

**NORMAL DAĞILIMA YAKLAŞIM OLARAK SARGAN  
DAĞILIMI KULLANIMININ PARAMETRE TAHMİNLERİNE  
ETKİSİNİN ARAŞTIRILMASI**

**Ömer Faruk GÖZÜKIZIL** /

Anadolu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
İstatistik Anabilim Dalı  
Uygulamalı İstatistik Bilim Dalında  
DOKTORA TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman  
**Doç. Dr. Ali Fuat YÜZER**

Ekim 1989

Ömer Faruk GÖZÜKIZIL ' ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı "Normal Dağılıma Yaklaşım Olarak Sargan Dağılımı Kullanımının Parametre Tahminlerine Etkisinin Araştırılması " başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

10./10./1989

Üye : Prof. Dr. Nedâ Çömlükü

Üye : Prof. Dr. Fikri Akdeniz

Üye : Doç. Dr. A. Fuat YAZAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 22 KASIM 1989  
gün ve 226/3..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Rüstem KAYA  
Enstitü Müdürü

## ÖZET

Bu çalışmada Sargan Dağılımı Ailesi tanıtılıp, Normal dağılıma iyi bir alternatif olarak düşünülebileceği üzerinde durulmuştur. Sargan Dağılımlarının Normal dağılıma iyi bir yaklaşım olduğu gösterilmiş, Normal dağılım yerine Sargan dağılımı kullanmanın avantajları belirtilmiştir.

Normal dağılıma alternatif olarak, Regresyon analizinde hataların dağılımında farklı iki Regresyon modeli için ve Hipotez testlerinde tahminlerin gücüne dayalı olarak incelemeler yapılmıştır.

Özellikle Hipotez testlerinde, Sargan dağılımlarında kuyruk kısımlarının Normale göre daha şişkin olmasından dolayı Sargan dağılımını kullanmanın testin gücü açısından daha çok tercih edilebilir olacağı vurgulanmıştır.

Ayrıca iki değişkenli Normal dağılıma yaklaşım olarak iki değişkenli Sargan dağılım fonksiyonu belirlenmiş ve değişik Korelasyon düzeyleri için yaklaşımın yeterliği üzerinde durulmuştur.

## SUMMARY

In this study the Sargan Distribution Family is introduced and referred that it can be a good alternative to the Normal Distribution. Here it is presented that the Sargan Distribution provide a good approximation to the Normal Distribution, in addition the advantages of using the Sargan Distribution instead of the Normal Distribution.

The research depending on to different models in regression analysis and on the power of the estimation in the testing hypothesis has been done.

Especially in the testing hypothesis, as the tail is much fatter than the Normal in the Sargan Distribution, it is much more preferable distribution in terms of the power of the test.

In addition, the Bivariate Sargan Distribution function is determined as approximation for the Bivariate Normal Distribution and the efficiency of approximation is discussed for the different correlation levels.

## TEŞEKKÜR

Çok değerli fikirleri ile çalışmalarımı yönlendiren , Hocam Prof.Dr.Neclâ ÇÖMLEKÇİ`ye teşekkürü bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	iv
SUMMARY .....	v
TEŞEKKÜR .....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	x
1. GİRİŞ .....	1
2. SARGAN DAĞILIMI AİLESİ .....	3
2.1 Sargan Dağılımı .....	3
2.2 Sargan Dağılımında Uygun $\gamma$ ların Belirlenmesi .....	10
2.3 Birinci Dereceden Sargan Dağılımı...	11
2.4 İkinci Dereceden Sargan Dağılımı ...	12
3. NORMAL DAĞILIMA YAKLAŞIM OLARAK SARGAN...	15
3.1 Diğer Yaklaşımlar Arasında Sargan'ın Durumu .....	18
3.2 Sargan Yaklaşımında En Yüksek Olabilirlik Tahminlerinin Asimtotik Sapması ....	19
3.3 Hata Dağılımının Normal veya Sargan Dağılımı Kabul Edilerek İncelenmesi.	21
3.3.1 Regresyon Modeli x Eksenine Paralel Bir Doğru İse .....	21
3.3.2 Doğrusal Regresyon Modeli ...	24
4. $\infty$ 'NİN FARKLI BİR YOLLA BELİRLENMESİ VE BU DURUMUN PARAMETRE TAHMİNLERİNE ETKİSİ.	27
4.1 Sargan 1 Dağılımında Tahminlerin Güçlülüğü .....	30
4.2 Sargan 1 Yaklaşımının Parametrelerin En Yüksek Olabilirlik Tahminlerine Etkisi ve Üstünlükleri .....	33
4.3 Hipotez Testlerine Uygulama .....	36
5. ÇOK DEĞİŞKENLİ SARGAN DAĞILIMI .....	38
5.1 Birleşik Yoğunluk Fonksiyonu .....	38
5.2 İki Değişkenli Normal Dağılım .....	38
5.3 İki Değişkenli Sargan 1 Dağılımı ...	39
5.4 Korelasyonlu İki Değişkenli Sargan 1 Dağılımı .....	40
5.5 İki Değişkenli Normal Dağılıma İki Değişkenli Sargan 1 Yaklaşımı .....	43

## İÇİNDEKİLER (Devam)

	<u>Sayfa</u>
6. SONUÇ VE ÖNERİLER .....	56
KAYNAKLAR DİZİNİ .....	62

### EKLER

1. Sargan Dağılımlarının Grafiklerini Veren Bilgisayar Programı.
2. Sargan Dağılımlarının Yoğunluk ve Birikimli Yoğunluk Fonksiyonu Değerlerini Veren Bilgisayar Programı.
3. İki Değişkenli Sargan 1 ve İki Değişkenli Normal Dağılım Değerlerini Türeten Bilgisayar Programı.

### ÖZGEÇMİŞ

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>ŞEKİL</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Sargan 1 in Olas.Yoğ.Fonk. Grafiği .....	5
2.2 Sargan 1 in Birik.Yoğ.Fonk. Grafiği .....	5
2.3 Sargan 2 nin Olas.Yoğ.Fonk. Grafiği .....	6
2.4 Sargan 2 nin Birik.Yoğ.Fonk.Grafiği .....	6
2.5 Sargan 3 ün Olas.Yoğ.Fonk. Grafiği .....	7
2.6 Sargan 3 ün Birik.Yoğ.Fonk.Grafiği .....	7
2.7 Sargan 4 ün Olas.Yoğ.Fonk.Grafiği .....	8
2.8 Sargan 4 ün Birik.Yoğ.Fonk.Grafiği .....	8
2.9 Sargan 5 in Olas.Yoğ.Fonk. Grafiği .....	9
2.10 Sargan 5 in Birik.Yoğ.Fonk.Grafiği .....	9
3.1 St.Normal ve ilk iki Der.Sargan Grafiği .....	17
3.2 Gerçek Dağılım Normal, Sargan 1 ve 2 Kabul Edilirse Asimtotik Sapmalar .....	20
3.3 Gerçek Dağılım Sargan 1 veya 2 ise, Normal Kabul Edilirse Asimtotik Sapmalar .....	20
4.1 Yeni $\alpha$ 'ya göre St.Normal, Sargan 1 ve 2 Yoğ. Fonk. Grafiği .....	28
4.2 İki Eğri Arasında Kalan Alan .....	30
4.3 Gerçek Dağılım Normal, Sargan 1 kabul Edilirse Asimtotik Sapmalar .....	34
4.4 Gerçek Dağılım Sargan 1, Normal Kabul Edilirse Asimtotik Sapmalar .....	35

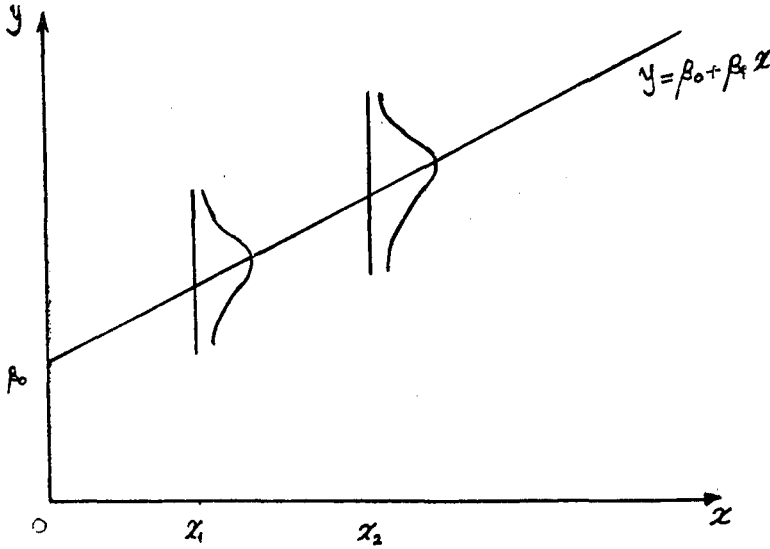


## ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>ÇİZELGE</u>	<u>Sayfa</u>
3.1 Standart Normal ve İlk 5 Dereceden Sargan Dağılımlarının Yoğunluk Fonk.Değerleri...	16
3.2 Standart Normal ve İlk 5 Dereceden Sargan Dağılımlarının Birikimli Fonk.Değerleri..	16
3.4 Normal Dağılıma Yaklaşım Olarak Çeşitli Alternatiflerin Durumu .....	18
4.1 Yeni $\alpha$ 'ya göre Sargan 1 ve Sargan 2 Yoğunluk Fonk. Değerleri .....	28
4.2 Yeni $\alpha$ 'ya göre Sargan 1 ve Sargan 2 Birikimli Fonk. Değerleri .....	29
4.3 Sargan Dağılımı Eğri Alanları .....	32

## 1. GİRİŞ

Regresyon analizinde temel varsayımlar içinde fit edilen modele göre, hataların sıfır ortalamalı Normal dağılım göstermesi ve hatalar arasında korelasyon olmaması şartı vardır. Burada Normal dağılım şartı Stokastik bağımsızlığı sağlar, dolayısı ile test yapıp güven sınırları bulunabilir.



Model olarak  $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$  düşünülerek çizilen yukardaki grafiğin anlamı,

$$y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$$

dır. Yani gözlemler tekrarlanırsa, ortalamaları fit edilen modeli verecek şekilde bir Normal dağılıma uyum sağlar. Demek ki gözlemler fit edilen modele ait bir şans örneğidir. Şans örneğindeki elemanlar modele göre Normal dağılıma uyacak şekilde, belli varyansta sapmalar gösterebilirler.

Hataların Normal dağılımı varsayımı ile Basit Regresyon modelinde En yüksek olabilirlik tahminlerinin ve En küçük kareler tahminlerinin BLUE olmasını sağlar. Normallik varsayımı gerçekleşmese de Basit regresyon modelinde En küçük kareler tahminleyicileri sapmasızdır.

Normallik varsayımı özellikle Hipotez testi için gereklidir. Fakat hataların Normal dağılması varsayımı bizi daima doğru sonuçlara götürmeyebilir.

Örneğin doğrusal olmayan Regresyon modellerinde tam uyum olduğu söylenemez. Zaten hataların Normal dağılmasını zorlayıcı bir neden de yoktur. Sadece stokastik bağımsızlığın olması için hataların simetrik olarak dağılması önemlidir. Yani, hatalar bağımsızlık açısından düşünülürse simetrik herhangi bir dağılım gösterebilirler.

Hataların bağımsız ve eklenebilir olması; ihmal edilebilir değişkenlerin etkilerine karşılık olarak düşünülmesi ve Merkezi Limit Teoremi Normallik varsayımı için neden olarak öne sürülür. İhmal edilebilir değişkenlere karşılık olarak düşünme, hataların bağımsız ve eklenebilir olması Merkezi Limit Teoremine göre harekete zorlayıcı noktalar değildir. İstatistiksel işlemlerde sık sık asimtotik yöntemlere başvuruda bulunulması veya zaman zaman örnek büyüklüğünü arttırma gereği duyulması hataların Normal dağılması üzerinde şüpheler olduğunu göstermektedir.

Bununla beraber hataların Normal dağılım gösterdiği bir örnekte parametre tahminlerini belirlemek için En yüksek olabilirlik yöntemi kullanılırken Normal dağılımın yoğunluk fonksiyonunun integralinin değerlendirilmesi gerekir. Özellikle doğrusal olmayan modellerde En yüksek olabilirlik yöntemiyle tahmin yapılırken Normal dağılımın yoğunluk fonksiyonunun çok katlı integralinin hesaplanması gerekir. Bu durum oldukça önemli bir sorun oluşturmaktadır. Çünkü Normal dağılımın yoğunluk fonksiyonunun integrali analitik olarak hesaplanamaz, ancak sayısal yöntemlerle yaklaşık olarak hesaplanabilir. Bu sorundan kurtulmak ve hesaplama kolaylığı sağlamak için Normal dağılıma iyi bir alternatif olarak yoğunluk fonksiyonunun integrali analitik olarak belirlenebilen dolayısıyla Birikimli fonksiyonu tam olarak belli olan "Sargan Dağılımı Ailesi" düşünülebilir.

Bu çalışmada "Sargan Dağılımı Ailesi" tanıtılıp, Normal dağılıma karşı iyi bir alternatif olduğu gösterilmiştir. Sargan dağılımı ailesinin hangi elemanının ne ölçüde Normal dağılıma yaklaşım sağladığı üzerinde durulmuş, dağılım parametresinin farklı bir yolla tahmini elde edilerek Normal dağılıma yaklaşımın tek bir Sargan dağılımı ile yapılması sağlanmış ve bunun etkileri araştırılmıştır. Ayrıca çok değişkenli Sargan dağılımlarının çok değişkenli Normal dağılıma yaklaşımı düşünülmüş, özellikle iki değişkenli Normal dağılıma değişik korelasyon düzeylerinde yaklaşımlar incelenmiştir.

Bu araştırma daha çok teorik bir çalışma gibi gözükmele beraber uygulamaya da büyük kolaylıklar getirmektedir. Özellikle Hipotez testlerinde Sargan dağılımının Kabul edilmesinin testin gücüne etkisi ve kritik değerlerin neler olacağı değişik önem düzeylerinde incelenmiştir.

## 2. SARGAN DAĞILIMI AİLESİ

### 2.1 Sargan Dağılımı

Sargan dağılımı olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan sıfır ortalamalı ve  $2/\alpha^2$  varyanslı Laplas dağılımının genelleştirilmiş şeklidir. Dağılım simetrik olup,  $(-\infty, \infty)$  aralığında tanımlı ve kapalı şekilde integrali alınabilir bir yoğunluk fonksiyonuna sahiptir.

Sargan yoğunluklarının genel gösterilişi,

$$f(x) = \frac{K\alpha}{2} e^{-\alpha|x|} \sum_{j=0}^p \gamma_j \alpha^j |x|^j \quad (2.2)$$

şeklindedir. Burada,  $\gamma_0=1, \alpha>0, \gamma_j \geq 0 (j=1, \dots, p)$  ve

$$K = \left( \sum_{j=0}^p \gamma_j \cdot j! \right)^{-1} \quad (2.3)$$

dir.  $p$  Sargan dağılımının derecesi olup,  $p=0$  için (2.2) ifadesi Laplas dağılımı yoğunluk fonksiyonu olur.

Sargan dağılımının birikimli yoğunluk fonksiyonu,

$$F(x) = \begin{cases} 1-g(x) & x \geq 0 \text{ ise} \\ g(x) & x < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.4)$$

şeklindedir. Burada,

$$g(x) = \frac{K}{2} e^{-\alpha|x|} \sum_{j=0}^p \gamma_j \cdot j! \cdot \sum_{m=0}^j \frac{(\alpha|x|)^{j-m}}{(j-m)!} \quad (2.5)$$

dir.

Genel gösterilişi (2.2) ile verilen ifadenin moment türeten fonksiyonu,

$$M_x(t) = \frac{K}{2} \sum_{j=0}^p \left( \frac{\alpha^{j+1} \cdot \gamma_j}{(\alpha+t)^{j+1}} + \frac{\alpha^{j+1} \cdot \gamma_j}{(\alpha-t)^{j+1}} \right) \quad (2.6)$$

şeklindedir.

Buna göre momentler,

$$\mu_r = \begin{cases} 0 & r \text{ tek ise} \\ \frac{K}{\alpha^r} \sum_{j=0}^p \gamma_j \frac{(j-r)!}{j!} & r \text{ çift ise} \end{cases} \quad (2.7)$$

şeklinde bulunur (Missiakoulis, 1983).

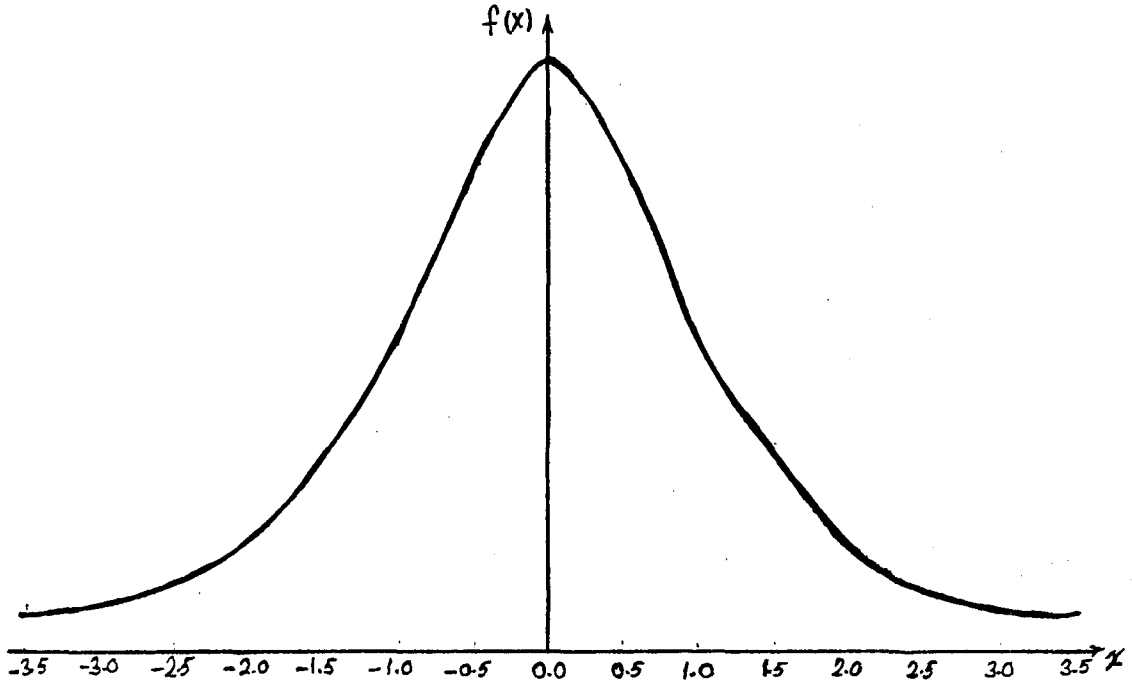
Sargan dağılım ailesinde  $p$  dağılımın derecesini belirler,  $\alpha$  ise parametredir. Dağılımın  $\alpha$  parametresi ve değişik  $p$  değerlerine göre durumu incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir. İncelemelerde şu sonuçlar dikkati çekmektedir:

Derece büyüdükçe  $\alpha$  da büyümektedir.

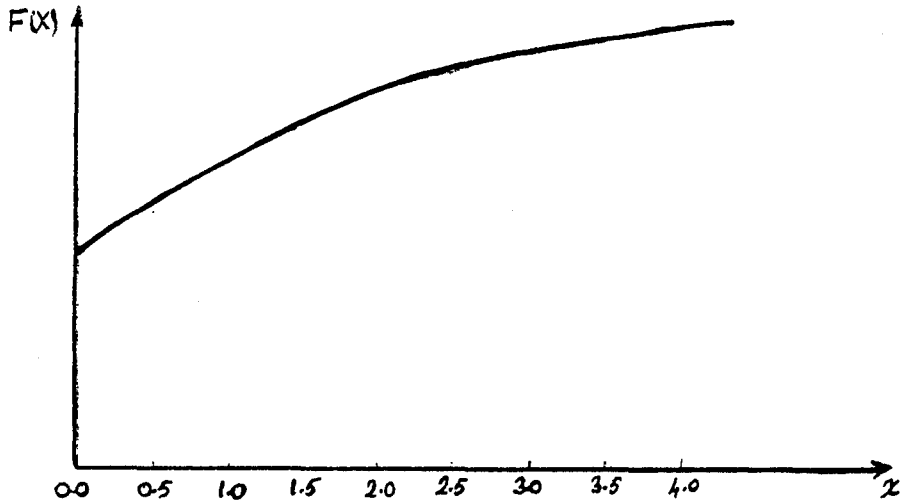
$\alpha$  büyüdükçe sivrilik artar.

$\alpha$  küçüldükçe dağılım üniformlaşır.

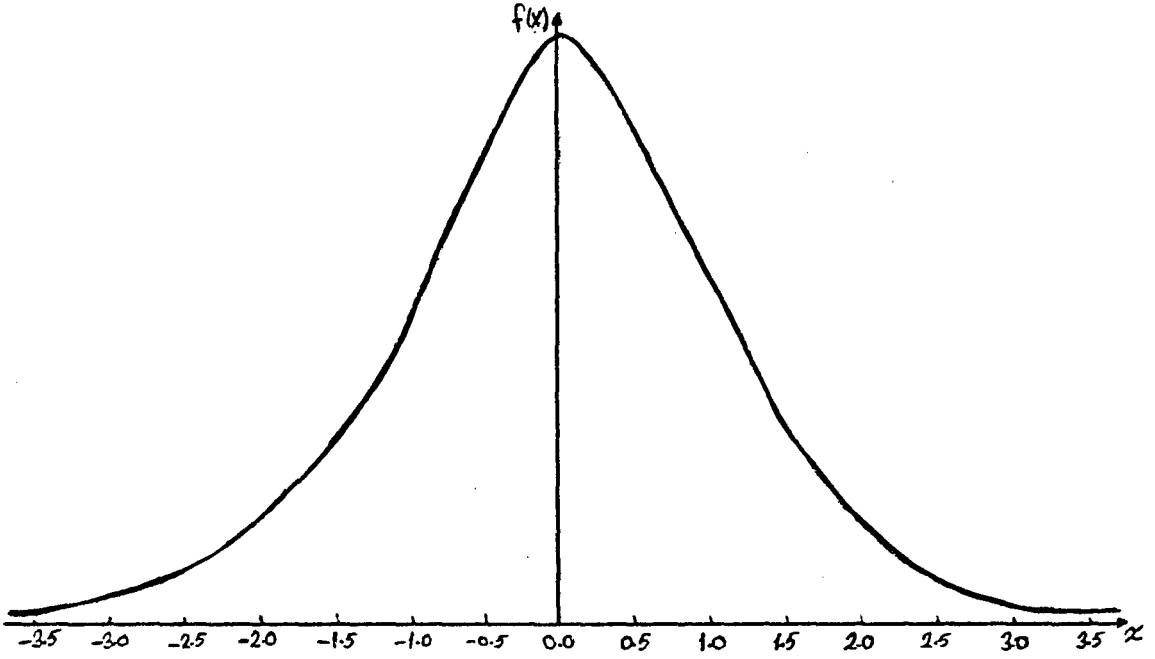
Ek 1 deki program değişik dereceden Sargan dağılımlarının dağılım ve birikimli dağılım fonksiyonlarının grafiklerini vermektedir. Bu grafiklerden ilk beş dereceye ait olanları aşağıdaki şekildedir.



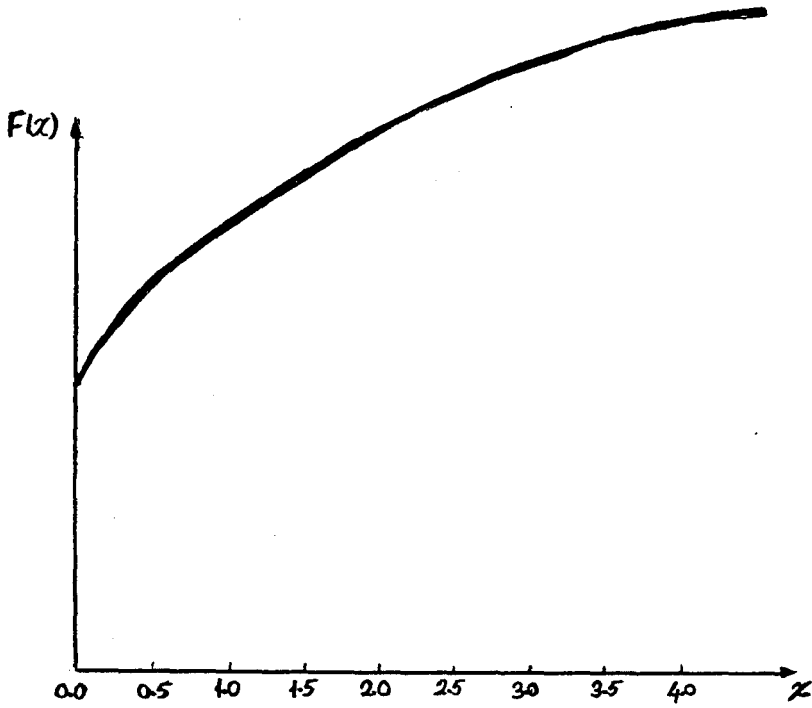
ŞEKİL 2.1 Birinci dereceden Sargan dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.



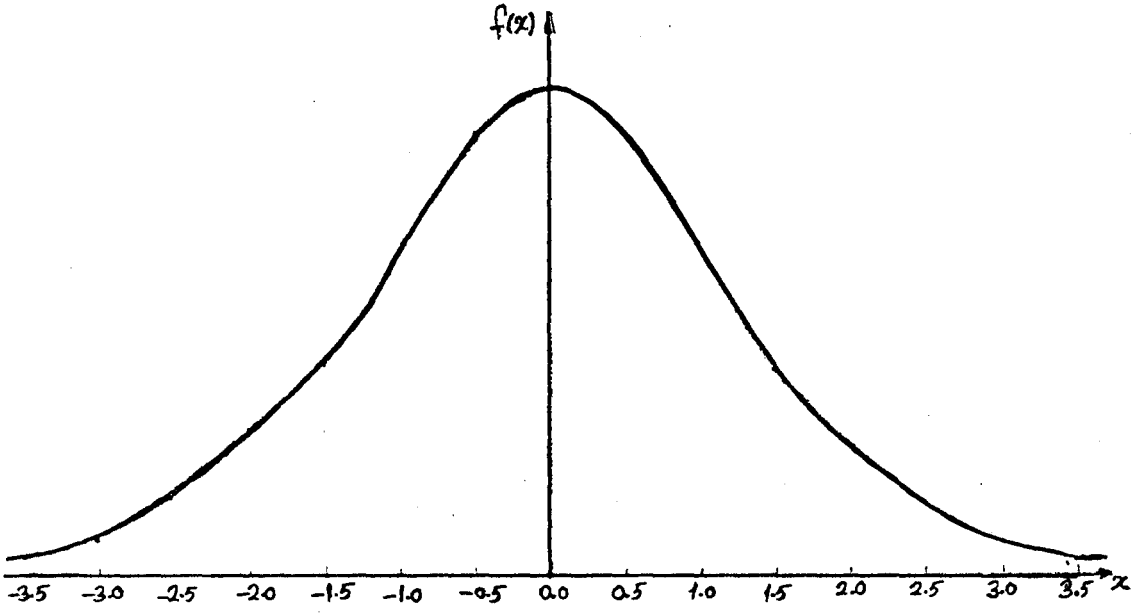
ŞEKİL 2.2 Birinci dereceden Sargan dağılımının birikimli yoğunluk fonksiyonunun grafiği.



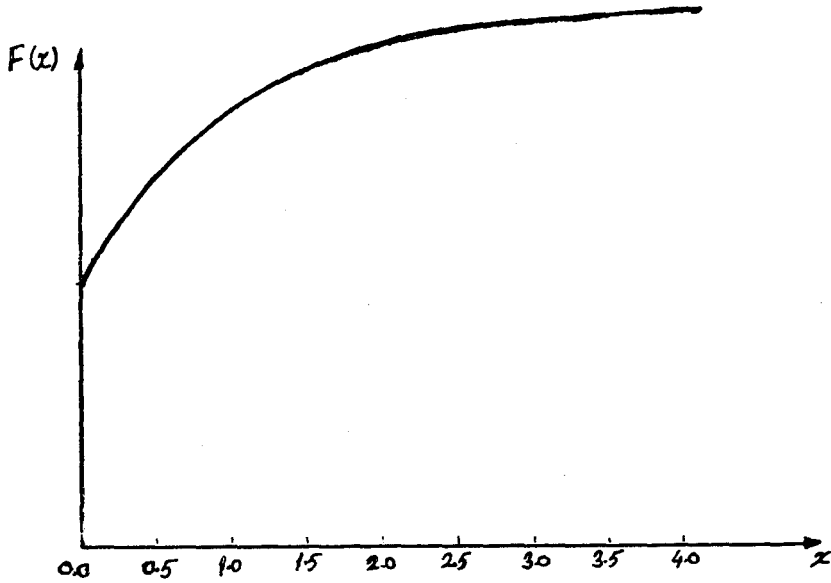
ŞEKİL 2.3 İkinci dereceden Sargan dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.



ŞEKİL 2.4 İkinci dereceden Sargan dağılımının birikimli yoğunluk fonksiyonunun grafiği.

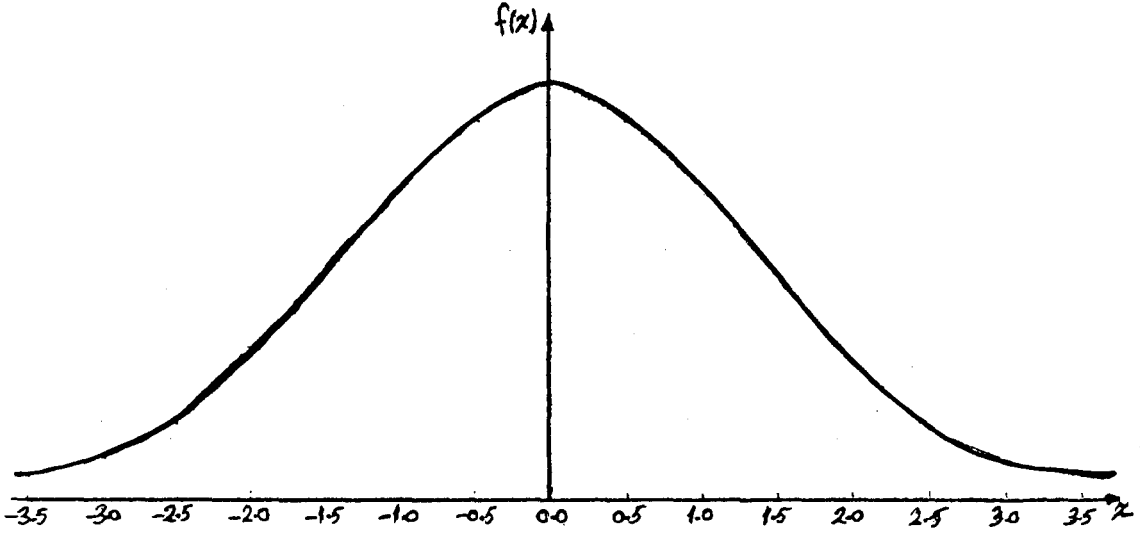


ŞEKİL 2.5 Üçüncü dereceden Sargan dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.

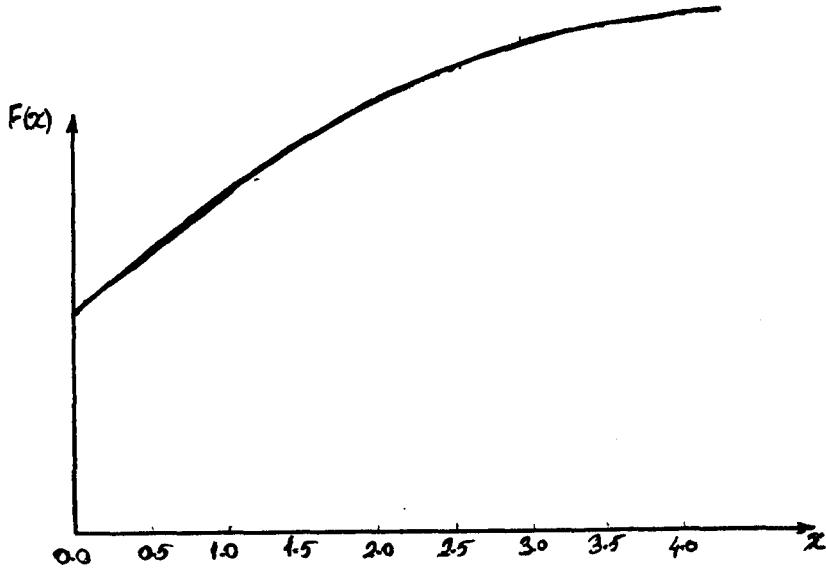


ŞEKİL 2.6 Üçüncü dereceden Sargan dağılımının birikimli yoğunluk fonksiyonunun grafiği.

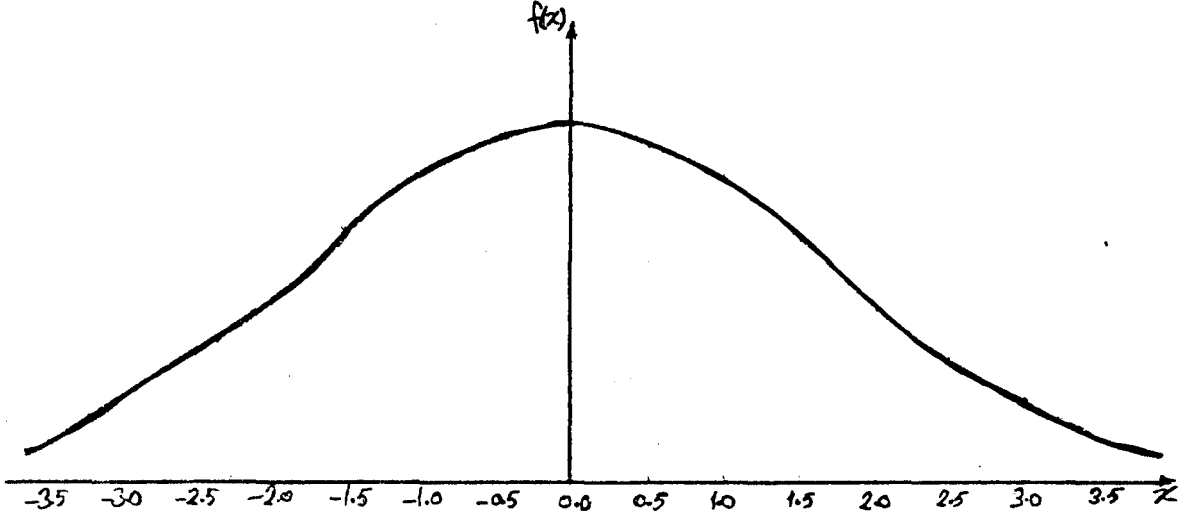




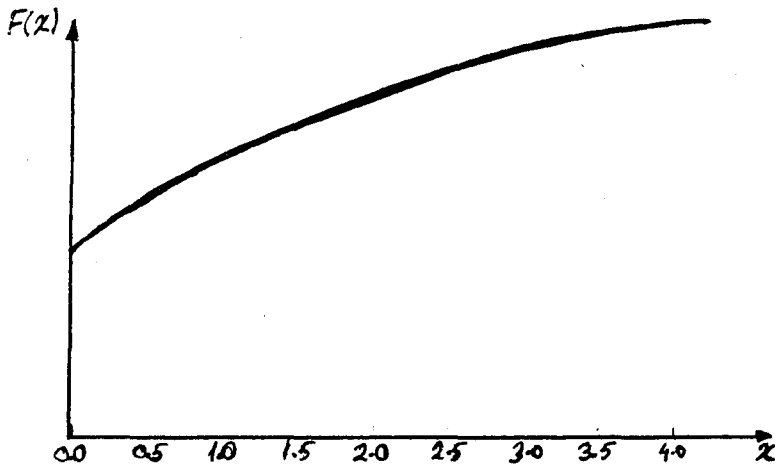
ŞEKİL 2.7 Dördüncü dereceden Sargan dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.



ŞEKİL 2.8 Dördüncü dereceden Sargan dağılımının birikimli yoğunluk fonksiyonunun grafiği.



ŞEKİL 2.9 Beşinci dereceden Sargan dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.



ŞEKİL 2.10 Beşinci dereceden Sargan dağılımının birikimli yoğunluk fonksiyonunun grafiği.

## 2.2 Sargan Dağılımında Uygun $\gamma$ ların Belirlenmesi

Sargan dağılımı kullanılmadan önce  $p$  yani dağılımın derecesi tanımlanmalıdır. Buna göre  $\gamma$  lar belirlenir ve  $\alpha$  nın en yüksek olasılık tahmini belirlenerek yoğunluk elde edilir.

Hemen anlaşılacağı gibi  $p$  ve  $\gamma$  nın sınırsız sayıda kombinasyonu vardır. Uygun değerleri belirlemek için her yerde birinci ve ikinci türevlerin olması ve farklı  $p$  değerleri için elde edilen  $\gamma$  lar arasında karşılaştırma yolu izlenir. Türevlerin tanımlı olması şartı süreklilik ve parametre tahmini için gereklidir.

(2.2) de tanımlanan fonksiyon her yerde sürekli olup, birinci ve ikinci türevleri de her yerde süreklidir. En yüksek olasılık tahmininin yapılabilmesi için ilgili yoğunluk fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerinin sürekli olması şarttır. Bunun için aşağıdaki iki teorem verilmiştir (Goldfeld and Quandt, 1981).

**Teorem 1.** (2.2) fonksiyonunun  $p$  nin 1 veya daha büyük bütün değerleri için  $f'(x)$  ancak ve ancak  $\gamma_1=1$  ise süreklidir.

**İspat.**  $x=0$  için sağ ve sol türevlere bakılırsa eşitliğin dolayısı ile sürekliliğin ancak  $\gamma_1=1$  için sağlanabileceği görülür.

**Teorem 2.**  $\gamma_1=1$  ve  $p \geq 1$  için  $f''(x)$ ,  $x=0$  da süreklidir.  
**İspat.**  $f''(x)$  türevi bulunarak görülür.

Yukarda verilen teoremler gereği  $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$  alınarak  $\gamma$  için aşağıdaki rekürans bağıntısı bulunmuştur.

$$\gamma_{j+1} = \frac{2 \cdot (p-j)}{(j+1)(2p-j)} \gamma_j \quad (2.8)$$

Buna göre,

$$K = 2^{-2p} \binom{2p}{p} \quad (2.9)$$

şeklinde elde edilir. O halde artık dağılımın derecesi verilirse tek bilinmeyen  $\alpha$  parametresi olur.

### 2.3 Birinci Dereceden Sargan Dağılımı

(2.2) ifadesinde  $p=1$  için elde edilen sonuca birinci dereceden "Sargan Dağılımı" denir. Yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{\alpha e^{-\alpha|x|}}{2(1+\gamma_1)} (1 + \alpha \gamma_1 |x|) \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlıdır. Dağılımın ortalama ve varyansı,

$$E(x)=0, \quad \text{Var}(x) = \frac{2+6\gamma_1}{\alpha^2(1+\gamma_1)} \quad (2.11)$$

eşitlikleri ile belirlenir.

Yukardaki ifadelerde  $\gamma_1=1$  dir. Buna göre  $\alpha$  nın tahmini için  $n$  tanelik örnekte olabilirlik fonksiyonunun logaritması,

$$\ln(L) = n \cdot \ln \alpha - n \cdot \ln 2 - \alpha \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n \ln(1 + \alpha |x_i|) \quad (2.12)$$

dir. Buradan  $\alpha$  nın tahmini elde edilir.

Teorem:  $\alpha$  nın en yüksek olabilirlik tahminleyicisi yalnız bir tanedir.

İspat: Olabilirlik fonksiyonunun birinci türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{n}{\alpha} = \sum_{i=1}^n |x_i| - \sum_{i=1}^n (|x_i| / (1 + \alpha |x_i|)) \quad (2.13)$$

elde edilir.  $\alpha$  büyüdükçe sol taraf sıfıra yaklaşır, sağ taraf ise büyür. Böylece iki tarafın grafiği kesişir. Bundan dolayı  $\alpha$  nın tahmini tektir. Şimdi birinci dereceden Sargan dağılımı için moment türeten fonksiyonu belirleyelim,

$$\begin{aligned} M_x(t) &= E(e^{tx}) = \frac{\alpha}{2(1+\gamma_1)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|+tx} \cdot (1 + \alpha \gamma_1 |x|) dx \\ &= \frac{\alpha}{2(1+\gamma_1)} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{x(\alpha+t)} \cdot (1 - \alpha \gamma_1 x) dx + \int_0^{\infty} e^{-x(\alpha-t)} \cdot (1 + \alpha \gamma_1 x) dx \right] \end{aligned}$$

ayrı ayrı her integral ifadesinde kısmi integrasyon kuralı uygulanırsa moment türeten fonksiyon aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$M_x(t) = \frac{1}{2(1+\gamma_1)} \left[ \frac{\alpha}{\alpha+t} + \frac{\alpha}{\alpha-t} + \frac{\alpha^2 \gamma_1}{(\alpha+t)^2} + \frac{\alpha^2 \gamma_1}{(\alpha-t)^2} \right] \quad (2.14)$$

Buna göre birinci dereceden Sargan dağılımında ilk iki moment aşağıda verilmiştir:

$$M_1 = E(x) = M'_x(0) = 0 \quad (2.15)$$

$$M_2 = M''_x(0) = \frac{2+6\cdot\gamma_1}{\alpha^2(1+\gamma_1)}$$

Şimdi  $\alpha$  nın momentler cinsinden ifadesini elde edebiliriz 2.2 de verilen teoremler gereği ve (2.8) rekürans bağıntısına göre  $\gamma_1=1$  alınırsa  $M_2$  ifadesinde tek bilinmeyen  $\alpha$  olur. Buna göre,

$$\alpha = \sqrt{\frac{4}{M_2}} \quad (2.16)$$

#### 2.4 İkinci Dereceden Sargan Dağılımı

(2.2) ifadesinde  $p=2$  için elde edilen dağılıma ikinci dereceden "Sargan Dağılımı" denir. Yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{\alpha e^{-\alpha|x|}}{2(1+\gamma_1+2\gamma_2)} (1+\alpha\gamma_1|x|+\alpha^2\gamma_2x^2) \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlıdır. Dağılımın birikimli yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekildedir:

$$F(x) = \frac{e^{-\alpha|x|}}{2(1+\gamma_1+2\gamma_2)} (1+\gamma_1+\alpha|x|+2\gamma_2(\frac{\alpha^2x^2}{2} + \alpha|x|+1))$$

Dağılımın ortalama ve varyansı,

$$E(x)=0, \quad \text{Var}(x) = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{2+6\gamma_1+12\gamma_2}{1+\gamma_1+2\gamma_2} \quad (2.18)$$

eşitlikleri ile belirlenir. Yukarda verilen ifadelerde  $\gamma_1=1$ ,  $\gamma_2=1/3$  dir. Buna göre  $\alpha$  nın tahmini için n tanelik örnekte olabirlik fonksiyonunun logaritması,

$$\ln(L) = n \cdot \ln \alpha - n \cdot \ln 2 - n \cdot \ln(1 + \gamma_1 + 2\gamma_2) - \alpha \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n \ln(1 + \alpha \gamma_1 |x_i| + \alpha^2 \gamma_2 x_i^2)$$

$$\ln(L) = n \ln \alpha - n \ln 6 - \alpha \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n \ln(1 + \alpha |x_i| + \frac{\alpha^2}{2} x_i^2) \quad (2.19)$$

dir. Buradan  $\alpha$  nın tahmini elde edilir (Goldfeld and Quandt 1981).

Şimdi de ikinci dereceden Sargan dağılımı için moment türeten fonksiyonu belirleyelim,

$$\begin{aligned} M_x(t) = E(e^{tx}) &= \frac{\alpha}{2(1 + \gamma_1 + 2\gamma_2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x| + tx} \cdot (1 + \alpha \gamma_1 |x| + \alpha^2 \gamma_2 x^2) \\ &= \frac{\alpha}{2(1 + \gamma_1 + 2\gamma_2)} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{x(\alpha + t)} \cdot (1 - \alpha \gamma_1 x + \alpha^2 \gamma_2 x^2) dx + \int_0^{\infty} e^{-x(\alpha - t)} (1 + \alpha \gamma_1 x + \alpha^2 \gamma_2 x^2) dx \right] \end{aligned}$$

ayrı ayrı her integral ifadesinde kısmi integrasyon kuralı uygulanırsa moment türeten fonksiyon aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} M_x(t) &= \frac{1}{2(1 + \gamma_1 + 2\gamma_2)} \left( \frac{\alpha}{\alpha + t} + \frac{\alpha}{\alpha - t} + \frac{\alpha^2 \gamma_1}{(\alpha + t)^2} + \frac{\alpha^2 \gamma_1}{(\alpha - t)^2} + \frac{\alpha^3 \gamma_2}{(\alpha + t)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha^3 \gamma_2}{(\alpha - t)^3} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Buna göre İkinci dereceden Sargan dağılımında ilk iki moment aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$M_1 = E(x) = M'_x(0) = 0 \quad (2.21)$$

$$M_2 = E(x^2) = M''_x(0) = \frac{1}{\alpha^2} \left[ \frac{2 + 6\gamma_1 + 12\gamma_2}{1 + \gamma_1 + 2\gamma_2} \right]$$

Şimdi  $\alpha$  nın momentler cinsinden ifadesini elde edebiliriz:

2.2 de verilen teoremler gereği ve (2.8) rekürans bağıntısına göre  $\gamma_1=1$  ,  $\gamma_2=1/3$  alınırđa  $M_2$  ifadesinde tek bilinmeyen  $\alpha$  olur. Buna göre,

$$\alpha = \sqrt{\frac{9}{2M_2}} \quad (2.22)$$

elde edilir.

### 3. NORMAL DAĞILIMA YAKLAŞIM OLARAK SARGAN

Normal dağılıma yaklaşım olarak Sargan dağılımlarından birini düşünme gereği genellikle bir hesaplama kolaylığı sağlamak amacıyla olmuştur. Şöyle ki, pek çok modelde olabilirlik fonksiyonu hataların dağılımının Birikimli dağılım fonksiyonunu içerir. Hataların dağılımı Normal dağılım varsayıldığında Normal dağılımın Birikimli dağılım fonksiyonu olabilirlik fonksiyonlarında ortaya çıkacaktır. Normal dağılımın Birikimli dağılım fonksiyonu ise ancak Nümerik Analiz metotları ile değerlendirilebilir. Dolayısı ile bu değerlendirme değerleri de kesin değerler değil yaklaşık değerlerdir. Bundan dolayı Birikimli dağılım fonksiyonu analitik olarak değerlendirilebilen bir dağılım düşünülürse hem integralinin kolayca alınabilmesi sağlanır hem de Nümerik metod kullanma gereği ortadan kalkacağından hesaplama kolaylığı sağlanmış olur. Sargan dağılımının ilk iki dereceden ifadeleri bu sorunları giderecek nitelikte gözükmetedir.

Bu durumda hangi dereceden Sargan dağılımının Normal dağılıma iyi bir yaklaşım olduğu belirlenmelidir. Bunun için (2.2) ile tanımlanan Sargan dağılımı ile Normal dağılım değerleri karşılaştırılmıştır. Bu çalışmada işlem kolaylığı için Standart Normal dağılım ile karşılaştırma yapılmıştır. Sargan dağılımının tek parametresi  $\alpha$  nın tahminlenmesinde ise önceki bölümde anlatılan yol izlenmiştir.

Standart Normal dağılım ve ilk 5 dereceden Sargan dağılımlarında aynı apsislere karşılık gelen ordinatlar ÇİZELGE 3.1 de, aynı ifadelerin birikimli dağılımlarında aynı apsislere karşılık ordinat değerleri de ÇİZELGE 3.2 de verilmiştir.

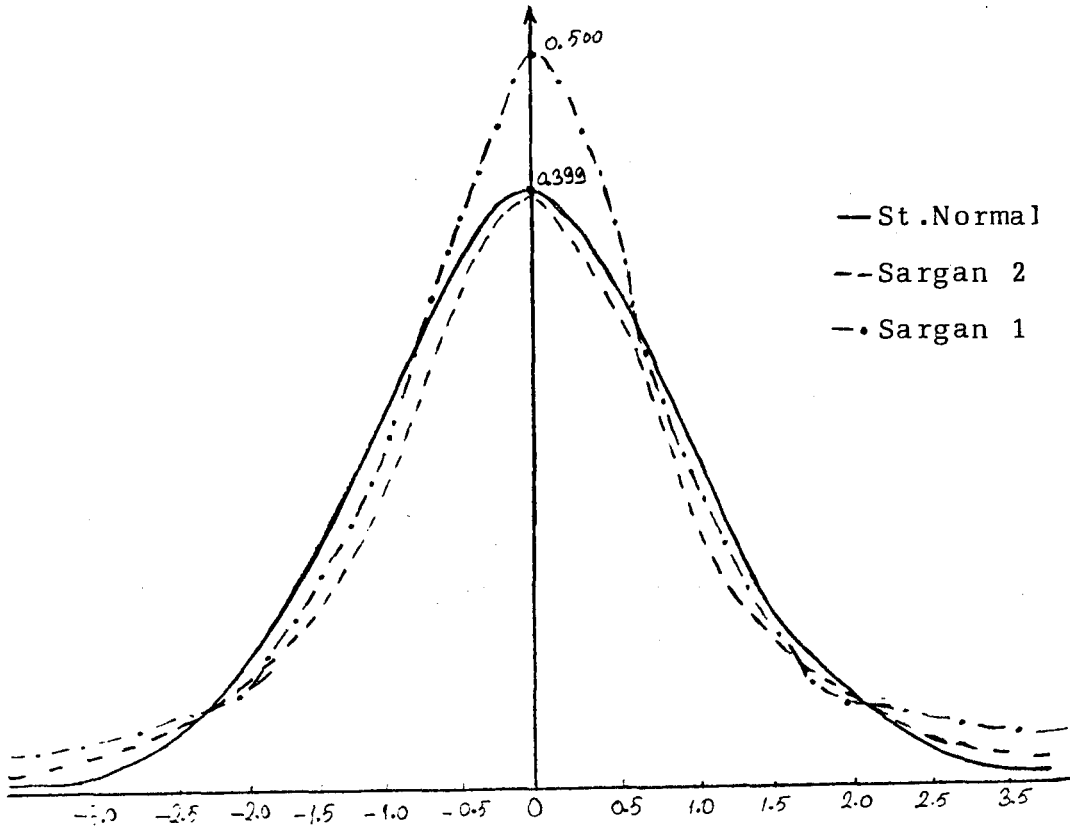


ÇİZELGE 3.1 Standart Normal dağılım ve ilk 5 dereceden Sargan dağılımında olasılık yoğunluk fonksiyonlarına ait karşılaştırma.

x	St.Normal	Sargan 1	Sargan 2	Sargan 3	Sargan 4	Sargan5
0.0	0.399	0.500	0.398	0.329	0.280	0.245
0.5	0.352	0.368	0.335	0.295	0.260	0.232
1.0	0.242	0.203	0.220	0.220	0.211	0.198
1.5	0.130	0.100	0.125	0.143	0.152	0.154
2.0	0.054	0.046	0.064	0.085	0.100	0.110
2.5	0.018	0.020	0.031	0.046	0.061	0.074
3.0	0.004	0.009	0.014	0.024	0.036	0.047
3.5	0.001	0.004	0.006	0.012	0.020	0.028
4.0	0.000	0.002	0.003	0.006	0.010	0.016

ÇİZELGE 3.2 Standart Normal dağılım ve ilk 5 dereceden Sargan dağılımında Birikimli dağılım fonksiyonlarına ait karşılaştırma.

x	St.Normal	Sargan 1	Sargan 2	Sargan 3	Sargan 4	Sargan5
0.0	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
0.5	0.691	0.724	0.688	0.658	0.637	0.620
1.0	0.841	0.865	0.827	0.788	0.755	0.728
1.5	0.933	0.938	0.912	0.879	0.846	0.816
2.0	0.977	0.973	0.958	0.935	0.908	0.882
2.5	0.994	0.988	0.981	0.967	0.948	0.928
3.0	0.999	0.995	0.991	0.984	0.972	0.957
3.5	1.000	0.998	0.996	0.992	0.985	0.976
4.0	1.000	0.999	0.998	0.996	0.993	0.987



ŞEKİL 3.1 St.Normal dağılım ve Sargan 1, Sargan 2 dağılımlarının yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri.

Çizelge 3.1 ve 3.2 ile Şekil 3.1 incelenecek olursa özellikle Sargan 2 dağılımının Normal dağılıma iyi bir yaklaşım olduğu, bunu ise Sargan 1 dağılımının izlediği görülür. Sargan 1 de Sargan 2 ya nazaran sivrilik daha fazladır. Diğer dereceden Sargan dağılımlarında ise Normal dağılıma yaklaşım uygun bir durum göstermemektedir.

### 3.1 Diğer Yaklaşımlar Arasında Sargan'ın Durumu

Sargan dağılımları Normal dağılıma yaklaşımlardan sadece biridir. Zaman zaman Normal dağılıma yaklaşım olarak çeşitli dağılımlar kullanılır. Örneğin, örnek büyüklüğü 32 den küçük olması durumunda (küçük örneklerde) Normal dağılım yerine Student dağılımının kullanılması gibi.

Genellikle yaklaşımlarda, kullanılan yaklaşımın daha geniş bir aralığa yayılması ve kuyruk kısımlarının şişkin olması önemlidir.

Normal dağılıma yaklaşım olarak düşünülebilecek dağılımlardan bazıları ve ilgili özellikleri ÇİZELGE 3.4 de sunulmuştur (Missiakoulis, 1983).

ÇİZELGE 3.4 Normal dağılıma yaklaşım olarak çeşitli alternatiflerin durumu.

Alternatif	Simetrik mi?	Tek Modlu mu?	$(-\infty, \infty)$ Tanımlı mı?	İntegrali alınabilir mi?
Sargan	Evet	Evet	Evet	Evet
Weibull	Evet	Hayır	Evet	Evet
Laplas	Evet	Evet	Evet	Evet
Kosinüs	Evet	Evet	Hayır	Evet
Fisher	Hayır	Evet	Hayır	Hayır

Buna göre Sargan dağılımı olası alternatifler içinde  $(-\infty, \infty)$  aralığında tanımlı, tek modlu, simetrik ve kapalı şekilde integrali alınabilir en iyi alternatif olarak görülmektedir.

### 3.2 Sargan Yaklaşımında En Yüksek Olabilirlik Tahminlerinin Asimtotik Sapması

Daha önce de belirtildiği gibi (2.2) de verilen yoğunluklar ailesinin ilk iki dereceden dağılımları Normal dağılıma iyi birer yaklaşım göstermektedir. Şimdi bu iki yoğunluğun bağımlı bir değişken içeren bir modelde Normal varsayımının doğru ve yanlış olduğu durumlarda tahminlerin güçlülüğünü inceleyelim.

İşlem kolaylığı sağlamak için bağımsız değişkenin sadece bir sabit terim olması durumunu ele alalım.  $y$  ortalaması  $\mu$ , varyansı 1 olan simetrik bir dağılıma sahip bir şans örneği olsun.  $G$ ,  $y$  nin Birikimli dağılım fonksiyonu olmak üzere  $\mu$  nün en yüksek olabilirlik tahmini  $G$  nin durumuna bağlıdır.  $y$  nin gerçek Birikimli dağılım fonksiyonu  $F$  ile verilsin.  $x$  Birikimli dağılım fonksiyonu  $F$  olan,  $E(x)=0$ ,  $Var(x)=1/b^2$  olan ve  $y=\mu+bx$  ile ifade edilen bir değişken olsun. Dağılımı  $G$  kabul ederek elde edilen  $\mu$  nün en yüksek olabilirlik tahmininin asimtotik sapması  $\mu-\tilde{\mu}$  olup,  $\tilde{\mu}$ ,  $\mu$  nün en yüksek olabilirlik tahmininin olasılık limitidir ve

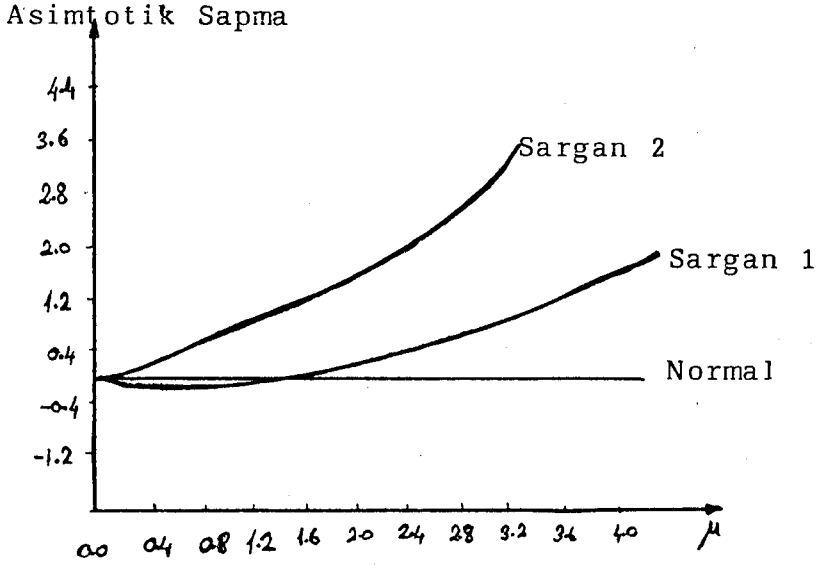
$$G(\tilde{\mu})-F(\mu/b)=0$$

denkleminin sayısal çözümü ile elde edilir (Missiakoulis, 1983).

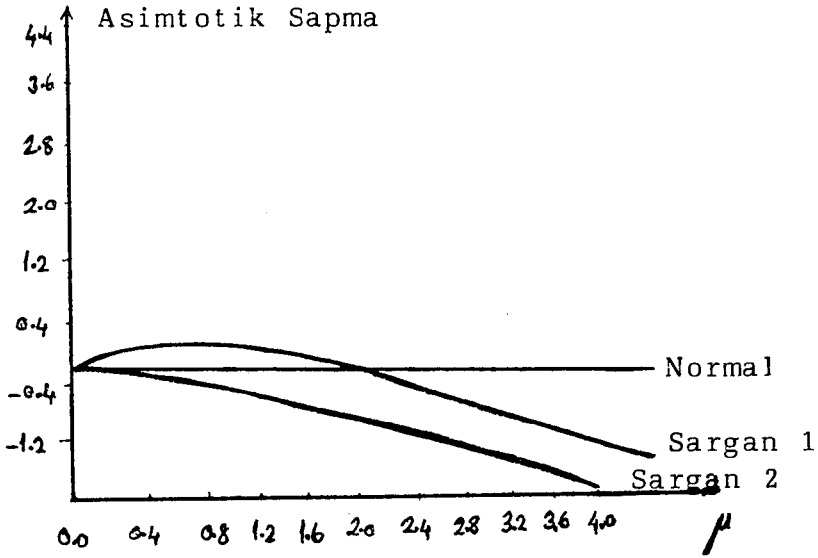
Gerçek Birikimli fonksiyon  $F$  Normal ise, Sargan 1 ve Sargan 2 kabul edilmiş ise en yüksek olabilirlik tahmininin asimtotik sapmasının Grafiği Şekil 3.2 de verilmiştir.

Şekil 3.3 te ise, gerçek Birikimli dağılım fonksiyonu  $F$  Birinci veya İkinci dereceden Sargan olup, Normal dağılım kabul edilmişse en yüksek olabilirlik tahmininin asimtotik sapmasının grafiği verilmiştir.

Şekil 3.2 ve 3.3 deki grafiklerden  $\mu$  nün 0 ve 1.7 değerleri için hiçbir asimtotik sapmanın olmadığı görülür. Ayrıca Birinci dereceden Sargan için (0,1.7) aralığında en yüksek olabilirlik tahminlerinin Normale çok yakın değerler olduğu söylenebilir.



ŞEKİL 3.2 Gerçek dağılım Normal, Sargan 1 ve Sargan 2 kabul edilmişse sapmalar.



ŞEKİL 3.3 Gerçek dağılım Sargan 1 veya Sargan 2 ise, Normal kabul edilmişse sapmalar.

### 3.3 Hata Dağılımının Normal veya Sargan Dağılımı Kabul Edilerek İncelenmesi

Bu kısımda hatalar gerçekte Sargan dağılımına uydukları halde Normal varsayılırsa ve hatalar gerçekte Normal dağılıma uydukları halde Sargan varsayılırsa parametre tahminlerine hangi ölçüde etki edebilecekleri araştırılmıştır. İncelemeler iki ayrı regresyon modelinde yapılmıştır:

#### 3.3.1 Regresyon Modeli x Eksenine Paralel Bir Doğru ise,

Popülasyon ortalamasını tahmin etmeğe çalıştığımız için ilk önce modelin sabit bir terimden oluştuğu durumu göz önüne alalım. Regresyon modeli,

$$y = \mu + u_i \quad (i=1, \dots, n)$$

şeklinde olsun. Böyle bir model sınırlı bağımlı değişken bir modeldir.

Düşünülen modelde hatalar gerçekte Normal dağılıma uydukları halde Birinci dereceden Sargan varsayılırsa ne olur?

Birinci dereceden Sargan dağılımı için olabilirlik fonksiyonunun logaritmasını ele alalım:

$$\ln(L) = m \cdot \ln 4 - \alpha \sum_{i=1}^m |y_i - \mu| + \sum_{i=1}^m \ln(1 + \alpha |y_i - \mu|) + (n-m) \cdot \ln F(-\mu)$$

Burada  $y_1, y_2, \dots, y_m$  pozitif gözlemleri  $y_{m+1}, \dots, y_n$  ise sıfır olan (dağılıma uyan) gözlemlerdir.  $F^n$  ise Birinci dereceden Sargan dağılımının Birikimli dağılım fonksiyonu olup aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{4} e^{-\alpha x} \cdot (2 + \alpha x) & x \geq 0 \text{ ise} \\ \frac{1}{4} e^{\alpha x} \cdot (2 - \alpha x) & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olabilirlik fonksiyonunun  $\alpha$  ve  $\mu$  için kısmi türevlerini alarak bu parametrelerin tahminlerini belirleyelim:

$$\frac{\partial \text{Ln } L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{+} (y_i - \beta' x_i) + \sum_{-} (y_i - \beta' x_i) + \sum_{+} \frac{y_i - \beta' x_i}{1 + \alpha (y_i - \beta' x_i)} - \sum_{-} \frac{y_i - \beta' x_i}{1 - \alpha (y_i - \beta' x_i)}$$

$$\frac{\partial \text{Ln } L}{\partial \beta_j} = \alpha \sum_{+} x_{ij} - \alpha \sum_{-} x_{ij} + \sum_{+} \frac{-\alpha x_{ij}}{1 + \alpha (y_i - \beta' x_i)} + \sum_{-} \frac{\alpha x_{ij}}{1 - \alpha (y_i - \beta' x_i)}$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln } L}{\partial \alpha^2} = \frac{-n}{\alpha^2} - \sum_{+} \frac{(y_i - \beta' x_i)^2}{(1 + \alpha (y_i - \beta' x_i))^2} - \sum_{-} \frac{(y_i - \beta' x_i)^2}{(1 - \alpha (y_i - \beta' x_i))^2}$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln } L}{\partial \beta_j^2} = - \sum_{+} \frac{\alpha^2 x_{ij}^2}{(1 + \alpha (y_i - \beta' x_i))^2} - \sum_{-} \frac{\alpha^2 x_{ij}^2}{(1 - \alpha (y_i - \beta' x_i))^2}$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln } L}{\partial \alpha \partial \beta_j} = \sum_{+} x_{ij} - \sum_{-} x_{ij} - \sum_{+} \frac{x_{ij}}{(1 + \alpha (y_i - \beta' x_i))^2} + \sum_{-} \frac{x_{ij}}{(1 - \alpha (y_i - \beta' x_i))^2}$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln } L}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = \sum_{+} \frac{\alpha^2 x_{ij} \cdot x_{ik}}{(1 + \alpha (y_i - \beta' x_i))^2} + \sum_{-} \frac{\alpha^2 x_{ij} \cdot x_{ik}}{(1 - \alpha (y_i - \beta' x_i))^2}$$

En yüksek olabilirlik tahminlerinin asimtotik dağılımını bulmak için kısmi türevleri  $n$  ile bölerek olasılık limitlerini bulup aşağıdaki şekilde Varyans-Kovaryans matrisi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} (2+0.439.e)/\alpha^3 & 0 \\ 0 & 0.109.\alpha^2.e(X'X)/n \end{bmatrix}$$

Böylece  $\sqrt{n} (\hat{\beta}_{ML} - \beta)$  nın asimtotik dağılımı,

$$N(0, (3.375/\alpha^2).(X'X/n)^{-1})$$

elde edilir (Goldfeld and Quandt, 1981).

Buna göre asimtotik yeterlik  $\sim 0.84$  olarak bulunur.

$$\tilde{x} = \text{plim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \text{plim} \frac{1}{n_+} \sum_{+} x_i = \text{plim} \frac{1}{n_-} \sum_{-} x_i$$

Burada son iki eşitlik  $x$  in  $u$  dan bağımsız olduğu gerçeğinden çıkmaktadır. Aynı şekilde aşağıdaki eşitlikleri de yazabiliriz

$$\begin{aligned} \text{plim} \frac{1}{n_+} \sum_{+} \left( \frac{1}{1+\tilde{\alpha} u_i} x_i \right) &= E \left( \frac{1}{1+\tilde{\alpha} u} x \mid u > 0 \right) \\ &= E \left( \frac{1}{1+\tilde{\alpha} u} \mid u > 0 \right) \cdot \tilde{x} \end{aligned}$$

$x$  ,  $u$  dan bağımsız olduğu için  $n_-$  içeren için de benzer ifade yazılabilir. Böylece (3.2) aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} P(u > 0) \cdot \tilde{x} - \tilde{\alpha} P(u < 0) \cdot \tilde{x} - \tilde{\alpha} P(u > 0) \cdot E \left( \frac{1}{1+\tilde{\alpha} u} \mid u > 0 \right) \cdot \tilde{x} \\ + \tilde{\alpha} P(u < 0) \cdot E \left( \frac{1}{1-\tilde{\alpha} u} \mid u < 0 \right) \cdot \tilde{x} = 0 \end{aligned}$$

sonuç olarak sıfır civarında simetrik olarak dağılan  $u$  bu denklemi sağlar. Böylece (3.1) ve (3.2)  $\tilde{\beta} = \beta$  için sağlanır. ( $\tilde{\alpha}$  için (3.3) sağlanır) O halde Sargan en yüksek olabilirlik tahminleri tutarlıdır.

Hatalar Birinci dereceden Sargan dağılımına uyarsa bu durumda incelenebilecek üç sorun vardır:

- 1) En yüksek olabilirlik tahminleri dönüşümlü olarak hesaplanabilir mi?
- 2) En yüksek olabilirlik tahminleri sınırlı örneklerde olumlu sonuçlar verebilir mi?
- 3) Yeterlik ve Asimtotik yeterlik açısından En yüksek olabilirlik tahminleri nasıl karşılaştırılabilir?

Şimdi yeterlik ve asimtotik yeterlik açısından en yüksek olabilirlik tahminleri ile en küçük kareler tahminlerini karşılaştıralım:

$\sqrt{n} (\hat{\beta}_{ML} - \beta)$  en yüksek olabilirlik tahminlerinin asimtotik dağılımı  $N(0, (3.375/\alpha^2) \cdot (X'X/n)^{-1})$  dir.

Model olarak  $y_i = \beta' x_i + u_i$  alalım,  $\sum_{+}$  ve  $\sum_{-}$  sembolleri  $y_i - \beta' x_i$  nin pozitif ve negatif toplamlarını göstermek üzere,



Hatalar gerçekte Birinci dereceden Sargan dağılımına uydukları halde Normal dağılıma uydukları varsayılırsa u'nun(Hataların) ilk iki momentleri aşağıdaki şekilde olur:

$$E(u|u>x) = \begin{cases} \frac{e^{-\alpha x} \cdot (\alpha x^2 - 3x - 3/\alpha)}{4 - e^{-\alpha x} \cdot (2 + \alpha x)} & x \geq 0 \text{ ise} \\ \frac{\alpha x^2 - 3x - 3/\alpha}{2 - \alpha x} & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$(u^2|u>x) = \begin{cases} \frac{\frac{16}{\alpha^2} - 4e^{-\alpha x} \cdot (\frac{\alpha}{4} x^3 + x^2 + \frac{2}{\alpha} x + \frac{2}{\alpha^2})}{4 - e^{-\alpha x} \cdot (2 + \alpha x)} & x \geq 0 \text{ ise} \\ \frac{-\alpha x^3 + 4x^2 - \frac{8}{\alpha} x - \frac{8}{\alpha^2}}{2 - \alpha x} & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

### 3.3.2 Doğrusal Regresyon Modeli

Regresyon modeli,

$$y_i = \beta' x_i + u_i \quad (i=1, \dots, n)$$

şeklinde olsun.  $u_i$  Hata terimleri bağımsız ve sıfır ortalamalıdır.

Hatalar gerçekte Normal dağılımlı fakat Birinci dereceden Sargan kabul edilirse ne olur?

Sapma açısından düşünülürse hiçbir sapma olmaz. Çünkü sonuçlar hata dağılımının simetrik olmasına bağlı olup, Normal olup olmamaya bağlı değildir. Bundan dolayı elde edeceğimiz sonuçlar tutarlı olacaktır. Sıfır civarında simetrik herhangi bir dağılıma sahip hatalar için Sargan enyüksek olabilirlik tahminleri tutarlıdır.

Birinci dereceden Sargan dağılımının olabilirlik fonksiyonunu alarak çözümlerim:

$$\text{LnL} = n \text{Ln} \alpha - n \text{Ln} 4 - \alpha \sum_{i=1}^n |y_i - \beta' x_i| + \sum_{i=1}^n \text{Ln}(1 + \alpha |y_i - \beta' x_i|)$$

En yüksek olabilirlik fonksiyonunun  $\alpha$  ve  $\beta$  ya göre kısmi türevlerini alıp sıfıra eşitlersek,

$$\frac{n}{\hat{\alpha}} - \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{\beta}' x_i| + \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - \hat{\beta}' x_i|}{1 + \hat{\alpha} |y_i - \hat{\beta}' x_i|} = 0$$

$$\hat{\alpha} \sum_{+} x_i - \hat{\alpha} \sum_{-} x_i - \hat{\alpha} \sum_{+} \frac{1}{1 + \hat{\alpha} (y_i - \hat{\beta}' x_i)} x_i + \hat{\alpha} \sum_{-} \frac{1}{1 - \hat{\alpha} (y_i - \hat{\beta}' x_i)} x_i = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Bunları  $n$  ile bölerek olasılık limitlerini elde edebiliriz.

$\tilde{\alpha}$  ve  $\tilde{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}$  ve  $\hat{\beta}$  nin olasılık limitlerini göstermek üzere,

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}} - \text{plim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \tilde{\beta}' x_i| + \text{plim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - \tilde{\beta}' x_i|}{1 + \tilde{\alpha} |y_i - \tilde{\beta}' x_i|} = 0 \quad (3.1)$$

$$\tilde{\alpha} \text{plim} \frac{n_{+}}{n} - \text{plim} \frac{1}{n_{+}} \sum_{+} x_i - \tilde{\alpha} \text{plim} \frac{n_{-}}{n} + \text{plim} \frac{1}{n_{-}} \sum_{-} x_i$$

$$- \tilde{\alpha} \text{plim} \frac{n_{+}}{n} + \text{plim} \frac{1}{n_{+}} \sum_{+} \frac{1}{1 + \tilde{\alpha} (y_i - \tilde{\beta}' x_i)} x_i$$

$$+ \tilde{\alpha} \text{plim} \frac{n_{-}}{n} - \text{plim} \frac{1}{n_{-}} \sum_{-} \frac{1}{1 - \tilde{\alpha} (y_i - \tilde{\beta}' x_i)} x_i = 0 \quad (3.2)$$

Burada  $n_{+}$ ,  $\sum_{+}$  daki  $n_{-}$ ,  $\sum_{-}$  deki terim sayısıdır.

Bu denklem kümesi oldukça karmaşıktır. Ancak  $\hat{\beta}$  nin tutarlı olduğunu göstermek için (3.1) ve (3.2) nin  $\tilde{\beta} = \beta$  (veya  $\tilde{\alpha}$  için) ile sağlandığını göstermemiz gerekir.

$\beta = \tilde{\beta}$  için (3.1) kolaylıkla,

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}} - E(|u|) - E\left(\frac{|u|}{1 + \tilde{\alpha} |u|}\right) = 0 \quad (3.3)$$

olarak gösterilir.

Eğer  $u \sim N(0, \sigma^2)$  ise birinci beklenen değeri  $\sqrt{2/\pi} \sigma$  olarak belirlemek kolaydır. İkinci beklenen değer için  $\tilde{\alpha}$  için bir pozitif çözüm olduğuna göre bir değer olduğunu söyleyebiliriz.

(3.2) yi  $\tilde{\beta} = \beta$  ile belirlemek için şu tanımlamayı yapalım:

$$\frac{\partial \text{Ln}(L)}{\partial \alpha} = \frac{m}{\hat{\alpha}} - \sum_{i=1}^m |y_i - \hat{\mu}| + \sum_{i=1}^m \frac{|y_i - \hat{\mu}|}{1 + \hat{\alpha} |y_i - \hat{\mu}|} + (n-m) \cdot g(\hat{\alpha}, \hat{\mu}) = 0$$

$$\frac{\partial \text{LN}(L)}{\partial \mu} = \hat{\alpha} (m_+ - m_-) - \hat{\alpha} \sum_{+} \frac{1}{1 + \hat{\alpha} (y_i - \hat{\mu})} + \hat{\alpha} \sum_{-} \frac{1}{1 - \hat{\alpha} (y_i - \hat{\mu})}$$

$$- (n-m) \cdot f(-\hat{\mu}) / F(-\hat{\mu}) = 0$$

Burada  $f$  Sargan dağılımının yoğunluk fonksiyonunu ve  $g$  ise aşağıdaki şekilde ifade edilen bir fonksiyondur.

$$g(\alpha, \mu) = \begin{cases} -\mu + \mu / (2 + \alpha \mu) & \mu \geq 0 \text{ ise} \\ \frac{e^{\alpha \mu} \cdot (\alpha \mu^2 - \mu)}{4 - e^{2\alpha \mu} \cdot (2 - \alpha \mu)} & \mu < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$m_+$  ve  $m_-$  ilgili gözlem sayıları olmak üzere  $\sum_{+}$ ,  $y > 0$

ve  $y > \mu$  üzerine toplama;  $\sum_{-}$ ,  $y > 0$  ve  $y < \mu$  üzerine toplamadır.

Şimdi de heriki tarafı  $m$  ile bölerek olasılık limitlerini elde edebiliriz:

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}} E(|y - \tilde{\mu}|, y > 0) - E\left(\frac{|y - \tilde{\mu}|}{1 + \tilde{\alpha} |y - \tilde{\mu}|} \mid y > 0\right) - \frac{P(y < 0)}{P(y > 0)} \cdot g(\tilde{\alpha}, \tilde{\mu}) = 0$$

$$\tilde{\alpha} \left[ (P(y \geq \tilde{\mu} \mid y > 0) - P(y < \tilde{\mu} \mid y < 0)) - \tilde{\alpha} P(y \geq \tilde{\mu} \mid y > 0) \cdot E\left(\frac{1}{1 - \tilde{\alpha} (y - \tilde{\mu})} \mid y \geq \tilde{\mu}, y > 0\right) \right.$$

$$\left. + P(y < \tilde{\mu} \mid y > 0) \cdot E\left(\frac{1}{1 - \tilde{\alpha} (y - \tilde{\mu})} \mid y < \tilde{\mu}, y > 0\right) - \frac{P(y < 0)}{P(y > 0)} \frac{f(-\tilde{\mu})}{F(-\tilde{\mu})} \right] = 0$$

Birinci dereceden Sargan dağılımının en yüksek olasılık tahminlerinin  $\tilde{\alpha}$  ve  $\tilde{\mu}$  olasılık limitleri yukarıda verilen eşitlikleri sağlarlar. Hatalar gerçekte Normal dağılıma uyduklarında bu eşitlikler değerlendirilerek sonuca gidilir.

#### 4. $\alpha$ 'NIN FARKLI BİR YOLLA BELİRLENMESİ VE BU DURUMUN PARAMETRE TAHMİNLERİNE ETKİLERİ

Sargan dağılımı ailesi Normal dağılıma yaklaşım olarak düşünüldüğüne göre  $\alpha$  parametresini belirlerken Normal dağılım fonksiyonunun grafiğinin de göz önünde bulundurulması gerekir.

Bu düşünceden hareketle Goldfeld, Quandt ve Missiakoulis' in  $\alpha$  yı belirlemelerinden farklı olarak bu çalışmada Standart Normal dağılım ve Sargan dağılım fonksiyonlarının sıfır için aynı ordinatı vermelerini sağlayan  $\alpha$  değeri alınmıştır.

$f(x)$  St.Normal dağılımı  $g(x)$  Sargan dağılımını göstermek üzere,

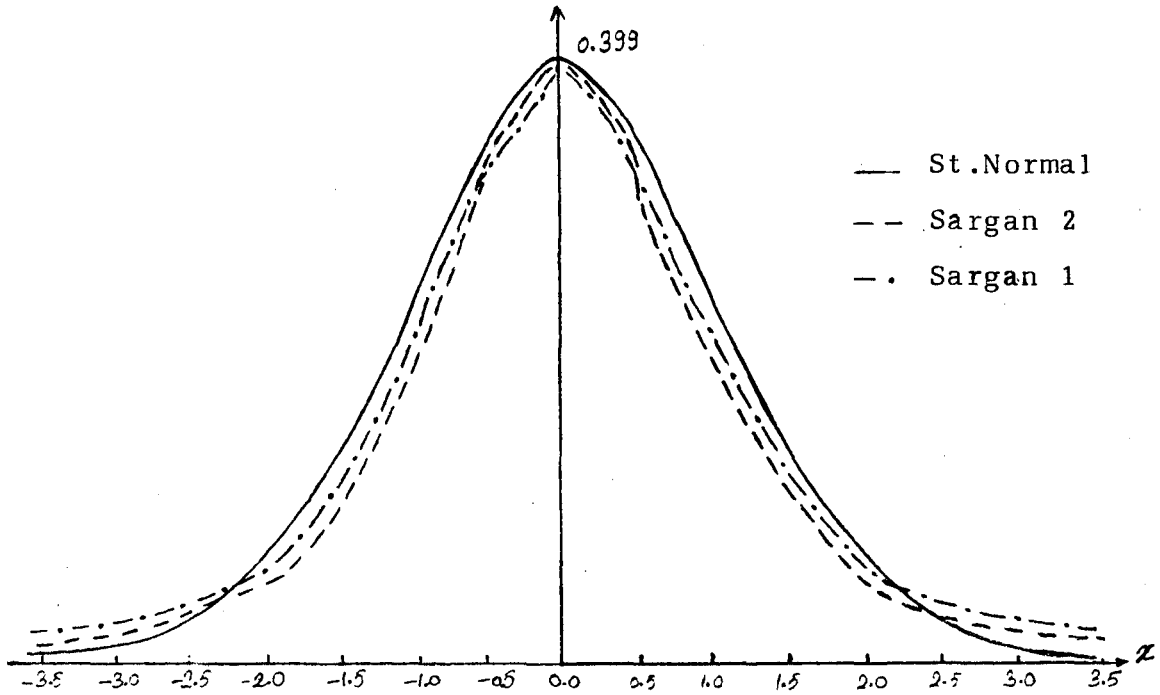
$$f(0)=g(0)$$

eşitliğini sağlayan  $\alpha$  değerleri birinci dereceden Sargan için  $\alpha = 1.596$ , ikinci dereceden Sargan dağılımı için  $\alpha = 2.128$  elde edilmiştir. Bu  $\alpha$  değerlerinden Sargan 1 için bulunan Goldfeld, Quandt ve Missiakoulis'in  $\alpha$  değerlerinden küçük, Sargan 2 için bulunan  $\alpha$  değeri ise daha büyüktür.

$\alpha$  nın yeni tahminine göre Sargan 1 ve Sargan 2 dağılımlarının St.Normal dağılıma göre grafikleri Şekil 4.1 deki gibidir.

Sargan 1 ve Sargan 2 nin dağılım ve birikimli dağılım değerleri de Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2 de verilmiştir.

Şekil 4.1 den görüleceği gibi  $\alpha$  nın yeni değerleri Sargan 1 ile Sargan 2 arasındaki farklılığı azaltmış ve daha basit olmasından dolayı Sargan 1 in tercihlik kazanmasını sağlamıştır. Çizelge 4.1 ve 4.2 deki Sargan 1 ve Sargan 2 değerlerinin birbirine oldukça yakın olması da bu savı desteklemektedir. Artık St.Normal dağılım yerine yaklaşım olarak  $\alpha = 1.596$  değerli Sargan 1 dağılımı kullanılabilir. Bu durum yeni  $\alpha$  tahmininin diğer çalışmalardan farklı, olumlu bir yönüdür.



ŞEKİL 4.1 St.Normal dağılım ve Sargan 1, Sargan 2 dağılımlarının yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri.

ÇİZELGE 4.1 St.Normal dağılım ve yeni  $\alpha$  ya göre Sargan 1, Sargan 2 dağılım fonksiyonlarına ait karşılaştırma.

x	St.Normal	Sargan 1	Sargan 2
0.0	0.399	0.399	0.399
0.5	0.352	0.323	0.336
1.0	0.242	0.210	0.220
1.5	0.130	0.124	0.125
2.0	0.054	0.069	0.064
2.5	0.018	0.037	0.031
3.0	0.004	0.019	0.014
3.5	0.001	0.009	0.006
4.0	0.000	0.005	0.003

ÇİZELGE 4.2 St. Normal dağılım ve yeni  $\alpha$  ya göre Sargan 1, Sargan 2 dağılımlarının Birikimli dağılım fonksiyonlarının karşılaştırılması.

x	St.Normal	Sargan 1	Sargan 2
0.0	0.500	0.500	0.500
0.5	0.691	0.685	0.688
1.0	0.841	0.818	0.828
1.5	0.933	0.900	0.912
2.0	0.977	0.947	0.958
2.5	0.994	0.972	0.981
3.0	0.999	0.986	0.991
3.5	1.000	0.993	0.996
4.0	1.000	0.996	0.998

Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2 deki değerleri sonuç olarak veren bilgisayar programı Ek 2 de verilmiştir.

Şekil 4.1 ve Çizelge 4.1, Çizelge 4.2 dikkatlice incelenecek olursa Sargan 1 fonksiyonunda daha şişkin kuyrukların olduğu görülür. Dolayısıyla Normal dağılıma yaklaşım olarak Sargan 1 in düşünülmesi durumunda daha güçlü tahminler elde edilebileceği söylenebilir.

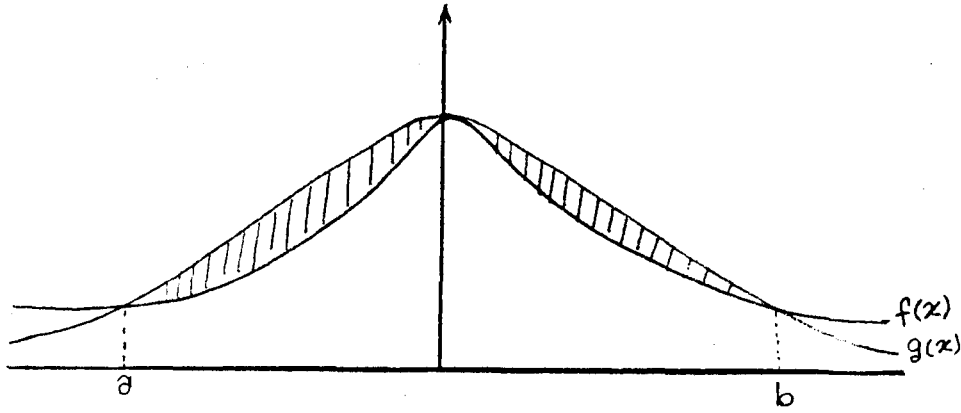
Şekil 4.1 de St.Normal dağılımın yoğunluk fonksiyonu ile Sargan 1 Dağılımının üç ortak noktasının olduğu görülür. Bunlar  $x=0.0$ ,  $x=1.62$  ve  $x=-1.62$  dir.

Ayrıca simetrik olarak noktalar arasındaki aralıkta Sargan dağılımı değerlerinin St.Normal dağılım değerlerinden daha küçük olduğu görülmektedir.

Görüldüğü gibi  $\alpha$  nın farklı şekilde belirlenmesi Sargan yaklaşımını tek bir fonksiyona indirgemekte ve bundan dolayı daha önceki çalışmalara göre tercih edilmesi gereken bir durum sergilemektedir.

#### 4.1 Sargan 1 Dağılımında Tahminlerin Güçlülüğü

Matematiksel bir özellik olarak Belirli İntegral yardımı ile verilen bir aralıkta iki nokta arasında kalan alan bulunabilir. İntegral sınırları iki eğrinin ortak noktalarıdır. Bu metodla sonuca gidilirken alanın negatif olmayacağı, dolayısı ile sonucun mutlak değerinin düşünülmesi gerektiğine dikkat edilmelidir.



Şekil 4.2 İki eğri arasında kalan alan.

Grafikleri Şekil 4.2 de verilen  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonları arasında kalan alan,

$$\text{Alan} = \left| \int_a^b (g(x) - f(x)) \cdot dx \right|$$

şeklinde bulunur.

İstatistiksel olarak Şekil 4.2 deki taralı alan bir olasılık ifade eder. Alınan iki dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonuna bu işlem uygulanırsa o aralıkta dağılımlar arasındaki farklılıkların olasılık ifadesi elde edilmiş olur. Standart Normal dağılım ve Sargan 1 dağılımlarına belirtilen işlemleri uygulayalım:

Sargan 1 ve Standart Normal için,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{1.62} e^{-(0.5x^2)} \cdot dx - \frac{\alpha}{4} \int_0^{1.62} e^{-\alpha|x|} \cdot (1 + \alpha|x|) dx = 0.033$$

elde edilir. Demek ki Sargan 1 dağılımı bu aralıkta Standart Normal dağılıma %93 olasılıkla yaklaşmaktadır.

Herhangi bir aralıktaki Sargan 1 yaklaşımını kolayca belirleyebilmek amacıyla Çizelge 4.3 te Sargan 1 dağılımına ait eğri alanları tablosu verilmiştir.



ÇİZELGE 4.3 SARGAN DAGILIMI EĞRİ ALANLARI



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0159	0.0199	0.0239	0.0279	0.0318	0.0358
0.1	0.0397	0.0437	0.0476	0.0515	0.0554	0.0593	0.0632	0.0671	0.0710	0.0748
0.2	0.0786	0.0825	0.0863	0.0900	0.0938	0.0976	0.1013	0.1050	0.1087	0.1124
0.3	0.1161	0.1197	0.1234	0.1270	0.1305	0.1341	0.1377	0.1412	0.1447	0.1482
0.4	0.1516	0.1551	0.1585	0.1619	0.1653	0.1686	0.1720	0.1753	0.1786	0.1818
0.5	0.1851	0.1883	0.1915	0.1947	0.1978	0.2009	0.2040	0.2071	0.2102	0.2132
0.6	0.2162	0.2192	0.2222	0.2251	0.2280	0.2309	0.2338	0.2366	0.2394	0.2422
0.7	0.2450	0.2478	0.2505	0.2532	0.2559	0.2585	0.2612	0.2638	0.2664	0.2690
0.8	0.2715	0.2740	0.2765	0.2790	0.2815	0.2839	0.2863	0.2887	0.2911	0.2934
0.9	0.2957	0.2980	0.3003	0.3026	0.3048	0.3070	0.3092	0.3114	0.3135	0.3157
1.0	0.3178	0.3199	0.3219	0.3240	0.3260	0.3280	0.3300	0.3320	0.3339	0.3358
1.1	0.3378	0.3396	0.3415	0.3434	0.3452	0.3470	0.3488	0.3506	0.3523	0.3541
1.2	0.3558	0.3575	0.3592	0.3609	0.3625	0.3642	0.3658	0.3674	0.3690	0.3705
1.3	0.3721	0.3736	0.3751	0.3766	0.3781	0.3796	0.3810	0.3825	0.3839	0.3853
1.4	0.3867	0.3880	0.3894	0.3907	0.3921	0.3934	0.3947	0.3960	0.3972	0.3985
1.5	0.3997	0.4010	0.4022	0.4034	0.4046	0.4058	0.4069	0.4081	0.4092	0.4103
1.6	0.4114	0.4125	0.4136	0.4147	0.4157	0.4168	0.4178	0.4187	0.4197	0.4207
1.7	0.4219	0.4228	0.4238	0.4247	0.4257	0.4266	0.4275	0.4285	0.4294	0.4302
1.8	0.4311	0.4320	0.4328	0.4337	0.4345	0.4354	0.4362	0.4370	0.4378	0.4386
1.9	0.4394	0.4401	0.4409	0.4416	0.4424	0.4431	0.4438	0.4446	0.4453	0.4460
2.0	0.4467	0.4473	0.4480	0.4487	0.4493	0.4500	0.4506	0.4513	0.4519	0.4525
2.1	0.4531	0.4537	0.4543	0.4549	0.4555	0.4561	0.4567	0.4572	0.4578	0.4583
2.2	0.4589	0.4594	0.4599	0.4604	0.4610	0.4615	0.4620	0.4625	0.4630	0.4634
2.3	0.4639	0.4644	0.4648	0.4653	0.4658	0.4662	0.4667	0.4671	0.4675	0.4679
2.4	0.4684	0.4688	0.4692	0.4696	0.4700	0.4704	0.4708	0.4712	0.4716	0.4719
2.5	0.4723	0.4727	0.4730	0.4734	0.4737	0.4741	0.4744	0.4748	0.4751	0.4754
2.6	0.4758	0.4761	0.4764	0.4767	0.4770	0.4773	0.4776	0.4779	0.4782	0.4785
2.7	0.4788	0.4791	0.4794	0.4796	0.4799	0.4802	0.4804	0.4807	0.4810	0.4812
2.8	0.4815	0.4817	0.4820	0.4822	0.4824	0.4827	0.4829	0.4831	0.4834	0.4836
2.9	0.4838	0.4840	0.4842	0.4845	0.4847	0.4849	0.4851	0.4853	0.4855	0.4857
3.0	0.4859	0.4861	0.4862	0.4864	0.4866	0.4868	0.4870	0.4872	0.4873	0.4875
3.1	0.4877	0.4878	0.4880	0.4882	0.4883	0.4885	0.4886	0.4888	0.4889	0.4891
3.2	0.4892	0.4894	0.4895	0.4897	0.4898	0.4900	0.4901	0.4902	0.4904	0.4905
3.3	0.4906	0.4908	0.4909	0.4910	0.4911	0.4912	0.4914	0.4915	0.4916	0.4917
3.4	0.4918	0.4919	0.4921	0.4922	0.4923	0.4924	0.4925	0.4926	0.4927	0.4928
3.5	0.4929	0.4930	0.4931	0.4932	0.4933	0.4934	0.4935	0.4935	0.4936	0.4937
3.6	0.4938	0.4939	0.4940	0.4941	0.4941	0.4942	0.4943	0.4944	0.4945	0.4945
3.7	0.4946	0.4947	0.4948	0.4948	0.4949	0.4950	0.4950	0.4951	0.4952	0.4952
3.8	0.4953	0.4954	0.4954	0.4955	0.4956	0.4956	0.4957	0.4958	0.4958	0.4959
3.9	0.4959	0.4960	0.4960	0.4961	0.4962	0.4962	0.4963	0.4963	0.4964	0.4964

#### 4.2 Sargan 1 Yaklaşımının Parametrelerin En Yüksek Olabilirlik Tahminlerine Etkisi ve Üstünlükleri

$E(x)=0$  ,  $Var(x)=1/b^2$  olmak üzere  $y= \mu +bx$  değişkenini düşünelim.  $\mu$  nün tahminini belirlemek için  $y$  nin Birikimli dağılım fonksiyonu bilinmelidir.  $\mu$  nün gerçek birikimli dağılım fonksiyonu  $F$  olsun,  $\mu$  nün  $G$  gibi birikimli dağılım fonksiyonuna göre En yüksek olabilirlik tahmini de  $\tilde{\mu}$  olsun.  $\mu - \tilde{\mu}$  ,  $\mu$  nün düşünülen birikimli dağılım fonksiyonuna göre asimtotik sapmasıdır.  $\tilde{\mu}$  ise daha önce belirtildiği gibi,

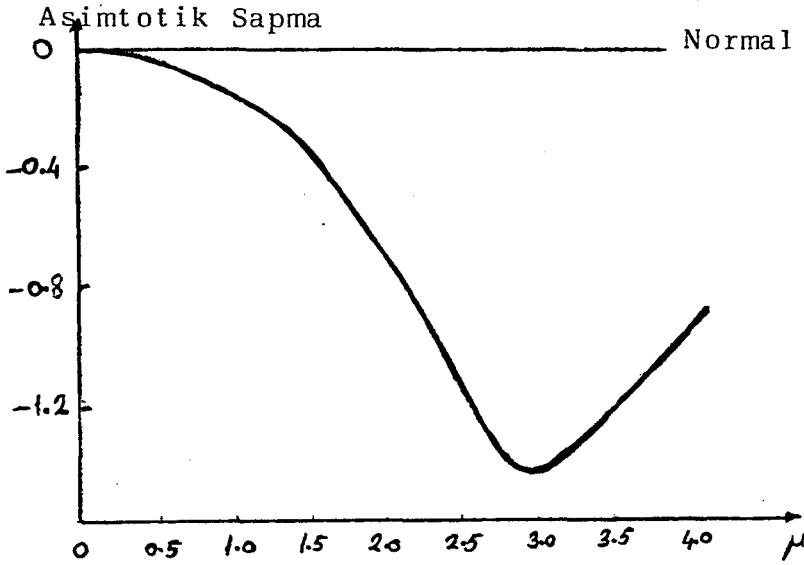
$$G(\tilde{\mu}) - F(\mu/b) = 0$$

denkleminin sayısal çözümü ile bulunur.

Gerçek dağılım Normal( $F$ ) ama Sargan 1 kabul edilirse( $G$ )

$\mu$	$\tilde{\mu}$	Asimtotik Sapma ( $\mu - \tilde{\mu}$ )
0	0	0
0.5	0.52	-0.02
1.0	1.12	-0.12
1.5	1.82	-0.32
2.0	2.65	-0.65
2.5	3.60	-1.10
3.0	4.60	-1.60
3.5	4.60	-1.10
4.0	4.60	-0.60

Yukardaki tablo incelenecek olursa  $(-1,0)$  ve  $(0,1)$  aralıklarında asimtotik sapmanın az olduğu özellikle kuyruk kısımlarda asimtotik sapmada mutlak değerce artış olduğu görülür. Ayrıca Sargan 1 e dayalı tahminlerin daha büyük oldukları ve bu durumun asimtotik sapmanın daima negatif olmasını sağladığı dikkati çekmektedir. Gerçek dağılım Normal olmasına karşın Sargan 1 kabul edildiğinde asimtotik sapmaların grafiği Şekil 4.3 te verilmiştir.



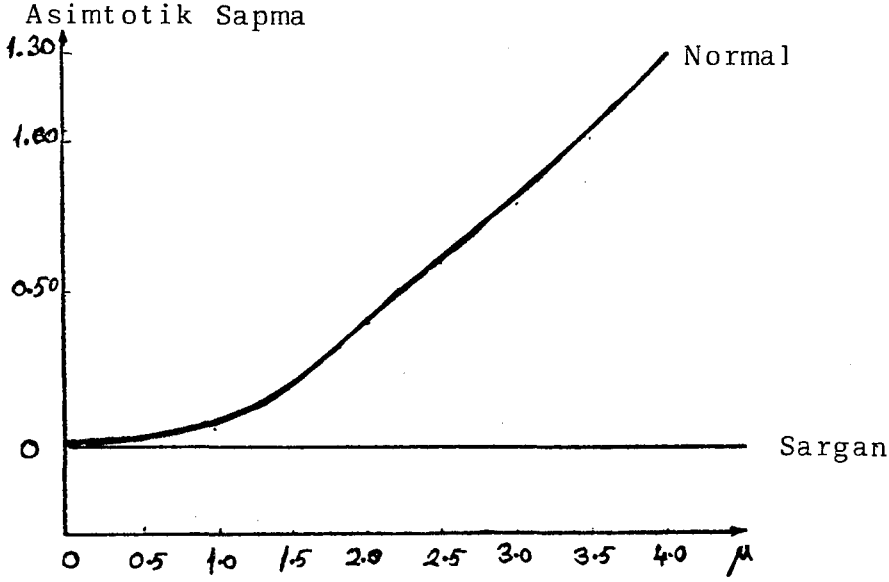
Şekil 4.3 Gerçek dağılım Normal (F), kabul edilen dağılım (G) Sargan 1 ise asimtotik sapmalar.

Gerçek dağılım Sargan 1 (F) ama Normal kabul edilirse (G)

$\mu$	$\tilde{\mu}$	Asimtotik Sapma ( $\mu - \tilde{\mu}$ )
0.0	0.0	0.00
0.5	0.48	0.02
1.0	0.91	0.09
1.5	1.28	0.22
2.0	1.62	0.38
2.5	1.91	0.59
3.0	2.21	0.79
3.5	2.48	1.02
4.0	2.81	1.29

Yukardaki tablo incelenecek olursa  $(-1,0)$  ve  $(0,1)$  aralıklarında asimtotik sapmanın az olduğu ve kuyruk kısımlarında asimtotik sapmada artış olduğu görülür. Ayrıca Normale dayalı tahminlerin daha küçük oldukları ve bu durumun asimtotik sapmanın daima negatif olmasını sağladığı dikkati çekmektedir.

Gerçek dağılım Sargan 1 olmasına karşın Normal kabul edildiğinde asimtotik sapmaların grafiği Şekil 4.4 de verilmiştir.



Şekil 4.4 Gerçek dağılım Sargan (F), Kabul edilen dağılım Normal ise asimtotik sapmalar.

Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 birlikte incelenecek olursa Gerçek dağılıma ve kabul edilen dağılıma bağlı olmaksızın  $(-1,0)$  ve  $(0,1)$  aralıklarında asimtotik sapmanın küçük olduğu görülmektedir. Ayrıca Gerçek dağılım Normal iken Sargan1 yaklaşımının, gerçek dağılım Sargan 1 iken Normal yaklaşımından asimtotik sapma yönünden özellikle kuyruk kısımlarda daha iyi olmadığı gözükmemektedir.

Sargan 1 yaklaşımı  $\beta$  nın en yüksek olasılık tahminlerinin asimtotik dağılımını değiştirmemekte ve aynı asimtotik yeterlik elde edilmektedir.

### 4.3 Hipotez Testlerine Uygulama

Bir önceki bölümde Sargan 1 dağılımının Standart Normal dağılıma iyi bir alternatif yaklaşım olduğu ispatlanmıştır. Çizelge 4.3 te ise Sargan 1 dağılımının tablo değerleri verilmiştir. Çizelge 4.3 ve Şekil 4.1 e bakarak Sargan 1 dağılımı ile yapılacak olan hipotez testlerinin Normal dağılım kullanılarak yapılan testlere nazaran daha iyimser olacağı söylenebilir. Şöyle ki: Sargan 1 dağılımında kuyruk kısımlar Normal dağılıma nazaran daha şişkin bir durum sergilemektedir. Dolayısı ile Sargan 1 dağılımı daha iyimser olacaktır. Bundan dolayı da Sargan 1 dağılımı ile yapılan hipotez testlerinde hipotezin RED edilmesi Normal dağılıma göre daha güçlüdür. Yani Normal dağılım kullanılarak RED edilemeyen bir hipotez Sargan 1 dağılımı da kullanılsa yine RED edilemez. Fakat Normal dağılım kullanıldığında RED edilen bir hipotez Sargan 1 dağılımı kullanıldığında KABUL görebilir. Bu da Sargan 1 dağılımı ile yapılan hipotez testlerinin daha iyimser olmasının bir göstergesidir. Bunun karşıtı olarak Sargan 1 dağılımı kullanılarak yapılan bir testte hipotez RED edilmişse Normal dağılım da kullanılsa yine RED edilecektir. Bu durum Sargan 1 dağılımı kullanılarak yapılan hipotez testlerinin RED dinin daha güvenilir olduğunu gösterir.

Hipotez testleri genellikle iki farklı önem düzeyinde yapılır: %5 (yani %95 eminlikte kararlar) ve %1 (yani %99 eminlikte kararlar).

İki yönlü test yapıldığı düşünülürse,

%5 önem düzeyinde: Normal dağılım kabulünde test istatistiğinin karşılaştırılacağı kritik değerler,  $z = -1.96$  ve  $z = 1.96$  dır.

Sargan 1 dağılımı kabul edildiğinde kritik değerler,  $z = -2.58$  ve  $z = 2.58$  dır.

%1 önem düzeyinde: Normal dağılım kabulünde test istatistiğinin karşılaştırılacağı kritik değerler,  $z = -2.58$  ve  $z = 2.58$  dır.

Sargan 1 dağılımı kabul edildiğinde kritik değerler,  $z = -3.77$  ve  $z = 3.77$  dır.

Dikkat edilirse her iki önem düzeyinde de Sargan 1 değerleri Normal dağılımdaki kritik değerlerden daha büyüktür. Kritik değerlerin daha büyük oluşu Sargan 1 dağılımı kullanılarak yapılan hipotez testlerini daha iyimser hale getirmektedir.

Özellikle örnekteki eleman sayısı az olduğunda hipotez testlerinin daha iyimser olması istenir. Ayrıca Sargan 1 dağılımı kullanıldığında hipotezin REDdinin daha güçlü olması ve birikimli dağılım değerlerini hesaplamada teorik kolaylıkları Sargan 1'in tercih nedeni olarak söylenebilir. Zaten hipotez testlerinde genellikle amacın sıfır hipotezinin reddine yönelik olduğu da düşünülürse Sargan 1 dağılımı kullanılarak hipotez testi yapmanın daha uygun olacağı söylenebilir.

Sargan 1 dağılımı kullanılarak yapılan bir hipotez testinde sıfır hipotezi RED edilmiş ise Normal dağılım kullanılsa da sonuç yine RED olacaktır.

Sargan 1 dağılımı kullanılarak yapılan bir hipotez testinde sıfır hipotezi KABUL edilmiş ise Normal dağılım kullanılsaydı Red edilmesi olasılığı aşağıdaki şekildedir:

$f(x)$  Standart Normal dağılım fonksiyonu,  $g(x)$  Sargan dağılım fonksiyonu olmak üzere,

%5 önem düzeyinde: Sargan 1 dağılımı kullanıldığında Kabul edilen bir hipotezin Normal dağılım kullanıldığında Red edilmesi olasılığı,

$$2. \int_{1.96}^{2.58} |f(x)-g(x)| .dx=0.05$$

elde edilir.

%1 önem düzeyinde: Sargan 1 dağılımı kullanıldığında Kabul edilen bir hipotezin Normal dağılım kullanıldığında Red edilmesi olasılığı,

$$2. \int_{2.58}^{3.77} |f(x)-g(x)| .dx=0.04$$

Görüldüğü gibi Sargan 1 dağılımı kullanıldığında RED edilen bir hipotez Normal dağılım da kullanılsa yine RED edilmektedir. Sargan 1 dağılımı kullanıldığında KABUL görmüş bir testin Normal dağılım kullanıldığında RED edilmesi olasılığı ise çok küçük bir olasılık değeri olmaktadır.

O halde hipotez testlerinde Sargan 1 dağılımının kullanılması tercih edilebilir. Çünkü Sargan 1 daha sade bir yoğunluk fonksiyonuna sahip ve az parametre içeren bir dağılım olması nedeniyle hesaplama kolaylığı açısından daha uygundur.

Ayrıca testin gücünü arttırma özelliği de Sargan 1 dağılımını tercih ettiren nedenlerdendir.

## 5. ÇOK DEĞİŞKENLİ SARGAN DAĞILIMI

Standart Normal dağılıma iyi bir yaklaşım olarak Sargan1 dağılımı belirlendiğine göre İki değişkenli Sargan 1 dağılımının da İki değişkenli Normal dağılıma iyi bir yaklaşım olacağı düşünülebilir. Bunun belirlenmesi için aşağıda verilen kavramların bilinmesi gerekir.

### 5.1 Birleşik Yoğunluk Fonksiyonu

$X_1$  ve  $X_2$  birer şans değişkeni olmak üzere  $X_1$  in yoğunluk fonksiyonu  $f(X_1)$ ,  $X_2$  nin yoğunluk fonksiyonu  $f(X_2)$  ise,  $X_1$  ve  $X_2$  nin birleşik yoğunluk fonksiyonu şu şekilde belirlenir:

$X_1$  ve  $X_2$  birbirinden bağımsız ise,

$$f(X_1, X_2) = f(X_1) \cdot f(X_2)$$

Elbette,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(X_1, X_2) dx_1 \cdot dx_2 = 1$$

şartı gerçekleşmelidir.

Buna göre Marjinal dağılımların elde edilmesi için Birleşik yoğunluk fonksiyonunun çaprazdaki değişkene göre integralinin alınması gerekir.

### 5.2 İki değişkenli Normal Dağılım

$X_1$  ve  $X_2$  birbirinden bağımsız ise (korelasyon sıfır)

$$f(X_1, X_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-0.5(X_1^2 + X_2^2)} \quad (5.1)$$

$X_1$  ve  $X_2$  arasında korelasyon varsa,

$$f(X_1, X_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-(X_1^2 - 2\rho X_1 X_2 + X_2^2)/(2-2\rho^2)} \quad (5.2)$$

### 5.3 İki Değişkenli Sargan 1 Dağılımı

$X_1$  ve  $X_2$  birbirinden bağımsız olarak Sargan 1 dağılımı gösteriyorsa, bunların birleşik yoğunluk fonksiyonu,

$$f(X_1, X_2) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{4 \cdot (1 + \gamma_1)^2} (1 + \alpha_2 \gamma_1 |X_2| + \alpha_1 \gamma_1 |X_1| + \alpha_1 \alpha_2 \gamma_1^2 |X_1| |X_2|) \cdot e^{-\alpha_1 |X_1| - \alpha_2 |X_2|} \quad (5.3)$$

elde edilir. Bu korelasyonsuz İki Değişkenli Sargan 1 dağılım fonksiyonudur.

$$(5.3) \text{ fonksiyonu } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(X_1, X_2) dx_1 \cdot dx_2 = 1$$

şartını sağlar.

(5.3) ifadesinde,

$$K = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{4(1 + \gamma_1)^2}, \quad S_1 = \alpha_2 \gamma_1, \quad S_2 = \alpha_1 \gamma_1, \quad S_3 = \alpha_1 \alpha_2 \gamma_1^2$$

düşünülerek Marjinal yoğunlukları elde edelim:

$$g(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(X_1, X_2) dx_2$$

$$= K \left( \frac{2}{\alpha_2} e^{-\alpha_1 |X_1|} + \frac{2S_1}{\alpha_2^2} e^{-\alpha_1 |X_1|} + \frac{2S_2 |X_1|}{\alpha_2^2} e^{-\alpha_1 |X_1|} + \frac{2S_3 |X_1|^2}{\alpha_2^2} e^{-\alpha_1 |X_1|} \right)$$

$$g(X_1) = \frac{2K}{\alpha_2^2} (\alpha_2 + S_1 + (S_2 \alpha_2 + S_3) |X_1|) \cdot e^{-\alpha_1 |X_1|}$$

$$= K_1 \cdot e^{-\alpha_1 |X_1|} \cdot (1 + \alpha_1 |X_1|)$$

Buna göre,

$$K_1 = \frac{\alpha_2 + S_1}{\alpha_2^2} \cdot 2K \quad \alpha_1 = \frac{S_2 \alpha_2 + S_3}{\alpha_2 + S_1}$$

bulunur.  $K$  ve  $S_1$  yerine değerleri düşünülürse,

$$K_1 = \frac{\alpha_1}{4}$$

elde edilir.



Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
 g(X_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(X_1, X_2) \cdot dx_1 \\
 &= \frac{2 \cdot K}{\alpha_1^2} (\alpha_1 + S_2 + (S_1 \alpha_1 + S_3) |X_2|) \cdot e^{-\alpha_2 |X_2|} \\
 &= K_2 \cdot e^{-\alpha_2 |X_2|} \cdot (1 + \alpha_2 |X_2|)
 \end{aligned}$$

Buna göre,

$$K_2 = \frac{\alpha_1 + S_2}{\alpha_1^2} \cdot 2K \qquad \alpha_2 = \frac{S_1 \alpha_1 + S_3}{\alpha_1 + S_2}$$

K ve  $S_2$  değerleri düşünülürse,

$$K_2 = \frac{\alpha_2}{4}$$

elde edilir.

#### 5.4 Korelasyonlu İki Değişkenli Sargan 1 Dağılımı

$X_1$  ve  $X_2$  değişkenleri korelasyonlu olarak Sargan 1 dağılımı gösteriyorsa, bunların birleşik yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde belirlenecektir.

$$f(X_1, X_2) = K(1 + S_1 |X_2| + S_2 |X_1| + S_3 X_1 X_2) \cdot e^{-\alpha_1 |X_1| - \alpha_2 |X_2|} \quad (5.4)$$

(5.4) de verilen fonksiyon,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(X_1, X_2) dx_1 \cdot dx_2 = 1$$

şartını sağlamalıdır. Bundan faydalanarak K değerini belirleyebiliriz.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(X_1, X_2) dx_1 dx_2 = K \left( \frac{4}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{4S_1}{\alpha_1 \alpha_2^2} + \frac{4S_2}{\alpha_1^2 \alpha_2} \right) = 1$$

Buna göre K değeri,

$$K = \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{4 \alpha_1 \alpha_2 + 4 \alpha_1 S_1 + 4 \alpha_2 S_2}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi (5.4) deki fonksiyonun Marjinal yoğunluklarını elde edebiliriz.

$$g(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(X_1, X_2) dx_2 = K_1 (1 + \alpha_1 |X_1|) \cdot e^{-\alpha_1 |X_1|}$$

olmalıdır.

$$g(X_1) = \frac{K(2\alpha_2 - 2S_1 - 2S_2\alpha_2 |X_1|)}{\alpha_2^2} e^{-\alpha_1 |X_1|}$$

Buna göre,

$$K_1 = \frac{2K}{\alpha_2^2} (\alpha_2 + S_1) \quad \alpha_1 = \frac{S_2 \alpha_2}{\alpha_2 + S_1}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$g(X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(X_1, X_2) dx_1 = K_2 (1 + \alpha_2 |X_2|) \cdot e^{-\alpha_2 |X_2|}$$

olmalıdır.

$$g(X_2) = \frac{K(2\alpha_1 - 2S_2 - 2S_1\alpha_1 |X_2|)}{\alpha_1^2} e^{-\alpha_2 |X_2|}$$

Buna göre,

$$K_2 = \frac{2K}{\alpha_1^2} (\alpha_1 + S_2) \quad \alpha_2 = \frac{S_1 \alpha_1}{\alpha_1 + S_2}$$

elde edilir.

Şimdi de (5.3) ve (5.4) de verilen ifadelere ait Kovaryansları, dolayısı ile korelasyonları belirleyelim:

(5.3) ifadesi için,

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_1 \cdot X_2 \cdot f(X_1, X_2) dx_1 \cdot dx_2 = 0$$

bulunur. Buna göre korelasyon da sıfırdır.

(5.4) ifadesi için,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_1 X_2 f(X_1, X_2) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{16K \cdot S_3}{\alpha_1^3 \alpha_2^3} \end{aligned}$$

elde edilir.  $K, S_1$  ve  $S_2$  nin değerleri de düşünülürse,

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{4S_3}{3\alpha_1^2 \alpha_2^2}$$

elde edilir. Artık korelasyonu,

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1) \cdot \text{Var}(X_2)}}$$

ifadesinden belirleyebiliriz. Buna göre,

$$\rho = \frac{S_3}{3}$$

olarak belirlenir.

$S_3 = 3 \cdot \rho$  olduğu ve sıfır korelasyon için (5.4) ün (5.3) 'e dönüşmesi gereği gözönünde bulundurularak Korelasyonlu İki Değişkenli Sargan 1 yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde oluşur:

$$f(X_1, X_2) = K(1 + S_1 |X_2| + S_2 |X_1| + 3\rho X_1 X_2 + \alpha_1 \alpha_2 |X_1| |X_2|) \cdot e^{-\alpha_1 |X_1| - \alpha_2 |X_2|}$$

Bu ifadedeki  $K$  değeri yine,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(X_1, X_2) dx_1 dx_2 = 1$$

şartını sağlamalıdır. Buna göre,

$$K = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{16}$$

bulunur. İki Değişkenli Sargan 1 yoğunluk fonksiyonu da,

$$f(X_1, X_2) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{16} (1 + \alpha_2 |X_2| + \alpha_1 |X_1| + 3\rho X_1 X_2 + \alpha_1 \alpha_2 |X_1| |X_2|) \cdot e^{-\alpha_1 |X_1| - \alpha_2 |X_2|} \quad (5.5)$$

şeklinde kesinleşir.

### 5.5 İki Değişkenli Normal Dağılıma İki Değişkenli Sargan 1 Yaklaşımı,

İki değişkenli Sargan 1 dağılımının tek değişkenlide olduğu gibi İki değişkenli normal dağılıma ne ölçüde iyi bir yaklaşım olduğunu kararlaştırmak için (5.5) de verilen iki değişkenli Sargan 1 yoğunluk fonksiyonu ile (5.2) deki iki değişkenli Normal dağılım fonksiyonları değişik korelasyon seçenekleri için karşılaştırma yolu izlenmiştir. Bu karşılaştırmalar tablolar halinde sunulmuştur.

KORELASYON=0.0

$X_1 \backslash X_2$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
-3.0	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.000	0.003	0.000	0.004	0.000	0.003	0.000
-2.5	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
-2.0	0.002	0.004	0.001	0.006	0.002	0.008	0.002
	0.002	0.004	0.001	0.002	0.001	0.001	0.000
-1.5	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.001	0.005	0.002	0.008	0.004	0.012	0.006
-1.0	0.007	0.012	0.006	0.008	0.004	0.005	0.002
	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
-0.5	0.001	0.005	0.003	0.008	0.007	0.014	0.013
	0.019	0.027	0.022	0.022	0.019	0.014	0.013
0.0	0.007	0.005	0.003	0.003	0.001	0.001	0.000
	0.001	0.005	0.002	0.008	0.007	0.015	0.017
0.5	0.031	0.040	0.046	0.049	0.052	0.040	0.046
	0.031	0.015	0.017	0.008	0.007	0.005	0.002
1.0	0.001	0.004	0.001	0.008	0.004	0.014	0.013
	0.031	0.044	0.059	0.068	0.085	0.084	0.096
1.5	0.085	0.044	0.059	0.026	0.031	0.014	0.013
	0.004	0.004	0.001	0.006	0.002	0.012	0.006
2.0	0.019	0.040	0.046	0.068	0.085	0.104	0.124
	0.140	0.104	0.124	0.068	0.085	0.040	0.046
2.5	0.019	0.012	0.006	0.006	0.002	0.008	0.002
	0.007	0.027	0.022	0.049	0.052	0.084	0.096
3.0	0.140	0.159	0.159	0.129	0.140	0.084	0.096
	0.052	0.027	0.022	0.015	0.007	0.008	0.002

KORELASYON= 0.05

$X_2 \backslash X_1$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
-3.0	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.000	0.003	0.000	0.004	0.000	0.003	0.000
-2.5	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
-2.0	0.001	0.004	0.001	0.006	0.002	0.008	0.002
	0.001	0.004	0.001	0.002	0.000	0.001	0.000
-1.5	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.001	0.005	0.003	0.008	0.005	0.012	0.007
-1.0	0.007	0.012	0.006	0.008	0.004	0.004	0.002
	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
-0.5	0.001	0.005	0.004	0.009	0.008	0.015	0.014
	0.020	0.027	0.021	0.022	0.018	0.014	0.012
0.0	0.006	0.005	0.002	0.002	0.001	0.001	0.000
	0.001	0.005	0.003	0.009	0.008	0.016	0.019
0.5	0.034	0.041	0.047	0.049	0.052	0.039	0.044
	0.029	0.015	0.015	0.008	0.006	0.004	0.002
1.0	0.000	0.004	0.001	0.008	0.005	0.015	0.014
	0.034	0.045	0.061	0.069	0.087	0.084	0.096
1.5	0.083	0.043	0.056	0.025	0.029	0.014	0.012
	0.004	0.004	0.001	0.006	0.002	0.012	0.007
2.0	0.020	0.041	0.047	0.069	0.087	0.106	0.126
	0.141	0.103	0.122	0.067	0.083	0.039	0.044
2.5	0.018	0.012	0.006	0.006	0.001	0.008	0.002
	0.007	0.027	0.021	0.049	0.052	0.084	0.096
3.0	0.141	0.159	0.159	0.129	0.141	0.084	0.096
	0.052	0.027	0.021	0.015	0.007	0.008	0.002

KORELASYON = -0.05

$X_1 \backslash X_2$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
-3.0	0.000	0.000	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.000	0.003	0.000	0.004	0.000	0.003	0.000
-2.5	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
-2.0	0.000	0.004	0.001	0.006	0.001	0.008	0.002
	0.002	0.004	0.001	0.002	0.001	0.001	0.000
-1.5	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.001	0.004	0.002	0.008	0.004	0.012	0.006
-1.0	0.007	0.012	0.007	0.008	0.005	0.005	0.003
	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
-0.5	0.001	0.005	0.002	0.008	0.006	0.014	0.012
	0.018	0.027	0.021	0.023	0.020	0.015	0.014
0.0	0.008	0.005	0.004	0.003	0.001	0.001	0.000
	0.000	0.004	0.002	0.008	0.006	0.015	0.015
0.5	0.029	0.039	0.044	0.049	0.052	0.041	0.047
	0.034	0.016	0.019	0.009	0.008	0.005	0.003
1.0	0.001	0.004	0.001	0.008	0.004	0.014	0.012
	0.029	0.043	0.056	0.067	0.083	0.084	0.096
1.5	0.087	0.045	0.061	0.027	0.034	0.015	0.014
	0.005	0.004	0.001	0.006	0.001	0.012	0.006
2.0	0.018	0.039	0.044	0.067	0.083	0.103	0.122
	0.141	0.106	0.126	0.069	0.087	0.041	0.047
2.5	0.020	0.012	0.007	0.006	0.002	0.008	0.002
	0.007	0.027	0.021	0.049	0.052	0.084	0.096
3.0	0.141	0.159	0.159	0.129	0.141	0.084	0.096
	0.052	0.027	0.021	0.015	0.007	0.008	0.002

KORELASYON= 0.1

$X_1 \backslash X_2$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
-3.0	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.000	0.003	0.000	0.004	0.000	0.003	0.000
-2.5	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000
	0.000	0.004	0.001	0.006	0.001	0.008	0.002
-2.0	0.002	0.004	0.001	0.003	0.001	0.001	0.000
	0.000	0.000	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000
-1.5	0.001	0.004	0.001	0.007	0.003	0.011	0.005
	0.007	0.012	0.007	0.008	0.005	0.005	0.003
-1.0	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.001	0.004	0.002	0.008	0.005	0.014	0.010
-0.5	0.017	0.027	0.021	0.023	0.021	0.015	0.016
	0.000	0.005	0.004	0.003	0.001	0.001	0.000
0.0	0.000	0.004	0.001	0.008	0.005	0.014	0.013
	0.027	0.038	0.042	0.049	0.051	0.041	0.049
0.5	0.036	0.016	0.021	0.009	0.009	0.005	0.003
	0.001	0.004	0.001	0.007	0.003	0.014	0.010
1.0	0.027	0.042	0.053	0.066	0.081	0.084	0.096
	0.089	0.046	0.064	0.027	0.036	0.015	0.016
1.5	0.005	0.004	0.001	0.006	0.001	0.011	0.005
	0.017	0.038	0.042	0.066	0.081	0.102	0.121
2.0	0.141	0.107	0.127	0.070	0.089	0.041	0.049
	0.021	0.012	0.007	0.006	0.002	0.008	0.002
2.5	0.007	0.027	0.021	0.049	0.051	0.084	0.096
	0.141	0.159	0.160	0.129	0.141	0.084	0.096
3.0	0.051	0.027	0.021	0.015	0.007	0.008	0.002



KORELASYON=-0.1

$X_2 \backslash X_1$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
-3.0	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.000	0.003	0.000	0.004	0.000	0.003	0.000
-2.5	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
-2.0	0.001	0.004	0.001	0.006	0.002	0.008	0.002
	0.001	0.004	0.001	0.002	0.000	0.001	0.000
-1.5	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.001
	0.001	0.005	0.003	0.008	0.005	0.012	0.007
-1.0	0.007	0.011	0.005	0.007	0.003	0.004	0.001
	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
-0.5	0.001	0.005	0.004	0.009	0.009	0.015	0.016
	0.021	0.027	0.021	0.021	0.017	0.014	0.010
0.0	0.005	0.004	0.002	0.002	0.001	0.001	0.000
	0.001	0.005	0.003	0.009	0.009	0.016	0.021
0.5	0.036	0.041	0.049	0.049	0.051	0.038	0.042
	0.027	0.014	0.013	0.008	0.005	0.004	0.001
1.0	0.000	0.004	0.001	0.008	0.005	0.015	0.016
	0.036	0.046	0.064	0.070	0.089	0.084	0.096
1.5	0.081	0.042	0.053	0.025	0.027	0.014	0.010
	0.003	0.004	0.001	0.006	0.002	0.012	0.007
2.0	0.021	0.041	0.049	0.070	0.089	0.107	0.127
	0.141	0.102	0.121	0.066	0.081	0.038	0.042
2.5	0.017	0.011	0.005	0.006	0.001	0.008	0.002
	0.007	0.027	0.021	0.049	0.051	0.084	0.096
3.0	0.141	0.159	0.160	0.129	0.141	0.084	0.096
	0.051	0.027	0.021	0.015	0.007	0.008	0.002

KORELASYON= 0.15

$X_1 \backslash X_2$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
-3.0	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.000	0.003	0.000	0.004	0.000	0.003	0.000
-2.5	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
-2.0	0.000	0.004	0.001	0.006	0.001	0.008	0.002
	0.002	0.004	0.002	0.003	0.001	0.001	0.001
-1.5	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.000	0.004	0.001	0.007	0.003	0.011	0.005
-1.0	0.007	0.013	0.007	0.008	0.006	0.005	0.004
	0.002	0.002	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000
-0.5	0.000	0.004	0.001	0.008	0.004	0.013	0.009
	0.016	0.027	0.021	0.024	0.021	0.016	0.017
0.0	0.010	0.005	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001
	0.000	0.004	0.001	0.008	0.004	0.014	0.011
0.5	0.024	0.038	0.040	0.049	0.051	0.042	0.050
	0.038	0.017	0.023	0.009	0.010	0.005	0.004
1.0	0.001	0.004	0.001	0.007	0.003	0.013	0.009
	0.024	0.041	0.050	0.065	0.079	0.084	0.096
1.5	0.092	0.047	0.067	0.028	0.038	0.016	0.017
	0.006	0.004	0.002	0.006	0.001	0.011	0.005
2.0	0.016	0.038	0.040	0.065	0.079	0.101	0.120
	0.142	0.108	0.129	0.071	0.092	0.042	0.050
2.5	0.021	0.013	0.007	0.007	0.002	0.008	0.002
	0.007	0.027	0.021	0.049	0.051	0.084	0.096
3.0	0.142	0.159	0.161	0.129	0.142	0.084	0.096
	0.051	0.027	0.021	0.015	0.007	0.008	0.002

KORELASYON = -0.15

$X_1 \backslash X_2$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
-3.0	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.000	0.003	0.000	0.004	0.000	0.003	0.000
-2.5	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.001
-2.0	0.001	0.004	0.002	0.007	0.002	0.008	0.002
	0.001	0.004	0.001	0.002	0.000	0.001	0.000
-1.5	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.002	0.001
	0.002	0.005	0.004	0.008	0.006	0.013	0.007
-1.0	0.007	0.011	0.005	0.007	0.003	0.004	0.001
	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.001	0.001
-0.5	0.002	0.005	0.005	0.009	0.010	0.016	0.017
	0.021	0.027	0.021	0.021	0.016	0.013	0.009
0.0	0.004	0.004	0.001	0.002	0.000	0.001	0.000
	0.001	0.005	0.004	0.009	0.010	0.017	0.023
0.5	0.038	0.042	0.050	0.049	0.051	0.038	0.040
	0.024	0.014	0.011	0.008	0.004	0.004	0.001
1.0	0.000	0.004	0.002	0.008	0.006	0.016	0.017
	0.038	0.047	0.067	0.071	0.092	0.084	0.096
1.5	0.079	0.041	0.050	0.024	0.024	0.013	0.009
	0.003	0.004	0.001	0.007	0.002	0.013	0.007
2.0	0.021	0.042	0.050	0.071	0.092	0.108	0.129
	0.142	0.101	0.120	0.065	0.079	0.038	0.040
2.5	0.016	0.011	0.005	0.006	0.001	0.008	0.002
	0.007	0.027	0.021	0.049	0.051	0.084	0.096
3.0	0.142	0.159	0.161	0.129	0.142	0.084	0.096
	0.051	0.027	0.021	0.015	0.007	0.008	0.002

KORELASYON= 0.2

$X_1 \backslash X_2$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
-3.0	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.000	0.003	0.000	0.004	0.000	0.003	0.000
-2.5	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
-2.0	0.000	0.004	0.000	0.006	0.001	0.008	0.001
	0.002	0.005	0.002	0.003	0.001	0.002	0.001
-1.5	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.000	0.004	0.001	0.007	0.002	0.011	0.004
-1.0	0.006	0.013	0.007	0.009	0.006	0.005	0.004
	0.002	0.002	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000
-0.5	0.000	0.004	0.001	0.007	0.003	0.013	0.003
	0.014	0.027	0.020	0.024	0.022	0.016	0.018
0.0	0.012	0.005	0.006	0.003	0.002	0.002	0.001
	0.000	0.004	0.001	0.007	0.003	0.013	0.010
0.5	0.022	0.037	0.038	0.049	0.050	0.043	0.052
	0.041	0.017	0.025	0.010	0.012	0.005	0.004
1.0	0.001	0.004	0.000	0.007	0.002	0.013	0.008
	0.022	0.040	0.047	0.063	0.076	0.084	0.096
1.5	0.094	0.048	0.071	0.029	0.041	0.016	0.018
	0.006	0.005	0.002	0.006	0.001	0.011	0.004
2.0	0.014	0.037	0.038	0.063	0.076	0.099	0.119
	0.143	0.109	0.132	0.072	0.094	0.043	0.052
2.5	0.022	0.013	0.007	0.007	0.002	0.008	0.001
	0.006	0.027	0.020	0.049	0.050	0.084	0.096
3.0	0.143	0.159	0.162	0.129	0.143	0.084	0.096
	0.050	0.027	0.020	0.015	0.006	0.008	0.001

KORELASYON = -0.2

$X_1 \backslash X_2$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
-3.0	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.000	0.003	0.000	0.004	0.000	0.003	0.000
-2.5	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.002	0.001
-2.0	0.001	0.005	0.002	0.007	0.002	0.008	0.001
	0.001	0.004	0.000	0.002	0.000	0.001	0.000
-1.5	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.002	0.001
	0.002	0.005	0.004	0.009	0.006	0.013	0.007
-1.0	0.006	0.011	0.004	0.007	0.002	0.004	0.001
	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.002	0.001
-0.5	0.002	0.005	0.006	0.010	0.012	0.016	0.018
	0.022	0.027	0.020	0.020	0.014	0.013	0.008
0.0	0.003	0.004	0.001	0.002	0.000	0.001	0.000
	0.001	0.005	0.004	0.010	0.012	0.017	0.025
0.5	0.041	0.043	0.052	0.049	0.050	0.037	0.038
	0.022	0.013	0.010	0.007	0.003	0.004	0.001
1.0	0.000	0.005	0.002	0.009	0.006	0.016	0.018
	0.041	0.048	0.071	0.072	0.094	0.084	0.096
1.5	0.076	0.040	0.047	0.023	0.022	0.013	0.008
	0.002	0.004	0.000	0.007	0.002	0.013	0.007
2.0	0.022	0.043	0.052	0.072	0.094	0.109	0.132
	0.143	0.099	0.119	0.063	0.076	0.037	0.038
2.5	0.014	0.011	0.004	0.006	0.001	0.008	0.001
	0.006	0.027	0.020	0.049	0.050	0.084	0.096
3.0	0.143	0.159	0.162	0.129	0.143	0.084	0.096
	0.050	0.027	0.020	0.015	0.006	0.008	0.001

KORELASYON= 0.25

$X_2 \backslash X_1$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
-3.0	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.000	0.003	0.000	0.004	0.000	0.004	0.000
-2.5	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
-2.0	0.000	0.003	0.000	0.006	0.001	0.008	0.001
	0.002	0.005	0.002	0.003	0.001	0.002	0.001
-1.5	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.000	0.004	0.001	0.007	0.002	0.011	0.004
-1.0	0.006	0.013	0.007	0.009	0.007	0.005	0.005
	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000
-0.5	0.000	0.004	0.001	0.007	0.003	0.012	0.007
	0.013	0.027	0.019	0.024	0.022	0.016	0.019
0.0	0.013	0.006	0.007	0.003	0.003	0.002	0.001
	0.000	0.004	0.001	0.007	0.003	0.013	0.008
0.5	0.019	0.036	0.035	0.049	0.049	0.044	0.053
	0.043	0.018	0.027	0.010	0.013	0.005	0.005
1.0	0.001	0.003	0.000	0.007	0.002	0.012	0.007
	0.019	0.039	0.043	0.062	0.074	0.084	0.096
1.5	0.096	0.049	0.074	0.029	0.043	0.016	0.019
	0.007	0.005	0.002	0.006	0.001	0.011	0.004
2.0	0.013	0.036	0.035	0.062	0.074	0.098	0.118
	0.144	0.110	0.135	0.073	0.096	0.044	0.053
2.5	0.022	0.013	0.007	0.007	0.002	0.008	0.001
	0.006	0.027	0.019	0.049	0.049	0.084	0.096
3.0	0.144	0.159	0.164	0.129	0.144	0.084	0.096
	0.049	0.027	0.019	0.015	0.006	0.008	0.001

KORELASYON=-0.25

$X_2 \backslash X_1$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
-3.0	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.000	0.004	0.000	0.004	0.000	0.003	0.000
-2.5	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.002	0.001
-2.0	0.001	0.005	0.002	0.007	0.002	0.008	0.001
	0.001	0.003	0.000	0.002	0.000	0.001	0.000
-1.5	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.002	0.001
	0.003	0.005	0.005	0.009	0.007	0.013	0.007
-1.0	0.006	0.011	0.004	0.007	0.002	0.004	0.001
	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.002	0.001
-0.5	0.003	0.006	0.007	0.010	0.013	0.016	0.019
	0.022	0.027	0.019	0.020	0.013	0.012	0.007
0.0	0.003	0.004	0.001	0.002	0.000	0.001	0.000
	0.001	0.005	0.005	0.010	0.013	0.018	0.027
0.5	0.043	0.044	0.053	0.049	0.049	0.036	0.035
	0.019	0.013	0.008	0.007	0.003	0.004	0.001
1.0	0.000	0.005	0.002	0.009	0.007	0.016	0.019
	0.043	0.049	0.074	0.073	0.096	0.084	0.096
1.5	0.074	0.039	0.043	0.023	0.019	0.012	0.007
	0.002	0.003	0.000	0.007	0.002	0.013	0.007
2.0	0.022	0.044	0.053	0.073	0.096	0.110	0.135
	0.144	0.098	0.118	0.062	0.074	0.036	0.035
2.5	0.013	0.011	0.004	0.006	0.001	0.008	0.001
	0.006	0.027	0.019	0.049	0.049	0.084	0.096
3.0	0.144	0.159	0.164	0.129	0.144	0.084	0.036
	0.049	0.027	0.019	0.015	0.006	0.008	0.001

Sayfa 44 ve 54 arasında değişik korelasyon düzeylerinde İki değişkenli Normal ve İki değişkenli Sargan 1 dağılımlarının yoğunluk fonksiyonu değerlerinin karşılaştırmalı değerleri tablolar halinde verilmiştir. Tablolarda üst satırlarda İki değişkenli Sargan 1 değerleri alt satırlarda ise İki değişkenli Normal dağılım değerleri verilmektedir.

Tablo değerleri topluca incelenecek olursa aşağıdaki özellikler dikkati çekmektedir:

$X_1$  ve  $X_2$  nin her ikisi birden büyüdüğünde yaklaşım azalır. <sup>1</sup> Yani <sup>2</sup> kuyruk kısımlarında yaklaşım iyi değildir.

En iyi yaklaşım her iki değişkenin de (-1,1) aralığında değerler aldığı gözlenmektedir.

Korelasyon büyüdükçe özellikle kuyruk kısımlarında İki değişkenli Normal dağılıma göre fark fazlalaşmaktadır.

Negatif ve Pozitif korelasyon için bazı değerlerde yaklaşım aynı olmasına rağmen bazı değerler için negatif korelasyonda daha iyi yaklaşım sağlandığı gözlenmektedir.

Buna göre özellikle düşük korelasyon düzeylerinde İki değişkenli Sargan 1 dağılımının İki değişkenli Normal dağılıma iyi bir yaklaşım sağladığı söylenebilir.



## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çalışmada her bölümle ilgili sonuçlar o bölümde verilerek tartışılmıştır. Özetle, Normal dağılım yerine Sargan 1 dağılımının tercih edilmesi hem analizlerde hem de parametre tahminlerinde büyük işlem kolaylığı sağlamakta ve özellikle Hipotez testlerinde Sargan 1 dağılımının kullanılması testin REDdine güç katmasından dolayı önem kazanmaktadır. Çünkü hipotez testlerinde testin reddi kabulünden daha fazla önem taşımaktadır. Sargan 1 dağılımının örnek büyüklüğüne de bağlı olmayışı nedeniyle uygulamaya büyük katkı sağlanmaktadır.

İki değişkenli Normal dağılıma yaklaşım olarak ta, İki değişkenli Sargan 1 dağılımının kullanılması çok değişkenli analizlerde işlem kolaylığı sağlamakta özellikle Birikimli değerlerin gerektiği çalışmalara katkıda bulunmak tadır.

Sargan 1 dağılımı Weibull Sürecinde "Başarısızlık Zamanları"(Failure Times) nın dağılımı olarak ta kullanılabilir. Bu durumda üç parametrelili Weibull dağılımı yerine kullanılacağından Normal dağılımda elde edilen avantajları sağlayabilir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Arabmazar, A. and Schmidt, P., 1981, Further evidence on the robustness of the Tobit estimator to Heterokedasticity, *Journal of Econometrics*, 17, 253-258.
- Arabmazar, A. and Schmidt, P., 1982, An investigation of the robustness of the Tobit estimator to non Normality, *Econometrica*, 50, 1055-1063.
- Bhattacharya, R.N., 1975, On errors of Normal approximation the annals of probability, 3 , 815 - 828.
- Bhattacharya, R.N., 1976, Normal approximation and asymptotic expansions, *Ann. Math. Statist.*, 42, 241-259.
- Çömlekçi, N., 1984, İstatistik, Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir, 380 s.
- Draper, N.R. and Smith, H., 1980, Applied regression analysis, John Wiley, NewYork.
- Goldfeld, S.M., and Quandt, R.E., 1981, Econometric modelling with non Normal disturbances, *Journal of Econometrics* 17, 141-155.
- Hahn, G.J. and Samuel, S., 1967, Statistical models in engineering, NewYork, London, Sydney.
- Johnson, N. L. and Kotz, S., 1970, Continuous univariate distributions 2.
- Missiakoulis, S., 1983, Sargan densities, *Journal of econometrics*, 23, 223-234.
- Kafei, M.A. and Schmidt, P., 1985, On the adequacy of the Sargan distribution as an approximation to the Normal, *Commun. Statist.*, 14, 509-526.
- Quandt, R. E., 1980, Computational methods and problems, *Handbook of Econometrics*, North Holland, Amsterdam.
- Sargan, J.D. and Mikhail, E.M., 1971, A general approximation to the distribution of instrumental variable estimates, *Econometrica*, 39, 131-169.
- Sargan, J.D., 1976, Econometric estimators and the Edgeworth approximation, *Econometrica*, 44, 421-448.
- Sargan, J.D. and Tse, Y.K., 1979, Edgeworth approximations to the distribution of various test statistics, *Econometric Society*, 281-295.
- Weida, F.M., 1935, On certain distribution functions, *Annals Mathematical Statistics*, 6, 102-110.
- Woodroffe, M., 1985, Distribution functions with truncated data , the *Annals of Statistics*, 13, 163-167.

## EKLER

EK.1. Değişik dereceden Sargan dağılımlarının grafiklerini çizdiren bilgisayar programı.

EK.2. Sargan dağılımlarının yoğunluk ve Birikimli yoğunluk fonksiyonlarını veren bilgisayar programı.

EK.3. İki değişkenli Sargan 1 ve İki değişkenli Normal dağılım değerlerini türeten bilgisayar programı.

EK 1 :

```
10 REM BU PROGRAM DEĞİŞİK DERECEDEDEN SARGAN DAĞILIMLARINDAN
    VERİ TÜRETİP İLGİLİ GRAFİKLERİ ÇİZDİRİR....
20 DIM GAMA(10)
30 INPUT "KAÇINCI DERECEDEDEN SARGAN?";P
40 INPUT "ALFA?";ALFA
50 GAMA(1)=1
60 FOR J=1 TO P
70 GAMA(J+1)=2*(P-J)*GAMA(J)/((J+1)*(2*P-J))
80 NEXT
90 K=1
100 FOR J=1 TO P
110 JF=1
120 FOR I=1 TO J
130 JF=JF*I :NEXT
140 K=K+GAMA(J)*JF
150 NEXT
160 K=K**(-1)
170 CLS
180 PRINT "SARGAN "P "İÇİN"
190 PRINT "...U...", "...F..."
200 PRINT "_____", "_____"
210 CLS
220 ORIGIN 300,0
230 DRAW 0,800
240 ORIGIN 0,175
250 DRAW 800,0
260 ORIGIN 300,175
270 FOR U=-4 TO 4 STEP 0.1
280 TOPLAM=1
290 FOR J=1 TO P
300 TOPLAM=TOPLAM+GAMA(J)*ALFA**J* ABS(U)**J :NEXT
310 F=(K*ALFA/2)*EXP(-ALFA*ABS(U))*TOPLAM
320 PLOT 150*U,150*F
330 NEXT
340 END
```

EK 2:

```
10  REM BU PROGRAM SARGAN DAĞILIMLARININ YOĞUNLUK VE
    BİRİKMLİ YOĞUNLUK FONKSİYON DEĞERLERİNİ TÜRETİR...
20  INPUT "KAÇINCI DERECEDEDEN SARGAN?";P
30  INPUT "ALFA?";ALFA
40  IF P=2 THEN GO TO 100
50  FOR X=0 TO 4 STEP 0.1
60  F=ALFA*EXP(-ALFA*X)*(1+ALFA*X)/4
70  BF=0.5-EXP(-ALFA*X)*(2+ALFA*X)/4
80  LPRINT USING " . ";:LPRINT TAB(5) " ____ "F;:LPRINT TAB(15)
    " ____ "BF
90  NEXT
100 FOR X=0 TO 4 STEP 0.1
110  F=ALFA*EXP( - ALFA*ABS(X))*(1+ALFA*ABS(X)+ALFA**2*0.333
    *X**2)/(2*(2+2*0.333))
120  BF=0.5-EXP(-ALFA*ABS(X))*(2+ALFA*ABS(X)+2*0.333*(ALFA**2
    *X**2/2+ALFA*ABS(X)+1))/(4+4*0.333)
130  LPRINT USING "#.#";:LPRINT TAB(5) " ____ "F;:LPRINT
    TAB(15) " ____ " BF
140 NEXT
150 END
```

EK 3:

```
10 REM BU PROGRAM İKİ DEĞİŞKENLİ SARGAN 1 VE İKİ DEĞİŞKENLİ
    NORMAL DAĞILIMLARININ YOĞUNLUK FONKSİYONU DEĞERLERİNİ
    TÜRETİR ...
20 CLS
30 A1=1.596 :A2=1.596
40 INPUT "KORELASYONU GİRİNİZ"; R
50 LPRINT "KORELASYON="; R
60 FOR X2=3 TO 0 STEP -0.5
70 FOR X1=-3 TO 3 STEP 0.5
80  F1=A1*A2*(1+A2*X2+A1*ABS(X1)+3*R*X1*X2+A1*A2*ABS(X1)*X2)
    *EXP(-A1*ABS(X1)-A2*2)/16
90  F2=EXP(-(X1**2-2*R*X1*X2+X2**2)/(2*(1-R**2)))/(44*
    (1-R**2)**0.5/7)
100 LPRINT USING "#.### "; F1;
110 LPRINT USING "#.### "; F2;
120 NEXT X1
130 NEXT X2
140 END
```