)$, atomların tutulduğu tuzak potansiyelini g , atomlar arası etkileşmeleri ifade eden terim ($g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ "a" saçılma uzunluğu) μ , $\int dr |\Psi(r)|^2 = N_p$ normalizasyon koşulu ile tayin edilen kimyasal potansiyeli, N_p ise toplam parçacık sayısını gösterir [1].

İtici atom-atom etkileşimi, atom yoğunluğu $n(r) = |\psi(r)|^2$ ile orantılı olan ortalama alan potansiyeli olarak tanımlanır. Bu zayıf etkileşen bölgede, çok-parçacıklı dalga fonksiyonu, Eş. (3.1)'deki ideal Bose gazı için olduğu gibi, özdeş tek-parçacıklı dalga fonksiyonlarının çarpımıdır. Etkileşmeyen durumun tersine, zayıf etkileşen gaz, tek-parçacık probleminin taban durumuna yoğunlaşmaz, ancak bunun yerine (5.10) Gross Pitaevskii denklemi aracılığıyla belirlenen bir hale yoğunlaşır. Gross Pitaevskii denklemi, yoğunlaşmalar arasındaki girişim, kolektif modlar ya da vorteksler gibi yoğunlaşma özelliklerinin hem niteliksel, hem de niceliksel tanımları için çok başarılı olmuştur [11].

Gross-Pitaevskii (GP) denklemi, Gross (1961) ve Pitaevskii (1961) tarafından ayrı ayrı geliştirilmiştir. Bu denklem gerçekte süperakışkan sıvı helyumdaki girdapların özelliklerini tanımlamak için geliştirilmiştir ve Bogoliubov açılımındaki sıfırıncı mertebeden terime dayanır. Gross-Pitaevskii denklemi, yoğunlaşmanın başarılı şekilde açıklanmasını sağlar. Ancak bu denklem seyrek durumdaki Bose gazları için geçerlidir, etkileşimin fazla olduğu sistemleri açıklamak için uygun değildir [5].

6. OPTİK ÖRGÜ

Bir optik örgü, birbirine dik doğrultularda gönderilen iki veya daha fazla lazer ışığının girişimleriyle oluşan ışığın çeşitli yoğunlukta olduğu periyodik bir yapıdır.

Oluşturulan dış manyetik alan etkisinde hapsedilen yoğunlaşmanın Hamilton fonksiyonu ifadesi bu tuzak potansiyelinden etkilenir. Tuzak elde edildikten sonra yoğunlaşma, iki tane karşılıklı yerleştirilmiş lazerle oluşturulan bir boyutlu optik örgü içine hapsedilir. Lazerin elektrik alan bileşeni atomlarla etkileşir ve atomlar üzerinde bir potansiyele sebep olur. Bunun sonucunda atomlar potansiyelin minimum olduğu noktalara yerleşirler.

Bu durumun kristal örgüler içindeki elektronlarla olan benzerliğinden ötürü optik örgüdeki yoğunlaşma atomları ile birtakım katı hal fenomenleri de gözlenebilir.

Yoğunlaşma üzerine uygulanacak kuvvet etkisi ile yoğunlaşmanın uyumlu iletim davranışı; Bloch salınımları, Bragg saçılması ve yoğunlaşma atomlarının birbirleriyle olan girişimlerinin gözlenmesine olanak sağlar [1].

Optik örgü olarak bilinen, soğuk atomların kristal örnekleri, başlangıçta yitimli sistemde keşfedildi ki bu sistem, atomun hızında azalma sağlar ve bu sayede atomun kinetik enerjisinde bir düşüşe sebep olur [10]. Doppler soğutma sistemi, duran bir dalga düzenindeki atomik hareket lazer ışınlarının etkisine dayanır. Bu sistemde çalışmak, lazer ışınları tarafından oluşturulan potansiyel kuyuları dalga boyu ölçüsünde atomların tuzaklanmasının da mümkün olması anlamına gelir. Gayet açıktır ki duran dalga örnekleri, periyodik yapılarda atom tuzaklamak için kullanılan düşük güçlü diyot lazerler tarafından sağlanan birkaç kesişen lazer ışınları tarafından yaratılır. Örneğin, büyük ölçüde yapılan deneysel araştırmalar, optik potansiyeldeki atomların bağlı durumları direk olarak incelemek için yapıldı. İlk yapılan deneylerde bir-boyutlu örgü kullanıldıktan sonra, birkaç araştırmada iki ve üç-boyutta örgüye genişletildi. Daha sonraları da optik örgüler, soğuk atom örneklerinin periyodikliği ayarlanarak esnek bir materyal olarak kullanıldı [10].

Böyle yapılarda atomları tuzaklamak, dipol moment içeren atomların lazerle etkileşmesi sayesinde (ya da elektrik alan sebebiyle atomun enerji seviyelerinde yarıma olur ve atom bir dış potansiyel görür) mümkündür. Atomu etkileyen kuvvet, ω_L frekanslı ve zamana bağlı elektrik alan yoğunluğu $|E(r)|^2$ ile tanımlanırsa [16],

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \alpha(\omega_L) \vec{\nabla} [|E(r)|^2] \quad (6.1)$$

olur ve $\alpha(\omega_L) |\langle e|d|g \rangle|^2 / \hbar(\omega_0 - \omega_L)$ atomun dinamik kutuplaşabilirlik kısmı, $\hbar(\omega_0 - \omega_L)$ taban durumu $|g\rangle$ ile uyarılmış durum $|e\rangle$ arasındaki enerji farkı ve d alan yönündeki dipol operatörüdür [16].

λ dalga boyunda karşı yönlerden gelen iki ışın giriştiğinde $a = \frac{\lambda}{2}$ periyotlu, bir boyutta duran dalga oluşur. İki veya üç duran dalganın üst üste gelmesiyle iki veya üç-boyutlu optik potansiyel yaratılır. Tuzağın merkezindeki potansiyel yaklaşık olarak

$$V(r) = V_0 \sum_{i=1}^d \sin^2(kr_i) \quad (6.2)$$

ile verilir. $d = 1, 2, 3$ değerlerini alır ve boyut sayısına karşılık gelir, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ve V_0 potansiyelin şiddetidir.

Yeterince derin potansiyel kuyuları için, tek-atom etrafındaki potansiyel hemen hemen harmoniktir ve frekansı ω_0 'dır. $\hbar\omega_0 \sim 2E_R(V_0/E_R)^{1/2}$, $E_R = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (m atomik kütle) optik örgü için kullanılan bir enerji ölçeği olan geri tepme enerjisidir. Yine, bu derin örgü limitinde ($V_0, \hbar\omega_0 \gg E_R$) ve düşük sıcaklıklarda, atomlar her bölgede en düşük titreşimli seviyeye yerleşir ve enerji q kuasi-momentum fonksiyonu olarak [16]

$$\varepsilon(q) = -2J \sum_{i=1}^d \cos(q_i a) + \frac{d(\hbar\omega_0)}{2} \quad (6.3)$$

sıkı-bağ yaklaşımı formunda verilir. Burada tek-parçacık Hamiltonyen matris elemanı ile verilen, $J > 0$ en yakın komşu atomlar arasındaki tünelleme genliğidir (ya da tünelleme sebebiyle kinetik enerjideki artış) ve

$$J = \int \omega_0^*(r) \left[\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(r) \right] \omega_0(r+a) dr \quad (6.4)$$

ile verilir [16]. $\omega_n(r-R)$ Wannier fonksiyonudur. Ortonormal Wannier fonksiyonları periyodik potansiyelin özfonksiyonlarıyla ilişkilidir, yani $\Psi_{n,q}(r)$ Bloch dalga fonksiyonlarıdır [16].

$$\Psi_{n,q}(r) = \sum_R \omega_n(r-R) e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}} \quad (6.5)$$

Zayıf etkileşimli durumlarda, komşu örgü noktaları arasındaki tünelleme, iki atom arasındaki etkileşim enerjisine göre daha büyük olduğunda periyodik örgü potansiyeline tuzaklanmış BEC, Gross-Pitaevskii denklemi aracılığıyla belirlenebilen makroskobik bir dalga fonksiyonuyla tanımlanır. Eğer kimyasal potansiyel tuzak derinliğiyle karşılaştırıldığında, küçük olursa sistemi tanımlamak için sıkı-bağ yaklaşıklığı kullanılabilir. Sıkı-bağ yaklaşıklığında, j örgü noktasındaki atomlar, $\varphi_j(x)$ yerleşmiş makroskobik bir dalga fonksiyonu tarafından tanımlanabilir [11].

Her yönde lokalize olmuş üç-boyutlu basit bir kübik örgü, en düşük seviyedeki Bloch bantlarının üç-boyutlu Wannier fonksiyonları olarak tanımlanabilir [11]:

$$\varphi_j(x) = \omega_x(x-x_i) \omega_y(y-y_i) \omega_z(z-z_i) \quad (6.6)$$

Burada $\{x_i, y_i, z_i\}$ i. örgü noktalarındaki konumları gösterir.

Bu dalga fonksiyonlarını kullanarak tüm sistemi tanımlayan bir makroskobik dalga fonksiyonu belirlenebilir. Bu dalga fonksiyonu her j örgü noktasında lokalize olmuş dalga fonksiyonlarının toplamıdır [11].

$$\Psi(x) = \sum_j \psi_j \cdot \varphi_j(x) \quad (6.7)$$

$$\psi_j = \sqrt{\bar{n}_j} \cdot e^{i\varphi_j} \quad (6.8)$$

6.1. Korunumlu Potansiyel

Birbirine zıt yayılan iki lazer demetinin olduğu bir 1D örgü konfigürasyonu için, lazerin elektrik alanıyla atomik dipol arasındaki etkileşim sebebiyle oluşan ac-Stark kayması,

$$U(x) = U_0 \sin^2(\pi x/d) \quad (6.9)$$

formunda bir potansiyel ile sonuçlanır [10]. Burada U_0 , potansiyelin derinliği, d ise örgü sabitidir.

k_L dalga vektörüne sahip, birbirine zıt yönde ilerleyen iki lazer demetinin olduğu bir örgü konfigürasyonunda, geri tepme momentumu $p_{gt} = \hbar k_L = Mv_{gt}$ ile verilir. Bir açı-geometrisi olayında, birimleri d örgü uzayına ve k_L dalga vektörünün projeksiyonu $k = \pi/d$ 'yi örgü yönüne dayandırmak daha sezgiseldir. Ancak, periyodik dış potansiyel doğal olarak bir katı hal fiziği yaklaşımına götürür. Böylece,

$$p_B = \frac{2\pi\hbar}{d} = Mv_B \quad (6.10)$$

şeklindeki, tam olarak ilk Brillouin bölgesine ya da alternatif olarak atomlarla iki lazer demeti arasındaki örgü yönünde net momentum değiş tokuşuna karşılık gelen Bloch momentumunu tanımlayabilir. O referans çerçevesinde, enerji birimi için uygun olan bir seçim $E_B = \hbar^2(2\pi)^2/Md^2$ şeklinde tanımlanan Bloch enerjisidir. Bu birimler, d ile Θ arasındaki bağlantı için denklem (2.1)'den faydalanarak, açı-geometrisi durumu için de kullanılabilir.

İki demet arasında bir δ frekans farkı ileri sürerek, Eş. (6.9) deki örgü potansiyeli göz önüne alınarak,

$$v_{\delta r} = d \delta \quad (6.11)$$

şeklinde verilen bir $v_{\delta r}$ hızı ile hareket ettirilebilir ya da

$$a = d \frac{d\delta}{dt} \quad (6.12)$$

ile verilen a ivmesi ile hızlandırılabilir [10].

6.2. Ultrasonuk Atomlar

Optik örgüler üzerine yapılan ilk deneyler, kuyulara hapsedilen atomların yerel özelliklerini hedefliyordu. Her kuyunun merkezindeki potansiyele harmonik yaklaşım yaparak, tek-boyutlu bir örgü için harmonik tuzaklama frekansı

$$\omega_{har} = 2 \frac{E_{gt}}{\hbar} \sqrt{\frac{U_0}{E_{gt}}} \quad (6.13)$$

olarak hesaplanır [10].

Tipik bir optik örgü deneyinde, atomlar ilk olarak bir magneto-optik tuzakta (MOT) yakalanırlar ve lazerle soğutulurlar. Optik molases kullanılarak (esasen MOT'un manyetik alanını kapatarak ve tuzak demetlerinin ayar bozmasını artırarak) yapılan ileri soğutmaların ardından örgü lazer demetleri açılır. Atomların örgünün potansiyel kuyularında lokalize olduğunu görülür. Bu, örgü demetinden bir foton soğururken bir başkasını (bir başka fotonu) yayımlayan (ya da tam tersi), ve bu arada titreşimsel kuantum sayısını birim kadar değiştiren bir atoma karşılık gelir [10].

Örgü kuyularındaki atomların hareketini inceleyen diğer deneyler, kuyu derinliği aniden değiştirildiğinde atomik dalga paketlerinin salınımlarını gözlemeyi ve örgünün boşlukta ani bir şekilde kaydırılmasıyla oluşan uyumlu dalga paketi salınımlarının çökmesini ve canlanmasını içerir [10].

7. PERİYODİK POTANSİYELDE BİR ELEKTRONUN DALGA DENKLEMİ

Örgü sabiti a olan doğrusal bir örgüde potansiyeli $U(x)$ ile gösterilsin. Bu potansiyelin örgü öteleme işlemi altında değişmez olduğunu bilinmektedir: $U(x) = U(x + a)$. Kristal örgüsünün öteleme işlemi altında değişmez olan her fonksiyon, ters örgü vektörleri \vec{G} cinsinden Fourier serisi olarak açılabilir:

$$U(x) = \sum_{\vec{G}} U_G e^{i\vec{G}x} \quad (7.1)$$

G değeri arttıkça, bilinen kristaller için U_G katsayılarının büyüklüğü azalır [16]. Potansiyel enerjinin reel bir fonksiyon olmasını istendiğinde,

$$U(x) = \sum_{G>0} U_G (e^{iGx} + e^{-iGx}) = 2 \sum_{G>0} U_G \cos(Gx) \quad (7.2)$$

yazılabilir. Kristalin $x = 0$ etrafında simetrik olduğunu kabul edilirse $U_0 = 0$ olur.

Kristalde bir elektronun dalga denklemi $H\psi = E\psi$ olarak yazılırsa \hat{H} hamiltonyen operatörü, E enerji özdeğeri ve ψ özfonksiyon veya yörünge adını alır. Dalga denkleminin açık ifadesi,

$$\left(\frac{p^2}{2m} + U(x) \right) \psi(x) = \left(\frac{p^2}{2m} + \sum_{\vec{G}} U_G e^{i\vec{G}x} \right) \psi(x) = E \psi(x) \quad (7.3)$$

olur. Denklem (7.3) yazılırken tek-elektron yaklaşıklığı kullanılmıştır, yani $\psi(x)$ yörüngesi, iyon merkezleri potansiyeli ile diğer iletkenlik elektronlarının oluşturduğu ortalama potansiyelin toplamında hareket eden bir elektronun hareketini belirlemektedir.

$\psi(x)$ dalga fonksiyonu bir Fourier serisi olarak, sınır koşullarını sağlayan tüm reel k dalga sayıları üzerinden bir toplam şeklinde yazılabilir [17]:

$$\psi(x) = \sum_k C(k) e^{ikx} \quad (7.4)$$

L uzunlukta bir örgünün periyodik sınır koşullarını sağlayan k 'nın aldığı değerler $2n\pi/L$ şeklinde olur. Burada n pozitif veya negatif bir tamsayıdır. $\psi(x)$ fonksiyonunun a ötelemesine göre periyodik olduğunu varsayılmıyor ve bu, genelde doğru değildir. $\psi(x)$ 'in öteleme özellikleri, Bloch teoremi ile belirlenmiştir. Bir Bloch fonksiyonunun Fourier açılımında $2n\pi/L$ kümesindeki tüm dalga sayıları toplamaya girmez. Belirli bir k dalga sayısı ψ içinde yer alıyorsa, bu ψ 'nin Fourier açılımındaki diğer tüm dalga sayıları $k + G$ şeklinde olacaklardır [17].

Bir k bileşenini içeren dalga fonksiyonunu ψ_k ile veya ψ_{k+G} ile göstermek aynı şeydir, çünkü Fourier serisine k giriyorsa ($k + G$) de girebilir.

Bloch fonksiyonuna indis olan k dalga sayısı, birinci Brillouin bölgesinde seçilir. Buradaki elektron problemi X-ışını kırınımına benzer, çünkü elektromanyetik alan sadece iyonlar üzerinde değil kristal içinde her yerde bulunur. Kinetik enerji terimi, Eş.(7.4)'ten yararlanarak

$$\frac{p^2}{2m} \psi(x) = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right)^2 \psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_k k^2 C(k) e^{ikx} \quad (7.5)$$

yazılabilir ve potansiyel enerji terimi de

$$\left(\sum_G U_G e^{iGx} \right) \psi(x) = \sum_G \sum_k U_G e^{iGx} C(k) e^{ikx} \quad (7.6)$$

olarak yazılırsa dalga denklemi

$$\frac{\hbar^2}{2m} \sum_k k^2 C(k) e^{ikx} + \sum_G \sum_k U_G e^{iGx} C(k) e^{ikx} = E \sum_k C(k) e^{ikx} \quad (7.7)$$

olur. Her Fourier bileşeninin katsayısı denklemin iki tarafında da aynı olmalıdır. Buna göre

$$(\lambda_k - E)C(k) + \sum_G U_G C(k - G) = 0 \quad (7.8)$$

bağıntısı elde edilir [17]. λ_k katsayısı

$$\lambda_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (7.9)$$

olur. Eş.(7.8) periyodik bir örgüde dalga denkleminde eşdeğerdir, ancak alışılmış diferansiyel denklem yerine bir doğrusal denklem sistemi geçmiştir. Bu denklem sistemi daha karmaşık ve göze hoş görünmeyen bir yapıdadır, çünkü ilke olarak sonsuz sayıda $C(k - G)$ katsayılarını bulmak gerekecektir. Pratikte ise ilk birkaç katsayıyı bulmak yeterli olur [17].

8. BLOCH FONKSİYONLARI

Periyodik bir potansiyelde Schrödinger denklemi çözümlerinin alacağı özel şekil, F. Bloch tarafından ispat edilen önemli bir teoremdir [17] :

$$\Psi_k(\vec{r}) = U_k(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (8.1)$$

Burada $U_k(\vec{r})$ kristal örgünün periyoduna sahip bir fonksiyondur :

$U_k(\vec{r}) = U_k(\vec{r} + \vec{T})$. Denklem (8.1)'deki sonuç Bloch teoremi olarak şöyle ifade edilir: Periyodik bir potansiyelde dalga denkleminin özfonksiyonları, $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ düzlem dalgası ile kristal örgünün periyoduna sahip bir $U_k(\vec{r})$ fonksiyonunun çarpımı şeklinde yazılabilirler.

Denklem (8.1) yapısındaki tek-elektron yapısına Bloch fonksiyonu denir ve ilerleyen dalgaların toplamı olarak yazılabilirler. Bloch fonksiyonları, iyon merkezlerinin oluşturduğu potansiyel alanında serbestçe dolaşan elektronları temsil etmek üzere, yerleşmiş dalga paketleri şeklinde ifade edilebilirler [17].

8.1. Bloch Titreşimi

Bloch titreşimi 1928 yılında Bloch tarafından çalışılmış katıhal fiziği alanında yapılan iyi bir çalışma olarak tanımlanmıştır [15]. Bloch, kristaldeki ve kendisine etki eden statik elektrik alandaki parçacığın (elektron) uzaydaki dağılımını tanımlamıştır. Bu olay kristallerde asla gözlenmemiştir. Gevşeme işlemlerinden (ağdaki yayılım bozuklukları, fononlar, vb) dolayı elektronlar bir bloch döngüsünü tamamlamadan önce sistemin yoğunluğu ortadan kalkar. Böylece bu, Bloch periyodundaki diğer sistemleri araştırmak için büyük bir ilgi alanı olmuştur. Periyodik ağda madde dalgaları fonksiyonu salınımına benzer Bloch yayılımının ortaya çıktığı BEC bu sistemlerden biridir ve bu bize ulaşılmayan diğer sistemlere ulaşma imkanı verir. Periyodik potansiyel parametreleri ve onun yoğunlaşması hakkında deneysel kontrol olasılığı sağlar [15].

9. WANNIER FONKSİYONLARI

Bloch durumları, verilen bir q kuazi-momentumu ve n enerji bandı için Schrödinger denkleminin enerji öz durumlarının lokalize olmamasıdır. Bunun tam aksine, Wannier fonksiyonları, her örgü noktasına maximum şekilde lokalize olan bir grup normalize ve ortogonal dalga fonksiyonundan oluşur. Optik örgü potansiyelinin n . enerji bandına yerleşen bir parçacık için Wannier fonksiyonu,

$$\omega_n(x - x_i) = N^{-1/2} \sum_q e^{-\frac{iqx_i}{\hbar}} \varphi_q^{(n)}(x) \quad (9.1)$$

ile verilir [11]. Burada x_i i . örgü noktası konumu ve N ise normalizasyon sabitidir.

Eğer bir parçacık Wannier fonksiyonuna uygun durumdaysa i . örgü noktasına yerleşmiş olur.

Tünelleme matris elemanı J , i . ve j . komşu örgü noktalarının Wannier fonksiyonuyla hesaplanabilir [11].

$$J = \omega_n(x - x_i) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \omega_n(x - x_j) \quad (9.2)$$

Parçacıklar arası etkileşim hesaba katıldığında Wannier tanımlaması bilhassa önem kazanır. Örgü noktalarındaki parçacıkların yerel etkileşimleri en iyi yerleşmiş Wannier fonksiyonlarıyla tanımlanır [11].

Örgü Hamiltonyeninde

$$\hat{H}_{ör}(r) \equiv -\frac{\hat{V}^2}{2m} + \hat{V}(r) \quad (9.3)$$

Olup, örgü potansiyeli $V(r + a_i) = V(r)$, $\{a_i: i = 1, 2, \dots, NL\}$ örgü üzerinde periyodiktir ve her a_i örgü noktasının etrafındaki çift-kuyu yapıları severler.

Alan operatörü Wannier fonksiyonları üzerinden genişletilebilir [18]:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{nj} C_{nj} \omega_{nj}(\mathbf{r} - \mathbf{a}_j) \quad (9.4)$$

Burada n band endeksidir ve j örgü bölgelerini numaralandırır. Burada [18]

Burada

$$E_{ij}^{mn} \equiv \int \omega_m^*(\mathbf{r} - \mathbf{a}_j) H_L(\mathbf{r}) \omega_n(\mathbf{r} - \mathbf{a}_j) d\mathbf{r} \quad (9.5)$$

$$E_{ij}^{mn} = \delta_{mn} E_{ij}^n \quad (9.6)$$

ve

$$E_n = \int \omega_n^*(\mathbf{r}) H_L(\mathbf{r}) \omega_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (9.7)$$

$$J_{ij}^n = \int \omega_n^*(\mathbf{r} - \mathbf{a}_{ij}) H_L(\mathbf{r}) \omega_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (9.8)$$

Bir izole örgünün bölgelerarası sıçramanın küçük olduğu anlamına geldiğini akılda tutarak, yani,

$$\left| \frac{J_{ij}}{E_n} \right| \ll 1 \quad (i \neq j) \quad (9.9)$$

olmalıdır. Her örgü bölgesinin sadece bir atom içerdiğini varsayarak, tek-kutupluluk şartları uygulanır [18] :

$$\sum_n c_{nj}^\dagger c_{nj} = 1, \quad c_{nj} c_{nj} = 0 \quad (9.10)$$

10. BOSE YOĞUŞMALI ATOMLAR

Yoğuşmada komşu kuyular arasındaki tünellenme, makroskobik dalga fonksiyonunun genel özelliklerini belirleyen, optik örgü potansiyelini değiştirerek kontrol edilir. Böylece, oluşan 1D örgüdeki yoğuşma, yoğuşmanın dalga fonksiyonunun süperakışkan özellikleriyle olan bağlantısı daha sonra keşfedilen bir dizi tünelleme kavşağı olarak tanımlanır [10]. Optik örgülere yüklenen BEClerin uyumlu ivmelenmesi, örgü derinliğinin küçük olduğu değerler için gözlenen Bloch salınımlarıyla da gösterilmiştir. Bu yapay katı hal sistemi üzerinde yüksek düzeydeki uyum kontrolü ile BEC'in optik örgünün taban durumuna yüklenmesi gösterilmiştir [10].

Birçok deney, yoğuşmanın standart tekniklerde üretimine ve ardından optik örgüye adyabatik yükleme yapılmasına dayanıyordu. Optik örgü devreye sokulduğunda manyetik tuzak çoğunlukla devreden çıkarılıyordu. Ancak, yoğuşmayla örgü arasındaki etkileşim manyetik tuzak içinde gerçekleştiğinde ve ardından her ikisi de uçuş müddetinin görüntülenebilmesi için devreden çıkarıldığında daha büyük bir yoğuşma yoğunluğu fark edildi [10].

Eğer, optik örgü yapısına yüklenen atomların momentum yayılımı, örgü momentumu p_B 'ye kıyasla küçükse, ısıl de Broglie dalga uzunlukları, örgü boşluğud'ye göre büyük olacak ve bu nedenle birçok örgü bölgesine uzanacaktır. Böylece, bir periyodik yapıdaki uyumlu olarak yöresizleşmiş dalga paketleri cinsinden yapılan tanım uygundur ve bizi doğrudan ilk olarak yoğun madde fiziğinde geliştirilen Bloch formalizmine götürür. Sıkı bağlama limitinde ($U_0 \gg E_{gt}$), bireysel örgü bölgelerinde yerleşmiş olan dalga paketleri (Wannier halleri) ile yakınlaştırılabilir. Bu tanım yoğuşmanın, daha önce adyabatik olarak yüklendiği optik örgüden serbest bırakıldığı deneylerdeki Bloch hadisesinden daha anlaşılırdır [10].

11. DİNAMİK YERELLEŞME

Aşağıdaki gibi tanımlanan bir-boyutlu sıkı bağ yaklaşıklığı sistemi Bloch bant dizilişi için en basit modeldir [19].

$$H_0 = -J \sum_l (|l+1\rangle\langle l| + |l\rangle\langle l+1|) \quad (11.1)$$

Burada $|l\rangle$, l . örgü noktasına yerleşmiş Wannier durumunu ifade eder ve J komşu atomlara hoplama matris elemanıdır. Enerji öz durumları k dalga sayısı ile gösterilen Bloch dalgalarıdır:

$$|\varphi_k\rangle = \sum_l |l\rangle e^{ilka} \quad (11.2)$$

a örgü periyodudur. Uygun enerji dağılım ilişkisi [19];

$$E(k) = -2J \cos(ka) \quad (11.3)$$

burada $J > 0$ olduğunu varsayılır, böylece parçacıklar minimum noktalar olan $k = 0, \frac{2\pi}{a}$ ya yerleşirler.

Sisteme homojen olan ve zamana bağlı bir dış $F(t)$ kuvveti etki ettiği durumu düşünülürse, bu durumda toplam Hamiltonian

$$H(t) = H_0 + H_1(t) \quad (11.4)$$

$$H_1(t) = -F(t) \sum_l |l\rangle a_l \langle l| \quad (11.5)$$

olur [18]. Bu dalga fonksiyonunun doğruluğunu kanıtlamak kolaydır ki bunlar, yarı-klasik yaklaşımda tanımlanan zamana bağlı $q_k(t)$ fonksiyonlarıyla oluşturulan zamana bağlı Schrodinger denkleminin çözümleridir [19].

$$|\psi_k(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau E(q_k(\tau))\right) \sum_l |l\rangle \exp(ilq_k(t)a) \quad (11.6)$$

$$\hbar \dot{q}_k = F(t) \quad (11.7)$$

$t = 0$ olduğu durumda $q_k(t)$, k 'ya eşit olur ve böylece

$$q_k(t) = k + \frac{1}{\hbar} \int_0^t d\tau F(\tau) \quad (11.8)$$

Eş. (11.6)'daki dalga fonksiyonları; “hızlandırılmış Bloch dalgaları” ya da Houston durumları olarak bilinir ve periyodik bir örgü potansiyelinde, değişken olmayan bir elektrik alana maruz kalan kristal elektronlarının durumu Houston tarafından düşünülmüştür [19].

Genliği F_1 olan ve ω açısal frekanslı tek renkli ışıktan kaynaklanan kuvvetin durumunda $F(t)$ aşağıdaki gibidir [19];

$$F(t) = F_1(t) \cos(\omega t) \quad (11.9)$$

$q_k(t)$ ise,

$$q_k(t) = k + \frac{F_1}{\hbar\omega} \sin(\omega t) \quad (11.10)$$

Bir-boyutlu optik örgü, dalga sayısı k olan iki lazer ışınının karşıt yönlerden birbirlerine doğru gönderilerek girişimleri sonucu oluşturulur. Bu durum Stark olayı etkisi sonucunda oluşur. Stark olayı sonucu atomlar elektrik alan görür ve bir kosinüs potansiyeline dönüşür [19].

$$V_{ör}(x) = \frac{V_0}{2} \cos(2kx) \quad (11.11)$$

V_0 , lazer yoğunluğuyla orantılı kuyu derinliğidir. Karakteristik enerji skalası tek fotonun enerjisi olarak verilen geri tepme enerjisidir [19]. Optik potansiyel çoğunlukla geri tepme enerjisiyle verilir.

$$E_R = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2M a^2} \quad (11.12)$$

Burada $a = \frac{\lambda}{2}$ potansiyel periyodu ve M atomik kütledir [20].

T sıcaklığında bir atom grubu alırsak, $k_B T$ kabaca E_{gt} 'ye eşit olur. k_B Boltzmann sabitidir. Bu atomların de Broglie dalga boyu;

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2\pi M k_B T}} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{2} \quad (11.13)$$

ile verilir [18] ve $a = \frac{\lambda}{2}$ örgü sabitinden büyüktür. Kuantum mekaniksel örgü etkilerini görmek için, parçacıklar periyodik yapı gibi görünmelidir ve bu nedenle λ_{dB} en azından birkaç örgü sabitini kaplamalıdır. Bu demek oluyor ki bu soğuk durum yeteri kadar soğuk değildir: yani ($k_B T \ll E_{rec}$), [19].

12. OPTİK ÖRGÜDE BANT YAPISI

Bant yapısı teorisi sonsuz bir potansiyel varsayarak türetilmiştir. Atomik dalga fonksiyonu yüz örgü bölgesinden fazlasını kapsar ve sistem sonsuz olarak düşünülebilir. Yoğuşmanın momentumu çok küçüktür, böylece yoğuşma yüzey dalgası olarak alınabilir. Ayrıca, atom-atom etkileşimleri de ihmal edilebilir.

Örgünün periyodikliği, atom-örgü sisteminin enerji spektrumunun bant yapısına sebep olur. Sistemin öz-enerjileri $E_{n,q}$ ve öz-durumlar $|n,q\rangle$ (Bloch durumları) kuazi-momentum q ve bant dizini n ile ifade edilir [21].

Optik örgü, hızı ve derinliği kolayca değiştirilebildiği için katı hal fiziği araştırmalarında avantaj sağlar. Dış bir kuvvetin yokluğunda (ya da örgünün bir ivmesi varsa), örgü periyodikliği sabit kaldığı sürece (kuyu derinliği değiştirilse bile) kuazi-momentum korunur [21].

Periyodik bir tuzak potansiyelindeki ultrasoğuk atomlar yoğuşan madde fiziğiyle benzer olan ilginç bir sistem oluşturur. Bu tür periyodik potansiyeller, zıt yönden birbirine doğru gelen iki lazer ışınının üst üste binmesi şeklinde geliştirilir. $\lambda/2$ periyotlu duran bir optik dalga, her birinin dalga boyu λ olan iki lazer ışını arasındaki girişim sayesinde oluşur [11].

12.1. Bloch Bantları

Bir $V(x)$ periyodik potansiyelindeki parçacığın karakteristik hareketi, bant yapısını Schrödinger denkleminde şöyle tanımlanır:

$$H\varphi_q(x) = E_q\varphi_q(x) \quad (12.1)$$

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(x) \quad (12.2)$$

Bu denklemin çözümü, Bloch dalga fonksiyonu olarak adlandırılır ve $e^{iqx/\hbar}$ düzlem dalgası olarak yazılabilir ve $U_q(x)$ fonksiyonu periyodik potansiyelle aynı periyodikliğe sahiptir [11].

$$\varphi_q(x) = e^{iqx/\hbar} U_q(x) \quad (12.3)$$

Farklı potansiyel derinliklerindeki bir boyuttaki sinüsoidal örgü için bant yapıları gösterir ki, örgü derinliğini yok saydığımızda, bant aralığı da oluşmaz ve bantlar, birinci Brillion bölgesine indirgenen serbest parçacık enerji-momentum parabolüne eşit olduğu görülür [11]. Örgü derinliği arttırıldığında, bant aralıkları genişlemeye başlar ve enerji bant genişliği eksponansiyel olarak küçülür.

Tünelleme matris elemanı J , doğrusal olarak en düşük enerji bandının genişliğiyle ilgilidir [11].

$$J = \frac{\max(E_q^{(0)}) - \min(E_q^{(0)})}{4} \quad (12.4)$$

13. HARMONİK+OPTİK ÖRGÜ

1995 yılında alkali atomların BEC'in keşfi, ultrasoğuk atom sistemleri üzerine olan çalışmalara olan dikkati arttırdı. Özellikle, lazer ışınlarıyla oluşturulmuş optik örgü son zamanlarda, soğuk atomların dinamiğine ve optik örgüye yüklenmiş BEC'e olan ilgiyi büyük ölçüde arttırdı [1]. Bu gibi sistemlerde, parçacıkların etkileşmediği durumda sistem katıdaki tek elektronun davranışına benzer şekilde Bloch salınımı ile hareket eder. Periyodik potansiyeldeki dalga paketlerinin Bloch salınımı kanıtlanmıştır [17].

Tanımlama, örgü noktalarına yerleşmiş Wannier fonksiyonlarının terimlerini içeren parçalamayla sadeleştirilebilir. Wannier fonksiyonları, bir faz faktörüyle tanımlanır ki, bu faz faktörü her zaman gerçek ve iyi yerleşmiş Wannier fonksiyonları elde etmek için seçilir. Ortalama alan dinamiği, doğrusal olmayan Schrödinger denklemiyle tanımlanır. Bu denklem etkileşmenin olmadığı limitte gayet açık olur ve tek-parçacık Schrödinger denkleminde indirgenir.

Periyodik optik örgü potansiyelinde ve parabolik bir tuzaktaki ultrasoğuk atomların deneysel çalışmaları ışığında, etkileşen bozonların fiziğinde çalışma alanı olarak yeni olanaklar ortaya çıkmıştır. Periyodik ve parabolik potansiyelin ikisinin aynı anda varlığında bu potansiyellerden sadece birinin olduğu durumla karşılaştırıldığında tuzak atomların dinamiğini büyük ölçüde değiştirir.

Bu tezde, bu tip potansiyellerde hem ideal hem de etkileşen sistemler incelendi. Sıkı-bağ yaklaşıklığında tek parçacık probleminin tamamen çözülebilir olduğu gösterildi. Enerji spektrumu ve öz-fonksiyonları tanımlamak için analitik çözüm kullanıldı. Çözüm, keyfi bir zamana bağlı $F(t)$ fonksiyonu için Eş.(14.8)'in tam çözümüne dayanmaktadır. Bu denklemin çözümüne 14. bölümde değinilecektir. Bu tez, örgüdeki nötr bir parçacığın hareketini ele almaktadır. Optik örgü içine yüklenmiş BEC'in dinamik karşılığı ile ilgilenilmiştir. Periyodik olarak dönüşüm uygulanan optik örgüde BEC sisteminin dinamik kararlılığı görülmüştür.

Örgü hareketi, iki lazer ışınının arasında frekans değişikliği yaparak mümkün olabilir. Bu frekans değişimine Berry fazı denir. Yani, Berry fazı demek optik örgünün ivmelendirilmesi anlamına gelmektedir. Berry fazı fikri, fiziğin farklı dallarında büyük ilgi görmüştür. Katı hal fiziğinde, zamana bağlı elektrik alan ve periyodik potansiyeldeki bir elektronun hareketi problemi Berry fazına örnek olarak gösterilebilir.

Örgünün salınımından dolayı yoğuşmuş atomlar üzerinde ilaveten kuvvet hissedilecektir. Burada, periyodik olarak titreşen bir optik örgüde konumlanmış nötr atomlar için Berry fazının bir formülü türetilenektir. Çözümleme, ayrık örgüde tam hesaplamalara dayanmaktadır. Sonuçlar, alışılmışın dışındadır ve hareket eden parçacığın dinamik yerelleşmesini içermektedir.

Bu bölümde, $F(t)$ 'nin aşağıdaki gibi özel bir değer için çözümü yapılmaya çalışıldı.

$$F(t) = F_0 \sin(ct) \quad k' = k + \frac{F_0 c \hbar}{q \Omega^2 - \hbar^2 c^2} (1 - \cos(ct)) \quad (13.1)$$

Bundan dolayı,

$$Z^k = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!}} e^{-i\varphi} e^{-ik \frac{a^2 F_0}{2\Omega} \sin ct \left(1 + \frac{\hbar^2 c^2}{q \Omega^2 - \hbar^2 c^2}\right) \sqrt{q}} e^{-\frac{q^2}{\sqrt{2}} k'^2 a^2} H_n(qk', a) \quad (13.2)$$

Burada

$$\phi(t) = \frac{a^2 F_0^2}{16\Omega \hbar} \sin ct \ 2t + \frac{E_n t}{\hbar} + p + \left(\frac{a F_0 c \hbar}{q \Omega^2 - \hbar^2 c^2}\right)^2 \frac{c \hbar}{2\Omega} \sin ct (1 - \cos ct) \quad (13.3)$$

ve \dot{p} değeri

$$\dot{p} = \frac{\left(\frac{a^2 F_0^2 \hbar^2 c^2}{2\Omega}\right)}{q \Omega^2 - \hbar^2 c^2} [(1 - \cos ct) - \hbar^2 \sin^2 ct] - \left[\frac{q \Omega}{4} a^2 F_0^2 c^3 \hbar (1 - \cos ct)^2\right] \quad (13.4)$$

ile belirlidir. Denklemden de görülebileceği gibi momentum periyodik olarak değişmektedir. Değişimin denge noktası harmonik potansiyelin minimum olduğu noktadır.

14. ORTALAMA ALAN DİNAMIĞI

Ortalama alan bölgesinde BEC bir-boyutta $V_0 \sin^2\left(\frac{\varphi x}{a}\right)$ optik örgü potansiyelinde $\varphi(x, t)$ kompleks parametresi ile tanımlanır.

Optik örgüdeki bir atomun harmonik potansiyel içerdiği ve optik örgünün iki lazer ışınının arasında kalan bir frekansta titreştiği düşünölsün. Eğer faz farkı periyodik olarak değıştirilirse optik örgüdeki kuyular periyodik olarak öne ve arkaya salınacaktır. Atomların enine hareketlerinin olmadığı düşünölsünse zamana bağılı Schrödinger denklemi aşağıdaki gibi verilir:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{a}(x - x_0(t))\right) \psi + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \psi \quad (14.1)$$

Burada ω tuzak frekansı, V_0 lazer ışınlarının yoğunluğuyla belirlenen optik örgü derinliği, $x_0(t)$ zamana bağılı periyodik faz, $a = \lambda/2$ örgü sabiti ve λ lazer ışınlarının dalga boyudur.

Koordinat sisteminde hareketli çerçeveden duran çerçeveye dönüşüm (14.1) denkleminin çözümüyle tanımlanır:

$$x \rightarrow x - x_0(t) \quad (14.2)$$

Koordinat dönüşümleri altında türev operatörü,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \dot{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} \quad (14.3)$$

Dalga fonksiyonu,

$$\psi = e^{i\frac{m}{\hbar}x_0x + iW} \phi(x, t) \quad (14.4)$$

burada

$$\dot{W} = \frac{m}{2\hbar} \dot{x}_0^2 - \frac{m\omega^2}{2\hbar} x_0^2 \quad (14.5)$$

(14.1) denkleminde yerine yazdığımızda,

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) \phi + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \phi - F(t)x\phi \quad (14.6)$$

elde edilir. Burada $F(t) = m\dot{x}_0 + m\omega^2 x_0$ zamana bağlı kuvvettir. Hareketli çerçevede periyodik potansiyel sabittir. Fakat titreşen optik örgü nedeniyle yapay bir elektrik alan hissedilir.

$F(t) = 0$ özel durumunu düşünelim. Bu durum daha önce Ana Maria Rey ve arkadaşları tarafından çalışılmıştır [22]. Sıkı-bağ yaklaşıklığını kullanarak parabolik potansiyeldeki optik örgüye tuzaklanmış etkileşen ve etkileşmeyen bir boyuttaki gazın hareketi ve spektrumunu çalışmışlardır.

Eğer örgü yeterince derinse, yoğunlaşmanın her örgü noktası için $\phi(t)$ kompleks sayısı ile temsil edilen sıkı-bağ yaklaşıklığı kullanılabilir. Atomlar her örgü kuyusunda en derin noktaya yerleşirse ve pertürbasyon içeren dinamikler bant arası geçişlere genelleştirilemezse, $\phi(x)$ dalga fonksiyonu Wannier fonksiyonlarıyla genişletilebilir [22]:

$$\phi(x, t) = \sum_j Z_j(t) \omega(x - ja) \quad (14.7)$$

$\omega_0(x - ja)$, j örgü noktasına yerleşmiş Wannier fonksiyonunun birinci bandıdır ve $\sum_j Z_j(t)$ optik potansiyelin j . kuyusuna yerleşmiş atomların kompleks genliğidir. (14.7) denklemini (14.6) denkleminde yerine yazarsak, genliği Z_j olan bir denklem elde edilir.

$$i\hbar \dot{Z}_j = -J(Z_{j+1} + Z_{j-1}) + \Omega_j^2 Z_j - F(t)jaZ_j \quad (14.8)$$

Burada, potansiyel enerji $\Omega = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2$, $J = \int \omega_0^*(x) H_0 \omega_0(x - a) dx$ ise en yakın komşu noktaları arasında tünelleme matris elemanıdır ve

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (14.9)$$

temel durum Hamilton operatörüdür. Fourier geçişini kullanmak BEC dinamiğini anlamak için kolaylık sağlar.

$$Z^k(t) = \sum_j e^{-ikj} Z_j(t) \quad (14.10)$$

Burada k , $(-\frac{\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a})$ kuazi-momentumdur. Z^k periyodik ve devam eden fonksiyonun Fourier bileşenleridir. Özdeğer problemi, Z_j genlikleri ile tanımlanan Fourier bileşenleri ile analitik olarak çözülebilir. (15.8) denklemini k uzayında yazılırsa

$$i\hbar \dot{Z}^k = (-2J \cos k) Z^k - \Omega \frac{\partial^2 Z^k}{\partial k^2} - iaF \frac{\partial Z^k}{\partial k} \quad (14.11)$$

bulunur. Bu denklemi çözmek için, aşağıdaki dönüşümün tanımlanması gerekir.

$$Z^k(t) = e^{i\left(-\frac{aF}{2\Omega} + \frac{a^2}{4\Omega\hbar} \int F^2 dt\right)} U(k, t) \quad (14.12)$$

(14.11) denkleminde (14.12) yerine yazılırsa

$$i\hbar \dot{U} = -\Omega \frac{\partial^2 U}{\partial k^2} - \left(\frac{a\hbar F}{2\Omega} k + 2J \cos k\right) U \quad (14.13)$$

denklemini elde edilir. $F = 0$ iken, çözüm Mathieu fonksiyonları ile verilir [22]. Aşağıda bu denklemin çözümü yapılmıştır. Bu denklem, zamana bağlı doğrusal potansiyel için Schrödinger benzeri bir denklemdir.

15. SONUÇ

Bu tez, zamana bağlı bir boyutlu optik örgünün kuantum dinamiklerinin çözümünü içerir. Bu tezde titreşen bir optik örgüdeki BEC'in dinamik yerelleşmesi ifade edilmiştir. Atomik hareketi tanımlayan dinamik denklem analitik olarak çözülmüştür.

Optik örgüdeki soğuk atomların zamana bağlı kuvvet içeren BEC'in dinamiği çalışılmıştır. Çıkış noktası, atomların başlangıçtaki bulunduğu noktaların olasılıklarını elde etmektir. Hareket eden optik örgüdeki soğuk atomların BEC'inin dinamiği analiz edildi. Bloch salınımlarının fazı yönünde, hareketli alanın fazı ayarlanarak dalga paketi evriminin kolayca anlaşılabilceği görüldü.

Zaman terimi eklenmiş titreşen optik örgülerde atomik dalga paketi dinamiği için analitik bir yaklaşım geliştirildi. Elde edilen sonuç atomik hareketin tanımlanmasına imkan vermektedir.

Öz-durumları kısmen karakterize etmek için bu tip fonksiyonların asimptotik açılımlarını kullanıldı. Örgü tarafından tanımlanan harmonik salıncı spektrumu için düzeltme hesabı yapıldı.

Tek-parçacık problemlerinde çözüm, $q = 4J/\Omega$ parametresiyle belirlenir. Bu parametrede J en yakın komşu bölgeler arasında hoplama enerjisi ile Ω merkez bölgesinden en yakın komşu bölgesine hareket eden parçacığın enerji değeri orantılıdır. Sistemin özdeğerleri ve öz-durumları q 'nun kompleks fonksiyonlarıdır. Birçok deneyler $q \gg 1$ olduğu durumlar için geliştirilmiştir. Bu yaklaşımda ortalama hoplama enerjisi J , Ω 'dan daha büyüktür [22].

Burada tünellemenin baskın olduğu $q \gg 1$ bölge (14.13) denkleminde çözüldü. Düşük enerji limitinde $2 \cos k \approx 2 - k^2$ yaklaşıklığı kullanıldı. Böylece,

$$i\hbar\dot{U} = -\Omega \frac{\partial^2 U}{\partial k^2} - \left(\frac{a\hbar F}{2\Omega} k + \frac{q\Omega}{4} (2 - k^2) \right) U \quad (15.1)$$

bulunur. Bu durumda, potansiyel zamana bağlı harmonik doğrusal bir potansiyel olur. Bu denklem, harmonik salıncı probleminin çözümüne dayandırılarak yapılabilir.

$$U(k', t) = e^{-ik's(t) - \frac{iEt}{\hbar}} \varphi(k') \quad (15.2)$$

$$k' = k + \frac{2\Omega}{\hbar} \int s dt \quad (15.3)$$

$$\dot{p} = \frac{a\dot{F}}{\hbar} \int s dt + \frac{\Omega}{\hbar} s^2 + \frac{q\Omega^3}{\hbar^3} \left(\int s dt \right)^2 \quad (15.4)$$

ve burada $s(t)$,

$$\ddot{s} = -\frac{a\ddot{F}}{2\Omega} - \frac{q\Omega^2}{\hbar^2} s \quad (15.5)$$

eşitliğini sağlar. O zaman

$$E\varphi = -\Omega \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k'^2} - \frac{q\Omega}{4} (2 - k'^2) \varphi \quad (15.6)$$

olur. Öz-durumlar, harmonik salıncı öz-durumlarıdır ve Hermite polinomlarıyla tanımlanabilir. Şöyle ki,

$$\varphi(k') = \sqrt{\frac{q}{\sqrt{\pi} 2^n n!}} e^{-\frac{\sqrt{q}}{8} k'^2} H_n(q, k') \quad (15.7)$$

şeklindedir. q 'nun büyük olduğu limitte, periyodik harmonik potansiyel enerjisine bağlı öz-durumları iki farklı bölümüne sahiptir. Öz-durumlar, n kuantum sayısına bağlı bir şekilde düşük ve yüksek enerji olarak sınıflandırılabilirler.

Özellikle, düşük enerji limiti tuzak merkezi etrafında yaygındır, yüksek enerji limiti ise potansiyelin olduğu bölgelere yerleşmiştir. Yaygınlaşmış ve yerleşmiş durumların varlığı teorik olarak çalışılmış ve deneysel olarak test edilmiştir [22].

Geri dönüşüm yaptığımızda $Z^k(t)$ 'yi elde edebiliriz. Z_j için Fourier dönüşümlerini kullanmak yerine, grafikte ifade etmek daha anlaşılırdır.

$q \ll 1$ olduğu bölgede ortalama hoplama enerjisi J , Ω 'dan daha küçüktür.

$$Z_j = \frac{C_0}{\sqrt{8}} \delta_{j,0} + \frac{q}{4\sqrt{8}} C_1 \delta_{j,1} + C_2 \delta_{j,-1} + \frac{q^2}{32\sqrt{2}} C_3 \delta_{j,2} + C_4 \delta_{j,-2} - C_5 \delta_{j,0} \quad (15.8)$$

Burada C_i sabitleri zamana bağılı parametrelerdir ($i = 0,1,2,3,4,5$). (14.8) denkleminde $F = 0$ olursa $C_i = 1$ olur.

Bu denklemlerin nümerik olarak çözülebileceği gösterildi. (15.8) denklemi pozitif ve negatif yönde ilk 2 örgü noktasında (-2, -1, 0, 1, 2) parçacıkların bulunma olasılığının zamanla nasıl değiştiğinin görülmesini sağlar. Hamiltonyenin parametrelerine bağılı olarak sistemin nasıl değişeceği bu denklemden anlaşılabilir.

KAYNAKÇA

- [1] Ekşioğlu, Y. (2006). Bose-Einstein Yoğunlaşması ile Lineer Sıralanmış Çeşitli Potansiyel Kuyularından Madde İletimi. Yüksek Lisans Tezi. İstanbul Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [2] Karaođlu, B. (2003). İstatistik Mekaniđe Giriş. Seyir Yayıncılık. İstanbul.
- [3] Oral, S. Bose-Einstein Yoğuşmasında Girdap Yapılar. Yüksek Lisans Tezi. Anadolu Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [4] Akbaş, H.Z. (2007). Bose-Einstein Yoğuşması: Bir Yoğunluk Fonksiyoneli Yaklaşımı. Doktora Tezi. Selçuk Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [5] Şahin, F. (2007). DFT(Yoğunluk Fonksiyonelleri Teorisi)'nin çok parçacık bozon sistemlerine bir uygulaması. Yüksek Lisans Tezi. Selçuk Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [6] Öztürk, M.K. (2007). Aşırı-Soğuk Gazda Atomik (Rb+Rb, K+K, Rb+K) Saçılma. Doktora Tezi. Gazi Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [7] Öztop, B. (2009). Entanglement: Quantification via Uncertainties and Search among Ultracold Bosons in Optical Lattices. Doctorate Thesis. Bilkent University. The Institute of Engineering and Science.
- [8] Meşe, A.İ. (2010). İki Boyutta Etkileşen Tuzaklanmış Aşırı Soğuk Bozonlar. Doktora Tezi. Trakya Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [9] Dede, C. (2008). Bose-Einstein Yoğuşmasına Bir Yoğunluk Fonksiyonelleri Kuramı Yaklaşımı. Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [10] Morsch, O. ve Arimondo E. (2002). Ultracold atoms and Bose-Einstein condensates in optical lattices. Physical Review Letters. 20. 4.
- [11] Greiner, M. (2003). Ultracold quantum gases in three-dimensional optical lattice potentials. Ludwig-Maximilians-Universität
- [12] Kinoshita, T., Wenger, T. ve Weiss D. S. (2004). Obsevation of a One-Dimensional Tonks-Girardeau Gas. Science 305, 1125.
- [13] Moseley, Ch., Fialko, O. ve Ziegler, K. (2007). Interacting Bosons in an Optical Lattice. Physical Review Letters 58.
- [14] Öztürk, T. (2005). Harmonik Olarak Tuzaklanmış Bozonlarda Bose-Einstein Yoğuşması. Yüksek Lisans Tezi. Selçuk Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü.

- [15] Çiçek, K. (2010). Bose-Einstein Yoğunlaşmasının Dinamiği. Yüksek Lisans Tezi. Sakarya Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [16] Umucalılar, R. O. (2010). Quantum Gases in Rotating Optical Lattices. Doctorate Thesis. Bilkent University. The Institute of Engineering and Science.
- [17] Kittel, C. (1996). Katıhal Fiziğine Giriş. Güven Kitap Yayın Dağıtım Ltd. Şti.
- [18] Yukalov, V.I. (2008). Cold atoms in double-well optical lattices. Physical Review Letters. 24.
- [19] Arlinghaus, S., Langemeyer, M. ve Holthaus, M. (2011). Dynamic localization in optical lattices. Physical Review Letters. 30.
- [20] Cazalilla, M., A., Ho, A., F. ve Giamarchi, T. (2006). Interacting Bose gases in quasi-one dimensional optical lattices. Physical Review Letters. 55.
- [21] Denschlag, J., H., Simsarian, J.,E., Haffnert, H., Kenzei, C.,M., Browaeys, A., Cho, D., Helmerson, K., Rolston, S., L. ve Phillips, W., D. (2002). A Bose-Einstein condensate in an optical lattice. Physical Review Letters. 20. 3.
- [22] Rey, A., M., Pupillo, G., Clark, C., W. ve Williams, C., J. (2005). Ultracold atoms confined in an optical lattice plus parabolic potential : A closed-form approach. Physical Review Letters A 72.