

**MaxEnt ve MinxEnt OPTİMİZASYON
PRENSİPLERİNE BAĞLI
NÜMERİK İNCELEMELER ve
İSTATİSTİKSEL UYGULAMALAR**

İlhan USTA
Yüksek Lisans Tezi

İstatistik Anabilim Dalı
Temmuz - 2006

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

**MaxEnt ve MinxEnt OPTİMİZASYON PRENSİPLERİNE BAĞLI
NÜMERİK İNCELEMELER ve İSTATİSTİKSEL UYGULAMALAR**

İlhan USTA

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV

2006, 96 sayfa

Bu tezde, kesikli ve sürekli rassal değişkenler için, MinMaxEnt ve MaxMinxEnt dağılımlarının nümerik yöntemlerle bulunması problemler şeklinde ortaya konmuştur. Ortaya konan bu problemlerin oluşturulması ve nümerik çözümleri için, MATLAB 6.5 de özel programlar yazılmıştır. Ayrıca MinMaxEnt dağılımlarının varlığı, matematiksel olarak kanıtlanmıştır.

Bilinen istatistiksel dağılımlara uymayan rassal değişkenin gözlem değerlerinin MinMaxEnt dağılımıyla ifade edilebileceği, MinMaxEnt için hazırlanmış özel program yardımıyla gösterilmiştir. Benzer şekilde, önsel dağılıma sahip rassal değişkenin gözlem değerlerinin MaxMinxEnt dağılımıyla ifade edilebileceği MaxMinxEnt için hazırlanmış özel program yardımıyla gösterilmiştir. Bu yapılanlara ek olarak, moment kısıt sayıları arttırıldıkça MinMaxEnt ve MaxMinxEnt dağılımlarının modellemeye etkisi gözlenmiştir. Sonuç olarak, MinMaxEnt ve MaxMinxEnt dağılımlarının veriyi modellemede iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Jaynes Ölçümü, Maksimum Entropi, Kullback-Leibler Ölçümü, Minimum Çapraz Entropi, MATLAB

ABSTRACT

Master of Science Thesis

The Numeric Investigations Related With the MaxEnt and MinxEnt Optimization Principles and Their Statistical Applications

İlhan USTA

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Statistics Program

Supervisor: Prof. Dr. Aladdin ŞAMILOV

2006, 96 pages

In this thesis, the problems of obtaining MinMaxEnt and MaxMinxEnt distributions for discrete and continuous random variables are investigated by applying numeric methods. The special programs to form and solve numerically these problems are written on MATLAB.6.5. Besides the existence of the MinMaxEnt distributions are proved mathematically.

By means of written special program of obtaining the MinMaxEnt distributions, it is shown that the observed data of random variable, which are not modeled by the known statistical distributions, are represented as the MinMaxEnt distribution. In the same way, the agreement of the MinMaxEnt distribution for observed data of random variable, which have a prior distribution, is also demonstrated by written special program of obtaining the MaxMinxEnt distributions. Additionally, while the moment constraints are increased, the effects of MinMaxEnt and MaxMinxEnt distributions on the data modeling are observed. Consequently, it is seen that MinMaxEnt and MaxMinxEnt distributions give significant results in the data modeling.

Keywords: Jaynes Measure, Maximum Entropy, Kullback-Leibler Measure, Minimum Cross Entropy, MATLAB

TEŞEKKÜR

Hazırlamış olduğum yüksek lisans tezine, hazırlık aşamasında, bölümümüzde açmış olduğu “Ölçüm Teorisi ve Olasılık”, “Entropi ve İnfomasyon Teorisi”, “İstatistiğin Matematiksel Yöntemleri”, “İnfomasyon Teorisi ve İstatistik” gibi çok önemli konuları kapsayan yüksek lisans ve doktora dersleriyle bilgilerini bizlere aktaran, değerli vaktini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, benim tüm sorularıma yanıt bulan, tez konusunun belirlenmesi, içeriğin oluşturulması ve geliştirilmesinde bana en değerli vaktini ayıran sevgi ve saygı duyduğum çok değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV’ a en içte dileklerle teşekkür ederim. Ayrıca bu tez konusu sayesinde, yaptığımız teorik çalışmaların uygulamalarını da görmemizi sağladığı için değerli hocama özellikle teşekkür ederim.

Matematik bölümünü II. anadal seçmemi ve tamamlamamı sağlayan, eğitim fakültesine beni tanıtan, önemli birimlere gelmemi sağlayan, desteğini benden hiç esirgemeyen, en ufak bir problemimde dahi beni yalnız bırakmayan, güven, sevgi ve saygı duyduğum değerli hocam Prof. Dr. Embiya AĞAOĞLU’ na çok teşekkür ederim.

Gerek II. anadal süresince, gerek çalışmalarım süresince bana oldukça huzurlu bir çalışma ortamı sağlayıp, manevi desteğini hiç esirgemeyen ve sürekli beni cesaretlendiren değerli hocam Prof. Dr. Ali Fuat YÜZER’ e teşekkür ederim.

Yüksek lisans ders sürecin de bana zaman ayıran, destek olan ve yardım eden, Mammadagha MAMMADOV, Berna YAZICI, çok sevdiğim arkadaşlarım Yeliz Mert KANTAR, Şenay YOLAÇAN, R.Ece OMAV, Çiğdem GİRİFTİNOĞLU, Betül KAN’ a teşekkür ederim.

Bana her konuda zaman ayıran ve dinleyen arkadaşım Yeliz Mert KANTAR’ a ayrıca teşekkür etmek isterim.

Beni yetiştiren aileme, bu çalışma süresince gösterdiği sabır ve anlayış için nişanlım Betül ERCAN’ a teşekkür ederim.

İlhan USTA

Temmuz-2006

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1 GİRİŞ	1
2 ENTROPİ OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ	5
2.1. Maksimum Entropi Metodu	5
2.1.1. Kesikli Rassal Değişkenler için Maksimum Entropi Metodu..	5
2.1.2. Sürekli Rassal Değişkenler için Maksimum Entropi Metodu..	8
2.2. Minimum Çapraz Entropi Metodu.....	11
2.2.1. Kesikli Rassal Değişkenler için Minimum Çapraz Entropi Metodu.....	12
2.2.2. Sürekli Rassal Değişkenler için Minimum Çapraz Entropi Metodu.....	14
3. BANACH TEOREMİ VE NEWTON YÖNTEMİ	18
3.1. Temel Kavramlar ve Banach Teoremi	18
3.2. Newton Yöntemi.....	21
3.2.1. Basitleştirilmiş Newton Yöntemi.....	22
4. MinMaxEnt ENTROPİ OPTİMİZASYON PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ	28
4.1. Kesikli Rassal değişkenler için MinMaxEnt Entropi Optimizasyon Problemi.....	28
4.1.1. MinMaxEnt Dağılımı.....	31
4.1.2. MinMaxEnt Dağılımının Varlığı.....	31

4.2.	Kesikli Rassal Değişkenler için MinMaxEnt Entropi Optimizasyon Probleminin Nümerik Çözümü.....	36
4.3.	Sürekli Rassal Değişkenler için MinMaxEnt Entropi Optimizasyon Problemi.....	40
4.3.1.	MinMaxEnt Dağılımı.....	42
4.3.2.	MinMaxEnt Dağılımının Varlığı.....	43
4.4.	Sürekli Rassal Değişkenler için MinMaxEnt Entropi Optimizasyon Probleminin Nümerik Çözümü.....	46
4.5.	Kesikli ve Sürekli Rassal Değişkenler için MinMaxEnt Entropi Optimizasyon Problemleri Arasındaki İlişki.....	48
4.6.	Uygulama.....	49
5.	MaxMinxEnt ENTROPİ OPTİMİZASYON PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ.....	57
5.1.	Kesikli Rassal Değişkenler için MaxMinxEnt Entropi Optimizasyon Problemi.....	57
5.1.1.	MaxMinxEnt Dağılımı.....	60
5.1.2.	MaxMinxEnt Dağılımının Varlığı.....	60
5.2.	Kesikli Rassal Değişkenler için MaxMinxEnt Entropi Optimizasyon Probleminin Nümerik Çözümü.....	62
5.3.	Sürekli Rassal Değişkenler için MaxMinxEnt Entropi Optimizasyon Problemi.....	65
5.3.1.	MaxMinxEnt Dağılımı.....	67
5.3.2.	MaxMinxEnt Dağılımının Varlığı.....	68
5.4.	Sürekli Rassal Değişkenler için MaxMinxEnt Entropi Optimizasyon Probleminin Nümerik Çözümü.....	70
5.5.	Kesikli ve Sürekli Rassal Değişkenler için MaxMinxEnt Entropi Optimizasyon Problemleri Arasındaki İlişki.....	71
5.6.	Uygulama.....	73
6	SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	80
	KAYNAKLAR.....	82

EKLER

EK-1 MinMaxEnt Entropi Optimizasyon Probleminin Oluşturulması ve Nümerik Çözümü için Hazırlanan Programın İki Kısıta göre MATLAB Kodu.....	85
EK-2 MaxMinxEnt Entropi Optimizasyon Probleminin Oluşturulması ve Nümerik Çözümü için Hazırlanan Programın İki Kısıta göre MATLAB Kodu.....	91

ŞEKİLLER DİZİNİ

4.1.	$\mu^{(0)}$ vektörü ile μ vektörünü birleştiren doğru parçası ile α çözümleri.....	35
4.2.	Kesikli rassal değişkenler için MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü için hazırlanan programın akış diyagramı.....	39
4.3.	Kesikli ve sürekli rassal değişkenlerin entropileri arasındaki ilişki	48
4.4.	Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerlerine ilişkin histogram.....	51
4.5.	Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için iki, üç, dört, beş ve altı bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MinMaxEnt dağılımları ile ilgili program sonuçları.....	52
4.6.	İki, üç, dört, beş ve altı bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımları.....	56
5.1.	Kesikli rassal değişkenler için MaxMinxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü için hazırlanan programın akış diyagramı.....	64
5.2	Kesikli ve sürekli rassal değişkenlerin çapraz entropileri arasındaki ilişki.....	71
5.3	2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için gözlenen frekanslara ilişkin histogram.....	74
5.4	2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için iki, üç, dört, beş ve altı bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MaxMinxEnt dağılımları ile ilgili program sonuçları.....	75
5.5	İki, üç, dört ve beş bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MaxMinxEnt dağılımları.....	79

ÇİZELGELER DİZİNİ

4.1.	Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerlerine ilişkin gözlenen frekanslar.....	50
4.2.	Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için iki bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MaxEnt dağılımlarının entropileri.....	53
4.3	Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için üç bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MaxEnt dağılımlarının entropileri.....	53
4.4	Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için dört bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MaxEnt dağılımlarının entropileri.....	54
4.5	Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için beş bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MaxEnt dağılımlarının entropileri.....	54
4.6	Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için altı bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MaxEnt dağılımlarının entropileri.....	54
4.7	Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için belirlenen MinMaxEnt dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar ve gözlenen frekanslar.....	55
4.8	Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın iki, üç, dört, beş, altı bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımlarının veriye uyumunun istatistiksel kriterlerle incelenmesi.....	55
5.1	2000 ve 1999 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için gözlenen frekanslar.....	74
5.2	2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için iki bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MinxEnt dağılımlarının entropileri.....	76
5.3	2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için üç bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MinxEnt dağılımlarının entropileri.....	76

5.4	2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için dört bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MinxEnt dağılımlarının entropileri.....	76
5.5	2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için beş bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MinxEnt dağılımlarının entropileri.....	77
5.6	2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için altı bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MinxEnt dağılımlarının entropileri.....	77
5.7	2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için MaxMinxEnt dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar ve gözlenen frekanslar...	78
5.8	2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için iki, üç, dört, beş, altı bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MaxMinxEnt dağılımlarının istatistiksel kriterlerle incelenmesi.....	78

1. GİRİŞ

İstatistiğin temel kavramları, metotları ve uygulamaları birçok kaynakta incelenmiştir (Gramer 1966; Papuluos 1991). MaxEnt ve MinxEnt disiplinlerinin temel kavramları, diğer bilim dallarıyla olan ilişkileri ve bu ilişkiye dayalı uygulamaları birçok kaynakta ele alınmıştır (Kapur ve Kesevan 1992; Cover 1991; Nailong 1977). İstatistiğin en önemli problemlerden biri, rassal değişkenlerin dağılımlarının tahmin edilmesi problemidir. Bu problem MaxEnt ve MinxEnt disiplinleriyle de ele alınmaktadır.

İstatistik, anakütleden çekilen örneklem bilgisi dahilinde, rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonunu tahmin etmeye çalışırken, Maksimum entropi (MaxEnt) ve Minimum çapraz entropi (MinxEnt) metotları ise, rassal değişkenin moment değerleri bilgisi dahilinde, olasılık yoğunluk fonksiyonunu tahmin etmeye çalışır. Başka bir ifadeyle yöntemler farklı olmasına karşı hedef aynıdır.

MaxEnt ve MinxEnt metotları, uygulama alanlarının çok genişliğinden ve çeşitli problemlerin çözümünde iyi sonuçlar verdiğinde dolayı bir disiplin olarak kabul edilmektedir. Ayrıca bu metotlar, literatürde entropi optimizasyon metotları olarak bilinmektedir. (Jaynes 1957; Kullback ve Leibler 1951; Kapur ve Kesevan 1992; Cover 1991; Nailong 1977). Bu metotlardan elde edilen önemli bir sonuç, rassal değişkenlerin yoğunluk fonksiyonlarının tahmin edebilmesidir. MaxEnt metodundan elde edilen yoğunluk fonksiyonuna MaxEnt yoğunluk fonksiyonu, MinxEnt metodundan elde edilen yoğunluk fonksiyonuna MinxEnt yoğunluk fonksiyonu denilmektedir. (Jaynes 1957; Kullback 1959) Bu yoğunluk fonksiyonlarının en önemli özelliği, moment kısıtlarıyla birlikte fonksiyonların oldukça esnek bir hale gelmesidir.

MaxEnt metodunun diğer önemli bir özelliği, non-parametrik bir yoğunluk fonksiyonunun bulunabilmesidir. MaxEnt yoğunluk fonksiyonu oldukça esnek güçlü olmasının yanı sıra; eğer moment kısıtları özel bir dağılımın karakterize eden momentleri şeklinde seçilirse, bu durumda metodun bulduğu MaxEnt yoğunluk fonksiyonu özel dağılımın kendisidir. Örneğin normal dağılımı karakterize edici momentleri x ve x^2 , Gama dağılımın x ve $\ln x$ dir. Eğer moment kısıtları x ve x^2 şeklinde seçilirse, bu durumda metot MaxEnt dağılımı olarak

normal dağılımı, x ve $\ln x$ moment kısıtları şeklinde seçilirse, MaxEnt dağılımı olarak Gama dağılımını bulmaktadır.

Entropi optimizasyon metotları, istatistik, matematik, coğrafya, uzay bilimleri, ekonomi, finans, pazarlama, sistem analizi, görüntü işleme, kodlama teorisi, model belirleme gibi alanlarda çok geniş uygulamalara sahiptir. Özellikle MinxEnt metodunda kullanılan Kullback-Leibler ölçümü, model belirleme kriteri olarak kullanımı yaygındır. (Seghouane, 2004). Bu ölçü, model belirleme, görüntü işleme, veri sıkıştırma gibi mühendislik alanlarında çok sık kullanılmaktadır.

İstatistikte pek çok konu maksimum entropi (MaxEnt) ve minimum çapraz entropi (MinxEnt) metotları uygulanarak incelenmiştir. (Kullback, 1959, Kapur ve Kesevan 1992; Shamilov 2005, 2006b; Shamilov ve Kantar Mert 2005). Pandey (2000, 2001) MaxEnt ve MinxEnt optimizasyon metotlarını kullanarak quantile fonksiyonunun doğrudan tahminini yapmıştır. Son yıllarda, parametre tahmini, kontenjan tabloları, kümeleme analizi, (Huo ve ark. 2006; Shamilov ve ark. 2006d; Ximing 2003) konularında entropi optimizasyon metotları kullanılmaktadır.

Shamilov (2006a, 2006b) de MaxEnt metodu yardımıyla özel fonksiyonel ile bu fonksiyonele minimum değer veren MinMaxEnt dağılımını tanımlamıştır. Aynı çalışmalarda, MinxEnt yardımıyla özel fonksiyonel ile bu fonksiyonele maksimum değer veren MaxMinxEnt dağılımını da tanımlamıştır. Mert Kantar (2006) da MinMaxEnt ve MaxMinxEnt dağılımlarıyla ilgili çeşitli incelemeler yapmıştır.

Literatürde, MaxEnt ve MinxEnt dağılımlarının hesaplanmasına ilişkin çeşitli çalışmalar vardır. Li ve Tam (1998) de minimum çapraz entropi eşik değerinin bulunmasında hızlı bir iteratif metot önermiş, Muhlenbein ve Hons (2005) MaxEnt ve Kullback ölçümünü incelemiş, MaxEnt ve MinxEnt dağılımların hesaplanması için çeşitli algoritmaları tartışmıştır. Woodbury (2004) de minimum relatif entropi dağılımlarını elde eden FORTRAN programı yazmıştır. Li ve Li (2005) de bu dağılımların hesaplanmasında Newton metodunu üç farklı şekilde karşılaştırmıştır. Bu çalışmada, metotların hesaplama hızları ve adım sayısı esaslarına göre karşılaştırması yapılmıştır. Ximing, W. (2003) de MaxEnt dağılımının hesabında ardışık yaklaşımlar metodunu uygulamıştır. Bu

dağılımların hesaplanmasında uygulanan nümerik metotlar açısından literatür oldukça zengindir. Ramirez ve Carta (2005) de ise bu dağılımların hesaplanmasında karşılaşılan zorlukları incelemiştir.

Bu tezde ise, MaxEnt metoduyla geliştirilmiş özel fonksiyonel ile bu fonksiyonelle minimum değer veren MinMaxEnt dağılımının ve MinxEnt metoduyla geliştirilmiş özel fonksiyonel ile bu fonksiyonelle maksimum değer veren MaxMinxEnt dağılımının, matematiksel ve nümerik temelleri incelenmiştir. MinMaxEnt ve MaxMinxEnt dağılımlarının bulunması için MATLAB 6.5 de özel programlar yazılmıştır. Bu programlar yardımıyla yapılan uygulamaların sonuçları sunulmuştur.

Bu tezin sonraki bölümler şu şekilde düzenlenmiştir. İkinci bölümde, kesikli ve sürekli rassal değişkenler için Shannon entropi ölçümünü maksimum yapmaya dayanan MaxEnt metotları ile Kullback-Leibler çapraz entropi ölçümünü minimum yapmaya dayanan MinxEnt metotları ayrıntılarıyla ele alınmıştır. Amaç: MinMaxEnt ve MaxMinxEnt problemlerinin ortaya konması ve nümerik çözümleri için temel oluşturmaktır.

Üçüncü bölümde, MinMaxEnt ve MaxMinxEnt problemlerinin nümerik çözümlerinde teorik temel oluşturmak için, sıkıştırma operatörleri prensibinin temel teoremi olan Banach teoremi ve bu teoremin sonucu olan Newton yöntemi ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde, kesikli ve sürekli rassal değişkenler için MaxEnt metodu yardımıyla moment fonksiyonlarına bağlı özel fonksiyoneller ile, bu fonksiyonellere minimum değer veren ve bilgiyi maksimum yapan MinMaxEnt dağılımlarından bahsedilmiştir. Bu dağılımların bulunması problemler şeklinde ortaya konmuştur. Ortaya konan problemlerin oluşturulması ve nümerik çözümleri için, MATLAB 6.5 de özel program yazılmıştır. Bu programın çalışma şekli akış diyagramıyla verilmiştir. Ayrıca MinMaxEnt dağılımının varlığı matematiksel olarak kanıtlanmıştır. Bilinen istatistiksel dağılımlara uymayan gözlem değerlerinin MinMaxEnt dağılımıyla ifade edilebileceği, hazırlanmış özel program yardımıyla gösterilmiştir. Bunlara ek olarak moment kısıt sayısı artırıldıkça, MinMaxEnt dağılımının modellemeye etkisi gözlenmiştir.

Beşinci bölümde, kesikli ve sürekli sistemler için MinxEnt metodu yardımıyla moment fonksiyonlarına bağlı özel fonksiyoneller ile, bu fonksiyonellere maksimum değer veren MaxMinxEnt dağılımlarından bahsedilmiştir. Bu dağılımların bulunması problemler şeklinde ortaya konmuştur. Ortaya konan problemlerin oluşturulması ve nümerik çözümleri için, MATLAB 6.5 de özel program yazılmıştır. Bu programın çalışma şekli akış diyagramıyla verilmiştir. Önsel dağılıma sahip gözlem değerlerini MaxMinxEnt dağılımıyla ifade edilebileceği MaxMinxEnt için hazırlanmış özel program yardımıyla, gösterilmiştir. Ayrıca MinMaxEnt dağılımına benzer olarak, moment kısıt sayısı arttırıldıkça MaxMinxEnt dağılımının modellemeye etkisi gözlenmiştir.

Sonuç bölümünde ise bu tezde elde edilen sonuçlar özetlenerek, gelecek çalışmalara ilişkin önerilerde bulunulmuştur.

2. ENTROPİ OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Daha sonraki bölümlerde kesikli ve sürekli rassal değişkenler için geliştirilmiş entropi optimizasyon (MinMaxEnt ve MaxMinxEnt) problemlerinin çözümü klasik entropi optimizasyon (MaxEnt ve MinxEnt) metotlarına dayalı geliştirildikleri için; bu bölümde, kesikli ve sürekli sistemler için Shannon entropi ölçümünü maksimum yapmaya dayanan MaxEnt metodu ile Kullback-Leibler çapraz entropi ölçümünü minimize etmeye dayanan MinxEnt metodu ayrıntılarıyla ele alınmıştır.

2.1. Maksimum Entropi Metodu

Bir fiziksel sistemin durumunu tanımlamak için, yapılan ölçümlere dayandırılan olasılık dağılımını türetme metodunun öncüsü Jaynes'tir. Jaynes, mühendislik ve fizikteki bir çok probleme bu metodu uygulamıştır. Bu metottan genellikle maksimum entropi metodu (MaxEnt), maksimum belirsizlik prensibi, yada Jaynes'in formülü olarak söz edilir (Kapur ve Kesevan 1992). Bu çalışmamızda kısaca MaxEnt deyimini kullanılacaktır.

Bilgi olarak sadece fiziksel rassal değişkenden elde edilmiş moment değerleri olduğunda, bu değerlere uyumlu sonsuz sayıda dağılım vardır. Shannon entropi ölçümünü, rassal değişkenden elde edilen moment değer kısıtlarına göre maksimum yapan metoda MaxEnt metodu, bu metottan elde edilen dağılıma MaxEnt dağılımı denilmektedir. MaxEnt metodunda belirsizlik kavramı temel rol oynar. Bir fiziksel rassal değişken için elde edilen MaxEnt dağılımı, bu rassal değişkene uygun diğer dağılımlar arasında en yansız olanıdır (Jaynes 1957).

2.1.1. Kesikli Rassal Değişkenler için Maksimum Entropi Metodu

X kesikli rassal değişkeni, x_1, x_2, \dots, x_n şeklinde durumlara sahip ve her bir durumun gerçekleşme olasılığı p_1, p_2, \dots, p_n olsun, X rassal değişkenin entropisi,

$$H(x) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır (Shannon 1948). Shannon entropi ölçümünü,

şekilde bulunur. (2.5) ifadesi sifira eşitlendiğinde,

$$\ln p_i = -\alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i) \quad , (i = 1, \dots, n) \quad (2.6)$$

elde edilir. (2.6) eşitliklerinden p_i ($i = 1, \dots, n$) olasılıkları,

$$p_i = \exp\left(-\alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) \quad , (i = 1, \dots, n) \quad (2.7)$$

şeklinde bulunur. (2.7) ile ifade edilen $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ olasılık dağılımı, (2.1)'le verilen $H(x)$ entropi fonksiyonunu maksimum yapan MaxEnt dağılımıdır.

(2.7) ifadelerinde görüldüğü gibi, p_i ($i = 1, \dots, n$) olasılıkları $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarına bağlıdır. Böylece (2.1) entropi fonksiyonunun (2.2) ve (2.3) kısıtları altında maksimum yapan p_i 'lerin bulunması, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının bulunmasına dönüşmüştür. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının değerleri (2.2) ve (2.3) eşitlikleri yardımıyla bulunabilir.

α_j ($j = 1, \dots, m$)'lerin μ_1, \dots, μ_m 'lere bağlı olduğunu göstermek için, (2.7) ifadesini daha ayrıntılı olarak,

$$p_i = \exp(-\alpha_0) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) \quad , (i = 1, \dots, n) \quad (2.8)$$

şeklinde yazılır. (2.8)'deki olasılık dağılımını (2.2) kısıdında yerine yazıldığında,

$$\sum_{i=1}^n \exp(-\alpha_0) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) = 1 \quad (2.9)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\exp(-\alpha_0) \left\{ \sum_{i=1}^n \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) \right\} = 1$$

veya

$$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) = \exp(\alpha_0) \quad (2.10)$$

ifadesi bulunur. (2.10) eşitliğinden, α_0 Lagrange çarpanının $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarına bağlı olduğu görülür.

Benzer şekilde (2.8) deki olasılıkları (2.3) kısıtlarında yerine yazıldığında,

$$\sum_{i=1}^n g_j(x_i) \exp(-\alpha_0) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) = \mu_j \quad , (j = 1, \dots, m) \quad (2.11)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\exp(-\alpha_0) \left\{ \sum_{i=1}^n g_j(x_i) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) \right\} = \mu_j \quad , (j = 1, \dots, m)$$

veya

$$\sum_{i=1}^n g_j(x_i) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) = \mu_j \exp(\alpha_0) \quad , (j = 1, \dots, m) \quad (2.12)$$

ifadesi bulunur. (2.10) eşitliği (2.12)'de yerine yazıldığında,

$$\sum_{i=1}^n g_j(x_i) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) = \mu_j \left\{ \sum_{i=1}^n \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) \right\}, (j = 1, \dots, m) \quad (2.13)$$

bulunur. (2.13)'de gerekli düzenlemeleri yapıldığında,

$$\mu_j = \frac{\sum_{i=1}^n g_j(x_i) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right)} \quad , (j = 1, \dots, m) \quad (2.14)$$

sonucuna ulaşılır (Kapur ve Kesevan 1992). (2.14) ifadesinden $\alpha_j, (j = 1, \dots, m)$ 'lerin μ_1, \dots, μ_m 'lere bağlı olduğu görülmektedir.

2.1.2. Sürekli Rassal Değişkenler için Maksimum Entropi Metodu

X sürekli rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olsun. X rassal değişkeninin entropisi,

$$H(x) = -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır. Kesikli rassal değişkene benzer olarak kısıtlar aşağıdaki şekilde,

$$\int_a^b f(x) dx = 1 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial F}{\partial f(x)} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'(x)} \right) = 0 \quad (2.22)$$

Euler-Lagrange denklemi yardımıyla bulunabilir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$\frac{\partial F}{\partial f'(x)} = 0$$

ve

$$\frac{\partial F}{\partial f(x)} = -\ln f(x) - \frac{1}{f(x)} f(x) - (\alpha_0 - 1) - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) \quad (2.23)$$

eşitlikleri bulunur. Buna göre (2.22) denklemi oluşturulduğunda,

$$-\ln f(x) - \frac{1}{f(x)} f(x) - (\alpha_0 - 1) - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) = 0 \quad (2.24)$$

elde edilir. (2.24) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$f(x) = \exp \left(-\alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) \right) \quad (2.25)$$

şeklinde bulunur.

Bir başka ifade ile, $H(x)$ fonksiyoneli (2.16) ve (2.17) ile verilen kısıtlara göre maksimum yapan fonksiyon, (2.25) şeklindedir. Bu fonksiyona MaxEnt dağılım fonksiyonu denir. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının değerleri (2.16) ve (2.17) eşitlikleri ile bulunabilir.

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ 'ye bağlı olduğunu göstermek için (2.25) ifadesi (2.16)'da yerine yazıldığında,

$$\int_a^b \exp(-\alpha_0) \exp \left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) \right) dx = 1 \quad (2.26)$$

elde edilir. (2.26) da gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\exp(-\alpha_0) \left\{ \int_a^b \exp \left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) \right) dx \right\} = 1$$

veya

$$\int_a^b \exp \left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) \right) dx = \exp(\alpha_0) \quad (2.27)$$

bulunur. (2.27) eşitliğinden, α_0 Lagrange çarpanının $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarına bağlı olduğu görülür.

Benzer şekilde (2.25) ifadesi (2.17)'de yerine yazıldığında,

$$\int_a^b g_j(x) \exp(-\alpha_0) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx = \mu_j \quad , (j = 1, \dots, m) \quad (2.28)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan,

$$\exp(-\alpha_0) \left\{ \int_a^b g_j(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx \right\} = \mu_j \quad , (j = 1, \dots, m)$$

veya

$$\int_a^b g_j(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx = \mu_j \exp(\alpha_0) \quad , (j = 1, \dots, m) \quad (2.29)$$

elde edilir. (2.27) ifadesi (2.29)'da yerine yazılıp, gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\mu_j = \frac{\int_a^b g_j(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx}{\int_a^b \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx} \quad , (j = 1, \dots, m) \quad (2.30)$$

sonucuna ulaşılır. (2.30) ifadesinden, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ 'lere bağlı olduğu görülmektedir.

2.2. Minimum Çapraz Entropi Metodu

Minimum çapraz entropi metodu (MinxEnt), Kullback'in öncüsü olduğu diğer önemli bir entropi optimizasyon metodudur. Teorik anlamları ve uygulama alanlarının taşıdığı önem açısından MaxEnt metoduyla rekabet eder (Kapur ve Kesevan 1992). Bu çalışmamızda kullanım alanı geniş olması nedeniyle minimum çapraz entropi metodu için, kısaca MinxEnt deyimini kullanılacaktır.

Bilgi olarak fiziksel rassal değişkenden elde edilmiş moment değerleri ile bu rassal değişkene ait önsel bir dağılım olduğunda; Kullbak-Leibler ölçümünü, rassal değişkenden elde edilen moment değer kısıtlarına ve önsel dağılıma göre minimum yapan metoda MinxEnt metodu ve bu metottan elde edilen dağılıma

MinxEnt dağılımı denilmektedir (Kullback 1959; Kullback-Leibler 1951). Burada moment koşulları önceden verilir ve buna göre önsel dağılıma en yakın dağılım belirlenir. Bu metotta önsel dağılım olarak uniform (düzgün) dağılım seçilirse, MaxEnt metodu, MinxEnt metodunun bir özel sonucu olarak ortaya çıkar.

2.2.1. Kesikli Rassal Değişkenler için Minimum Çapraz Entropi Metodu

X rassal değişkeni, x_1, x_2, \dots, x_n durumlarına sahip, her bir durumun gerçekleşme olasılığı p_1, p_2, \dots, p_n olan kesikli bir rassal değişken olsun ve X rassal değişkeni, q_1, q_2, \dots, q_n şeklinde önsel bir dağılıma sahip olsun. Bu durumda Kullback-Leibler ölçümü

$$D(p : q) = \sum_{i=1}^n p_i \ln\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \quad (2.31)$$

şeklinde tanımlanır (Kullback 1959). Kullback-Leibler ölçümünü,

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (2.32)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n g_1(x_i) p_i = \mu_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n g_m(x_i) p_i = \mu_m \end{array} \right\} \quad (2.33)$$

ile verilen kısıtlara göre minimum yapan metoda, MinxEnt metodu ve bu metottan elde edilen dağılıma MinxEnt dağılımı denir. (2.31) ölçümünde kullanılan $q(x)$ fonksiyonuna da rassal değişken hakkında önsel bilgi denir. (2.33) de ifade edilen $g_j(x)$ 'ler ($j = 1, \dots, m$) moment fonksiyonları, μ_j 'ler ise ($j = 1, \dots, m$) moment fonksiyonları yardımıyla rassal değişkenden elde edilen moment değerleridir.

(2.31) de verilen Kullback-Leibler ölçümünü, (2.32) ve (2.33) kısıtlarına göre minimumunu bulma problemi Lagrange çarpanları yöntemiyle çözülebilir. Buna göre L Lagrange fonksiyonu,

$$L \equiv \sum_{i=1}^n p_i \ln\left(\frac{p_i}{q_i}\right) - (1 - \alpha_0) \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right) - \sum_{j=1}^m \alpha_j \left(\sum_{i=1}^n g_j(x_i) p_i - \mu_j \right) \quad (2.34)$$

şekilde tanımlanır. (2.34) de kullanılan $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 'lere Lagrange çarpanları denir. L fonksiyonunu minimum yapan p_i 'leri bulmak için, (2.34) fonksiyonunun p_i 'lere göre kısmi türevleri alınıp, sıfıra eşitlenmelidir. L fonksiyonun p_i 'lere göre kısmi türevleri,

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = -\ln \frac{p_i}{q_i} - \frac{1/q_i}{p_i/q_i} p_i - (\alpha_0 - 1) - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i) \quad , (i = 1, \dots, n) \quad (2.35)$$

şekilde bulunur. (2.35) ifadesi sıfıra eşitlendiğinde,

$$\ln \frac{p_i}{q_i} - 1 - \alpha_0 + 1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i) = 0 \quad , (i = 1, \dots, n)$$

veya

$$\ln p_i = \ln q_i - \alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i) \quad , (i = 1, \dots, n) \quad (2.36)$$

elde edilir. (2.36) eşitliklerinden $p_i, (i = 1, \dots, n)$ olasılıkları,

$$p_i = q_i \exp\left(-\alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) \quad , (i = 1, \dots, n) \quad (2.37)$$

şeklinde bulunur. (2.37) ile ifade edilen $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ olasılık dağılımı, (2.31) de verilen $D(p : q)$ Kullback-Leibler ölçümünü, (2.32) ve (2.33) göre minimum yapan MinxEnt dağılımıdır.

(2.37) ifadesinden görüldüğü gibi, $p_i, (i = 1, \dots, n)$ olasılıkları $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarına bağlıdır. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının değerleri (2.32) ve (2.33) eşitlikleri yardımıyla bulunabilir.

MaxEnt metodunda olduğu gibi, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ 'ye bağlı olduğunu göstermek için, (2.37) ifadesini daha ayrıntılı olarak,

$$p_i = q_i \exp(-\alpha_0) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) \quad , (i = 1, \dots, n) \quad (2.38)$$

şeklinde yazılır. (2.38) deki olasılık dağılımı (2.32) kısıdında yerine yazıldığında,

$$\sum_{i=1}^n q_i \exp(-\alpha_0) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) = 1 \quad (2.39)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\exp(-\alpha_0) \sum_{i=1}^n q_i \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) = 1 \quad (2.40)$$

ifadesi bulunur. Buradan,

$$\sum_{i=1}^n q_i \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) = \exp(\alpha_0) \quad (2.41)$$

sonucuna ulaşılır. (2.41) eşitliğinden, α_0 Lagrange çarpanının $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarına bağlı olduğu görülmektedir.

Benzer şekilde (2.38) ifadesi (2.33) kısıtların da yerine yazıldığında,

$$\sum_{i=1}^n q_i g_j(x_i) \exp(-\alpha_0) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) = \mu_j \quad , (j = 1, \dots, m) \quad (2.42)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\sum_{i=1}^n q_i g_j(x_i) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) = \mu_j \exp(\alpha_0) \quad , (j = 1, \dots, m) \quad (2.43)$$

ifadesi bulunur. (2.41) eşitliği (2.43)'de yerine yazıldığında,

$$\sum_{i=1}^n q_i g_j(x_i) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) = \mu_j \left\{ \sum_{i=1}^n q_i \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) \right\}, (j = 1, \dots, m) \quad (2.44)$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\mu_j = \frac{\sum_{i=1}^n q_i g_j(x_i) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right)}{\sum_{i=1}^n q_i \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right)} \quad , (j = 1, \dots, m) \quad (2.45)$$

ifadesi elde edilir (Kapur ve Kesevan 1992). (2.4) ifadesinden α_j , $(j = 1, \dots, m)$ 'lerin μ_1, \dots, μ_m 'lere bağlı olduğu görülmektedir.

2.2.2. Sürekli Rassal Değişkenler için Minimum Çapraz Entropi Metodu

X sürekli rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ve X rassal değişkeni $q(x)$ şeklinde önsel dağılıma sahip olsun. Bu durumda Kullback-Leibler ölçümü,

$$D(f : q) = \int_a^b f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} dx \quad (2.46)$$

$$F(x) = \left(f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} - (\alpha_0 - 1)f(x) - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j f(x) - \frac{1}{b-a} \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu_j + \alpha_0 - 1 \right) \quad (2.52)$$

şeklindedir. (2.49) ifadesindeki $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 'lere Lagrange çarpanları denir. L fonksiyoneline ekstremum değer veren $f(x)$ fonksiyonu,

$$\frac{\partial F}{\partial f(x)} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'(x)} \right) = 0 \quad (2.53)$$

Euler-Lagrange denklemi yardımıyla bulunabilir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$\frac{\partial F}{\partial f'(x)} = 0$$

ve

$$\frac{\partial F}{\partial f(x)} = \ln \frac{f(x)}{q(x)} - \frac{1/q(x)}{f(x)/q(x)} f(x) - (\alpha_0 - 1) - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) \quad (2.54)$$

eşitlikleri bulunur. (2.54) ifadeleri (2.53) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\ln \frac{f(x)}{q(x)} - \frac{1/q(x)}{f(x)/q(x)} f(x) - (\alpha_0 - 1) - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) = 0 \quad (2.55)$$

elde edilir. (2.55) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\ln f(x) = \ln q(x) - \alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) \quad (2.56)$$

elde edilir. $f(x)$ fonksiyonu,

$$f(x) = q(x) \exp(\alpha_0) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) \quad (2.57)$$

şeklinde bulunur.

(2.57) ile ifade edilen fonksiyona MinxEnt dağılım fonksiyonu denir. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının değerleri (2.47) ve (2.48) eşitlikleri ile bulunabilir.

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ 'ye bağlı olduğunu göstermek için (2.57) ifadesi (2.47) da yerine yazıldığında,

$$\int_a^b q(x) \exp(-\alpha_0) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx = 1 \quad (2.58)$$

eşitliği elde edilir. (2.58)'de gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\int_a^b q(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx = \exp(\alpha_0) \quad (2.59)$$

sonucu bulunur. (2.59) eşitliğinden, α_0 Lagrange çarpanının $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarına bağlı olduğu görülür.

Benzer şekilde (2.57) ifadesi (2.48) de yerine yazıldığında,

$$\int_a^b q(x) g_j(x) \exp(-\alpha_0) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx = \mu_j \quad , (j = 1, \dots, m) \quad (2.60)$$

ifadesi elde edilir. (2.60) da gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\int_a^b q(x) g_j(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx = \mu_j \exp(\alpha_0) \quad , (j = 1, \dots, m) \quad (2.61)$$

elde edilir. (2.59) ifadesi (2.61)'de yerine yazılıp, gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\mu_j = \frac{\int_a^b q(x) g_j(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx}{\int_a^b q(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx} \quad , (j = 1, \dots, m) \quad (2.62)$$

sonucu bulunur. (2.63) ifadesinden, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ 'lere bağlı olduğu görülmektedir.

3. BANACH TEOREMİ VE NEWTON YÖNTEMİ

Matematiğin çeşitli dallarında, bilinmeyenlerden oluşan sistemin çözümüne sahip olduğunu ispatlamak için fonksiyonel analizin geliştirmiş olduğu bir çok metot vardır. Bu metotlara sabit nokta prensipleri denir. Söz konusu metotlardan en yaygın kullanılanı sıkıştırıcı operatörler prensibidir.

Sıkıştırıcı operatörler prensibi yardımıyla, verilen denklemin çözüme sahip olması, bu çözümün tek bir tane olması ve ardışık yaklaşımlar yardımıyla çözümün bulunması kanıtlanır. Bu bölümde sıkıştırıcı operatörler prensibinin temel teoremi olan Banach teoremi ve bu teoremin sonucu olan Newton yöntemi ele alınmaktadır. MinMaxEnt ve MaxMinxEnt problemlerinin çözümünde teorik temel olarak Newton yöntemi dikkate alınmaktadır.

3.1. Temel Kavramlar ve Banach Teoremi

Sıkıştırıcı operatörler prensibinin ifade edilmesi için, gereken bazı temel kavramlar şu şekildedir (Kantoroviç, ve Akilov 1982, Kolmogorov ve Fomin 1972).

- Metrik uzay

x, y, z, \dots elemanlarından oluşan bir M kümesi olsun. M 'nin elemanlarına noktalar denilmektedir. Ancak bu noktalar genel anlamda sayılar, fonksiyonlar, vektör fonksiyonlar, operatörler vs. olabilir. Eğer M kümesinde bir metrik tanımlanmış ise bir başka deyişle iki nokta arasında mesafe tanımlanmış ise M kümesine metrik küme denir.

$x, y \in M$ alınsın ve bu iki nokta arasındaki mesafe $\rho(x, y)$ ile gösterilsin.

$\rho(x, y) \forall x, y$ çiftine karşın bir sayı tanımlar. $\rho(x, y)$,

1. $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $x, y, z \in M$ için $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

koşullarını sağlarsa, $\rho(x, y)$ 'e metrik denir.

M metrik kümesinde limit kavramı tanımlanmış ise (herhangi bir dizinin limiti) bu kümeye metrik uzay denir.

$\{x_n\}$ dizisi ele alınsın ve $x_n \in M$ olsun. $x \in M$ elemanı için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

ise $\{x_n\}$ dizisine yakınsaktır denir. Bir başka ifade ile $\forall \varepsilon > 0$ için $N(\varepsilon) > 0$ vardır ki $n > N$ için $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ koşulu sağlanır.

- Cauchy dizisi

$\{x_n\}$ dizisi ele alınsın. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına göre $N(\varepsilon) > 0$ vardır ki $n > N$ ve $m = 1, 2, 3, \dots$ için,

$$\rho(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon \quad (3.2)$$

koşulu sağlanıyor ise o zaman $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

- Tam metrik uzay

Eğer M metrik uzayında her bir $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak (limite sahip) ise, bir başka ifade ile,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) \rightarrow 0 \text{ ve } x \in M \quad (3.3)$$

ise M uzayına tam metrik uzay denir.

- Operatör

M metrik uzayında A operatörü, M 'in her bir x elemanını başka bir N uzayının tek bir Ax elemanı ile karşılaştıran uygunluk (kural) şeklinde tanımlanır.

Eğer A operatörü, M metrik uzayının her bir elemanı ($\forall x \in M$), M metrik uzayının bir elemanı ile karşılaştırılır ise ($Ax \in M$), A operatörüne M uzayında işlem yapan operatör denir.

- Sıkıştırıcı operatör

A operatörü, M metrik uzayında işlem yapan bir operatör ise ve $\forall x, y \in M$ için,

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y), \quad (0 < \alpha < 1) \quad (3.4)$$

koşulunu sağlıyor ise, diğer bir ifadeyle x ve y noktalarının görüntüleri arasındaki mesafe x ve y arasındaki mesafeden küçük ise, bu durumda A operatörüne sıkıştırıcı operatör denir.

- Normlanmış uzay

N lineer uzayında norm kavramı tanımlanmış ise, bu uzaya normlanmış lineer uzay denir. N uzayında norm, $x \in N$ için $\|x\|$ ile gösterilir. $\|x\|, \forall x$ için bir sayı tanımlar; $\|x\|$ aşağıdaki koşulları,

1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. Keyfi λ skaler için $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

sağlıyor ise, $\|x\|$ 'e norm denir.

N normlanmış lineer uzayı metrik uzayın özel bir halidir. Eğer N uzayında ρ mesafesi, $\rho(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlanırsa, N uzayı metrik uzay olur.

Bu bilgiler doğrultusunda, Banach teoremi aşağıdaki şekilde verilmektedir.

Teorem 3.1. A operatörü tam metrik M uzayında işlem yapan sıkıştırıcı bir operatör ise, A operatörünün M metrik uzayında tek bir tane sabit noktası vardır.

Başka değişke

$$Ax = x \quad (3.5)$$

denkleminin tek bir tane çözümü vardır ve bu çözüm ardışık yaklaşımlar metodu olan,

$$x_n = Ax_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.6)$$

dizisinin limitiyle bulunabilir ve $\{x_n\}$ dizisinin limiti, $x_0 \in M$ başlangıç noktasına bağlı değildir (Kantoroviç, ve Akilov 1982).

Banach teoreminin kanıtı, (Kantoroviç, ve Akilov 1982, Kolmogorov ve Fomin 1972). kaynaklarda verilmektedir.

3.2. Newton Yöntemi

Soyut fonksiyonların (operatörlerin) diferansiyellenmesi işlemi normlanmış lineer uzaylarda tanımlandığı için, Banach teoreminin bir uygulaması olan Newton yöntemi normlanmış lineer uzayda ele alınmaktadır.

Newton yöntemi,

$$f(x) = 0 \quad (3.7)$$

denkleminin çözüme sahip olmasına ve bu çözümün ardışık yaklaşımlar yöntemi ile bulunmasına dayanmaktadır. (3.7) ile gösterilen $f(x)$ denklemini bir operatör olduğu için, bu denklem matematiğin çeşitli dallarında ortaya çıkan çok genel denklem veya denklemler sistemini kapsar.

$f(x)$ fonksiyonu herhangi bir normlanmış lineer uzayda n . mertebeden türeve sahip fonksiyon ise, bu fonksiyonunun Taylor açılımı,

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \frac{d^3 f(x_0)}{3!} + \dots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + o(\|x - x_0\|^n) \quad (3.8)$$

şeklinde ifade edilir. Eğer $f(x)$, tek değişkenli bir fonksiyon ise,

$$\begin{aligned} df(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\ &\vdots \\ d^n f(x_0) &= f^{(n)}(x_0)(x - x_0) \end{aligned} \quad (3.9)$$

şeklinde türevler ifade edilir. Eğer $f(x)$, çok değişkenli ($x = (x_1, \dots, x_n)$) bir fonksiyon ise,

$$\begin{aligned} df(x_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) f(x_0) \\ d^2 f(x_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 f(x_0) \\ &\vdots \\ d^n f(x_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^n f(x_0) \end{aligned} \quad (3.10)$$

şeklinde türevler ifade edilir.

Newton yöntemi, çözüm olarak $f(x)$ fonksiyonunun Taylor açılımının lineer kısmı ele alınmaktadır ve bu kısmı

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

veya

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \quad (3.11)$$

şeklinde sıfıra eşitlenir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$x - x_0 = -[f'(x_0)]^{-1} f(x_0)$$

veya

$$x = x_0 - [f'(x_0)]^{-1} f(x_0) \quad (3.12)$$

sonucuna ulaşılır. (3.12) eşitliğin yararlanarak aşağıdaki $\{x_n\}$,

$$x_n = x_{n-1} - [f'(x_{n-1})]^{-1} f(x_{n-1}) \quad (3.13)$$

dizisi oluşturulur.

$\{x_n\}$ dizisi, türevin ters operatörü ($[f'(x)]^{-1}$), $x = x_{n-1}$ deki değerine bağlıdır. Bu durumda her bir x_n değerini hesaplamak zorlaşmaktadır. Bu zorluğu aşmak için basitleştirilmiş Newton yöntemi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

3.2.1. Basitleştirilmiş Newton Yöntemi

Basitleştirilmiş Newton yöntemi, (3.13)' de tanımlanan $\{x_n\}$ dizisinde, ($[f'(x_{n-1})]^{-1}$)'in yerine ($[f'(x_0)]^{-1}$) yazılmasıyla elde edilir. Bir başka ifade ile basitleştirilmiş Newton yöntemi,

$$x_n = x_{n-1} - [f'(x_0)]^{-1} f(x_{n-1}) \quad (3.14)$$

şeklinde ifade edilir. (3.14)' deki $\{x_n\}$ dizisi, A operatörü şeklinde ifade edildiğinde,

$$Ax = x - [f'(x_0)]^{-1} f(x) \quad (3.15)$$

operatörüne uygun ardışık yaklaşımlar dizisi olarak ifade edilebilir. (3.15)'de ifade edilen A operatörü,

$$Ax = x, \quad (3.16)$$

şeklinde sabit noktaya sahip ise, sonuç olarak

$$x = x - [f'(x_0)]^{-1} f(x)$$

ve

$$[f'(x_0)]^{-1} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0 \quad (3.17)$$

sonucu bulunur. Bu durumda (3.17)' ye göre, (3.7) denklemin çözümü A operatörünün sabit noktasıdır. Bir başka ifade ile (3.7) denkleminin çözümünü bulma problemi, (3.15) operatörünün sabit noktasını bulma problemine eşdeğerdir.

Eğer (3.15) de ifade edilen A operatörü, belli koşullar altında sıkıştırıcı bir operatör olduğu gösterilirse, Banach teoremine göre (3.15)' de ifade edilen A operatörünün sabit noktası, ardışık yaklaşımlar yardımıyla bulunabilir.

Teorem 3.2. Normlanmış tam metrik uzayda,

$\forall \bar{x}, \bar{x}$ için $\|f'(\bar{x}) - f'(\bar{x})\| \leq L\|\bar{x} - \bar{x}\|$ koşulunu sağlayan, L Lipshitz katsayısı olsun,

$$M_0 = \|[f'(x_0)]^{-1}\|,$$

$$h_0 = M_0 L \eta_0 \text{ ve } \eta_0 = \|[f'(x_0)]^{-1} f(x_0)\|,$$

$$h_0 t^2 - t + 1 = 0 \text{ ve } t_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h_0}}{2h_0}$$

ve

$h_0 \leq \frac{1}{4}$ sağlıyor ise, (3.7) denkleminin,

$$\|x - x_0\| \leq t_0 \eta_0 \tag{3.18}$$

küresi içinde tek bir çözümü var ve bu çözüm,

$$x_n = x_{n-1} - [f'(x_0)]^{-1} f(x_{n-1}) \tag{3.19}$$

$\{x_n\}$ dizisinin limiti şeklinde bulunabilir (Kantoroviç, ve Akilov 1982).

Kant

Basitleştirilmiş Newton yönteminde gösterildiği gibi, (3.7) denkleminin çözümünü bulma problemi (3.15)'deki A operatörünün sabit noktasını bulma problemine eşdeğerdir. Bu problemin çözümü daha önce Banach teoreminde kanıtlanmıştır. Buna göre A operatörünün Banach teoreminin tüm koşullarını sağladığı gösterilirse Teorem 3.2. kanıtlanmış olur.

Bu durumda, ilk olarak (3.15)' de tanımlanan A operatörünün, (3.18) küresinin de işlem yapan bir operatör olduğu gösterilmelidir.

Bu amaçla (3.15)'deki A operatörü,

$$Ax - x_0 = x - x_0 - [f'(x_0)]^{-1} f(x) \quad (3.20)$$

şeklinde yazılır ve (3.20)'da gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$Ax - x_0 = [f'(x_0)]^{-1} \{f'(x)(x - x_0) - f(x)\}$$

veya

$$Ax - x_0 = [f'(x_0)]^{-1} \{-(f(x) - f(x_0) - f'(x)(x - x_0) + f(x_0))\} \quad (3.21)$$

eşitliği bulunur. (3.21) eşitliğinde norm alındığında,

$$\|Ax - x_0\| = \|[f'(x_0)]^{-1}\| \left\| -(f(x) - f(x_0) - f'(x)(x - x_0) + f(x_0)) \right\| \quad (3.22)$$

elde edilir. Norm özelliklerinden faydalanıldığında

$$\|Ax - x_0\| \leq \underbrace{\|[f'(x_0)]^{-1}\|}_{M_0} \left\| \underbrace{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}_{\varphi(x)} \right\| + \underbrace{\|[f'(x_0)]^{-1} f(x_0)\|}_{\eta_0}$$

veya

$$\|Ax - x_0\| \leq M_0 \|\varphi(x)\| + \eta_0 \quad (3.23)$$

eşitliği elde edilir.

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \quad (3.24)$$

şeklinde ifade edildiğinde, $\varphi(x)$ fonksiyonunun özellikleri

$$\varphi(x_0) = 0 \text{ ve } \varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0) \quad (3.25)$$

şeklindedir. $\varphi'(x)$ fonksiyonunda gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\|\varphi'(x)\| = \|f'(x) - f'(x_0)\| \quad (3.26)$$

eşitliği elde edilir. Teoremde verilen Lipshitz koşuluna göre,

$$\|\varphi'(x)\| = \|f'(x) - f'(x_0)\| \leq L\|x - x_0\| \quad (3.27)$$

sonucu bulunur. $\varphi(x)$ fonksiyonunda gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\|\varphi(x)\| = \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| \quad (3.28)$$

eşitliği elde edilir. Soyut fonksiyonlar için sonlu artışlar teoremine göre,

$$\|\varphi(x)\| = \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| \leq \sup \|\varphi'(x)\| \|x - x_0\| \quad (3.29)$$

eşitsizliği geçerlidir. $\|\varphi'(x)\|$ normu yerine, (3.27) eşitsizliği yazıldığında,

$$\|\varphi(x)\| = \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| \leq L\|x - x_0\| \|x - x_0\| \quad (3.30)$$

eşitsizliği elde edilir. $\|x - x_0\|$ normu yerine, (3.18) yazıldığında,

$$\|\varphi(x)\| \leq L\|x - x_0\|^2 \leq L(t_0\eta_0)^2 \quad (3.31)$$

eşitsizliği bulunur.(3.31) eşitsizliği, (3.23)'de yerine yazıldığında,

$$\|Ax - x_0\| \leq M_0 L t_0^2 \eta_0^2 + \eta_0 \quad (3.32)$$

eşitsizliğine ulaşılır. (3.32) eşitsizliğinde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\|Ax - x_0\| \leq \eta_0 \underbrace{(M_0 L \eta_0 t_0^2 + 1)}_{h_0}$$

veya

$$\|Ax - x_0\| \leq \eta_0 (h_0 t_0^2 + 1) \quad (3.33)$$

elde edilir. Teorem 3.2 koşullarından,

$$h_0 t^2 - t + 1 = 0 \text{ ve } h_0 t^2 + 1 = t \quad (3.34)$$

elde edilir. (3.34) eşitliği, (3.33) de yazıldığında,

$$\|Ax - x_0\| \leq \eta_0 t_0 \quad (3.35)$$

sonucu elde edilir.

Böylece A operatörünün $\eta_0 t_0$ yarı çaplı küreyi kendisine dönüştürdüğü, bir başka deyişle A operatörünün işlem yapan operatör olduğu gösterilmiş olur.

Banach teoreminde, A operatörünün diğer bir özelliği de sıkıştırıcı operatör olmasıdır. Bu göre (3.15) de tanımlanan A operatörünün sıkıştırıcı operatör olduğu gösterilmelidir. Bir başka deyişle (3.15) de tanımlanan A operatörünün,

$$\|Ax - Ay\| \leq \alpha \|x - y\|, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.36)$$

olduğunu gösterilmelidir. Bu amaçla soyut fonksiyonlar için sonlu artışlar teoreminden yararlanıldığında,

$$\|Ax - Ay\| \leq \sup \|A'\| \|x - y\| \quad (3.37)$$

eşitsizliği elde edilir. A' bulmak için, (3.15) de tanımlanan A operatörünün türevi alındığında,

$$A'x = I - [f'(x_0)]^{-1} f'(x_0) \quad (3.38)$$

sonucu bulunur. (3.38)'de gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$A'x = [f'(x_0)]^{-1} (f'(x_0) - f'(x)) \quad (3.39)$$

elde edilir. (3.359) eşitliğinde norm alındığında,

$$\|A'x\| = \|[f'(x_0)]^{-1}\| \|f'(x_0) - f'(x)\| \quad (3.40)$$

ifadesi elde edilir. Teorem 3.2 deki Lipshitz koşuluna göre,

$$\|A'x\| \leq \|[f'(x_0)]^{-1}\| L\|x - x_0\| \quad (3.41)$$

eşitsizliği elde edilir. $\|x - x_0\|$ normu yerine, (3.18) yazıldığında,

$$\|A'x\| \leq \underbrace{\|[f'(x_0)]^{-1}\|}_{M_0} Lt_0\eta_0$$

veya

$$\|A'x\| \leq \underbrace{M_0Lt_0\eta_0}_{h_0} t_0 \quad (3.42)$$

sonucu bulunur. (3.42) eşitsizliği, (3.37)' de yerine yazıldığında,

$$\|Ax - Ay\| \leq h_0 t_0 \|x - y\| \quad (3.43)$$

sonucu elde edilir. A operatörü, sıkıştırıcı operatör olması için (3.56)'da verilen α koşulunu sağlaması gerekir. Bu durum,

$$\|Ax - Ay\| \leq \underbrace{h_0 t_0}_{\alpha} \|x - y\|, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.44)$$

ifadesinde gösterilir. α katsayısı,

$$\alpha = h_0 t_0 \quad (3.45)$$

şeklinde dir. Teorem 3.2 koşullarından t_0 'ın değeri yerine yazıldığında,

$$\alpha = h_0 \frac{1 - \sqrt{1 - 4h_0}}{2h_0}$$

veya

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h_0}}{2} \quad (3.46)$$

eşitliği elde edilir. Teorem 3.2 koşullarına göre $h_0 \leq \frac{1}{4}$ olduğundan, $0 < \alpha < 1$

koşulu sağlanmış olur.

Böylece (3.15) de tanımlanan A operatörünün sıkıştırıcı operatör olduğu gösterilmiş olur.

Bu durumda, A operatörü normlanmış tam metrik uzayda işlem yapan ve sıkıştırıcı operatör olduğu gösterildiğinden, A operatörünün tam metrik uzayda tek bir tane sabit noktası vardır (Banach teoremi). Bu sabit nokta (3.7) denkleminin çözümüdür.

Sonuç olarak, Teorem 3.2 kanıtlanmış olur.

4. MinMaxEnt ENTROPİ OPTİMİZASYON PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde, kesikli ve sürekli rassal değişkenler için MaxEnt metodu yardımıyla moment fonksiyonlarına bağlı özel fonksiyoneller ile, bu fonksiyonellere minimum değer veren ve informasyonu maksimum yapan MinMaxEnt dağılımlarından bahsedilmiştir ve bu dağılımların nümerik yöntemlerle bulunması problemler şeklinde ortaya konmuştur. Ayrıca, problemlerin çözümünün varlığı matematiksel olarak kanıtlanmıştır. Ortaya konan problemlerin oluşturulması ve nümerik çözümleri için, MATLAB 6.5 de hazırlanmış programın akış diyagramı verilmiştir.

Bilinen istatistiksel dağılımlara uymayan gözlem değerlerinin MinMaxEnt dağılımıyla ifade edilebileceği, hazırlanmış özel program yardımıyla gösterilmiştir. Bunlara ek olarak moment kısıt sayısı arttırıldıkça, MinMaxEnt dağılımının modellemeye etkisi gözlenmiştir.

4.1. Kesikli Rassal Değişkenler için MinMaxEnt Entropi Optimizasyon Problemi

x_1, \dots, x_n rassal örnek olsun ve örnek içindeki değerlere, sırasıyla p_1, \dots, p_n olasılıkları karşılık gelsin.

$$H(x) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) \quad (4.1)$$

entropi fonksiyonu

$$\sum_{i=1}^n p_i g_j(x_i) = \mu_j, \quad (j = 0, 1, \dots, m) \quad (4.2)$$

burada $\mu_0 = 1$, $g_0(x) = 1$, $g = (g_0, g_1, \dots, g_m)$ moment vektör fonksiyonu ve $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, g 'ye uygun moment vektör değeridir; $n > m + 1$ kısıtları altında maksimum değere sahiptir. $H(x)$ entropi fonksiyonu bu değeri,

$$p_i = \exp\left(-\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x_i)\right), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.3)$$

ile verilen $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ olasılık dağılım fonksiyonuyla alır. (4.3) eşitliğinde verilen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 'ler Lagrange çarpanları ve $g = (g_1, \dots, g_m)$ moment vektör fonksiyonudur.

(4.3) eşitliğinde verilen $\alpha_j, j = 0, \dots, m$ Lagrange çarpanları,

$$\sum_{i=1}^n g_j(x_i) \exp\left(-\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) = \mu_j, j = 0, 1, \dots, m \quad (4.4)$$

sisteminin çözümü olarak bulunabilir.

(4.3) ile ifade edilen p dağılımı, (4.1) de verilen $H(x)$ entropi fonksiyonunda yerine yazıldığında,

$$H_{\max} = \sum_{i=1}^n \exp\left(-\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) \left(\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) \quad (4.5)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$H_{\max} = \sum_{j=0}^m \alpha_j \sum_{i=1}^n p_i g_j(x_i),$$

veya

$$H_{\max} = \sum_{j=0}^m \alpha_j \mu_j \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.6) eşitliği $H(x)$ entropi fonksiyonunun maksimum değerini göstermektedir. Bu eşitlikte kullanılan $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanları, $\mu_0 = 1, g_0(x) = 1$ olmak üzere, $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m$ 'ler $g_0(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ 'e uygun moment değerleridir.

(4.2) eşitliklerinden, $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)$ vektörünün $g = (g_0, g_1, \dots, g_m)$ moment vektör fonksiyonuna, (4.4) ifadesinden de $\alpha_j, (j = 0, \dots, m)$ 'lerin μ 'ye bağlı olduğu görülmektedir. Bir başka deyişle $\alpha_j, (j = 0, \dots, m)$ 'ler μ 'ye bağlı fonksiyonlar, μ 'de g 'ye bağlı vektör fonksiyonel olduğu için, $\alpha_j, (j = 0, \dots, m)$ 'ler g 'ye bağlı fonksiyonlardır. Sonuç olarak (4.6)'de verilen H_{\max} formülü g 'ye bağlı bir fonksiyoneldir. Bu fonksiyonel,

$$S(g) = H_{\max} \quad (4.7)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$S(g)$ fonksiyoneli; MaxEnt metodu yardımıyla, $g = (g_0, g_1, \dots, g_m)$ moment vektör fonksiyonlarına bağlı H_{\max} değerine sahip fonksiyonel olarak tanımlanmıştır (Shamilov 2006a). Bu fonksiyonele, MaxEnt fonksiyoneli denilmiştir.

Kesikli rassal değişkenler için MinMaxEnt entropi optimizasyon problemi, Tanım 4.1. de verilmiştir.

Tanım 4.1. (4.7) ile tanımlanmış $S(g)$ fonksiyoneline, verilmiş K moment vektör fonksiyonlar kümesinde minimum değer veren moment vektör fonksiyonunun bulunması problemine kesikli rassal değişkenler için MinMaxEnt entropi optimizasyon problemi denilecektir. Bu problem iki şekilde düşünülebilir.

- Eğer K moment vektör fonksiyonlar kümesi, sonlu sayıda elemandan oluşuyor ve her bir moment vektör fonksiyonunun bileşenleri lineer bağımsız ise $S(g)$ fonksiyoneli bu küme içinde minimum değere sahiptir.
- Eğer K moment vektör fonksiyonlar kümesi, bileşenleri lineer bağımsız olan sonsuz sayıda elemanlardan oluşuyor ise $S(g)$ fonksiyonelinin bu küme içinde minimuma sahip olabilmesi için bu fonksiyonelin bazı özelliklere sahip olması gerekmektedir.

Not 4.1. K moment vektör fonksiyonlar kümesinde bileşenleri lineer bağımlı olan vektörler varsa, bu vektörler yerine bileşenleri söz konusu vektörün lineer bağımsız bileşkelerinden oluşan vektörler dikkate alınarak Tanım 4.1. ile verilen problem yine ortaya konulabilir.

(4.7) ile ifade edilen MaxEnt fonksiyonelinin, sonsuz sayıda elemandan oluşan kümede minimum değere sahip olmasını sağlayan özellikler teoremler şeklinde verilmiştir.

Teorem 4.1. (4.7) ile ifade edilen $S(g)$ fonksiyoneli sürekli vektör moment fonksiyonları kümesinde $(C[a,b])$ süreklidir.

Teorem 4.2. $S(g)$ fonksiyoneli, $(C[a,b])$ uzayına ait K kompakt kümesinde en büyük ve en küçük değerine ulaşır.

Bu özellikler (Shamilov 2006a, Mert Kantar 2006) çalışmalarında kanıtlamıştır.

4.1.1. MinMaxEnt Dağılımı

(4.7)'de tanımlanmış $S(g) \subset C[a, b]$ fonksiyoneli, K kompakt moment vektör fonksiyonları kümesinde minimum değerini,

$$\min_{g \in K} S(g) = S(g^{(0)}) \quad (4.8)$$

$g^{(0)} = (g_0^{(0)}, g_1^{(0)}, \dots, g_m^{(0)})$ moment vektör fonksiyonunda alsın.

$S(g)$ fonksiyoneline K kompakt kümesinde minimum değer veren $g^{(0)}$ moment vektör fonksiyonuna uygun $p^{(0)} = (p_1^{(0)}, \dots, p_m^{(0)})$ MaxEnt dağılımı, kesikli rassal değişkenler için MinMaxEnt dağılımı olarak tanımlanmıştır (Shamilov 2006a).

$p^{(0)} = (p_1^{(0)}, \dots, p_m^{(0)})$ MinMaxEnt dağılımı; (4.1) ile verilen $H(x)$ entropi fonksiyonunu, $g^{(0)}$ moment vektör kısıtına göre maksimum yapılmasıyla bulunur. Söz konusu kesikli rassal değişkenler için MinMaxEnt dağılımı,

$$p_i^{(0)} = \exp(-\alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j^{(0)}(x_i)), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.9)$$

şeklindedir. (4.9) da verilen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 'ler Lagrange çarpanları, $g^{(0)} = (g_1^{(0)}, \dots, g_m^{(0)})$ moment vektör fonksiyonudur.

Kesikli rassal değişkenler için MinMaxEnt dağılımı şu özelliğe sahiptir; **Teorem 4.3.** Kesikli rassal değişkenler için tanımlanmış MinMaxEnt dağılımı, rassal örnekten elde edilen dağılımlar içerisinde en büyük informasyonu içeren dağılımdır.

4.1.2. MinMaxEnt Dağılımının Varlığı

$p^{(0)} = (p_1^{(0)}, \dots, p_m^{(0)})$ MinMaxEnt dağılımı, (4.9) da ifade edilen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının bulunmasına bağlı olduğundan, kesikli rassal değişkenler için MinMaxEnt optimizasyon probleminin çözümünde $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının μ_1, \dots, μ_m moment değerlerine bağlılık karakterinin incelenmesi gerekmektedir.

Bu bağlılık karakterinin incelenmesi için, (4.4) ifadesi,

$$\begin{aligned}
f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_m) &= \mu_1 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
f_m(\alpha_1, \dots, \alpha_m) &= \mu_m
\end{aligned} \tag{4.10}$$

eşitlikleri şeklinde yazılabilir. Burada $f = (f_1, \dots, f_m)'$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)'$ ve

$$f_j(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \frac{\sum_{i=1}^n g_j(x_i) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x_i)\right)} , (j = 1, \dots, m) \tag{4.11}$$

şeklindedir. (4.10) sistemi aynı zamanda,

$$f(\alpha) = \mu \tag{4.12}$$

şekilde de yazılabilir.

(4.12) denkleminin çözümünün varlığı, tekliği ve α vektörünün μ vektörüne sürekli bağlı olduğunun kanıtı MinMaxEnt dağılımının varlığının kanıtıyla ilişkilidir.

Söz konusu kanıt sürecinde önemli noktalardan biri, $\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(\alpha_1, \dots, \alpha_m)}$

Jakobian'ın sıfırdan farklı olmasıdır. Jakobian'ın sıfırdan farklı olması,

$$\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \alpha_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Var(g_1(X)) & \dots & Cov(g_1(X)g_m(X)) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ Cov(g_m(X)g_1(X)) & \dots & Var(g_m(X)) \end{vmatrix} \tag{4.13}$$

ile ortaya çıkmaktadır (Kapur ve Kesevan 1992). (4.13) ile ifade edilen determinant, moment fonksiyonlarının varyans-covaryans matrisinin determinantıdır. Eğer $1, g_1(x), \dots, g_m(x)$ moment fonksiyonları lineer bağımsız fonksiyonlar ise, bulunan varyans-covaryans matrisi pozitif tanımlı bir matristir (Cramer 1966; Papuluos, 1991). Pozitif tanımlı simetrik matrisin determinantı

sıfırdan farklı (Cramer, 1966) olduğu için $\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} \neq 0 \quad \forall \alpha \in E^m$ sonucuna

ulaşılır.

$f(\alpha) = \mu$ denkleminin çözümünün varlığı, tekliği ve μ_1, \dots, μ_m 'lere sürekli bağıllığı teorem şeklinde aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.4. $g(x) = (1, g_1(x), \dots, g_m(x))$ moment vektör fonksiyonunun bileşkeleri $[a, b]$ aralığında lineer bağımsız olsun.

$$B = \{y \in E^m : |y_j| \leq a_j\}, \quad a_j = \sum_{i=1}^n |g_j(x_i)| \quad (4.14)$$

olduğunda (4.12) için, $f : E^m \rightarrow B$ bire-bir sürekli dönüşümdür ve

$$\alpha = f^{-1}(\mu), \quad (4.15)$$

dir. Başka bir ifadeyle, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanları μ moment vektör değerlerinin sürekli, hatta diferansiyellebilir fonksiyonudur.

Kanıt

- **Tekliğin kanıtı**

$f(\alpha) = \mu$ denkleminin tek bir çözüme sahip olduğu kanıtlanmalıdır. Bu amaç için birden fazla çözümün olduğunu varsayarak, çelişkiye varma yoluyla istenen sonuca ulaşılır.

$$(4.12) \text{ denkleminin } \alpha^{(1)} = (\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(1)}) \text{ ve } \alpha^{(2)} = (\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(2)})$$

olmak üzere iki farklı çözümü olsun. Bu çözümler,

$$f(\alpha^{(1)}) = \mu \text{ ve } f(\alpha^{(2)}) = \mu \quad (4.16)$$

şeklindedir.

Eğer (4.12) denklemi iki farklı çözüme sahip ise, bu çözümler iki farklı dağılım belirlerler. Diğer bir deyişle

$$p_i^{(k)} = \exp\left(-\sum_{j=0}^m \alpha_j^{(k)} g_j(x_i)\right), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (k = 1, 2) \quad (4.17)$$

dağılımlarını belirlerler.

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad p_i \geq 0 \text{ keyfi olasılık dağılımı, } b_i \geq 0, \sum_{i=1}^n b_i \leq 1 \text{ koşulunu}$$

sağlayan ve pozitif değerler alsın. Bu durumda aşağıda verilen,

$$-\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \leq -\sum_{i=1}^n p_i \ln b_i \quad (4.18)$$

eşitsizlik geçerlidir(Papuluous 1991). (4.18) eşitsizliğinde $b_i = p_i^{(1)}$, $i = 1, \dots, n$ yazıldığında,

$$-\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \leq \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(1)} \mu_j \quad (4.19)$$

elde edilir. (4.19) da $p_i = p_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, n$ olacak şekilde yazıldığında,

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j^{(2)} \mu_j \leq \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(1)} \mu_j \quad (4.20)$$

sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j^{(1)} \mu_j \leq \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(2)} \mu_j, \quad (4.21)$$

ifadesine ulaşılır. (4.20) ve (4.21) den

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j^{(1)} \mu_j = \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(2)} \mu_j, \quad (4.22)$$

elde edilir

$H(x)$ entropi fonksiyonunun (4.22)' e göre maksimum değeri tektir.

$H(x)$ konkav bir fonksiyon olduğu için maksimum değerini tek bir noktada alır (Kapur ve Kesevan 1992). Başka bir ifade ile (4.17) den $p_i^{(1)} = p_i^{(2)}$, $(i = 1, \dots, n)$ dir.

Buradan,

$$\sum_{j=0}^m (\alpha_j^{(1)} - \alpha_j^{(2)}) g_j(x_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.23)$$

sonucu bulunur. Bu sistemin rankı $m + 1$ olduğu için sistem tek çözüme sahiptir ve

$$\alpha_j^{(1)} = \alpha_j^{(2)}, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (4.24)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece (4.12) denkleminin tek çözüme sahip olduğu kanıtlanmış olur.

- **Çözümün varlığının ve sürekliliğinin kanıtı**

(4.12) denkleminin çözüme sahip olduğu kanıtlanmalıdır. Bu kanıt için lokal bire-bir teoreminden (kapalı fonksiyonların varlık teoremi) (Spivak 1965) yararlanalım.

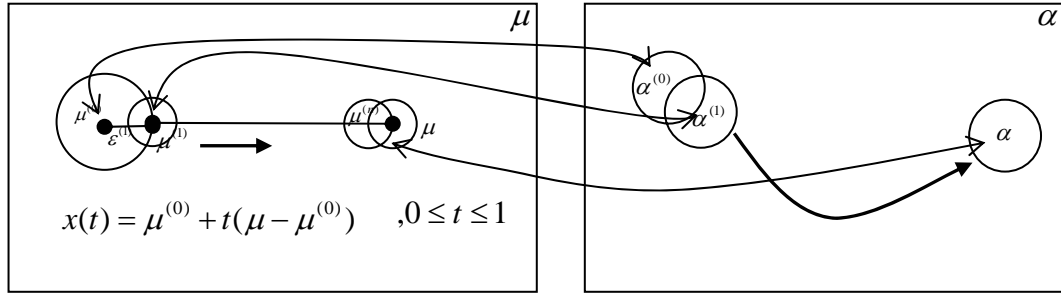
$$\forall \alpha^0 \in E^m, f(\alpha^0) = \mu^{(0)} \quad (4.25)$$

olsun. $\mu^{(0)}$ ile μ 'yü birleştiren doğru parçasını,

$$x(t) = \mu^{(0)} + t(\mu - \mu^{(0)}) \quad , 0 \leq t \leq 1 \quad (4.26)$$

şeklinde ele alalım.

Şekil 4.1. $\mu^{(0)}$ vektörü ile μ vektörünü birleştiren doğru parçası ile α çözümleri



(4.26)'da gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$x(t) - \mu^{(0)} = t(\mu - \mu^{(0)}) \quad , 0 \leq t \leq 1 \quad (4.27)$$

elde edilir. (4.27) eşitliğinde norm alındığında,

$$\|x(t) - \mu^{(0)}\| = \|t(\mu - \mu^{(0)})\| \quad , 0 \leq t \leq 1 \quad (4.28)$$

ifadesine dönüşür.(4.28) ifadesinde

$$\|x(t_1) - \mu^{(0)}\| = \varepsilon^{(1)} \quad (4.29)$$

olsun.bu durumda,

$$x(t_1) = \mu^{(1)} = \mu^{(0)} + (\mu - \mu^{(0)}) \frac{\varepsilon^{(1)}}{\|\mu - \mu^{(0)}\|} \quad (4.30)$$

sonucuna ulaşılır.

(4.12)'ya göre ifade edilen (4.13) Jakobian'ı sıfırdan farklı olduğu için, lokal birebirlik teoremine göre $\alpha^{(0)}$ in küçük komşuluğu ile $\mu^{(0)}$ in küçük

komşuluğu arasında birebir dönüşüm vardır. Bu nedenle $\mu^{(1)}$ 'a uygun $\alpha^{(1)}$ çözümü vardır. Bir başka deyişle $\alpha^{(1)} = f^{-1}(\mu^{(1)})$ vardır. Süreci bu şekilde devam ettirdiğimizde öyle $\mu^{(n)}$ vardır ki $\|\mu - \mu^{(n)}\|$ istenildiği kadar küçük yapılabilir. Bu nedenle yine lokal birebirlik teoremine göre, $f(\alpha^{(n)}) = \mu^{(n)}$ denklemi $\alpha^{(n)} = f^{-1}(\mu^{(n)})$ çözümüne sahiptir. $\mu^{(n)}$ vektörü μ 'nün küçük komşuluğunda bulunduğu ve $\mu^{(n)}$ 'nin komşuluğu ile $\alpha^{(n)}$ 'nin küçük komşuluğu arasında bire-birlik var olduğundan, $\alpha^{(n)}$ 'nin küçük komşuluğunda öyle α vardır ki $\alpha = f^{-1}(\mu)$ sonucuna ulaşılır.

$\mu^{(0)}$ 'da μ 'ye doğru hareketi sonlu sayıda adımla gerçekleşmektedir. Bu Borel lemmasının (Cramer 1966) bir sonucu olarak ortaya çıkar.

Böylece (4.12) denkleminin $\alpha = f^{-1}(\mu)$ çözümüne sahip olduğu kanıtlanmış olur. Çözümün tekliği ispatlandığı için $\alpha^{(0)}$ 'a bağlı olmadan başka ifade ile $\alpha^{(0)}$ keyfi seçildiğinde (4.12) denklemi çözüme ulaşır.

f fonksiyonu sürekli ve diferansiyellebilir olduğu için $\alpha = f^{-1}(\mu)$, μ 'ye bağlı sürekli ve diferansiyellebilir fonksiyondur.

Sonuç olarak Teorem 4.4 kanıtlanmış olur.

Sonuç 4.1. Teorem 4.1.'in kanıtı, Teorem 4.3.'ün sonucu olarak ortaya çıkmaktadır.

MinMaxEnt dağılımının varlığı için, $f(\alpha) = \mu$ denkleminin varlığı, tekliği ve sürekliliğinin kanıtı yeterlidir. Böylece MinMaxEnt dağılımının nümerik çözüm yöntemleriyle bulunmasının yolu açılmış olur.

4.2. Kesikli Rassal Değişkenler için MinMaxEnt Entropi Optimizasyon Probleminin Nümerik Çözümü

(4.9)'da verilen $p^{(0)} = (p_1^{(0)}, \dots, p_m^{(0)})$ MinMaxEnt dağılımı, Tanım 4.1. ile ifade edilen kesikli rassal değişkenler için MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümüdür. Bu çözüm, K kompakt kümesinde $S(g)$ fonksiyoneline minimum değer veren $g^{(0)}$ moment vektör fonksiyonunun genel halde bulunması çok zor olduğu için, K kümesi sonlu sayıda elemandan oluştuğunda problemin

çözümü diğer duruma göre nispeten daha kolay bulunabilir. Buna göre; pratik uygulamaların yapılabilmesi için K kümesi; sonlu sayıda elemandan oluşacak şekilde seçilmelidir.

(4.12) denkleminin çözümünün varlığı, tekliği ve sürekliliği kanıtlandığı için MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü vardır. Bu problemin çözümü olan $p^{(0)} = (p_1^{(0)}, \dots, p_m^{(0)})$ MinMaxEnt dağılımı, (4.9) da ifade edilen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının bulunmasına bağlıdır. Bir başka ifade ile, (4.12)'de ifade edilen m tane nonlinear denklemin çözümüne bağlıdır.

(4.12) nonlinear denklem sisteminde ifade edilen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanları nümerik yöntemler kullanılarak bulunabilir. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının nümerik yöntemlerle bulunması için, ardışık yaklaşımlar yöntemi (Banach teoremi), Newton yöntemi ve diğer nümerik yöntemler kullanılabilir. (4.12) nonlinear denklem sisteminin nümerik çözümünün matematiksel yapısı, Newton yöntemi ve Newton yönteminin temeli olan Banach teoremiyle Bölüm 3. de ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

Dolayısıyla kesikli rassal değişkenler için MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümüne ulaşılır.

K vektör fonksiyonları kümesinden alınmış her bir g vektör fonksiyonuna uygun (4.12) denklemini programlama dili açısından oluşturan, çözen ve MinMaxEnt dağılımını bulan herhangi bir paket program bulunmamaktadır. Dolayısıyla kesikli rassal değişkenler için MinMaxEnt dağılımının uygulamasının yapılabilmesi için bir programın yazılması gerekmektedir.

Bu bölümde, kesikli rassal değişkenler için MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü için MATLAB 6.5 de hazırlanan program sunulmaktadır. Aynı zamanda bu program MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin özel hali olan MaxEnt entropi optimizasyon problemini de çözmektedir.

MATLAB 6.5 ile hazırlanan program, iki, üç, ..., $m+1$ moment kısıtlarına uygun MinMaxEnt entropi optimizasyon problemlerini aynı anda çözmektedir. Hazırlanan program, temelde beş bölümden oluşmaktadır.

Programın bölümlerinde yapılan işlemler aşağıda verilmektedir.

Programın ilk bölümünde, gözlem değerleri, moment fonksiyonları kümesi ve kısıt sayısı (moment vektör bileşen sayısı) programa yüklenmektedir. Aynı bölümde, kısıt moment vektör kümesi ve μ değerleri belirlenmektedir.

Programın ikinci bölümünde, belirlenen her moment vektör fonksiyonu uygun (4.12) nonlinear denklem sistemi oluşturmaktadır. Bu bölüm, programın en önemli bölümlerinde birisidir.

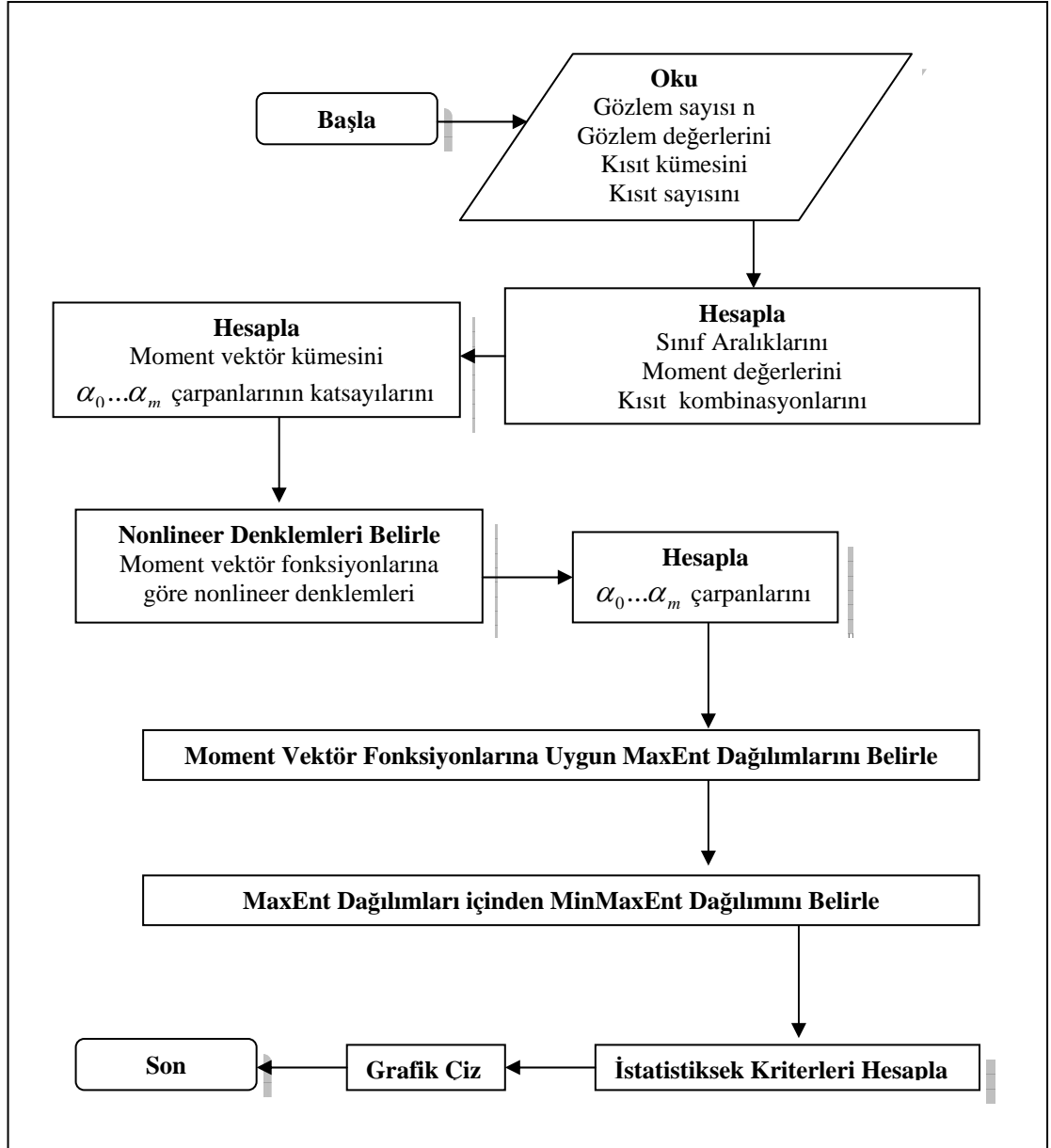
Programın üçüncü bölümünde, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanları ve MaxEnt dağılımı bulunmaktadır. MATLAB 6.5 programında, Levenberg-Marquardt, Gauss-Newton yöntemleri, nonlinear denklem sistemlerinin nümerik çözümleri için hazır program olarak bulunmaktadır. MinMaxEnt entropi optimizasyon problemini çözümü için hazırlanan programda, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının bulunmasında bu hazır programdan yararlanılmıştır.

Programın dördüncü bölümünde, belirlenen MaxEnt dağılımları içinden minimum entropi değerine veya maksimum informasyona sahip MinMaxEnt dağılımı bulunmaktadır.

Programın beşinci bölümünde, belirlenen MinMaxEnt dağılımı için istatistiksel kriterler hesaplanmakta ve grafik çizilmektedir. Son olarak, bulunan sonuçlar ve çizilen grafik ekrana görüntülenmektedir.

Hazırlanan programın çalışma şekli Şekil 4.2 deki akış diyagramı şeklinde verilmektedir.

Şekil 4.2. Kesikli rassal değişkenler için MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü için hazırlanan programın akış diyagramı



4.3. Sürekli Rassal Değişkenler için MinMaxEnt Entropi Optimizasyon Problemi

Sürekli rassal örneğin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olsun.

$$H(x) = -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx \quad (4.31)$$

entropi fonksiyoneli,

$$\int_a^b f(x) g_j(x) dx = \mu_j, \quad (j = 0, 1, \dots, m) \quad (4.32)$$

kısıtlarına göre maksimum değere sahiptir. (4.32)'de ifade edilen $\mu_0 = 1, g_0(x) = 1$, $g = (g_0, \dots, g_m)$ moment vektör fonksiyonu ve $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_m)$, g 'ye uygun moment vektör değeridir; (4.31) entropi fonksiyoneli bu değeri,

$$f(x) = \exp\left(-\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x)\right) \quad (4.33)$$

ile verilen $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuyla alır. (4.33) eşitliğinde verilen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 'ler Lagrange çarpanlarıdır.

$\alpha_j, j = 0, \dots, m$ Lagrange çarpanları,

$$\int_a^b g_j(x) \exp\left(-\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx = \mu_j, \quad (j = 1, \dots, m) \quad (4.34)$$

sisteminin çözümü olarak bulunabilir.

(4.33) ile ifade edilen $f(x)$ yoğunluk fonksiyonu, (4.1)'le verilen $H(x)$ entropi fonksiyonelin de yerine yazıldığında,

$$H_{\max} = \int_a^b \exp\left(-\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x)\right) \left(-\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx \quad (4.35)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$H_{\max} = \sum_{j=0}^m \alpha_j \left(\int_a^b f(x) g_j(x) dx \right)$$

veya

$$H_{\max} = \sum_{j=0}^m \alpha_j \mu_j \quad (4.36)$$

elde edilir. Bu eşitlikte kullanılan $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanları, $\mu_0 = 1$, $g_0(x) = 1$ olmak üzere, $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m$ 'ler $g_0(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ 'e uygun moment değerleridir. (4.36)'da gösterilen H_{\max} , ifade olarak kesikli rassal değişkenlerdeki H_{\max} 'a benzemektedir. Fakat yapı olarak çok farklıdır. Çünkü sürekli rassal değişkenler için (4.36) formülünde kullanılan $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m$ 'lerin hesabı integrale dayanmaktadır. Ayrıca sürekli rassal değişkenler için kullanılan semboller kesikli rassal değişkenlerde kullanılanlara benzemektedir. Bunun nedeni sembol karışıklığı yaratmamak içindir.

Kesikli rassal değişkenlerde olduğu gibi, α_j , ($j = 0, \dots, m$) 'ler $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)$ vektörüne bağlı fonksiyonlar, μ vektörü de $g = (g_0, g_1, \dots, g_m)$ moment vektör fonksiyonuna bağlı vektör fonksiyonel olduğu için, α_j , ($j = 0, \dots, m$) 'ler g 'ye bağlı fonksiyonlardır. Sonuç olarak (4.36)'de verilen H_{\max} formülü g 'ye bağlı bir fonksiyoneldir. Bu fonksiyonel,

$$S(g) = H_{\max} \quad (4.37)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$S(g)$ fonksiyoneli; MaxEnt metodu yardımıyla, $g = (g_0, g_1, \dots, g_m)$ moment vektör fonksiyonlarına bağlı H_{\max} değerine sahip fonksiyonel olarak tanımlanmıştır (Shamilov 2006a). Bu fonksiyonele sürekli rassal değişkenler için MaxEnt fonksiyoneli denilmiştir.

Sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt entropi optimizasyon problemi, aşağıda tanım şeklinde verilmiştir.

Tanım 4.2. (4.37) ile tanımlanmış $S(g)$ fonksiyoneline, verilmiş K moment vektör fonksiyonlar kümesinde minimum değer veren moment vektör fonksiyonunun bulunması problemine sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt entropi optimizasyon problemi denilecektir. Bu problem kesikli rassal değişkenlerde olduğu gibi iki şekilde düşünülebilir.

- Eğer K moment vektör fonksiyonlar kümesi, sonlu sayıda elemandan oluşuyor ve her bir moment vektör fonksiyonunun bileşenleri lineer

bağımsız ise sürekli rassal değişkenler için $S(g)$ fonksiyoneli bu küme içinde minimum değere sahiptir.

- Eğer K moment vektör fonksiyonlar kümesi, bileşenleri lineer bağımsız olan sonsuz sayıda elemanlardan oluşuyor ise $S(g)$ fonksiyonelinin bu küme içinde minimuma sahip olabilmesi için bu fonksiyonelin bazı özelliklere sahip olması gerekmektedir.

Not 4.2. K moment vektör fonksiyonlar kümesinde bileşenleri lineer bağımlı olan vektörler varsa, bu vektörler yerine bileşenleri söz konusu vektörün lineer bağımsız bileşkelerinden oluşan vektörler dikkate alınarak Tanım 4.2. ile verilen problem yine ortaya konulabilir.

$S(g)$ fonksiyonelinin, sonsuz sayıda elemandan oluşan kümede minimum değere sahip olmasını sağlayan özellikler teoremler şeklinde verilmiştir.

Teorem 4.5. (4.37) ile ifade edilen sürekli rassal değişkenler için $S(g)$ fonksiyoneli sürekli vektör moment fonksiyonları kümesinde $(C[a,b])$ süreklidir.

Teorem 4.6. $S(g)$ fonksiyoneli, $(C[a,b])$ uzayına ait K kompakt kümesinde en büyük ve en küçük değerine ulaşır.

Bu özellikler, kesikli rassal değişkenler için yapılan kanıta benzer şekilde kanıtlanabilir.

4.3.1. MinMaxEnt Dağılımı

(4.37) de tanımlanmış sürekli rassal değişkenler için $S(g) \subset C[a,b]$ fonksiyoneli, K kompakt moment vektör fonksiyonları kümesinde minimum değerini,

$$\min_{g \in K} S(g) = S(g^{(0)}) \quad (4.38)$$

$g^{(0)} = (g_0^{(0)}, g_1^{(0)}, \dots, g_m^{(0)})$ moment vektör fonksiyonunda alsın.

$S(g)$ fonksiyoneline K kompakt kümesinde minimum değer veren $g^{(0)}$ moment vektör fonksiyonuna uygun $f^{(0)}(x)$ MaxEnt dağılımı, sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt dağılımı olarak tanımlamıştır (Shamilov 2006a).

Sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt dağılımı,

Bu kanıt sürecinde, $\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(\alpha_1, \dots, \alpha_m)}$ Jakobian'ın sıfırdan farklı olması

önemlidir. Jakobian'ın sıfırdan farklı olması,

$$\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \alpha_m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{Var}(g_1(X)) & \dots & \text{Cov}(g_1(X)g_m(X)) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \text{Cov}(g_m(X)g_1(X)) & \dots & \text{Var}(g_m(X)) \end{vmatrix}} \quad (4.43)$$

ile ortaya çıkmaktadır (Kapur ve Kesevan 1992). (4.43) ifadesi moment fonksiyonlarının varyans-covaryans matrisinin determinantıdır. Eğer $1, g_1(x), \dots, g_m(x)$ moment fonksiyonları lineer bağımsız fonksiyonlar ise, bulunan varyans-covaryans matrisi pozitif tanımlı bir matristir (Cramer 1966, Papuluous 1991). Pozitif tanımlı simetrik matrisin determinantı sıfırdan farklı olduğu için

$$\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} \neq 0 \quad \forall \alpha \in E^m \text{ sonucuna ulaşılır}$$

$f(\alpha) = \mu$ denkleminin çözümünün varlığı, tekliği ve μ_1, \dots, μ_m 'lere sürekli bağıllığı teorem şeklinde aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.7 $g(x) = (1, g_1(x), \dots, g_m(x))$ moment vektör fonksiyonunun bileşkeleri $[a, b]$ aralığında lineer bağımsız olsun.

$$B = \{y \in E^m : |y_j| \leq a_j\}, \quad a_j = \sum_{i=1}^n \|g_j\|_C \quad (4.44)$$

olduğunda (4.42) için $f : E^m \rightarrow B$ bire-bir sürekli dönüşümdür ve

$$\alpha = f^{-1}(\mu) \quad (4.45)$$

dir. Başka bir ifadeyle Lagrange çarpanları μ 'ye sürekli, hatta differansiyellenebilir bağlıdır.

Kant

• Tekliğin Kanıtı

Sürekli rassal değişkenler için ifade edilen $f(\alpha) = \mu$ denkleminin tek çözüme sahip olduğunu göstermek için, kesikli rassal değişkenler de yapılanlara benzer bir yol izlenebilir.

$$(4.42) \text{ denkleminin } \alpha^{(1)} = (\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(1)}) \text{ ve } \alpha^{(2)} = (\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(2)})$$

olmak üzere iki farklı çözümü,

$$f(\alpha^{(1)}) = \mu \text{ ve } f(\alpha^{(2)}) = \mu \quad (4.46)$$

şeklinde olsun. Bu çözümler,

$$f^{(k)}(x) = \exp\left(-\sum_{j=0}^m \alpha_j^{(k)} g_j(x)\right), \quad (k = 1, 2) \quad (4.47)$$

şeklinde iki farklı dağılım belirlerler.

$$f(x) \text{ keyfi yoğunluk fonksiyonu, } \varphi(x) \text{ ise } \int_a^b \varphi(x) dx \leq 1 \text{ koşulunu}$$

sağlayan ve pozitif değerler alan fonksiyon olsun. Bu durumda

$$-\int_a^b f(x) \ln f(x) dx \leq -\int_a^b f(x) \ln \varphi(x) dx \quad (4.48)$$

eşitsizlik geçerlidir (Papuluos 1991). Bu eşitsizlikte $\varphi(x) = f^{(1)}(x)$ yazıldığında,

$$-\int_a^b f(x) \ln f(x) dx \leq -\int_a^b f(x) \left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j^{(1)} g_j(x)\right) dx = \sum_{j=1}^m \alpha_j^{(1)} \mu_j$$

veya

$$-\int_a^b f(x) \ln f(x) dx \leq \sum_{j=1}^m \alpha_j^{(1)} \mu_j. \quad (4.49)$$

elde edilir. (4.50) eşitsizliğinde $f(x) = f^{(2)}$, olacak şekilde yazılırsa

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j^{(2)} \mu_j \leq \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(1)} \mu_j. \quad (4.51)$$

sonucuna ulaşılır. Benzer yöntemle

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j^{(1)} \mu_j \leq \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(2)} \mu_j \quad (4.52)$$

ifadesi elde edilir. (4.51) ve (4.52)' den

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j^{(1)} \mu_j = \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(2)} \mu_j,$$

elde edilir.

$H(x)$ entropi fonksiyonunun (4.52)' e göre maksimum değeri tektir. $H(x)$ konkav bir fonksiyon olduğu için maksimum değerini tekbir noktada alır (Kapur ve Kesevan 1992). Başka bir ifade ile (4.47) den $f^{(1)}(x) = f^{(2)}(x)$ dir.

Buradan,

$$\sum_{j=0}^m (\alpha_j^{(1)} - \alpha_j^{(2)}) g_j(x) = 0 \quad (4.53)$$

sonucu bulunur. Bu sistemin rankı $m + 1$ olduğu için sistem tek çözüme sahiptir ve

$$\alpha_j^{(1)} = \alpha_j^{(2)}, j = 0, 1, \dots, m \quad (4.54)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece (4.42) denkleminin tek çözüme sahip olduğu kanıtlanmış olur.

- **Çözümün Varlığının ve Sürekliliğin Kanıtı**

(4.42) denkleminin çözüme sahip olduğu ve $\alpha = f^{-1}(\mu)$, μ 'ye bağlı sürekli ve diferansiyellebilir fonksiyon olduğu, (4.43) Jakobian'ın sıfırdan farklı olmasından yararlanarak, kesikli rassal değişkenlerdeki gibi kanıtlanır.

Sonuç olarak Teorem 4.7 kanıtlanmış olur.

Sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt dağılımının varlığı için, $f(\alpha) = \mu$ denkleminin varlığı, tekliliği ve sürekliliğinin kanıtı yeterlidir. Böylece MinMaxEnt dağılımı nümerik çözüm yöntemleriyle bulunabilir.

4.4. Sürekli Rassal Değişkenler İçin MinMaxEnt Entropi Optimizasyon Probleminin Nümerik Çözümü

(4.39)'da verilen sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt dağılımı, Tanım 4.2. ile ifade edilen sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümüdür. Bu çözüm kesikli rassal değişkenlerde olduğu gibi, K kompakt kümesinde $S(g)$ fonksiyoneline minimum değer veren

$g^{(0)}$ moment vektör fonksiyonunun genel halde bulunması çok zor olduğu için, pratik uygulamalarda K kümesi; sonlu sayıda elemandan oluşacak şekilde seçilmelidir.

(4.42) denkleminin çözümünün varlığı, tekliği ve sürekliliği kanıtlandığı için sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü vardır. Bu problemin çözümü olan $f^{(0)}(x)$ MinMaxEnt dağılımı, (4.42) nonlinear denklem sisteminde ifade edilen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange bulunmasına bağlıdır.

(4.42) nonlinear denklem sisteminde ifade edilen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanları nümerik yöntemler kullanılarak bulunabilir. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının nümerik yöntemlerle bulunması için, ardışık yaklaşımlar yöntemi (Banach teoremi), Newton yöntemi ve diğer nümerik yöntemler kullanılabilir. (4.42) nonlinear denklem sisteminin nümerik çözümünün matematiksel yapısı, Newton yöntemi ve Newton yönteminin temeli olan Banach teoremiyle Bölüm 3. de ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

Dolayısıyla kesikli rassal değişkenlerde olduğu gibi, sürekli sistemler için de MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümüne ulaşabiliriz.

K vektör fonksiyonları kümesinden alınmış her bir g vektör fonksiyonuna uygun sürekli rassal değişkenler için (4.42) denklem sistemini, programlama dili açısından oluşturan, çözen ve en büyük informasyona sahip MinMaxEnt dağılımını bulan herhangi bir paket program bulunmamaktadır. Dolayısıyla sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt dağılımının uygulamasının yapılabilmesi için bir programın yazılması gerekmektedir.

Kesikli rassal değişkenler için MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü ile sürekli rassal değişkenler için problemin çözümü arasında ilişki vardır. Bu ilişki yardımıyla sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt dağılımı, kesikli rassal değişkenler için MATLAB 6.5’de hazırlanmış program ile bulunmaktadır.

Kesikli rassal değişkenler için MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü ile sürekli rassal değişkenler için problemlerin çözümü arasındaki ilişki Bölüm 4.5 de incelenmiştir.

4.5. Kesikli ve Sürekli Rassal Değişkenler için MinMaxEnt Entropi Optimizasyon Problemleri Arasındaki İlişki

Kesikli rassal değişkenler ile sürekli rassal değişkenler arasında bu bölümde ifade edilen ilişki dikkate alınarak, MinMaxEnt ve diğer problemlerin çözümünde kesikli rassal değişkenlerden yola çıkarak sürekli rassal değişkenler için de problemler çözülebilir. Kesikli rassal değişkenler ile sürekli rassal değişkenler arasındaki ilişki şu şekildedir:

Sürekli rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$,

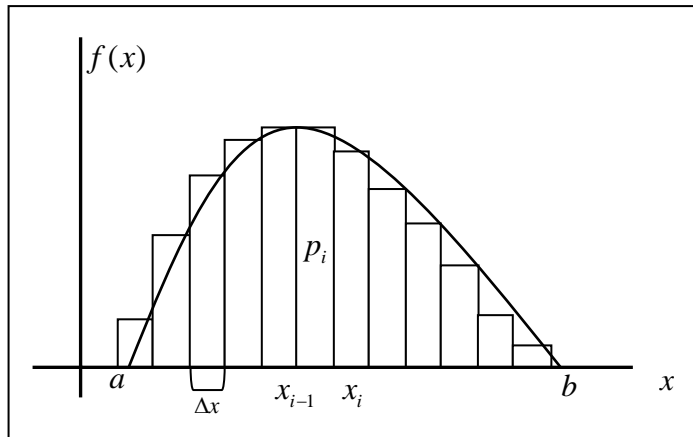
$$\int_a^b f(x)dx = 1 \text{ ve } f(x) \geq 0 \quad (4.55)$$

olsun. $f(x)$ yoğunluk fonksiyonunun tanımlı olduğu $[a,b]$ kapalı aralığı, $a = x_0$ ve $b = x_n$ olacak şekilde, x_0, x_1, \dots, x_n parçaya bölünsün. Parçalar arasındaki uzunluk,

$$\Delta x = x_i - x_{i-1}, (i = 1, \dots, n) \text{ ve } \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad (4.56)$$

şeklinde olsun.

Şekil 4.3. Kesikli ve sürekli rassal değişkenlerin entropileri arasındaki ilişki



Olasılık tanımına göre,

$$p_i \approx f(x_i)\Delta x \quad (4.57)$$

dir. (4.57) ifadesini kesikli rassal değişkenler için Shannon entropi ölçümünde yerine yazıldığında,

$$-\sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) \approx -\sum_{i=1}^n (f(x_i)\Delta x) \ln(f(x_i)\Delta x) \quad (4.58)$$

elde edilir. (4.58)' de gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$-\sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) \approx -\sum_{i=1}^n (f(x_i)\Delta x) \ln f(x_i) - \sum_{i=1}^n (f(x_i)\Delta x) \ln \Delta x \quad (4.59)$$

bulunur. $\Delta x > 0$ çok küçük olduğunda (4.54),

$$-\sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) \approx -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx - \ln \Delta x \int_a^b f(x) dx \quad (4.60)$$

şeklinde yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$-\sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) \approx -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx - \ln \Delta x \quad (4.61)$$

sonucuna ulaşılır. (4.61) formülünden görüldüğü gibi $\Delta x > 0$ çok küçük değerlere sahip olduğunda, kesikli ve sürekli rassal değişkenler için Shannon entropi ölçümleri yaklaşık olarak birbirine eşittir. Δx 'in sıfır olmaması ve pozitif değerlere sahip olması pratik uygulamalarla ilişkilidir. Bir başka ifade ile sıfır hata ile ölçüm yapılamayacağı için, $\Delta x > 0$ pozitif küçük değer olması doğaldır.

Böylece sürekli rassal değişkenler için Shannon entropi ölçümü kesikli rassal değişkenler için entropi ölçümü ile yaklaşık olarak ifade edilir. Bu sonuç; sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümünü, kesikli rassal değişkenler yardımıyla bulmamızı sağlar. Bir başka ifade ile kesikli rassal değişkenler için MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü için MATLAB 6.5 ile hazırlanmış programı, sürekli rassal değişkenler için de kullanılmasını sağlar.

4.6. Uygulama

Bu bölümde, MinMaxEnt dağılımını belirleme süreci bir uygulama ile gösterilmektedir. Bir başka ifade ile MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü için MATLAB 6.5 ile hazırlanmış programın bir uygulaması yapılmaktadır. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata dağılımını belirlenmesi (BEHTIIEΛB, 1969), uygulama olarak seçilmiştir. Uygulamada X rassal değişkeni, radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleridir. Ölçüm birimi metredir. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata dağılımı, bilinen

istatistiksel dağılımlarla ifade edilemediği kaynakta vurgulanmaktadır. Uygulamayı seçmemizdeki temel neden, bilinen istatistiksel dağılımlarla ifade edilemeyen gözlem değerlerini, MinMaxEnt dağılımı ile ifade edilebildiğini göstermektir. Ayrıca uygulama sürecinde bulunan MinMaxEnt dağılımının, radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata gözlem değerlerine uyumu, $RSME$, χ^2 , R^2 (Celik, 2003) istatistiksel kriterleri ile ortaya konulmuştur.

Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hatalarına ilişkin MinMaxEnt dağılımının belirlenmesi için, MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözülmesi gerekmektedir. Bu çözüm için, MATLAB 6.5 ile hazırlanmış program kullanılmaktadır. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerlerine ilişkin MinMaxEnt dağılımı; iki bileşkeye sahip moment vektörüne göre, üç, dört, beş ve altı bileşkeye sahip moment vektörüne göre bulunmuştur.

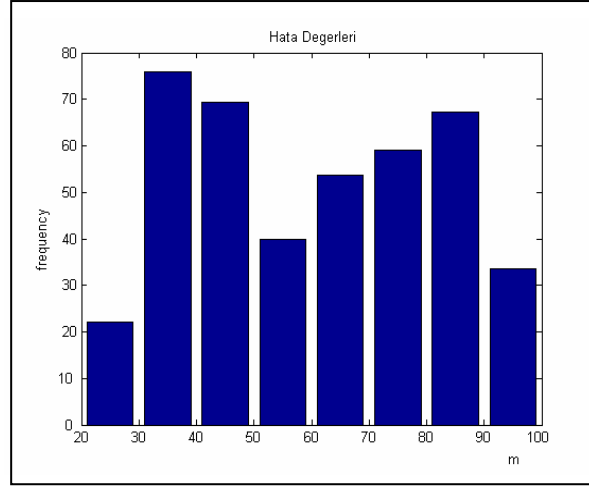
Uygulama sürecinde moment fonksiyonları kümesi $(x, x^2, \ln(x), (\ln(x))^2, \ln(x^2 + 1))$ şeklinde belirlenmiştir. Bu moment fonksiyonlarının seçimi, bilinen istatistiksel dağılımların karakterize edici momentleri olacak şekilde yapılmıştır (Kapur ve Kesevan 1992). Örneğin x ve x^2 momentleri normal dağılımın karakterize edici momentleridir.

Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerlerine ilişkin gözlem değerleri ve histogramı, Çizelge 4.1. de ve Şekil 4.4 de verilmektedir.

Çizelge 4.1. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerlerine ilişkin gözlenen frekanslar

m	frekans
20-30	21
30-40	72
40-50	66
50-60	38
60-70	51
70-80	56
80-90	64
90-100	32

Şekil 4.4. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerlerine ilişkin histogram



Şekil 4.4’de görüldüğü gibi, radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata dağılımını bilinen istatistiksel dağılımlarla ifade etmek oldukça güçtür. Cihazın hata dağılımını, iki, üç, dört, beş ve altı kısıta göre MinMaxEnt dağılımları ile modellemek için, MATLAB’ hazırlanan programdan elde edilen sonuçlar Şekil 4.5 de verilmektedir.

Şekil 4.5. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için iki, üç, dört, beş ve altı bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MinMaxEnt dağılımları ile ilgili program sonuçları

```

-----
Gerçekolsk= 0.0525   0.18   0.165   0.095   0.1275   0.14   0.16   0.08
-----
Tumkombinasyon1=      1 2 3 4 5
İterasyonsnc1= 1 1 1 1 1
Maxentrp1= 2.9999   2.9998   2.9984   2.9928   3
Minimum= 2.9928
Sıra= 4
Kombinasyon1= 4
Olasılıkrx1= 0.098849   0.11326   0.12234   0.12817   0.13188   0.13415   0.13541   0.13594
-----
Tumkombinasyon2=      1 1 1 1 2 2 2 3 3 4
                      2 3 4 5 3 4 5 4 5 5
İterasyonsnc12= 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
Maxentrp2= 2.9794   2.9722   2.9696   2.9759   2.9753   2.9716   2.9845   2.9681   2.9734   2.9705
Minimum= 2.9681
Sıra= 8
Kombinasyon2= 3
                  4
Olasılıkrx2= 0.07635   0.12567   0.1507   0.15497   0.14653   0.13188   0.11518   0.098716
-----
Tumkombinasyon3=      1 1 1 1 1 1 2 2 2 3
                      2 2 2 3 3 4 3 3 4 4
                      3 4 5 4 5 5 4 5 5 5
İterasyonsnc13= 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
Maxentrp3= 2.9656   2.9636   2.9743   2.9589   2.9206   2.9429   2.9618   2.9705   2.9676   2.9552
Minimum= 2.9206
Sıra= 5
Kombinasyon3= 1      3      5
Olasılıkrx3= 0.046858   0.1906   0.15377   0.11762   0.11751   0.13581   0.13996   0.09788
-----
Tumkombinasyon4=      1 1 1 1 2
                      2 2 2 3 3
                      3 3 4 4 4
                      4 5 5 5 5
İterasyonsnc14= 1 1 1 1 1
Maxentrp4= 2.9186   2.9168   2.917   2.9166   2.9175
Minimum= 2.9166
Sıra= 4
Kombinasyon4= 1      3      4      5
Olasılıkrx4= 0.05061   0.19108   0.14328   0.11168   0.12106   0.14957   0.14883   0.083891
-----
Tumkombinasyon5= 1      2      3      4      5
İterasyonsnc15= 1
Maxentrp5= 2.914
Minimum= 2.914
Sıra= 1
Kombinasyon5= 1      2      3      4      5
Olasılıkrx5= 0.052376   0.18154   0.15827   0.10919   0.11186   0.14866   0.15816   0.079954
-----
Kikarenc1= 0.0022184
Kikarenc2= 0.0020215
Kikarenc3= 0.00040511
Kikarenc4= 0.0003832
Kikarenc5= 0.00028601
-----
RSMErnx1= 0.040789
RSMErnx2= 0.035545
RSMErnx3= 0.014232
RSMErnx4= 0.011988
RSMErnx5= 0.0084559
-----
Rmx1= 0.067655
Rmx2= 0.29515
Rmx3= 0.88645
Rmx4= 0.91944
Rmx5= 0.95989
-----

```

MinMaxEnt dağılımlarının belirlenmesinde kullanılan, iki kısıta uygun MaxEnt, üç, dört, beş ve kısıta uygun MaxEnt dağılımlarının entropileri Çizelge 4.2.-4.6. de listelenmektedir. Her bir kısıt için ilgili değerler, MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü için MATLAB 6.5 ile hazırlanmış program yardımıyla bulunmuştur.

Çizelge 4.2. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için iki bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MaxEnt dağılımlarının entropileri

Kısıtlar	Entropi
(1, x)	2.9999
(1, x ²)	2.9998
(1, ln x)	2.9984
(1, (ln x) ²)	2.9928
(1, ln(1+x ²))	3

Çizelge 4.3. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için üç bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MaxEnt dağılımlarının entropileri

Kısıtlar	Entropi
(1, x, x ²)	2.9794
(1, x, ln x)	2.9722
(1, x, (ln x) ²)	2.9696
(1, x, ln(1+x ²))	2.9759
(1, x ² , ln x)	2.9753
(1, x ² , ln(x) ²)	2.9716
(1, x ² , ln(1+x ²))	2.9845
(1, ln x, (ln x) ²)	2.9681
(1, ln x, ln(1+x ²))	2.9734
(1, (ln x) ² , ln(1+x ²))	2.9705

Çizelge 4.4. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için dört bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MaxEnt dağılımlarının entropileri

Kısıtlar	Entropi
(1, x, x ² , lnx)	2.9656
(1, x, x ² , (lnx) ²)	2.9636
(1, x, x ² , ln(1+x ²))	2.9743
(1, x, lnx, ln(x) ²)	2.9589
(1, x, lnx, ln(1+x ²))	2.9206
(1, x, (lnx) ² , ln(1+x ²))	2.9429
(1, x ² , lnx, (lnx) ²)	2.9618
(1, x ² , lnx, ln(1+x ²))	2.9705
(1, x ² , (lnx) ² , ln(1+x ²))	2.9676
(1, lnx, (lnx) ² , ln(1+x ²))	2.9552

Çizelge 4.5. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için beş bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MaxEnt dağılımlarının entropileri

Kısıtlar	Entropi
(1, x, x ² , lnx, (lnx) ²)	2.9186
(1, x, x ² , lnx, ln(1+x ²))	2.9168
(1, x, x ² , (lnx) ² , ln(1+x ²))	2.917
(1, x, lnx, ln(x) ² , ln(1+x ²))	2.9166
(1, x ² , lnx, (lnx) ² , ln(1+x ²))	2.9175

Çizelge 4.6. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için altı bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MaxEnt dağılımlarının entropileri

Kısıtlar	Entropi
(1, x, x ² , lnx, (lnx) ² , ln(1+x ²))	2.914

Çizelge 4.2-4.6 den sonuç olarak iki bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{mx2}(x)$ 'nin, (1, (lnx)²) moment vektörüne karşılık gelen dağılım, üç bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{mx3}(x)$ 'ün, (1, lnx, (lnx)²) moment vektörüne karşılık gelen dağılım, dört bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{mx4}(x)$ 'ün, (1, x, lnx, ln(1+x²)) moment vektörüne karşılık gelen dağılım, beş bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{mx5}(x)$ 'in, (1, lnx, (lnx)², ln(1+x²)) moment vektörüne karşılık gelen dağılımdır ve altı bileşkeli

moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{mx6}(x)$ 'nin, $(1, x, x^2, \ln x, (\ln x)^2, \ln(1+x^2))$ moment vektörüne karşılık gelen dağılımdır denilebilir.

Belirlenen MinMaxEnt dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar, Çizelge 4.7 'de incelenmektedir.

Çizelge 4.7 Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için belirlenen MinMaxEnt dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar ve gözlenen frekanslar

m	frekans	f_i	f_{mx2}	f_{mx3}	f_{mx4}	f_{mx5}	f_{mx6}
25	21	0.0525	0.0988	0.0763	0.0468	0.0506	0.0523
35	72	0.18	0.1132	0.1256	0.1906	0.191	0.1815
45	66	0.165	0.1223	0.1507	0.1537	0.1432	0.1582
55	38	0.095	0.1281	0.1549	0.1176	0.1116	0.1091
65	51	0.1275	0.1318	0.1465	0.1175	0.121	0.1118
75	56	0.14	0.1341	0.1318	0.1358	0.1495	0.1486
85	64	0.16	0.1354	0.1151	0.1399	0.1488	0.1581
95	32	0.08	0.1359	0.0987	0.0978	0.0838	0.0799

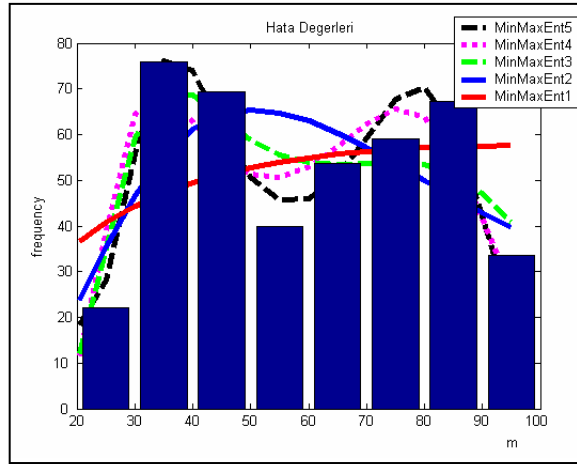
Çizelge 4.7'den görüldüğü gibi, dört, beş ve altı bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar gözlenen frekanslara daha yakındır. Bu durum, $RSME$, χ^2 , R^2 istatistiksel kriterleri ile Çizelge 4.8. da ortaya konulmaktadır.

Çizelge 4.8 Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın iki, üç, dört, beş, altı bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımlarının veriye uyumunun istatistiksel kriterlerle incelenmesi

MinMaxEnt Dağılımlar	Kriterler		
	χ^2	$RSME$	R^2
$f_{m2}(x)$	0.002218	0.04078	0.0676
$f_{m3}(x)$	0.002021	0.03554	0.2951
$f_{m4}(x)$	0.000405	0.01423	0.8864
$f_{m5}(x)$	0.000383	0.01198	0.9194
$f_{m6}(x)$	0.000286	0.00845	0.9589

$RSME$, χ^2 , R^2 kriterlerine göre, dört, beş, altı bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımının cihazın hatasını modellemede iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Şekil 4.6’de dört,beş ve altı bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımlarının, radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata dağılımını nasıl belirlediği oldukça net sergilenmektedir.

Şekil 4.6. İki, üç, dört, beş ve altı bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımları



Böylece, MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü için MATLAB 6.5 ile hazırlanmış programdan elde edilen sonuçlar bir uygulama ile gösterilmiştir. Bu uygulamada diğer önemli bir noktada, kısıt sayısı (moment vektörünün bileşen sayısı) artırıldığında, MinMaxEnt dağılımının modellemeye etkisi gözlenmiştir. Buna göre belli bir kısıt sayısından sonra, kısıt sayısının artırılmasının modellemeye etkisi çok fazla olmadığı söylenebilir.

Benzer uygulamalar moment fonksiyon kümesi genişletilerek veya kısıt sayısı (moment vektör bileşen sayısı) artırılarak yapılabilir. Ayrıca bu program dağılımların bulunması için yapılan (Shamilov ve ark 2006a, 2006c) çalışmalarda büyük kolaylık sağlamıştır.

5. MaxMinxEnt ENTROPİ OPTİMİZASYON PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde, kesikli ve sürekli rassal değişkenler için MinxEnt metodu yardımıyla moment fonksiyonlarına bağlı özel fonksiyoneller ile, bu fonksiyonellere maksimum değer veren ve MaxMinxEnt dağılımlarından bahsedilmiştir ve bu dağılımların nümerik yöntemlerle bulunması problemler şeklinde ortaya konmuştur. Ortaya konan problemlerin oluşturulması ve nümerik çözümleri için, MATLAB 6.5 de hazırlanmış programın akış diyagramı verilmiştir.

Önsel dağılıma sahip gözlem değerlerinin MaxMinxEnt dağılımıyla ifade edilebileceği, hazırlanmış özel program yardımıyla gösterilmiştir. Bunlara ek olarak moment kısıt sayısı arttırıldıkça, MaxMinxEnt dağılımının modellemeye etkisi gözlenmiştir.

5.1. Kesikli Rassal Değişkenler için MaxMinxEnt Entropi Optimizasyon Problemi

x_1, \dots, x_n rassal örnek olsun ve örnek içindeki değerlere, sırasıyla p_1, \dots, p_n olasılıkları karşılık gelsin. Bu rassal örnek, q_1, q_2, \dots, q_n şeklinde önsel bir dağılıma sahip olsun. Bu durumda Kullback-Leibler ölçümü,

$$D(p : q) = \sum_{i=1}^n p_i \ln\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır. Kullback-Leibler ölçümünü,

$$\sum_{i=1}^n p_i g_j(x_i) = \mu_j, \quad (j = 0, 1, \dots, m) \quad (5.2)$$

$n > m + 1$ kısıtlarına göre minimum değere sahiptir (5.2) ifadesinde, $\mu_0 = 1$, $g_0(x) = 1$, $g = (g_0, g_1, \dots, g_m)$ moment vektör fonksiyonu ve $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, g 'ye uygun moment vektör değeridir; $D(p : q)$ Kullback-Leibler fonksiyonu bu değeri,

$$p_i = q_i \exp\left(-\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x_i)\right), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5.3)$$

ile verilen $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ olasılık dağılım fonksiyonuyla alır. (5.3) eşitliğinde verilen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 'ler Lagrange çarpanları ve $g = (g_0, g_1, \dots, g_m)$ moment vektör fonksiyonudur.

(5.3) olasılık dağılımda verilen $\alpha_j, j = 0, \dots, m$ Lagrange çarpanları,

$$\sum_{i=1}^n g_j(x_i) q_i \exp\left(-\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (5.4)$$

sisteminin çözümü olarak bulunabilir.

(5.3) ile ifade edilen p dağılımı, (5.1)'de verilen $D(p:q)$ Kullback-Leibler fonksiyonun da yerine yazıldığında,

$$D_{\min} = \sum_{i=1}^n q_i \exp\left(-\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) \ln \left(\frac{q_i \exp\left(\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x_i)\right)}{q_i} \right)$$

veya

$$D_{\min} = \sum_{i=1}^n q_i \exp\left(-\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x_i)\right) \left(\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x_i) \right) \quad (5.5)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$D_{\min} = \sum_{j=0}^m \alpha_j \sum_{i=1}^n p_i g_j(x_i),$$

veya

$$D_{\min} = \sum_{j=0}^m \alpha_j \mu_j \quad (5.6)$$

elde edilir. (5.6) eşitliği $D(p:q)$ Kullback-Leibler fonksiyonun minimum değerini göstermektedir. Bu eşitlikte kullanılan $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanları, $\mu_0 = 1$, $g_0(x) = 1$ olmak üzere, $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m$ 'ler $g_0(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ 'e uygun moment değerleridir.

(5.2) eşitliklerinden, $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)$ vektörünün $g = (g_0, g_1, \dots, g_m)$ moment vektör fonksiyonuna, (5.4) ifadesinden de $\alpha_j, (j = 0, \dots, m)$ 'lerin μ 'ye bağlı olduğu görülmektedir. Bir başka deyişle $\alpha_j, (j = 0, \dots, m)$ 'ler μ 'ye bağlı fonksiyonlar, μ 'de g 'ye bağlı vektör fonksiyonel olduğu için,

α_j , ($j = 0, \dots, 1$)'ler g 'ye bağımlı fonksiyonlardır. Sonuç olarak (5.6)'de verilen D_{\min} formülü g 'ye bağımlı bir fonksiyondur. Bu fonksiyon,

$$U(g) = D_{\min} \quad (5.7)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$U(g)$ fonksiyoneli; MinxEnt metodu yardımıyla, $g = (g_0, g_1, \dots, g_m)$ moment vektör fonksiyonlarına bağımlı D_{\min} değerine sahip fonksiyon olarak tanımlanmıştır(Shamilov 2006b). Bu fonksiyon MinxEnt fonksiyoneli denilmiştir.

Kesikli rassal değişkenler için MaxMinxEnt entropi optimizasyon problemi, tanım şeklinde aşağıda verilmiştir.

Tanım 5.1. (5.7) ile tanımlanmış $U(g)$ fonksiyoneline, verilmiş K moment vektör fonksiyonlar kümesinde maksimum değer veren moment vektör fonksiyonunun bulunması problemine kesikli rassal değişkenler için MaxMinxEnt entropi optimizasyon problemi denilecektir. Bu problem iki şekilde düşünülebilir.

- Eğer K moment vektör fonksiyonlar kümesi, sonlu sayıda elemandan oluşuyor ve her bir moment vektör fonksiyonunun bileşenleri lineer bağımsız ise $U(g)$ fonksiyoneli bu küme içinde maksimum değere sahiptir.
- Eğer K moment vektör fonksiyonlar kümesi, bileşenleri lineer bağımsız olan sonsuz sayıda elemanlardan oluşuyor ise $U(g)$ fonksiyonelinin bu küme içinde maksimuma sahip olabilmesi için bu fonksiyonelin bazı özelliklere sahip olması gerekmektedir.

Not 5.1. K moment vektör fonksiyonlar kümesinde bileşenleri lineer bağımlı olan vektörler varsa, bu vektörler yerine bileşenleri söz konusu vektörün lineer bağımsız bileşkelerinden oluşan vektörler dikkate alınarak Tanım 5.1. ile verilen problem yine ortaya konulabilir.

(5.7) ile ifade edilen MinxEnt fonksiyonelinin, sonsuz sayıda elemandan oluşan kümede maksimum değere sahip olmasını sağlayan özellikler teoremler şeklinde verilmiştir.

Teorem 5.1. (5.7) ile ifade edilen $U(g)$ fonksiyoneli sürekli vektör moment fonksiyonları kümesinde $(C[a,b])$ süreklidir.

Teorem 5.2. $U(g)$ fonksiyoneli, $(C[a,b])$ uzayına ait K kompakt kümesinde en büyük ve en küçük değerine ulaşır.

Bu özellikler (Shamilov 2006a, Mert Kantar 2006) çalışmasında kanıtlamıştır.

5.1.1. MaxMinxEnt Dağılımı

(5.7)'de tanımlanmış $U(g) \subset C[a,b]$ fonksiyoneli, K kompakt moment vektör fonksiyonları kümesinde maksimum değerini,

$$\max_{g \in K} U(g) = U(g^{(0)}) \quad (5.8)$$

$g^{(0)} = (g_0^{(0)}, g_1^{(0)}, \dots, g_m^{(0)})$ moment vektör fonksiyonunda alsın.

$U(g)$ fonksiyoneline K kompakt kümesinde maksimum değer veren $g^{(0)}$ moment vektör fonksiyonuna uygun $p^{(0)} = (p_1^{(0)}, \dots, p_m^{(0)})$ MinxEnt dağılımı, kesikli rassal değişkenler için MaxMinxEnt dağılımı olarak tanımlamıştır (Shamilov 2006a).

Daha önce belirtildiği gibi $p^{(0)} = (p_1^{(0)}, \dots, p_m^{(0)})$ MaxMinxEnt dağılımı; (5.1) ile verilen $D(p:q)$ Kullback-Leibler fonksiyonun $g^{(0)}$ moment vektör kısıdına göre minimum yapılmasıyla bulunur. Kesikli rassal değişkenler için MaxMinxEnt dağılımı,

$$p_i^{(0)} = \exp(-\alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j^{(0)}(x_i)), \quad i = 1, \dots, n \quad (5.9)$$

şeklindedir. (5.9) da verilen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 'ler Lagrange çarpanları, $g^{(0)} = (g_1^{(0)}, \dots, g_m^{(0)})$ moment vektör fonksiyonudur.

5.1.2. MaxMinxEnt Dağılımının Varlığı

$p^{(0)} = (p_1^{(0)}, \dots, p_m^{(0)})$ MaxMinxEnt dağılımı, (5.9) da ifade edilen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının bulunmasına bağlı olduğundan, kesikli rassal değişkenler için MaxMinxEnt optimizasyon probleminin çözümünde $\alpha_1, \dots, \alpha_m$

sıfırdan farklı (Cramer 1966) olduğu için $\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} \neq 0 \quad \forall \alpha \in E^m$ ifadesine

ulaşılır.

Böylece, (5.12) $f(\alpha) = \mu$ denkleminin çözümünün varlığı, tekliği ve sürekliliği ile ilgili teorem ve kanıt, kesikli rassal değişkenler için MinMaxEnt dağılımına benzer şekilde verilebilir.

MaxMinxEnt dağılımının varlığı (5.12) denkleminin çözümünün varlığı, tekliği ve sürekliliği ile ilişkili olduğundan MaxMinxEnt dağılımı için, nümerik çözüm yöntemlerinin kullanılmasının yolu açılmıştır.

5.2. Kesikli Rassal Değişkenler için MaxMinxEnt Entropi Optimizasyon Probleminin Nümerik Çözümü

Tanım 5.1. ile ifade edilen kesikli rassal değişkenler için MaxMinxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü, $p^{(0)} = (p_1^{(0)}, \dots, p_m^{(0)})$ MaxMinxEnt dağılımıdır. Bu çözüm, K kompakt kümesinde $U(g)$ fonksiyoneline maksimum değer veren $g^{(0)}$ moment vektör fonksiyonunun genel halde bulunması çok zor olduğu için, K kümesi sonlu sayıda elemandan oluştuğunda problemin çözümü diğer duruma göre nispeten daha kolay bulunabilir. Buna göre; pratik uygulamaların yapılabilmesi için K kümesi; sonlu sayıda elemanlar oluşturulmalıdır.

MaxMinxEnt dağılımı, (5.9)' da ifade edilen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının bulunmasına bağlıdır. (5.12) denkleminin çözümünün varlığı, tekliği ve sürekliliği ifade edildiği için $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının çözümü vardır. Bir başka ifade ile MaxMinxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü vardır.

(5.12) nonlinear denklem sistemi nümerik yöntemlere çözülebilir. Diğer bir ifade ile $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanları nümerik yöntemlerle bulunabilir.

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının nümerik yöntemlerle bulunması için, ardışık yaklaşımlar yöntemi (Banach teoremi), Newton yöntemi ve diğer nümerik yöntemler kullanılabilir. (5.12) nonlinear denklem sisteminin nümerik

çözümünün matematiksel yapısı, Newton yöntemi ve Newton yönteminin temeli olan Banach teoremiyle Bölüm 3. de ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümünde olduğu gibi, K vektör fonksiyonları kümesinden alınmış her bir g vektör fonksiyonuna uygun (5.12) fonksiyonel denklemini, programlama dili açısından oluşturan, çözen ve MaxMinxEnt dağılımını bulan herhangi bir paket program bulunmamaktadır. Dolayısıyla kesikli rassal değişkenler için MaxMinxEnt dağılımının uygulamasının yapılabilmesi için bir programın yazılması gerekmektedir.

Bu bölümde, kesikli rassal değişkenler için MaxMinxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü için MATLAB 6.5 de hazırlanan program sunulmaktadır. Aynı zamanda bu program MaxMinxEnt entropi optimizasyon probleminin özel hali olan MinxEnt entropi optimizasyon problemini de çözmektedir.

MATLAB 6.5 ile hazırlanan program, iki, üç, ..., $m+1$ moment kısıtlarına uygun ve önsel dağılıma dayalı MaxMinxEnt entropi optimizasyon problemlerini aynı anda çözmektedir. Hazırlanan program, temelde beş bölümden oluşmaktadır.

Programın bölümlerinde yapılan işlemler aşağıda verilmektedir.

Programın ilk bölümünde, gözlem değerleri, moment fonksiyonları kümesi, kısıt sayısı (moment vektör bileşen sayısı) ve önsel dağılım programa yüklenmektedir. Aynı bölümde, kısıt moment vektör kümesi ve μ değerleri belirlenmektedir.

Programın ikinci bölümünde, belirlenen her moment vektör fonksiyonu uygun (5.12) nonlinear denklem sistemi oluşturmaktadır. Bu bölüm, programın en önemli bölümlerinde birisidir.

Programın üçüncü bölümünde, belirlenen her moment vektör fonksiyonuna ve önsel dağılıma uygun $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanları ve MinxEnt dağılımı bulunmaktadır. MATLAB 6.5 programında, Levenberg-Marquardt, Gauss-Newton yöntemleri, nonlinear denklem sistemlerinin nümerik çözümü için hazır program olarak yer almaktadır. MaxMinxEnt entropi optimizasyon problemini çözümü için hazırlanan programda, MinMaxEnt

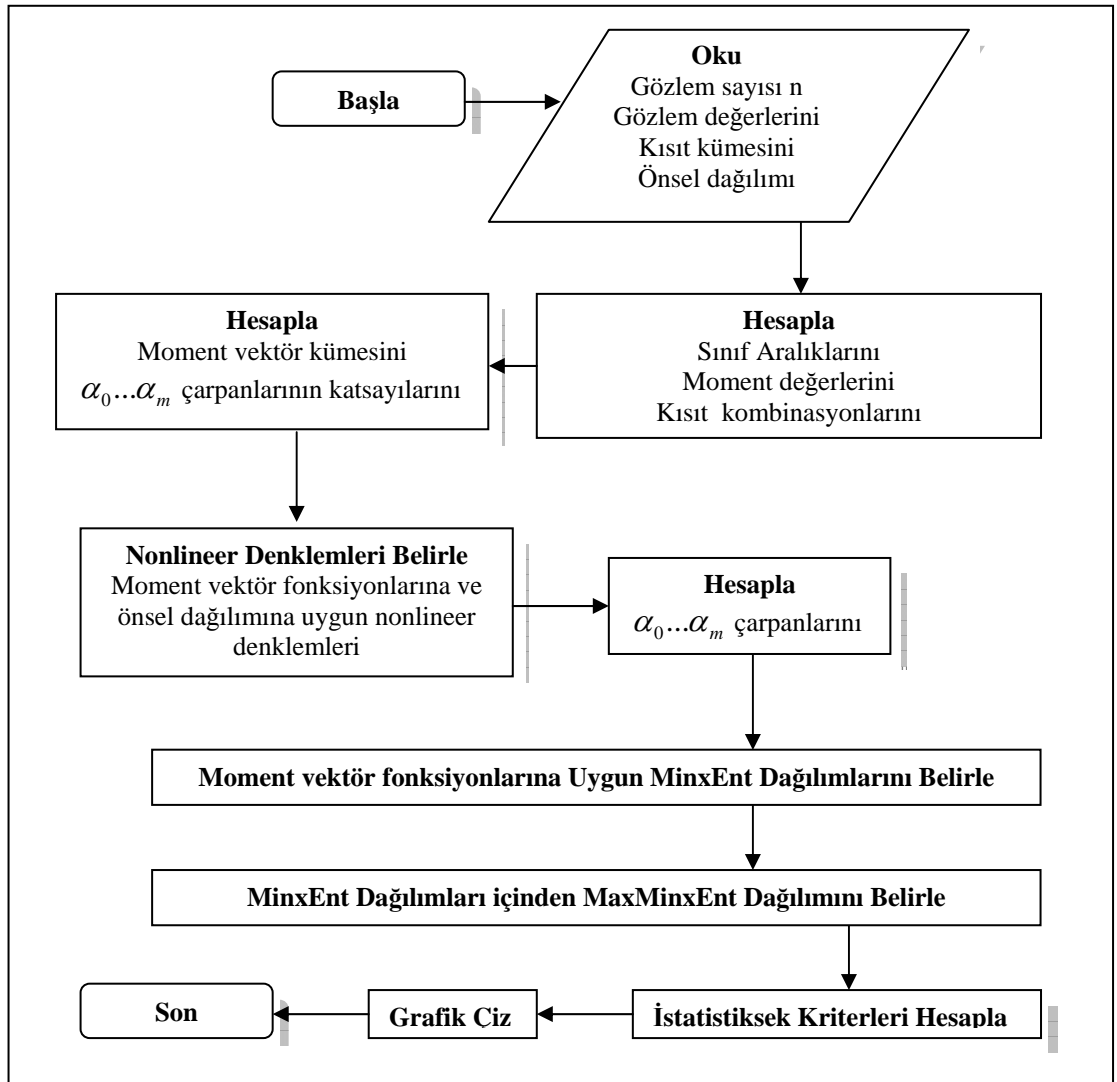
programına benzer olarak, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının bulunmasında bu hazır programdan yararlanılmıştır.

Programın dördüncü bölümünde, belirlenen MinxEnt dağılımları içinden maksimum çapraz entropi değerine sahip MaxMinxEnt dağılımı bulunmaktadır.

Programın beşinci bölümünde, belirlenen MaxMinxEnt dağılımı için istatistiksel kriterler hesaplanmakta ve grafik çizilmektedir. Son olarak, bulunan sonuçlar ve çizilen grafik ekrana görüntülenmektedir.

Hazırlanan programın çalışma şekli Şekil 5.1 deki akış diyagramı şeklinde verilmektedir.

Şekil 5.1. Kesikli rassal değişkenler için MaxMinxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü için hazırlanan programın akış diyagramı



5.3. Sürekli Rassal Değişkenler için MaxMinxEnt Entropi Optimizasyon Problemi

Sürekli rassal örneğin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ve örnek hakkında $q(x)$ şeklinde önsel bir dağılıma sahip olsun. Bu durumda,

$$D(f : q) = \int_a^b f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} dx \quad (5.14)$$

Kullback-Leibler ölçümü,

$$\int_a^b f(x) g_j(x) dx = \mu_j, \quad (j = 0, 1, \dots, m) \quad (5.15)$$

kısıtlarına göre minimum değere sahiptir. (5.15)'de ifade edilen $\mu_0 = 1, g_0(x) = 1,$
 $g = (g_0, \dots, g_m)$ moment vektör fonksiyonu ve $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_m),$ g 'ye uygun moment vektör değeridir; (5.14) Kullback-Leibler fonksiyoneli bu değeri,

$$f(x) = q(x) \exp \left(- \sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x) \right) \quad (5.16)$$

ile verilen $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuyla alır. (5.16)'de verilen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 'ler Lagrange çarpanlarıdır. $\alpha_j, j = 0, \dots, m$ Lagrange çarpanları,

$$\int_a^b g_j(x) q(x) \exp \left(- \sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x) \right) dx = \mu_j \quad , (j = 1, \dots, m) \quad (5.17)$$

sisteminin çözümü olarak bulunabilir.

(5.16) ile ifade edilen $f(x)$ yoğunluk fonksiyonu, $D(p : q)$ Kullback-Leibler fonksiyonelin de yerine yazıldığında,

$$D_{\min} = \int_a^b q(x) \exp \left(\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x) \right) \ln \left(\frac{q(x) \left(\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x) \right)}{q(x)} \right) dx$$

veya

$$D_{\min} = \int_a^b q(x) \exp \left(\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x) \right) \left(\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x) \right) dx \quad (5.18)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$D_{\min} = \sum_{j=0}^m \alpha_j \left(\int_a^b f(x) g_j(x) dx \right)$$

veya

$$D_{\min} = \sum_{j=0}^m \alpha_j \mu_j \quad (5.19)$$

elde edilir. Bu eşitlikte kullanılan $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanları, $\mu_0 = 1$, $g_0(x) = 1$ olmak üzere, $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m$ 'ler $g_0(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ 'e uygun moment değerleridir. (5.19)'da gösterilen D_{\min} , ifade olarak kesikli rassal değişkenlerdeki D_{\min} 'a benzemektedir. Fakat yapı olarak çok farklıdır. Çünkü sürekli rassal değişkenler için (5.19) formülünde kullanılan $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m$ 'lerin hesabı integrale dayanmaktadır. MinMaxEnt dağılımda olduğu gibi, sürekli rassal değişkenler için MaxMinxEnt de kullanılan semboller kesikli rassal değişkenlerde kullanılanlara benzemektedir. Bunun nedeni sembol karışıklığı yaratmamak içindir.

Kesikli rassal değişkenlerde olduğu gibi, α_j , $(j = 0, \dots, m)$ 'ler $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)$ vektörüne bağlı fonksiyonlar, μ vektörü de $g = (g_0, g_1, \dots, g_m)$ moment vektör fonksiyonuna bağlı vektör fonksiyonel olduğu için, α_j , $(j = 0, \dots, m)$ 'ler g 'ye bağlı fonksiyonlardır. Sonuç olarak (5.19)'da verilen D_{\min} formülü g 'ye bağlı bir fonksiyoneldir. Bu fonksiyonel,

$$U(g) = D_{\min} \quad (5.20)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$U(g)$ fonksiyoneli; MinxEnt metodu yardımıyla, $g = (g_0, g_1, \dots, g_m)$ moment vektör fonksiyonlarına bağlı D_{\min} değerine sahip fonksiyonel olarak tanımlanmıştır (Shamilov 2006a). Bu fonksiyonele sürekli rassal değişkenler için MinxEnt fonksiyoneli denilmiştir.

Sürekli rassal değişkenler için MaxMinxEnt entropi optimizasyon problemi, aşağıda tanım şeklinde verilmiştir.

Tanım 5.2. (5.20) ile tanımlanmış $U(g)$ fonksiyoneline, verilmiş K moment vektör fonksiyonlar kümesinde maksimum değer veren moment vektör fonksiyonunun bulunması problemine sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt

entropi optimizasyon problemi denilecektir. Bu problem kesikli rassal değişkenlerde olduğu gibi iki şekilde düşünülebilir.

- Eğer K moment vektör fonksiyonlar kümesi, sonlu sayıda elemandan oluşuyor ve her bir moment vektör fonksiyonunun bileşenleri lineer bağımsız ise sürekli rassal değişkenler için $U(g)$ fonksiyoneli bu küme içinde maksimum değere sahiptir.
- Eğer K moment vektör fonksiyonlar kümesi, bileşenleri lineer bağımsız olan sonsuz sayıda elemanlardan oluşuyor ise $U(g)$ fonksiyonelinin bu küme içinde maksimuma sahip olabilmesi için bu fonksiyonelin bazı özelliklere sahip olması gerekmektedir.

Not 5.2. K moment vektör fonksiyonlar kümesinde bileşenleri lineer bağımlı olan vektörler varsa, bu vektörler yerine bileşenleri söz konusu vektörün lineer bağımsız bileşkelerinden oluşan vektörler dikkate alınarak Tanım 5.2. ile verilen problem yine ortaya konulabilir.

(5.20) fonksiyonelinin, sonsuz sayıda elemandan oluşan kümede maksimum değere sahip olmasını sağlayan özellikler teoremler şeklinde verilmiştir.

Teorem 5.1. (5.20) ile ifade edilen sürekli rassal değişkenler için $U(g)$ fonksiyoneli sürekli vektör moment fonksiyonları kümesinde $(C[a,b])$ süreklidir.

Teorem 5.2. $U(g)$ fonksiyoneli, $(C[a,b])$ uzayına ait K kompakt kümesinde en büyük ve en küçük değerine ulaşır.

Bu özellikler, kesikli rassal değişkenler için yapılan kanıta benzer şekilde kanıtlanabilir.

5.3.1. MaxMinxEnt Dağılımı

(5.20) de tanımlanmış sürekli rassal değişkenler için $U(g) \subset C[a,b]$ fonksiyoneli, K kompakt moment vektör fonksiyonları kümesinde maksimum değerini,

$$\max_{g \in K} U(g) = U(g^{(0)}) \quad (5.21)$$

$g^{(0)} = (g_0^{(0)}, g_1^{(0)}, \dots, g_m^{(0)})$ moment vektör fonksiyonunda alsın.

(5.25) denkleminin çözümünün varlığı, tekliği ve α vektörünün μ vektörüne sürekli bağlı olduğunun kanıtı, sürekli rassal değişkenler için MaxMinxEnt dağılımının varlığının kanıtıyla ilişkilidir.

Bu kanıt sürecinde, $\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(\alpha_1, \dots, \alpha_m)}$ Jakobian'ın sıfırdan farklı olması önemlidir. Jakobian'ın sıfırdan farklı olması,

$$\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \alpha_m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -Var(g_1(X)) & \dots & -Cov(g_1(X)g_m(X)) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ -Cov(g_m(X)g_1(X)) & \dots & -Var(g_m(X)) \end{vmatrix}} \quad (5.26)$$

ile ortaya çıkmaktadır(Kapur ve Kesevan 1992). (5.26) ile ifade edilen determinant, moment fonksiyonlarının varyans-covaryans matrisinin determinantıdır. Eğer $1, g_1(x), \dots, g_m(x)$ moment fonksiyonları lineer bağımsız fonksiyonlar ise, bulunan varyans-covaryans matrisi negatif tanımlı bir matristir (Cramer 1966, Papuluos 1991). Negatif tanımlı simetrik matrisin determinanı sıfırdan farklı olduğu için $\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} \neq 0 \quad \forall \alpha \in E^m$ sonucuna ulaşılır.

Böylece, (5.25) $f(\alpha) = \mu$ denkleminin çözümünün varlığı, tekliği ve sürekliliği ile ilgili teorem ve kanıt, sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt dağılımına benzer şekilde verilebilir.

Sürekli rassal değişkenler için MaxMinxEnt dağılımının varlığı (5.25) denkleminin çözümünün varlığı, tekliği ve sürekliliği ile ilişkili olduğundan MaxMinxEnt dağılımı için, nümerik çözüm yöntemlerinin kullanılmasının yolu açılmıştır.

5.4. Sürekli Rassal Değişkenler için MaxMinxEnt Entropi Optimizasyon Problemlerinin Nümerik Çözümü

(5.22)'de verilen sürekli rassal değişkenler için MaxMinxEnt dağılımı, Tanım 5.2. ile ifade edilen sürekli rassal değişkenler için MaxMinxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümüdür. Bu çözüm kesikli rassal değişkenlerde olduğu gibi, K kompakt kümesinde $U(g)$ fonksiyoneline maksimum değe değer veren $g^{(0)}$ moment vektör fonksiyonunun genel halde bulunması çok zor olduğu için, pratik uygulamalarda K kümesi; sonlu sayıda elemandan oluşacak şekilde seçilmelidir.

MaxMinxEnt dağılımı, (5.22) de ifade edilen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının bulunmasına bağlıdır. (5.25) denkleminin çözümünün varlığı, tekliği ve sürekliliği ifade edildiği için $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının çözümü vardır. Bir başka ifade ile MaxMinxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü vardır.

(5.25) nonlinear denklem sistemi nümerik yöntemlere çözülebilir. Diğer bir ifade ile $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanları nümerik yöntemlerle bulunabilir. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının nümerik yöntemlerle bulunması için, ardışık yaklaşımlar yöntemi (Banach teoremi), Newton yöntemi ve diğer nümerik yöntemler kullanılabilir. (5.25) nonlinear denklem sisteminin nümerik çözümünün matematiksel yapısı, Newton yöntemi ve Newton yönteminin temeli olan Banach teoremiyle Bölüm 3. de ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

K vektör fonksiyonları kümesinden alınmış her bir g vektör fonksiyonuna uygun sürekli rassal değişkeni için (5.25) fonksiyonel denklemini, programlama dili açısından oluşturan, çözen ve MaxMinxEnt dağılımını bulan herhangi bir paket program bulunmamaktadır. Dolayısıyla sürekli rassal değişkenler için MaxMinxEnt dağılımının uygulamasının yapılabilmesi için bir programın yazılması gerekmektedir.

Sürekli rassal değişkenler için MaxMinxEnt dağılımı, kesikli rassal değişkenler için MATLAB 6.5 ile hazırlanmış program ile bulunmaktadır. Bu durum kesikli rassal değişkenler için MaxMinxEnt entropi optimizasyon

probleminin çözümü ile sürekli rassal değişkenlerde problemlerin çözümü arasındaki ilişkiye dayanmaktadır.

Kesikli sitemler için MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü ile sürekli rassal değişkenler için problemin çözümü arasındaki ilişki Bölüm 5.5. incelenmiştir

5.5. Kesikli ve Sürekli Rassal Değişkenler için MaxMinxEnt Entropi Optimizasyon Problemleri Arasındaki İlişki

Kesikli rassal değişkenler ile sürekli rassal değişkenler arasında bu bölümde ifade edilen ilişki yardımıyla, MaxMinxEnt ve diğer problemlerin çözümünde, kesikli rassal değişkenlerden yola çıkarak sürekli rassal değişkenler içinde problemler çözülebilir. Kesikli rassal değişkenler ile sürekli rassal değişkenler arasındaki ilişki şu şekildedir:

Sürekli rassal örneğin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$, ve örneğe ilişkin önsel yoğunluk fonksiyonu $q(x)$,

$$\int_a^b f(x)dx = 1, f(x) \geq 0 \text{ ve } \int_a^b q(x)dx = 1, q(x) \geq 0 \quad (5.27)$$

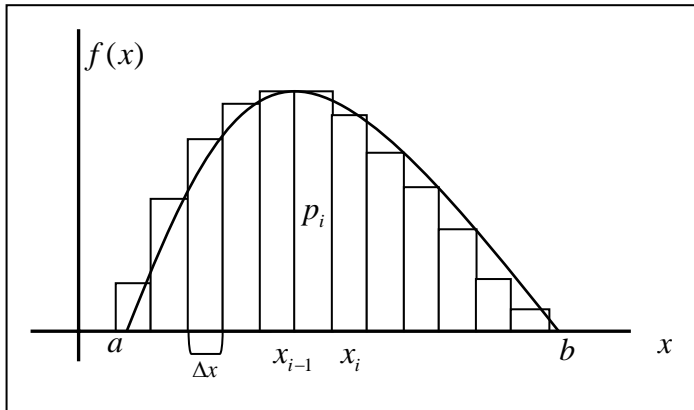
şeklinde olsun. $f(x)$ yoğunluk fonksiyonunun tanımlı olduğu $[a,b]$ kapalı aralığını, $a = x_0$ ve $b = x_n$ olacak şekilde, x_0, x_1, \dots, x_n noktalarıyla parçaya bölelim.

Parçalar arasındaki uzunluk,

$$\Delta x = x_i - x_{i-1}, (i = 1, \dots, n) \text{ ve } \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad (5.28)$$

şeklinde olsun.

Şekil 5.2. Kesikli ve sürekli rassal değişkenlerin çapraz entropileri arasındaki ilişki



Olasılık tanımına göre

$$p_i \approx f(x_i)\Delta x \quad (5.29)$$

dir. (5.29) ile ifade edilen p_i olasılığı, kesikli rassal değişkenler için Kullback-Leibler ölçümünde yerine yazıldığında,

$$-\sum_{i=1}^n p_i \ln\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \approx -\sum_{i=1}^n (f(x_i)\Delta x) \ln\left(\frac{f(x_i)\Delta x}{q(x_i)}\right) \quad (5.30)$$

elde edilir. (5.30)' de gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$-\sum_{i=1}^n p_i \ln\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \approx -\sum_{i=1}^n (f(x_i)\Delta x) \ln\left(\frac{f(x_i)}{q(x_i)}\right) - \sum_{i=1}^n (f(x_i)\Delta x) \ln \Delta x \quad (5.31)$$

bulunur. $\Delta x > 0$ çok küçük olduğunda (5.31),

$$-\sum_{i=1}^n p_i \ln\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \approx -\int_a^b f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{q(x)}\right) dx - \ln \Delta x \int_a^b f(x) dx \quad (5.32)$$

şeklinde yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$-\sum_{i=1}^n p_i \ln\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \approx -\int_a^b f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{q(x)}\right) dx - \ln \Delta x \quad (5.33)$$

sonucuna ulaşılır. (5.33) formülünden görüldüğü gibi $\Delta x > 0$ çok küçük değerlere sahip olduğunda, kesikli ve sürekli rassal değişkenler için Kullback-Leibler ölçümleri yaklaşık olarak eşittir.. Shannon ölçümünde olduğu gibi, Δx 'in sıfır olmaması ve pozitif değerlere sahip olması pratik uygulamalarla ilişkilidir. Bir başka ifade ile sıfır hata ile ölçüm yapılamayacağı için, $\Delta x > 0$ pozitif küçük değer olması doğaldır.

Böylece sürekli rassal değişkenler için Kullback-Leibler ölçümü, kesikli rassal değişkenler için Kullback-Leibler ölçümü ile yaklaşık olarak ifade edilir. Bu sonuç; sürekli rassal değişkenler için MaxMinxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümünü, kesikli rassal değişkenler yardımıyla bulmamızı sağlar. Bir başka ifade ile kesikli rassal değişkenler için MaxMinxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü için MATLAB 6.5 ile hazırlanmış programı, sürekli rassal değişkenler için de kullanılmasını sağlar.

5.6. Uygulama

Bu bölümde, MaxMinxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü için MATLAB 6.5 ile hazırlanmış program ile ilgili bir uygulama yapılmaktadır. 2000 yılına ilişkin rüzgar hızı dağılımının belirlenmesi (Genç ve ark. 2005), uygulama olarak seçilmiştir. Uygulamada X rassal değişkeni, 2000 yılına ilişkin rüzgar hızıdır. Rüzgar ölçümleri Türkiye'nin Akşehir bölgesinde ait ölçümlerdir ve ölçüm birimi metre/saniye dir (Genç ve arkadaşları, 2005). Önsel dağılım olarak, aynı bölgenin 1999 yılına ilişkin rüzgar hızı seçilmiştir. MaxMinxEnt dağılımının, 2000 yılına ilişkin rüzgar hızı dağılımına uyumu, $RSME$, χ^2 , R^2 (Celik, 2003) istatistiksel kriterleri ile ortaya konulmuştur.

2000 yılına ilişkin rüzgar hızı için MaxMinxEnt dağılımının belirlenmesi, MaxMinxEnt entropi optimizasyon probleminin çözülmesi gerektirmektedir. Bu probleminin çözümü MATLAB 6.5 ile hazırlanmış program ile bulunmaktadır. MaxMinxEnt dağılımı; iki kısıta göre, üç kısıta göre, dört kısıta göre, beş kısıta göre ve altı kısıta göre MaxMinxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü için hazırlanmış program ile bulunmaktadır.

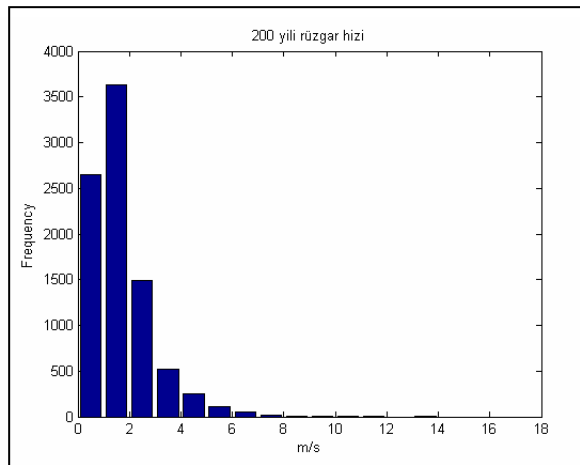
Uygulama sürecinde moment fonksiyonları kümesi $(x, x^2, \ln(x), (\ln(x))^2, \ln(x^2 + 1))$ şeklinde belirlenmiştir. MinMaxEnt dağılımında olduğu gibi, moment fonksiyonlarının seçimi, bilinen istatistiksel dağılımların karakterize edici momentleri olacak şekilde yapılmıştır.

2000 ve 1999 yıllarına ilişkin rüzgar hızı gözlem değerleri ve histogramı Çizelge 5.1 de ve Şekil 5.3 de listelenmektedir.

Çizelge 5.1. 2000 ve 1999 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için gözlenen frekanslar

m	2000 yılı frekans	1999 yılı frekans
0-1	2650	2681
1-2	3636	3410
2-3	1488	1558
3-4	521	565
4-5	254	247
5-6	114	138
6-7	49	63
7-8	16	32
8-9	8	23
9-10	7	14
10-11	3	14
11-12	8	9
12-13	0	2
13-14	3	1
14-15	0	2
15-16	0	1
16-17	0	0

Şekil 5.3. 2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için gözlenen frekanslara ilişkin histogram



2000 yılına ilişkin rüzgar hızını, 1999 yılı rüzgar hızı önsel dağılımı ve iki, üç, dört, beş, altı kısıta göre MaxMinxEnt dağılımları ile modellemek için, MATLAB' hazırlanan programdan elde edilen sonuçlar Şekil 5.4 de verilmektedir.

Şekil 5.4. 2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için iki, üç, dört, beş ve altı bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MaxMinxEnt dağılımları ile ilgili program sonuçları

```

Gerçekolik= 0.30262 0.41521 0.16992 0.059495 0.029005 0.013018 0.0055955 0.0018271
0.00091355 0.00079936 0.00034258 0.00091355 0 0.00034258 0 0 0
-----
Tumkombinasyon1= 1 2 3 4 5
Iterasyonsncl= 1 1 1 1 1
Minxent1= 0.002189 0.0032687 0.00052825 0.0037572 0.0012508
Maximum= 0.0037572 Sıra= 4
Kombinasyon1= 4
Olasılıklar1= 0.31057 0.40803 0.17396 0.058537 0.023836 0.012467 0.0053533 0.0025684
0.0017502 0.0010133 0.00096659 0.00059422 0.00012656 6.077e-005 0.00011693 5.6341e-005 0
-----
Tumkombinasyon2= 1 1 1 1 2 2 2 3 3 4
2 3 4 5 3 4 5 4 5 5
Iterasyonsncl2= 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
Minxent2= 0.003397 0.00399 0.00391 0.003567 0.003601 0.003777 0.003429 0.003978 0.003806 0.0039718
Maximum= 0.003999 Sıra= 2
Kombinasyon2= 1 3
Olasılıklar2= 0.30409 0.40743 0.17903 0.060776 0.024546 0.012571 0.0052332 0.0024149
0.0015725 0.00086534 0.00078094 0.00045243 9.05e-005 4.0691e-005 7.312e-005 3.2824e-005 0
-----
Tumkombinasyon3= 1 1 1 1 1 1 2 2 2 3
2 2 2 3 3 4 3 3 4 4
3 4 5 4 5 5 4 5 5 5
Iterasyonsncl3= 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
Minxent3= 0.004006 0.004094 0.003585 0.00404 0.004062 0.004030 0.004079 0.004122 0.004071 0.004002
Maximum= 0.0041221 Sıra= 8
Kombinasyon3= 2 3 5
Olasılıklar3= 0.30304 0.41092 0.17712 0.059967 0.02441 0.012657 0.0053388 0.0024919
0.0016357 0.00090324 0.00081363 0.00046771 9.2235e-005 4.0609e-005 7.0955e-005 3.0747e-005 0
-----
Tumkombinasyon4= 1 1 1 1 2
2 2 2 3 3
3 3 4 4 4
4 5 5 5 5
Iterasyonsncl4= 1 1 1 1 1
Minxent4= 0.0041596 0.0041835 0.0041724 0.0042847 0.0042115
Maximum= 0.0042847 Sıra= 4
Kombinasyon4= 1 3 4 5
Olasılıklar4= 0.30278 0.4133 0.17383 0.059757 0.025035 0.013267 0.0056303 0.0025958
0.0016524 0.00086976 0.0007353 0.00039123 7.0552e-005 2.8107e-005 4.4034e-005 1.6976e-005 0
-----
Tumkombinasyon5= 1 2 3 4 5
Iterasyonsncl5= 1
Minxent5= 0.0048268
Olasılıklar5= 0.30265 0.41485 0.1704 0.06079 0.026422 0.01377 0.00546 0.0022949
0.0013438 0.00067878 0.00059256 0.00036012 8.4067e-005 5.019e-005 0.00013899 0.00011355 0
-----
Kikaremut1= 1.074e-005
Kikaremut2= 1.206e-005
Kikaremut3= 7.1882e-006
Kikaremut4= 3.0459e-006
Kikaremut5= 9.2797e-007
-----
RSMEmut1= 0.0030784
RSMEmut2= 0.0031514
RSMEmut3= 0.0023445
RSMEmut4= 0.0014663
RSMEmut5= 0.00077489
-----
Rmut1= 0.99932
Rmut2= 0.99932
Rmut3= 0.99961
Rmut4= 0.99985
Rmut5= 0.99996

```

MaxMinxEnt dağılımının belirlenmesinde kullanılan, iki, üç, dört,beş ve altı bileşkeye sahip moment vektörlerine göre MinxEnt dağılımlarının çapraz entropileri Çizelge 5.2-5.6 da, listelenmektedir.

Çizelge 5.2. 2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için iki bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropileri

Kısıtlar	Entropi
(1, x)	0.002189
(1, x ²)	0.0032687
(1, ln x)	0.00052825
(1, (ln x) ²)	0.0037572
(1, ln(1+x ²))	0.0012508

Çizelge 5.3. 2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için üç bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropileri

Kısıtlar	Entropi
(1, x, x ²)	0.0033976
(1, x, ln x)	0.0039990
(1, x, (ln x) ²)	0.0039180
(1, x, ln(1+x ²))	0.0035676
(1, x ² , ln x)	0.0036012
(1, x ² , ln(x) ²)	0.0037775
(1, x ² , ln(1+x ²))	0.0034294
(1, ln x, (ln x) ²)	0.0039787
(1, ln x, ln(1+x ²))	0.0038068
(1, (ln x) ² , ln(1+x ²))	0.0039718

Çizelge 5.4. 2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için dört bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropileri

Kısıtlar	Entropi
(1, x, x ² , ln x)	0.0040066
(1, x, x ² , (ln x) ²)	0.0040942
(1, x, x ² , ln(1+x ²))	0.0035855
(1, x, ln x, ln(x) ²)	0.004045
(1, x, ln x, ln(1+x ²))	0.0040624
(1, x, (ln x) ² , ln(1+x ²))	0.0040309
(1, x ² , ln x, (ln x) ²)	0.0040793
(1, x ² , ln x, ln(1+x ²))	0.0041221
(1, x ² , (ln x) ² , ln(1+x ²))	0.0040711
(1, ln x, (ln x) ² , ln(1+x ²))	0.0040024

Çizelge 5.5. 2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için beş bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropileri

Kısıtlar	Entropi
$(1, x, x^2, \ln x, (\ln x)^2)$	0.0041596
$(1, x, x^2, \ln x, \ln(1+x^2))$	0.0041835
$(1, x, x^2, (\ln x)^2, \ln(1+x^2))$	0.0041724
$(1, x, \ln x, \ln(x)^2, \ln(1+x^2))$	0.0042847
$(1, x^2, \ln x, (\ln x)^2, \ln(1+x^2))$	0.0042115

Çizelge 5.6. 2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için altı bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropileri

Kısıtlar	Entropi
$(1, x, x^2, \ln x, (\ln x)^2, \ln(1+x^2))$	0.0048268

Çizelge 5.2-5.6 dan sonuç olarak, iki bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MaxMinxEnt dağılımı $f_{m_{mx2}}(x)$ 'nin, $(1, (\ln x)^2)$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım, üç bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m_{mx3}}(x)$ 'ün, $(1, x, \ln x,)$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım, dört bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MaxMinxEnt dağılımı $f_{m_{mx4}}(x)$ 'ün, $(1, x^2, \ln x, \ln(1+x^2))$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım, beş bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MaxMinxEnt dağılımı $f_{m_{mx5}}(x)$ 'ün, $(1, x, \ln x, (\ln x)^2, \ln(1+x^2),)$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım ver altı bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MaxMinxEnt dağılımı $f_{m_{mx6}}(x)$ 'ün, $(1, x, x^2 \ln x, (\ln x)^2, \ln(1+x^2),)$ moment vektörüne karşılık gelen dağılımdır denilebilir.

Belirlenen MaxMinxEnt dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar, Çizelge 5.7 'de incelenmektedir.

Çizelge 5.7 2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için MaxMinxEnt dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar ve gözlenen frekanslar

m/s	frekans	f_i	f_{mx2}	f_{mx3}	f_{mx4}	f_{mx5}	f_{mx6}
0.5	2650	0.30262	0.31057	0.30409	0.30409	0.30278	0.30265
1.5	3636	0.41521	0.40803	0.40743	0.40743	0.4133	0.41485
2.5	1488	0.16992	0.17396	0.17903	0.17903	0.17383	0.1704
3.5	521	0.059495	0.058537	0.060776	0.060776	0.059757	0.06079
4.5	254	0.029005	0.023836	0.024546	0.024546	0.025035	0.026422
5.5	114	0.013018	0.012467	0.012571	0.012571	0.013267	0.01377
6.5	49	0.005595	0.0053533	0.0052332	0.0052332	0.0056303	0.00546
7.5	16	0.001827	0.0025684	0.0024149	0.0024149	0.0025958	0.0022949
8.5	8	0.000913	0.0017502	0.0015725	0.0015725	0.0016524	0.0013438
9.5	7	0.000799	0.0010133	0.00086534	0.0008653	0.0008697	0.0006787
10.5	3	0.000342	0.0009665	0.00078094	0.0007809	0.0007353	0.0005925
11.5	8	0.000913	0.0005942	0.00045243	0.0004524	0.0003912	0.0003601
12.5	0	0	0.0001265	9.05e-005	9.05e-005	7.055e-005	8.406e-005
13.5	3	0.000342	6.077e-005	4.069e-005	4.069e-005	2.810e-005	5.019e-005
14.5	0	0	0.0001169	7.312e-005	7.312e-005	4.403e-005	0.0001389
15.5	0	0	5.631e-005	3.282e-005	3.282e-005	1.697e-005	0.0001135
16.5	0	0	0	0	0	0	0

Belirlenen MaxMinxEnt dağılımlarının, $RSME$, χ^2 , R^2 kriterlerine göre incelenmesi Çizelge 5.8 de verilmektedir.

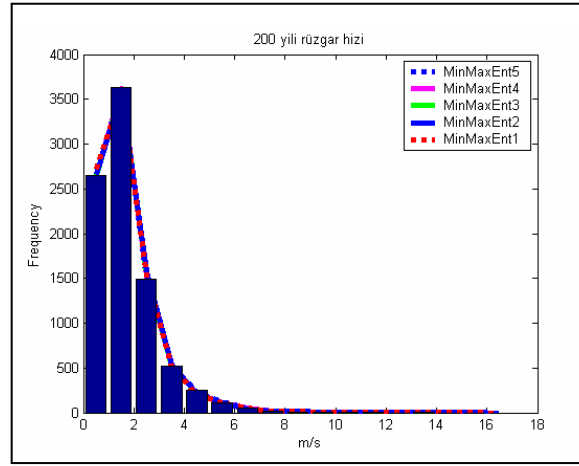
Çizelge 5.8 2000 yılı için ölçülen rüzgâr hızı için iki, üç, dört, beş, altı bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MaxMinxEnt dağılımlarının istatistiksel kriterlerle incelenmesi

MaxMinxEnt Dağılımlar	Kriterler		
	χ^2	$RSME$	R^2
$f_{m_{x2}}(x)$	1.074e-005	0.0030784	0.99932
$f_{m_{x3}}(x)$	1.206e-005	0.0031514	0.99932
$f_{m_{x4}}(x)$	7.1882e-006	0.0023445	0.99961
$f_{m_{x5}}(x)$	3.0459e-006	0.0014663	0.99985
$f_{m_{x6}}(x)$	9.2797e-007	0.00077489	0.99996

Çizelge 5.8 de iki, üç, dört, beş, altı bileşekli moment vektör fonksiyonlarına uygun MaxMinxEnt dağılımlarının $RSME$, χ^2 , R^2 kriterlerine göre, hatayı modellemede çok iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Şekil 5.5 de dört,beş ve altı bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımlarının, radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata dağılımını nasıl belirlediği oldukça net sergilenmektedir.

Şekil 5.5. İki, üç, dört ve beş bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MaxMinxEnt dağılımları



Böylece, MaxMinxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü için MATLAB 6.5 ile hazırlanmış programdan elde edilen sonuçlar bir uygulama ile gösterilmiştir. Bu uygulamada diğer önemli bir noktada, kısıt sayısı (moment vektör bileşen sayısı) artırıldığında, MaxMinxEnt dağılımının modellemeye etkisi çok az olduğu gözlenmiştir. Buna göre belli bir kısıt sayısından sonra, kısıt sayısının artırılmasının modellemeye etkisi çok fazla olmadığı söylenebilir.

Benzer uygulamalar moment fonksiyon kümesi genişletilerek, kısıt sayısı (moment vektörünün bileşen sayısı) artırılarak veya önsel dağılım değiştirilerek yapılabilir. Ayrıca bu program, önsel bilgi yardımıyla dağılımların bulunması için yapılan (Shamilov ve ark 2006b) çalışmasında büyük kolaylık sağlamıştır.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde, elde edilen sonuçlar şu şekildedir:

- Kesikli ve sürekli rassal değişkenler için MaxEnt metodu yardımıyla moment fonksiyonlarına bağlı özel fonksiyoneller ile, bu fonksiyonellere minimum değer veren ve informasyonu maksimum yapan MinMaxEnt dağılımlarından bahsedilmiştir
- MinMaxEnt dağılımlarının nümerik yöntemlerle bulunması, problemler şeklinde ortaya konmuştur.
- MinMaxEnt problemlerinin çözümlerinin varlığı kanıtlanmıştır.
- Ortaya konan MinMaxEnt entropi optimizasyon problemlerinin oluşturulması ve nümerik çözümleri için, MATLAB 6.5'de özel program yazılmıştır.
- Kesikli ve sürekli rassal değişkenler için MinxEnt metodu yardımıyla moment fonksiyonlarına bağlı özel fonksiyoneller ile, bu fonksiyonellere maksimum değer veren MaxMinxEnt dağılımlarından bahsedilmiştir.
- Bu dağılımların nümerik yöntemlerle bulunması problemler şeklinde ortaya konmuştur.
- Ortaya konan problemlerin oluşturulması ve nümerik çözümü için MATLAB 6.5'de özel program yazılmıştır.
- Problemlerin geliştirilmesinde, sabit nokta prensiplerinden Banach teoremi ve temel nümerik yöntemlerden biri olan Newton yöntemi verilmiştir.
- MinMaxEnt için hazırlanmış programın uygulamasıyla, bilinen istatistiksel dağılımlara uymayan gözlem değerlerinin MinMaxEnt dağılımıyla ifade edilebileceği gösterilmiştir.
- MaxMinxEnt için hazırlanmış programın uygulamasında, önsel dağılıma sahip gözlem değerlerinin MaxMinxEnt dağılımıyla ifade edilebileceği gösterilmiştir.
- Ayrıca, moment kısıtları sayısı artırıldıkça, MinMaxEnt ve MaxMinxEnt dağılımlarının veriyi modellemede etkisi gözlenmiştir.

- MaxMinxEnt dağılımı için, belli bir kısıt sayısından sonra, kısıt sayısının artırılmasının modellemeye etkisi çok olduğu gözlenmiştir.

Bu çalışmaya göre, öneriler aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

- Nümerik çözüm yöntemi olarak, Banach teoreminin belirlediği ardışık yaklaşımlar süreci ve Newton yaklaşımları MinMaxEnt ve MaxMinxEnt dağılımlarının belirlenmesinde kullanılabilir.
- K kompakt kümesinde tanımlanmış, MaxEnt metodu yardımıyla moment fonksiyonlarına bağlı fonksiyonele minimum değer veren $g^{(0)}$ moment vektör fonksiyonunun bulunması, genel halde bir problem gibi ele alınabilir.
- K kompakt kümesinde tanımlanmış, MinxEnt metodu yardımıyla moment fonksiyonlarına bağlı fonksiyonele maksimum değer veren $g^{(0)}$ moment vektör fonksiyonunun bulunması, genel halde bir problem gibi ele alınabilir.

KAYNAKLAR

- ВЕHTЦЕЛБ, Е.С. (1969), *Теория вероятностей*, Moskba
- Cramer, H. (1966), *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Pres.
- Celik A.N. (2003), "A statistical analysis of wind power density based on the Weibull and Rayleigh models at the southern region of Turkey," *Renewable energy*, **29**, 593-604.
- Genc A., Esioglu M., Pekgor A., Oturanc G., Hepbaslı A. ve Ulgen K. (2005) "Estimation of wind power using weibull distribution," **27**, 809-822.
- Cover, T. M. (1991), *Elements of information theory*. John Wiley, New York.
- Huo H., Li Z. ve Xia Y. (2006), "Application of maximum entropi probability density estimation approach to constituting oil monitoring diagnostic criterions," *Tribology International*, **39**, 528-532.
- Jaynes E.T(1957), "Information theory and statistical mechanics," *Phys. Rev.*, **106**, 620-630.
- Kapur, J.N. ve Kesevan, H.K. (1992), *Entropy Optimization Principle with Applications*, Academic Press.
- Kantoroviç, L. ve V.Akıllov, G. P.(1982), *Functional Analysis*, Pergamon Press
- Kolmogorov A. N. ve Fomin S. V. (1972). *Elements of Theory of Functions and Functional Analysis*, 469-472, Moskow.
- Kullback, S. ve Leibler, R. A. (1951), "On Information and Sufficiency," *Annals of Mathematical Statistics*, **22**, 79–86.
- Kullback, S. (1959), *Information Theory and Statistics*, Wiley.
- Li M. ve Li X. (2005), "A second-order newton-raphson method for improved numerical stability in the determination of droplet size distributions in sprays," *Atomization and Sprays*, (in press).
- Li C.H. ve Tam P.K.S. (1998), "An iterative algorithm for minimum cross entropy thresholding," *Pattern Recognition Letters*, **19 (8)**, 771-776.
- Mert Kantar Y. (2006), *Entropi Optimization metodlarıyla rassal değişkenlerin dağılımlarının incelenmesi*, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

- Muhlenbein H. ve Hons R. (2005), "The estimation of distributions and the minimum relative entropy principle," *Evolutionary Computation*, **13 (1)**, 1-27.
- Nailong W. (1977), *The Maximum Entropy Method*, Springer-Verlag, Berlin.
- Pandey M.D. (2000), "Direct estimation of quantile functions using the maximum entropy principle," *Structural Safety*, **22 (1)**, 61-79.
- Pandey M.D. (2001), "Extreme quantile estimation using order statistics with minimum cross-entropy principle," *Probabilistic Engineering Mechanics*, **16 (1)**, 31-42.
- Ramirez P. ve Carta J.A. (2005), "The use of wind probability distributions derived from the maximum entropy principle in the analysis of wind energy. A case study," *Energy and Conversion Management*, (in press).
- Papuluos A. (1991), *Probability, Random variables, and stochastic process*, McGraw-Hill Book.
- Seghouane A.K. ve Bekara M. (2004), "A small sample model selection criterion based on Kullback's symmetric divergence," *Signal Processing*, **52 (12)**, 3314 – 3323.
- Shamilov A. (2005), "Comparison of classical estimate methods based on maximum entropy," *Ordered Statistical Data: Approximations, Bounds and Characterizations*, Izmir University of Economics.
- Shamilov A. ve Kantar Mert Y. (2005), "On a Distribution Minimizing Maximum Entropy", *Ordered Statistical Data: Approximations, Bounds and Characterizations*, Izmir University of Economics.
- Shamilov A. (2006a), "A Development of Entropy Optimization Methods," *WSEAS Transactions on Mathematics*, **5(5)**, 568-575.
- Shamilov A. (2006b), "An Approach to Generalize Entropy Optimization Principles and Related Aspects of Newton's Method," *The 9th WSEAS International Conference on Applied mathematics(MATH 06)*.
- Shamilov A., Usta İ. ve Kantar Mert Y. (2006a), "The Distribution of Minimizing Maximum Entropy: Alternative to Weibull distribution for wind speed," *WSEAS Transactions on Mathematics*, **5(6)**, 695-700.

- Shamilov A., Kantar Mert Y. ve Usta İ. (2006b), "On a Functional defined by means of Kullback-Leibler Measure and Its Statistical Applications," *WSEAS Transactions on Mathematics*, **5(6)**, 671-676.
- Shamilov A., Ağaoğlu E., Usta İ., Kantar Mert Y., Girifitinoğlu Ç. ve Yolaçan Ş., (2006c) "MinMaxEnt Dağılımı Yardımıyla Modelleme", 5. *Istatistik Günleri Sempozyumu*.
- Shamilov A., Girifitinoğlu Ç., Yolaçan Ş., Usta İ. ve Kantar Mert Y., (2006d) "Dünya Ülkelerinin Kentsel Ve Kırsal Nüfus Homojenliğinin Genişletilmiş Maksimum Entropi Yöntemi İle Belirlenmesi," 5. *Istatistik Günleri Sempozyumu*.
- Shannon C. E. (1948), "Mathematical theory of communication," *Bell System Tech. J.*, **27**, 379-423, 623-659.
- Spivak, M.(1965). *Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus*, Anadolu Üniversitesi Yayın.
- Woodbury A.D. (2004), "A FORTRAN program to produce minimum relative entropy distributions," *Computers & Geosciences*, **30 (1)**, 131-138.
- Ximing, W. (2003). "Calculation of maximum entropy densities with application to income distribution," *Journal of Econometrics*, **115**, 347-354.

EK-1 MinMaxEnt Entropi Optimizasyon Probleminin Oluşturulması ve Nümerik Çözümü için Hazırlanan Programın İki Kısıta göre MATLAB Kodu

```
1. clear all
2. syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10;
3. syms T T2 T3
4. syms TP TP2 TP3
5. H=[x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10];
6. [k,kk]=size(H);
7. HH=['x(01)';'x(02)';'x(03)';'x(04)';'x(05)';'x(06)';'x(07)';'x(08)';'x(09)'];
8. CV =cellstr(HH);
9. g1=inline('x');
10. g2=inline('x.^2');
11. g3=inline('log(x)');
12. g4=inline('(log(x).^2)');
13. g5=inline('log(1+x.^2)');
14. Frk=[21 72 66 38 51 56 64 32];
15. DATA=[25 35 45 55 65 75 85 95];
16. Tpfrk=sum(Frk);
17. s=length(DATA);
18. b(1:s)=1;
19. G=[b;g1(DATA);g2(DATA);g3(DATA);g4(DATA);g5(DATA)];
20. k=1;
21. [str,stn]=size(G);
22. combos = combntns(1:(str-1),k);
23. [c,e]=(size(combos));
24. mt(1:str)=0;
25. for p=1:s+1
26. Olsk(p)=Frk(p)/Tpfrk;
27. end
28. mt(1)=1;
29. for p=2:str
```

```

30. for i=1:s
31. mt(p)=mt(p)+Olsk(i)*G(p,i);
32. end
33. end
34. for z=1:c
35. for p=1:k+1
36. TP(p,1)=0;
37. end
38. for i=1:e
39. n(1)=1;
40. n(i+1)=combos(z,i)+1;
41. end
42. j=0;
43. for i=1:s
44. j=j+1;
45. T(1,j)=0;
46. for m=1:k
47. T(1,j)=T(1,j)-G(n(m),i)*H(1,n(m));
48. end
49. T(1,j)=exp(T(1,j));
50. end
51. j=0;
52. for m=1:k+1
53. j=j+1;
54. for i=1:s
55. TP(j,1)=TP(j,1)+G(n(m),i)*T(1,i);
56. end
57. TP(j,1)=TP(j,1)-mt(n(m));
58. end
59. sonuc1=subs(TP,H(1,1),'x(1)');
60. for j=2:k+1
61. for i=2:10

```



```

62. if n(j)==i
63. fsra=CV(i,1);
64. sonuc1=subs(sonuc1,H(2,n(j)),fsra);
65. end
66. end
67. end
68. fonksyn=inline(sonuc1);
69. x0(1,1)=log(s);
70. for i=2:str
71. x0(i,1)=0;
72. end
73. Options = optimset('MaxIter',5000,'Display');
74. x,fval,exitflag,output] = fsolve(fonksyn, x0, Options);
75. snc1(z)=exitflag
76. snc2=output;
77. for i=1:str
78. kok(z,i)=x(i);
79. end
80. KOK=0;
81. KOK=kok(z,:);
82. Mxolslk=subs(T,x1,kok(z+1,1));
83. for j=2:k+1
84. for i=2:10
85. if n(j)==i
86. Mxolslk=subs(Mxolslk,H(1,n(j)),kok(z,i));
87. end
88. end
89. end
90. for i=1:s
91. soon(z,i)=Mxolslk(i);
92. end
93. Mxolslk;

```

```

94. end
95. for i=1:c
96. Mxentrp(i)=0;
97. for j=1:s
98. if soon(i,j)~=0
99. gt=soon(i,j)*log2(soon(i,j));
100. end
101. if soon(i,j)==0
102. gt=0;
103. end
104. Mxentrp(i)=Mxentrp(i)+gt;
105. end
106. end
107. Mxentrp=-Mxentrp;
108. disp("")
109. disp('-----')
110. disp("")
111. disp(['Gerçekolsk= ',num2str(Olsk)])
112. disp('-----')
113. disp("")
114. Kombinastonlar=combos';
115. disp(['Tumkombinasyon1= ',num2str(Kombinastonlar)])
116. disp("")
117. exitflag=snc1;
118. disp(['İterasyonsnc1= ',num2str(snc1)])
119. disp("")
120. Mxentrp=Mxentrp;
121. disp(['Maxentrp1= ',num2str(Mxentrp)])
122. disp("")
123. [minumun,sira]=min(Mxentrp);
124. disp(['Minimum= ',num2str(minumun)])
125. disp(['Sıra= ',num2str(sira)])

```

```

126. kmbnasyon=(combos(sira,:));
127. disp(['Kombinasyon1= ',num2str(kmbnasyon)])
128. disp("")
129. disp("")
130. soonuc=soon(sira,:);
131. disp(['Olasılıkmx1= ',num2str(soonuc)])
132. prmt2=2;
133. for i=1:s
134. mx1(i)=(Olsk(i)-soonuc(i)).^2;
135. end
136. kikarem1=sum(mx1)/(s-prmt2);
137. disp(['Kikarem1= ',num2str(kikarem1)])
138. disp("")
139. disp('-----')
140. disp("")
141. topp=0;
142. for i=1:s
143. topp=topp+(Olsk(i)-(1/s)).^2;
144. end
145. RSMEm1=(sum(mx1)/s)^0.5;
146. disp(['RSMEm1= ',num2str(RSMEm1)])
147. disp('-----')
148. Rmx11 = corrcoef(Olsk,soonuc);
149. Rmx1=Rmx11(1,2).^2;
150. disp(['Rmx1= ',num2str(Rmx1)])
151. disp('-----')
152. close
153. plot(DATA,(soonuc*Tpfrk),':','LineWidth',4)
154. hold on
155. ylabel('frequency')
156. xlabel('m')
157. legend('MinMaxEnt1')

```

158. title('Hata Degerleri')

159. bar(DATA,Frk,0.8)

EK-2 MaxMinxEnt Entropi Optimizasyon Probleminin Oluşturulması ve Nümerik Çözümü için Hazırlanan Programın İki Kısıta göre MATLAB Kodu

```
1. clear all
2. syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10;
3. syms T T2 T3
4. syms TP TP2 TP3
5. H=[x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10];
6. [k,kk]=size(H);
7. HH=['x(01)';'x(02)';'x(03)';'x(04)';'x(05)';'x(06)';'x(07)';'x(08)';'x(09)'];
8. CV = cellstr(HH);
9. g1=inline('x');
10. g2=inline('x.^2');
11. g3=inline('log(x)');
12. g4=inline('(log(x).^2)');
13. g5=inline('log(1+x.^2)');
14. Frk=[2650,3636,1488,521,254,114,49,16,8,7,3,8,0,3,0,0,0];
15. Frk2=[2681,3410,1558,565,247,138,63,32,23,14,14,9,2,1,2,1,0];
16. DATA=[0.5 1.5 2.5 3.5 4.5 5.5 6.5 7.5 8.5 9.5 10.5 11.5 12.5 13.5 14.5
15.5 16.5]
17. Tpfrk=sum(Frk);
18. s=length(DATA);
19. b(1:s)=1;
20. G=[b;g1(DATA);g2(DATA);g3(DATA);g4(DATA);g5(DATA)];
21. k=1;
22. [str,stn]=size(G);
23. combos = combntns(1:(str-1),k);
24. [c,e]=(size(combos));
25. mt(1:str)=0;
26. for p=1:s+1
27. Olsk(p)=Frk(p)/Tpfrk;
```

```

28. Olsk2(p)=Frk2(p)/sum(Frk2)
29. end
30. mt(1)=1;
31. for p=2:str
32. for i=1:s
33. mt(p)=mt(p)+Olsk(i)*G(p,i);
34. end
35. end
36. for z=1:c
37. for p=1:k+1
38. TP(p,1)=0;
39. end
40. for i=1:e
41. n(1)=1;
42. n(i+1)=combos(z,i)+1;
43. end
44. j=0;
45. for i=1:s
46. j=j+1;
47. T(1,j)=0;
48. for m=1:k+1
49. T(1,j)=T(1,j)-G(n(m),i)*H(1,n(m));
50. end
51. T(1,j)= Olsk2(j)*(jexp(T(1,j)));
52. end
53. j=0;
54. for m=1:k+1
55. j=j+1;
56. for i=1:s
57. TP(j,1)=TP(j,1)+G(n(m),i)*T(1,i);
58. end
59. TP(j,1)=TP(j,1)-mt(n(m));

```

```

60. end
61. sonuc1=subs(TP,H(1,1),'x(1)');
62. for j=2:k+1
63. for i=2:10
64. if n(j)==i
65. fsra=CV(i,1);
66. sonuc1=subs(sonuc1,H(2,n(j)),fsra);
67. end
68. end
69. end
70. fonksyn=inline(sonuc1);
71. x0(1,1)=log(s);
72. for i=2:str
73. x0(i,1)=0;
74. end
75. Options = optimset('MaxIter',5000,'Display');
76. [x,fval,exitflag,output] = fsolve(fonksyn, x0, Options);
77. snc1(z)=exitflag
78. snc2=output;
79. for i=1:str
80. kok(z,i)=x(i);
81. end
82. KOK=0;
83. KOK=kok(z,:);
84. Mxolslk=subs(T,x1,kok(z,1));
85. for j=2:k+1
86. for i=2:10
87. if n(j)==i
88. Mxolslk=subs(Mxolslk,H(1,n(j)),kok(z,i));
89. end
90. end
91. end

```

```

92. for i=1:s+1
93. soon(z,i)=Mxolslk(i);
94. end
95. Mxolslk;
96. end
97. for i=1:c
98. Mnxentrp(i)=0;
99. for j=1:s
100. if soon(i,j)~=0
101. if Olsk2(j)~=0
102. gt=soon(i,j)*log2(soon(i,j)/Olsk2(j));
103. end
104. end
105. if soon(i,j)==0
106. gt=0;
107. end
108. Mnxentrp(i)=Mnxentrp(i)+gt;
109. end
110. end
111. Mnxentrp=Mnxentrp;
112. disp("")
113. disp('-----')
114. disp("")
115. disp(['Gerçekolsk= ',num2str(Olsk)])
116. disp('-----')
117. disp("")
118. Kombinastonlar=combos';
119. disp(['Tumkombinasyon1= ',num2str(Kombinastonlar)])
120. disp("")
121. exitflag=snc1;
122. disp(['İterasyonsnc1= ',num2str(snc1)])
123. disp("")

```



```

124. disp(['Maxentrp1= ',num2str(Mnxentrp)])
125. disp("")
126. [maksimun,sira]=max(Mnxentrp);
127. disp(['Maksimum= ',num2str(maksimun)])
128. disp(['Sira= ',num2str(sira)])
129. kmbnasyon=(combos(sira,:));
130. disp(['Kombinasyon1= ',num2str(kmbnasyon)])
131. disp("")
132. disp("")
133. soonuc=soon(sira,:);
134. disp(['Olasılıkmx1= ',num2str(soonuc)])
135. prmt2=2;
136. for i=1:s
137. mnx1(i)=(Olsk(i)-soonuc(i)).^2;
138. end
139. kikaremx1=sum(mnx1)/(s-prmt2);
140. disp(['Kikaremx1= ',num2str(kikaremx1)])
141. disp("")
142. disp('-----')
143. disp("")
144. topp=0;
145. for i=1:s
146. topp=topp+(Olsk(i)-(1/s)).^2;
147. end
148. RSMEmx1=(sum(mnx1)/s)^0.5;
149. disp(['RSMEmx1= ',num2str(RSMEmx1)])
150. disp('-----')
151. Rmx11 = corrcoef(Olsk,soonuc);
152. Rmx1=Rmx11(1,2).^2;
153. disp(['Rmx1= ',num2str(Rmx1)])
154. disp('-----')
155. close

```

```
156. plot(DATA,(soonuc*Tpfrk),' ','LineWidth',4)
157. hold on
158. ylabel('frequency')
159. xlabel('m/s')
160. legend('MaxMinxEnt1')
161. title('2000 yili rüzgar hizi')
162. bar(DATA,Frk,0.8)
```