

# **OLASILIKSAL KARIŞIM MODELLERİ**

Şenay ASMA

Doktora Tezi

İstatistik Anabilim Dalı

Temmuz 2007

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Şenay Asma'nın "Olasılıksal Karışım Modelleri" başlıklı İstatistik Anabilim Dalındaki, Doktora tezi 20.06.2007 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV	.....
Üye	: Prof. Dr. Ceyhan İNAL	.....
Üye	: Prof. Dr. Embiya AĞAOĞLU	.....
Üye	: Prof. Dr. Ali Fuat YÜZER	.....
Üye	: Doç. Dr. Vakıf CAFER	.....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

## ÖZET

Doktora Tezi

### OLASILIKSAL KARIŞIM MODELLERİ

Şenay ASMA

Anadolu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV  
2007, 196 sayfa

Pek çok pratik uygulamada, istatistiksel verilerin dağılımlarının iki, üç tepeli olduklarında bilindik istatistiksel dağılımların yetersiz kalması sonucunda karışım dağılımları önem kazanmaktadır. Karışım dağılımlarının yanı sıra, günümüzde entropi optimizasyon dağılımlarının da istatistiksel verilere iyi uyum sağlaması da göz önüne alınarak, bu tezde daha uyumlu modeller belirlemek amacıyla, entropi optimizasyon dağılımları (EOD)'nın olasılıksal karışımı ve EOD ile bilindik istatistiksel dağılımların olasılıksal karışımı araştırma konusu olmuştur.

Sunulan tezde öncelikle, sonlu sayıda karışım dağılımlarının tanımlanabilirliği (identifiability) için Lebesgue-Stieltjes integrali yardımıyla bilinen tanımlanabilirlik teoremine alternatif bir ispat sunulmuştur. Buradan hareketle, parametrik olmayan EOD'nın sonlu karışım dağılımlarının tanımlanabilir olduğu ispatlanmıştır; EOD'nın bilinen istatistiksel dağılımlar ile karışımını ifade etmek amacıyla parametrik olmayan EOD bir/iki parametreye bağlı ifadesi verilerek parametreleştirilmiş EOD dağılımları tanımlanmıştır. Parametreleştirilmiş EOD'nda moment fonksiyonları kümesini özel seçerek söz konusu parametrik EOD dağılımlarının karışımının tanımlanabilir olduğu ispatlanmıştır. Parametreleştirilmiş EOD dağılımları ile Lognormal, Weibull ve Gamma dağılımlar ailelerinin üçlü, dörtlü birleşimlerinden oluşmuş yeni LGE, GWE, LWE, LGWE olasılıksal karışım modelleri önerilmiştir ve bu modellerin tanımlanabilir olduğu ispatlanmıştır. Bu dağılımlardan farklı olarak da logaritmik seriler dağılımı ailesi ile kesikli dikdörtgen dağılımlar ailesinin birleşiminden oluşmuş aileden alınan dağılımların sonlu karışımının tanımlanabilir olduğu ispatlanmıştır. Önerilen parametrik olmayan EOD'nin olasılıksal karışım modelleri görüntü işleme ve hata dağılımı problemlerine uygulanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Olasılıksal Karışım Modeli, Tanımlanabilirlik, Entropi Optimizasyon Dağılımları, Parametreleştirme, Farklı Parametrik Ailelerin Birleşimi

## **ABSTRACT**

### **PhD Dissertation**

## **PROBABILISTIC MIXTURE MODELS**

**Şenay ASMA**

**Anadolu University  
Graduate School of Sciences  
Statistics Program**

**Supervisor: Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV  
2007, 196 pages**

In many practical applications, the familiar statistical distributions are not enough when distribution of the statistical data is two, three modal and make the mixture distributions become important. Nowadays, entropy optimization distributions (EOD) are known to be well besides mixture distributions. From this point of view, in this thesis by the aim of finding more appropriate models EOD probabilistic mixture models and the probabilistic mixture of EOD and familiar statistical distributions are the investigation topic.

In present thesis, firstly, alternative proof of the known identifiability theorem for the identifiability of the finite mixture distribution is given by using Lebesgue-Stieltjes integral. Then, finite mixture of non-parametric EOD are proved to be identifiable; in order to present the probabilistic mixture of EOD and familiar statistical distributions, the non-parametric EOD are defined to be parametrized of one/two parameter. By choosing special moment functions set, the probabilistic mixture models of parametrized EOD are proved to be identifiable. New LGE, GWE, LWE, LGWE probabilistic mixture models consist of the double, triple union of the EOD distributions and Lognormal, Weibull and Gamma distributions family are proposed and proved to be identifiable. Furthermore, finite mixture distributions of the union of the logarithmic series distributions family and discrete rectangular distributions family is proved to be identifiable. The proposed non-parametric EOD probabilistic mixture models are applied on image processing and error distribution problems.

**Keywords:** Probabilistic mixture model, Identifiability, Entropy optimization distributions, Parametrization, Union of different parametric family.

## TEŞEKKÜR

Hazırlamış olduğum bu doktora tezinde, öncelikle araştırdığım konularda neden, niçin ve nereden sorularına yanıt bulmam doğrultusunda beni yönlendirerek matematiğin istatistikteki önemini vurgulayan, bölümümüzde açmış olduğu “Ölçüm Teorisi ve Olasılık”, “Entropi ve İnfomasyon Teorisi” ve “İstatistiğin Matematiksel Yöntemleri” gibi eşsiz yüksek lisans ve doktora dersleriyle değerli bilgilerini bizlere aktaran, bu tezin konusunu önererek bölümümüzde yapılan çalışmaların daha da geniş alanlara taşınmasını sağlayan, yaptığı seminer çalışmaları ile sadece ufukumuzu genişletmekle kalmayıp aynı zamanda öz güvenimizi geliştiren, o eşsiz güler yüzü ve şaka ile karışık eleştirileri ile tez çalışması süresince beni kırmadan her zaman sabırla dinleyen, usanmadan tartışan sevgili, saygılı danışman hocam Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV’a çok teşekkür ederim.

Kariyer hayatım boyunca, geçirmiş olduğum tüm süreçlerde desteğini benden hiç esirgemeyen, en ufak bir problemimde dahi beni yalnız bırakmayan, güven, sevgi ve saygı duyduğum değerli hocam Prof. Dr. Embiya AĞAOĞLU’ na yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

Tez izleme toplantıları süresince çalışmalarımızı yakından takip eden ve değerli görüşlerini çekinmeden ifade eden ve desteğini esirgemeyen değerli hocamız Prof. Dr. Vakıf Cafer’e en içten teşekkür ederim.

Çalışmalarım süresince bana oldukça huzurlu bir çalışma ortamı sağlayıp, manevi desteğini hiç esirgemeyen ve sürekli beni cesaretlendiren değerli hocam Prof. Dr. Ali Fuat YÜZER’ e teşekkür ederim.

Beni yetiştiren aileme ve gece, gündüz demeden hayatımın her anında hem bilimsel hem duygusal yanımda olan biricik sevdiğim eşim Emrah ASMA’ya sonsuz teşekkürü borç bilirim.

Şenay ASMA  
Temmuz, 2007

## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
İÇİNDEKİLER .....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	ix
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	xi
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. TEMEL MATEMATİKSEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER .....</b>	<b>6</b>
2.1 Ölçüm teorisi ile ilgili temel kavramlar .....	6
2.1.1 Olasılık uzayı ve rassal değişken kavramı .....	6
2.1.2 Ölçülebilir fonksiyon .....	8
2.1.3 Sade fonksiyonlar.....	8
2.1.4 Sade fonksiyonlar için lebesgue integrali .....	8
2.1.5 Lebesgue anlamda integrallenebilir fonksiyon .....	9
2.1.6 Lebesgue teoremi .....	9
2.1.7 Lebesgue-Stieltjes integrali.....	10
2.2 Olasılıksal karışım teorisi ile ilgili temel teoremler.....	12
2.2.1 Dağılımların sonlu karışımının ölçüm teorisine bağlı tanımı .....	13
2.2.2 Dağılımların sonlu karışımına dair bazı temel teoremler.....	13
2.2.3 Tanımlanabilirlik.....	18
2.2.4 Karışım dağılımının geometrik yorumu.....	26
2.3 Entropi optimizasyon dağılımları ile ilgili temel tanımlar .....	28
2.3.1 MaxEnt dağılımları .....	28
2.3.2 MinxEnt dağılımları.....	31

<b>3. ÖNERİLEN OLASILIKSAL KARIŞIM MODELLERİ.....</b>	<b>35</b>
3.1 Uygulamalı teorik modeller kavramı .....	36
3.2 Sonlu karışımlar sınıfının stieltjes integrali yardımıyla ifadesi .....	36
3.3 Teicher'ın I. Teoremine alternatif bir ispat .....	39
3.4 POEOD'nun sonlu karışımına ilişkin olasılıksal karışım modelleri .....	41
3.4.1 Kesikli rassal değişkenler için MaxEnt ve MinxEnt dağılımlarının sonlu karışımının tanımlanabilirliği.....	41
3.4.2 Kesikli rassal değişkenler için MaxEnt ve MinxEnt dağılımlar ailesinin birleşiminin sonlu karışımının tanımlanabilirliği.....	47
3.4.3 Sürekli rassal değişkenler için MaxEnt dağılımının ikili karışımının tanımlanabilirliği ve alternatif bir yeter koşul.....	49
3.5 Parametreleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımları .....	51
3.5.1 MaxEnt dağılımlarının parametreleştirilmesi .....	51
3.5.2 MinxEnt dağılımlarının parametreleştirilmesi .....	57
3.6 Parametreleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımlarının sonlu karışımının tanımlanabilirliği .....	63
3.6.1 Parametrik MaxEnt dağılımların sonlu karışımının tanımlanabilirliği .....	63
3.6.2 Parametrik MinxEnt dağılımlarının sonlu karışımının tanımlanabilirliği..	70
3.7 Farklı parametrik dağılımlar ailesinin birleşimine ilişkin olasılıksal karışım modelleri .....	71
3.7.1 İki dağılım ailesinin birleşiminden oluşmuş olasılıksal karışım modelleri: LSDR olasılıksal karışım modelleri .....	72
3.7.2 Üç dağılımlar ailesinin birleşiminden oluşmuş olasılıksal karışım modelleri .....	80
3.7.3 LGE olasılıksal karışım modelleri .....	81
3.7.4 GWE olasılıksal karışım modelleri .....	100
3.7.5 LWE olasılıksal karışım modelleri.....	118
3.7.6 Dört dağılımlar ailesinin birleşiminden oluşmuş sonlu karışım dağılımlarının tanımlanabilirliği: LGWE olasılıksal karışım modelleri .	121

<b>4. OLASILIKSAL KARIŞIM MODELLERİNİN UYGULAMALARI.....</b>	<b>123</b>
4.1 Maksimum eşitlik ilkesi yardımıyla EODK parametre tahmini .....	124
4.2 Bir görüntü işleme problemi üzerine uygulama.....	125
4.3 Bir cihazın hata dağılımı üzerine uygulama.....	150
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>	<b>170</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>172</b>
<b>Ek-1 Sonlu karışım modellerinin literatürdeki uygulamaları .....</b>	<b>186</b>
<b>Ek-2 MaxEnt ve MinxEnt dağılımları için yazılan MATLAB kodları.....</b>	<b>193</b>
<b>Ek-3 İki normal dağılımın karışımının elde edilmesi için R kodları.....</b>	<b>195</b>
<b>Ek-4 Yarıya bölme yöntemi ile maksimum eşitlik parametre tahmini için     geliştirilen kodları .....</b>	<b>196</b>



## ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1. Monoton azalmayan soldan sürekli bir fonksiyon .....	11
2.2. Karışım dağılımının geometrik yorumu.....	27
3.1. $G(\alpha)$ dağılımının grafiği .....	37
3.2. MaxEnt bileşenlerinin dağılım grafiği .....	42
4.1. Sayısal resmin temel yapısı.....	126
4.2. RGB renk uzayı.....	126
4.3. Görüntüyü histograma çeviren C# programının ara yüzü ve histogram çizimi	127
4.4. Ele alınan görüntüdeki yüzün frekans dağılımı .....	128
4.5. Görüntü dağılımı için iki kısıt altında MaxEnt dağılımları.....	130
4.6. Görüntü dağılımı için üç kısıt altında MaxEnt dağılımları .....	131
4.7. Görüntü dağılımı için dört kısıt altında MaxEnt dağılımları .....	132
4.8. Görüntü dağılımı için beş kısıt altında MaxEnt dağılımı.....	133
4.9. Görüntü dağılımı için altı kısıt altında MaxEnt .....	134
4.10. Görüntü dağılımı için iki kısıt altında MinxEnt dağılımı .....	135
4.11. Görüntü dağılımı için üç kısıt altında MinxEnt dağılımları.....	136
4.12. Görüntü dağılımı için dört kısıt altında MinxEnt dağılımları .....	137
4.13. Görüntü dağılımı için beş kısıt altında MinxEnt dağılımları .....	138
4.14. Görüntü dağılımı için altı kısıt altında MinxEnt dağılımı.....	139
4.15. $F_1$ - $F_4$ birikimli dağılım fonksiyonları.....	143
4.16. $F_5$ - $F_6$ birikimli dağılım fonksiyonları.....	144
4.17. Dağılımların Karşılaştırılması.....	149
4.18. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata grafiği .....	151
4.19. Hata dağılımı için iki kısıt altında MaxEnt dağılımları .....	153
4.20. Hata dağılımı için üç kısıt altında MaxEnt Dağılımları.....	154
4.21. Hata dağılımı için dört kısıt altında MaxEnt dağılımları .....	155
4.22. Hata dağılımı için beş kısıt altında MaxEnt dağılımları .....	156
4.23. Hata dağılımı için altı kısıt altında MaxEnt Dağılımları.....	157
4.24. Hata dağılımı için iki kısıt altında MinxEnt dağılımı .....	158

4.25. Hata dağılımı için üç kısıt altında MinxEnt dağılımları .....	159
4.26. Hata dağılımı için dört kısıt altında MinxEnt dağılımları.....	160
4.27. Hata dağılımı için beş kısıt altında MinxEnt dağılımları .....	161
4.28. Hata dağılımı için altı kısıt altında MinxEnt dağılımları .....	162
4.29. Birikimli dağılım fonksiyonları .....	166
4.30. Dağılımların uyumu .....	168

## ÇİZELGELER DİZİNİ

4.1. Yüz görüntüsünün frekans dağılımı .....	129
4.2. Görüntü dağılımı için iki kısıt altında MaxEnt dağılımları.....	130
4.3. Görüntü dağılımı için üç kısıt altında MaxEnt dağılımları .....	131
4.4. Görüntü dağılımı için dört kısıt altında MaxEnt dağılımları .....	132
4.5. Görüntü dağılımı için beş kısıt altında MaxEnt dağılımı.....	133
4.6. Görüntü dağılımı için altı kısıt altında MaxEnt dağılımı .....	134
4.7. Görüntü dağılımı için iki kısıt altında MinxEnt dağılımı .....	135
4.8. Görüntü dağılımı için üç kısıt altında MinxEnt dağılımları.....	136
4.9. Görüntü dağılımı için dört kısıt altında MinxEnt dağılımları .....	137
4.10. Görüntü dağılımı için beş kısıt altında MinxEnt dağılımları .....	138
4.11. Görüntü dağılımı için altı kısıt altında MinxEnt dağılımı.....	139
4.12. MinMaxEnt dağılımları.....	140
4.13. MaxMaxEnt dağılımları .....	140
4.14. MinMinxEnt dağılımları .....	141
4.15. MaxMinxEnt dağılımları.....	141
4.16. M1-M8 olasılıksal karışım modellerinin uyum değerleri ve karşılaştırma ölçümleri .....	147
4.17. M9-M16 olasılıksal karışım modellerinin uyum değerleri ve karşılaştırma ölçümleri .....	148
4.18. Görüntü dağılımı için MinMaxEnt dağılımı ve karşılaştırma ölçümleri .....	149
4.19. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata dağılımı.....	151
4.20. Hata dağılımı için iki kısıt altında MaxEnt dağılımları .....	153
4.21. Hata dağılımı için üç kısıt altında MaxEnt Dağılımları .....	154
4.22. Hata dağılımı için dört kısıt altında MaxEnt Dağılımları .....	155
4.23. Hata dağılımı için beş kısıt altında MaxEnt Dağılımları .....	156
4.24. Hata dağılımı için altı kısıt altında MaxEnt Dağılımları.....	157
4.25. Hata dağılımı için iki kısıt altında MinxEnt Dağılımları .....	158

4.26. Hata dağılımı için üç kısıt altında MinxEnt Dağılımları.....	159
4.27. Hata dağılımı için dört kısıt altında MinxEnt Dağılımları.....	160
4.28. Hata dağılımı için beş kısıt altında MinxEnt dağılımları.....	161
4.29. Hata dağılımı için altı kısıt altında MinxEnt Dağılımları.....	162
4.30. MinMaxEnt dağılımları.....	163
4.31. MaxMaxEnt dağılımları.....	163
4.32. MinMinxEnt Dağılımları.....	164
4.33. MaxMinxEnt Dağılımları.....	164
4.34. Uyum Değerleri.....	168
4.35. Karşılaştırma için OKHK ve $R^2$ ölçütleri.....	168

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

EOD	: Entropi Optimizasyon Dağılımları
PEOD	: Parametreleştirilmiş Entropi Optimizasyon Dağılımları
POEOD	: Parametrik Olmayan Entropi Optimizasyon Dağılımları
EM	: Expectation-Maximization
EODK	: Entropi Optimizasyon Dağılımlarının Karışımı
MinxEnt	: Minimum Çapraz Entropi
MaxEnt	: Maksimum Entropi
MinMaxEnt	: Minimum-Maksimum Entropi
MaxMaxEnt	: Maksimum-Maksimum Entropi
MinMinxEnt	: Minimum-Minimum Çapraz Entropi
MaxMinxEnt	: Maksimum-Minimum Çapraz Entropi
D	: Sayısal veri seti
H	: Histogram
C	: Veri Eğrisi
R	: Referans verilerek
GR	: Grafiksel
MM	: Momentlerle
ML	: Maksimum Benzerlik
MD	: Minimum Uzaklık
B	: Bayesian
FD	: Fonksiyon Ayrıştırma
KA	: Kümeleme Analizi
CF	: Eğri Uydurma (en küçük kareler)

## 1. GİRİŞ

Pek çok pratik uygulamada, fiziksel girdilerin ve süreçlerin istatistiksel dağılımına gereksinim duyulur. Sade olarak, Normal ya da Üssel dağılımlar gibi bilindik olasılık dağılımları süreçlere yetersiz ve yanlış modeller olabilmektedirler. Daha kapsamlı ve anlamlı istatistiksel dağılımlar istenmektedir, bu yüzden sonlu karışım modellerine giriş yapılmaktadır. Sonlu karışım modelleri 100 yıldan fazladır kullanılmaktadır, fakat son on yılda hesaplama gücündeki büyük artış bu konunun popülerliğini artırmıştır (Leisch, 2004). Sonlu karışım modelleri istatistiksel modelleme anlamında esnek ve güçlü modelleme önermektedir.

Herhangi bir sürekli olasılık yoğunluk fonksiyonuna (oyf) keyfi doğrulukta pürüzsüz yaklaşmayı sağlayacak kapasiteye sahip olması sonlu karışımların önemli bir özelliğidir. Bu özellik, sonlu karışımları karmaşık olasılık yoğunluk fonksiyonlarını temsil etmek için ideal kılar (Bishop, 1995). Böylece, karışım dağılımları astronomi, biyoloji, ilaç, genetik, psikiyatri, ekonomi, pazarlama ve mühendislik gibi alanlarda başarılı bir şekilde uygulanmaktadır. Ek olarak, karışım modelleri örnek tanıma, görüntü işleme ve makine öğrenmesi alanlarında kullanışlıdır. Karışım modellerinin diğer önemli bir uygulama alanı ise market bölümlendirmesidir (Wedel ve Kamakura 2001).

Sonlu karışım modelleri uygulamalarının alt yapısında istatistiğin ana alanlarındaki çeşitli teknikler barınır. Bu teknikler, kümeleme ve gizli sınıf analizi, diskriminant analizi, görüntü analizi ve yaşam analizidir (Peel, 2000). Karışım modelleri duruma göre geleneksel kümeleme analizi ve küme-tarzı regresyonun yerini alır (Leisch, 2004).

Karışım modellerinin kullanımını içeren ilk analizlerden biri yaklaşık 100 yıl önce ünlü biometrici Karl Pearson tarafından ele alınmıştır. Pearson (1894) yılındaki makalesinde Weldon'ın (1892) geliştirdiği bazı verilere farklı  $\mu_1$  ve  $\mu_2$  ortalamalı  $\sigma_1^2$  ve  $\sigma_2^2$  varyanslı ve  $\pi_1$  ve  $\pi_2$  oranlı iki normal olasılık yoğunluk fonksiyonunun karışımını uydurmuştur. Daha sonraki makalesinde (Pearson, 1906)

biyoloji problemleri çalışırken istatistiksel analizleri öncü yöntem olarak savunmuştur.

1990'larda standart doğrusal regresyon modellerini (genelleşmiş doğrusal modeller de olabilir) karıştırarak genişletilmiştir (Wedel ve DeSarbo, 1995).

Everitt ve Hand (1981), Titterington, Smith ve Makov (1985), McLachlan ve Basford (1988), Lindsay (1995) ve McLachlan ve Peel (2000)'nin monografileri sonlu karışım modellerinin pek çok uygulamalı örnekle birlikte genel alt yapısını vermektedirler. Lindsay (1983) karışım benzerliğinin geometrisinin genel teorisini incelemektedir. Lindsay (1989) sonlu karışım problemlerinde moment yöntemini çalışmıştır. Cheng ve Traylor (1995) sonlu karışım modellerini de içeren düzensiz modelleri incelemiştir. Bohning (1985; 1986) ve Lesperance ve Kalbfleisch (1992) sonlu karışım modellerinde uyum esnasında karşılaşılan hesaplama problemlerini tartışmışlardır. Ghosh ve Sen (1985), Chernoff ve Lander (1995), Lemdani ve Pons (1999), Dacunha-Castelle ve Gassiat (1999), Chen (1998), Chen ve Chen (2001) ve Chen, Chen ve Kalbfleisch (2001, 2004) karışım modellerinde benzerlik oran istatistiğinin asimptotik dağılımını geliştirmişlerdir.

Açıkça görülmektedir ki, karışım dağılımları analizi modern istatistik tarihinde oldukça dikkate değer bir konu olarak ele alınmıştır. Bu yüzden de, karışım dağılımlarını elde etmek amacıyla parametre tahmin problemi ortaya çıkmıştır ve analizde önemli bir yer edinmiştir. Son iki yüz yıldır en çok kullanılan parametre tahmin yöntemi maksimum benzerlik yöntemi olmasına karşın en küçük kareler kriteri, grafik yaklaşımı gibi özelleşmiş optimizasyon yöntemleri de mevcuttur.

Optimizasyon problemlerinde nümerik çözümleri hesaplamak, karışım dağılımındaki bileşen sayısını belirlemek ve parametreleri tahmin etmek için kullanılan parametrik ve parametrik olmayan birçok yöntem vardır. Parametrik karışım modellerini tahmin etmek için en çok popüler olan hesaplama yöntemi ilk olarak Dempster v.d. tarafından (1977) yılında formüleleştirilen EM (Expectation-Maximization) algoritmasıdır. EM, maksimum benzerlik ya da sonsal olasılıkta yerel maksimuma yakınsamayı garanti eden bir iteratif parametre-optimizasyon tekniğidir. Yaygın olarak gizli değişken modellerinde uygulanabilir, tahminlemede, regresyonda

ve sınıflamada ve ayrıca iyi araştırılmış teorik kuruluşlardaki uygulamalar için yararlı olduğu ispatlanmıştır (Dempster, Laird, ve Rubin, 1977; McLachlan G. ve Peel 2000; Wu, 1983). EM algoritmasının yanı sıra Newton tipi yöntemler; Newton-Raphson yöntemi, quasi-Newton yöntemi ve modifiye edilmiş Newton yöntemleri da kullanılmaktadır (Du, 2002).

Entropi optimizasyon yöntemleriyle parametre tahmini problemine alternatif çözümler üretilebilmektedir (Kapur, Kesevan 1992 ve Lind 1997, Ranney 1984). Özellikle Lind ve ark. (1989) MinxEnt yöntemini parametre tahminleme yöntemini olarak geliştirmiştir. Ayrıca iki dağılım arasındaki bilgi teorisine dayalı ölçülerden olan Kullback-Leibler (Kullback ve ark 1959), Rengi (Rengi, 1961), Havrda-Rengi, Havrda-Chavrat ölçüleri (Havrda ve ark 1967) birçok çalışmada tanıtılmış ve uygulanmıştır. Bu ölçüler için mükemmel bir kaynak olarak (Kapur 1967; Cover 1991; Nailong 1977) verilebilir. Bu çalışmaların yanı sıra, istatistikte pek çok konu maksimum entropi (MaxEnt) ve minimum çapraz entropi (MinxEnt) yöntemleri ve bilgi teorisi uygulanarak incelenmiştir (Yolaçan, 2004; Shamilov ve Yolacan, 2006a, 2006b, 2006c; Yolacan ve Shamilov, 2007; Kullback 1951, 1959; Kapur ve Kesevan 1992; Shamilov 2004; Shamilov ve Mert Kantar 2005).

Çeşitli bilimsel alanlarda yapılmış uygulamalar kullanılan veri seti, tahmin yöntemi, karışım tipi ve uygulama alanları göz önüne alınarak detaylı bir literatür araştırması yapılarak Ek 1’de verilmiştir. Bu literatüre dayanarak, bu tezde uygulanması planlanan teori ve uygulamaların literatürde yer almadığı tespit edilmiştir.

Ek 1’den de görülebileceği gibi pek çok pratik uygulamada, fiziksel girdilerin ve süreçlerin istatistiksel dağılımına gereksinim duyulur. Ancak, bilindik istatistiksel dağılımlar iki, üç tepeli dağılımlar gibi dağılımlar söz konusu olduğunda yetersiz kalmaktadırlar. Böylece, karışım dağılımlarına ihtiyaç duyulmaktadır ve bu dağılımlar istatistikte önem kazanmaktadır.

Karışım dağılımlarının yanı sıra, günümüzde entropi optimizasyon dağılımları (EOD)’nın da istatistiksel verilere daha iyi uyum sağladığı bilinmektedir. Buradan



hareketle, bu tezde daha uyumlu modeller belirlemek amacıyla, EOD karışımı (EODK) ve EOD ile bilindik istatistiksel dağılımların karışımı araştırma konusu olmuştur. Bu amaçla, öncelikle Bölüm 2’de karışım dağılımlarının varlık teoremi olarak bilinen Tanımlanabilirlik kavramı incelenmiştir. Literatürde önerilmiş olan karışım dağılımlarının (Yakowitz, 1968; Khalaf, 1988; Karlis&Meligkotsidou, 2007) tanımlanabilirliği (Teicher, 1963)’ün önerdiği teorem doğrultusunda ispatlanmaktadır. Bu teorem, daha sonraki pek çok araştırma için temel olmuştur. Söz konusu bu teorem, ancak aynı parametrik aileden gelen dağılımların (örneğin; sadece normal dağılımların karışımı, sadece gamma dağılımlarının karışımı v.b) karışımına olanak vermektedir. Oysa, Atienza, Heras & Munoz-Pichardo (2006) Teicher’in teoreminin koşullarını hafifleterek farklı dağılımlar ailesinden gelen dağılımların karışımını tanımlamaya olanak sunmaktadır.

Ayrıca, Bölüm 2.3’te ise söz konusu entropi olasılık dağılımları tanıtılmıştır.

Tezin özünü oluşturan Bölüm 3’te öncelikle, sonlu sayıda karışım dağılımlarının tanımlanabilirliği için Lebesgue-Stieltjes integrali yardımıyla tanımlanabilirlik teoremine alternatif bir ispat sunulmuştur. Ardından; Bölüm 3.4’te Parametrik olmayan entropi optimizasyon dağılımları (POEOD)’nın sonlu karışımının tanımlanabilir olduğu ispatlanmıştır; Bölüm 3.5’te POEOD dağılımlarının bilinen istatistiksel dağılımlar ile karışımını ifade etmek amacıyla öncelikle POEOD’nın parametreleştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Bunun neticesinde, EOD bir/iki parametreye bağlı ifadesi verilerek parametreleştirilmiş EOD (PEOD) tanımlanmıştır; Bölüm 3.6’da PEOD’da moment fonksiyonları kümesini özel seçerek söz konusu PEOD’nın karışımının tanımlanabilir olduğu ispatlanmıştır; Bu dağılımlardan farklı olarak da logaritmik seriler dağılımı ailesi ile kesikli dikdörtgen dağılımlar ailesinin birleşiminden oluşmuş aileden alınan dağılımların sonlu karışımı tanımlanabilir olduğu Bölüm 3.7.1’te ispatlanmıştır. Bölüm 3.7.2-3.7.5’de PEOD ile Lognormal, Weibull ve Gamma dağılımlar ailelerinin üçlü, dörtlü birleşimlerinden oluşmuş yeni LGE, GWE, LWE, LGWE olasılıksal karışım modelleri önerilmiştir ve bu modellerin tanımlanabilir olduğu ispatlanmıştır.

Olasılıksal dağılımların, kodlama teorisindeki önemi göz ardı edilemeyecek kadar önemli (Yolacan, 2005) olduğundan ve pek çok veri sıkıştırma algoritması olasılıksal dağılımları kullanarak tanımlandığından (Shamilov&Yolacan, 2007a) dolayı, Bölüm 4'teki ilk uygulama konusu bir görüntü işleme problemi olarak alınmıştır. Ayrıca, uygulamadaki çeşitliliği belirtmek amacıyla da ve bir cihazın hata dağılımı üzerine ikinci bir uygulama yapılmıştır.

## 2. TEMEL MATEMATİKSEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, olasılıksal dağılımların karışımının tanımlanabilir olduğunun teorik ispatında önem taşıyan ölçüm teorisinin ve olasılıksal karışım teorisinin temel tanım ve teoremleri, ayrıca entropi olasılık dağılımlarının tanımı verilmiştir.

### 2.1 Ölçüm teorisi ile ilgili temel kavramlar

Olasılıksal karışım dağılımı Lebesgue-Stieltjes integralinden yola çıkarak tanımlanabildiğinden dolayı ölçüm teorisinin bu konudaki önemi göz ardı edilemez. Bu nedenle, öncelikle ölçüm teorisinin temel tanımlarının verilmesi uygun bulunmuştur.

#### 2.1.1 Olasılık uzayı ve rassal değişken kavramı

Olasılık uzayı  $(\Omega, \mathcal{C}, P)$  biçiminde tanımlanır. Burada,

$\Omega$  : elemanter olaylar kümesi,

$\mathcal{C}$ : elemanter olayların doğurduğu  $\sigma$ -cebiri,

$P$ :  $\mathcal{C}$ 'cebrinde tanımlanmış olasılık fonksiyonudur.

$\mathcal{C}$ , " $\Omega$ " üzerine kurulmuş keyfi  $\sigma$ -cebir değildir. Bu  $\Omega$ 'nın öyle alt kümelerinde oluşan bir sistemdir ki her bir alt küme olaydır. Yani her bir alt kümeye uygun  $P$ , küme fonksiyonunun belli bir değeri vardır.

$\mathcal{C}$  aşağıdaki koşulları sağladığında  $\sigma$ -cebir denir:

1.  $\Omega \in \mathcal{C}, P(\Omega)=1,$

2.  $\cap$  işlemine göre kapalıdır.  $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C},$

3. Tümlleme işlemine göre kapalıdır.  $A \in \mathcal{C} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{C}$ 'dir.

Buradan gözüküyor ki,  $A \cup B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$  ve  $\overline{\overline{A \cup B}} = A \cap B$ 'dir.

1°, 2° ve 3° koşulu sağlanıyor ise  $\mathcal{C}$  cebirdir. 3° sayılabilir sayıda toplamlar için geçerli ise,

$$A_i \in \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{C}$$

olur. Bu durumda  $\mathcal{C}$ ,  $\sigma$ -cebirdir.

P olasılık fonksiyonu, P aşağıdaki koşulları sağlarsa ona olasılık fonksiyonu denir:

1.  $\forall A \in \mathcal{C} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$ ,
2.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  ( $A \cap B = \emptyset$  ise),
3.  $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$  ( $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ ).

**NOT:**  $y=f(x)$  fonksiyonunun tanım bölgesi  $\mathcal{X}$  olsun,  $\mathcal{X}$ 'in alt kümeleri sistemini göz önüne alalım. Farzedelim ki alt kümeler sistemi  $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$  Lebesgue anlamda ölçülebilir kümelerden oluşmuştur. Bu nedenle  $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ 'i  $\mathcal{A}_{\mu}$  ile işaret edelim. Böylece  $\mathcal{A}_{\mu}$ ,  $\sigma$ -cebir oluşturduğunu kabul edersek  $y=f(x)$  soyut fonksiyonunu  $(\mathcal{X}, \mathcal{A}_{\mu}, \mu)$  biçiminde yazılabilir. Burada  $\mu$ ,  $\mathcal{A}_{\mu}$   $\sigma$ -cebirinde tanımlanmış Lebesgue ölçümüdür.

Şimdi benzer tanımları rassal değişkenler için de inceleyelim:

$\Omega$  : elemanter olaylar kümesi

$\mathcal{C}$  :  $\Omega$  elemanter olaylar kümesi üzerinde kurulmuş  $\sigma$ -cebir

$P$  :  $\mathcal{C}$ 'cebrinde tanımlanmış küme fonksiyonu ya da olasılık ölçümüdür.

Böylece  $(\Omega, \mathcal{C}, P)$  **olasılık uzayı** tanımlanmış olur.

### Rassal Değişkenin Tanımı

$\xi$  aşağıdaki koşulları sağladığında ona **rassal değişken** denir:

1.  $\xi \Rightarrow \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ , bu o anlama geliyor ki, her bir  $\omega \in \Omega$  için  $\xi(\omega) \in \mathfrak{R}$ 'dir;
2. (Ölçülebilirlik) Keyfi  $(-\infty, x)$  borel kümesinin ters görüntüsü olay olsun. Yani

$\mathcal{C}$ 'ye ait olsun. Bu demektir ki,  $\forall x \in \mathfrak{R}$  için,

$$\xi^{-1}[( - \infty, x)] = \{\omega : \xi(\omega) \in ( - \infty, x)\} = \{\xi < x\} \in \mathcal{C}' \text{ dir.}$$

$\xi$  rassal değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\omega : \xi(\omega) \in (-\infty, x)\} = P\{\omega : \xi(\omega) < x\}$$

olur. Görüldüğü gibi  $F(x)$  fonksiyonu  $(-\infty, +\infty)$  aralığında tanımlanmış fonksiyondur.

### 2.1.2 Ölçülebilir fonksiyon

$X$  kümesinin herhangi bir alt kümeler sistemini  $\mathcal{A}_X$ ,  $Y$ 'nin herhangi bir alt kümeler sistemini  $\mathcal{A}_Y$  ile gösterelim. Eğer keyfi  $A \in \mathcal{A}_Y$ ,  $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_X$  ise o zaman  $y=f(x)$ ,  $(\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y)$  *ölçülebilir fonksiyon* dur.

### 2.1.3 Sade fonksiyonlar

Eğer  $f(x)$  fonksiyonu (sonlu ya da sonsuz) sayılabilir sayıda  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  değerlerine sahipse, bu tür fonksiyona 'sade fonksiyon' denir.  $A_n = \{x : f(x) = y_n\}$  olduğunda  $f(x)$  fonksiyonunun  $A_n$  kümesinde  $y_n$  değerine sahip olduğu ve  $A = \bigcup_n A_n$  kümesinde tanımlandığı anlaşılır.

### 2.1.4 Sade fonksiyonlar için lebesgue integrali

$f(x)$  fonksiyonu sayılabilir sayıda  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  değerlerine sahip sade fonksiyon olsun. Önceden tanımlandığı gibi,

$$A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\} = f^{-1}(y_n)$$

olduğunda  $f(x)$  fonksiyonunun tanım kümesi  $A = \bigcup_n A_n$  şeklinde ifade edilmiş olur.

$\sum_i y_i \mu(A_i)$  serisi mutlak yakınsak ise  $f(x)$  fonksiyonunun  $A$  kümesi üzerinde

Lebesgue integrali  $\int_A f(x) d\mu$  ile gösterilir ve

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_i y_i \mu(A_i) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada

$$\sum_i y_i \mu(A_i) \quad (2.2)$$

toplamı genel anlamda sonsuz bir seridir. Eğer (2.2) serisi mutlak yakınsak bir seri ise  $f(x)$  fonksiyonuna  $A$  kümesi üzerinde Lebesgue anlamda 'integrallenebilir fonksiyon' denir ve bu fonksiyonun integrali olarak, (2.2) serisi kabul edilir. Başka deyişle, (2.1) eşitliği sadece (2.2) serisi mutlak yakınsak olduğunda geçerlidir (Şamilov, 2007).

### 2.1.5 Lebesgue anlamda integrallenebilir fonksiyon

$|f_n| \leq g$  ve  $g$ ,  $A$  kümesi üzerinde  $\mu$ 'ye göre integrallenebilir olmak üzere,  $\{f_n(x)\}$  sade fonksiyonlar dizisinin her bir  $f_n(x)$  fonksiyonu  $A$  kümesi üzerinde integrallenebilir ise, başka bir deyişle

$$\int_A f_n(x) d\mu \quad (2.3)$$

integrali sonlu bir sayı ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu \quad (2.4)$$

limiti var ise,  $f(x)$  fonksiyonuna  $A$  kümesi üzerinde Lebesgue anlamda integrallenebilir fonksiyon denir ve

$$\int_A f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu \quad (2.5)$$

şeklinde yazılır.

### 2.1.6 Lebesgue teoremi

Lebesgue integralinin önemli özelliklerinden biri de integral dışında bulunan limit işleminin integral altına alınabilmesidir. Bu özellik Lebesgue Teoremi ile verilmektedir.

**Teorem 2.1:** Eğer  $\{f_n(x)\}$  dizisi  $A$  üzerinde  $f(x)$ 'e yakınsıyorsa, bütün  $n$ 'ler için

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa ve  $\varphi(x)$ ,  $A$  üzerinde integrallenebilir ise limit fonksiyonu

$f(x)$ 'de  $A$  üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu$$

eşitliği geçerlidir.

### 2.1.7 Lebesgue-Stieltjes integrali

Lebesgue integrali tanımlandığında, dikkate alınan fonksiyonun Lebesgue anlamında ölçülebilir kümede tanımlandığı ve Lebesgue anlamında ölçülebilirliği kabul edilmiştir. Şimdi Stieltjes ölçümü kavramından yola çıkarak, aralıkların Stieltjes ölçümü, elementer kümelerin Stieltjes ölçümü vb. tanımlamakla, Stieltjes anlamında ölçülebilir küme kavramı da tanımlanabilir. Burada önemli olan, kapalı, açık ve yarı kapalı aralıkların Stieltjes ölçümünden yola çıkarak genel Stieltjes ölçümünü tanımlamaktır. Ölçümün yarı halkadan halkaya genişletilmesi ve genel ölçüm kavramı, Lebesgue ölçümünde olduğu gibidir. Bu açıdan önemli olan, aralıkların Stieltjes ölçümüdür.

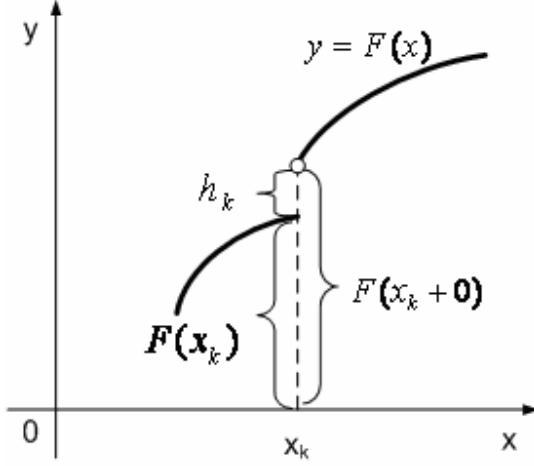
Lebesgue ölçümünde olduğu gibi Stieltjes ölçümünde de  $(a,b)$ ,  $(a,b]$ ,  $[a,b)$ ,  $[a,b]$  aralıklarının ölçümünü tanımlamak gerekir. Bu aralıkların ölçümü herhangi bir  $F$  fonksiyonu yardımıyla tanımlanır.  $F$  fonksiyonu, monoton azalmayan (artan) ve soldan sürekli, başka bir deyişle  $F(x-0) = F(x)$  koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun (Şekil 2.1).  $F(x)$  fonksiyonu yardımıyla aralıkların Stieltjes ölçümleri aşağıdaki gibi tanımlanır (Şamilov, 2007):

$$m[a,b] = F(b+0) - F(a)$$

$$m[a,b) = F(b) - F(a)$$

$$m(a,b] = F(b+0) - F(a+0)$$

$$m(a, b) = F(b) - F(a+0).$$



**Şekil 2.1.** Monoton azalmayan soldan sürekli bir fonksiyon

$$x_k = [x_k, x_k]$$

şeklinde yazılabildiği için

$$m(x_k) = m[x_k, x_k] = F(x_k + 0) - F(x_k) = h_k$$

olur. Şekil 2.1'den görülüyor ki, Lebesgue ölçümünden farklı olarak, bir noktanın Stieltjes ölçümü sıfır olmayabilir. Lebesgue integrali kavramında Lebesgue-Stieltjes integrali ölçümü dikkate alınırsa, Lebesgue-Stieltjes integrali de önce sade fonksiyonlar için daha sonra ise genel ölçülebilir fonksiyonlar için tanımlanabilir. Lebesgue-Stieltjes ölçümü  $\mu_F$  ile işaret edilsin. Bu  $F$  fonksiyonu yardımıyla ortaya çıkan ölçüm anlamına gelir. Eğer Lebesgue-Stieltjes ölçümüne göre integral tanımlanmışsa, bu integral aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\int_A f(x) d\mu_F \quad \text{yada} \quad \int_A f(x) dF.$$

Buradan Lebesgue-Stieltjes integralinin Lebesgue integralinden farkının sadece ölçüm seçimine bağlı olduğu ortaya çıkmaktadır.



Lebesgue ölçüm teorisi, Stieltjes ölçümü için de geçerlidir. Sade fonksiyon kavramında da ölçümün Stieltjes anlamda tanımlanması yardımıyla Lebesgue süreciyle ölçülebilirlik söz konusudur. Bu açıdan da ölçülebilirlik için gerek ve yeter koşul, verilmiş fonksiyonun uniform yakınsayan sade fonksiyonlar dizisinin limiti gibi gösterilebilmesidir. Bu söylenen sonuç genel Stieltjes integralini, sade fonksiyonların limiti gibi tanımlamaya olanak sağlar. Örneğin  $f(x)$  fonksiyonu sade fonksiyon ise  $A_n = \{x : f(x) = y_n\}$  Stieltjes anlamda ölçülebilir bir fonksiyondur.  $A_n$ 'nin ölçümü  $\mu_F(A_n)$  olsun.  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu_F(A_n)$  serisi mutlak yakınsak bir seri ise bu serinin toplamına,  $f(x)$  sade fonksiyonunun  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  kümesi üzerinde Stieltjes integrali denir ve  $\int_A f(x) d\mu_F$  şeklinde ifade edilir ve

$$\int_A f(x) d\mu_F = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu_F(A_n) \text{ 'dir.}$$

Eğer  $f(x)$  fonksiyonu Lebesgue-Stieltjes anlamında ölçülebilir bir fonksiyon ise sade fonksiyonların  $\{f_n(x)\}$  dizisinin uniform yakınsayan limiti şeklinde ifade edilebilir:  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Bu durumda  $f(x)$  fonksiyonunun  $A$  kümesi üzerinde Lebesgue-Stieltjes integrali,

$$\int_A f(x) d\mu_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu_F$$

şeklinde tanımlanır.

## 2.2 Olasılıksal karışım teorisi ile ilgili temel teoremler

Bu bölümde tanıtılacak tanım ve teoremler olasısal karışım teorisinde temel rollere sahiptir.

### 2.2.1 Dağılımların sonlu karışımının ölçüm teorisine bağlı tanımı

$(\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mu)$  bir ölçüm uzayı olsun; burada  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{X}$ 'in altkümelerinden oluşan Boolean  $\sigma$ -cebiri ve  $\mu$ ,  $\mathcal{S}$  üzerinde tanımlanmış sonlu bir ölçümdür. Başka bir deyişle,  $\mu$ ,  $\mathcal{S}$  üzerinde tanımlanmış negatif olmayan ve sayılabilir toplamsal küme fonksiyonudur,  $\mu(\mathcal{X}) < \infty$ .

Eğer gerçek değerli  $f$  fonksiyonu  $\mu$ 'ye göre  $A \subset \mathcal{X}$ ,  $A \in \mathcal{S}$  üzerinde integrallenebilir ise, integralin değeri  $\int_A f d\mu(t)$  ile belirtilir.

$(\mathfrak{R}, \mathcal{G}, \mu_G)$  olasılık uzayı verilmiş olsun. Burada  $\mathcal{X} = \mathfrak{R}$  gerçel sayılar kümesi,  $\mathcal{S} = \mathcal{G}$  gerçel sayılar kümesinin alt kümeleri üzerinde tanımlanmış Borel  $\sigma$ -cebiri ve  $\mu = \mu_G$   $G$  dağılım fonksiyonunun her bir  $\alpha$  değeri için ürettiği ölçümdür.

$\mathfrak{F}_{n,m} = \{F(x; \alpha) : x \in \mathfrak{R}^n, \alpha \in \mathfrak{R}_1^m\}$  dağılım fonksiyonları ailesi ve  $\mathfrak{F}_{n,m}$  tarafından üretilen  $H$  karışım dağılımları sınıfı

$$\mathcal{K} = \left\{ H : H(x) = \int_{\mathfrak{R}_1^m} F(x; \alpha) dG(\alpha), G \in \mathcal{G} \right\}$$

olsun; burada tamsayılar  $n, m \geq 1$ ,  $\mathfrak{R}_1^m$   $m$ -boyutlu  $\mathfrak{R}^m$  Euclidean uzayının bir Borel altkümesidir.  $F(x; \alpha)$ ,  $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}_1^m$ 'de ölçülebilirdir ve  $\mathcal{G}$ ,  $\mu_G$  ölçümlerini üreten  $m$ -boyutlu  $G$  dağılımlarının bir sınıfıdır,  $H$ 'a *karışım dağılımı*,  $F$ 'e *çekirdek (kernel, bileşen) dağılımı* ve  $G$ 'ye *ağırlık dağılımı* denir.

### 2.2.2 Dağılımların sonlu karışımına dair bazı temel teoremler

**Teorem 2.2:**  $F(x, \alpha)$ , parametresi  $\alpha \in \mathfrak{R}$  olan olasılık dağılım fonksiyonları ailesi;  $F(x, \alpha)$ ,  $x$ 'in ölçülebilir bir fonksiyonu ve  $G(\alpha)$ , keyfi olasılık dağılım fonksiyonu ise,

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, \alpha) dG(\alpha), \quad x \in R \quad (2.6)$$

de bir olasılık dağılım fonksiyonudur.

**İspat: a)**  $H(x)$  artan fonksiyondur.

*Hatırlatma:*  $x_1 < x_2$  olduğunda  $H(x_1) \leq H(x_2)$  ise  $H(x)$  artan fonksiyondur.

$x_1 < x_2$  olsun. Buna göre,

$$H(x_2) - H(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x_2, \alpha) dG(\alpha) - \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, \alpha) dG(\alpha)$$

yazılabilir.  $F(x, \alpha)$  dağılım fonksiyonu olduğundan, dağılım fonksiyonunun tanımı gereği artan fonksiyondur. Başka bir deyişle,  $x_1 < x_2$  için  $F(x_1, \alpha) < F(x_2, \alpha)$ 'dir.

Dolayısıyla, aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$F(x_2, \alpha) - F(x_1, \alpha) \geq 0.$$

Bu durumda,

$$H(x_2) - H(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(x_2, \alpha) - F(x_1, \alpha)] dG(\alpha) \geq 0,$$

$$H(x_2) - H(x_1) \geq 0,$$

$$H(x_2) \geq H(x_1)$$

olur.  $x_1 < x_2$  olduğunda  $H(x_1) \leq H(x_2)$  bulunduğundan  $H(x)$  artan fonksiyondur.

**b)**  $H(-\infty) = 0$  ve  $H(\infty) = 1$ 'dir.

$F(x, \alpha)$  dağılım fonksiyonu olduğundan  $F(-\infty, \alpha) = 0$  ve  $F(\infty, \alpha) = 1$  ve  $G(\alpha)$

dağılım fonksiyonu olduğundan  $G(\infty) = 1$ ,  $G(-\infty) = 0$ 'dir. Buradan,

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, \alpha) dG(\alpha),$$

$$H(-\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(-\infty, \alpha) dG(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dG(\alpha) = 0,$$

$$H(-\infty) = 0$$

ve

$$H(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\infty, \alpha) dG(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 dG(\alpha) = G(\alpha) \Big|_{-\infty}^{\infty} = G(\infty) - G(-\infty) = 1 - 0 = 1,$$

$$H(\infty) = 1$$

elde edilir.  $H(-\infty) = 0$  ve  $H(\infty) = 1$  sağlanmaktadır.

c)  $H(x)$  sağdan süreklidir.

$x$ ,  $\mathfrak{R}$ 'de sabit bir nokta ve  $h_n > 0$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $h_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  olsun.

$\forall \varepsilon > 0$  olmak üzere  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x + \varepsilon) = f(x)$  ise, sağdan süreklilik;

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x - \varepsilon) = f(x)$  ise, soldan süreklilik sağlanır.

$f_n(x) = H(x + h_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $f(x) = H(x)$ ,  $x \in \mathfrak{R}$  olsun. Buna göre,

$$\lim_{h_n \rightarrow 0} F(x + h_n, \alpha) = F(x, \alpha)$$

yazılabilir. Bu fonksiyonlar  $\mathfrak{R}$  üzerinde  $G$ 'ye göre integrallenebilir ve 1 sınırı ile sınırlıdır:

$$|F(x, \alpha)| \leq 1$$

$F(x, \alpha)$ ,  $x$ 'de sağdan sürekli olduğundan, Lebesgue Teoremini kullanarak,

$$\lim_{h_n \rightarrow 0} H(x + h_n) = \lim_{h_n \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + h_n, \alpha) dG(\alpha)$$

ve  $|F(x, \alpha)| \leq 1$  olduğundan Lebesgue Teoremini kullanarak,

$$\lim_{h_n \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + h_n, \alpha) dG(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h_n \rightarrow 0} F(x + h_n, \alpha) dG(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \alpha) dG(\alpha) = H(x)$$

bulunur. Bu durumda,

$$\lim_{h_n \rightarrow 0} H(x + h_n) = H(x)$$

yazılabilir. Böylece  $H(x)$  sağdan süreklidir.

**Teorem 2.3:**  $F(x, \alpha) \in E_C$ , parametresi  $\alpha \in \mathfrak{R}$  olan dağılım fonksiyonlar ailesi olsun. Bu durumda,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, \alpha) dG(\alpha) \in E_C, \quad \alpha \in \mathfrak{R}$$

sağlanır; burada  $G \in E$  keyfidir.

**İspat:** Bir önceki teoremin (c) şikkına benzer biçimde soldan sürekli olduğu ispatlanabilir.

**Teorem 2.4:**  $F(x, \alpha)$ , parametresi  $\alpha \in \mathfrak{R}$  olan dağılım fonksiyonlar ailesi ve  $G(\alpha)$  keyfi dağılım fonksiyonu verilmiş olsun.  $\mathcal{S}$ ,  $\mathfrak{R}$  üzerinde tanımlanmış Borel  $\sigma$ -cebiri olsun.

$F(x, \alpha)$  dağılım fonksiyonunun  $\mathcal{S}$  üzerinde ürettiği  $\sigma$  - sonlu ölçüm,

$$\mu_F(A, \alpha), \quad A \in \mathcal{S}$$

ise,

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, \alpha) dG(\alpha), \quad x \in \mathfrak{R}$$

dağılım fonksiyonunun  $\mathcal{S}$  üzerinde ürettiği  $\sigma$  - sonlu ölçüm,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_F(A, \alpha) dG(\alpha) = \mu_H(A)$$

olur.

**İspat: a)** Öncelikle  $F(x, \alpha)$  dağılım fonksiyonunun  $\mathcal{S}$  üzerinde ürettiği ölçüm

$$\mu_F(A, \alpha), \quad A \in \mathcal{S}$$

ise,

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, \alpha) dG(\alpha), \quad x \in \mathfrak{R}$$

dağılım fonksiyonunun  $\mathcal{S}$  üzerinde ürettiği

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu_F(A, \alpha) dG(\alpha) = \mu_H(A)$$

ölçümünün toplamsal olduğunu gösterelim.

Açıkça görülmektedir ki,  $\mu(A) \geq 0$ ,  $\mu(\mathfrak{R}) = 1$ 'dir. Ayrıca  $A \in \mathcal{S}$  olmak üzere  $\mu(A)$  küme fonksiyonu  $\sigma$ -toplamsaldır. Gerçekten de eğer  $A_j \in \mathcal{S}$ , ( $j = 1, 2, \dots$ ) ayrık ise,  $\mu_F(A, \alpha)$  ölçümünün  $\sigma$ -toplamsallık özelliği Lebesgue Teoremi ile gösterilebilir:

$$\begin{aligned} \mu_H\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_F\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j, \alpha\right) dG(\alpha) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu_F(A_j, \alpha)\right) dG(\alpha) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_F(A_j, \alpha) dG(\alpha) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F(A_j) \end{aligned}$$

elde edilir.

**b)** İkinci olarak, bu toplamsal ölçümün  $\sigma$ -sonlu olduğunu gösterelim.

$\mathfrak{X}$  kümesinin alt kümelerinden oluşan  $\mathfrak{A}_\mu$  yarı halkası üzerinde  $\sigma$ -toplamsal  $\mu$  ölçümü tanımlansın. Eğer  $\mathfrak{X}$  kümesi  $\mathfrak{A}_\mu$  kümesinden alınmış sayılabilir sonsuz sayıda kümelerin toplamı şeklinde gösterilebiliyor ise, bu durumda  $\mu$  ölçümüne  $\sigma$ -sonlu ölçüm denir.

Eğer

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots,$$

$$I(a_k, b_k) = \{x \in \mathfrak{R} \mid a_k < x \leq b_k\} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

ve sonsuz sayıda sonlu kümelerin ölçümlerinin toplamı

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} I(a_k, b_k)$$

ise,

$$\mu_H(A) = \sum_{k=1}^{\infty} [H(b_k) - H(a_k)]$$

olur.

**Teorem 2.5:**  $H_k$  dağılım fonksiyonu tarafından  $\mathcal{S}$  üzerinde üretilen  $\sigma$ -sonlu ölçüm

$\mu_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ve  $H(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j F_j(x; \alpha)$ ,  $x \in \mathfrak{R}$  dağılım fonksiyonu tarafından  $\mathcal{S}$

üzerinde üretilen  $\sigma$ -sonlu ölçüm  $\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \mu_j(A)$ ,  $A \in \mathcal{S}$  olsun; burada

$\pi_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) ve  $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1$ 'dir. Bu durumda  $\pi_j > 0$  'lı  $\mu_j$  ölçümleri  $\mu$

ölçümüne göre mutlak süreklidir.

**İspat:** Ancak ve ancak  $\alpha_j \mu_j(A) = 0$  ise,  $\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_j(A) = 0$ 'dır. Bu ise belirtilen

duruma uyum sağlıyor.

### 2.2.3 Tanımlanabilirlik

Tahmin süreçlerinin iyi tanımlanması için  $H$  karışım dağılımlarının tanımlanabilir olması gerekir:

**Tanım:**  $\mathfrak{F}_{n,m} = \{F(x; \alpha) : x \in \mathfrak{R}^n, \alpha \in \mathfrak{R}_1^m\}$  dağılım fonksiyonları ailesi olsun ve  $\mathfrak{F}_{n,m}$

tarafından üretilen  $H$  karışım dağılımları sınıfı

$$\mathcal{K} = \left\{ H : H(x) = \int_{\mathfrak{R}_1^m} F(x; \alpha) dG(\alpha), G \in \mathfrak{G}, F(x; \alpha) \in \mathfrak{F}_{n,m} \right\}$$

olsun; burada tamsayılar  $n, m \geq 1$ 'dir;  $\mathfrak{R}_1^m$ ,  $m$ -boyutlu  $\mathfrak{R}^m$  Euclidean uzayının bir

Borel altkümesidir;  $F(x; \alpha)$ ,  $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}_1^m$ 'de ölçülebilirdir ve  $\mathfrak{G}$ ,  $\mu_G$  ölçümlerini üreten

$m$ -boyutlu  $G$  dağılımlarının bir sınıfıdır. Eğer  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathcal{K}$  üzerinde bire-bir ise,  $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}^{-1}(\mathcal{K})$ ,  $\mathcal{K}$  tanımlanabilirir denir.

Başka bir deyişle “tanımlanabilirlik” ele alınan teorik modeller sınıfındaki her hangi bir dağılımın tek bir şekilde karakterizasyonunun varlığıdır.

Tanımlanabilirlik ile ilgili zorluklar özellikle karışım dağılımlarında ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle sonlu ve sayılabilir karışımlar ile ilgili tanımlanabilirlik problemleri çok geniş araştırılmaktadır. Bu konu ile ilgili ilk araştırmalar Henry Teicher’a (1960, 1961, 1963) aittir. Teicher (1963) sonlu karışımların tanımlanabilirliği için iki teorem önermiştir; uygulamasını Normal ve Gamma aileleri için yapmıştır. Khalaf (1981) Teicher’in ikinci teoremini  $m$ -boyutlu için tanımlayarak söz konusu teoremi daha geniş ifade etmiştir ve çok sayıda sonlu karışım sınıflarının (logaritmik seriler, dikdörtgen, kesikli dikdörtgen, merkezsiz olmayan  $\chi^2$ , lojistik vb. dağılımların) tanımlanabilirliğini incelemiştir. Chandra (1977) Teicher’in Teoreminde  $\log X$ ’in moment üreten fonksiyonunu dönüşüm olarak kullanılmasını önererek teoremin bir yenilenmişini vermiştir. Khalaf (1988) Chandra’nın ifade ettiği yenilenmiş Teicher’in Teoremini kullanarak Weibull, Lognormal, Chi, Pareto ve güç fonksiyon dağılımları için sonlu karışımların tanımlanabilirliğini ispatlamıştır. Barndorff-Nielsen (1965) üssel ailelerin karışımları için bir yeterlilik koşulu vermiştir. Henna (1994) çarpım uzayının parametre uzayı olması varsayımı altında Teicher’in Teoreminin bir yenilemesini vermektedir. Oysa vermiş olduğu çeşitli koşullar tek parametrelilerin sırasını içermektedir ve pek çok durumda koşulların kontrollü oldukça zordur. Henna (1994) Log-Gamma ve ters Log-Gamma dağılımlarını birer dizi gibi alarak söz konusu dağılımların karışımlarının tanımlanabilirliğini elde etmiştir. Karlis ve Meligkotsidou (2007) Teicher’in 2. Teoremini uygulayarak çok değişkenli Poisson dağılımlarının karışımının tanımlanabilirliğini ispatlamıştır. 2007 yılındaki bu çalışma Teicher (1963)’ün önerdiği teoremlerin hala güncelliğini koruduğunu ortaya koymaktadır. Bu nedenle öncelikle Teicher’in (1963) önerdiği teoremler verilmiştir.



**Teicher I. Teoremi** (Teicher, 1963):  $\mathfrak{F} = \{F_1(x), \dots, F_k(x)\}$  sonlu dağılımlar ailesinin  $\mathcal{K} = \left\{ \sum_{i=1}^k c_i F_i(x) : c_i \geq 0, \sum_{i=1}^k c_i = 1 \right\}$  bütün sonlu karışımlar sınıfının tanımlanabilir olması için gerek ve yeter koşul  $|F_i(x_j)|$ 'nin  $1 \leq i, j \leq k$  sıfır olmayacak şekilde  $k$  tane  $x_1, x_2, \dots, x_k$  gerçel değerlerin var olmasıdır.

**İspat: Gereklik:** Varsayalım ki teoremin koşulları sağlanmıyor. Yani,

$$\forall x, y_1, \dots, y_k \text{ için } \begin{vmatrix} F_1(x) & F_2(x) & \dots & F_k(x) \\ F_1(y_1) & F_2(y_1) & \dots & F_k(y_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ F_1(y_{k-1}) & F_2(y_{k-1}) & \dots & F_k(y_{k-1}) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

ise,

$$\sum_{i=1}^k a_i F_i(x) \equiv_x 0, \text{ burada } a_i = a_i(y_1, \dots, y_{k-1}) \quad (2.8)$$

olur.

Eğer  $y_1, \dots, y_{k-1}$ 'nin tüm seçenekleri için  $a_i = 0, 1 \leq i \leq k$  ise, (2.7) ve dolayısıyla (2.8)  $k$  yerine  $k-1$  yerleştirerek sağlanır.  $r$ , bazı  $y_1, \dots, y_r$  seçenekleri için  $a_i \not\equiv_i 0$  olacak şekilde en büyük tam sayı olsun.  $F_i(y) \not\equiv F_j(y), i \neq j$  olduğundan gereklik gereği  $2 \leq r \leq k-1$ 'dir. Böylece, bu  $y_1, \dots, y_r$  seçenekleri için,

$$\sum_{i=1}^{r+1} a_i F_i(x) \equiv_x 0, \quad a_i \not\equiv_i 0, \quad \sum_{i=1}^{r+1} a_i = 0. \quad (2.9)$$

olur. Varsayalım ki,

$$S_1 = \{i : 1 \leq i \leq r+1, a_i > 0\}, \quad S_2 = \{i : 1 \leq i \leq r+1, a_i < 0\}, \quad S_3 = \{1, 2, \dots, k\} - S_1 - S_2$$

olsun.

(2.9)'a göre  $b = \max_{i \in S_2} |a_i|$  tanımlandığından  $S_1$  ve  $S_2$  boş değildir:

$$\sum_{i \in S_1} 2a_i F_i(x) + \sum_{i \in S_2} (2b + a_i) F_i(x) + \sum_{i \in S_3} F_i(x) \equiv_x \sum_{i \in S_1} a_i F_i(x) + \sum_{i \in S_2} 2b F_i(x) + \sum_{i \in S_3} F_i(x) \quad (2.10)$$

(2.10)'daki tüm katsayılar pozitif ve sol yandakilerin toplamı sağ yandakilerin toplamına eşittir. Her iki yanı bu değere bölerek,  $\mathcal{K}$ 'nin tanımlanamaz olduğu sonucuna ulaşılır oysa bu gerekliliğin koyduğu hipoteze zıttır.

*Yeterlilik:*  $\sum_{i=1}^k c_i F_i(x) \equiv \sum_{i=1}^k c'_i F_i(x)$  ilişkisini ele alalım, burada  $\sum_{i=1}^k c_i = \sum_{i=1}^k c'_i = 1$ ,

buradan ise  $\sum_{i=1}^k d_i F_i(x) \equiv_x 0$ ,  $d_i = c_i - c'_i$ 'dir. Özellikle,  $\sum_{i=1}^k d_i F_i(x) = 0$ ,  $1 \leq j \leq k$  olur.

Yeterlilik hipotezine göre,  $d_i \equiv 0$  ve  $c_i \equiv c'_i$  olduğundan belirtilen determinant sıfıra eşit olmaz. Böylece tanımlanabilirlik geçerli olur.  $\square$

**Teicher II. Teoremi** (Teicher, 1963):  $n, m \geq 1$  tamsayıları için,

$\mathfrak{F}_{n,m} = \{F(x; \alpha) : x \in \mathfrak{R}^n, \alpha \in \mathfrak{R}_1^m\}$  dağılım fonksiyonları ailesi  $\varphi(t)$  dönüşümleri ile

verilsin, burada  $t = (t_1, \dots, t_n)$ ,  $t \in S_\varphi$  ( $\varphi$ 'nin tanım bölgesi) için öyle tanımlansın ki

$M : F \rightarrow \varphi$  doğrusal ve bire-bir olsun. Varsayalım ki,  $\mathfrak{F}_{n,m}$ 'nin öyle bir sıralaması

( $\preceq$ ) vardır ki,

$F_1 \prec F_2$ , ( $F_j(x) = F(x; \alpha_j)$ ) ifadenin anlamı şudur:

1)  $S_{\varphi_1} \subseteq S_{\varphi_2}$  'dir;

2) Öyle bazı  $T \in \bar{S}_{\varphi_1}$  ( $T$ ,  $\varphi_2$ 'den bağımsız) var olsun ki,

$$\lim_{t \rightarrow T} \left( \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} \right) = 0 \text{ yada } \lim_{t_j \rightarrow T_j, 1 \leq j \leq n} \left( \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} \right) = 0 \text{ olsun.}$$

Bu durumda  $\mathfrak{F}_{n,m}$  'nin  $\mathcal{K}$  bütün sonlu karışımlar sınıfı tanımlanabilir.

**İspat:** *Gereklik:*  $\mathfrak{F}$  'nin üyelerinden iki sonlu kümenin verildiğini varsayalım:

$$\mathfrak{F}_1 = \{F_i, 1 \leq i \leq k\} \text{ ve } \mathfrak{F}_2 = \{\hat{F}_i, 1 \leq i \leq \hat{k}\}$$

Bu kümeler için,

$$\sum_{i=1}^k c_i F_i(x) \equiv_x \sum_{i=1}^{\hat{k}} \hat{c}_i \hat{F}_i(x), \quad 0 < c_i, \hat{c}_j \leq 1, \quad \sum_{i=1}^k c_i = \sum_{j=1}^{\hat{k}} \hat{c}_j = 1 \quad (2.11)$$

elde edilsin.

Genel durumda da geçerli olmak üzere, birikimli dağılım fonksiyonları  $i < j$  için  $F_i \prec F_j$ ,  $\hat{F}_i \prec \hat{F}_j$  olacak şekilde indeksleyelim. Eğer  $F_1 \neq \hat{F}_1$  ise, genelleşmeden kayıpsız varsayalım ki  $F_1 \prec \hat{F}_1$  'dir. Bu durumda,  $F_1 \prec \hat{F}_j$ ,  $1 \leq j \leq \hat{k}$  ve (2.11)'in dönüştürülmüş versiyonundan,  $t \in T_1 = S_{\varphi_1} = [t : \varphi_1(t) \neq 0]$ ,

$$c_1 + \sum_{i=2}^k c_i [\varphi_i(t)/\varphi_1(t)] \equiv_t \sum_{j=1}^{\hat{k}} \hat{c}_j [\hat{\varphi}_j(t)/\varphi_1(t)]$$

bulunur.  $T_1$  'de  $t \rightarrow t_1$  iken  $c_1 = 0$  olur, ancak bu (2.11)'deki  $c_1 > 0$  ifadesi ile çelişmektedir. Böylece,  $F_1 = \hat{F}_1$  ve her hangi bir  $t \in T_1$  için,

$$(c_1 - \hat{c}_1) + \sum_{i=2}^k [\varphi_i(t)/\varphi_1(t)] \equiv_x \sum_{j=2}^{\hat{k}} \hat{c}_j [\hat{\varphi}_j(t)/\varphi_1(t)]$$

olur.

Tekrar  $T_1$  'de  $t \rightarrow t_1$  iken,  $c_1 = \hat{c}_1$  olduğundan,

$$\sum_{i=2}^k c_i F_i(x) \equiv_x \sum_{j=2}^{\hat{k}} \hat{c}_j \hat{F}_j(x) \quad (2.12)$$

olur.

Bu işlemi sonlu sayıda tekrar ederek ,  $F_i = \hat{F}_i$  ve  $c_i = \hat{c}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \min(k, \hat{k})$ .

Ayrıca, eğer  $k \neq \hat{k}$  ise, başka bir deyişle  $k > \hat{k}$  ise  $\sum_{i=\hat{k}+1}^k c_i F_i(x) \equiv 0$  olur. Bunun anlamı ise  $c_i = 0$   $\hat{k} + 1 \leq i \leq k$  'dır ve (5) ile çelişmektedir. Böylece,  $k = \hat{k}$ ,  $c_i = \hat{c}_i$  ve  $F_i = \hat{F}_i$ ,  $1 \leq i \leq k$  olur ve dolayısıyla  $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$  ve  $\mathcal{K}'$ 'nin tanımlanabilirliği anlamına gelir.  $\square$

Teicher (1963) ve Henna (1994) teoremlerinin sunduğu koşulların pek çok durumda kontrollü oldukça zor olduğunu ifade eden Atienza (2006) daha hafif varsayımlar altında ve daha geniş alanda uygulanabilen bir tarzda Teicher'in 2. Teoreminin yenilenmiş versiyonunu vermektedir. Ayrıca ne Teicher'in ne de Hanna'nın teoreminin geçerli olmadığı bir örnek incelemiştir ve önerdiği yenilenmiş teoremin çalıştığını göstermiştir. Atienza (2006) ifade ettiği teoremden göze çarpan en büyük yenilik, Teicher'in Teoremi aynı parametrik aileden olan dağılımların karışımı için uygulanırken Atienza-Garcia-Munoz Teoremi farklı parametrik aileden olan dağılımların bileşiminin karışımı için uygulanabilmektedir. Teicher'in (1963) ifade ettiği 2. Teoremin en güncel yenilenmiş versiyonu olmasından dolayı Atienza'nın (2006) önerdiği teorem aşağıda verilmiştir.

**Atienza-Garcia-Munoz Teoremi** (Atienza ve ark, 2006):

$$\{c_i\}_{i=1}^k \in C = \left\{ \{c_i\}_{i=1}^h \mid h \in \mathbb{Z}^+; c_i > 0, \forall i = 1, \dots, h; \sum_{i=1}^h c_i = 1 \right\},$$

$$\mathcal{K} = \left\{ H \mid \exists \{c_i\}_{i=1}^k \in C, \exists F_1, \dots, F_k \in \mathfrak{F} : H(\cdot) = \sum_{i=1}^k c_i F_i(\cdot) \right\}$$

olsun ve  $\mathfrak{F}$  dağılımlar ailesi verilsin.  $M : F(x) \rightarrow \varphi_F(t)$ , doğrusal dönüşüm; Gerçek  $\varphi_F$  fonksiyonunun tanım kümesi  $S(F) \subset \mathfrak{R}^d$  ve  $S_0(F) = \{t : t \in S(F), \varphi_F(t) \neq 0\}$  olsun.  $\mathfrak{F}$  dağılımlar ailesinde  $\prec$  sıralamanın var olduğunu varsayalım öyle ki,  $t(F) \in S_0(F)'$  vardır ve aşağıdaki koşulları sağlar:

a)  $F_1, F_2, \dots, F_k \in \mathfrak{F}$ ,  $F_1 \prec F_j$ ,  $j = \overline{2, m}$  için,

$$t(F_1) \in \left[ S_0(F_1) \cap \left( \bigcap_{i=2}^k S(F_i) \right) \right]'$$

olur;

b)  $F_1 \prec F_2$  ise,

$$\lim_{t \rightarrow t(F_1)} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = 0$$

elde edilir. Bu durumda  $\mathfrak{F}$  dağılımlar ailesinin tüm sonlu karışımlarından oluşan  $H$  sınıfı tanımlanabilir.

**İspat:**

Bazı  $\{c_i\}_{i=1}^k$ ,  $\{\hat{c}_j\}_{j=1}^{\hat{k}} \in C$  ve  $F_1, \dots, F_k, \hat{F}_1, \dots, \hat{F}_k \in \mathfrak{F}$  için aşağıdaki eşitliğin verildiğini varsayalım:

$$\sum_{i=1}^k c_i F_i = \sum_{j=1}^{\hat{k}} \hat{c}_j \hat{F}_j$$

Genel halde de geçerli olmak üzere varsayabilir ki,  $i < j$  ve  $F_1 \preceq \hat{F}_1$  için  $k \leq \hat{k}$ ,  $F_i \prec F_j$ ,  $\hat{F}_i \prec \hat{F}_j$ 'dir.

Dolayısıyla,  $F_1 \prec \hat{F}_j$ ,  $j = 2, \dots, k$ 'dir.

$A = S_0(F_1) \cap \left[ \bigcap_{i=2}^k S(F_i) \right] \cap \left[ \bigcap_{i=1}^{\hat{k}} S(\hat{F}_i) \right]$  kümesinde (a)'ya göre  $t(F_1) \in A'$  vardır. Her

hangi bir  $t \in A$  için,

$$\sum_{i=1}^k c_i \varphi_{F_i}(t) = \sum_{j=1}^{\hat{k}} \hat{c}_j \varphi_{\hat{F}_j}(t)$$

yazılabilir.  $t \in S_0(F_1)$  olduğundan,  $\varphi_{F_1}(t)$ 'ye bölebiliriz.  $t \rightarrow t(F_1)$  iken,

$$\sum_{i=1}^k c_i \lim_{t \rightarrow t(F_1)} \frac{\varphi_{F_i}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \sum_{i=1}^{\hat{k}} \hat{c}_i \lim_{t \rightarrow t(F_1)} \frac{\varphi_{\hat{F}_i}(t)}{\varphi_{F_1}(t)}$$

elde edilir. (b)'ye göre,

$$c_1 = \hat{c}_1 \lim_{t \rightarrow t(F_1)} \frac{\phi_{\hat{F}_1}(t)}{\phi_{F_1}(t)}$$

olur.

$F_1 \preceq \hat{F}_1$  sağlanıyor ise,  $c_1 = 0$  elde edilir, bu ise bir çelişkidir. Böylece,  $F_1 = \hat{F}_1$  ve  $c_1 = \hat{c}_1$  olur. Toplam üzerinden bu işlem sürdürülürse  $c_i = \hat{c}_i$  ve  $F_i = \hat{F}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \min\{k, \hat{k}\}$  bulunur. Son olarak  $k = \hat{k}$  olur. Gerçekten de, eğer  $\hat{k} > k$  sağlanırsa,  $\sum_{j=k+1}^{\hat{k}} \hat{c}_j \hat{F}_j(x) = 0$  elde edilir, bu nedenle  $k+1 \leq j \leq \hat{k}$  için  $\hat{c}_j = 0$ 'dır.

Böylece  $\mathcal{K}$  tanımlanabilir. □

### Atienza-Garcia-Munoz Teoremi ile Teicher'in Teoreminin Karşılaştırılması

Atienza-Garcia-Munoz Teoreminin Teicher'in teoreminden olan farklılığını tespit etmek amacıyla öncelikle, Atienza-Garcia-Munoz Teoreminde yer alan ve aşağıda belirtilen bazı önemli ifadelerin altı çizilmiştir ve bu ifadelerin anlamı üzerinde inceleme yapılmıştır:

- $S_0(F) = \{t : t \in S(F), \phi_F(t) \neq 0\}$
- $t(F) \in S_0(F)'$
- $t(F_1) \in \left[ S_0(F_1) \cap \left( \bigcap_{i=2}^k S(F_i) \right) \right]'$
- $\lim_{t \rightarrow t(F_1)} \frac{\phi_{F_2}(t)}{\phi_{F_1}(t)} = 0$

$S_0(F) = \{t : t \in S(F), \phi_F(t) \neq 0\}$  sayılabilir sayıda ya da sonsuz sayıda  $t$ 'den oluşur.

Çünkü Atienza-Garcia-Munoz Teoreminin koşuluna göre  $t(F) \in S_0(F)'$

sağlanmaktadır. Görüldüğü gibi,  $S_0(F) = \{t : t \in S(F), \phi_F(t) \neq 0\}$  kümesi sonlu sayıda noktadan oluşamaz.  $S_0(F)'$ ,  $t \in S(F)$  limit noktalarından oluşmuş kümeyi simgeliyor; dolayısıyla  $t(F)$  limit noktalarıdır. Bu bakımdan,  $t(F)$ 'lerin sayısı sonlu ya da sonsuz olabilir.  $t(F)$ 'ler üzerinde üç koşul söz konusudur:

1.  $\underline{t(F) \in S_0(F)'}$ ,
2.  $\underline{t(F_1) \in \left[ S_0(F_1) \cap \left( \bigcap_{i=2}^k S(F_i) \right) \right]'}$ ,
3.  $\underline{\lim_{t \rightarrow t(F_1)} \frac{\phi_{F_2}(t)}{\phi_{F_1}(t)} = 0}$ .

Atienza-Garcia-Munoz Teoremini Teicher'inkinden hemen farklandıran dönüşümün doğrusal ve bire-bir özelliklerinin birlikte gerektirmemesi, başka bir deyişle dönüşüm sadece doğrusal dönüşüm olmasıdır. Daha sonra teoremin birinci koşulunun ifadesi göze çarpmaktadır. Teicher'da  $S_{\phi_1} \subseteq S_{\phi_2}$  koşuluna karşın Atienza'da

$t(F_1) \in \left[ S_0(F_1) \cap \left( \bigcap_{i=2}^k S(F_i) \right) \right]'$  ifadesi yer almaktadır. Bu farklılık ise daha hafif varsayımları gerektirmektedir.

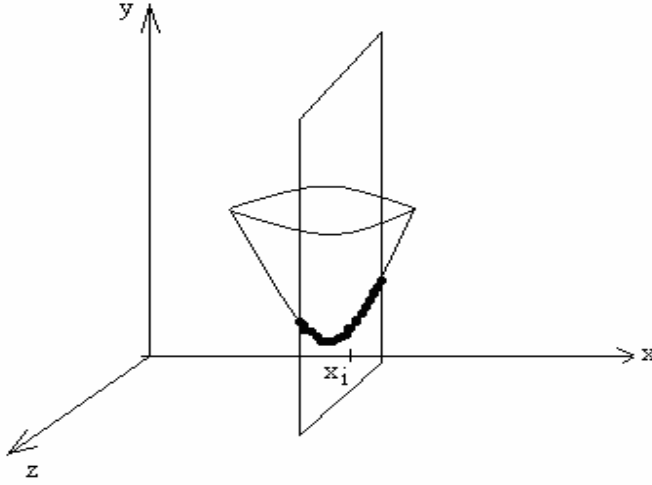
#### 2.2.4 Karışım dağılımının geometrik yorumu

Parametresi  $x \in \mathfrak{R}$  olan olasılık dağılım fonksiyonlar kümesi denilmesinin nedeni:  $G(z, x)$  her bir  $x$  için  $z$ 'ye bağlı bir dağılım fonksiyonunu ifade eder; böylece,  $G(z, x)$   $x$  parametresine bağlı dağılım fonksiyonları ailesidir.

(2.13) eşitliği Lebesgue-Stieltjes integralini ifade etmektedir. Şekil 2.2'de  $h_i = \alpha_i$  alınırsa (2.13) eşitliğini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned}
F(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(z, x) dH(x) \\
&= G(z, 0)\alpha_1 + G(z, x_1)\alpha_2
\end{aligned}
\tag{2.13}$$

Geometrik olarak  $G(z, x)$  üç boyutlu uzayda bir konveks yüzeyi ifade eder. Bu yüzeyi  $x = x_i$  düzlemi ile kestiğimizde kesikte  $G(z, x_i)$  bir değişkenli dağılım fonksiyonu ortaya çıkar.



**Şekil 2.2.** Karışım dağılımının geometrik yorumu

$H(x)$  fonksiyonu kesikli ya da mutlak sürekli olasılık dağılım fonksiyonu olarak geçmektedir. Burada  $H(x)$  singüler dağılım değildir çünkü singüler olduğunda Stieltjes integrali tanımlanamaz.  $f(x)$  fonksiyonu mutlak sürekli bir fonksiyon ise o hemen hemen her yerde diferansiyellenebilir ve bu fonksiyonun türevi  $f'(t)$  Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyondur. Bu durumda  $f(x)$  fonksiyonu kendi türevi olan  $f'(t)$  fonksiyonu yardımıyla telafi edilebilir. Bir başka deyişle,  $f(t)$  singüler ya da kesikli olduğunda,



$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt + c = f(x) - f(0) + c$$

formülü geçerli değil.

### 2.3 Entropi optimizasyon dağılımları ile ilgili temel tanımlar

Bu bölümde, Maksimum Entropi (MaxEnt) Dağılımının ve Minimum Çapraz Entropi (MinxEnt) Dağılımının sürekli ve kesikli rassal değişken için tanımı; takibinde Minimum-Maksimum Entropi (MinMaxEnt) Dağılımı, Maksimum-Maksimum Entropi (MaxMaxEnt) Dağılımı, Minimum-Minimum Çapraz Entropi (MinMinxEnt) Dağılımı ve Maksimum-Minimum Çapraz Entropi (MaxMinxEnt) Dağılımı sürekli ve kesikli rassal değişken için ayrı ayrı tanımı verilmiştir.

#### 2.3.1 MaxEnt dağılımları

Bu alt bölümde, Shannon entropi ölçümüne göre tanımlanan Maksimum Entropi Dağılımları tanıtılmaktadır.

##### a) Kesikli rassal değişken için MaxEnt dağılımı

$X$  rassal değişkeninin kesikli tek değişkenli dağılımları göz önünde bulundurulmaktadır.  $(X, P) = \{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots, (x_n, p_n)\}$ , burada  $n$  sonlu sayı olmak üzere  $X$ , rassal değişkeninin aldığı değerler ve  $P$ , bu değerlerin ortaya çıkma olasılıklarıdır:

$$H = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad (2.14)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i g_j(x_i) = \mu_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (2.15)$$

Burada,  $\mu_0 = 1$ ,  $g_0(x) = 1$ ,  $p_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $m+1 < n$ ,  $g_j(x_i)$ ,  $g_j(x)$  fonksiyonunun  $x = x_i$  noktasındaki değeridir.

(2.15) kısıtları altında (2.14) Shannon ölçümünün (Kapur ve Kesavan, 1992) maksimize edilmesi problemi

$$p_i = e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}, i=1,2,\dots,n \quad (2.16)$$

çözümüne sahiptir, burada  $\lambda_i$  ( $i=0,1,\dots,m$ ) Langrange çarpanlarıdır.

$P=(p_1,\dots,p_n)$  ise *kesikli Maksimum Entropi Dağılımı* olarak bilinmektedir (Kapur&Kesavan, 1992).

### b) Sürekli rassal değişken için MaxEnt dağılımı

$f(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonu verilsin:

$$H = -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx, \quad (2.17)$$

$$\int_a^b f(x) g_j(x) dx = \mu_j, \quad j=0,1,2,\dots,m. \quad (2.18)$$

Burada,  $\mu_0 = 1$ ,  $g_0(x) = 1$ 'dir.

(2.18) kısıtları altında (2.17) Shannon ölçümünün maksimize edilmesi problemi

$$f(x) = e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x)} \quad (2.19)$$

çözümüne sahiptir; burada  $\lambda_i$  ( $i=0,1,\dots,m$ ) Langrange çarpanlarıdır.  $f(x)$  ise *sürekli Maksimum Entropi dağılımı* olarak bilinmektedir (Kapur ve Kesavan, 1992).

### c) Kesikli rassal değişken için MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları

Eğer  $P^{(0)} = (p_1^{(0)}, \dots, p_n^{(0)})$  verildiyse,  $g(x) = (1, g_1(x), \dots, g_m(x))$  moment vektör fonksiyonuna göre  $\mu = (1, \mu_1, \dots, \mu_m)$  moment vektör değerleri elde edilebilir.

$H_{\max} = \sum_{j=0}^m \lambda_j \mu_j$  moment vektör fonksiyonu  $g(x)$ 'e dayanan bir fonksiyonel olarak alınmaktadır ve **MaxEnt fonksiyoneli** olarak adlandırılmaktadır.  $P = (p_1, \dots, p_n)$  ya da  $g(x) = (1, g_1(x), \dots, g_m(x))$ 'e göre H'nin maksimum değeri  $U(p)$  ve  $U(g)$  notasyonları içtendeğişmeli kullanılmaktadır (Shamilov, 2006).

Varsayalım ki,

$$\min_{g \in K} U(g) = U(g^{(1)}); \max_{g \in K} U(g) = U(g^{(2)})$$

olsun, burada K,  $g(x)$  moment vektör fonksiyonlarından oluşmuş kompakt kümedir.

Sonuçta,  $U(g^{(1)}) \leq U(g^{(2)})$  olur.

$g^{(1)}(x)$  moment vektör fonksiyonuna göre elde edilen  $p^{(1)} = (p_1^{(1)}, \dots, p_n^{(1)})$  dağılımına **kesikli MinMaxEnt dağılımı** ve  $g^{(2)}(x)$  moment vektör fonksiyonuna göre elde edilen  $p^{(2)} = (p_1^{(2)}, \dots, p_n^{(2)})$  dağılımına **kesikli MaxMaxEnt dağılımı** denir (Shamilov, 2006).

#### d) Sürekli rassal değişken için MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları

$f(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonu verilsin.  $g(x) = (1, g_1(x), \dots, g_m(x))$  moment vektör fonksiyonuna göre  $\mu = (1, \mu_1, \dots, \mu_m)$  moment vektör değerleri elde edilebilir.

$H_{\max} = \sum_{j=0}^m \lambda_j \mu_j$  moment vektör fonksiyonu  $g(x)$ 'e dayanan bir fonksiyonel olarak alınmaktadır ve **sürekli MaxEnt fonksiyoneli** olarak adlandırılmaktadır.  $f(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonu ya da  $g(x)$  moment vektör fonksiyonuna göre H'nin maksimum değeri için  $U(f)$  ve  $U(g)$  notasyonları içtendeğişmeli kullanılmaktadır.

Varsayalım ki,

$$\min_{g \in K} U(g) = U(g^{(1)}); \max_{g \in K} U(g) = U(g^{(2)})$$

olsun, burada  $K$   $g(x)$  moment vektör fonksiyonlarından oluşmuş kompakt kümedir.

Sonuçta,  $U(g^{(1)}) \leq U(g^{(2)})$  elde edilir.

$g^{(1)}(x)$  moment vektör fonksiyonuna göre elde edilen  $f^{(1)}(x)$  dağılımına **sürekli MinMaxEnt dağılımı** ve  $g^{(2)}(x)$  moment vektör fonksiyonuna göre elde edilen  $f^{(2)}(x)$  dağılımına **sürekli MaxMaxEnt dağılımı** denir (Shamilov, 2006).

### 2.3.2 MinxEnt dağılımları

Bu bölümde, Jaynes'in Kullback-Leibler ölçümüne göre tanımlanan MinxEnt Dağılımları tanıtılmaktadır.

#### a) Kesikli rassal değişken için MinxEnt dağılımı

$(X, P) = \{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots, (x_n, p_n)\}$ ,  $n$  sonlu sayı olmak üzere  $X$  rassal değişkeninin aldığı değerler ve  $P$ , bu değerlerin ortaya çıkması olasılıklarıdır:

$$D(p : q) = \sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{p_i}{q_i}, \quad (2.20)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i g_j(x_i) = \mu_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (2.21)$$

burada,  $\mu_0 = 1$ ,  $g_0(x) = 1$ ,  $p_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $m+1 < n$ 'dir ve  $q = (q_1, \dots, q_n)$  örneklemeden alınmış önsel dağılımı ifade etmektedir.

(2.21) kısıtları altında (2.20) Kullback-Leibler ölçümünün minimize edilmesi problemi

$$p_i = q_i e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.22)$$

çözümüne sahiptir ve burada  $\lambda_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ), Langrange çarpanlarıdır.  $P = (p_1, \dots, p_n)$  ise **kesikli MinxEnt Dağılımı** olarak bilinmektedir (Kapur&Kesavan, 1992).

### b) Sürekli rassal değişken için MinxEnt dağılımı

$f(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonu verilsin:

$$D(f : q) = - \int_a^b f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} dx, \quad (2.23)$$

$$\int_a^b f(x) g_j(x) dx = \mu_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (2.24)$$

Burada,  $\mu_0 = 1$  ve  $g_0(x) = 1$ 'dir;  $g_j(x_i)$ ,  $g_j(x)$  fonksiyonunun  $x = x_i$  noktasındaki değeridir ve  $q(x)$ , önsel dağılımdır;  $\int_a^b f(x) dx = 1$ 'dir.

(2.24) kısıtları altında (2.23) Kullback-Leibler ölçümünün minimize edilmesi problemi

$$f(x) = q(x) e^{- \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x)} \quad (2.25)$$

çözümüne sahiptir, burada  $\lambda_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) Langrange çarpanlarıdır,  $f(x)$  ise **sürekli MinxEnt Dağılımı** olarak bilinmektedir (Kapur&Kesavan, 1992).

### c) Kesikli rassal değişken için MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımı

$p^{(0)} = (p_1^{(0)}, \dots, p_n^{(0)})$  verildiğini varsayalım.  $g(x) = (1, g_1(x), \dots, g_m(x))$  moment vektör fonksiyonuna göre  $\mu = (1, \mu_1, \dots, \mu_m)$  moment vektör değerleri elde edilebilir.  $D$  moment vektör fonksiyonu  $g(x)$ 'e dayanan bir fonksiyonel olarak alınmaktadır. Bu fonksiyonele **MinxEnt fonksiyoneli** denir.  $p = (p_1, \dots, p_n)$  ya da

$g(x) = (1, g_1(x), \dots, g_m(x))$ 'e göre  $D$ 'nin minimum değeri  $V(p)$  ve  $V(g)$  notasyonları için değişmeli kullanılmaktadır (Shamilov, 2006; Shamilov 2007). Buna göre,

$$\max_{g \in K} V(g) = V(g^{(1)}); \quad \min_{g \in K} V(g) = V(g^{(2)})$$

olsun; burada  $K$   $g(x)$  moment vektör fonksiyonlarından oluşmuş kompakt kümedir.

Sonuçta,

$$V(g^{(1)}) \geq V(g^{(2)})$$

yazılabilir.  $g^{(1)}(x)$  moment vektör fonksiyonuna göre elde edilen  $p^{(1)} = (p_1^{(1)}, \dots, p_n^{(1)})$  dağılımına **kesikli MaxMinxEnt dağılımı** ve  $g^{(2)}(x)$  moment vektör fonksiyonuna göre elde edilen  $p^{(2)} = (p_1^{(2)}, \dots, p_n^{(2)})$  dağılımına **kesikli MinMinxEnt dağılımı** denir (Shamilov, 2006; Shamilov, 2007).

#### d) Sürekli rassal değişken için MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımı

$f_0(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonu verilsin.  $g(x) = (1, g_1(x), \dots, g_m(x))$  moment vektör fonksiyonuna göre  $\mu = (1, \mu_1, \dots, \mu_m)$  moment vektör değerleri elde edilebilir.

$D_{\min} = - \sum_{j=0}^m \lambda_j \mu_j$  moment vektör fonksiyonu  $g(x)$ 'e dayanan bir fonksiyonel olarak

alınmaktadır ve **sürekli MinxEnt fonksiyoneli** denir.  $f(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonu ya da  $g(x)$  moment vektör fonksiyonuna göre  $D$ 'nin minimum değeri için  $V(f)$  ve  $V(g)$  notasyonları kullanılmaktadır. Buna göre,

$$\max_{g \in K} V(g) = V(g^{(1)}), \quad \min_{g \in K} V(g) = V(g^{(2)})$$

olsun; burada  $K$   $g(x)$  moment vektör fonksiyonlarından oluşmuş kompakt kümedir.

Sonuçta,

$$V(g^{(1)}) \geq V(g^{(2)})$$

elde edilir.

$g^{(1)}(x)$  moment vektör fonksiyonuna göre elde edilen  $f^{(1)}(x)$  dağılımına **sürekli MaxMinxEnt dağılımı** ve  $g^{(2)}(x)$  moment vektör fonksiyonuna göre elde edilen  $f^{(2)}(x)$  dağılımına **sürekli MinMinxEnt dağılımı** denir (Shamilov, 2006; Shamilov, 2007).

### 3. ÖNERİLEN OLASILIKSAL KARIŞIM MODELLERİ

Tanımlanabilirlik varsayımı – başka bir ifade ile ele alınan modeller sınıfının herhangi biri için tek bir karakterizasyonun varlığı pek çok istatistiksel teori ve uygulamanın temelinde yatmaktadır. Uygulamada tanımlanabilirliği ele almak önemlidir çünkü tanımlanabilirlik olmadan, tahmin süreçlerinin iyi tanımlanmış olma şansı yoktur. Başka bir deyişle, teorideki tanımlanabilirlik uygulamadaki karışım dağılımının tanımlanabilir olması (var olması) için varsayılması gereken koşulu belirlemeye olanak tanır. Böylece, teoride elde edilen koşulun sağlanmasına dikkat edilerek daha doğru bir tahmin süreci gerçekleştirilir.

Buradan yola çıkarak, bu bölümde, tanımlanabilirlik kavramına dikkat ederek çeşitli olasılıksal karışım modelleri ayrı ayrı bölümlerde tanımlanarak yeni modeller önerilmesi hedeflenmiştir.

Bu amaçla, öncelikle önerilen olasılıksal karışım modellerinin uygulamalı teorik olduğuna Alt Bölüm 3.1’de dikkat çekilmiştir.

Alt Bölüm 3.2’de sonlu karışımlar sınıfının tanımı literatürde yer alan çeşitli kaynaklardan (Teicher, 1963; Yakowitz, 1968; Chandra, 1977) farklı olarak Stieltjes integrali yardımıyla ifade edilmektedir.

Alt Bölüm 3.3’te ise Tanımlanabilirlik teoremi sonlu sayıda dağılımlar ailesini Lebesgue-Stieltjes integrali yardımıyla ifade edip doğrusal operatörün ters operatörünün varlığına dayalı bir yöntemle alternatif bir ispat verilmektedir. Söz konusu ispat daha sadedir ve tanımlanabilirlik kavramını da daha iyi ifade etmektedir.

Alt Bölüm 3.4’te POEOD’nın sonlu karışımlarının tanımlanabilirliği, Alt Bölüm 3.5’te söz konusu POEOD’nın parametreleştirilmesi ve Alt Bölüm 3.6’da PEOD’nın sonlu karışımının tanımlanabilirliği verilmiştir.



### 3.1 Uygulamalı teorik modeller kavramı

Olasılık teorisi bir matematiksel disiplin olarak soyut modeller şeklinde geliştirilmiştir ve onun sonuçları aksiyomlara dayalıdır. İstatistik ise teorinin gerçel problemlere uygulanması ile uğraşmaktadır ve sonuçları gözlemlere dayalıdır (Shamilov, 2007). Teori ve uygulama birbirinden ayrılmaz bir ikilidir, aynı bir paranın iki ayrı yüzü gibidir (Wallace, 2000). Başka bir deyişle, aslında uygulanan teoridir ve teorize edilen uygulamadır (Ted Nellen, 1993). Ancak, soyut olarak ifade edilen modeller gerçek hayatta uygulaması ile uyum sağlayamayabilir. Örneğin, özellikle sosyal bilimlerde teorilerin açıklama gücünün sınırlı olduğu verisi altında çeşitli teoriler uygulamalarındaki gerçeği yansıtmalarına bakılarak kıyaslanabilmektedir (Kayacan, 2000). Başka bir deyişle, öne sürülen teorilerin gücü gerçek hayattaki uygulanabilirliğine bağlıdır. Bu gibi çalışmaların sonucu “uygulamalı teorik” kavramını ortaya çıkarmıştır (Kayacan, 2000). Buradan hareketle, bu tezde önerilen çeşitli teorik modellerin gerçek hayatta uygulanabilir olması nedeniyle, önerilen olasılıksal karışım modelleri aynı zamanda *uygulamalı teorik modellerdir*.

### 3.2 Sonlu karışımlar sınıfının stieltjes integrali yardımıyla ifadesi

Tanımlanabilirlik teoreminin farklı kaynaklarda (Teicher, 1963; Yakowitz, 1968; Chandra, 1977; Atienza, Heras & Munoz-Pichardo, 2006) farklı ispat biçimleri vardır. Çekirdek rolü oynayan Teicher’in 1. ve 2. Teoremi ve Teicher’in ifade ettiği ispatlar Alt Bölüm 2.4.1’de verilmiştir. Bu bölümde ise Teicher’in 1. Teoreminin ispatına alternatif bir ispat vermek amacıyla, tanımlanabilirlik kavramını daha iyi ifade eden formül (3.1) elde edilmiştir. Söz konusu teoremin ispatı sonlu karışım dağılımının Lebesgue-Stieltjes integrali şeklinde ifadesine dayalıdır. Buradan yola çıkarak, sonlu karışım dağılımlarının Lebesgue-Stieltjes integrali yardımıyla ifadesi aşağıdaki gibi sunulur:

$\mathfrak{F}_{n,m}$  ailesi, ( $m=1; n=1$ )

$$F(x, \alpha) = \begin{cases} F_1(x), & \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2) \\ F_2(x), & \alpha \in [\alpha_2, \alpha_3) \\ \vdots & \vdots \\ F_{k-1}(x), & \alpha \in [\alpha_{k-1}, \alpha_k) \\ F_k(x), & \alpha \in [\alpha_k, \infty) \end{cases}$$

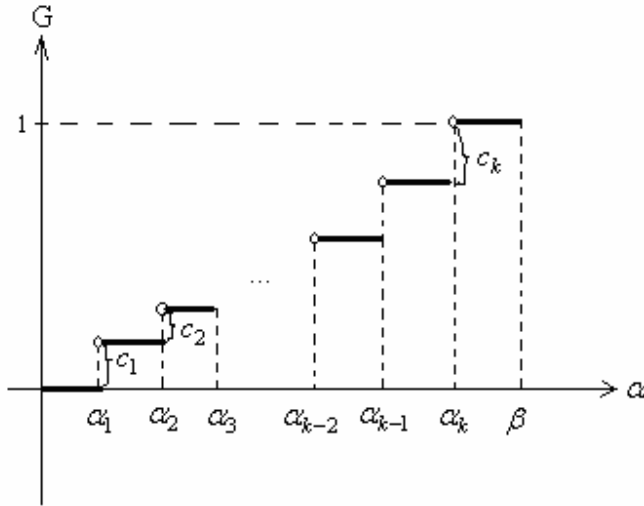
şeklinde tanımlanır.

$\mathfrak{S}$ ,  $\mu_G$  ölçümünü üreten  $m$ -boyutlu ( $m=1$ )  $G$  dağılımlarının bir sınıfıdır.

Burada,

$$G(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha \leq \alpha_1 \\ c_1, & \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2) \\ c_1 + c_2, & \alpha \in [\alpha_2, \alpha_3) \\ \vdots & \vdots \\ c_1 + \dots + c_{k-1}, & \alpha \in [\alpha_{k-1}, \alpha_k) \\ 1, & \alpha \in [\alpha_k, \beta) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.  $G(\alpha)$  dağılımının grafiği Şekil 3.1'de verilmiştir.



Şekil 3.1.  $G(\alpha)$  dağılımının grafiği

Görüldüğü gibi,  $G(\alpha)$  fonksiyonu soldan sürekli parçalı sabit bir fonksiyondur. Soldan sürekli monoton artan bu  $G(\alpha)$  fonksiyonu ile üretilen Stieltjes ölçümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}\mu_G[\alpha_1, \alpha_2] &= G(\alpha_2) - G(\alpha_1) = c_1 \\ \mu_G[\alpha_2, \alpha_3] &= G(\alpha_3) - G(\alpha_2) = c_1 + c_2 - c_1 = c_2 \\ &\vdots \\ \mu_G[\alpha_{k-1}, \alpha_k] &= G(\alpha_k) - G(\alpha_{k-1}) = c_{k-1} \\ \mu_G[\alpha_k, \beta] &= G(\beta) - G(\alpha_k) = c_k\end{aligned}$$

Lebesgue-Stieltjes integral tanımına göre,

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_1}^{\infty} F(x; \alpha) dG(\alpha) &= F_1(x) \mu_G[\alpha_1, \alpha_2] + F_2(x) \mu_G[\alpha_2, \alpha_3] + \dots + \\ &\quad + F_{k-1}(x) \mu_G[\alpha_{k-1}, \alpha_k] + F_k(x) \mu_G[\alpha_k, \beta] \\ &= F_1(x) c_1 + F_2(x) c_2 + \dots + F_k(x) c_k \\ &= \sum_{i=1}^k c_i F_i(x)\end{aligned}$$

ve sonuç olarak,

$$H(x) = \sum_{i=1}^k c_i F_i(x) = \int_{\alpha_1}^{\infty} F(x; \alpha) dG(\alpha)$$

elde edilir.

Eğer  $F(x; \alpha) = 0$ ,  $\alpha \leq \alpha_1$  olduğunu varsayarsak

$$\begin{aligned}H(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x; \alpha) dG(\alpha) = \sum_{i=1}^k F_i(x) \mu_G[\alpha_k, \alpha_{k+1}] \\ &= \sum_{i=1}^k c_i F_i(x)\end{aligned}\tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır.

### 3.3 Teicher'in I. Teoremine alternatif bir ispat

Bu alt bölümde, Alt Bölüm 3.2'de verilen sonlu karışım dağılımlarının Lebesgue-Stieltjes integrali yardımıyla ifadesine dayanarak Teicher'in I. Teoremine alternatif bir ispat verilmiştir.

**Teorem 3.1:**  $\mathfrak{F} = \{F_1(x), \dots, F_k(x)\}$  sonlu dağılımlar ailesinin

$$\mathcal{K} = \left\{ \sum_{i=1}^k c_i F_i(x) : c_i \geq 0, \sum_{i=1}^k c_i = 1 \right\}$$

bütün sonlu karışımlar sınıfının tanımlanabilir olması için gerek ve yeter koşul  $F_1(x), \dots, F_k(x)$  dağılımlarının doğrusal bağımsız olmasıdır.

**Alternatif İspat.** Gereklik:  $\mathcal{K} = \left\{ \sum_{i=1}^k c_i F_i(x) : c_i \geq 0, \sum_{i=1}^k c_i = 1 \right\}$  sınıfı tanımlanabilir

olsun.  $F_1(x), \dots, F_k(x)$  lerin doğrusal bağımsız olduğunu ispatlayalım.

Formül (3.1)'e göre,

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} F(x; \alpha) dG(\alpha) = \sum_{i=1}^k c_i F_i(x) \quad (3.2)$$

yazılabilir. Tanımlanabilirliğin tanımına göre, sonuncu  $H = AG$  şeklinde yazdığımızda doğrusal A operatörünün tersi vardır ve  $G = A^{-1}H$  (ya da

$\mathfrak{S} = A^{-1}\{\mathcal{K}\}$ ) gerekir. Başka bir deyişle her bir  $H = \sum_{i=1}^k c_i F_i(x)$ 'e karşı tek bir tane

$G$  dağılım fonksiyonunun var olduğunu ispatlamak gerekir.

$F_i(x)$ 'ler doğrusal bağımlı olsun ve  $G_1(\alpha) \neq G_2(\alpha)$  için,

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} F(x; \alpha) dG_1(\alpha) = \sum_{i=1}^k c_i F_i(x),$$

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} F(x; \alpha) dG_2(\alpha) = \sum_{i=1}^k \tilde{c}_i F_i(x)$$

$$\sum_{i=1}^k c_i F_i(x) = \sum_{i=1}^k \tilde{c}_i F_i(x)$$

eşitliklerini sağlayan  $c_i$  ve  $\tilde{c}_i$ 'ler var olsun. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^k (c_i - \tilde{c}_i) F_i(x) \equiv 0$$

yazılabilir.

$F_i(x)$ 'ler doğrusal bağımlı oldukları için en az bir tane  $c_j - \tilde{c}_j \neq 0$  vardır. Bu sonuç doğru olamaz çünkü  $G_1(\alpha) \neq G_2(\alpha)$ 'yı sağlamak zorundadır. Bu sonuç  $\mathcal{K}$  sınıfının tanımlanabilir olmasına zıttır. Gereklilik ispatlandı.

Yeterlilik:  $F_1(x), \dots, F_k(x)$  dağılım fonksiyonları doğrusal bağımsız olsun.  $\mathcal{K}$  sınıfının tanımlanabilirliğini ispatlayalım. Başka bir deyişle A operatörünün ters operatörünün varlığını gösterelim. Tersini varsayalım, yani  $F_1(x), \dots, F_k(x)$  dağılım fonksiyonları doğrusal bağımsız olmalarına karşın A operatörü ters operatöre sahip olmasın.

Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^k c_i F_i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x; \alpha) dG_1(\alpha), \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^k \tilde{c}_i F_i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x; \alpha) dG_2(\alpha) \quad (3.4)$$

ve  $G_1(\alpha) \neq G_2(\alpha)$  olmasına karşın

$$\sum_{i=1}^k c_i F_i(x) \equiv \sum_{i=1}^k \tilde{c}_i F_i(x)$$

olsun.

(3.2) ve (3.3)'ten  $\sum_{i=1}^k (c_i - \tilde{c}_i) F_i(x) \equiv 0$  elde edilir.  $F_1(x), \dots, F_k(x)$  dağılım fonksiyonları doğrusal bağımsız olduğu için  $c_i - \tilde{c}_i = 0$ ;  $c_i = \tilde{c}_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, k$  olmalıdır. Bu ise  $G_1(\alpha) = G_2(\alpha)$  olduğunu gösterir.

Böylece A operatörü ters operatöre sahiptir. Teorem ispatlandı.  $\square$

### 3.4 POEOD'nın sonlu karışımına ilişkin olasılıksal karışım modelleri

Alt Bölüm 2.3'te tanıtılan MaxEnt ve MinxEnt dağılımların parametreye sahip olmadıkları açıkça bellidir. Söz konusu dağılımlar parametrisi olmayan dağılımlar olduğundan dağılımın  $x_1, \dots, x_n$  noktalarında aldığı gerçel değerler söz konusudur. Bu açıdan bu alt bölümde öncelikle, MaxEnt, MinMaxEnt, MaxMaxEnt, MinxEnt, MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımlarının kesikli rassal değişken ve sürekli rassal değişken için sonlu karışımlarının tanımlanabilirliği incelenmiştir.

#### 3.4.1 Kesikli rassal değişkenler için MaxEnt ve MinxEnt dağılımlarının sonlu karışımının tanımlanabilirliği

Sonlu sayıda MaxEnt dağılımlarının karışımlarının tanımlanabilirliği (bkz. Alt Bölüm 2.2.3) için gerek ve yeter koşulu ifade eden aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

**Teorem 3.2:**  $p^{(l)}(x_i) = e^{-\lambda_0^{(l)} - \sum_{j=1}^m \lambda_j^{(l)} g_j^{(l)}(x_i)} \equiv p_i^{(l)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $l = 1, 2$  olmak üzere

verilmiş kesikli MaxEnt dağılımlarının dağılım fonksiyonları  $F_1(x)$  ve  $F_2(x)$  olsun.

$n=1$  için  $\mathfrak{F}_n = \{F_1(x), F_2(x) : x \in \mathfrak{R}^n\}$  dağılımlarının

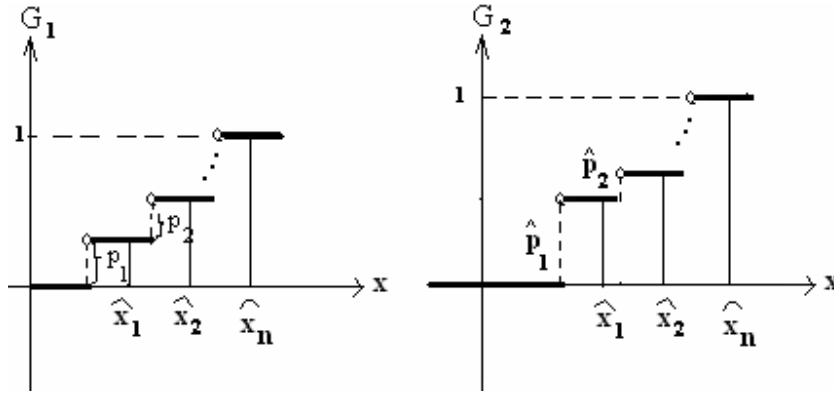
$$\mathcal{K} = \left\{ H : H = \sum_{i=1}^2 c_i F_i(x); c_i \geq 0, \sum_{i=1}^2 c_i = 1 \right\}$$

şeklindeki karışımlar ailesinin tanımlanabilir olması için gerek ve yeter koşul  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $i=1,2,\dots,n-1$ , aralıklarında  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$  noktalarını içeren öyle farklı aralıkların olmasıdır ki,

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(\tilde{x}_1) & F_1(\tilde{x}_2) \\ F_2(\tilde{x}_1) & F_2(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} \neq 0$$

koşulu sağlansın.

**İspat:** Şekil 3.2’de gösterilen MaxEnt dağılım fonksiyonlarının ikili karışımlarının tanımlanabilir olduğunu ispatlayalım.



**Şekil 3.2.** MaxEnt bileşenlerinin dağılım grafiği

Teorem 3.2’nin koşullarına göre

$$p^{(1)}(x_i) = e^{-\lambda_0^{(1)} - \sum_{j=1}^m \lambda_j^{(1)} g_j^{(1)}(x_i)} \equiv p_i^{(1)}, p^{(2)}(x_i) = e^{-\lambda_0^{(2)} - \sum_{j=1}^m \lambda_j^{(2)} g_j^{(2)}(x_i)} \equiv p_i^{(2)}$$

yazılabilir. Bu dağılımların birikimli fonksiyonları uygun olarak  $F_1(x)$  ve  $F_2(x)$  olsun. Birikimli fonksiyon tanımına göre,

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ p_1^{(1)}, & x \in [x_1, x_2) \\ p_1^{(1)} + p_2^{(1)}, & x \in [x_1, x_3) \\ \vdots & \vdots \\ p_1^{(1)} + \dots + p_{k-1}^{(1)}, & x \in [x_1, x_{k-1}) \\ 1, & x \in [x_1, x_k) \end{cases} \quad F_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ p_1^{(2)}, & x \in [x_1, x_2) \\ p_1^{(2)} + p_2^{(2)}, & x \in [x_1, x_3) \\ \vdots & \vdots \\ p_1^{(2)} + \dots + p_{k-1}^{(2)}, & x \in [x_1, x_{k-1}) \\ 1, & x \in [x_1, x_k) \end{cases}$$

olur.

$\mathcal{K}$ 'ya ait  $H = \sum_{i=1}^2 c_i F_i(x)$  dağılımının tanımlanabilirliği için gerek ve yeter

koşul  $F_1(x)$  ve  $F_2(x)$  dağılımlarının doğrusal bağımsız olmasıdır.

$F_1(x)$  ve  $F_2(x)$  fonksiyonlarının doğrusal bağımsızlığı için gerek ve yeter koşul

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(\tilde{x}_1) & F_1(\tilde{x}_2) \\ F_2(\tilde{x}_1) & F_2(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} \neq 0$$

koşulunu sağlayan  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$  noktalarının bulunmasıdır.  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$  noktalarının her biri  $i \neq j$  için farklı  $(x_{i-1}, x_i), (x_{j-1}, x_j)$  aralıklarına ait olmalıdır. Çünkü aynı bir aralığa ait olurlarsa, bu durumda  $\Delta = 0$  olurdu.  $\square$

**Çıkarılma 1:** Özel durumda,

$$\tilde{x}_1 \in (x_1, x_2); \quad \tilde{x}_2 \in (x_2, x_3)$$

olsun. Buna göre,

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(\tilde{x}_1) & F_1(\tilde{x}_2) \\ F_2(\tilde{x}_1) & F_2(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_1^{(1)} + p_2^{(1)} \\ p_1^{(2)} & p_1^{(2)} + p_2^{(2)} \end{vmatrix}$$

olduğundan determinant içindeki ikinci sütundan birinci sütunu çıkarırsak,



$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(\tilde{x}_1) & F_1(\tilde{x}_2) \\ F_2(\tilde{x}_1) & F_2(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_2^{(1)} \\ p_1^{(2)} & p_2^{(2)} \end{vmatrix} = p_1^{(1)}p_2^{(2)} - p_2^{(1)}p_1^{(2)} \neq 0$$

ya da

$$\frac{p_2^{(2)}}{p_1^{(2)}} \neq \frac{p_2^{(1)}}{p_1^{(1)}}$$

olması  $\Delta \neq 0$  olduğunu, bir başka ifade ile  $F_1(x)$  ve  $F_2(x)$  dağılımlarının doğrusal bağımsız olduğunu gösterir.  $\square$

Sonuç olarak görülüyor ki, özel durumda verilmiş iki dağılımın iki uygun noktadaki olasılıkları oranı farklıysa dağılımlar doğrusal bağımsızdır.

Benzer bir şekilde MaxEnt dağılımlarının sonlu karışımlarının tanımlanabilirliği için gerek ve yeter koşul ifade edilebilir.

**Teorem 3.3:**  $p^{(l)}(x_i) = e^{-\lambda_0^{(l)} - \sum_{j=1}^m \lambda_j^{(l)} g_j^{(l)}(x_i)} \equiv p_i^{(l)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $l = \overline{1, k}$ ;  $k \leq n-1$

olmak üzere verilmiş kesikli MaxEnt dağılımlarının birikimli dağılımı  $F_1(x)$ ,  $F_2(x), \dots, F_k(x)$  olsun.  $\mathfrak{F}_1 = \{F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x) : x \in \mathfrak{R}^1\}$  dağılımlarının

$\mathcal{H} = \left\{ H : H = \sum_{i=1}^k c_i F_i(x); c_i \geq 0, \sum_{i=1}^k c_i = 1 \right\}$  şeklindeki karışımlar ailesinin

tanımlanabilir olması için gerek ve yeter koşul  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $i=1, 2, \dots, n-1$ , aralıklarında  $k$  sayıda  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$  noktalarını içeren öyle farklı aralıkların olmasıdır ki,

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(\tilde{x}_1) & F_1(\tilde{x}_2) & \dots & F_1(\tilde{x}_k) \\ F_2(\tilde{x}_1) & F_2(\tilde{x}_2) & \dots & F_2(\tilde{x}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_k(\tilde{x}_1) & F_k(\tilde{x}_2) & \dots & F_k(\tilde{x}_k) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.5)$$

koşulu sağlansın.

**İspat:**  $F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x)$  MaxEnt birikimli dağılım fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$F_l(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ p_1^{(l)}, & x \in [x_1, x_2) \\ p_1^{(l)} + p_2^{(l)}, & x \in [x_2, x_3) \\ \vdots & \vdots \\ p_1^{(l)} + \dots + p_{k-1}^{(l)}, & x \in [x_{k-1}, x_k) \\ 1, & x \in [x_k, \infty) \end{cases}, \quad l = 1, 2, \dots, k.$$

Bu dağılımların tanımlanabilirliği  $F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x)$  fonksiyonlarının doğrusal bağımsızlığına eşdeğerdir. Söz konusu fonksiyonların doğrusal bağımsızlığı için gerek ve yeter koşul  $\Delta \neq 0$  olmasıdır (Teicher, 1963) .□

Özel durumda,

$$\tilde{x}_1 \in (x_1, x_2), \tilde{x}_2 \in (x_2, x_3), \dots, \tilde{x}_k \in (x_k, x_{k+1})$$

olduğunda Teorem 3.3'ün (3.5) koşulu aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(\tilde{x}_1) & F_1(\tilde{x}_2) & \dots & F_1(\tilde{x}_k) \\ F_2(\tilde{x}_1) & F_2(\tilde{x}_2) & \dots & F_2(\tilde{x}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_k(\tilde{x}_1) & F_k(\tilde{x}_2) & \dots & F_k(\tilde{x}_k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_1^{(1)} + p_2^{(1)} & \dots & p_1^{(1)} + p_2^{(1)} + \dots + p_k^{(1)} \\ p_1^{(2)} & p_1^{(2)} + p_2^{(2)} & \dots & p_1^{(2)} + p_2^{(2)} + \dots + p_k^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^{(k)} & p_1^{(k)} + p_2^{(k)} & \dots & p_1^{(k)} + p_2^{(k)} + \dots + p_k^{(k)} \end{vmatrix} \neq 0;$$

Son sütundan başlamak üzere her bir satırdan bir önceki sütunu çıkarırsak, (3.5) koşulu,

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & \dots & p_k^{(1)} \\ p_1^{(2)} & p_2^{(2)} & \dots & p_k^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^{(k)} & p_2^{(k)} & \dots & p_k^{(k)} \end{vmatrix} \neq 0$$

şeklinde ifade edilir.

**Teorem 3.4:**  $p^{(l)}(x_i) = q_i^{(l)} e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j^{(l)} g_j^{(l)}(x_i)} \equiv p_i^{(l)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $l = \overline{1, k}$  olmak üzere

verilmiş kesikli MinxEnt dağılımlarının birikimli dağılım fonksiyonları  $F_1(x)$ ,

$F_2(x), \dots, F_k(x)$  olsun.  $\mathfrak{F}_1 = \{F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x) : x \in \mathfrak{R}^1\}$  dağılımlarının

$\mathcal{K} = \left\{ H : H = \sum_{i=1}^k c_i F_i(x); c_i \geq 0, \sum_{i=1}^k c_i = 1 \right\}$  şeklindeki karışımlar ailesinin

tanımlanabilir olması için gerek ve yeter koşul  $(x_i, x_{i+1})$   $i=1, 2, \dots, n-1$  aralıkları

içinden k sayıda  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$  noktalarını içeren öyle farklı aralıkların olmasıdır ki

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(\tilde{x}_1) & F_1(\tilde{x}_2) & \dots & F_1(\tilde{x}_k) \\ F_2(\tilde{x}_1) & F_2(\tilde{x}_2) & \dots & F_2(\tilde{x}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_k(\tilde{x}_1) & F_k(\tilde{x}_2) & \dots & F_k(\tilde{x}_k) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.6)$$

koşulu sağlansın.

**İspat:**  $F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x)$  birikimli dağılımların tanımlanabilirliği söz konusu fonksiyonların doğrusal bağımsızlığına eşdeğerdir. Bu fonksiyonların doğrusal bağımsızlığı için gerek ve yeter koşul  $\Delta \neq 0$  olmasıdır. □

**Çıkarılma 2:** Özel durumda,  $\tilde{x}_i \in (x_i, x_{i+1})$ ,  $i = \overline{1, k}$ , olduğunda Teorem 3.3'te olduğu gibi,

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & \dots & p_k^{(1)} \\ p_1^{(2)} & p_2^{(2)} & \dots & p_k^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^{(k)} & p_2^{(k)} & \dots & p_k^{(k)} \end{vmatrix} \neq 0$$

sağlanır. Burada  $p_i^{(l)}$ , Teorem 3.4'te ifade edildiği gibidir.

### 3.4.2 Kesikli rassal değişkenler için MaxEnt ve MinxEnt dağılımlar ailesinin birleşiminin sonlu karışımının tanımlanabilirliği

Alt Bölüm 2.3.1'de MaxEnt dağılımı ve Alt Bölüm 2.3.2'de MinxEnt dağılımının tanımı verilmiştir. Ayrıca Alt Bölüm 3.4.1'de kesikli rassal değişken için MaxEnt dağılımı

$$p^{(l)}(x_i) = e^{-\lambda_0^{(l)} - \sum_{j=1}^m \lambda_j^{(l)} g_j^{(l)}(x_i)} \equiv p_i^{(l)}, \quad i = \overline{1, n}; \quad l = \overline{1, k}; \quad k \leq n-1$$

ve kesikli rassal değişken için MinxEnt dağılımı

$$\tilde{p}^{(l)}(x_i) = \tilde{q}_i e^{-\sum_{j=0}^m \tilde{\lambda}_j^{(l)} \tilde{g}_j^{(l)}(x_i)} \equiv \tilde{p}_i^{(l)}, \quad i = \overline{1, n}; \quad l = \overline{1, k}$$

şeklinde ifade edilmiştir.

#### **Tanım:**

- 1) MaxEnt
- 2) MinMaxEnt
- 3) MaxMaxEnt
- 4) MinxEnt
- 5) MaxMinxEnt
- 6) MinMinxEnt

olmak üzere 1-6 dağılımlarına *parametrik olmayan entropi optimizasyon dağılımları* denir.

MaxEnt ve MinxEnt dağılımlarının birikimli dağılımları ailesi sırasıyla

$$\mathfrak{F}_{MaxEnt} = \left\{ F_l : F_l(x) = \sum_{x_i \leq x} p^{(l)}(x_i), \quad x \in \mathfrak{R}^n, l = \overline{1, k} \right\}, \quad (3.7)$$

$$\mathfrak{F}_{MinxEnt} = \left\{ F_l : F_l(x) = \sum_{x_i \leq x} \tilde{p}^{(l)}(x_i), x \in \mathfrak{R}^n, l = \overline{1, k} \right\} \quad (3.8)$$

olarak tanımlanır.

Başka bir ifade ile (3.7) ve (3.8) aileleri,  $g(x) = (1, g_1(x), \dots, g_m(x))$  moment kümesinden seçilen moment kısıtlarının keyfi kombinasyonuna göre alınan kısıtlar altında elde edilmiş entropi optimizasyon dağılımlarından oluşmuş ailelerdir.

Bu durumda  $\mathfrak{U}$  birleşim ailesi,

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{F}_{MaxEnt} \cup \mathfrak{F}_{MinxEnt}$$

şeklinde tanımlansın.

**Teorem 3.5:**  $\mathfrak{U}$  'nun tüm sonlu karışım dağılımlarından oluşmuş  $K_{\mathfrak{U}}$  sınıfı,

$$\{c_i\}_{i=1}^k \in C = \left\{ \{c_i\}_{i=1}^h \mid h \in \mathbb{Z}^+, c_i > 0, \forall i = 1, \dots, h; \sum_{i=1}^h c_i = 1 \right\},$$

$$K_{\mathfrak{U}} = \left\{ H_{\mathfrak{U}} \mid \exists \{c_i\}_{i=1}^k \in C, \exists F_1, \dots, F_k \in \mathfrak{F} : H(\cdot) = \sum_{i=1}^k c_i F_i(\cdot), F(\cdot) \in \mathfrak{U}, \mathfrak{U} = \mathfrak{F}_{MaxEnt} \cup \mathfrak{F}_{MinxEnt} \right\}$$

olsun.  $\mathfrak{U}$  'nun  $K_{\mathfrak{U}}$  'ya ait tüm  $H_{\mathfrak{U}}$  karışımları tanımlanabilir.

**İspat:** Teorem 3.5, Teorem 3.1 koşulları gereğince sağlanır.  $\square$

**Teorem 3.6:** POEOD ailelerinin her birinden oluşan tüm sonlu karışımlar (örneğin, sadece (1) dağılımlarından oluşan, sadece (2) dağılımlarından oluşan vb.) ve bu dağılım ailelerinin (örneğin (1)ve (2), (2), (5) ve (6) vb.) ikili, üçlü ve k'lı keyfi birleşiminden oluşan tüm sonlu karışımlar tanımlanabilir.

**İspat:** Söz konusu (1)-(6) dağılımlarınının karışımlarının tanımlanabilir olması için gerek ve yeter koşul, Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 gereğince sağlanır.  $\square$

### 3.4.3 Sürekli rassal değişkenler için MaxEnt dağılımının ikili karışımının tanımlanabilirliği ve alternatif bir yeter koşul

Sürekli rassal değişken için MaxEnt dağılımının tanımı Alt Bölüm 2.3.1’de verilmiştir ve

$$f(x) = e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x)}$$

şeklinde ifade edilmiştir.

**Teorem 3.7:**  $\mathfrak{F}_1 = \{F_1(x), F_2(x) : x \in \mathfrak{R}^1\}$ , birikimli dağılımlar ailesinin

$$K = \left\{ H : H = \sum_{i=1}^2 c_i F_i(x) : c_i \geq 0, \sum_{i=1}^2 c_i = 1 \right\} \quad \text{tüm ikili karışımlar sınıfının}$$

tanımlanabilir olması için yeter koşul  $F_1(x)$  ve  $F_2(x)$  birikimli dağılım fonksiyonları için  $F_1(x) \neq F_2(x)$  koşulunu sağlayan en az bir tane  $x_0$  noktasının olmasıdır.

**İspat:**  $F_1(x) \neq F_2(x)$  koşulunu sağlayan en az bir tane  $x_0$  olsun.

$F_1(x)$  ve  $F_2(x)$  sürekli fonksiyonlar olduğu için  $F_1(x) \neq F_2(x)$  koşulu  $x_0$ ’ın  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  komşuluğunda da sağlanır.  $F_1(x)$  ve  $F_2(x)$  sürekli rassal değişkenlerin dağılım fonksiyonları oldukları için  $F_1'(x)$  ve  $F_2'(x)$  sürekli türevlerine sahipler.  $F_1(x)$  ve  $F_2(x)$ ’in Wronskian determinanı hesaplanır (Elsgolts, 1970):

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} F_1(x) & F_2(x) \\ F_1'(x) & F_2'(x) \end{vmatrix} = F_1(x)F_2'(x) - F_2(x)F_1'(x) \\ &= F_1(x)F_2(x) \left[ \frac{F_2'(x)}{F_2(x)} - \frac{F_1'(x)}{F_1(x)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F_1(x)F_2(x) \left[ (\ln F_2(x))' - (\ln F_1(x))' \right] \\
&= F_1(x)F_2(x) \left( \ln \frac{F_2(x)}{F_1(x)} \right)'. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

$F_1(x)$  ve  $F_2(x)$  birikimli dağılım fonksiyonları oldukları için  $0 < F_1(x) < 1$ ,  $0 < F_2(x) < 1$ 'dir. Bu nedenle, (3.9) dikkate alınırsa,  $W=0$ 'dan,

$$\left( \ln \frac{F_2(x)}{F_1(x)} \right)' = 0$$

ya da

$$\ln \frac{F_2(x)}{F_1(x)} = \ln c,$$

$$\frac{F_2(x)}{F_1(x)} = c$$

ortaya çıkar. Buradan, birikimli dağılım fonksiyonlarının özellikleri dikkate alınırsa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F_2(x)}{F_1(x)} = 1$$

bulunur. Bu sonuç  $F_1(x) = F_2(x)$  olduğunu gösterir. Teoremin koşuluna göre

$$F_1(x) = F_2(x)$$

olamaz. Bu nedenle  $W \neq 0$  olmalıdır.  $W \neq 0$  olması  $F_1(x)$  ve  $F_2(x)$  fonksiyonlarının doğrusal bağımsızlığını göstermektedir.  $\square$

**Çıkarılma 3:**  $F(x)$  entropi optimizasyon birikimli dağılım fonksiyonu ise, bu durumda Teorem 3.7 geçerlidir.

### 3.5 Parametreleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımları

Bu bölümde, parametrik olmayan olasılık dağılımları olan MaxEnt ve MinxEnt dağılımlarının kesikli ve sürekli rassal değişkenler için parametreleştirilmesi gösterilmiştir.

#### 3.5.1 MaxEnt dağılımlarının parametreleştirilmesi

Bu alt bölümde Alt Bölüm 2.3.1’de tanımlanan parametrik olmayan MaxEnt dağılımlarının bir parametrelili ya da iki parametrelili olarak ifade edilmiş; böylece, bir parametrelili kesikli MaxEnt Dağılımları, bir parametrelili sürekli MaxEnt Dağılımları ve iki parametrelili sürekli MaxEnt Dağılımlarının tanımı verilmiştir.

##### a) Bir Parametrelili Kesikli MaxEnt Dağılımları

$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $X$  rassal değişkeninin  $x_1, x_2, \dots, x_n$  değerlerinin ortaya çıkma olasılıklarıdır. Varsayalım ki, sistem hakkındaki tek bilgi beklenen değer  $\mu$  olsun. Başka bir deyişle verilen bilgiler,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i g(x_i) &= \mu \\ \sum_{i=1}^n p_i &= 1 \end{aligned} \tag{3.10}$$

olsun.  $\forall i$  için  $p_i \geq 0$ ’dir. Bu kısıtları sağlayan sonsuz sayıda olasılık dağılımı olabilir. Eğer sisten hakkında başka bir informasyon yok ise,

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \tag{3.11}$$

Shannon entropi ölçümünü (3.10) kısıtları altında maksimize eden olasılık dağılımı seçilir. Bu durumda Langrange çarpanlarına bağlı yardımcı fonksiyon,



$$L \equiv -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i - (\lambda - 1) \left( \sum_{i=1}^n p_i - 1 \right) - \tilde{\lambda} \left( \sum_{i=1}^n p_i g(x_i) - \mu \right). \quad (3.12)$$

olur.

$L$ 'nin  $p_1, p_2, \dots, p_n$ 'ye göre kısmi türevleri alınarak sıfıra eşitlendiğinde,

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = -\ln p_i - \lambda - \tilde{\lambda} g(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.13)$$

ve buradan,

$$p_i = e^{-\lambda - \tilde{\lambda} g(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.14)$$

elde edilir.  $p_i$ 'lerin bu değerleri  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ 'de yerine yazılırsa,

$$\sum_{i=1}^n e^{-\lambda - \tilde{\lambda} g(x_i)} = 1 \quad (3.15)$$

ya da

$$e^{-\lambda} \sum_{i=1}^n e^{-\tilde{\lambda} g(x_i)} = 1 \quad (3.16)$$

bulunur. Buradan, (3.17) ve (3.14)'te

$$e^{-\lambda} = \left( \sum_{i=1}^n e^{-\tilde{\lambda} g(x_i)} \right)^{-1} \quad (3.17)$$

yerine yazılırsa,

$$p_i = \left( \sum_{i=1}^n e^{-\tilde{\lambda} g(x_i)} \right)^{-1} e^{-\tilde{\lambda} g(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.18)$$

elde edilir, burada  $\left(\sum_{i=1}^n e^{-\tilde{\lambda}g(x_i)}\right)^{-1} = K$  alınırsa,

$$p_i = Ke^{-\tilde{\lambda}g(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.19)$$

elde edilir.

(3.19), *bir parametrelili kesikli MaxEnt dağılımıdır*. Eğer  $g(x_i)$  bir sistemin enerji düzeylerini ifade ediyorsa, (3.19) dağılımı literatürde bilinen Maxwell-Boltzmann dağılımını ifade etmektedir (Kapur&Kesavan, 1991).

### **b) Bir Parametrelili Sürekli MaxEnt Dağılımları**

$f(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonu verilsin. Shannon entropi ölçümü,

$$H = -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx, \quad (3.20)$$

$$\int_a^b f(x) dx = 1 \quad (3.21)$$

$$\int_a^b g(x) f(x) dx = \mu$$

olsun. (3.21) kısıtları altında (3.20)'yi maksimize eden olasılık dağılımı seçilir. Bu durumda, Langrange çarpanlarına bağlı yardımcı fonksiyon,

$$L = -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx - (\lambda - 1) \left( \int_a^b f(x) dx - 1 \right) - \tilde{\lambda} \left( \int_a^b g(x) f(x) dx - \mu \right) \quad (3.22)$$

$$L = \int_a^b \left( -f(x) \ln f(x) - (\lambda - 1) f(x) - \tilde{\lambda} g(x) f(x) \right) dx - (\lambda - 1) + \tilde{\lambda} \mu,$$

olur.

$$F = -f(x) \ln f(x) - (\lambda - 1) f(x) - \tilde{\lambda} g(x) f(x)$$

alınırsa,

$$L = \int_a^b F(f, \lambda, \tilde{\lambda}\mu) dx - (\lambda - 1) + \tilde{\lambda}\mu$$

olur. Euler denklemi (Elsgolts, 1970),

$$Ff - \frac{d}{dx} Ff' = 0$$

biçimindedir.  $Ff' = 0$  olduğu için,

$$Ff = -\ln f(x) - \lambda - \tilde{\lambda}g(x) = 0 \quad (3.23)$$

elde edilir. Buradan,

$$f(x) = e^{-\lambda - \tilde{\lambda}g(x)} \quad (3.24)$$

bulunur. Şimdi,

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

eşitliğinde (3.24) yerine yazılırsa,

$$\int_a^b e^{-\lambda - \tilde{\lambda}g(x)} dx = 1, \quad (3.25)$$

$$e^{-\lambda} \int_a^b e^{-\tilde{\lambda}g(x)} dx = 1, \quad (3.26)$$

$$e^{-\lambda} = \left( \int_a^b e^{-\tilde{\lambda}g(x)} dx \right)^{-1} \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.27), (3.24)'ten,

$$f(x) = \left( \int_a^b e^{-\tilde{\lambda}g(x)} dx \right)^{-1} e^{-\tilde{\lambda}g(x)} \quad (3.28)$$

bulunur.  $\left( \int_a^b e^{-\tilde{\lambda}g(x)} dx \right)^{-1} = K$  alınırsa,

$$f(x) = Ke^{-\tilde{\lambda}g(x)} \quad (3.29)$$

elde edilir.

(3.29) olasılık yoğunluk dağılımı parametresi  $\tilde{\lambda}$  olan bir parametrelili sürekli MaxEnt dağılımıdır.

### c) İki Parametrelili Sürekli MaxEnt Dağılımları

$f(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonu verilsin ve  $g = \{1, g_1(x), g_2(x)\}$  moment kısıt fonksiyonları olsun:

$$H = -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx, \quad (3.30)$$

$$\int_a^b f(x) dx = 1, \quad (3.31)$$

$$\int_a^b g_j(x) f(x) dx = \mu_j, j = 1, 2$$

(3.31) kısıtları altında (3.30)'u maksimize eden olasılık dağılımı seçilir. Bu durumda, Langrange çarpanlarına bağlı yardımcı fonksiyon,

$$L = -\int_a^b f(x) \ln f(x) - (\lambda - 1) \left( \int_a^b f(x) dx - 1 \right) - \tilde{\lambda} \left( \int_a^b g_1(x) f(x) dx - \mu_1 \right) - \tilde{\tilde{\lambda}} \left( \int_a^b g_2(x) f(x) dx - \mu_2 \right) \quad (3.32)$$

$$= \int_a^b \left( -f(x) \ln f(x) + (\lambda - 1) f(x) + \tilde{\lambda} g_1(x) f(x) + \tilde{\tilde{\lambda}} g_2(x) f(x) \right) dx + \lambda - 1 + \mu_1 \tilde{\lambda} + \mu_2 \tilde{\tilde{\lambda}}$$

olur. Burada

$$F = -f(x) \ln f(x) + (\lambda - 1) f(x) + \tilde{\lambda} g_1(x) f(x) + \tilde{\tilde{\lambda}} g_2(x) f(x)$$

alınırsa,

$$L = \int_a^b F(f, \lambda, \tilde{\lambda}, \tilde{\tilde{\lambda}}, \mu_1, \mu_2) dx + \lambda - 1 + \mu_1 \tilde{\lambda} + \mu_2 \tilde{\tilde{\lambda}}$$

yazılabilir. Euler denklemleri,

$$F_f - \frac{d}{dx} F_{f'} = 0$$

biçimindedir.  $Ff' = 0$  olduğu için Euler denklemi

$$F_f = -\ln f(x) - \lambda - \tilde{\lambda}g_1(x) - \tilde{\tilde{\lambda}}g_2(x) = 0. \quad (3.33)$$

elde edilir. Buradan,

$$f(x) = e^{-\lambda - \tilde{\lambda}g_1(x) - \tilde{\tilde{\lambda}}g_2(x)} \quad (3.34)$$

bulunur. Şimdi,

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

eşitliğinde (3.34) yerine yazılırsa,

$$\int_a^b e^{-\lambda - \tilde{\lambda}g_1(x) - \tilde{\tilde{\lambda}}g_2(x)} dx = 1, \quad (3.35)$$

$$e^{-\lambda} \int_a^b e^{-\tilde{\lambda}g_1(x) - \tilde{\tilde{\lambda}}g_2(x)} dx = 1, \quad (3.36)$$

$$e^{-\lambda} = \left( \int_a^b e^{-\tilde{\lambda}g_1(x) - \tilde{\tilde{\lambda}}g_2(x)} dx \right)^{-1} \quad (3.37)$$

bulunur. (3.37), (3.34)'ten

$$f(x) = \left( \int_a^b e^{-\tilde{\lambda}g_1(x) - \tilde{\tilde{\lambda}}g_2(x)} dx \right)^{-1} e^{-\tilde{\lambda}g_1(x) - \tilde{\tilde{\lambda}}g_2(x)} \quad (3.38)$$

elde edilir, burada  $\left( \int_a^b e^{-\tilde{\lambda}g_1(x) - \tilde{\tilde{\lambda}}g_2(x)} dx \right)^{-1} = K$  alınırsa,

$$f(x) = Ke^{-\tilde{\lambda}g_1(x) - \tilde{\tilde{\lambda}}g_2(x)} \quad (3.39)$$

(3.39) olasılık yoğunluk dağılımı parametreleri  $\tilde{\lambda}$  ve  $\tilde{\tilde{\lambda}}$  olan iki parametrelili sürekli MaxEnt dağılımıdır.

### 3.5.2 MinxEnt dağılımlarının parametreleştirilmesi

Bu alt bölümde Alt Bölüm 2.3.2’de tanımlanan parametrik olmayan MinxEnt dağılımlarının bir parametrelili ya da iki parametrelili olarak ifade edilmesi gösterilmiştir. Böylece, bir parametrelili kesikli MinxEnt dağılımları, bir parametrelili sürekli MinxEnt dağılımları ve iki parametrelili sürekli MinxEnt Dağılımları tanımlanmıştır.

#### a) Bir Parametrelili Kesikli MinxEnt Dağılımları

$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $X$  rassal değişkeninin  $x_1, x_2, \dots, x_n$  değerlerinin ortaya çıkma olasılıkları,  $q(x)$  ise sistem hakkındaki önsel dağılım olsun. Varsayalım ki, sistem hakkındaki tek bilgi beklenen değer  $\mu$  olsun:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i g(x_i) &= \mu \\ \sum_{i=1}^n p_i &= 1 \end{aligned} \quad (3.40)$$

$\forall i$  için  $p_i \geq 0$ ’dır. Buna göre,

$$D(p : q) = \sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{p_i}{q_i} \quad (3.41)$$

biçiminde verilen Kullback-Leibler entropi ölçümünü, (3.40) kısıtları altında minimize eden olasılık dağılımı seçilir. Bu durumda Langrange çarpanlarına bağlı yardımcı fonksiyon,

$$L = \sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{p_i}{q_i} + (\lambda - 1) \left( \sum_{i=1}^n p_i - 1 \right) + \tilde{\lambda} \left( \sum_{i=1}^n p_i g(x_i) - \mu \right) \quad (3.42)$$

olur.

$L$ 'nin  $p_1, p_2, \dots, p_n$ 'ye göre kısmi türevleri alınarak

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial p_i} &= \ln \frac{p_i}{q_i} + \frac{1}{\frac{p_i}{q_i}} \frac{p_i}{q_i} + (\lambda - 1) + \tilde{\lambda} g(x_i). \\ &= \ln \frac{p_i}{q_i} + \lambda + \tilde{\lambda} g(x_i), \quad i = 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (3.43)$$

elde edilir.  $\frac{\partial L}{\partial p_i} = 0$ 'dan,

$$\ln \frac{p_i}{q_i} + \lambda + \tilde{\lambda} g(x_i) = 0,$$

$$\frac{p_i}{q_i} = e^{-\lambda - \tilde{\lambda} g(x_i)}$$

ve buradan,

$$p_i = q_i e^{-\lambda - \tilde{\lambda} g(x_i)} \quad (3.44)$$

bulunur. Şimdi,  $p_i$ 'lerin bu değerleri

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\sum_{i=1}^n q_i e^{-\lambda - \tilde{\lambda} g(x_i)} = 1 \quad (3.45)$$

ya da

$$e^{-\lambda} \sum_{i=1}^n q_i e^{-\tilde{\lambda} g(x_i)} = 1 \quad (3.46)$$

olur. Buradan,

$$e^{-\lambda} = \left( \sum_{i=1}^n q_i e^{-\tilde{\lambda} g(x_i)} \right)^{-1} \quad (3.47)$$

Bulunur. (3.47), (3.45)'ten,

$$p_i = q_i \left( \sum_{i=1}^n q_i e^{-\tilde{\lambda} g(x_i)} \right)^{-1} e^{-\tilde{\lambda} g(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.48)$$

elde edilir. Burada  $\left( \sum_{i=1}^n q_i e^{-\tilde{\lambda} g(x_i)} \right)^{-1} = K$  alınırsa,

$$p_i = K q_i e^{-\tilde{\lambda} g(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.49)$$

elde edilir. (3.49) olasılık dağılımı *bir parametrelili kesikli MinxEnt dağılımı* denir.

### b) Bir parametrelili sürekli MinxEnt Dağılımları

$f(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonu için

$$D(f : q) = \int_a^b f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} dx \quad (3.50)$$

biçiminde verilen Kullback-Leibler ölçümünü

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= 1 \\ \int_a^b g(x) f(x) dx &= \mu \end{aligned} \quad (3.51)$$

kısıtları altında minimize eden olasılık dağılımı seçilir. Bu durumda, Langrange çarpanlarına bağlı yardımcı fonksiyon,

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} dx + (\lambda - 1) \left( \int_a^b f(x) dx - 1 \right) + \tilde{\lambda} \left( \int_a^b g(x) f(x) dx - \mu \right) \\ &= \int_a^b \left\{ f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} + (\lambda - 1) f(x) + \tilde{\lambda} g(x) f(x) \right\} dx + 1 - \lambda - \mu \tilde{\lambda} \end{aligned} \quad (3.52)$$

olarak oluşturulur. Burada,

$$F = f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} + (\lambda - 1) f(x) + \tilde{\lambda} g(x) f(x)$$

alınırsa,



$$L = \int_a^b F(f, \lambda, \tilde{\lambda}, \mu) dx + 1 - \lambda - \mu \tilde{\lambda}$$

olur. Euler denklemi

$$F_f - \frac{d}{dx} F_{f'} = 0$$

biçimindedir.  $F_{f'} = 0$  olduğu için

$$F_f = 0,$$

$$\begin{aligned} F_f &= \ln \frac{f(x)}{q(x)} + \frac{1}{\frac{f(x)}{q(x)}} \frac{f(x)}{q(x)} + (\lambda - 1) + \tilde{\lambda} g(x) \\ &= \ln \frac{f(x)}{q(x)} + \lambda + \tilde{\lambda} g(x), \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\ln \frac{f(x)}{q(x)} + \lambda + \tilde{\lambda} g(x) = 0,$$

$$\frac{f(x)}{q(x)} = e^{-\lambda - \tilde{\lambda} g(x)},$$

$$f(x) = q(x) e^{-\lambda - \tilde{\lambda} g(x)} \quad (3.54)$$

elde edilir. Şimdi,  $f(x)$ 'in (3.54)'teki değeri

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\int_a^b q(x) e^{-\lambda - \tilde{\lambda} g(x)} = 1 \quad (3.55)$$

ya da

$$e^{-\lambda} \int_a^b q(x) e^{-\tilde{\lambda} g(x)} = 1, \quad (3.56)$$

$$e^{-\lambda} = \left( \int_a^b q(x) e^{-\tilde{\lambda} g(x)} \right)^{-1} \quad (3.57)$$

$$f(x) = q(x) \left( \int_a^b q(x) e^{-\tilde{\lambda}g(x)} dx \right)^{-1} e^{-\tilde{\lambda}g(x)} \quad (3.58)$$

elde edilir. Burada  $\left( \int_a^b q(x) e^{-\tilde{\lambda}g(x)} dx \right)^{-1} = K$  alınırsa,

$$f(x) = Kq(x) e^{-\tilde{\lambda}g(x)} \quad (3.59)$$

bulunur. (3.59) olasılık dağılımına *bir parametrelili sürekli MinxEnt dağılımı* denir.

### c) İki Parametrelili Sürekli MinxEnt Dağılımları

$f(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonu verilsin ve  $g = \{1, g_1(x), g_2(x)\}$  moment kısıt fonksiyonları olsun:

$$D(f : q) = \int_a^b f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} dx, \quad (3.60)$$

$$\int_a^b f(x) dx = 1 \quad (3.61)$$

$$\int_a^b g_j(x) f(x) dx = \mu_j, j = 1, 2$$

(3.61) kısıtları altında (3.60)'i minimize eden olasılık dağılımı seçilir. Bu durumda Langrange çarpanlarına bağlı yardımcı fonksiyon,

$$L = \int_a^b f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} dx + (\lambda - 1) \left( \int_a^b f(x) dx - 1 \right) + \tilde{\lambda} \left( \int_a^b g_1(x) f(x) dx - \mu_1 \right) + \tilde{\tilde{\lambda}} \left( \int_a^b g_2(x) f(x) dx - \mu_2 \right)$$

$$= \int_a^b \left\{ f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} + (\lambda - 1) f(x) + \tilde{\lambda} g_1(x) f(x) + \tilde{\tilde{\lambda}} g_2(x) f(x) \right\} dx + (1 - \lambda) - \tilde{\lambda} \mu_1 - \tilde{\tilde{\lambda}} \mu_2 \quad (3.62)$$

şeklinde oluşturulur. Burada,

$$F = f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} + (\lambda - 1) f(x) + \tilde{\lambda} g_1(x) f(x) + \tilde{\tilde{\lambda}} g_2(x) f(x)$$

alınırsa,

$$L = \int_a^b F(f, \lambda, \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}, \mu_1, \mu_2) dx + (1-\lambda) - \tilde{\lambda}\mu_1 - \tilde{\lambda}\mu_2$$

elde edilir. Euler denklemi,

$$F_f - \frac{d}{dx} F_{f'} = 0$$

biçimindedir.  $F_{f'} = 0$  olduğu için,

$$F_f = 0,$$

$$F_f = \ln \frac{f(x)}{q(x)} + \lambda + \tilde{\lambda}g_1(x) + \tilde{\lambda}g_2(x) = 0 \quad (3.63)$$

ve buradan,

$$f(x) = q(x) e^{-\lambda - \tilde{\lambda}g_1(x) - \tilde{\lambda}g_2(x)} \quad (3.64)$$

bulunur. (3.64)

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\int_a^b q(x) e^{-\lambda - \tilde{\lambda}g_1(x) - \tilde{\lambda}g_2(x)} dx = 1, \quad (3.65)$$

$$e^{-\lambda} \int_a^b q(x) e^{-\tilde{\lambda}g_1(x) - \tilde{\lambda}g_2(x)} dx = 1, \quad (3.66)$$

$$e^{-\lambda} = \left( \int_a^b q(x) e^{-\tilde{\lambda}g_1(x) - \tilde{\lambda}g_2(x)} dx \right)^{-1}, \quad (3.67)$$

$$f(x) = \left( \int_a^b q(x) e^{-\tilde{\lambda}g_1(x) - \tilde{\lambda}g_2(x)} dx \right)^{-1} q(x) e^{-\tilde{\lambda}g_1(x) - \tilde{\lambda}g_2(x)} \quad (3.68)$$

elde edilir. Burada  $\left( \int_a^b q(x) e^{-\tilde{\lambda}g_1(x) - \tilde{\lambda}g_2(x)} dx \right)^{-1} = K$  alınırsa,

$$f(x) = Kq(x) e^{-\tilde{\lambda}g_1(x) - \tilde{\lambda}g_2(x)} \quad (3.69)$$

bulunur.

(3.69) olasılık yoğunluk dağılımı parametreleri  $\tilde{\lambda}$  ve  $\tilde{\lambda}$  olan *iki parametrelili süreklili MinxEnt dağılımıdır.*

### 3.6 Parametreliliştirilmiş entropili optimizasyon dağılımlarının sonlu karışımının tanımlanabilirliği

Bu alt bölümde, Alt Bölüm 3.5'te tanımlanan aynı parametrik aileden olan PEOD'nın sonlu karışımlarının tanımlanabilirliğine ilişkin teoremler verilmiştir.

#### 3.6.1 Parametrik MaxEnt dağılımların sonlu karışımının tanımlanabilirliği

Süreklili rassal değişken için bir parametrelili MaxEnt dağılımı Alt Bölüm 3.5.1'de tanımlanmıştır. Bir parametrelili süreklili MaxEnt dağılımının genel halde moment üreten fonksiyonunun elde edilmesinde ortaya çıkan zorluk nedeniyle, bu alt bölümde söz konusu dağılımı kullanılarak tanımlanan olasılıksal karışım modelinde  $g(x) = x$  alınmıştır. Bu dağılımın tanımından yola çıkarak Teorem 3.8 ifade edilir. Buradaki bir parametrelili MaxEnt dağılımının yoğunluk fonksiyonunda  $x \in (0, \infty)$ 'dur ve

$$\int_0^x K.e^{-\tilde{\lambda}u} du = \frac{K}{\tilde{\lambda}}(1 - e^{-\tilde{\lambda}x})$$

eşitliği sağlanır.

**Teorem 3.8:** Süreklili rassal değişken için

$$\mathfrak{F}_{se} = \left\{ F : F(x; \tilde{\lambda}) = \int_0^x K.e^{-\tilde{\lambda}u} du, x > 0, \tilde{\lambda} > 0 \right\} \text{ bir parametrelili MaxEnt dağılımlar}$$

ailesinin tüm sonlu karışımlar sınıfı tanımlanabilirliğir.

**İspat:** M, X rassal değişkenini F dağılım fonksiyonunun moment üreten fonksiyonuna dönüştüren bir operatör olsun:

$$M(F_1) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF_1(x),$$

$$M(F_2) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF_2(x),$$

$$\begin{aligned} M(\alpha F_1 + \beta F_2) &= E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} d(\alpha F_1 + \beta F_2) \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF_1 + \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF_2 \\ &= \alpha M(F_1) + \beta M(F_2). \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi, M operatörü doğrusal operatördür.

$F \in \mathfrak{F}_{se}$  olsun. Moment üreten fonksiyon,

$$\begin{aligned} \phi_F(t) &= M(F(x; \tilde{\lambda})) = E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} e^{tx} K e^{-\tilde{\lambda}x} dx = K \int_0^{\infty} e^{tx - \tilde{\lambda}x} dx = K \int_0^{\infty} e^{-(\tilde{\lambda}-t)x} dx \\ &= K \left\{ \frac{e^{-(\tilde{\lambda}-t)x}}{-(\tilde{\lambda}-t)} \Big|_0^{\infty} \right\} = \frac{K}{-(\tilde{\lambda}-t)} \left( e^{-(\tilde{\lambda}-t)x} \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{K}{-(\tilde{\lambda}-t)} \cdot (-1) = \frac{K}{\tilde{\lambda}-t} \end{aligned}$$

elde edilir;  $t < \tilde{\lambda}$  'dır.

$F_1 \in \mathfrak{F}_{se}$ ,  $F_2 \in \mathfrak{F}_{se}$  ve  $\tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2$  olsun. Buna göre,

$$\phi_{F_1}(t) = \frac{K_1}{\tilde{\lambda}_1 - t}, \quad t \in (-\infty, \tilde{\lambda}_1),$$

$$\phi_{F_2}(t) = \frac{K_2}{\tilde{\lambda}_2 - t}, \quad t \in (-\infty, \tilde{\lambda}_2)$$

elde edilir. Burada

$$K_1 = \left( \int_0^{\infty} e^{-\tilde{\lambda}_1 x} dx \right)^{-1},$$

$$K_2 = \left( \int_0^{\infty} e^{-\tilde{\lambda}_2 x} dx \right)^{-1}$$

biçimindedir. Tanıma göre,

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]',$$

$$t(F_1) \in [(-\infty, \tilde{\lambda}_1) \cap (-\infty, \tilde{\lambda}_2)]',$$

$$t(F_1) \in [(-\infty, \tilde{\lambda}_1)]'$$

olsun. Bu durumda,

$$t(F_1) = \tilde{\lambda}_1$$

seçilebilir.

Teoremin diğer bir koşuluna göre, yerel sıralamanın sağlandığı gösterilsin:

$$\lim_{t \rightarrow \tilde{\lambda}_1} \frac{\phi_{F_2}(t)}{\phi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \tilde{\lambda}_1} \frac{\frac{K_2}{\tilde{\lambda}_2 - t}}{\frac{K_1}{\tilde{\lambda}_1 - t}} = \frac{K_2}{K_1} \lim_{t \rightarrow \tilde{\lambda}_1} \left( \frac{\tilde{\lambda}_1 - t}{\tilde{\lambda}_2 - t} \right).$$

$\tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \tilde{\lambda}_1} \frac{\phi_{F_2}(t)}{\phi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \tilde{\lambda}_1} \frac{\tilde{\lambda}_1 - t}{\tilde{\lambda}_2 - t} = 0$  olur ve  $F_1 \prec F_2$  sağlanır. Böylece, bir

parametrelili sürekli MaxEnt dağılımlar ailesinin tüm sonlu karışımlar sınıfı tanımlanabilir. Teoremin koşulları sağlandığından teorem ispatlandı.  $\square$

$g(x)$  moment kısıt fonksiyonu  $g(x) = x^2$  seçilirse Teorem 3.9 geçerlidir.

Buradaki bir parametrelili MaxEnt dağılımının yoğunluk fonksiyonunda  $x \in (-\infty, \infty)$

ve  $\tilde{\lambda} > 0$  olsun.  $\int_{-\infty}^x K.e^{-\tilde{\lambda}u^2} du = \frac{K}{\sqrt{\tilde{\lambda}}} \int_0^{\sqrt{\tilde{\lambda}}x} e^{-z^2} dz$  'dir.

**Teorem 3.9:** Sürekli rassal değişken için  $\mathfrak{F}_{se} = \left\{ F : F(x; \tilde{\lambda}) = \int_{-\infty}^x K.e^{-\tilde{\lambda}u^2} du, \tilde{\lambda} > 0 \right\}$

bir parametrelili MaxEnt dağılımlar ailesinin tüm sonlu karışımlar sınıfı tanımlanabilir.

**İspat:** M, X rassal değişkeninin F dağılım fonksiyonunun moment üreten fonksiyonuna dönüştüren bir doğrusal operatördür (Bkz. Teorem 3.8 ispatı).

$F \in \mathfrak{F}_{Se}$  olsun:

$$\varphi_F(t) = M(F(x; \tilde{\lambda})) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} K \cdot e^{-\tilde{\lambda}x^2} dx = K \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx - \tilde{\lambda}x^2} dx = K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\tilde{\lambda}x^2 - tx\right)} dx$$

Sonuncu integrali çözmek için

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(Ax^2 \pm 2Bx + C\right)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{AC - B^2}{A}} \quad (3.70)$$

formülünden (Венцыл, 1969) yararlanalım. (3.70) formülüne göre,

$$\varphi_F(t) = K \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\lambda}}} e^{\frac{t^2}{4\tilde{\lambda}}}, \text{ burada } K = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\lambda}x^2} dx \right)^{-1},$$

$$S_0(F) = \{t : t \in (-\infty, \infty), \varphi_F(t) \neq 0\}$$

bulunur.

$F_1 \in \mathfrak{F}_{Se}$ ,  $F_2 \in \mathfrak{F}_{Se}$  ve  $\tilde{\lambda}_1 > \tilde{\lambda}_2$  olsun:

$$\varphi_{F_1}(t) = K_1 \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\lambda}_1}} e^{\frac{t^2}{4\tilde{\lambda}_1}}, \quad S_0(F_1) = \{t : t \in (-\infty, \infty), \varphi_{F_1}(t) \neq 0\},$$

$$\varphi_{F_2}(t) = K_2 \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\lambda}_2}} e^{\frac{t^2}{4\tilde{\lambda}_2}}, \quad S_0(F_2) = \{t : t \in (-\infty, \infty), \varphi_{F_2}(t) \neq 0\}$$

elde edilir. Burada

$$K_1 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\lambda}_1 x^2} dx \right)^{-1},$$

$$K_2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\lambda}_2 x^2} dx \right)^{-1}$$

biçimindedir.

Atienza-Garcia-Munoz Teoreminin koşuluna göre,

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S_0(F_2)]',$$

$$t(F_1) \in [(-\infty, \infty) \cap (-\infty, \infty)]',$$

$$t(F_1) \in [(-\infty, \infty)]'$$

olsun. Bu durumda,

$$t(F_1) = \infty$$

seçelim.

Teoremin diğer bir koşuluna göre, yerel sıralamanın sağlandığı gösterilmeli:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K_2 \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\lambda}_2}} e^{\frac{t^2}{4\tilde{\lambda}_2}}}{K_1 \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\lambda}_1}} e^{\frac{t^2}{4\tilde{\lambda}_1}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_2}} e^{\frac{t^2}{4} \left( \frac{1}{\tilde{\lambda}_1} - \frac{1}{\tilde{\lambda}_2} \right)}$$

$$\tilde{\lambda}_1 > \tilde{\lambda}_2 \text{ olduğunda } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = 0 \text{ 'dır ve } F_1 \prec F_2 \text{ sağlanır. Dolayısıyla}$$

teoremin koşulları sağlanır ve Teorem ispatlandı.  $\square$

$$g = (1, g_1(x), g_2(x)) \text{ moment fonksiyonları kümesi } g = (1, x, x^2) \text{ seçilirse}$$

Teorem 3.10 geçerlidir ve

$$\int_{-\infty}^x K e^{-\tilde{\lambda}u - \tilde{\lambda}u^2} du = K \frac{\tilde{\lambda}^2}{\sqrt{\tilde{\lambda}}} \frac{x - \frac{\tilde{\lambda}}{2\tilde{\lambda}}}{\frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}}}} e^{-z^2} dz$$

olur.

**Teorem 3.10:** Sürekli rassal değişken için iki parametrelili MaxEnt

$$\mathfrak{F}_{se} = \left\{ F : F(x; \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}) = \int_{-\infty}^x K e^{-\tilde{\lambda}u - \tilde{\lambda}u^2} du, \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda} > 0 \right\} \text{ iki parametrelili MaxEnt dağılımlar}$$

ailesinin tüm sonlu karışımlar sınıfı tanımlanabilir.



**İspat:** M, X rassal değişkenin F dağılım fonksiyonunun moment üreten fonksiyonuna dönüştüren bir doğrusal operatördür (Bkz. Teorem 3.9 ispatı).

$F \in \mathfrak{F}_{se}$  olsun:

$$\begin{aligned}\varphi_F(t) &= M\left(F\left(x; \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}\right)\right) = E\left(e^{tx}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} K e^{-\tilde{\lambda}x - \tilde{\lambda}x^2} dx \\ &= K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx - \tilde{\lambda}x - \tilde{\lambda}x^2} dx = K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\tilde{\lambda}x^2 + (\tilde{\lambda}-t)x\right)} dx\end{aligned}$$

(3.70) formülüne göre,

$$\varphi_F(t) = K \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\lambda}}} e^{\frac{(\tilde{\lambda}-t)^2}{4\tilde{\lambda}}},$$

$$S_0(F) = \{t : t \in (-\infty, \infty), \varphi_F(t) \neq 0\}$$

olur.

$F_1 \in \mathfrak{F}_{se}$ ,  $F_2 \in \mathfrak{F}_{se}$  ve  $\tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2$  olsun:

$$\varphi_{F_1}(t) = K_1 \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\lambda}_1}} e^{\frac{(\tilde{\lambda}_1-t)^2}{4\tilde{\lambda}_1}}, \quad S_0(F_1) = \{t : t \in (-\infty, \infty), \varphi_{F_1}(t) \neq 0\}$$

ve

$$\varphi_{F_2}(t) = K_2 \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\lambda}_2}} e^{\frac{(\tilde{\lambda}_2-t)^2}{4\tilde{\lambda}_2}}, \quad S(F_2) = \{t : t \in (-\infty, \infty), \varphi_{F_2}(t) \neq 0\}.$$

Tanıma göre,

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]',$$

$$t(F_1) \in [(-\infty, \infty) \cap (-\infty, \infty)]',$$

$$t(F_1) \in [(-\infty, \infty)]'$$

olduğu için

$$t(F_1) = \infty$$

seçilir.

Yerel sıralamanın sağlandığı gösterilsin:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K_2 \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\lambda}_2}} e^{\frac{(\tilde{\lambda}_2-t)^2}{4\tilde{\lambda}_2}}}{K_1 \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\lambda}_1}} e^{\frac{(\tilde{\lambda}_1-t)^2}{4\tilde{\lambda}_1}}} = \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_2}} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{4} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_2-t)^2}{\tilde{\lambda}_2} - \frac{(\tilde{\lambda}_1-t)^2}{\tilde{\lambda}_1} \right)},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_2-t)^2}{\tilde{\lambda}_2} - \frac{(\tilde{\lambda}_1-t)^2}{\tilde{\lambda}_1} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{\lambda}_2-t)^2 \left( \frac{1}{\tilde{\lambda}_2} - \frac{1}{\tilde{\lambda}_1} \frac{(\tilde{\lambda}_1-t)^2}{(\tilde{\lambda}_2-t)^2} \right).$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\tilde{\lambda}_1-t}{\tilde{\lambda}_2-t} \right)^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{\tilde{\lambda}_1}{t} - 1}{\frac{\tilde{\lambda}_2}{t} - 1} \right)^2 = 1 \text{ olduğundan,}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{\lambda}_2-t)^2 \left( \frac{1}{\tilde{\lambda}_2} - \frac{1}{\tilde{\lambda}_1} \right)$$

limitini incelemek yeterli olur.

$\tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2$  için,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{4}(\tilde{\lambda}_2-t)^2 \left( \frac{1}{\tilde{\lambda}_2} - \frac{1}{\tilde{\lambda}_1} \right)} = 0$$

olur. Bu durumda

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_2}} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{4} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_2-t)^2}{\tilde{\lambda}_2} - \frac{(\tilde{\lambda}_1-t)^2}{\tilde{\lambda}_1} \right)} = 0$$

elde edilir ve  $F_1 \prec F_2$  sağlanır. Teorem ispatlandı.  $\square$

### 3.6.2 Parametrik MinxEnt dağılımlarının sonlu karışımının tanımlanabilirliği

MinxEnt dağılımının oluşturulması  $q(x)$  önsel dağılımının seçimine bağlıdır. Bu nedenle, bu alt bölümde parametrik MinxEnt dağılımlarının sonlu karışımının tanımlanabilirliği  $q(x)$  ve  $g(x)$ 'in özel durumları göz önüne alınarak incelenmiştir ve teoremler olarak ifade edilmiştir.

$q(x) = x$  ve  $g(x) = x$  seçilerek Teorem 3.11 ifade edilebilir. Burada bir parametrelili MinxEnt dağılımlarının yoğunluk fonksiyonunda  $x \in (0, \infty)$ 'dir ve

$$\int_0^x Kue^{-\tilde{\lambda}u} du = \frac{K}{\tilde{\lambda}^2} \int_0^{\tilde{\lambda}x} ze^{-z} dz$$

yazılabilir.

**Teorem 3.11:** Sürekli rassal değişken için,

$$\mathfrak{F}_{se} = \left\{ F : F(x; \tilde{\lambda}) = \int_0^x Kue^{-\tilde{\lambda}u} du, \quad x > 0, \tilde{\lambda} > 0 \right\}$$

olsun.  $\mathfrak{F}_{se}$  bir parametrelili MinxEnt dağılımlar ailesinin tüm sonlu karışım sınıfı tanımlanabilir.

**İspat:**  $M, X$  rassal değişkeninin  $F$  dağılım fonksiyonunun moment üreten fonksiyonuna dönüştüren bir doğrusal operatördür (Bkz. Teorem 3.9 ispatı).

$F \in \mathfrak{F}_{se}$  olsun:

$$\begin{aligned} \varphi_F(t) &= M(F(x; \tilde{\lambda})) = E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} e^{tx} K.xe^{-\tilde{\lambda}x} dx = K \int_0^{\infty} xe^{tx-\tilde{\lambda}x} dx = K \int_0^{\infty} xe^{-(\tilde{\lambda}-t)x} dx \\ &= K \int_0^{\infty} \frac{x}{-(\tilde{\lambda}-t)} d\left(e^{-(\tilde{\lambda}-t)x}\right) = -\frac{K}{\tilde{\lambda}-t} \left\{ xe^{-(\tilde{\lambda}-t)x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-(\tilde{\lambda}-t)x} dx \right\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{K}{\tilde{\lambda}-t} \left\{ -\frac{e^{-(\tilde{\lambda}-t)x}}{-(\tilde{\lambda}-t)} \Big|_0^{\infty} \right\} = -\frac{K}{(\tilde{\lambda}-t)^2} (0-1) = \frac{K}{(\tilde{\lambda}-t)^2}$$

$\varphi_F(t)$  'nin tanım bölgesi  $t \in (-\infty, \tilde{\lambda})$  elde edilir.

$F_1 \in \mathfrak{F}_{se}; F_2 \in \mathfrak{F}_{se}$  olsun:

$$\varphi_{F_1}(t) = \frac{K_1}{(\tilde{\lambda}_1-t)^2}, S_0(F_1) = \{t : t \in (-\infty, \tilde{\lambda}_1), \varphi_{F_1}(t) \neq 0\},$$

$$\varphi_{F_2}(t) = \frac{K_2}{(\tilde{\lambda}_2-t)^2}, S(F_2) = \{t : t \in (-\infty, \tilde{\lambda}_2), \varphi_{F_2}(t) \neq 0\}.$$

Tanım göre,

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]',$$

$$t(F_1) \in [(-\infty, \tilde{\lambda}_1) \cap (-\infty, \tilde{\lambda}_2)]'.$$

$\tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2$  olsun. Bu durumda,

$$t(F_1) \in [(-\infty, \tilde{\lambda})]'$$

olur. Böylece,  $t(F_1) = \tilde{\lambda}$  seçilsin ve yerel sıralamanın sağlandığı gösterilsin:

$$\lim_{t \rightarrow \tilde{\lambda}_1} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \tilde{\lambda}_1} \frac{\frac{K_2}{(\tilde{\lambda}_2-t)^2}}{\frac{K_1}{(\tilde{\lambda}_1-t)^2}} = \lim_{t \rightarrow \tilde{\lambda}_1} \frac{K_2}{K_1} \frac{(\tilde{\lambda}_1-t)^2}{(\tilde{\lambda}_2-t)^2} = 0$$

olur ve  $F_1 \prec F_2$  sağlanır. Böylece, Teorem ispatlandı.  $\square$

### 3.7 Farklı parametrik dağılımlar ailesinin birleşimine ilişkin olasılıksal karışım modelleri

Teicher'in Teoremi (1963) sadece aynı parametrik aileden olan dağılımların karışımlarını tanımlanabilir olup olmadığını araştırmaya olanak sunmaktadır. Oysa

Atienza-Garcia-Munoz Teoremi (2006) farklı parametrik ailelerden olan olasılık dağılımlarının karışımlarının tanımlanabilir olup olmadığını araştırma alanı açmıştır. Atienza çalışmasında, en fazla üç birleşimden oluşmuş bir aileden alınan karışımların tanımlanabilirliğini incelemiştir ve sonlu sayıda birleşimden oluşmuş bir aileden alınan karışımların tanımlanabilirliğinin de inceleme konusu olduğunu belirtmiştir. Bu açıdan bu alt bölümde, farklı parametrik ailelere ait olan dağılımların ikili, üçlü ve dördü birleşimleri ele alınmıştır. Söz konusu birleşimlerden oluşmuş karışımların tanımlanabilir olduğu ispatlanmıştır.

### 3.7.1 İki dağılım ailesinin birleşiminden oluşmuş olasılıksal karışım modelleri: LSDR olasılıksal karışım modelleri

Bu alt bölümde, kesikli rassal değişken için tanımlanmış Logaritmik Seriler Olasılık Dağılımları Ailesi ile Kesikli Dikdörtgen Olasılık Dağılımı Ailesinin birleşiminden oluşan yeni bir aile tanımlanmıştır. Tanımlanan ailenin karışım dağılımının tanımlanabilir olduğu ispatlanmıştır. Benzer yöntemle, diğer kesikli rassal değişkenlerin dağılımlarının olasılık karışım modelleri de ele alınabilir.

**Tanım 3.1:** Logaritmik seriler olasılık dağılımları ailesi (LS)

$$\mathfrak{F}_{LS} = \left\{ F : F(x, \alpha) = \sum_{x_i \leq x} K \left( \frac{\alpha^{x_i}}{x_i} \right), x = 1, 2, 3, \dots; K = -[\log(1 - \alpha)]^{-1}, 0 < \alpha < 1 \right\}$$

ve kesikli dikdörtgen olasılık dağılımlar ailesi (DR)

$$\mathfrak{F}_{DR} = \left\{ F : F(x; \gamma, \beta) = \sum_{x_i \leq x} (k+1)^{-1}, x = \gamma, \gamma + \beta, \dots, \gamma + k\beta \right\}$$

olsun.

$\mathcal{U} = \mathfrak{F}_{LS} \cup \mathfrak{F}_{DR}$  logaritmik seriler olasılık dağılımları ailesi ile kesikli dikdörtgen olasılık dağılımlar ailesinin birleşimini ifade eden yeni bir aile tanımlansın. Burada,

$$\{c_i\}_{i=1}^k \in C = \left\{ \{c_i\}_{i=1}^h \mid h \in \mathbb{Z}^+; c_i > 0, \forall i = 1, \dots, h; \sum_{i=1}^h c_i = 1 \right\}$$

olmak üzere  $\mathcal{U} = \mathfrak{F}_{LS} \cup \mathfrak{F}_{DR}$  'nun tüm sonlu karışımlarından oluşmuş  $\mathcal{K}_{\mathcal{U}}$  sınıfı,

$$\mathcal{K}_{\mathcal{U}} = \left\{ H_{\mathcal{U}} \mid \exists \{c_i\}_{i=1}^k \in C, \exists F_1, \dots, F_k \in \mathfrak{F} : H(\cdot) = \sum_{i=1}^k c_i F_i(\cdot), F(\cdot) \in \mathcal{U}, \mathcal{U} = \mathfrak{F}_{LS} \cup \mathfrak{F}_{DR} \right\}$$

olsun.  $\mathcal{U}$ 'nun  $\mathcal{K}_{\mathcal{U}}$ 'ya ait tüm sonlu  $H_{\mathcal{U}}$  karışım dağılımlarına *LSDR olasılıksal karışım modelleri* denilsin.

**Teorem 3.12:** *LSDR olasılıksal karışım modelleri tanımlanabilir.*

**İspat:** M, X rassal değişkeninin F dağılım fonksiyonunu moment üreten fonksiyonuna dönüştüren bir operatör olsun. Bu operatörün doğrusal olduğu Teorem 3.9'in ispatında verilmiştir.

$$\mathbf{a)} \quad \mathfrak{F}_{LS} = \left\{ F : F(x, \alpha) = \sum_{x_i \leq x} K \left( \frac{\alpha^x}{x} \right), x = 1, 2, 3, \dots; K = -[\log(1-\alpha)]^{-1}, 0 < \alpha < 1 \right\}$$

$F \in \mathfrak{F}_{LS}$  olsun. Dağılım fonksiyonu  $F(x, \alpha)$  olan X rassal değişkeninin moment üreten fonksiyonu bulunur:

$$\varphi_F(t) = E(e^{tx}) = M[F(x, \alpha)]$$

$$\begin{aligned} \varphi_F(t) &= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} K \left( \frac{\alpha^x}{x} \right) \\ &= K \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(\alpha e^t)^x}{x}. \end{aligned}$$

$\alpha e^t = a$  olsun. Bu durumda,

$$\varphi_F(t) = K \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(a)^x}{x}$$

olur.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$  Taylor serisinde  $f(x) = -\log(1-x)$  alınırsa

$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{(a)^x}{x} = -\log(1-a)$  elde edilir. Böylece,  $K = -[\log(1-\alpha)]^{-1}$ , ( $0 < \alpha < 1$ ) olduğu

dikkate alındığında,

$$\varphi_F(t) = K[-\log(1-a)] = -[\log(1-\alpha)]^{-1}[-\log(1-a)]$$

ya da

$$\varphi_F(t) = \frac{\log(1-\alpha e^t)}{\log(1-\alpha)}$$

elde edilir.

$S_0(F) = \{t : t \in S(F), \varphi_F(t) \neq 0\}$  kümesini belirlemek amacıyla logaritma

içindeki ifade incelenir ve

$$(1-\alpha e^t) > 0,$$

$$1 > \alpha e^t,$$

$$\alpha^{-1} > e^t,$$

$$-\log \alpha > t,$$

$$t < -\log \alpha$$

elde edilir. Bu durumda  $S_0(F) = \{t : t \in (-\infty, -\log \alpha), \varphi_F(t) \neq 0\}$  olduğu ortaya çıkar.

Tanımlanabilirlik için yeter koşulu ifade eden Atienza-Garcia-Munoz Teoremini uygulamak için,

$F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_{LS}$  olsun ve

$$\varphi_{F_1}(t) = \frac{\log(1-\alpha_1 e^t)}{\log(1-\alpha_1)}, t \in (-\infty, -\log \alpha_1),$$

$$\varphi_{F_2}(t) = \frac{\log(1-\alpha_2 e^t)}{\log(1-\alpha_2)}, t \in (-\infty, -\log \alpha_2)$$

şeklindedir. Burada  $\alpha_2 < \alpha_1$  dir.

Atienza-Garcia-Munoz Teoreminin koşuluna göre,

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]'$$

olmak zorundadır. Başka bir deyişle

$$t(F_1) \in [(-\infty, -\log \alpha_1) \cap (-\infty, -\log \alpha_2)]'$$

ya da

$$t(F_1) \in (-\infty, -\log \alpha_1)'$$

olmak zorundadır. Buradan,

$$t(F_1) = -\log \alpha_1$$

alalım. Teoremin koşulları arasında yerel sıralamanın sağlandığı gösterilsin:

$$\lim_{t \rightarrow -\log \alpha_1} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow -\log \alpha_1} \frac{\frac{\log(1 - \alpha_2 e^t)}{\log(1 - \alpha_2)}}{\frac{\log(1 - \alpha_1 e^t)}{\log(1 - \alpha_1)}} = \frac{\log(1 - \alpha_1)}{\log(1 - \alpha_2)} \lim_{t \rightarrow -\log \alpha_1} \frac{\log(1 - \alpha_2 e^t)}{\log(1 - \alpha_1 e^t)}$$

ya da

$$\lim_{t \rightarrow -\log \alpha_1} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = K \lim_{t \rightarrow -\log \alpha_1} \frac{\log(1 - \alpha_2 e^t)}{\log(1 - \alpha_1 e^t)}.$$

Sonuncu limitte, L'Hospital kuralı uygulanır:

$$\begin{aligned} K \lim_{t \rightarrow -\log \alpha_1} \frac{\log(1 - \alpha_2 e^t)}{\log(1 - \alpha_1 e^t)} &= K \lim_{t \rightarrow -\log \alpha_1} \frac{\frac{-\alpha_2 e^t}{1 - \alpha_2 e^t}}{\frac{-\alpha_1 e^t}{1 - \alpha_1 e^t}} \\ &= K \lim_{t \rightarrow -\log \alpha_1} \frac{\alpha_2 (1 - \alpha_1 e^t)}{\alpha_1 (1 - \alpha_2 e^t)}. \end{aligned}$$

$\alpha_2 < \alpha_1$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow -\log \alpha_1} \frac{\alpha_2 (1 - \alpha_1 e^t)}{\alpha_1 (1 - \alpha_2 e^t)} = 0$  sağlanır. Dolayısıyla,



$$\lim_{t \rightarrow -\log \alpha_1} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = 0$$

olur ve  $F_1 \prec F_2$  yerel sıralaması sağlanır. Teoremin koşulları sağlandığından,  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_{LS}$  olduğunda  $H_u$  tanımlanabilir.

$$\mathbf{b)} \mathfrak{F}_{DR} = \left\{ F : F(x; \gamma, \beta) = \sum_{x_i \leq X} (k+1)^{-1}, x = \gamma, \gamma + \beta, \dots, \gamma + k\beta \right\}$$

$F \in \mathfrak{F}_{DR}$  olsun. Dağılım fonksiyonu  $F(x; \gamma, \beta)$  olan X rassal değişkeninin moment üreten fonksiyonu:

$$\varphi_F(t) = E(e^{tx}) = M[F(x; \gamma, \beta)].$$

olur. Buradan,

$$\varphi_F(t) = \sum_{x=\gamma}^{\gamma+k\beta} e^{tx} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k e^{t(\gamma+i\beta)} = \frac{1}{k+1} e^{t\gamma} \sum_{i=0}^k e^{t\beta i}$$

elde edilir.

$$\sum_{i=0}^k e^{t\beta i} \text{ bir geometrik seri olduğu için, } \sum_{i=0}^k e^{t\beta i} = \frac{1 - e^{\beta t(k+1)}}{1 - e^{\beta t}} \text{ 'dır. Sonuncu ifade}$$

$\varphi_F(t)$  'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \varphi_F(t) &= \frac{1}{k+1} e^{t\gamma} \frac{(1 - e^{\beta t(k+1)})(-1)}{(1 - e^{\beta t})(-1)} \\ &= \frac{e^{t\gamma} (e^{\beta t(k+1)} - 1)}{(k+1)(e^{\beta t} - 1)}, \end{aligned}$$

ya da

$$\varphi_F(t) = (k+1)^{-1} e^{t\gamma} (e^{\beta t(k+1)} - 1)(e^{\beta t} - 1)^{-1}$$

bulunur.  $\varphi_F(t)$  moment üreten fonksiyonun tanım bölgesi  $t \in (-\infty, \infty)$  ve

$$S_0(F) = \{t : t \in (-\infty, \infty), \varphi_F(t) \neq 0\}$$

şeklinde elde edilir.

$F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_{DR}$  olduğunda, başka bir deyişle dağılım fonksiyonlarının her birinin  $\mathfrak{F}_{DR}$  'ye ait olduğu durumda yerel sıralamanın sağlandığı gösterilsin. Burada

$$\varphi_{F_1}(t) = (k+1)^{-1} e^{t\gamma_1} \left( e^{\beta_1 t(k+1)} - 1 \right) \left( e^{\beta_1 t} - 1 \right)^{-1}$$

ve

$$\varphi_{F_2}(t) = (k+1)^{-1} e^{t\gamma_2} \left( e^{\beta_2 t(k+1)} - 1 \right) \left( e^{\beta_2 t} - 1 \right)^{-1}$$

olsun.

$t(F) = +\infty$  için,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^{-1} e^{t\gamma_2} \left( e^{\beta_2 t(k+1)} - 1 \right) \left( e^{\beta_2 t} - 1 \right)^{-1}}{(k+1)^{-1} e^{t\gamma_1} \left( e^{\beta_1 t(k+1)} - 1 \right) \left( e^{\beta_1 t} - 1 \right)^{-1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( e^{\gamma_2 - \gamma_1} \right)^t \frac{\left( e^{\beta_2 t(k+1)} - 1 \right) \left( e^{\beta_1 t} - 1 \right)}{\left( e^{\beta_1 t(k+1)} - 1 \right) \left( e^{\beta_2 t} - 1 \right)} \end{aligned}$$

bulunur.  $\gamma_1 > \gamma_2, \beta_1 = \beta_2$  ya da  $\gamma_1 = \gamma_2, \beta_1 < \beta_2$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = 0$  elde edilir

ve teoremin koşulları sağlanır, dolayısıyla  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_{DR}$  olduğunda  $H_u$  tanımlanabilir.

$$\mathbf{c) } \mathfrak{F}_{DR} = \left\{ F : F(x; \gamma, \beta) = \sum_{x_i \leq x} (k+1)^{-1}, x = \gamma, \gamma + \beta, \dots, \gamma + k\beta \right\}$$

ve

$$\mathfrak{F}_{LS} = \left\{ F : F(x, \alpha) = \sum_{x_i \leq x} K \left( \frac{\alpha^x}{x} \right), x = 1, 2, 3, \dots; K = -[\log(1-\alpha)]^{-1}, 0 < \alpha < 1 \right\}$$

olsun.

$F_1 \in \mathfrak{F}_{DR}$ ,  $F_2 \in \mathfrak{F}_{LS}$  olduğunda, başka bir deyişle dağılım fonksiyonları farklı parametrik ailelere ait olduğunda yerel sıralamanın sağlandığı gösterilsin.

**b)**'den

$$\varphi_{F_1}(t) = (k+1)^{-1} e^{t\gamma} \left( e^{\beta t(k+1)} - 1 \right) \left( e^{\beta t} - 1 \right)^{-1}, S_0(F_1) = \{t : t \in (-\infty, \infty), \varphi_{F_1}(t) \neq 0\},$$

$$\text{ve a)'dan, } \varphi_{F_2}(t) = \frac{\log(1 - \alpha e^t)}{\log(1 - \alpha)}, S_0(F_2) = \{t : t \in (-\infty, -\log \alpha), \varphi_{F_2}(t) \neq 0\}$$

elde edilmiştir.

Teoremin başka bir koşuluna göre,

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]'$$

ya da

$$t(F_1) \in ((-\infty, \infty) \cap (-\infty, -\log \alpha))'$$

olur. Buradan,

$$t(F_1) \in (-\infty, -\log \alpha)'$$

koşulunu sağlayan  $t(F_1)$ 'in var olması gerekmektedir.

$t(F_1) = -\infty$  şeklinde seçilsin. Yerel sıralamanın sağlandığını göstermek amacıyla aşağıdaki limit hesaplanır:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\log(1 - \alpha e^t)}{\log(1 - \alpha)}}{(k+1)^{-1} e^{t\gamma} \left( e^{\beta t(k+1)} - 1 \right) \left( e^{\beta t} - 1 \right)^{-1}} \\ &= \frac{(k+1)}{\log(1 - \alpha)} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\left[ \log(1 - \alpha e^t) \right] \left( e^{\beta t} - 1 \right)}{e^{t\gamma} \left( e^{\beta t(k+1)} - 1 \right)} \\ &= \frac{(k+1)}{\log(1 - \alpha)} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\left( e^{\beta t} - 1 \right)}{\left( e^{\beta t(k+1)} - 1 \right)} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\log(1 - \alpha e^t)}{e^{t\gamma}}. \end{aligned}$$

Burada,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\log(1 - \alpha e^t)}{e^{t\gamma}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-\alpha e^t}{\gamma e^{t\gamma}} = -\frac{\alpha}{\gamma} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{(1-\gamma)t}}{1 - \alpha e^t}$$

olur.

$$0 < \gamma < 1 \text{ olduğunda } \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{(1-\gamma)t}}{1 - \alpha e^t} = 0, \text{ dolayısıyla, } \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = 0 \text{ sağlanır ve}$$

$F_1 \prec F_2$  yerel sıralamanın sağlandığı belirlenir. Başka bir deyişle teoremin koşulları sağlanır, dolayısıyla  $F_1 \in \mathfrak{F}_{DR}$ ,  $F_2 \in \mathfrak{F}_{LS}$  olduğunda  $H_u$  tanımlanabilir.

$$\mathbf{d)} \mathfrak{F}_{LS} = \left\{ F : F(x, \alpha) = \sum_{x_i \leq x} K \left( \frac{\alpha^{x_i}}{x_i} \right), x = 1, 2, 3, \dots; K = -[\log(1 - \alpha)]^{-1}, 0 < \alpha < 1 \right\},$$

$$\mathfrak{F}_{DR} = \left\{ F : F(x; \gamma, \beta) = \sum_{x_i \leq x} (k+1)^{-1}, x = \gamma, \gamma + \beta, \dots, \gamma + k\beta \right\},$$

$$F_1 \in \mathfrak{F}_{LS}, F_2 \in \mathfrak{F}_{DR}$$

olsun.

**a)** aşamasından,

$$\varphi_{F_1}(t) = \frac{\log(1 - \alpha e^t)}{\log(1 - \alpha)}, S_0(F_1) = \{t : t \in (-\infty, -\log \alpha), \varphi_{F_1}(t) \neq 0\}$$

ve **b)** aşamasından ise,

$$\varphi_{F_2}(t) = (k+1)^{-1} e^{t\gamma} (e^{\beta t(k+1)} - 1)(e^{\beta t} - 1)^{-1}, S_0(F_2) = \{t : t \in (-\infty, \infty), \varphi_{F_2}(t) \neq 0\}$$

elde edilmiştir.

Atienza-Garcia-Munoz Teoremin başka bir koşulu,

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]',$$

$$t(F_1) \in ((-\infty, -\log \alpha) \cap (-\infty, \infty))'$$

ve  $t(F_1) \in (-\infty, -\log \alpha)'$  şeklinde  $t(F_1)$  noktasının olmasıdır. Böylece,

$$t(F_1) = -\log \alpha$$

alım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\log \alpha} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} &= \lim_{t \rightarrow -\log \alpha} \frac{(k+1)^{-1} e^{t\gamma} (e^{\beta t(k+1)} - 1)(e^{\beta t} - 1)^{-1}}{\log(1 - \alpha e^t)} \\ &= \frac{\log(1 - \alpha)}{(k+1)} \lim_{t \rightarrow -\log \alpha} \frac{e^{t\gamma} (e^{\beta t(k+1)} - 1)}{(\log(1 - \alpha e^t))(e^{\beta t} - 1)} = 0 \end{aligned}$$

olur.  $\lim_{t \rightarrow -\log \alpha} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = 0$  sağlanır, dolayısıyla  $F_1 \in \mathfrak{F}_{LS}$ ,  $F_2 \in \mathfrak{F}_{DR}$  olduğunda  $F_1 \prec F_2$

yerel sıralama sağlanır ve  $H_u$  tanımlanabilir.

**a), b), c) ve d)**'den sonuç olarak  $\mathcal{U} = \mathfrak{F}_{LS} \cup \mathfrak{F}_{DR}$  'nun  $\mathcal{K}_u$  sınıfındaki  $H_u$  tüm sonlu karışımlarının tanımlanabilir olduğu elde edilir. Teorem ispatlandı.  $\square$

### 3.7.2 Üç dağılımlar ailesinin birleşiminden oluşmuş olasılıksal karışım modelleri

Bu alt bölümde, sürekli rassal değişken için tanımlanmış Lognormal, Gamma, Weibull ve MaxEnt Olasılık Dağılımı Ailelerinin üçlü birleşiminden oluşan yeni aileler tanımlanarak, tanımlanan ailelerin sonlu karışım dağılımlarının tanımlanabilir olduğu ispatlanmıştır. Bu amaçla, Tanım 3.2'de bu alt bölümde dikkate alınacak olasılık dağılımları ailelerinin tanımı verilmektedir.

**Tanım 3.2:**  $\mathfrak{F}_L = \left\{ F : F(x; \mu, \sigma) = \int_0^x \frac{\exp\left\{-\frac{(\log u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}{\sqrt{2\pi\sigma}u} du \right\}$  kümesine sürekli

rassal X değişkenin Lognormal Olasılık Dağılımlar Ailesi (L),

$\mathfrak{F}_G = \left\{ F : F(x; a, b) = \int_0^x \frac{b^{-a}}{\Gamma(a)} u^{a-1} e^{(-u/b)} du, a, b > 0, x > 0 \right\}$  kümesine sürekli rassal

X değişkenin Gamma Dağılımlar Ailesi (G),

$\mathfrak{F}_W = \left\{ F : F(x; c, d) = \int_0^x \frac{c}{d^c} u^{c-1} e^{(-u^c/d^c)} du, c, d > 0, x > 0 \right\}$  kümesine sürekli rassal

X değişkenin Weibull Dağılımlar Ailesi (W),

$\mathfrak{F}_E = \left\{ F : F(x; \mu) = \int_0^x K e^{-\mu u} du, x > 0, \mu \in \mathfrak{R} \right\}$  kümesine sürekli rassal X değişkenin

bir parametrelili MaxEnt Olasılık Dağılımlar Ailesi (E) denilsin.

Burada,

$$\int_0^x \frac{\exp\left\{-\frac{(\log u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}{\sqrt{2\pi\sigma u}} du = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\log x - \mu}{\sqrt{2\sigma}}} e^{-t^2} dt,$$

$$\int_0^x \frac{b^{-a}}{\Gamma(a)} u^{a-1} e^{(-u/b)} du = \frac{\int_0^{\frac{x}{b}} u^{a-1} e^{-u} du}{\Gamma(a)},$$

$$\int_0^x \frac{c}{d^c} u^{c-1} e^{(-u^c/d^c)} du = 1 - e^{-\frac{x^c}{d^c}},$$

$$\int_0^x K e^{-\mu u} du = \frac{K}{\mu} (1 - e^{-\mu x})$$

biçimindedir.

### 3.7.3 LGE olasılıksal karışım modelleri

$\mathcal{U}_1 = \mathfrak{F}_L \cup \mathfrak{F}_G \cup \mathfrak{F}_E$  Lognormal, Gamma ve bir parametrelili sürekli MaxEnt Olasılık Dağılımları Ailelerinin birleşimini ifade eden bir aile olarak tanımlanır.

**Tanım 3.3:**  $\{c_i\}_{i=1}^k \in C = \left\{ \{c_i\}_{i=1}^h \mid h \in \mathbb{Z}^+; c_i > 0, \forall i = 1, \dots, h; \sum_{i=1}^h c_i = 1 \right\}$  olmak üzere

$\mathcal{U}_1 = \mathfrak{F}_L \cup \mathfrak{F}_G \cup \mathfrak{F}_E$  'in tüm sonlu karışımlarından oluşmuş  $\mathcal{K}_{\mathcal{U}_1}$  sınıfı,

$$\mathcal{H}_{\mathcal{U}} = \left\{ H_{\mathcal{U}} \mid \exists \{c_i\}_{i=1}^k \in C, \exists F_1, \dots, F_k \in \mathfrak{F} : H_{\mathcal{U}}(\cdot) = \sum_{i=1}^k c_i F_i(\cdot), F(\cdot) \in \mathcal{U}, \mathcal{U} = \mathfrak{F}_L \cup \mathfrak{F}_G \cup \mathfrak{F}_E \right\}$$

olsun.  $\mathcal{U}$ 'in  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ 'ya ait tüm sonlu  $H_{\mathcal{U}}$  karışım dağılımlarına *LGE olasılıksal karışım modelleri* denilsin.

**Teorem 3.13:** *LGE olasılıksal karışım modelleri tanımlanabilir.*

**İspat:** a)  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_L$  olduğunda  $H_{\mathcal{U}}$ 'nun tanımlanabilir olduğunu ispatlayalım.

Burada,

$$\mathfrak{F}_L = \left\{ F : F(x; \mu, \sigma) = \int_0^x \frac{\exp\left\{-\frac{(\log u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}{\sqrt{2\pi\sigma}u} du \right\},$$

$$F \in \mathfrak{F}_L$$

olsun.  $M$ ,  $\log X$ 'in  $F$  dağılım fonksiyonunu moment üreten fonksiyonuna dönüştüren bir doğrusal operatör olsun:

$$M[F(x; \mu, \sigma)] = E\left(e^{t \log x}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t \log x} dF(x; \mu, \sigma)$$

Öncelikle,  $F(x; \mu, \sigma)$ 'nin  $\log X$ 'in moment üreten fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$M[F(x; \mu, \sigma)] = E\left(e^{t \log x}\right),$$

$$\varphi_F(t) = E\left(e^{t \log x}\right) = M[F]$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t \log x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}x} e^{-(\log x - \mu)^2 / 2\sigma^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{-1} e^{t \log x - \frac{1}{2\sigma^2}(\log x - \mu)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{-1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[-2t\sigma^2 \log x + \log^2 x - 2\mu \log x + \mu^2]} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{-1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\log^2 x - 2(\log x)(t\sigma^2 + \mu) + \mu^2]} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{-1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \left[ (\log x) - (t\sigma^2 + \mu) \right]^2 - (t\sigma^2 + \mu)^2 + \mu^2 \right\}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{-1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[ (\log x) - (t\sigma^2 + \mu) \right]^2} e^{\frac{1}{2\sigma^2} (t\sigma^2 + \mu)^2} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{1}{2\sigma^2} (t^2\sigma^4 + 2t\mu\sigma^2 + \mu^2 - \mu^2)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{-1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[ (\log x) - (t\sigma^2 + \mu) \right]^2} dx.
\end{aligned}$$

Böylece,

$$\varphi_F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{t^2\sigma^2}{2} + t\mu} \int_{-\infty}^{\infty} x^{-1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[ (\log x) - (t\sigma^2 + \mu) \right]^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{t^2\sigma^2}{2} + t\mu} I, \quad (3.71)$$

elde edilir. Burada

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x^{-1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[ (\log x) - (t\sigma^2 + \mu) \right]^2} dx$$

biçimindedir. (3.71) integralini hesaplamak için,

$$y = \frac{1}{2\sigma^2} \left[ (\log x) - (t\sigma^2 + \mu) \right]^2$$

değişken değiştirmesi uygulanır. Bu durumda,

$$\sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \left[ (\log x) - (t\sigma^2 + \mu) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \left[ (\log x) - t\sigma^2 - \mu \right],$$

$$\sqrt{2y}\sigma + t\sigma^2 + \mu = \log x$$

ve

$$x = e^{\sqrt{2y}\sigma + t\sigma^2 + \mu}; \quad dx = \left( \frac{\sqrt{2}\sigma}{2} y^{-1/2} \right) e^{\sqrt{2y}\sigma + t\sigma^2 + \mu} dy$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{\sqrt{2y}\sigma + t\sigma^2 + \mu} \right]^{-1} e^{-y} \left( \frac{\sqrt{2}\sigma}{2} y^{-1/2} \right) e^{\sqrt{2y}\sigma + t\sigma^2 + \mu} dy \\
&= \frac{\sqrt{2}\sigma}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y} y^{-1/2} dy \right\} = \frac{\sqrt{2}\sigma}{2} \left\{ 2 \int_0^{\infty} e^{-y} y^{-1/2} dy \right\}
\end{aligned}$$



$$= \sqrt{2\sigma}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\sigma}\sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi\sigma}$$

bulunur. Sonuncu değer (3.71)'de yerine yazılırsa,

$$\varphi_F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2} + t\mu} \sqrt{2\pi\sigma},$$

ya da

$$\varphi_F(t) = e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2} + t\mu}$$

elde edilir. Böylece  $\log X$ 'in moment üreten fonksiyonu bulunur. Bu fonksiyonun tanım kümesi  $t \in (-\infty, \infty)$ 'dir.

Atienza-Garcia-Munoz Teoremini uygulamak amacıyla,

$S_0(F) = \{t : t \in (-\infty, \infty), \varphi_F(t) \neq 0\}$  kümesini ele alınsın.

$F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_L$  olsun:

$$\varphi_{F_1}(t) = e^{-\frac{t^2\sigma_1^2}{2} + t\mu_1}, S_0(F_1) = \{t : t \in (-\infty, \infty), \varphi_{F_1}(t) \neq 0\},$$

$$\varphi_{F_2}(t) = e^{-\frac{t^2\sigma_2^2}{2} + t\mu_2}, S(F_2) = \{t : t \in (-\infty, \infty), \varphi_{F_2}(t) \neq 0\}.$$

Buradan,

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]',$$

$$t(F_1) \in [(-\infty, \infty) \cap (-\infty, \infty)]',$$

$$t(F_1) \in [(-\infty, \infty)]'$$

yazılabilir.  $t(F_1) = \infty$  seçilebilir. Sonra, yerel sıralamanın sağlandığı gösterilsin:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{t^2\sigma_2^2}{2} + t\mu_2}}{e^{-\frac{t^2\sigma_1^2}{2} + t\mu_1}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(\mu_2 - \mu_1) + \frac{t^2}{2}(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}$$

$\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 = \sigma_2$  yada  $\mu_1 = \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = 0$  sağlanır.

Atienza-Garcia-Munoz Teoreminin koşulları sağlandığından ve  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_L$  olduğundan  $F_1 < F_2$  'dir;  $\mathcal{H}_{u_i}$  'ya ait tüm  $H_{u_i}$  karışımları tanımlanabilir.

**b)**  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_G$  olduğunda  $H_{u_i}$  'nun tanımlanabilirliği incelenmeli. Bu durumda,

$$\mathfrak{F}_G = \left\{ F : F(x; a, b) = \int_0^x \frac{b^{-a}}{\Gamma(a)} u^{a-1} e^{(-u/b)} du = \frac{\gamma\left(a, \frac{x}{b}\right)}{\Gamma(a)}, a, b > 0, x > 0 \right\}$$

ve

$$F \in \mathfrak{F}_G$$

olsun.

M, X rassal değişkeninin F dağılım fonksiyonunu moment üreten fonksiyonuna dönüştüren bir operatör olsun. Bu operatörün doğrusal olduğu Teorem 3.8'in ispatında verilmiştir:

$$\begin{aligned} \varphi_F(t) &= E\left[e^{t \log x}\right] = M\left[F(x; a, b)\right] \\ &= \int_0^{\infty} e^{t \log x} \frac{b^{-a}}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{(-x/b)} dx \\ &= \frac{b^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{\log x^t} x^{a-1} e^{(-x/b)} dx \\ &= \frac{b^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} x^t x^{a-1} e^{(-x/b)} dx \\ &= \frac{b^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} x^{(t+a-1)} e^{(-x/b)} dx. \end{aligned}$$

Sonucu integrali hesaplamak için,  $x/b = y$  değişken değiştirme yapılır. Bu durumda,

$$x = by; \quad dx = bdy \text{ şeklindedir ve}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_F(t) &= \frac{b^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} (by)^{(t+a-1)} e^{-y} b dy \\
&= \frac{b^{-a} b^{t+a-1} b}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} y^{t+a-1} e^{-y} dy \\
&= \frac{b^t}{\Gamma(a)} \Gamma(t+a), \\
&= \frac{b^t}{\Gamma(a)} \Gamma(t+a)
\end{aligned}$$

ve

$$S_0(F) = \{t : t \in (-a, \infty), \varphi_F(t) \neq 0\}$$

elde edilir. Şimdi tanımlanabilirlik teoremi ile ilgili koşulların sağlandığına dikkat edilmelidir.

$F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_G$  olsun:

$$\varphi_{F_1}(t) = \frac{b_1^t}{\Gamma(a_1)} \Gamma(t+a_1), S_0(F_1) = \{t : t \in (-a_1, \infty), \varphi_{F_1}(t) \neq 0\},$$

$$\varphi_{F_2}(t) = \frac{b_2^t}{\Gamma(a_2)} \Gamma(t+a_2), S(F_2) = \{t : t \in (-a_2, \infty), \varphi_{F_2}(t) \neq 0\}.$$

Tanıma göre,

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]',$$

$$t(F_1) \in [(-a_1, \infty) \cap (-a_2, \infty)]'$$

olur. Bu durumda,

$$t(F_1) \in [(-a_1, \infty)]'$$

olduğundan

$$t(F_1) = \infty \text{ seçilsin. Böylece,}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_2^t}{\Gamma(a_2)} \Gamma(t+a_2)}{\frac{b_1^t}{\Gamma(a_1)} \Gamma(t+a_1)} = \frac{\Gamma(a_1)}{\Gamma(a_2)} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{b_2}{b_1} \right)^t \frac{\Gamma(t+a_2)}{\Gamma(t+a_1)}$$

elde edilir.

Stirling formülüne göre (Spira, 1971),

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi x} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \quad (3.72)$$

ve

$$\frac{\Gamma(t+a_2)}{\Gamma(t+a_1)} \sim \frac{\sqrt{2\pi} (t+a_2) \left(t+a_2-\frac{1}{2}\right) e^{-(t+a_2)}}{\sqrt{2\pi} (t+a_1) \left(t+a_1-\frac{1}{2}\right) e^{-(t+a_1)}}$$

olur. Buradan,

$$\left( \frac{b_2}{b_1} \right)^t \frac{\Gamma(t+a_2)}{\Gamma(t+a_1)} \sim \left( \frac{b_2}{b_1} \right)^t \frac{(t+a_2) \left(t+a_2-\frac{1}{2}\right) e^{-(t+a_2)}}{(t+a_1) \left(t+a_1-\frac{1}{2}\right) e^{-(t+a_1)}}$$

yazılabilir.

$$f(t) = \left( \frac{b_2}{b_1} \right)^t \frac{(t+a_2) \left(t+a_2-\frac{1}{2}\right) e^{-(t+a_2)}}{(t+a_1) \left(t+a_1-\frac{1}{2}\right) e^{-(t+a_1)}} \text{ olsun.}$$

ve

$$\psi(t) = \ln f(t)$$

olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= t \ln \frac{b_2}{b_1} + \left(t+a_2-\frac{1}{2}\right) \ln(t+a_2) - \left(t+a_1-\frac{1}{2}\right) \ln(t+a_1) - (t+a_2-t-a_1) \\ &= t \ln \frac{b_2}{b_1} + t \ln(t+a_2) + \left(a_2-\frac{1}{2}\right) \ln(t+a_2) - t \ln(t+a_1) + \left(a_1-\frac{1}{2}\right) \ln(t+a_1) + a_1 - a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t \ln \frac{b_2}{b_1} + t \{ \ln(t+a_2) - \ln(t+a_1) \} + \left( a_2 - \frac{1}{2} \right) \ln(t+a_2) + \left( a_1 - \frac{1}{2} \right) \ln(t+a_1) + a_1 - a_2 \\
&= t \ln \frac{b_2}{b_1} + t \left\{ \ln \frac{(t+a_2)}{(t+a_1)} \right\} + \left( a_2 - \frac{1}{2} \right) \ln(t+a_2) + \left( a_1 - \frac{1}{2} \right) \ln(t+a_1) + a_1 - a_2
\end{aligned}$$

bulunur. Son ifadeden limit alınırrsa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln \frac{b_2}{b_1} + \lim_{t \rightarrow \infty} t \left\{ \ln \frac{(t+a_2)}{(t+a_1)} \right\} + \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left( a_2 - \frac{1}{2} \right) \ln(t+a_2) + \left( a_1 - \frac{1}{2} \right) \ln(t+a_1) \right\} + a_1 - a_2$$

olur. Burada her bir limiti ayrı ayrı inceleyelim.

(i)  $b_2 < b_1$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \ln \frac{b_2}{b_1} = -\infty$  olur.

(ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \left\{ \ln \frac{(t+a_2)}{(t+a_1)} \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{(t+a_2)}{(t+a_1)}}{\frac{1}{t}}$ , dir.

L'Hospital kuralı uygulanırsa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{(t+a_2)}{(t+a_1)}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{t+a_1}{t+a_2} \right) \left\{ \frac{(t+a_1) - (t+a_2)}{(t+a_1)^2} \right\}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{t^2}{(t+a_2)(t+a_1)} (a_1 - a_2)$$

elde edilir. Son ifadede pay ve payda  $t^2$ 'ye bölünürse,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{\frac{t^2}{t^2}}{\frac{(t+a_2)(t+a_1)}{t^2}} (a_1 - a_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{\frac{t^2 + t(a_1+a_2) + a_1a_2}{t^2}} (a_1 - a_2)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{1 + \frac{(a_1+a_2)}{t} + \frac{a_1a_2}{t^2}} (a_1 - a_2) = a_2 - a_1,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \left\{ \ln \frac{(t+a_2)}{(t+a_1)} \right\} = a_2 - a_1$$

elde edilir.

$$(iii) \quad a_1, a_2 < \frac{1}{2} \text{ olduğunda, } \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left( a_2 - \frac{1}{2} \right) \ln(t + a_2) + \left( a_1 - \frac{1}{2} \right) \ln(t + a_1) \right\} = -\infty$$

olur.

(i),(ii) ve (iii)'den,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t \left\{ \ln \frac{(t + a_2)}{(t + a_1)} \right\} + \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left( a_2 - \frac{1}{2} \right) \ln(t + a_2) + \left( a_1 - \frac{1}{2} \right) \ln(t + a_1) \right\} + a_1 - a_2$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = -\infty$$

elde edilir.

$$\psi(t) = \ln f(t) \text{ olduğu hatırlanırsa, } \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = -\infty \text{ ve } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0 \text{ olduğu}$$

görülür. Böylece,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \frac{\Gamma(a_1)}{\Gamma(a_2)} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{b_2}{b_1} \right)^t \frac{\Gamma(t + a_2)}{\Gamma(t + a_1)} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$b_2 \leq b_1, \quad a_1, a_2 < \frac{1}{2}$$

koşulları altında  $F_1 \prec F_2$  sağlanır. Böylece,  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}_1}$ 'ya ait tüm  $H_{\mathcal{U}_1}$  karışımları tanımlanabilir.

**c)**  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_E$  olduğunda  $H_{\mathcal{U}_1}$ 'nin tanımlanabilirliği Teorem 3.9'un ispatında incelenmiştir.

**d)**  $F_1 \in \mathfrak{F}_L; F_2 \in (\mathfrak{F}_G \cup \mathfrak{F}_E)$  olduğunda  $H_{\mathcal{U}_1}$ 'nin tanımlanabilirliğini inceleyelim.

**d1)**  $F_1 \in \mathfrak{F}_L; F_2 \in \mathfrak{F}_G$  olsun:

$$\varphi_{F_1}(t) = e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2} + t\mu}, \quad S_0(F_1) = \{t : t \in (-\infty, \infty), \varphi_{F_1}(t) \neq 0\},$$

$$\varphi_{F_2}(t) = \frac{b^t}{\Gamma(a)} \Gamma(t + a), \quad S(F_2) = \{t : t \in (-a, \infty), \varphi_{F_2}(t) \neq 0\}.$$

Burada,

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]',$$

$$t(F_1) \in [(-\infty, \infty) \cap (-a, \infty)]'$$

olduğu için

$$t(F_1) \in (-a, \infty)'$$

olur ve  $t(F_1) = \infty$  olarak seçilebilir.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{b^t}{\Gamma(a)} \Gamma(t+a)}{\frac{t^{2\sigma^2} + t\mu}{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}}} = \frac{1}{\Gamma(a)} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{b}{e^\mu} \right)^t \frac{\Gamma(t+a)}{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}}$$

incelenmelidir.

(3.72)'den yararlanarak,

$$\Gamma(t+a) \sim \sqrt{2\pi} (t+a)^{t+a-\frac{1}{2}} e^{-(t+a)}$$

ve buradan,

$$\left( \frac{b}{e^\mu} \right)^t \frac{\Gamma(t+a)}{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}} \sim \left( \frac{b}{e^\mu} \right)^t \frac{\sqrt{2\pi} (t+a)^{t+a-\frac{1}{2}} e^{-(t+a)}}{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}}$$

yazılabilir.

$$f(t) = \left( \frac{b}{e^\mu} \right)^t \frac{\sqrt{2\pi} (t+a)^{t+a-\frac{1}{2}} e^{-(t+a)}}{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}}$$

ve

$$\psi(t) = \ln f(t)$$

olsun. Buna göre,

$$\psi(t) = t \ln \left( \frac{b}{e^\mu} \right) + \left( t+a-\frac{1}{2} \right) \ln(t+a) - \left( t+a+\frac{t^2\sigma^2}{2} \right) + \ln \sqrt{2\pi}$$

elde edilir.  $\ln x < x$  olduğundan,

$$\psi(t) < t \ln \left( \frac{b}{e^\mu} \right) + \left( t+a-\frac{1}{2} \right) (t+a) - \left( t+a+\frac{t^2\sigma^2}{2} \right) + \ln \sqrt{2\pi}$$

$$\begin{aligned}
&= t \ln\left(\frac{b}{e^\mu}\right) + t^2 + at + at + a^2 - \frac{t}{2} - \frac{a}{2} - t - a - \frac{t^2 \sigma^2}{2} + \ln \sqrt{2\pi} \\
&= t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right) + t \left(\ln \frac{b}{e^\mu} + 2a - \frac{3}{2}\right) + a^2 - \frac{3a}{2} + \ln \sqrt{2\pi} \\
&= t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right) \left\{ 1 + \frac{t \left(\ln \frac{b}{e^\mu} + 2a - \frac{3}{2}\right)}{t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)} + \frac{a^2 - \frac{3a}{2} + \ln \sqrt{2\pi}}{t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)} \right\} \\
&= t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right) \left\{ 1 + \frac{\left(\ln \frac{b}{e^\mu} + 2a - \frac{3}{2}\right)}{t \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)} + \frac{a^2 - \frac{3a}{2} + \ln \sqrt{2\pi}}{t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Son ifadeden limit alınırsa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right) \left\{ 1 + \frac{\left(\ln \frac{b}{e^\mu} + 2a - \frac{3}{2}\right)}{t \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)} + \frac{a^2 - \frac{3a}{2} + \ln \sqrt{2\pi}}{t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)} \right\}.$$

$$\leq \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right) \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{\left(\ln \frac{b}{e^\mu} + 2a - \frac{3}{2}\right)}{t \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)} + \frac{a^2 - \frac{3a}{2} + \ln \sqrt{2\pi}}{t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)} \right\}$$

$$\text{olur. Burada } \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{\left(\ln \frac{b}{e^\mu} + 2a - \frac{3}{2}\right)}{t \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)} + \frac{a^2 - \frac{3a}{2} + \ln \sqrt{2\pi}}{t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)} \right\} = 1$$

yazılabilir.

$1 - \frac{\sigma^2}{2} < 0$  olursa, başka bir deyişle  $\sigma^2 > 2$  olursa,



$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \left( 1 - \frac{\sigma^2}{2} \right) = -\infty$$

olur. Böylece,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = -\infty$$

elde edilir.  $\psi(t) = \ln f(t)$  olduğu hatırlanırsa,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = -\infty$  olduğuna göre

$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  olduğu görülür. Böylece,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \frac{1}{\Gamma(a)} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{b}{e^\mu} \right)^t \frac{\Gamma(t+a)}{e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}}} = 0$$

elde edilir. Bunun sonucunda,  $\sigma^2 > 2$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = 0$  ve  $F_1 \prec F_2$  sağlanır.

Böylece,  $\mathcal{H}_u$  'ya ait tüm  $H_u$  karışımları tanımlanabilir.

**d2)**  $F_1 \in \mathfrak{F}_L; F_2 \in \mathfrak{F}_E$  olduğunda  $H_u$  'nın tanımlanabilirliğini incelemelidir. Bu durumda,

$$\varphi_{F_1}(t) = e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2} + t\mu},$$

$$S_0(F_1) = \{t : t \in (-\infty, \infty), \varphi_{F_1}(t) \neq 0\}$$

olsun.  $F_2 \in \mathfrak{F}_E$  için F fonksiyonu için  $\log X$ 'in moment üreten fonksiyonu,

$$\varphi_{F_2}(t) = E(e^{t \log x}) = \int_0^\infty e^{t \log x} K e^{-\tilde{\mu}x} dx = K \int_0^\infty x^t e^{-\tilde{\mu}x} dx$$

yazılabilir.  $\tilde{\mu}x = y$  değişken değiştirme uygulanırsa  $x = \frac{1}{\tilde{\mu}}y$  olduğunda  $dx = \frac{1}{\tilde{\mu}}dy$

ve

$$\varphi_{F_2}(t) = K \int_0^\infty \left( \frac{1}{\tilde{\mu}}y \right)^t e^{-y} \frac{1}{\tilde{\mu}} dy = K \left( \frac{1}{\tilde{\mu}} \right)^{t+1} \int_0^\infty y^t e^{-y} dy$$

ya da

$$\varphi_{F_2}(t) = K \left( \frac{1}{\tilde{\mu}} \right)^{t+1} \Gamma(t+1)$$

olur. Burada

$$S(F_2) = \{t : t \in (-1, \infty), \varphi_{F_2}(t) \neq 0\},$$

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]',$$

$$t(F_1) \in (-1, \infty)'$$

olduğu için  $t(F_1) = \infty$  seçilebilir.

Şimdi yerel sıralamanın diğer koşulunun sağlandığını göstermek için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = K \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\tilde{\mu}} \right)^{t+1} \frac{\Gamma(t+1)}{e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2} + t\mu}}$$

incelenmelidir. (3.72)'den,

$$\Gamma(t+1) \sim \sqrt{2\pi} (t+1)^{(t+1)-\frac{1}{2}} e^{-(t+1)}$$

yazılabilir ve

$$\left( \frac{1}{\tilde{\mu}} \right)^{t+1} \frac{\Gamma(t+1)}{e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2} + t\mu}} \sim \left( \frac{1}{\tilde{\mu}} \right)^{t+1} \frac{\sqrt{2\pi} (t+1)^{(t+1)-\frac{1}{2}} e^{-(t+1)}}{e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2} + t\mu}}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$f(t) = \left( \frac{1}{\tilde{\mu}} \right)^{t+1} \frac{\sqrt{2\pi} (t+1)^{(t+1)-\frac{1}{2}} e^{-(t+1)}}{e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2} + t\mu}}$$

ve

$$\psi(t) = \ln f(t)$$

olsun. Bu durumda,

$$\psi(t) = -(t+1) \ln \tilde{\mu} + \ln \sqrt{2\pi} + \left( t + \frac{1}{2} \right) \ln(t+1) - \left( t + 1 + \frac{t^2 \sigma^2}{2} + t\mu \right)$$

elde edilir.  $\ln x < x$  olduğundan,

$$\begin{aligned}
\psi(t) &< -(t+1) \ln \tilde{\mu} + \ln \sqrt{2\pi} + \left(t + \frac{1}{2}\right)(t+1) - \left(t+1 + \frac{t^2 \sigma^2}{2} + t\mu\right) \\
&= -t \ln \tilde{\mu} - \ln \tilde{\mu} + \ln \sqrt{2\pi} + t^2 + t + \frac{t}{2} + \frac{1}{2} - t - 1 - \frac{t^2 \sigma^2}{2} - t\mu \\
&= t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right) + t \left\{-\ln \tilde{\mu} + \frac{1}{2} - \mu\right\} - \ln \tilde{\mu} + \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \\
&= t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right) \left\{1 + \frac{t \left\{-\ln \tilde{\mu} + \frac{1}{2} - \mu\right\}}{t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)} + \frac{\ln \sqrt{2\pi} - \ln \tilde{\mu} - \frac{1}{2}}{t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)}\right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Son ifadeden limit alınırsa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right) \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{1 + \frac{\left\{-\ln \tilde{\mu} + \frac{1}{2} - \mu\right\}}{t \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)} + \frac{\ln \sqrt{2\pi} - \ln \tilde{\mu} - \frac{1}{2}}{t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)}\right\}$$

yazılabilir. Burada

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{1 + \frac{\left\{-\ln \tilde{\mu} + \frac{1}{2} - \mu\right\}}{t \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)} + \frac{\ln \sqrt{2\pi} - \ln \tilde{\mu} - \frac{1}{2}}{t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)}\right\} = 1$$

sağlanır.  $\sigma^2 > 2$  olursa  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right) = -\infty$  elde edilir. Bu durumda,

$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = -\infty$  olduğuna göre,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  olduğu görülmektedir.

$\sigma^2 > 2$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = 0$  ve  $F_1 \prec F_2$  sağlanır. Böylece,  $H_{u_1}$

karışımları tanımlanabilir.

e)  $H_{u_1}$ 'in tanımlanabilirliğini inceleyelim.

e1)  $F_1 \in \mathfrak{F}_G; F_2 \in \mathfrak{F}_E$  olsun:

$$\varphi_{F_1}(t) = \frac{b^t}{\Gamma(a)} \Gamma(t+a), S_0(F_1) = \{t : t \in (-a, \infty), \varphi_{F_1}(t) \neq 0\},$$

$$\varphi_{F_2}(t) = K \left( \frac{1}{\tilde{\mu}} \right)^{t+1} \Gamma(t+1), S(F_2) = \{t : t \in (-1, \infty), \varphi_{F_2}(t) \neq 0\}.$$

Burada

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]',$$

$$t(F_1) \in [(-a, \infty) \cap (-1, \infty)]'$$

olduğu için,

$$t(F_1) = \infty$$

seçilebilir.

Yerel sıralamanın diğer koşulunun da sağlandığını göstermek gerekir.

Öncelikle,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K \left( \frac{1}{\tilde{\mu}} \right)^{t+1} \Gamma(t+1)}{\frac{b^t}{\Gamma(a)} \Gamma(t+a)} = \frac{K}{\tilde{\mu}} \Gamma(a) \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\tilde{\mu}b} \right)^t \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+a)}$$

incelenmesi gerekir. (3.72)'ye göre,

$$\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+a)} \sim \frac{\sqrt{2\pi} (t+1)^{(t+1)-\frac{1}{2}} e^{-(t+1)}}{\sqrt{2\pi} (t+a)^{(t+a)-\frac{1}{2}} e^{-(t+a)}}$$

olur. Buradan,

$$\left( \frac{1}{\tilde{\mu}b} \right)^t \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+a)} \sim \left( \frac{1}{\tilde{\mu}b} \right)^t \frac{(t+1)^{t+\frac{1}{2}} e^{-(t+1)}}{(t+a)^{(t+a-\frac{1}{2})} e^{-(t+a)}}$$

yazılabilir.

$$f(t) = \left( \frac{1}{\tilde{\mu}b} \right)^t \frac{(t+1)^{t+\frac{1}{2}} e^{-(t+1)}}{(t+a)^{(t+a-\frac{1}{2})} e^{-(t+a)}}$$

ve

$$\psi(t) = \ln f(t)$$

olsun. Bu durumda,

$$\psi(t) = -t \ln \tilde{\mu}b + \left(t + \frac{1}{2}\right) \ln(t+1) - \left(t + a - \frac{1}{2}\right) \ln(t+a) - (t+1-t-a)$$

elde edilir. Düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= -t \ln \tilde{\mu}b + t \ln(t+1) + \frac{1}{2} \ln(t+1) - t \ln(t+a) + \frac{1}{2} \ln(t+a) - a \ln(t+a) + a - 1; \\ &= -t \ln \tilde{\mu}b + t \left\{ \ln \frac{(t+1)}{(t+a)} \right\} + \frac{1}{2} \ln(t+1) + \left(\frac{1}{2} - a\right) \ln(t+a) + a - 1 \end{aligned}$$

elde edilir.  $\ln x < x$  olduğundan,

$$\begin{aligned} \psi(t) &< -t \ln \tilde{\mu}b + t \left\{ \ln \frac{(t+1)}{(t+a)} \right\} + \frac{1}{2}(t+1) + \left(\frac{1}{2} - a\right) \ln(t+a) + a - 1 \\ &= -t \ln \tilde{\mu}b + t \left\{ \ln \frac{(t+1)}{(t+a)} \right\} + \frac{t}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - a\right) \ln(t+a) + a - 1 \\ &= \frac{t}{2}(1 - 2 \ln \tilde{\mu}b) + t \left\{ \ln \frac{(t+1)}{(t+a)} \right\} + \left(\frac{1}{2} - a\right) \ln(t+a) + a - 1 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

yazılabilir. Son ifadeden limit alınır,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{2}(1 - 2 \ln \tilde{\mu}b) + \lim_{t \rightarrow \infty} t \left\{ \ln \frac{(t+1)}{(t+a)} \right\} + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - a\right) \ln(t+a) + a - 1 + \frac{1}{2}$$

elde edilir.

(i)  $\tilde{\mu}b > 1$  ise,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{2}(1 - 2 \ln \tilde{\mu}b) = -\infty$  'dur.

(ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \left\{ \ln \frac{(t+1)}{(t+a)} \right\}$  ifadesi  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left\{ \ln \frac{(t+1)}{(t+a)} \right\}}{\frac{1}{t}}$  şeklinde yazılabilir. Burada  $\frac{0}{0}$

belirsizliği söz konusu olduğundan L'Hospital kuralı uygulanabilir. Böylece,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left\{ \ln \frac{(t+1)}{(t+a)} \right\}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{(t+a)(t+a) - (t+1)}{(t+1)(t+a)^2}}{-\frac{1}{t^2}};$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{a-1}{(t+1)(t+a)}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} -t^2 \frac{a-1}{t^2 + (a+1)t + a}$$

olur. Burada, pay ve payda  $t^2$ 'ye bölünürse,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{a-1}{1 + \frac{(a+1)}{t} + \frac{a}{t^2}} = 1-a$$

elde edilir ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \left\{ \ln \frac{(t+1)}{(t+a)} \right\} = 1-a$$

bulunur.

(iii)  $a > \frac{1}{2}$  ise  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} - a \right) \ln(t+a) = -\infty$  olur.

(i), (ii) ve (iii)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{2} (1 - 2 \ln \tilde{\mu} b) + \lim_{t \rightarrow \infty} t \left\{ \ln \frac{(t+1)}{(t+a)} \right\} + \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} - a \right) \ln(t+a) + a - 1 + \frac{1}{2}$$

ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = -\infty$$

elde edilir.

$\psi(t) = \ln f(t)$  olduğu hatırlanırsa,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = -\infty$  olduğuna göre  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ 'dır.

Bu durumda,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \frac{K}{\tilde{\mu}} \Gamma(a) \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\tilde{\mu} b} \right)^t \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+a)} = 0.$$

olur. Böylece,  $\tilde{\mu}b > 1$  ve  $a > \frac{1}{2}$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = 0$  sağlandığı tespit edilir

ve  $F_1 \prec F_2$  sağlanır. Bu durumda,  $H_{u_i}$  karışımları tanımlanabilir.

**e2)**  $F_1 \in \mathfrak{F}_E$ ;  $F_2 \in \mathfrak{F}_G$  olsun:

$$\varphi_{F_1}(t) = K \left( \frac{1}{\tilde{\mu}} \right)^{t+1} \Gamma(t+1), \quad S_0(F_1) = \{t : t \in (-1, \infty), \varphi_{F_1}(t) \neq 0\},$$

$$\varphi_{F_2}(t) = \frac{b^t}{\Gamma(a)} \Gamma(t+a), \quad S(F_2) = \{t : t \in (-a, \infty), \varphi_{F_2}(t) \neq 0\}.$$

Burada

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]'$$

ya da

$$t(F_1) \in [(-1, \infty) \cap (-a, \infty)]'$$

olduğu için  $t(F_1) = \infty$  seçilebilir. Bu durumda

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{b^t}{\Gamma(a)} \Gamma(t+a)}{K \left( \frac{1}{\tilde{\mu}} \right)^{t+1} \Gamma(t+1)} = \frac{\tilde{\mu}}{K\Gamma(a)} \lim_{t \rightarrow \infty} (b\tilde{\mu})^t \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+1)}$$

incelemek gerekir. Burada, (3.72)'yi kullanarak,

$$\frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+1)} \sim \frac{\sqrt{2\pi} (t+a)^{(t+a)-\frac{1}{2}} e^{-(t+a)}}{\sqrt{2\pi} (t+1)^{(t+1)-\frac{1}{2}} e^{-(t+1)}}$$

olur. Bu durumda,

$$(b\tilde{\mu})^t \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+1)} \sim (b\tilde{\mu})^t \frac{(t+a)^{\left(t+a-\frac{1}{2}\right)} e^{-(t+a)}}{(t+1)^{\left(t+\frac{1}{2}\right)} e^{-(t+1)}}$$

yazılabilir.

$$f(t) = (b\tilde{\mu})^t \frac{(t+a)^{\left(t+a-\frac{1}{2}\right)} e^{-(t+a)}}{(t+1)^{\left(t+\frac{1}{2}\right)} e^{-(t+1)}}$$

olsun ve  $\psi(t) = \ln f(t)$  alınsın. Böylece,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= t \ln(b\tilde{\mu}) + \left(t+a-\frac{1}{2}\right) \ln(t+a) - \left(t+\frac{1}{2}\right) \ln(t+1) - (t+a-t-1) \\ &= t \ln(b\tilde{\mu}) + t \ln(t+a) + \left(a-\frac{1}{2}\right) \ln(t+a) - t \ln(t+1) - \frac{1}{2} \ln(t+1) - a + 1 \\ &= t \ln(b\tilde{\mu}) + t \ln \left\{ \frac{(t+a)}{(t+1)} \right\} + \left(a-\frac{1}{2}\right) \ln(t+a) - \frac{1}{2} \ln(t+1) - a + 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadeden limit alınırsa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln(b\tilde{\mu}) + \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln \left\{ \frac{(t+a)}{(t+1)} \right\} + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(a-\frac{1}{2}\right) \ln(t+a) - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(t+1) - a + 1$$

bulunur.

(i)  $0 < b\tilde{\mu} \leq 1$  olursa,  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \ln(b\tilde{\mu}) = -\infty$  'dur.

$$(ii) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln \left\{ \frac{(t+a)}{(t+1)} \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \left\{ \frac{(t+a)}{(t+1)} \right\}}{\frac{1}{t}} = \frac{0}{0} \quad \text{belirsizliği olduğundan L'Hospital}$$

kuralı uygulanırsa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \left\{ \frac{(t+a)}{(t+1)} \right\}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left[ \frac{t+1}{t+a} \right] \frac{(t+1)-(t+a)}{(t+1)^2}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} -t^2 \frac{1-a}{(t+a)(t+1)}$$

elde edilir. Son ifadede pay ve payda  $t^2$  'ye bölünürse,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1-a}{1 + \frac{(a+1)}{t} + \frac{a}{t^2}} = a-1$$

bulunur. Böylece



$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \ln \left\{ \frac{(t+a)}{(t+1)} \right\} = a-1$$

olur.

$$(iii) \ a < \frac{1}{2} \text{ ise, } \lim_{t \rightarrow \infty} \left( a - \frac{1}{2} \right) \ln(t+a) = -\infty \text{ olur.}$$

$$(iv) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(t+1) = \infty \text{ 'dır}$$

(i)-(iv) ifadeleri dikkate alınarak

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln(b\tilde{\mu}) + \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln \left\{ \frac{(t+a)}{(t+1)} \right\} + \lim_{t \rightarrow \infty} \left( a - \frac{1}{2} \right) \ln(t+a) - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(t+1) - a+1$$

eşitliğinde yerine yazılırsa,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = -\infty$  elde edilir. Buradan da  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  'dır.

Bu durumda,  $0 < b\tilde{\mu} < 1$  ve  $a < \frac{1}{2}$  olduğunda

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \frac{\tilde{\mu}}{K\Gamma(a)} \lim_{t \rightarrow \infty} (b\tilde{\mu})^t \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+1)} = 0$$

elde edilir ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = 0$$

olur. Böylece  $F_1 \prec F_2$  sağlanır ve  $H_{u_i}$  karışımları tanımlanabilir.

(a), (b), (c), (d), (e)'den Teorem 3.13 ispatlandı. □

### 3.7.4 GWE olasılıksal karışım modelleri

$\mathcal{U}_2 = \mathfrak{F}_G \cup \mathfrak{F}_W \cup \mathfrak{F}_E$  Gamma, Weibull ve bir parametrelili sürekli MaxEnt Olasılık Dağılımı Ailelerinin birleşimini ifade eden bir aile olarak tanımlanır.

**Tanım 3.4:**  $\{c_i\}_{i=1}^k \in C = \left\{ \{c_i\}_{i=1}^h \mid h \in \mathbb{Z}^+; c_i > 0, \forall i = 1, \dots, h; \sum_{i=1}^h c_i = 1 \right\}$

olmak üzere  $\mathcal{U}_2 = \mathfrak{F}_G \cup \mathfrak{F}_W \cup \mathfrak{F}_E$  'in tüm sonlu karışımlarından oluşmuş  $\mathcal{K}_{\mathcal{U}_2}$  sınıfı

$$\mathcal{K}_{\mathcal{U}_2} = \left\{ H_{\mathcal{U}_2} \mid \exists \{c_i\}_{i=1}^k \in C, \exists F_1, \dots, F_k \in \mathfrak{F} : H_{\mathcal{U}_2}(\cdot) = \sum_{i=1}^k c_i F_i(\cdot), F(\cdot) \in \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_2 = \mathfrak{F}_G \cup \mathfrak{F}_W \cup \mathfrak{F}_E \right\}$$

olsun.  $\mathcal{U}_2$  'in  $\mathcal{K}_{\mathcal{U}_2}$  'ye ait tüm sonlu  $H_{\mathcal{U}_2}$  karışım dağılımlarına *GWE olasılıksal karışım modelleri* denilsin.

**Teorem 3.14:** *GWE olasılıksal karışım modelleri tanımlanabilir.*

**İspat:** a)  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_G$  olduğunda  $H_{\mathcal{U}_2}$  'nin tanımlanabilir olduğu Teorem 3.13'ün ispatında b) aşamasında ispatlanmıştır.

$$\text{b) } \mathfrak{F}_W = \left\{ F : F(x; c, d) = \int_0^x \frac{c}{d^c} u^{c-1} e^{(-u^c/d^c)} du, c, d > 0, x > 0 \right\} \text{ verilsin.}$$

$F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_W$  olduğunda  $H_{\mathcal{U}_2}$  'nin tanımlanabilirliği incelenmelidir.

$F \in \mathfrak{F}_W$  olsun.

M, X rassal değişkeninin F dağılım fonksiyonunu moment üreten fonksiyonu olsun. Başka bir ifade ile X'in F dağılım fonksiyonuna uygun  $\varphi_F(t)$  fonksiyonunu bulma olanağı sağlayan doğrusal operatör olsun:

$$\begin{aligned} \varphi_F(t) &= E \left[ e^{t \log x} \right] = M \left[ F(x; a, b) \right] \\ &= \int_0^{\infty} e^{t \log x} \frac{c}{d^c} x^{c-1} e^{(-x^c/d^c)} dx \\ &= \frac{c}{d^c} \int_0^{\infty} x^t x^{c-1} e^{(-x^c/d^c)} dx \\ &= \frac{c}{d^c} \int_0^{\infty} x^{t+c-1} e^{(-x^c/d^c)} dx. \end{aligned}$$

Sonuncu integralde

$$x^c / d^c = y$$

değişken değiştirme uygulansın. Bu durumda,

$$x^c = d^c y,$$

$$x = dy^{1/c}$$

$$dx = \frac{d}{c} y^{(1-c)/c} dy,$$

$$\begin{aligned} \varphi_F(t) &= \frac{c}{d^c} \int_0^\infty \left( dy^{1/c} \right)^{t+c-1} e^{-y} \frac{d}{c} y^{(1-c)/c} dy \\ &= \frac{c}{d^c} \int_0^\infty d^{(t+c-1)} y^{\left(\frac{t+c-1}{c}\right)} e^{-y} \frac{d}{c} y^{(1-c)/c} dy \\ &= \frac{c}{d^c} \frac{d^{(t+c)}}{c} \int_0^\infty y^{\frac{t+c-1+1-c}{c}} e^{-y} dy \\ &= d^t \int_0^\infty y^{\frac{t}{c}} e^{-y} dy \\ &= d^t \Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right) \end{aligned}$$

ya da

$$\varphi_F(t) = d^t \Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)$$

olur.

$S_0(F)$ 'nin tanımına göre,  $S_0(F) = \{t : t \in (-c, \infty), \varphi_F(t) \neq 0\}$ 'dir. Yerel sıralama için gereken koşullar belirlenmelidir.

$F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_W$  olsun:

$$\varphi_{F_1}(t) = d_1^t \Gamma\left(\frac{t}{c_1} + 1\right), \quad S_0(F_1) = \{t : t \in (-c_1, \infty), \varphi_{F_1}(t) \neq 0\},$$

$$\varphi_{F_2}(t) = d_2^t \Gamma\left(\frac{t}{c_2} + 1\right), \quad S(F_2) = \{t : t \in (-c_2, \infty), \varphi_{F_2}(t) \neq 0\}.$$

Burada

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]',$$

$$t(F_1) \in [(-c_1, \infty) \cap (-c_2, \infty)]'$$

olur.  $c_1 < c_2$  olsun. Bu durumda,  $t(F_1) \in [(-c_1, \infty)]'$  dir. Böylece,  $t(F_1) = \infty$  seçilebilir. Bu durumda

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d_2^t \Gamma\left(\frac{t}{c_2} + 1\right)}{d_1^t \Gamma\left(\frac{t}{c_1} + 1\right)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^t \frac{\Gamma\left(\frac{t}{c_2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{t}{c_1} + 1\right)}$$

incelenmelidir. (3.72)'ye göre,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{t}{c_2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{t}{c_1} + 1\right)} \sim \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{t}{c_2} + 1\right)^{\left(\frac{t}{c_2} + 1\right) - \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{t}{c_2} + 1\right)}}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{t}{c_1} + 1\right)^{\left(\frac{t}{c_1} + 1\right) - \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{t}{c_1} + 1\right)}}$$

olur. Buradan,

$$\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^t \frac{\Gamma\left(\frac{t}{c_2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{t}{c_1} + 1\right)} \sim \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^t \frac{\left(\frac{t}{c_2} + 1\right)^{\left(\frac{t}{c_2} + 1\right) - \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{t}{c_2} + 1\right)}}{\left(\frac{t}{c_1} + 1\right)^{\left(\frac{t}{c_1} + 1\right) - \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{t}{c_1} + 1\right)}}$$

yazılabilir.

$$f(t) = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^t \frac{\left(\frac{t}{c_2} + 1\right)^{\left(\frac{t}{c_2} + 1\right) - \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{t}{c_2} + 1\right)}}{\left(\frac{t}{c_1} + 1\right)^{\left(\frac{t}{c_1} + 1\right) - \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{t}{c_1} + 1\right)}}$$

olsun. Bu durumda  $\psi(t) = \ln f(t)$  incelensin:

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= t \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \left(\frac{t}{c_2} + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{t}{c_2} + 1\right) - \left(\frac{t}{c_1} + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{t}{c_1} + 1\right) - \left(\frac{t}{c_2} + 1 - \frac{t}{c_1} - 1\right) \\
&= t \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \frac{t}{c_2} \ln\left(\frac{t}{c_2} + 1\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{t}{c_2} + 1\right) - \frac{t}{c_1} \ln\left(\frac{t}{c_1} + 1\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{t}{c_1} + 1\right) - t\left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}\right) \\
&= t \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + t \left\{ \frac{1}{c_2} \ln\left(\frac{t}{c_2} + 1\right) - \frac{1}{c_1} \ln\left(\frac{t}{c_1} + 1\right) - \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}\right) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \ln\left(\frac{t}{c_2} + 1\right) - \ln\left(\frac{t}{c_1} + 1\right) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$A = t \left\{ \frac{1}{c_2} \ln\left(\frac{t}{c_2} + 1\right) - \frac{1}{c_1} \ln\left(\frac{t}{c_1} + 1\right) - \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}\right) \right\}$$

ve

$$B = \frac{1}{2} \left\{ \ln\left(\frac{t}{c_2} + 1\right) - \ln\left(\frac{t}{c_1} + 1\right) \right\}$$

olsun.

$\psi(t) = t \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + A + B$  olmak üzere A ve B ayrı ayrı incelenirse,

$$\begin{aligned}
A &= t \left\{ \frac{1}{c_2} \ln\left(\frac{t}{c_2} + 1\right) - \frac{1}{c_1} \ln\left(\frac{t}{c_1} + 1\right) - \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}\right) \right\} \\
&= t \left\{ \frac{1}{c_2} \ln\left[t\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{t}\right)\right] - \frac{1}{c_1} \ln\left[t\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{t}\right)\right] - \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}\right) \right\} \\
&= t \left\{ \frac{1}{c_2} \ln t + \frac{1}{c_2} \ln\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{c_1} \ln t - \frac{1}{c_1} \ln\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_1} \right\} \\
&= t \ln t \left\{ \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} + \frac{\frac{1}{c_2} \ln\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{c_1} \ln\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{t}\right)}{\ln t} - \frac{1}{c_2 \ln t} + \frac{1}{c_1 \ln t} \right\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{2} \left\{ \ln \left( \frac{t}{c_2} + 1 \right) - \ln \left( \frac{t}{c_1} + 1 \right) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{\left( \frac{t}{c_2} + 1 \right)}{\left( \frac{t}{c_1} + 1 \right)} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{t \left( \frac{1}{c_2} + \frac{1}{t} \right)}{t \left( \frac{1}{c_1} + \frac{1}{t} \right)} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{\left( \frac{1}{c_2} + \frac{1}{t} \right)}{\left( \frac{1}{c_1} + \frac{1}{t} \right)} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur.

Böyle A ve B ifadelerini düzenledikten sonra  $\psi(t)$  'de limit alınırsa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ t \ln \left( \frac{d_2}{d_1} \right) + A + B \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln \left( \frac{d_2}{d_1} \right) + \lim_{t \rightarrow \infty} A + \lim_{t \rightarrow \infty} B$$

olur.

(i)  $d_2 < d_1$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \ln \left( \frac{d_2}{d_1} \right) = -\infty$  olur.

$$\begin{aligned}
\text{(ii) } \lim_{t \rightarrow \infty} A &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t \ln t \left\{ \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} + \frac{\frac{1}{c_2} \ln \left( \frac{1}{c_2} + \frac{1}{t} \right)}{\ln t} - \frac{\frac{1}{c_1} \ln \left( \frac{1}{c_1} + \frac{1}{t} \right)}{\ln t} - \frac{1}{c_2 \ln t} + \frac{1}{c_1 \ln t} \right\} \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t \ln t \left( \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} \right) \right] \text{ 'dir.}
\end{aligned}$$

$c_1 < c_2$  ise,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t \ln t \left( \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} \right) \right] = -\infty$  olur. Böylece  $\lim_{t \rightarrow \infty} A = -\infty$  elde edilir.

$$\text{(iii) } \lim_{t \rightarrow \infty} B = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{\left( \frac{1}{c_2} + \frac{1}{t} \right)}{\left( \frac{1}{c_1} + \frac{1}{t} \right)} \right\} = \frac{1}{2} \ln \frac{c_1}{c_2} \text{ 'dir.}$$

(i),(ii) ve (iii)'e göre

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln \left( \frac{d_2}{d_1} \right) + \lim_{t \rightarrow \infty} A + \lim_{t \rightarrow \infty} B = -\infty$$

ya da

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = -\infty$$

olur. Buradan  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  elde edilir. Bunun anlamı ise,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^t \frac{\Gamma \left( \frac{t}{c_2} + 1 \right)}{\Gamma \left( \frac{t}{c_1} + 1 \right)} = 0$$

olmasıdır. Başka bir deyişle,  $c_1 < c_2$ ,  $d_2 \leq d_1$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = 0$  sağlanır ve

dolayısıyla  $F_1 \prec F_2$  sağlanır. Dolayısıyla,  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_W$  olduğunda  $\mathcal{H}\mathcal{U}_2$  'ya ait tüm  $H\mathcal{U}_2$  karışımları tanımlanabilir.

c)  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_E$  olduğunda  $H\mathcal{U}_2$  'ün tanımlanabilir olduğu Teorem 3.8'un ispatında incelenmiştir

d)  $F_1 \in \mathfrak{F}_G$ ,  $F_2 \in \mathfrak{F}_W \cup \mathfrak{F}_E$  olduğunda  $H\mathcal{U}_2$  'ün tanımlanabilirliğini inceleyelim:

**d1)**  $F_1 \in \mathfrak{F}_G$ ,  $F_2 \in \mathfrak{F}_W$  olsun:

$$\varphi_{F_1}(t) = \frac{b^t}{\Gamma(a)} \Gamma(t+a), \quad S_0(F_1) = \{t : t \in (-a, \infty), \varphi_{F_1}(t) \neq 0\},$$

$$\varphi_{F_2}(t) = d^t \Gamma \left( \frac{t}{c} + 1 \right), \quad S(F_2) = \{t : t \in (-c, \infty), \varphi_{F_2}(t) \neq 0\}.$$

Burada

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]'$$

ya da

$$t(F_1) \in [(-a, \infty) \cap (-c, \infty)]'$$

olur.  $t(F_1) = \infty$  seçilsin ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^t \Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)}{\frac{b^t}{\Gamma(a)} \Gamma(t+a)} = \Gamma(a) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{d}{b}\right)^t \frac{\Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)}{\Gamma(t+a)}$$

incelensin. Burada,  $\frac{\Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)}{\Gamma(t+a)}$ 'yi (3.72)'de kullanarak,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)}{\Gamma(t+a)} \sim \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{t}{c} + 1\right)^{\left(\frac{t}{c} + 1\right) - \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{t}{c} + 1\right)}}{\sqrt{2\pi} (t+a)^{(t+a) - \frac{1}{2}} e^{-(t+a)}}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\left(\frac{d}{b}\right)^t \frac{\Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)}{\Gamma(t+a)} \sim \left(\frac{d}{b}\right)^t \frac{\left(\frac{t}{c} + 1\right)^{\left(\frac{t}{c} + 1\right) - \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{t}{c} + 1\right)}}{(t+a)^{(t+a) - \frac{1}{2}} e^{-(t+a)}}$$

elde edilebilir.

$$f(t) = \left(\frac{d}{b}\right)^t \frac{\left(\frac{t}{c} + 1\right)^{\left(\frac{t}{c} + 1\right) - \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{t}{c} + 1\right)}}{(t+a)^{(t+a) - \frac{1}{2}} e^{-(t+a)}}$$

ve

$$\psi(t) = \ln f(t)$$

olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= t \ln\left(\frac{d}{b}\right) + \left(\frac{t}{c} + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{t}{c} + 1\right) - \left(t + a - \frac{1}{2}\right) \ln(t+a) - \left(\frac{t}{c} + 1 - t - a\right) \\ &= t \ln\left(\frac{d}{b}\right) + \frac{t}{c} \ln\left(\frac{t}{c} + 1\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{t}{c} + 1\right) - t \ln(t+a) - \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln(t+a) - t\left(\frac{1}{c} - 1\right) + a - 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= t \ln\left(\frac{d}{b}\right) + t \left\{ \frac{1}{c} \ln\left[t\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{t}\right)\right] + \frac{1}{2t} \ln\left[t\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{t}\right)\right] - \ln\left[t\left(1 + \frac{a}{t}\right)\right] + 1 - \frac{1}{c} \right\} - \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln(t+a) + a - 1 \\
&= t \ln\left(\frac{d}{b}\right) + t \ln t \left\{ \frac{1}{c} + \frac{1}{c \ln t} \ln\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2t} + \frac{1}{2t \ln t} \ln\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{t}\right) - 1 - \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{t}\right)}{\ln t} + \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{c \ln t} \right\} \\
&\quad - \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln(t+a) + a - 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t)$  işlemi dikkate alınmalıdır. Bu amaçla, öncelikle

$\psi(t)$  ifadesi içerisinde  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{t}\right)}{\ln t}$  belirsizliği incelenmelidir:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{t}\right)}{\ln t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(t+a) - \ln t}{\ln t} = \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(t+a)}{\ln t} \right\} - 1 \\
&= \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(t+a)}}{\frac{1}{t}} \right\} - 1 = \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{(t+a)} \right\} - 1 = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln\left(\frac{d}{b}\right) + \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln t \left(\frac{1}{c} - 1\right) - \lim_{t \rightarrow \infty} \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln(t+a) + (a-1).$$

Son ifadedeki limitler ayrı ayrı incelenirse,

(i)  $d < b$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \ln\left(\frac{d}{b}\right) = -\infty$  olur,

(ii)  $c > 1$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \ln t \left(\frac{1}{c} - 1\right) = -\infty$  olur,

(iii)  $a > \frac{1}{2}$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln(t+a) = \infty$  olur,

(i),(ii) ve (iii)'ten  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = -\infty$  ve buradan  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  elde edilir.

Böylece,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \Gamma(a) \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{d}{b} \right)^t \frac{\Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)}{\Gamma(t+a)} = 0$$

ya da

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = 0$$

sağlanır. Dolayısıyla,  $d \leq b$ ,  $c > 1$  ve  $a > \frac{1}{2}$  olduğunda ancak yerel sıralama  $F_1 \prec F_2$

sağlanır. Ancak, bu koşulların neticesinde,  $\mathcal{H}\mathcal{U}_2$  'ya ait tüm  $H\mathcal{U}_2$  karışımları tanımlanabilir

$F_1 \in \mathfrak{F}_W$ ;  $F_2 \in \mathfrak{F}_G$  olsun. Bu durumda,

$$\varphi_{F_1}(t) = d^t \Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right), S_0(F_1) = \{t : t \in (-c, \infty), \varphi_{F_1}(t) \neq 0\},$$

$$\varphi_{F_2}(t) = \frac{b^t}{\Gamma(a)} \Gamma(t+a), S(F_2) = \{t : t \in (-a, \infty), \varphi_{F_2}(t) \neq 0\}$$

olur. Tanıma göre,

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]',$$

$$t(F_1) \in [(-c, \infty) \cap (-a, \infty)]'$$

olduğundan

$$t(F_1) = \infty$$

seçilebilir. Böylece,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{b^t}{\Gamma(a)} \Gamma(t+a)}{d^t \Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)} = \frac{1}{\Gamma(a)} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{b}{d} \right)^t \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)}$$

incelenmelidir. (3.72) formülünden,

$$\frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma\left(\frac{t}{c}+1\right)} \sim \frac{\sqrt{2\pi}(t+a)^{(t+a)-\frac{1}{2}} e^{-(t+a)}}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{t}{c}+1\right)^{\left(\frac{t}{c}+1\right)-\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{t}{c}+1\right)}}$$

elde edilir ve dolayısıyla,

$$\left(\frac{b}{d}\right)^t \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma\left(\frac{t}{c}+1\right)} \sim \left(\frac{b}{d}\right)^t \frac{(t+a)^{\left(t+a-\frac{1}{2}\right)} e^{-(t+a)}}{\left(\frac{t}{c}+1\right)^{\left(\frac{t}{c}+\frac{1}{2}\right)} e^{-\left(\frac{t}{c}+1\right)}}$$

olur.

$$f(t) = \left(\frac{b}{d}\right)^t \frac{(t+a)^{\left(t+a-\frac{1}{2}\right)} e^{-(t+a)}}{\left(\frac{t}{c}+1\right)^{\left(\frac{t}{c}+\frac{1}{2}\right)} e^{-\left(\frac{t}{c}+1\right)}}$$

ve

$$\psi(t) = \ln f(t)$$

olsun:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= t \ln\left(\frac{b}{d}\right) + \left(t+a-\frac{1}{2}\right) \ln(t+a) - \left(\frac{t}{c}+\frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{t}{c}+1\right) - \left(t+a-\frac{t}{c}-1\right) \\ &= t \ln\left(\frac{b}{d}\right) + \left(t+a-\frac{1}{2}\right) \ln(t+a) - \left(\frac{t}{c}+\frac{1}{2}\right) [\ln(t+c) - \ln c] - \left(t+a-\frac{t}{c}-1\right) \\ &= t \ln\left(\frac{b}{d}\right) + \left(t+a-\frac{1}{2}\right) \ln(t+a) - \left(\frac{t}{c}+\frac{1}{2}\right) \ln(t+c) + \left(\frac{t}{c}+\frac{1}{2}\right) \ln c - \left(t+a-\frac{t}{c}-1\right) \\ &= t \ln\left(\frac{b}{d}\right) + \left(t+a-\frac{1}{2}\right) \ln(t+a) \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{t}{c}+\frac{1}{2}\right) \ln(t+c)}{\left(t+a-\frac{1}{2}\right) \ln(t+a)} \right\} - t \left( 1 + \frac{1}{c} - \frac{1}{c} \ln c + \frac{1}{2t} \ln c - \frac{a}{t} - \frac{1}{t} \right). \end{aligned}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t)$  işlemine dönelim.

(i)  $b < d$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \ln\left(\frac{b}{d}\right) = -\infty$  olur.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{t}{c} + \frac{1}{2}\right) \ln(t+c)}{\left(t+a - \frac{1}{2}\right) \ln(t+a)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{2t}\right)}{\left(1 + \frac{a}{t} - \frac{1}{2t}\right)} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(t+c)}{\ln(t+a)} \\ &= \frac{1}{c} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(t+c)}{\ln(t+a)} = \frac{1}{c} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = \frac{1}{c} \end{aligned}$$

elde edilir; böylece

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{t}{c} + \frac{1}{2}\right) \ln(t+c)}{\left(t+a - \frac{1}{2}\right) \ln(t+a)} = \frac{1}{c}$$

olduğundan,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(t+a - \frac{1}{2}\right) \ln(t+a) \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{t}{c} + \frac{1}{2}\right) \ln(t+c)}{\left(t+a - \frac{1}{2}\right) \ln(t+a)} \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(t+a - \frac{1}{2}\right) \ln(t+a) \left(1 - \frac{1}{c}\right)$$

bulunur. Bu durumda  $c < 1$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(t+a - \frac{1}{2}\right) \ln(t+a) \left(1 - \frac{1}{c}\right) = -\infty$  elde edilir.

(iii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \left(1 + \frac{1}{c} - \frac{1}{c} \ln c + \frac{1}{2t} \ln c - \frac{a}{t} - \frac{1}{t}\right) = \infty$  'dır.

$b \leq d$  ve  $c < 1$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = 0$  ve  $F_1 \prec F_2$  sağlanır.  $\mathcal{H}\mathcal{U}_2$  'ya ait

tüm  $H\mathcal{U}_2$  karışımları tanımlanabilir.

**d2)**  $F_1 \in \mathfrak{F}_G$ ,  $F_2 \in \mathfrak{F}_E$  olduğunda  $H_{\mathcal{U}_2}$  'ün tanımlanabilir olduğu Teorem 3.13'ün ispatında **(e1)** aşamasında ispatlanmıştır.

e)  $F_1 \in \mathfrak{F}_W, F_2 \in \mathfrak{F}_E$  olduğunda ve tersine  $F_1 \in \mathfrak{F}_E, F_2 \in \mathfrak{F}_W$  olduğunda  $H_{u_2}$ 'nin tanımlanabilirliğini inceleyelim.

e1)  $F_1 \in \mathfrak{F}_W; F_2 \in \mathfrak{F}_E$  olsun:

$$\varphi_{F_1}(t) = d^t \Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right), \quad S_0(F_1) = \{t : t \in (-c, \infty), \varphi_{F_1}(t) \neq 0\},$$

$$\varphi_{F_2}(t) = K \left(\frac{1}{\tilde{\mu}}\right)^{t+1} \Gamma(t+1), \quad S(F_2) = \{t : t \in (-1, \infty), \varphi_{F_2}(t) \neq 0\}.$$

Tanıma göre,

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]',$$

$$t(F_1) \in [(-c, \infty) \cap (-1, \infty)]'$$

olduğu için

$$t(F_1) = \infty$$

seçilebilir.

Yerel sıralamanın sağlandığını gösteren diğer koşulları da ele alınırsa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K \left(\frac{1}{\tilde{\mu}}\right)^{t+1} \Gamma(t+1)}{d^t \Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)} = \frac{K}{\tilde{\mu}} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}d}\right)^t \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)}$$

incelenmelidir. Burada, (3.72) formülünü kullanarak,

$$\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)} \sim \frac{\sqrt{2\pi} (t+1)^{(t+1)-\frac{1}{2}} e^{-(t+1)}}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{t}{c} + 1\right)^{\left(\frac{t}{c} + 1\right)-\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{t}{c} + 1\right)}}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\left(\frac{1}{\tilde{\mu}d}\right)^t \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)} \sim \left(\frac{1}{\tilde{\mu}d}\right)^t \frac{(t+1)^{\left(t+\frac{1}{2}\right)} e^{-(t+1)}}{\left(\frac{t}{c} + 1\right)^{\left(\frac{t}{c} + \frac{1}{2}\right)} e^{-\left(\frac{t}{c} + 1\right)}}$$

bulunur.

$$f(t) = \left( \frac{1}{\tilde{\mu}d} \right)^t \frac{(t+1)^{\left(\frac{t+1}{2}\right)} e^{-(t+1)}}{\left( \frac{t}{c} + 1 \right)^{\left(\frac{t+1}{2}\right)} e^{-\left(\frac{t}{c} + 1\right)}}$$

ve

$$\psi(t) = \ln f(t)$$

olsun:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= t \ln \frac{1}{\tilde{\mu}d} + \left( t + \frac{1}{2} \right) \ln(t+1) - \left( \frac{t}{c} + \frac{1}{2} \right) \ln \left( \frac{t}{c} + 1 \right) - \left( t + 1 - \frac{t}{c} - 1 \right) \\ &= -t \ln \tilde{\mu}d + t \ln(t+1) + \frac{1}{2} \ln(t+1) - \frac{t}{c} \ln \left( \frac{t}{c} + 1 \right) - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{t}{c} + 1 \right) - t \left( 1 - \frac{1}{c} \right) \\ &= -t \ln \tilde{\mu}d + t \left\{ \ln(t+1) - \frac{1}{c} \ln \left( \frac{t}{c} + 1 \right) - 1 + \frac{1}{c} \right\} + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{(t+1)}{\left( \frac{t}{c} + 1 \right)} \right) \\ &= -t \ln \tilde{\mu}d + t \left\{ \ln \left[ t \left( 1 + \frac{1}{t} \right) \right] - \frac{1}{c} \ln \left[ t \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{t} \right) \right] - 1 + \frac{1}{c} \right\} + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{(t+1)}{\left( \frac{t}{c} + 1 \right)} \right) \\ &= -t \ln \tilde{\mu}d + t \ln t \left\{ 1 + \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right)}{\ln t} - \frac{1}{c} - \frac{\frac{1}{c} \ln \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{t} \right)}{\ln t} - \frac{1}{\ln t} + \frac{1}{c \ln t} \right\} + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{(t+1)}{\left( \frac{t}{c} + 1 \right)} \right). \end{aligned}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t)$  incelemek için öncelikle son ifadede yer alan  $\frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right)}{\ln t}$  belirsizlik

ifadesinin limiti incelenirse,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right)}{\ln t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(t+1) - \ln t}{\ln t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(t+1)}{\ln t} - 1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} - 1 = 0$$

bulunur. Buradan,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -t \ln \tilde{\mu}d + \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln t \left\{ 1 - \frac{1}{c} \right\} + \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \ln \frac{(t+1)}{\left( \frac{t}{c} + 1 \right)} \right)$$

ya da

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -t \ln \tilde{\mu}d + \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln t \left\{ 1 - \frac{1}{c} \right\} + \frac{1}{2}$$

elde edilir.

(i)  $\tilde{\mu}d > 0$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} -t \ln \tilde{\mu}d = -\infty$  olur.

(ii)  $c < 1$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \ln t \left\{ 1 - \frac{1}{c} \right\} = -\infty$  elde edilir.

Böylece, (i) ve (ii)'den görülüyor ki,  $\tilde{\mu}d > 0$  ve  $c < 1$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = 0$  olur

ve  $F_1 \prec F_2$  sağlanır. Böylece,  $H_{u_c}$  tanımlanabilir.

**e2)**  $F_1 \in \mathfrak{F}_E; F_2 \in \mathfrak{F}_W$  olsun.

$$\varphi_{F_1}(t) = K \left( \frac{1}{\tilde{\mu}} \right)^{t+1} \Gamma(t+1), \quad S_0(F_1) = \{t : t \in (-1, \infty), \varphi_{F_1}(t) \neq 0\},$$

$$\varphi_{F_2}(t) = d^t \Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right), \quad S(F_2) = \{t : t \in (-c, \infty), \varphi_{F_2}(t) \neq 0\}.$$

Diğer yandan,

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]',$$

$$t(F_1) \in [(-1, \infty) \cap (-c, \infty)]'$$

olduğu için

$$t(F_1) = \infty \text{ seçilebilir.}$$

Yerel sıralama koşulunu inceleyelim:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^t \Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)}{K \left(\frac{1}{\tilde{\mu}}\right)^{t+1} \Gamma(t+1)} = \frac{\tilde{\mu}}{K} \lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{\mu}d)^t \frac{\Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)}{\Gamma(t+1)}.$$

(3.72)'den,

$$(\tilde{\mu}d)^t \frac{\Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)}{\Gamma(t+1)} \sim (\tilde{\mu}d)^t \frac{\left(\frac{t}{c} + 1\right)^{\left(\frac{t}{c} + 1\right) - \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{t}{c} + 1\right)}}{(t+1)^{\left(t+1\right) - \frac{1}{2}} e^{-(t+1)}}$$

bulunur.

$$f(t) = (\tilde{\mu}d)^t \frac{\left(\frac{t}{c} + 1\right)^{\left(\frac{t}{c} + 1\right) - \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{t}{c} + 1\right)}}{(t+1)^{\left(t+1\right) - \frac{1}{2}} e^{-(t+1)}}$$

olsun. Burada  $\psi(t) = \ln f(t)$  alınırsa,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= t \ln(\tilde{\mu}d) + \left(\frac{t}{c} + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{t}{c} + 1\right) - \left(t + \frac{1}{2}\right) \ln(t+1) - \left(\frac{t}{c} + 1 - t - 1\right) \\ &= t \ln(\tilde{\mu}d) + \frac{t}{c} \ln\left(\frac{t}{c} + 1\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{t}{c} + 1\right) - t \ln(t+1) - \frac{1}{2} \ln(t+1) - t \left(\frac{1}{c} - 1\right) \\ &= t \ln(\tilde{\mu}d) + t \left\{ \frac{1}{c} \ln\left(\frac{t}{c} + 1\right) - \ln(t+1) + 1 - \frac{1}{c} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \ln\left(\frac{t}{c} + 1\right) - \ln(t+1) \right\} \end{aligned}$$

bulunur.

$$A = t \left\{ \frac{1}{c} \ln\left(\frac{t}{c} + 1\right) - \ln(t+1) + 1 - \frac{1}{c} \right\} \text{ ve } B = \frac{1}{2} \left\{ \ln\left(\frac{t}{c} + 1\right) - \ln(t+1) \right\}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\psi(t) = t \ln(\tilde{\mu}d) + A + B$$

olur. Bu ifadeden limit alınırsa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln(\tilde{\mu}d) + \lim_{t \rightarrow \infty} A + \lim_{t \rightarrow \infty} B \text{ olur, burada limitleri ayrı ayrı}$$

inceleyelim.



(i)  $0 < \tilde{\mu}d < 1$  olursa  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \ln(\tilde{\mu}d) = -\infty$  dur.

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad A &= t \left\{ \frac{1}{c} \ln\left(\frac{t}{c} + 1\right) - \ln(t+1) + 1 - \frac{1}{c} \right\} = t \left\{ \frac{1}{c} \ln\left[t\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{t}\right)\right] - \ln\left[t\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right] + 1 - \frac{1}{c} \right\} \\
 &= t \left\{ \frac{1}{c} \ln t + \frac{1}{c} \ln\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{t}\right) - \ln t - \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) + 1 - \frac{1}{c} \right\} \\
 &= t \ln t \left\{ \frac{1}{c} + \frac{\ln\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{t}\right)}{c \ln t} - 1 - \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{\ln t} + \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{c \ln t} \right\},
 \end{aligned}$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t \ln t \left\{ \frac{1}{c} + \frac{\ln\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{t}\right)}{c \ln t} - 1 - \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{\ln t} + \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{c \ln t} \right\} \right]$$

bulunur. Burada,

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{\ln t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{\ln t} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\ln\left(\frac{t+1}{t}\right)}{\ln t} \right] \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\ln(t+1) - \ln t}{\ln t} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\ln(t+1)}{\ln t} + 1 \right]
 \end{aligned}$$

olur. Son ifadeye L'Hospital kuralı uygulanırsa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\ln t + 1}{\ln t} + 1 \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{\frac{t+1}{t}} + 1 \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{\frac{t+1}{t}} + 1 \right] = 0$$

olduğundan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{\ln t} = 0$$

olur.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} A &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t \ln t \left\{ \frac{1}{c} + \frac{\ln\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{t}\right)}{c \ln t} - 1 - \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{\ln t} + \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{c \ln t} \right\} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t \ln t \left( \frac{1}{c} - 1 \right) \right]\end{aligned}$$

elde edilir.

$c > 1$  olursa  $\lim_{t \rightarrow \infty} A = -\infty$  olur.

$$(iii) \quad B = \frac{1}{2} \left\{ \ln\left(\frac{t}{c} + 1\right) - \ln(t+1) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \ln\left(\frac{\frac{t}{c} + 1}{t+1}\right) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \ln\left(\frac{\frac{1}{c} + \frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t}}\right) \right\},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B = -\frac{1}{2} \ln c$$

elde edilir.

(i), (ii) ve (iii) dikkate alındığında,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = -\infty$  elde edilir. Buradan,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0 \text{ alınır.}$$

Böylece,  $0 < \tilde{\mu}d < 1$ ,  $c > 1$  olduğunda,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \Gamma(a) \lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{\mu}d)^t \frac{\Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)}{\Gamma(t+1)} = 0$$

elde edilmiş olur. Bunun sonucunda,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = 0$  ve  $F_1 \prec F_2$  sağlanır. Dolayısıyla,

$H_{u_3}$  tanımlanabilir.

**a), b), c), d), e)**'den Teorem 3.14 ispatlandı.  $\square$

**NOT: d1)** 'e dikkat edilecek olursa  $a=1$  olduğunda bu iki dağılımın aynı dağılımı ifade ettiği belirlenir.

### 3.7.5 LWE olasılıksal karışım modelleri

$\mathcal{U}_3 = \mathfrak{F}_L \cup \mathfrak{F}_W \cup \mathfrak{F}_E$  Lognormal, Weibull ve bir parametrelili sürekli MaxEnt Olasılık Dağılımı Ailelerinin birleşimini ifade eden bir aile olarak tanımlanır.

**Tanım 3.5:**  $\{c_i\}_{i=1}^k \in C = \left\{ \{c_i\}_{i=1}^h \mid h \in \mathbb{Z}^+; c_i > 0, \forall i = 1, \dots, h; \sum_{i=1}^h c_i = 1 \right\}$  olmak

üzere  $\mathcal{U}_3 = \mathfrak{F}_L \cup \mathfrak{F}_W \cup \mathfrak{F}_E$  'in tüm sonlu karışımlarından oluşmuş  $\mathcal{H}\mathcal{U}_3$  sınıfı

$$\mathcal{H}\mathcal{U}_3 = \left\{ H\mathcal{U}_3 \mid \exists \{c_i\}_{i=1}^k \in C, \exists F_1, \dots, F_k \in \mathfrak{F} : H\mathcal{U}_3(\cdot) = \sum_{i=1}^k c_i F_i(\cdot), F(\cdot) \in \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_3 = \mathfrak{F}_L \cup \mathfrak{F}_W \cup \mathfrak{F}_E \right\}$$

olsun.  $\mathcal{U}_3$  'ün  $\mathcal{H}\mathcal{U}_3$  'ya ait tüm sonlu  $H\mathcal{U}_3$  karışım dağılımlarına *LWE olasılıksal karışım modelleri* denilsin.

**Teorem 3.15:** *LWE olasılıksal karışım modelleri tanımlanabilir.*

**İspat:** **a)**  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_L$  olduğunda  $H\mathcal{U}_3$  tanımlanabilir olduğu Teorem 3.13'ün **a)** aşamasında ispatlanmıştır.

**b)**  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_W$  olduğunda  $H\mathcal{U}_3$  tanımlanabilir olduğu Teorem 3.14'in ispatının **b)** aşamasında ispatlanmıştır.

**c)**  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_E$  olduğunda  $H\mathcal{U}_3$  tanımlanabilir olduğu Teorem 3.8'un ispatında incelenmiştir

**d)**  $F_1 \in \mathfrak{F}_L, F_2 \in \mathfrak{F}_W \cup \mathfrak{F}_E$  için  $H\mathcal{U}_3$  tanımlanabilirliğini inceleyelim.

**d1)**  $F_1 \in \mathfrak{F}_L, F_2 \in \mathfrak{F}_W$  olsun:

$$\varphi_{F_1}(t) = e^{-\frac{t^2 \sigma^2}{2} + t\mu}, \quad S_0(F_1) = \{t : t \in (-\infty, \infty), \varphi_{F_1}(t) \neq 0\}$$

ve

$$\varphi_{F_2}(t) = d^t \Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right), \quad S(F_2) = \{t : t \in (-c, \infty), \varphi_{F_2}(t) \neq 0\}.$$

Burada

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap S(F_2)]'$$

ya da

$$t(F_1) \in (-c, \infty)'$$

olduğu için

$$t(F_1) = \infty$$

seçilebilir. Burada,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^t \Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)}{e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2} + t\mu}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{d}{e^\mu}\right)^t \frac{\Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)}{e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}}}$$

incelenmelidir. (3.72)'den yararlanarak,

$$\Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right) \sim \sqrt{2\pi} \left(\frac{t}{c} + 1\right)^{\left(\frac{t}{c} + 1\right) - \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{t}{c} + 1\right)}$$

olur. Böylece,

$$\left(\frac{d}{e^\mu}\right)^t \frac{\Gamma\left(\frac{t}{c} + 1\right)}{e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}}} \sim \left(\frac{d}{e^\mu}\right)^t \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{t}{c} + 1\right)^{\left(\frac{t}{c} + 1\right) - \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{t}{c} + 1\right)}}{e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}}}$$

elde edilir.

$$f(t) = \left(\frac{d}{e^\mu}\right)^t \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{t}{c} + 1\right)^{\left(\frac{t}{c} + 1\right) - \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{t}{c} + 1\right)}}{e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}}}$$

olsun.  $\psi(t) = \ln f(t)$  ise,

$$\psi(t) = t \ln d - t \ln e^\mu + \ln \sqrt{2\pi} + \left(\frac{t}{c} + \frac{1}{2}\right) \ln \left(\frac{t}{c} + 1\right) - \left(\frac{t}{c} + 1 + \frac{t^2 \sigma^2}{2}\right)$$

elde edilir.  $\ln x < x$  olduğundan,

$$\begin{aligned} \psi(t) &< \left(\frac{t}{c} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{t}{c} + 1\right) - \left(\frac{t}{c} + 1 + \frac{t^2 \sigma^2}{2}\right) + t \ln d - t \ln e^\mu + \ln \sqrt{2\pi} \\ &= \frac{t^2}{c^2} + \frac{t}{c} + \frac{t}{2c} + \frac{1}{2} - \left(\frac{t}{c} + 1 + \frac{t^2 \sigma^2}{2}\right) + t \ln d - t \ln e^\mu + \ln \sqrt{2\pi} \\ &= -t^2 \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{c^2} - \frac{1}{2ct}\right) + t \ln d - t \ln e^\mu + \ln \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} -t^2 \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{c^2} - \frac{1}{2ct}\right) + \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln d + \lim_{t \rightarrow \infty} -t \ln e^\mu + \ln \sqrt{2\pi}$$

olur. Burada,

$$i) \lim_{t \rightarrow \infty} -t^2 \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{c^2} - \frac{1}{2ct}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} -t^2 \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{c^2}\right)$$

olur.

$$\sigma^2 > \frac{2}{c^2} \text{ ise}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} -t^2 \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{c^2}\right) = -\infty$$

olur.

$$ii) 0 < d < 1 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln d = -\infty \text{ 'dur.}$$

$$iii) \lim_{t \rightarrow \infty} -t \ln e^\mu = -\infty \text{ 'dur.}$$

i), ii) ve iii)'ten  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = -\infty$  elde edilir. Başka bir deyişle,  $\sigma^2 > \frac{2}{c^2}$ ,

$0 < d \leq 1$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{F_2}(t)}{\varphi_{F_1}(t)} = 0$  ve  $F_1 \prec F_2$  sağlanır. Sonuç olarak,  $\mathcal{K}_{u_3}$  'ya ait

tüm  $H_{u_3}$  karışımları tanımlanabilirlerdir.

**d2)**  $F_1 \in \mathfrak{F}_L$ ,  $F_2 \in \mathfrak{F}_E$  olduğunda  $H_{u_3}$  tanımlanabilir olduğu Teorem 3.13'ün **d2)** aşamasında ispatlanmıştır.

**e1)**  $F_1 \in \mathfrak{F}_W$ ,  $F_2 \in \mathfrak{F}_E$  olduğunda  $H_{u_3}$  tanımlanabilir olduğu Teorem 3.14'in **e1)** ispat aşamasında verilmiştir.

**e2)**  $F_1 \in \mathfrak{F}_E$ ,  $F_2 \in \mathfrak{F}_W$  olduğunda  $H_{u_3}$  tanımlanabilir olduğu Teorem 3.14'in **e2)** ispat aşamasında verilmiştir.

**a), b), c), d), e)**'den Teorem 3.15 ispatlandı.  $\square$

### 3.7.6 Dört dağılımlar ailesinin birleşiminden oluşmuş sonlu karışım dağılımlarının tanımlanabilirliği: LGWE olasılıksal karışım modelleri

Bu alt bölümde Alt Bölüm 3.2.2'de incelenen Lognormal, Gamma, Weibull ve bir parametrelili sürekli MaxEnt Olasılık Dağılımı Ailelerinin birleşiminden oluşan  $\mathcal{U}_4 = \mathfrak{F}_L \cup \mathfrak{F}_G \cup \mathfrak{F}_W \cup \mathfrak{F}_E$  ailesinin tüm sonlu karışımlarından oluşmuş  $H_{u_4}$  karışımlarının tanımlanabilir olması incelenmiştir ve teorem olarak ifade edilmiştir.

**Tanım 3.6:**  $\{c_i\}_{i=1}^k \in C = \left\{ \{c_i\}_{i=1}^h \mid h \in \mathbb{Z}^+; c_i > 0, \forall i = 1, \dots, h; \sum_{i=1}^h c_i = 1 \right\}$

olmak üzere  $\mathcal{U}_4 = \mathfrak{F}_L \cup \mathfrak{F}_G \cup \mathfrak{F}_W \cup \mathfrak{F}_E$  'ün tüm sonlu karışımlarından oluşmuş  $\mathcal{K}\mathcal{U}_4$  sınıfı

$$\mathcal{H}\mathcal{U}_4 = \left\{ H\mathcal{U}_4 \mid \exists \{c_i\}_{i=1}^k \in C, \exists F_1, \dots, F_k \in \mathfrak{F} : H\mathcal{U}_4(\cdot) = \sum_{i=1}^k c_i F_i(\cdot), F(\cdot) \in \mathcal{U}_4, \mathcal{U}_4 = \mathfrak{L} \cup \mathfrak{G} \cup \mathfrak{W} \cup \mathfrak{E} \right\}$$

olsun.  $\mathcal{U}_4$ 'in  $\mathcal{H}\mathcal{U}_4$ 'ya ait tüm sonlu  $H\mathcal{U}_4$  karışım dağılımlarına *LGWE olasılıksal karışım modelleri* denilsin.

**Teorem 3.16:** *LGWE olasılıksal karışım modelleri tanımlanabilir.*

**İspat:** Teorem 3.13–3.15 gereğince ispatlandı.  $\square$

#### 4. OLASILIKSAL KARIŞIM MODELLERİNİN UYGULAMALARI

Olasılıksal dağılımların, kodlama teorisindeki önemi göz ardı edilemeyecek kadar önemlidir (Yolacan, 2005). İletişim teorisinde, pek çok veri sıkıştırma algoritması olasılıksal dağılımları kullanarak tanımlanmıştır (örn: farklı dillerdeki alfabenin olasılıksal dağılımı) (Shamilov&Yolacan, 2007a). Veri sıkıştırma uygulamaları içinde en önemli olanı görüntü sıkıştırma uygulamalarıdır. Kodlama teorisindeki bu araştırmalar doğrultusunda, görüntü sıkıştırma uygulamalarında normal olasılıksal dağılım yerine olasılıksal karışım dağılımlarının önem kazandığı tespit edilmektedir. Buradan hareketli, bu bölümde Bölüm 3'te tanımlanabilirliği ifade edilen parametrik olmayan EOD'nin karışım dağılımı (EODK) görüntü işleme üzerine uygulaması verilmiştir. Uygulama sırasında özellikle dikkat edilmesi gereken husus uygulanacak karışım dağılımının uygulamasına geçmeden önce teoride ifade edilen koşulların sağlanıp sağlanılmadığının kontrol edilmesidir. Aksi halde, uygulamanın doğruluğu hakkında bir garanti verilemez.

Buradan hareketle, bu alt bölümdeki uygulamalar aşağıdaki adımlar göz önünde tutularak yapılmıştır:

**Adım 1:** İlgili problem için veri setinin tanıtılması;İ

**Adım 2:** Problemin çözümü için MATLAB paket programında gerekli kodların yazılması;

**Adım 3:** POEOD'larının elde edilmesi;

**Adım 4:** MinMaxEnt, MaxMaxEnt, MinMinxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarının tespit edilmesi;

**Adım 5:** POEOD'larının olasılıksal karışım modellerinin önerilmesi;

**Adım 6:** Önerilen olasılıksal karışım modelleri için tanımlanabilirlik teoreminin yeter koşullarının kontrol edilmesi;

**Adım 7:** Önerilen olasılıksal karışım modellerinin parametre tahmini;

**Adım 8:** Karşılaştırma ve en iyi uyum sağlayan modelin tespiti.



Adım 7’de kullanılan parametre tahmin yöntemi Alt Bölüm 4.1’de tanıtılmış, Alt Bölüm 4.2-4.3’te iki farklı problem üzerinde belirlenen adımlar izlenerek olasılıksal karışım modellerinin uygulaması gösterilmiştir.

#### 4.1 Maksimum eşitlik ilkesi yardımıyla EODK parametre tahmini

Bu çalışmada önerilen karışım dağılımlarının parametrelerini tahmin etmek için entropi ölçümüne dayalı Maksimum Eşitlik ilkesi kullanılmıştır. Maksimum Eşitlik ilkesinde Shannon’un entropi ölçümü olasılığa göre değil de parametreye göre maksimize edilir. Ayrıca, entropi ölçümü belirsizliğin bir ölçümü gibi değil de eşitliğin bir ölçümü gibi alınmaktadır (Kapur&Kesavan, 1991). Maksimum Eşitlik ilkesinin Maksimum Benzerlik ilkesi ile eşdeğer sonuçlar verdiği normal dağılımın karışım dağılımı üzerinde incelenmiştir. Maksimum Benzerlik ilkesinin karışım dağılımlarının parametre tahmininde kullanılabilirliği önerilmiştir (Shamilov&Yolacan, 2007b). Maksimum eşitlik ilkesine dayalı karışım dağılımının parametre tahmini aşağıdaki işlemlerle gerçekleştirilebilir.  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  ve  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  entropi optimizasyon dağılımları verilsin. Bu dağılımların karışımı  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  olsun. Karışım dağılımının tanımına göre,

$$p_i = c_1 a_i + c_2 b_i; \quad c_1 + c_2 = 1$$

olur. Burada  $c_1, c_2$  karışım dağılımının parametreleridir. Shannon ölçümünün tanımına göre,

$$H(c) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$$

$$H(c) = - \sum_{i=1}^n [c_1 (a_i - b_i) + b_i] \ln [c_1 (a_i - b_i) + b_i]$$

yazılabilir. Buradan  $H'(c_1)$  hesaplanılarak bir dizi işlemler sonucunda

$$H'(c_1) = \ln \prod_{i=1}^n [ec_1(a_i - b_i) + eb_i]^{a_i - b_i}$$

bulunur. Burada  $e$ ,  $\ln$ 'nin tabanıdır. Shannon ölçümünü maksimize eden  $c_1$  parametresini bulmak amacıyla,

$$H'(c_1) = 0$$

eşitliğini sağlayan  $c_1$ ,  $c_2$  parametreleri bulunmalıdır. Buradan,

$$F(c) = \prod_{i=1}^n [ec_1(a_i - b_i) + eb_i]^{a_i - b_i} - 1 = 0,$$

ya da

$$F(c) = 0 \tag{4.1}$$

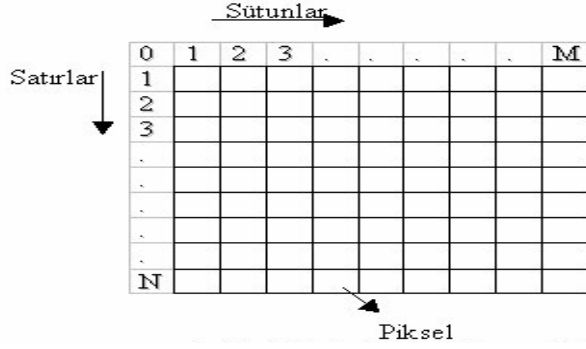
olur. Açık bir çözüme sahip olmadığı için bu çalışmada parametreyi yaklaşık bulmak amacıyla Yarıya Bölme Yöntemi kullanılmıştır.

#### **4.2 Bir görüntü işleme problemi üzerine uygulama**

Mühendislikte, görüntü sıkıştırma uygulamalarında olasılıksal dağılımların önemi bilinmektedir (Hayes, 1996). Buradan hareketle, bu bölümde seçilen bir surat görüntüsü için POEOD'larının olasılıksal karışım modelleri belirlenmiştir ve uygulanabilirliği gösterilmiştir. Bu amaçla öncelikle belirlenen Adım 1 gerçekleştirilmiştir:

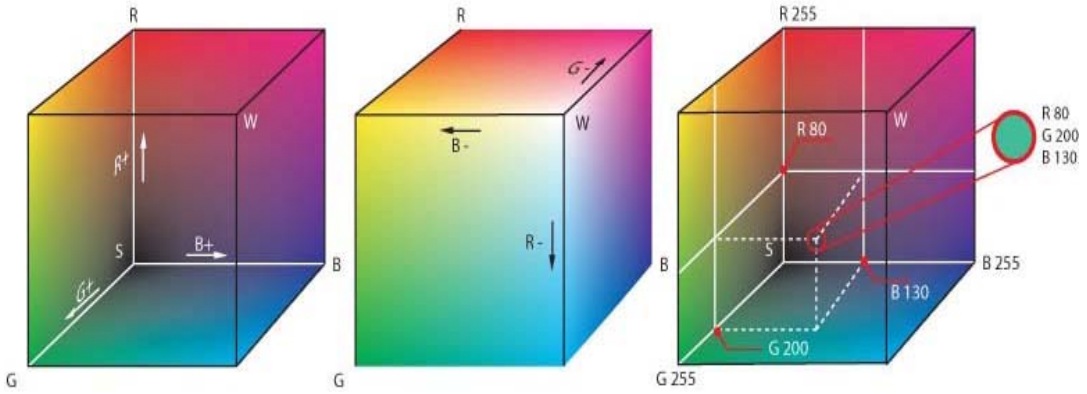
##### ***Adım 1: İlgili problem için veri setinin tanıtılması***

Seçilen bir görüntünün olasılıksal dağılımının belirlenebilmesi için öncelikle söz konusu görüntünün işlenmesi gerekir. Bu amaçla, ele alınan görüntü Şekil 4.1'deki gibi bir matrise benzetilir; burada görüntünün en küçük elemanına piksel denir.



**Şekil 4.1.** Sayısal resmin temel yapısı

Işığı temel alarak, doğadaki tüm renklerin kodları bu üç temel renge referansla belirtilir. Her renk %100 oranında karıştırıldığında beyaz ve %0 oranında karıştırıldığında siyah elde edilir. Bu uzayda, ana renkler olan kırmızı, mavi ve yeşil belirtilmediği için, bu ana renklerin tanımı değiştikçe, tüm renkler değişir. Bu nedenle, her bir piksel RGB renk kodları ile ifade edilebilir. İnternet'te kullanılan renk sistemi Şekil 4.2'de verilen RGB renk sistemidir. Bunun nedeni, 1953'te ilk fotoğraf makinesi Polaroidde ve ondan sonra da televizyonlarda standart kabul edilmiş olmasıdır. RGB renk kodları için en parlak olan nokta için 255 ve en karanlık olan nokta için 0 kodunu atar (Wikipedia, 2007).

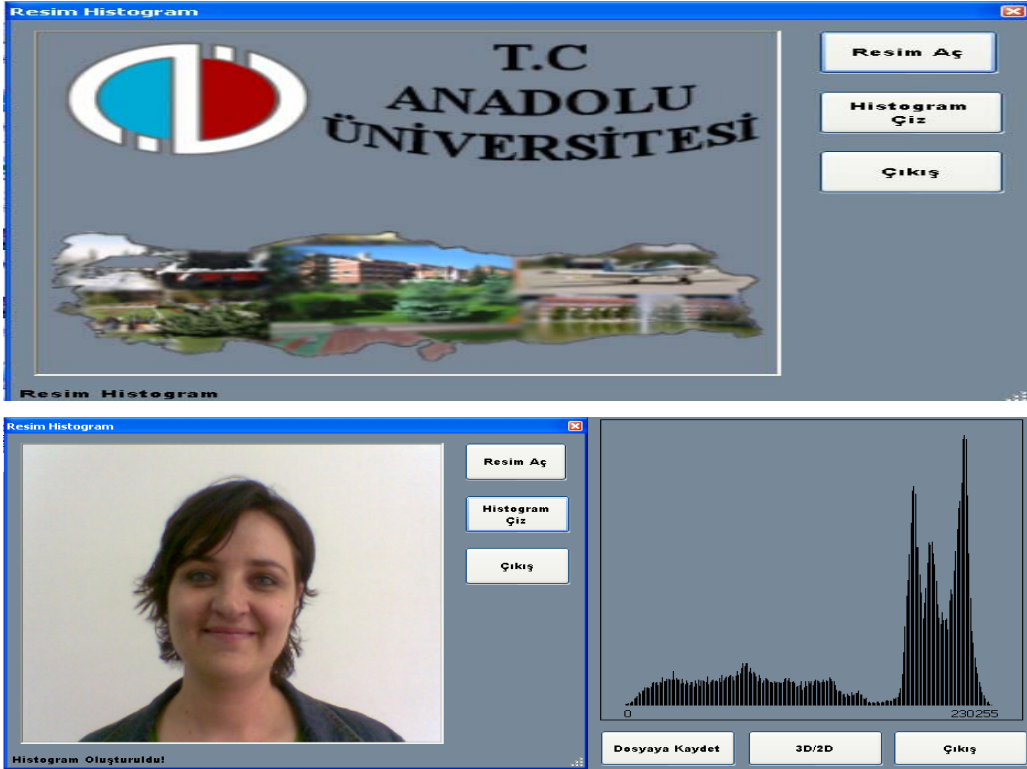


**Şekil 4.2.** RGB renk uzayı

Şekil 4.2'den hareketle her bir görüntünün her bir pikseli (R, G, B) üç boyutlu bir vektörle kodlanabilir. Şekil 4.2'da görülen küpün köşen değerleri görüntünün gri düzey kodlarını belirtir. Bir görüntü, gri düzey değerleri sayesinde tek boyutta işlenebilir. Pek çok görüntü işleme çalışması, kolaylık sağlama nedeniyle aşağıdaki formül yardımıyla gri düzey değerleri üzerinden yapılmıştır (Bourke, 2000):

$$Y = 0.299 R + 0.587 G + 0.114 B.$$

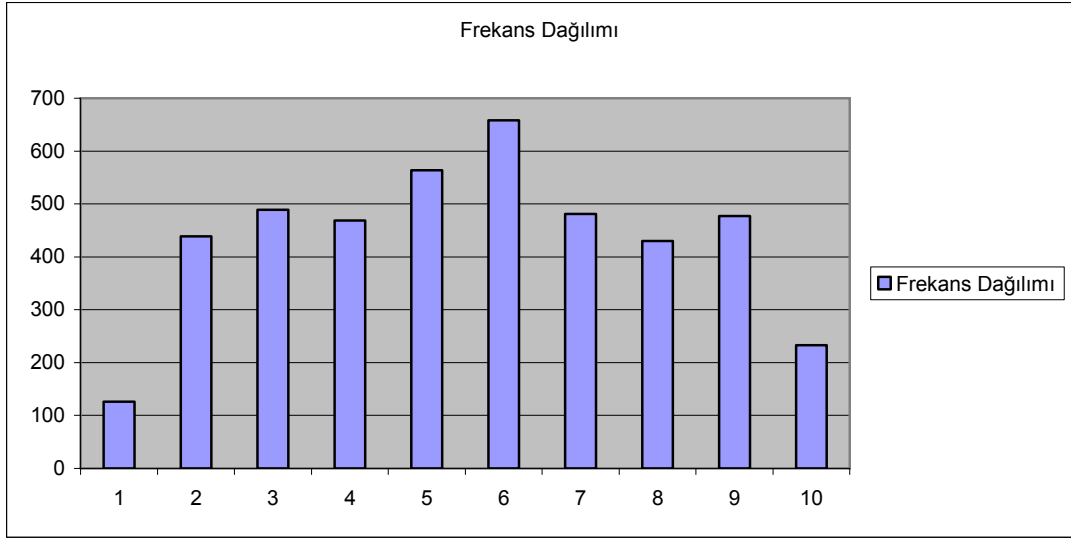
Buradan hareketle, bu çalışmada görüntünün dağılımının elde edilmesi için gri düzey değerleri dikkate alınmıştır. C# programlama dilinde bir görsel program yazılmıştır (EK 2). Yazılan programın çalıştırılması sonucunda görülen ara yüz Şekil 4.3'te gösterilmiştir. Seçilen görüntü 256x256 piksellik alanda incelenmiştir.



Şekil 4.3. Görüntüyü histograma çeviren C# programının ara yüzü ve histogram çizimi

Buradan hareketle, bu program öncelikle <Resim Aç> butonu ile istenilen görüntüyü seçmeye olanak verir ve sonrasında <Histogram Çiz> butonu ile seçilen görüntünün RGB değerlerini dikkate alarak görüntünün sağ yanında görülen histogramı çizer. Ayrıca,<Dosyaya Kaydet> butonu ile görüntüdeki her bir pikselin sahip olduğu gri düzey kodunu bir seri şeklinde ayrı bir dosyaya kaydetmeyi sağlar.

Böylece, bu çalışma için gerekli veri seti elde edilmiş olur. Şekil 4.3'te görülen histogramın sağ yanındaki sivri dağılımın 255'e yakın kod değerlerine sahip olması, bu sivri dağılımın görüntünün arka taraftaki beyaz fondan kaynaklandığını belirtir. Bu durumda arka fonun göz ardı edilmesi ile kişinin sadece yüz görüntüsünün dağılımının elde edilmesi mümkündür. Bu durum göz önüne alınarak, yüz görüntüsünün frekans dağılımı Şekil 4.4'teki gibi elde edilmiştir ve aralık değerleri Çizelge 4.1'de verilmiştir.



**Şekil 4.4.** Ele alınan görüntüdeki yüzün frekans dağılımı

**Çizelge 4.1.** Yüz görüntüsünün frekans dağılımı

<b>Renk aralığı</b>	<b>1-16</b>	<b>17-32</b>	<b>33-48</b>	<b>49-64</b>	<b>65-80</b>
Frekans	126	439	489	469	564
<b>Renk aralığı</b>	<b>81-96</b>	<b>97-112</b>	<b>113-128</b>	<b>129-144</b>	<b>145-160</b>
Frekans	658	481	430	477	233

***Adım 2: Problemin çözümü için MATLAB paket programında gerekli kodların yazılması***

Bu kesimde, Adım 1’de elde edilen görüntünün dağılımını temsil etmesi amacıyla için Alt Bölüm 2.3’te tanımlanan POEOD’larının elde edilmesi amaçlanmıştır. Matlab paket programında söz konusu cihazın hata dağılımı için POEOD’nın elde edilmesi amacıyla gerekli Matlab kodları yazılmıştır ve Ek 2’te verilmiştir. Söz konusu kodlar, MaxEnt ve MinxEnt dağılımlarındaki Langrange çarpanlarını Newton yöntemini kullanarak hesaplamaktadır. Hesaplamalar sırasında, moment vektörler kümesi  $\{x, x^2, \log(x), (\log(x))^2, \log(1+x^2)\}$  atanmış; sonra, bu kümeden 2’li, 3’lü, 4’lü, 5’li ve 6’lı kısıt kombinasyonları dikkate alınarak MaxEnt ve MinxEnt dağılımlarının hesaplanması için işlem kodları yazılmıştır.

***Adım 3: POEOD’larının elde edilmesi***

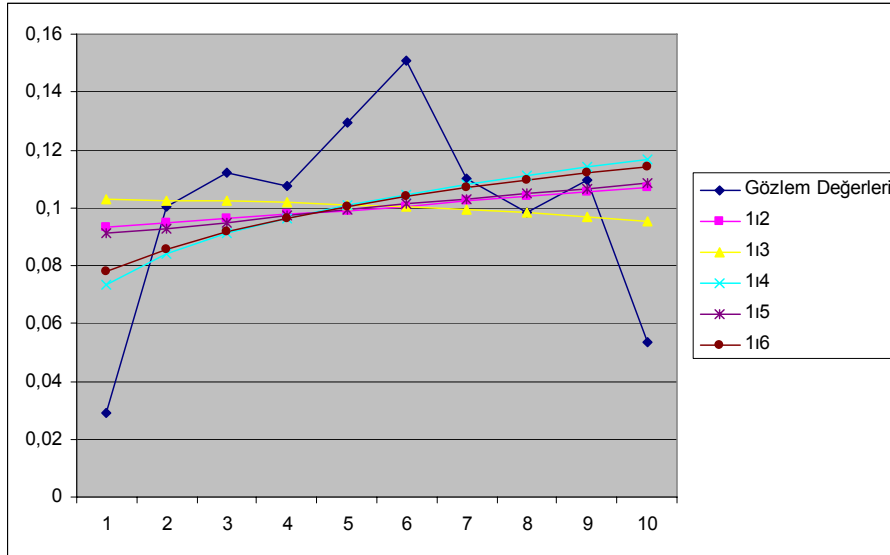
POEOD’larının elde edilmesi için Adım 2’de açıklanan Ek 2’de verilen Matlab kodlarından oluşan m dosyasının çalıştırılması sonucunda Çizelge 4.2-4.6’da verilen MaxEnt dağılımları elde edilmiştir ve dağılımları Şekil 4.5-4.9’da verilmiştir. Burada işaret edilen moment kısıtları,

1.  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$     2.  $x$     3.  $x^2$     4.  $\log(x)$     5.  $(\log(x))^2$     6.  $\log(1+x^2)$

şeklinde belirtilmiştir.

**Çizelge 4.2.** Görüntü dağılımı için iki kısıt altında MaxEnt dağılımları

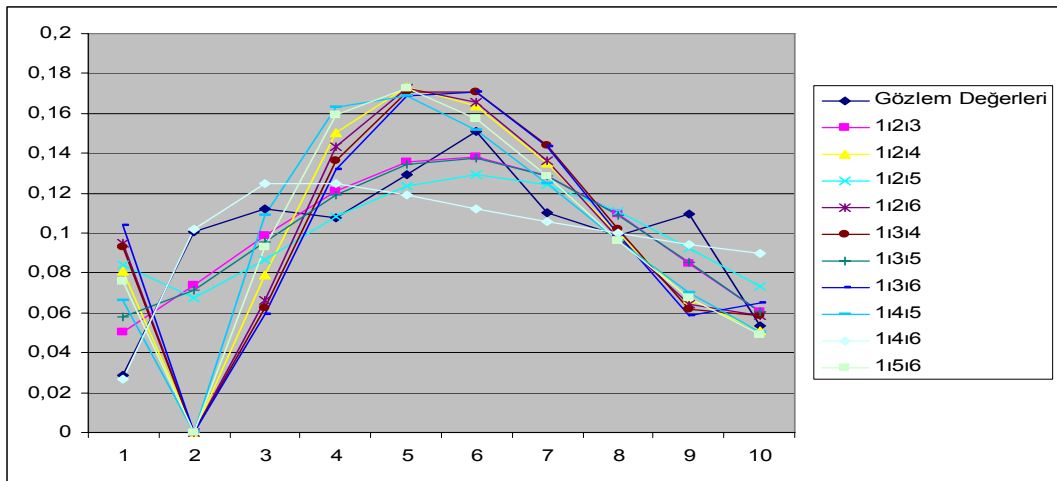
	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>P<sub>1,2</sub></b>	<b>P<sub>1,3</sub></b>	<b>P<sub>1,4</sub></b>	<b>P<sub>1,5</sub></b>	<b>P<sub>1,6</sub></b>
	0.0289	0.0935	0.1029	0.0733	0.0913	0.0781
	0.1005	0.0948	0.1026	0.084	0.0928	0.0856
	0.112	0.0962	0.1022	0.091	0.095	0.0916
	0.1074	0.0977	0.1017	0.0965	0.0972	0.0965
	0.1292	0.0991	0.101	0.1009	0.0993	0.1006
	0.1507	0.1006	0.1002	0.1047	0.1012	0.1041
	0.1102	0.1022	0.0992	0.1081	0.1031	0.1071
	0.0985	0.1037	0.0981	0.1111	0.105	0.1098
	0.1093	0.1053	0.0968	0.1139	0.1067	0.1122
	0.0534	0.1069	0.0954	0.1165	0.1084	0.1143
<b>Entropi</b>		<b>3.3206</b>	<b>3.3215</b>	<b>3.3089</b>	<b>3.3197</b>	<b>3.3124</b>



**Şekil 4.5.** Görüntü dağılımı için iki kısıt altında MaxEnt dağılımları

**Çizelge 4.3.** Görüntü dağılımı için üç kısıt altında MaxEnt dağılımları

	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>P<sub>1.2.3</sub></b>	<b>P<sub>1.2.4</sub></b>	<b>P<sub>1.2.5</sub></b>	<b>P<sub>1.2.6</sub></b>	<b>P<sub>1.3.4</sub></b>
	0.0289	0.0502	0.0809	0.0843	0.0952	0.093
	0.1005	0.0737	0	0.0678	0	0
	0.112	0.0988	0.0792	0.0866	0.0664	0.0626
	0.1074	0.121	0.1506	0.108	0.1435	0.1364
	0.1292	0.1354	0.173	0.1237	0.1727	0.1707
	0.1507	0.1379	0.1635	0.1295	0.1658	0.1706
	0.1102	0.1285	0.1353	0.124	0.1362	0.1442
	0.0985	0.1093	0.0994	0.1106	0.0973	0.1022
	0.1093	0.0849	0.0668	0.0922	0.0642	0.0621
	0.0534	0.0602	0.0512	0.0733	0.0586	0.0583
<b>Entropi</b>		<b>3.253</b>	<b>3.0615</b>	<b>3.2896</b>	<b>3.0652</b>	<b>3.0586</b>
	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>P<sub>1.3.5</sub></b>	<b>P<sub>1.3.6</sub></b>	<b>P<sub>1.4.5</sub></b>	<b>P<sub>1.4.6</sub></b>	<b>P<sub>1.5.6</sub></b>
	0.0289	0.0579	0.1039	0.066	0.0269	0.076
	0.1005	0.0712	0	0	0.1018	0
	0.112	0.0958	0.059	0.109	0.1249	0.0928
	0.1074	0.119	0.1317	0.163	0.125	0.1593
	0.1292	0.1345	0.1689	0.1689	0.1192	0.1726
	0.1507	0.1376	0.1705	0.1519	0.1123	0.1573
	0.1102	0.1287	0.1434	0.1251	0.1058	0.1286
	0.0985	0.1091	0.0992	0.096	0.0997	0.0963
	0.1093	0.0854	0.0584	0.0698	0.0945	0.0678
	0.0534	0.0608	0.065	0.0503	0.0898	0.0493
<b>Entropi</b>		<b>3.2602</b>	<b>3.0621</b>	<b>3.065</b>	<b>3.2543</b>	<b>3.0632</b>

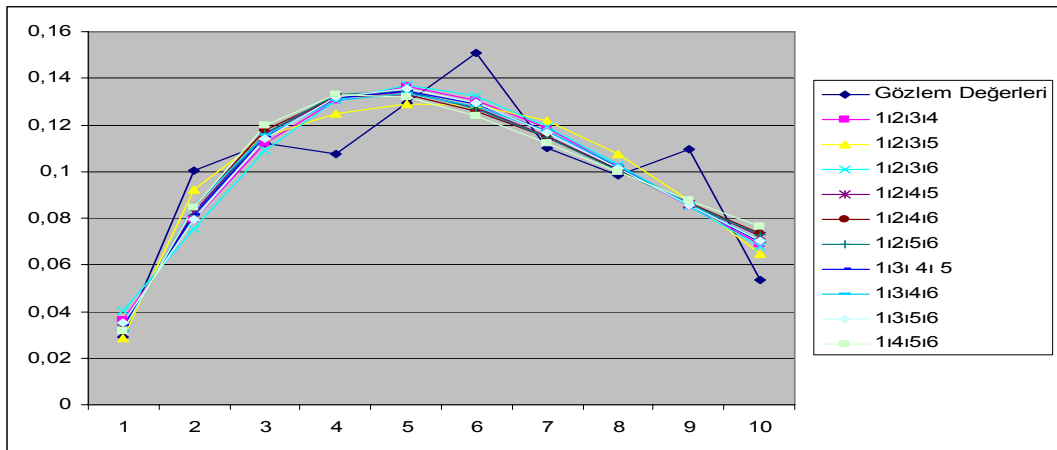


**Şekil 4.6.** Görüntü dağılımı için üç kısıt altında MaxEnt dağılımları



**Çizelge 4.4.** Görüntü dağılımı için dört kısıt altında MaxEnt dağılımları

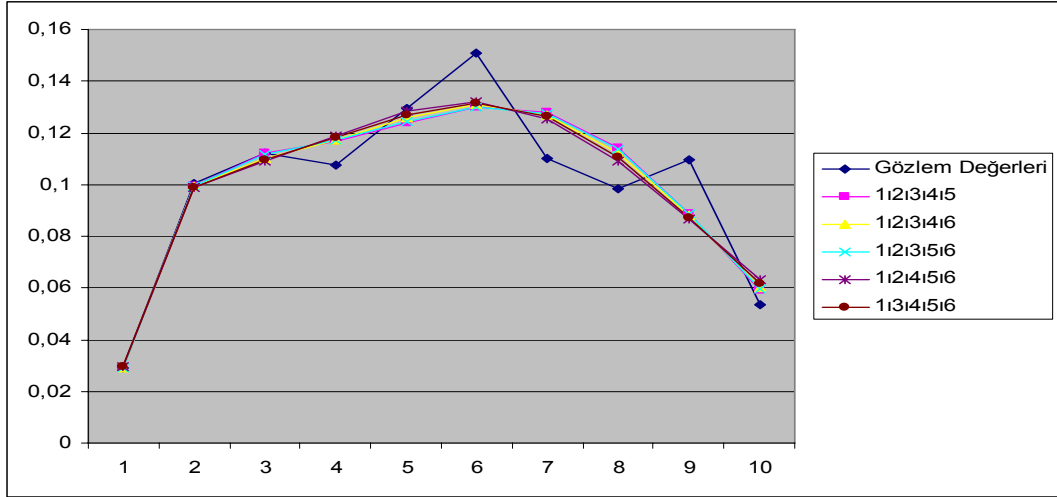
	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>P<sub>1.2.3.4</sub></b>	<b>P<sub>1.2.3.5</sub></b>	<b>P<sub>1.2.3.6</sub></b>	<b>P<sub>1.2.4.5</sub></b>	<b>P<sub>1.2.4.6</sub></b>
	0.0289	0.036	0.0287	0.0402	0.0332	0.0317
	0.1005	0.0794	0.0921	0.0755	0.0823	0.0847
	0.112	0.1122	0.1154	0.1092	0.1162	0.1178
	0.1074	0.1306	0.1247	0.1303	0.1322	0.1319
	0.1292	0.1364	0.129	0.1372	0.1341	0.1329
	0.1507	0.1304	0.1284	0.1326	0.1272	0.1257
	0.1102	0.1186	0.1216	0.1194	0.1152	0.1144
	0.0985	0.1021	0.1075	0.1028	0.1009	0.1009
	0.1093	0.0853	0.0877	0.0849	0.0863	0.0867
	0.0534	0.0689	0.0648	0.0679	0.0724	0.0734
<b>Entropi</b>		<b>3.2456</b>	<b>3.2388</b>	<b>3.2486</b>	<b>3.2458</b>	<b>3.2455</b>
	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>P<sub>1.2.5.6</sub></b>	<b>P<sub>1.3.4.5</sub></b>	<b>P<sub>1.3.4.6</sub></b>	<b>P<sub>1.3.5.6</sub></b>	<b>P<sub>1.4.5.6</sub></b>
	0.0289	0.0341	0.0339	0.0318	0.0354	0.0315
	0.1005	0.0809	0.0817	0.0853	0.0797	0.0846
	0.112	0.1163	0.1145	0.1159	0.114	0.1196
	0.1074	0.133	0.1313	0.1303	0.1318	0.1329
	0.1292	0.1345	0.1346	0.1333	0.1355	0.1319
	0.1507	0.1269	0.129	0.1279	0.1292	0.1237
	0.1102	0.1145	0.1173	0.117	0.1169	0.1123
	0.0985	0.1003	0.1021	0.1023	0.1016	0.0998
	0.1093	0.0863	0.0858	0.0862	0.0856	0.0875
	0.0534	0.0731	0.0698	0.0701	0.0702	0.0763
<b>Entropi</b>		<b>3.2469</b>	<b>3.2448</b>	<b>3.2436</b>	<b>3.2461</b>	<b>3.2471</b>



**Şekil 4.7.** Görüntü dağılımı için dört kısıt altında MaxEnt dağılımları

**Çizelge 4.5.** Görüntü dağılımı için beş kısıt altında MaxEnt dağılımı

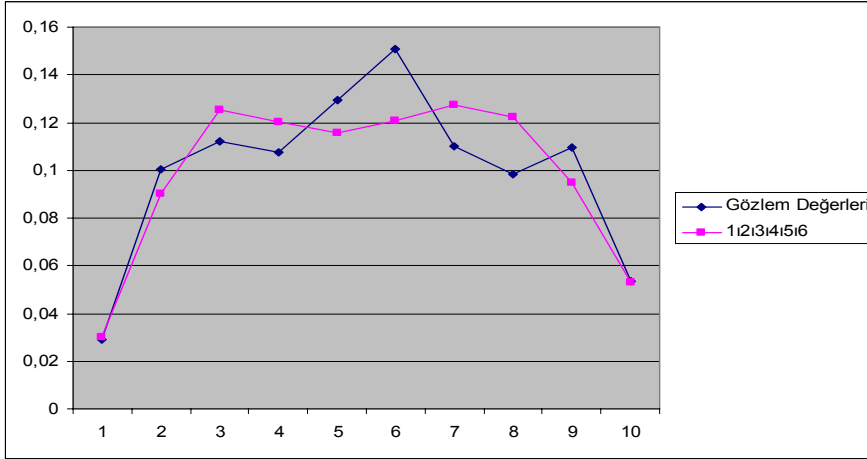
	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>P<sub>1.2.3.4.5</sub></b>	<b>P<sub>1.2.3.4.6</sub></b>	<b>P<sub>1.2.3.5.6</sub></b>	<b>P<sub>1.2.4.5.6</sub></b>	<b>P<sub>1.3.4.5.6</sub></b>
	0.0289	0.0289	0.0292	0.0289	0.0294	0.0293
	0.1005	0.0993	0.0992	0.0992	0.0986	0.0989
	0.112	0.1119	0.1101	0.1118	0.1089	0.1095
	0.1074	0.1169	0.1173	0.1171	0.1187	0.118
	0.1292	0.1238	0.1258	0.1242	0.1283	0.1268
	0.1507	0.1297	0.131	0.1299	0.1318	0.1317
	0.1102	0.1278	0.1269	0.1276	0.1253	0.1263
	0.0985	0.1139	0.1121	0.1135	0.1089	0.1106
	0.1093	0.0887	0.088	0.0885	0.0867	0.0872
	0.0534	0.059	0.0603	0.0594	0.0633	0.0617
<b>Entropi</b>		<b>3.2369</b>	<b>3.2379</b>	<b>3.2371</b>	<b>3.2397</b>	<b>3.2387</b>



**Şekil 4.8.** Görüntü dağılımı için beş kısıt altında MaxEnt dağılımı

**Çizelge 4.6.** Görüntü dağılımı için altı kısıt altında MaxEnt dağılımı

	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>P<sub>1,2,3,4,5,6</sub></b>
	0.0289	0.0303
	0.1005	0.09
	0.112	0.1255
	0.1074	0.1203
	0.1292	0.1159
	0.1507	0.1208
	0.1102	0.1276
	0.0985	0.1223
	0.1093	0.0946
	0.0534	0.0528
<b>Entropi</b>		<b>3.2329</b>

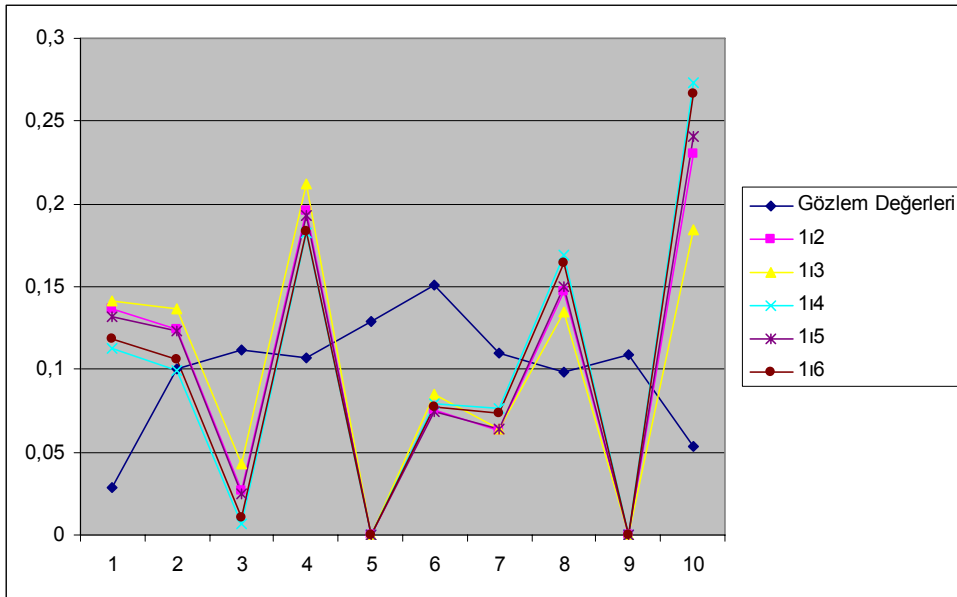


**Şekil 4.9.** Görüntü dağılımı için altı kısıt altında MaxEnt

Ek 2'deki m dosyasının  $P_0=[0.10; 0.10; 0.11; 0.09; 0.12; 0.10; 0.10; 0.09; 0.11; 0.08]$  önsel dağılımı alınarak çalıştırılması sonucunda Çizelge 4.7-4.11 MinxEnt dağılımları elde edilmiştir ve Şekil 4.10-4.14'te gösterilmiştir.

**Çizelge 4.7.** Görüntü dağılımı için iki kısıt altında MinxEnt dağılımı

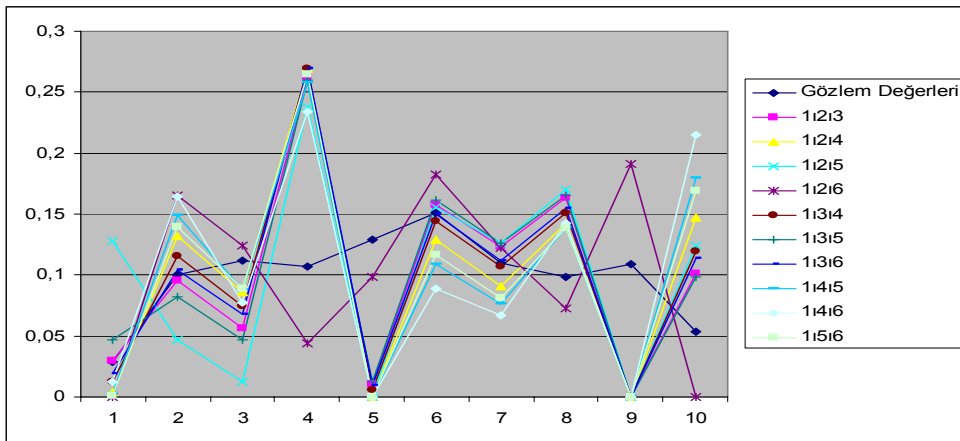
	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>P*<sub>1,2</sub></b>	<b>P*<sub>1,3</sub></b>	<b>P*<sub>1,4</sub></b>	<b>P*<sub>1,5</sub></b>	<b>P*<sub>1,6</sub></b>
	0.0289	0.1368	0.1411	0.1125	0.1314	0.1185
	0.1005	0.1246	0.1362	0.0997	0.1228	0.1056
	0.112	0.0271	0.0429	0.0069	0.0246	0.0105
	0.1074	0.1955	0.2122	0.1823	0.1926	0.1837
	0.1292	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
	0.1507	0.0758	0.0846	0.0794	0.0743	0.0774
	0.1102	0.0635	0.0636	0.0766	0.0641	0.0731
	0.0985	0.1467	0.1348	0.1695	0.1499	0.1648
	0.1093	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
	0.0534	0.2301	0.1845	0.2731	0.2403	0.2664
<b>Entropi</b>		<b>2.7968</b>	<b>2.8538</b>	<b>2.703</b>	<b>2.783</b>	<b>2.724</b>



**Şekil 4.10.** Görüntü dağılımı için iki kısıt altında MinxEnt dağılımı

**Çizelge 4.8.** Görüntü dağılımı için üç kısıt altında MinxEnt dağılımları

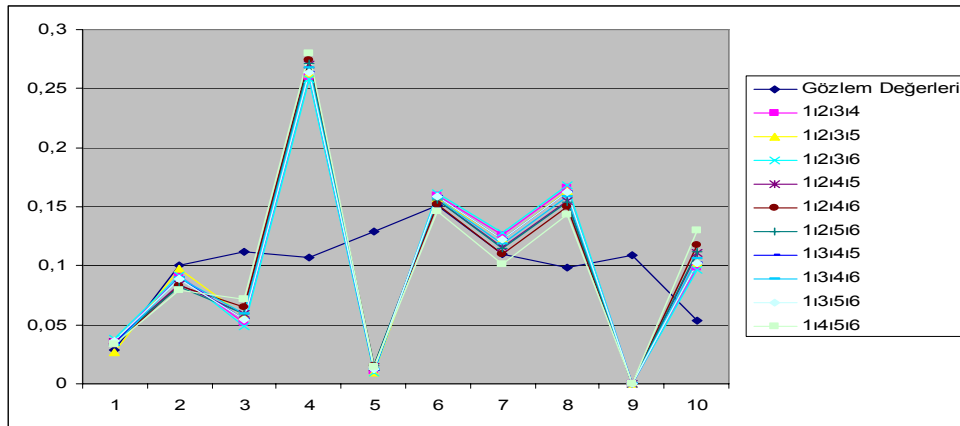
	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>P*<sub>1.2.3</sub></b>	<b>P*<sub>1.2.4</sub></b>	<b>P*<sub>1.2.5</sub></b>	<b>P*<sub>1.2.6</sub></b>	<b>P*<sub>1.3.4</sub></b>
	0.0289	0.0297	0.0035	0.1281	0	0.0125
	0.1005	0.0956	0.1317	0.0465	0.1649	0.1154
	0.112	0.056	0.086	0.0122	0.1244	0.0744
	0.1074	0.2623	0.2699	0.2377	0.0435	0.2695
	0.1292	0.0102	0.0001	0.0001	0.0987	0.0054
	0.1507	0.1579	0.1287	0.1557	0.1824	0.1446
	0.1102	0.1232	0.0908	0.1257	0.1225	0.1069
	0.0985	0.1637	0.1419	0.1702	0.0723	0.1512
	0.1093	0.0001	0.0001	0.0001	0.1913	0.0001
	0.0534	0.1014	0.1476	0.1238	0.0001	0.1199
<b>Entropi</b>		<b>2.836</b>	<b>2.7302</b>	<b>2.758</b>	<b>2.8787</b>	<b>2.7957</b>
	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>P*<sub>1.3.5</sub></b>	<b>P*<sub>1.3.6</sub></b>	<b>P*<sub>1.4.5</sub></b>	<b>P*<sub>1.4.6</sub></b>	<b>P*<sub>1.5.6</sub></b>
	0.0289	0.0466	0.0191	0.0025	0.0124	0.0008
	0.1005	0.0823	0.1042	0.1489	0.1639	0.1395
	0.112	0.0472	0.0682	0.0876	0.0771	0.0887
	0.1074	0.26	0.2692	0.2578	0.2343	0.2651
	0.1292	0.0121	0.0092	0.0001	0.0001	0.0001
	0.1507	0.1615	0.1502	0.1088	0.0889	0.1168
	0.1102	0.1265	0.1122	0.0764	0.0667	0.0814
	0.0985	0.1654	0.1543	0.1385	0.1419	0.1389
	0.1093	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
	0.0534	0.0985	0.1134	0.1796	0.2148	0.1688
<b>Entropi</b>		<b>2.8534</b>	<b>2.8222</b>	<b>2.7139</b>	<b>2.7288</b>	<b>2.7077</b>



**Şekil 4.11.** Görüntü dağılımı için üç kısıt altında MinxEnt dağılımları

**Çizelge 4.9.** Görüntü dağılımı için dört kısıt altında MinxEnt dağılımları

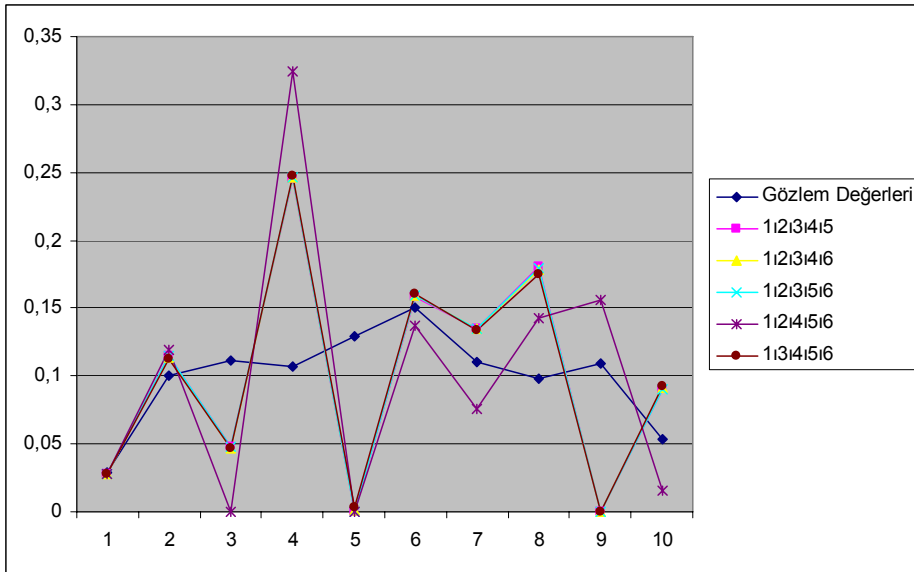
	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>P*<sub>1.2.3.4</sub></b>	<b>P*<sub>1.2.3.5</sub></b>	<b>P*<sub>1.2.3.6</sub></b>	<b>P*<sub>1.2.4.5</sub></b>	<b>P*<sub>1.2.4.6</sub></b>
	0.0289	0.0353	0.0272	0.038	0.0351	0.0334
	0.1005	0.0918	0.0979	0.0915	0.0845	0.083
	0.112	0.0518	0.0575	0.049	0.0589	0.0648
	0.1074	0.2601	0.2626	0.2576	0.27	0.2746
	0.1292	0.0103	0.0097	0.0096	0.0147	0.0149
	0.1507	0.1599	0.1571	0.1611	0.1559	0.1521
	0.1102	0.1261	0.1225	0.1285	0.1156	0.1098
	0.0985	0.1662	0.1633	0.1686	0.1545	0.1497
	0.1093	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
	0.0534	0.0985	0.1022	0.0962	0.1108	0.1178
<b>Entropi</b>		<b>2.8406</b>	<b>2.8318</b>	<b>2.8389</b>	<b>2.8567</b>	<b>2.8566</b>
	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>P*<sub>1.2.5.6</sub></b>	<b>P*<sub>1.3.4.5</sub></b>	<b>P*<sub>1.3.4.6</sub></b>	<b>P*<sub>1.3.5.6</sub></b>	<b>P*<sub>1.4.5.6</sub></b>
	0.0289	0.0365	0.0344	0.0325	0.036	0.0336
	0.1005	0.0824	0.0901	0.0894	0.0886	0.0789
	0.112	0.0593	0.0547	0.0588	0.0541	0.0717
	0.1074	0.2709	0.2637	0.2673	0.2636	0.2804
	0.1292	0.0151	0.0118	0.0126	0.0121	0.0147
	0.1507	0.1556	0.1585	0.1563	0.1588	0.1463
	0.1102	0.1147	0.1224	0.1184	0.1226	0.1015
	0.0985	0.1537	0.1621	0.1583	0.1622	0.1433
	0.1093	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
	0.0534	0.1119	0.1023	0.1064	0.1021	0.1296
<b>Entropi</b>		<b>2.859</b>	<b>2.8464</b>	<b>2.8487</b>	<b>2.8484</b>	<b>2.8543</b>



**Şekil 4.12.** Görüntü dağılımı için dört kısıt altında MinxEnt dağılımları

**Çizelge 4.10.** Görüntü dağılımı için beş kısıt altında MinxEnt dağılımları

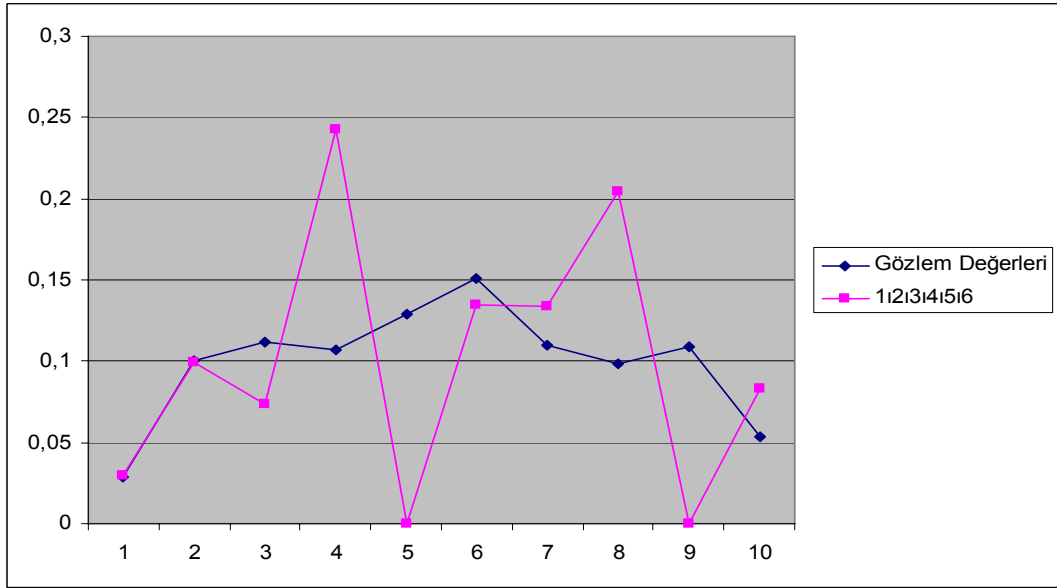
	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>P*<sub>1.2.3.4.5</sub></b>	<b>P*<sub>1.2.3.4.6</sub></b>	<b>P*<sub>1.2.3.5.6</sub></b>	<b>P*<sub>1.2.4.5.6</sub></b>	<b>P*<sub>1.3.4.5.6</sub></b>
	0.0289	0.0276	0.0281	0.0275	0.0283	0.0283
	0.1005	0.1149	0.1136	0.1146	0.1198	0.113
	0.112	0.0482	0.0473	0.048	0.0001	0.0464
	0.1074	0.2453	0.2467	0.246	0.3246	0.2477
	0.1292	0.0001	0.0011	0.0001	0.0001	0.0028
	0.1507	0.1587	0.1599	0.1592	0.137	0.1607
	0.1102	0.1352	0.1345	0.1349	0.0755	0.1333
	0.0985	0.1802	0.1779	0.1793	0.1431	0.1753
	0.1093	0.0001	0.0001	0.0001	0.1558	0.0001
	0.0534	0.0899	0.091	0.0903	0.0159	0.0924
<b>Entropi</b>		<b>2.7793</b>	<b>2.788</b>	<b>2.779</b>	<b>2.6277</b>	<b>2.7986</b>



**Şekil 4.13.** Görüntü dağılımı için beş kısıt altında MinxEnt dağılımları

**Çizelge 4.11.** Görüntü dağılımı için altı kısıt altında MinxEnt dağılımı

	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>P*<sub>1,2,3,4,5,6</sub></b>
	0.0289	0.0298
	0.1005	0.0995
	0.112	0.0731
	0.1074	0.2422
	0.1292	0.0001
	0.1507	0.1344
	0.1102	0.1342
	0.0985	0.2041
	0.1093	0.0001
	0.0534	0.0827
<b>Entropi</b>		<b>2.7969</b>



**Şekil 4.14.** Görüntü dağılımı için altı kısıt altında MinxEnt dağılımı



**Adım 4: MinMaxEnt, MaxMaxEnt, MinMinxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarının tespit edilmesi**

Bu aşamada, öncelikle Çizelge 4.2-4.6'nın her biri ayrı ayrı incelenerek en küçük entropi değerine sahip olan MaxEnt dağılımları ve en büyük entropi değerine sahip olan MaxEnt dağılımları, başka bir deyişle MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları sırasıyla Çizelge 4.12-4.13'te verilmiştir.

**Çizelge 4.12.** MinMaxEnt dağılımları

$P_{1.4}$	$P_{1.3.4}$	$P_{1.2.3.5}$	$P_{1.2.3.4.5}$	$P_{1.2.3.4.5.6}$
0.0733	0.093	0.0287	0.0289	0.0303
0.084	0	0.0921	0.0993	0.09
0.091	0.0626	0.1154	0.1119	0.1255
0.0965	0.1364	0.1247	0.1169	0.1203
0.1009	0.1707	0.129	0.1238	0.1159
0.1047	0.1706	0.1284	0.1297	0.1208
0.1081	0.1442	0.1216	0.1278	0.1276
0.1111	0.1022	0.1075	0.1139	0.1223
0.1139	0.0621	0.0877	0.0887	0.0946
0.1165	0.0583	0.0648	0.059	0.0528

**Çizelge 4.13.** MaxMaxEnt dağılımları

$P_{1.2}$	$P_{1.3.5}$	$P_{1.2.3.6}$	$P_{1.2.4.5.6}$
0.0935	0.0579	0.0402	0.0294
0.0948	0.0712	0.0755	0.0986
0.0962	0.0958	0.1092	0.1089
0.0977	0.119	0.1303	0.1187
0.0991	0.1345	0.1372	0.1283
0.1006	0.1376	0.1326	0.1318
0.1022	0.1287	0.1194	0.1253
0.1037	0.1091	0.1028	0.1089
0.1053	0.0854	0.0849	0.0867
0.1069	0.0608	0.0679	0.0633

Çizelge 4.7-4.11'den en küçük entropi değerine sahip olan MinxEnt dağılımları ile en büyük entropi değerine sahip olan MinxEnt dağılımları

belirlenmiştir. Başka bir ifade ile MinMinxEnt ve MaxMinxEnt dağılımları Çizelge 4.14-4.15'teki gibi bulunmuştur.

**Çizelge 4.14.** MinMinxEnt dağılımları

$P_{1.4}$	$P_{1.5.6}$	$P_{1.2.3.5}$	$P_{1.2.4.5.6}$	$P_{1.2.3.4.5.6}$
0.1125	0.0008	0.0272	0.0283	0.0298
0.0997	0.1395	0.0979	0.1198	0.0995
0.0069	0.0887	0.0575	0.0001	0.0731
0.1823	0.2651	0.2626	0.3246	0.2422
0.0001	0.0001	0.0097	0.0001	0.0001
0.0794	0.1168	0.1571	0.137	0.1344
0.0766	0.0814	0.1225	0.0755	0.1342
0.1695	0.1389	0.1633	0.1431	0.2041
0.0001	0.0001	0.0001	0.1558	0.0001
0.2731	0.1688	0.1022	0.0159	0.0827

**Çizelge 4.15.** MaxMinxEnt dağılımları

$P_{1.3}$	$P_{1.2.6}$	$P_{1.2.5.6}$	$P_{1.3.4.5.6}$
0.1411	0	0.0365	0.0283
0.1362	0.1649	0.0824	0.113
0.0429	0.1244	0.0593	0.0464
0.2122	0.0435	0.2709	0.2477
0.0001	0.0987	0.0151	0.0028
0.0846	0.1824	0.1556	0.1607
0.0636	0.1225	0.1147	0.1333
0.1348	0.0723	0.1537	0.1753
0.0001	0.1913	0.0001	0.0001
0.1845	0.0001	0.1119	0.0924

***Adım 5: POEOD'nun olasılıksal karışım modellerinin önerilmesi***

Bu adımda çeşitli olasılıksal karışım modellerini belirlemek için aşağıda verilen POEOD'ı kullanılmıştır:

$$P^{(1)}= P_{1,2,3,4,5}; P^{(2)}= P_{1,2,3,4,5,6} ; P^{(3)}= P_{1,2}; P^{(4)}= P_{1,2,4,5,6};$$

$$P^{(5)}= P^*_{1,2,3,4,5,6}; P^{(6)}= P^*_{1,3}; P^{(7)}= P^*_{1,2,6}$$

Bu dağılımları kullanarak aşağıdaki modeller belirlenmiştir:

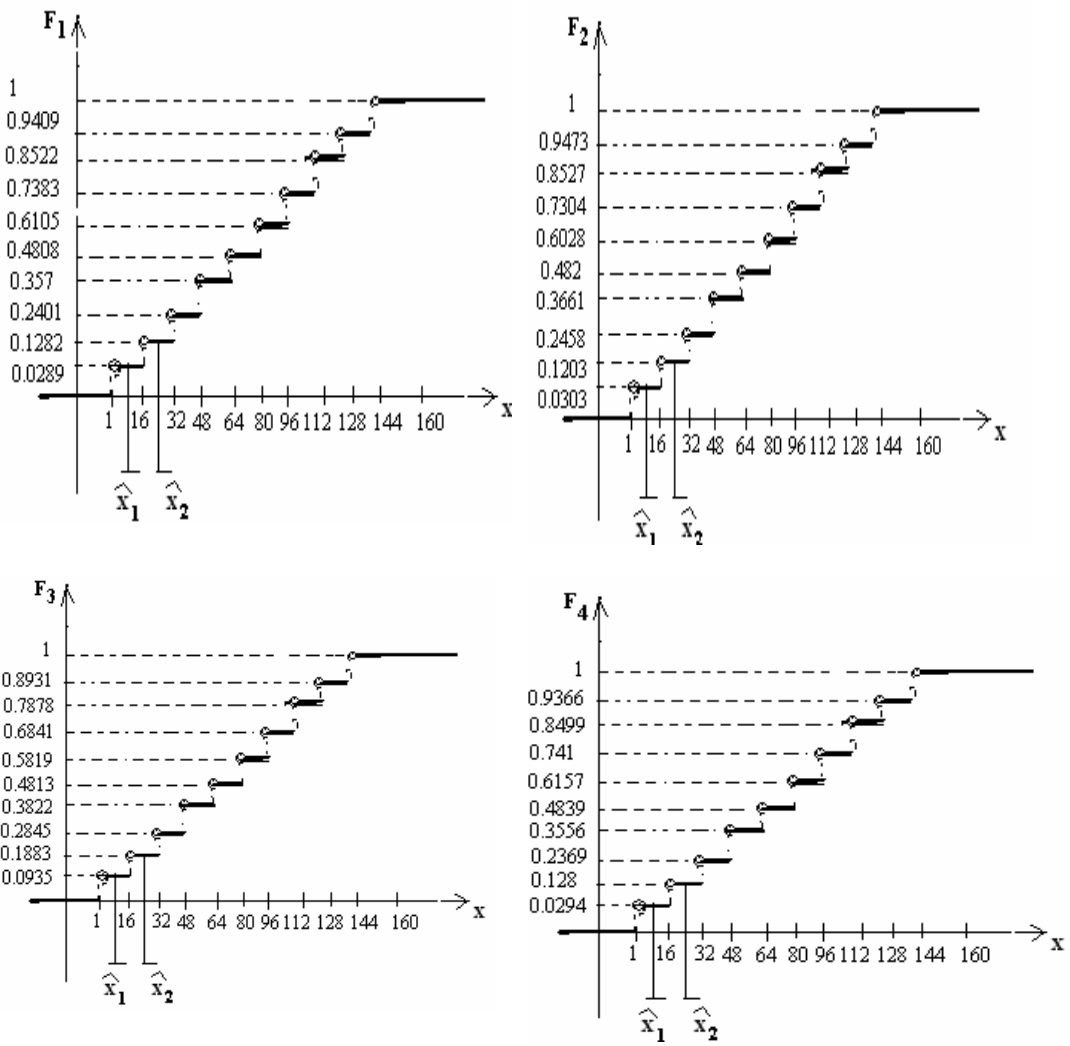
$$\begin{array}{ll} M1=c_1 P^{(1)}+ c_2 P^{(2)} & M9=c_1 P^{(3)}+ c_2 P^{(5)} \\ M2=c_1 P^{(1)}+ c_2 P^{(5)} & M10=c_1 P^{(3)}+ c_2 P^{(6)} \\ M3=c_1 P^{(1)}+ c_2 P^{(6)} & M11=c_1 P^{(3)}+ c_2 P^{(7)} \\ M4=c_1 P^{(2)}+ c_2 P^{(3)} & M12=c_1 P^{(4)}+ c_2 P^{(5)} \\ M5=c_1 P^{(2)}+ c_2 P^{(4)} & M13=c_1 P^{(4)}+ c_2 P^{(6)} \\ M6=c_1 P^{(2)}+ c_2 P^{(5)} & M14=c_1 P^{(5)}+ c_2 P^{(6)} \\ M7=c_1 P^{(2)}+ c_2 P^{(6)} & M15=c_1 P^{(5)}+ c_2 P^{(7)} \\ M8=c_1 P^{(3)}+ c_2 P^{(4)} & M16=c_1 P^{(6)}+ c_2 P^{(7)} \end{array}$$

***Adım 6: Önerilen olasılıksal karışım modelleri için tanımlanabilirlik teoreminin yeter koşullarının kontrol edilmesi***

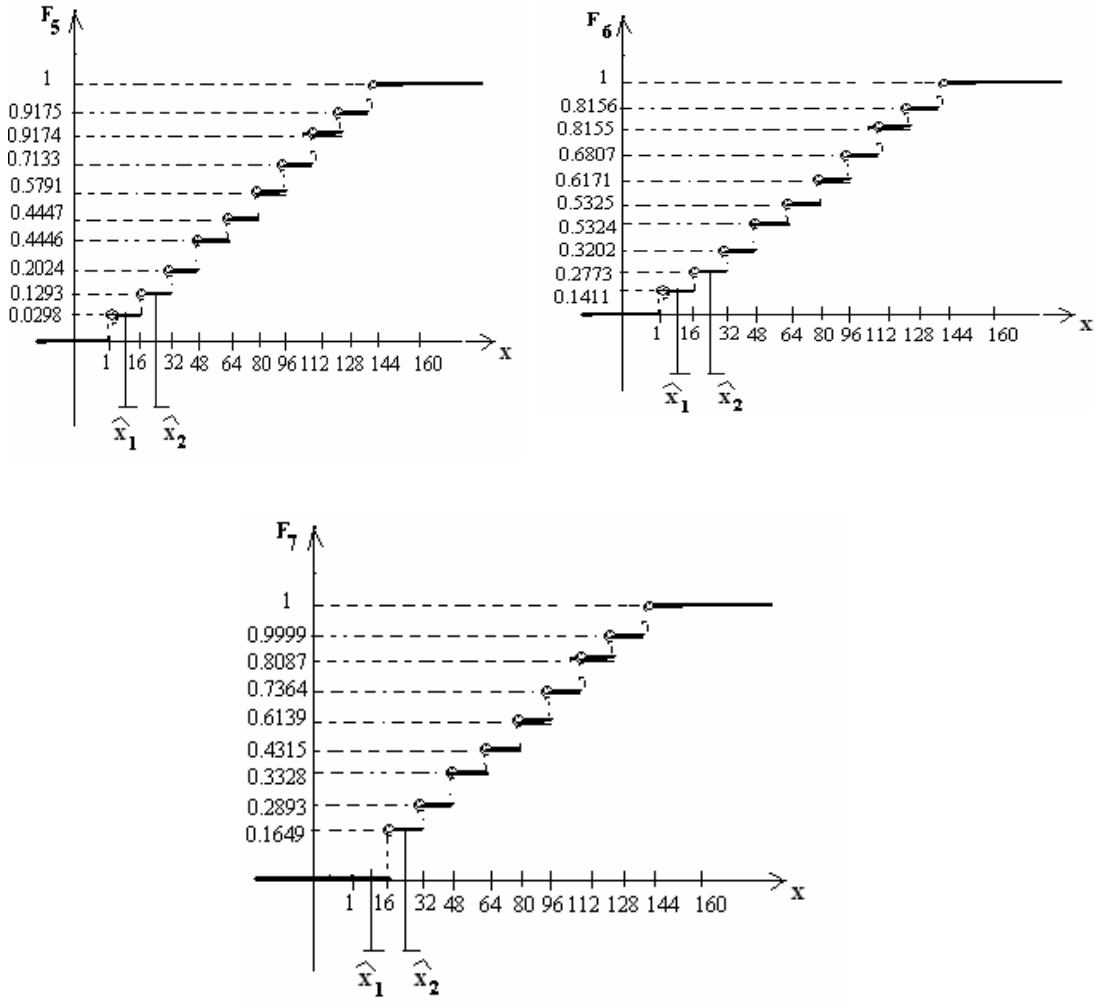
M1-M16 olasılıksal karışım modellerinin tanımlanabilirliği için Teorem 3.2, Teorem 3.4 ve Teorem 3.5'in ifade ettiği koşul sağlanmalı. Çıkarsama 1 ve 2 gereğince söz konusu koşul,

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(\tilde{x}_1) & F_1(\tilde{x}_2) \\ F_2(\tilde{x}_1) & F_2(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} \neq 0$$

olmalıdır. Bu amaçla Adım 5'te ifade edilen dağılımların birikimli dağılım fonksiyonları Şekil 4.15-4.16'daki gibi elde edilmiştir



Şekil 4.15.  $F_1$ - $F_4$  birikimli dağılım fonksiyonları



Şekil 4.16.  $F_5$ - $F_6$  birikimli dağılım fonksiyonları

M1-M16 olasılıksal karışım modelleri için sırasıyla,

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(\tilde{x}_1) & F_1(\tilde{x}_2) \\ F_2(\tilde{x}_1) & F_2(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0289 & 0.1282 \\ 0.0303 & 0.1203 \end{vmatrix} = -0.0004 \neq 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(\tilde{x}_1) & F_1(\tilde{x}_2) \\ F_5(\tilde{x}_1) & F_5(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0289 & 0.1282 \\ 0.298 & 0.1293 \end{vmatrix} = -0.0345 \neq 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(\tilde{x}_1) & F_1(\tilde{x}_2) \\ F_6(\tilde{x}_1) & F_6(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0289 & 0.1282 \\ 0.1411 & 0.2773 \end{vmatrix} = -0.0101 \neq 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_2(\tilde{x}_1) & F_2(\tilde{x}_2) \\ F_3(\tilde{x}_1) & F_3(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0303 & 0.1203 \\ 0.0935 & 0.1883 \end{vmatrix} = -0.0055 \neq 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_2(\tilde{x}_1) & F_2(\tilde{x}_2) \\ F_4(\tilde{x}_1) & F_4(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0303 & 0.1203 \\ 0.0294 & 0.128 \end{vmatrix} = 0.00034 \neq 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_2(\tilde{x}_1) & F_2(\tilde{x}_2) \\ F_5(\tilde{x}_1) & F_5(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0303 & 0.1203 \\ 0.0298 & 0.1293 \end{vmatrix} = 0.00033 \neq 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_2(\tilde{x}_1) & F_2(\tilde{x}_2) \\ F_6(\tilde{x}_1) & F_6(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0303 & 0.1203 \\ 0.1411 & 0.2773 \end{vmatrix} = -0.0086 \neq 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_3(\tilde{x}_1) & F_3(\tilde{x}_2) \\ F_4(\tilde{x}_1) & F_4(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0935 & 0.1883 \\ 0.0294 & 0.128 \end{vmatrix} = 0.0064 \neq 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_3(\tilde{x}_1) & F_3(\tilde{x}_2) \\ F_5(\tilde{x}_1) & F_5(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0935 & 0.1883 \\ 0.0298 & 0.1293 \end{vmatrix} = 0.0065 \neq 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_3(\tilde{x}_1) & F_3(\tilde{x}_2) \\ F_6(\tilde{x}_1) & F_6(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0935 & 0.1883 \\ 0.1411 & 0.2773 \end{vmatrix} = -0.0006 \neq 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_3(\tilde{x}_1) & F_3(\tilde{x}_2) \\ F_7(\tilde{x}_1) & F_7(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0935 & 0.1883 \\ 0.1649 & 0.2893 \end{vmatrix} = -0.0040 \neq 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_4(\tilde{x}_1) & F_4(\tilde{x}_2) \\ F_5(\tilde{x}_1) & F_5(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0294 & 0.128 \\ 0.0298 & 0.1293 \end{vmatrix} = -0.0000129 \neq 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_4(\tilde{x}_1) & F_4(\tilde{x}_2) \\ F_6(\tilde{x}_1) & F_6(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0294 & 0.128 \\ 0.1411 & 0.2773 \end{vmatrix} = -0.0099 \neq 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_5(\tilde{x}_1) & F_5(\tilde{x}_2) \\ F_6(\tilde{x}_1) & F_6(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0298 & 0.1293 \\ 0.1411 & 0.2773 \end{vmatrix} = -0.01 \neq 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_5(\tilde{x}_1) & F_5(\tilde{x}_2) \\ F_7(\tilde{x}_1) & F_7(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0298 & 0.1293 \\ 0.1649 & 0.2893 \end{vmatrix} = -0.0127 \neq 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_6(\tilde{x}_1) & F_6(\tilde{x}_2) \\ F_7(\tilde{x}_1) & F_7(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.1411 & 0.2773 \\ 0.1649 & 0.2893 \end{vmatrix} = -0.0049 \neq 0$$

koşulları sağlandığından söz konusu olasılıksal karışım modelleri tanımlanabilir.

#### ***Adım 7: Önerilen olasılıksal karışım modellerinin parametre tahmini***

Burada, Adım 5’te önerilen ve Adım 6’da tanımlanabilirliği gösterilen olasılıksal karışım modellerinin parametre tahmini Alt Bölüm 4.1’de anlatılan yöntem kullanılarak yapılmıştır. Bu amaçla MATLAB paket programında yazılan kodlar Ek 4’te verilmiştir ve POEOD’larının olasılıksal karışım modelleri aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\begin{aligned} M1 &= 0.9514 P^{(1)} + 0.0486 P^{(2)} & M9 &= 0.9995 P^{(3)} + 0.0005 P^{(5)} \\ M2 &= 0.9998 P^{(1)} + 0.0002 P^{(5)} & M10 &= 0.9892 P^{(3)} + 0.0108 P^{(6)} \\ M3 &= 0.7469 P^{(1)} + 0.2531 P^{(6)} & M11 &= 0.9993 P^{(3)} + 0.0007 P^{(7)} \\ M4 &= 0.0025 P^{(2)} + 0.9975 P^{(3)} & M12 &= 0.9991 P^{(4)} + 0.0009 P^{(5)} \\ M5 &= 0.0358 P^{(2)} + 0.9642 P^{(4)} & M13 &= 0.7523 P^{(4)} + 0.2477 P^{(6)} \\ M6 &= 0.9996 P^{(2)} + 0.0004 P^{(5)} & M14 &= 0.4129 P^{(5)} + 0.5871 P^{(6)} \\ M7 &= 0.7382 P^{(2)} + 0.2618 P^{(6)} & M15 &= 0.4804 P^{(5)} + 0.5196 P^{(7)} \\ M8 &= 0.9999 P^{(3)} + 0.0001 P^{(4)} & M16 &= 0.4785 P^{(6)} + 0.5215 P^{(7)} \end{aligned}$$

#### ***Adım 8: Karşılaştırma ve en iyi uyum sağlayan modelin tespiti***

Bu adımda, Adım 7’de önerilen olasılıksal karışım modellerinin uyum değerleri ve OKHK ve  $R^2$  karşılaştırma ölçütleri hesaplanmıştır. Ayrıca, görüntü dağılımı için oluşturulan MinMaxEnt dağılımı  $P^{(2)}$  de incelenerek önerilen modellerin performansı değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla, Çizelge 4.16-4.17’de bu uygulama için önerilen olasılıksal karışım modellerinin uyum değerleri ve ilgili karşılaştırma ölçütleri verilmiştir.

**Çizelge 4.16.** M1-M8 olasılıksal karışım modellerinin uyum değerleri ve karşılaştırma ölçümleri

	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>M1</b>	<b>M2</b>	<b>M3</b>	<b>M4</b>
	0.0289	0.029	0.0289	0.0573	0.0933
	0.1005	0.0988	0.0993	0.1086	0.0948
	0.112	0.1126	0.1119	0.0944	0.0963
	0.1074	0.1171	0.1169	0.141	0.0978
	0.1292	0.1234	0.1238	0.0925	0.0991
	0.1507	0.1293	0.1297	0.1183	0.1007
	0.1102	0.1278	0.1278	0.1116	0.1023
	0.0985	0.1143	0.1139	0.1192	0.1037
	0.1093	0.089	0.0887	0.0663	0.1053
	0.0534	0.0587	0.059	0.0908	0.1068
<b>R<sup>2</sup></b>		<b>0.8563</b>	<b>0.8584</b>	0.2778	0.0146
<b>OKHK</b>		<b>0.0126</b>	<b>0.0125</b>	0.0290	0.0330
	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>M5</b>	<b>M6</b>	<b>M7</b>	<b>M8</b>
	0.0289	0.0294	0.0303	0.0593	0.0935
	0.1005	0.0983	0.09	0.1021	0.0948
	0.112	0.1095	0.1255	0.1039	0.0962
	0.1074	0.1188	0.1203	0.1444	0.0977
	0.1292	0.1279	0.1159	0.0856	0.0991
	0.1507	0.1314	0.1208	0.1113	0.1006
	0.1102	0.1254	0.1276	0.1108	0.1022
	0.0985	0.1094	0.1223	0.1256	0.1037
	0.1093	0.087	0.0946	0.0699	0.1053
	0.0534	0.0629	0.0528	0.0873	0.1069
<b>R<sup>2</sup></b>		<b>0.8685</b>	0.7701	0.2254	0.0104
<b>OKHK</b>		<b>0.0121</b>	0.0162	0.0304	0.0331

Çizelge 4.16 incelenerek M1, M2 ve M5 olasılıksal karışım modellerinin performansının diğer modellere göre daha iyi olduğu tespit edilmiştir



**Çizelge 4.17.** M9-M16 olasılıksal karışım modellerinin uyum değerleri ve karşılaştırma ölçümleri

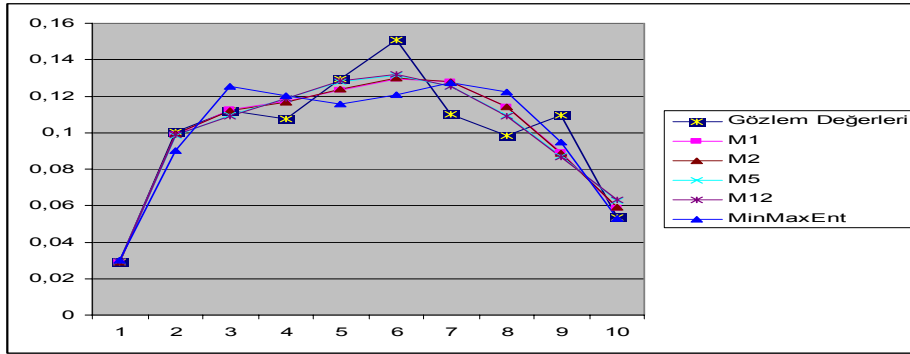
	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>M9</b>	<b>M10</b>	<b>M11</b>	<b>M12</b>
	0.0289	0.0935	0.094	0.0934	0.0294
	0.1005	0.0948	0.0952	0.0948	0.0986
	0.112	0.0962	0.0956	0.0962	0.1089
	0.1074	0.0978	0.0989	0.0977	0.1188
	0.1292	0.0991	0.098	0.0991	0.1282
	0.1507	0.1006	0.1004	0.1007	0.1318
	0.1102	0.1022	0.1018	0.1022	0.1253
	0.0985	0.1038	0.104	0.1037	0.109
	0.1093	0.1052	0.1042	0.1054	0.0866
	0.0534	0.1069	0.1077	0.1068	0.0633
<b>R<sup>2</sup></b>		0.0104	0.0002	0.0130	<b>0.8684</b>
<b>OKHK</b>		0.0331	0.0334	0.0330	<b>0.0121</b>
	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>M13</b>	<b>M14</b>	<b>M15</b>	<b>M16</b>
	0.0289	0.0571	0.0951	0.0143	0.0675
	0.1005	0.1079	0.121	0.1335	0.1512
	0.112	0.0926	0.0554	0.0998	0.0854
	0.1074	0.1419	0.2246	0.139	0.1242
	0.1292	0.0965	0.0001	0.0513	0.0515
	0.1507	0.1201	0.1052	0.1593	0.1356
	0.1102	0.11	0.0928	0.1281	0.0943
	0.0985	0.1153	0.1634	0.1356	0.1022
	0.1093	0.0652	0.0001	0.0994	0.0998
	0.0534	0.0933	0.1425	0.0398	0.0883
<b>R<sup>2</sup></b>		0.2873	0.0513	0.5096	0.1129
<b>OKHK</b>		0.0287	0.0805	0.0325	0.0359

Çizelge 4.17’de M12 olasılıksal karışım modeli yüksek R<sup>2</sup> ve düşük OKHK sahip olması nedeniyle diğer modellere göre daha doğru sonuçlar vermektedir.

**Çizelge 4.18.** Görüntü dağılımı için MinMaxEnt dağılımı ve karşılaştırma ölçümleri

	<b>Gözlem Değerleri</b>	<b>MinMaxEnt <math>P^{(2)}</math></b>
	0.0289	0.0303
	0.1005	0.09
	0.112	0.1255
	0.1074	0.1203
	0.1292	0.1159
	0.1507	0.1208
	0.1102	0.1276
	0.0985	0.1223
	0.1093	0.0946
	0.0534	0.0528
<b><math>R^2</math></b>		<b>0.7701</b>
<b>OKHK</b>		<b>0.0161</b>

Çizelge 4.18, Çizelge 4.16-4.17 ile karşılaştırıldığında M1, M2, M5 ve M12 olasılıksal karışım modellerinin daha yüksek  $R^2$  ve daha düşük OKHK değerine sahip olmalarından dolayı görüntü dağılımı için bu modellerin daha uygun olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca, Şekil 4.17’de de gösterilmiştir.



**Şekil 4.17.** Dağılımların Karşılaştırılması

Sonuç olarak, bu bölümde yapılan uygulama sonucunda görüntü dağılımı için M5 ve M12 modellerinin uyum sağladığı tespit edilmiştir. Burada

$$M5=0.0358 P^{(2)}+ 0.9642 P^{(4)}$$

modeli beş kısıt altında MaxMaxEnt dağılımı ile altı kısıt altında MinMaxEnt dağılımının olasılıksal karışım modeli ve

$$M12=0.9991P^{(4)}+0.0009 P^{(5)},$$

modeli beş kısıt altında MaxMaxEnt dağılımı ile altı kısıt altında MinMinxEnt dağılımının olasılıksal karışım modelidir.

Böylece, bu uygulama ile görüntü işleme probleminde POEOD dağılımlarının olasılıksal karışım modelleri örneklenmiştir ve belirlenen bir görüntü için EOD'ının olasılıksal karışım modellerinin veriye iyi uyum sağladığı tespit edilmiştir.

### **4.3 Bir cihazın hata dağılımı üzerine uygulama**

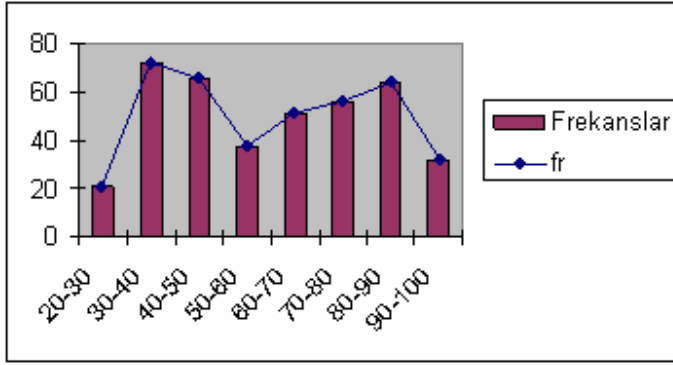
Bu alt bölümde hata dağılımı için EOD'larının olasılıksal karışım modelleri belirlenmiştir. Bunun için belirlenen adımlar sırasıyla uygulanmıştır.

#### ***Adım 1: İlgili problem için veri setinin tanıtılması***

Hata dağılımı problemi için, radyo dalgaları ile mesafe ölçen bir cihazın hata dağılımı (Венцель, 1969) ele alınmıştır. Söz konusu hata dağılımı (Çizelge 4.19, Şekil 4.18) incelendiğinde, onun bilinen istatistiksel dağılımlarla ifade edilemediği bilinmektedir (Şamilov, 2006a; Usta, 2006).

**Çizelge 4.19.** Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata dağılımı

Aralıklar	Frekans
20-30	21
30-40	72
40-50	66
50-60	38
60-70	51
70-80	56
80-90	64
90-100	32



**Şekil 4.18.** Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata grafiği

Ayrıca söz konusu dağılıma MinMaxEnt dağılımı iyi uyum sağlamaktadır. Buradan hareketle, bu bölümde MinMaxEnt dağılımlarının yanı sıra MinxEnt dağılımları da elde edilmiştir ve POEOD olan bu dağılımların olasılıksal karışım modelleri tespit edilmesi amaçlanmıştır. Buradan hareketle, Adım 2'ye geçilmiştir.

### ***Adım 2: Problemin çözümü için MATLAB paket programında gerekli kodların yazılması***

Bu adımda, Alt Bölüm 2.3'te tanıtılan POEOD'larının elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla, Matlab paket programında söz konusu cihazın hata dağılımı için POEOD'nın elde edilmesi için gerekli Matlab kodları yazılmıştır ve Ek 2'te verilmiştir.

Söz konusu kodlar, MaxEnt ve MinxEnt dağılımlarındaki Langrange çarpanlarını Newton yöntemini kullanarak hesaplamaktadır. Hesaplamalar sırasında, moment vektörler kümesi  $\{x, x^2, \log(x), (\log(x))^2, \log(1+x^2)\}$  atanmıştır.

Takibinde, bu kümeden 2'li, 3'lü, 4'lü, 5'li ve 6'lı kısıt kombinasyonları dikkate alınarak MaxEnt ve MinxEnt dağılımlarının hesaplanması için işlem kodları yazılmıştır.

### ***Adım 3: POEOD'larının elde edilmesi***

POEOD'larının elde edilmesi için Adım 2'de açıklanan Ek 2'de verilen Matlab kodlarından oluşan m dosyasının çalıştırılması sonucunda Çizelge 4.20-4.24'te verilen MaxEnt dağılımları elde edilmiştir ve Şekil 4.19-4.23'te dağılımların seyri verilmiştir. Burada işaret edilen moment kısıtları,

$$1. \sum_{i=1}^n p_i = 1;$$

$$2. x;$$

$$3. x^2;$$

$$4. \log(x);$$

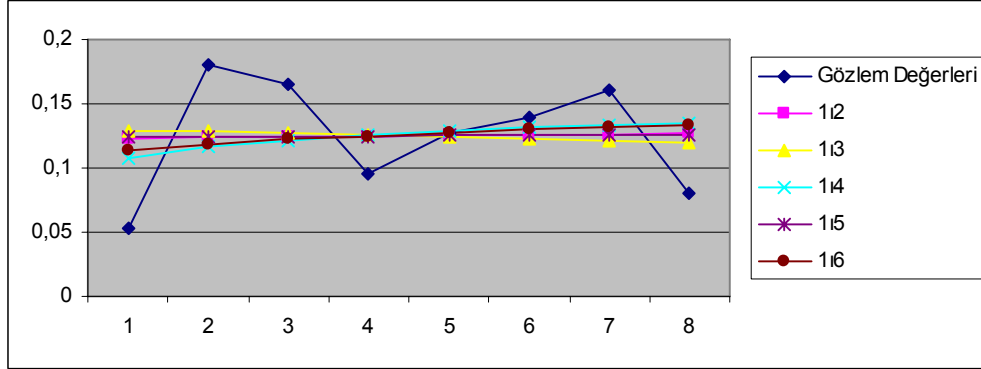
$$5. (\log(x))^2;$$

$$6. \log(1+x^2)$$

şeklindedir.

Çizelge 4.20. Hata dağılımı için iki kısıt altında MaxEnt dağılımları

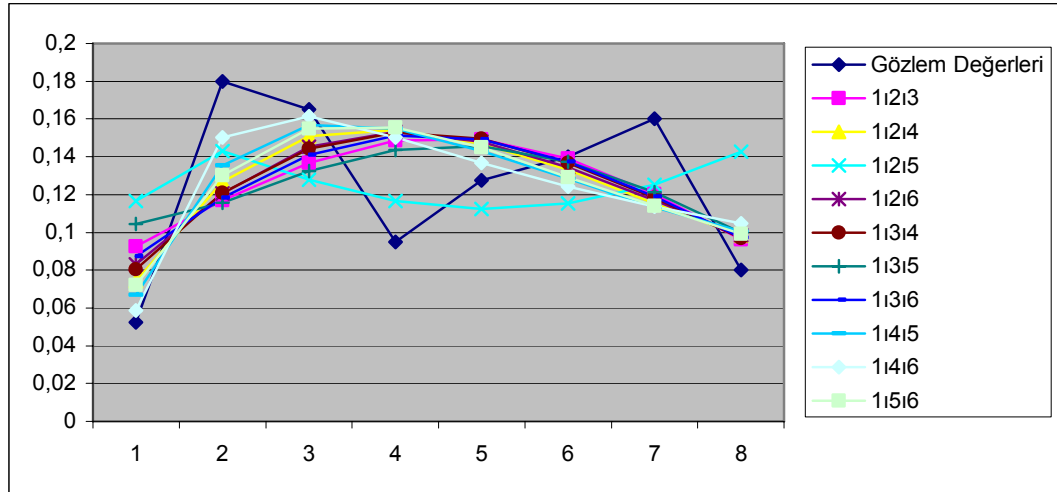
	Gözlem Değerleri	MaxEnt Dağılımları				
		P <sub>1,2</sub>	P <sub>1,3</sub>	P <sub>1,4</sub>	P <sub>1,5</sub>	P <sub>1,6</sub>
	0.0525	0.1229	0.1287	0.1079	0.1238	0.1134
	0.18	0.1235	0.1282	0.1163	0.124	0.1182
	0.165	0.1241	0.1275	0.1216	0.1244	0.122
	0.095	0.1247	0.1264	0.1255	0.1248	0.125
	0.1275	0.1253	0.125	0.1286	0.1252	0.1275
	0.14	0.1259	0.1234	0.1312	0.1256	0.1296
	0.16	0.1265	0.1215	0.1334	0.1259	0.1313
	0.08	0.1271	0.1193	0.1354	0.1262	0.1329
<b>Entropi</b>		<b>2.9999</b>	<b>2.9995</b>	<b>2.9964</b>	<b>3</b>	<b>2.9981</b>



Şekil 4.19. Hata dağılımı için iki kısıt altında MaxEnt dağılımları

**Çizelge 4.21.** Hata dağılımı için üç kısıt altında MaxEnt Dağılımları

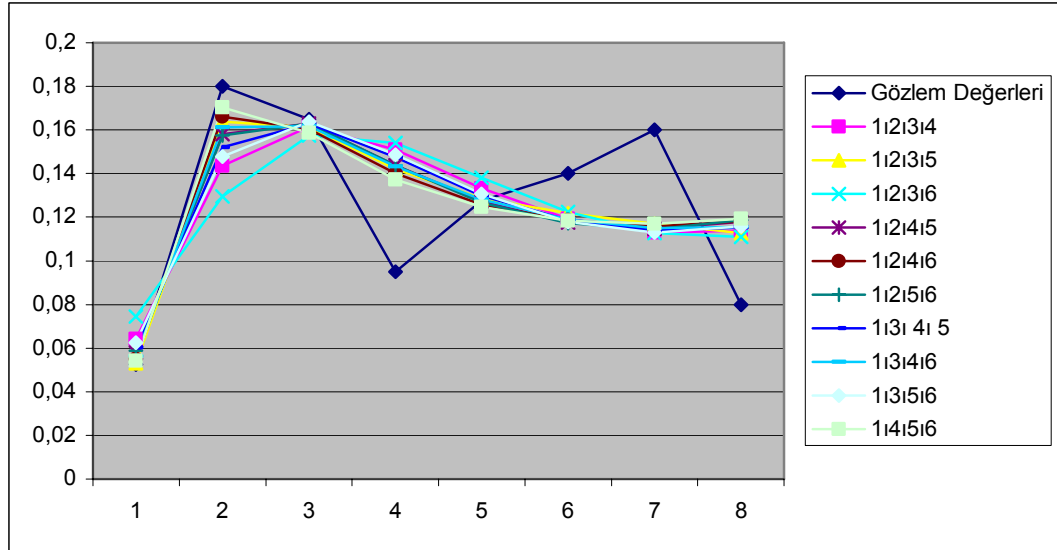
	Gözlem Değerleri	MaxEnt Dağılımları				
		P <sub>1,2,3</sub>	P <sub>1,2,4</sub>	P <sub>1,2,5</sub>	P <sub>1,2,6</sub>	P <sub>1,3,4</sub>
	0.0525	0.0926	0.0742	0.1168	0.0831	0.0805
	0.18	0.1169	0.127	0.1431	0.1206	0.121
	0.165	0.1369	0.1509	0.128	0.1454	0.1442
	0.095	0.1486	0.1541	0.1166	0.1533	0.1528
	0.1275	0.1494	0.1471	0.1122	0.1478	0.1496
	0.14	0.1392	0.133	0.1154	0.1343	0.1368
	0.16	0.1203	0.1154	0.1252	0.117	0.1182
	0.08	0.0961	0.0983	0.1427	0.0984	0.0969
<b>Entropi</b>		<b>2.9794</b>	<b>2.9663</b>	<b>2.9941</b>	<b>2.9737</b>	<b>2.9714</b>
	Gözlem Değerleri	MaxEnt Dağılımları				
		P <sub>1,3,5</sub>	P <sub>1,3,6</sub>	P <sub>1,4,5</sub>	P <sub>1,4,6</sub>	P <sub>1,5,6</sub>
	0.0525	0.1046	0.0872	0.067	0.0587	0.072
	0.18	0.1155	0.1182	0.1355	0.1502	0.1302
	0.165	0.1324	0.1409	0.157	0.1614	0.1548
	0.095	0.1438	0.1512	0.1549	0.1502	0.1554
	0.1275	0.1455	0.1491	0.1431	0.1368	0.1451
	0.14	0.1373	0.1373	0.1286	0.1242	0.1293
	0.16	0.1211	0.119	0.1135	0.1137	0.114
	0.08	0.0999	0.0972	0.1004	0.1048	0.0992
<b>Entropi</b>		<b>2.9875</b>	<b>2.9763</b>	<b>2.9593</b>	<b>2.9504</b>	<b>2.9638</b>



**Şekil 4.20.** Hata dağılımı için üç kısıt altında MaxEnt Dağılımları

**Çizelge 4.22.** Hata dağılımı için dört kısıt altında MaxEnt Dağılımları

	Gözlem Değerleri	MaxEnt Dağılımları				
		P <sub>1.2.3.4</sub>	P <sub>1.2.3.5</sub>	P <sub>1.2.3.6</sub>	P <sub>1.2.4.5</sub>	P <sub>1.2.4.6</sub>
	0.0525	0.0643	0.0532	0.0745	0.0579	0.0551
	0.18	0.1436	0.1639	0.1296	0.1582	0.166
	0.165	0.1616	0.1611	0.1575	0.1628	0.1604
	0.095	0.151	0.1421	0.1541	0.1437	0.1401
	0.1275	0.1331	0.1286	0.1381	0.1273	0.1259
	0.14	0.1194	0.1217	0.1225	0.1176	0.1186
	0.16	0.113	0.1169	0.1127	0.1146	0.1159
	0.08	0.1139	0.1127	0.111	0.1179	0.118
<b>Entropi</b>		<b>2.9593</b>	<b>2.9441</b>	<b>2.9694</b>	<b>2.9509</b>	<b>2.9466</b>
	Gözlem Değerleri	MaxEnt Dağılımları				
		P <sub>1.2.5.6</sub>	P <sub>1.3.4.5</sub>	P <sub>1.3.4.6</sub>	P <sub>1.3.5.6</sub>	P <sub>1.4.5.6</sub>
	0.0525	0.0587	0.0601	0.0561	0.0626	0.0543
	0.18	0.1574	0.152	0.1611	0.1478	0.1702
	0.165	0.1629	0.1628	0.1618	0.1638	0.1587
	0.095	0.1439	0.1475	0.1433	0.1486	0.1372
	0.1275	0.1266	0.1299	0.128	0.1307	0.1248
	0.14	0.1173	0.1187	0.119	0.1177	0.1185
	0.16	0.1145	0.1138	0.115	0.113	0.117
	0.08	0.1186	0.1153	0.1155	0.1159	0.1194
<b>Entropi</b>		<b>2.952</b>	<b>2.9539</b>	<b>2.9482</b>	<b>2.9568</b>	<b>2.9451</b>

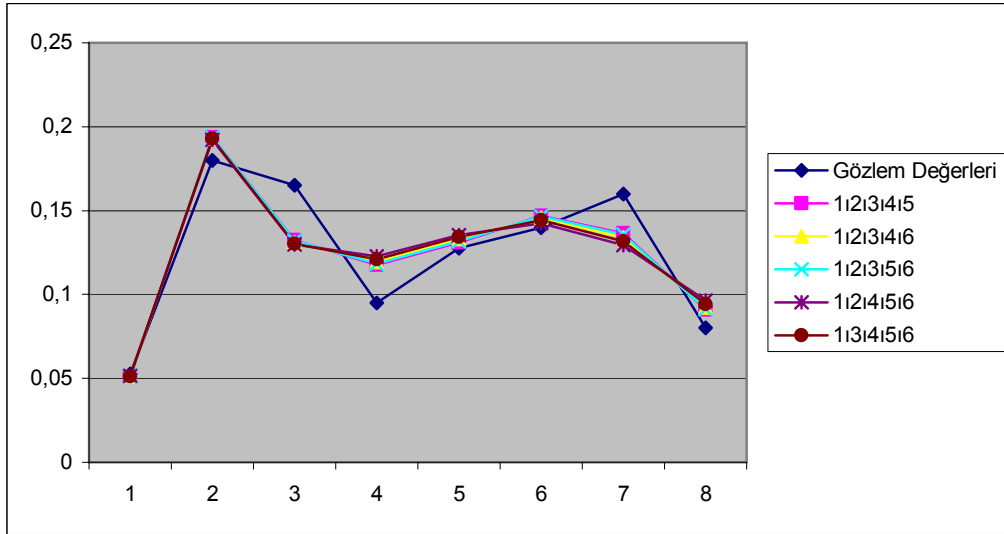


**Şekil 4.21.** Hata dağılımı için dört kısıt altında MaxEnt dağılımları



**Çizelge 4.23.** Hata dağılımı için beş kısıt altında MaxEnt Dağılımları

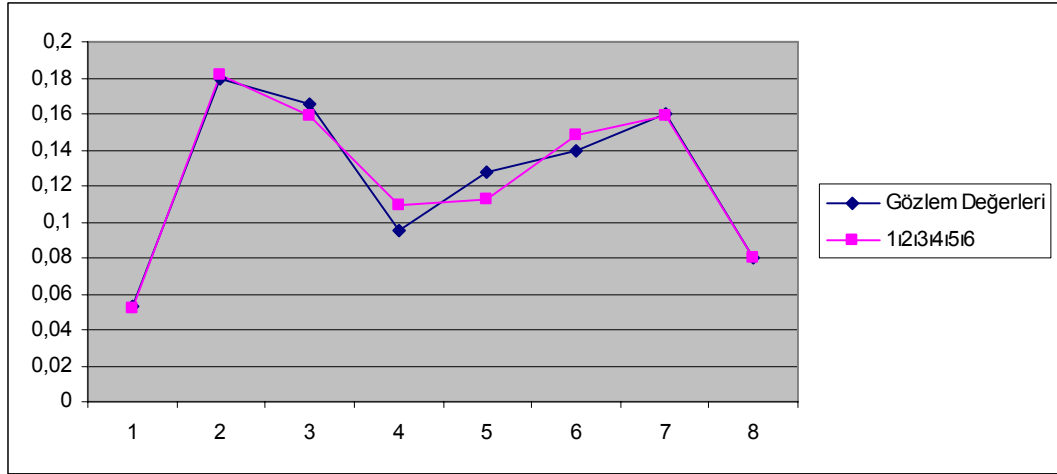
	Gözlem Değerleri	MaxEnt Dağılımları				
		P <sub>1.2.3.4.5</sub>	P <sub>1.2.3.4.6</sub>	P <sub>1.2.3.5.6</sub>	P <sub>1.2.4.5.6</sub>	P <sub>1.3.4.5.6</sub>
	0.0525	0.0509	0.0512	0.0509	0.0514	0.0513
	0.18	0.1937	0.1933	0.1936	0.1923	0.1928
	0.165	0.1324	0.1308	0.132	0.1299	0.1302
	0.095	0.1176	0.1195	0.1184	0.1228	0.1211
	0.1275	0.131	0.1331	0.1317	0.1354	0.1344
	0.14	0.147	0.1458	0.1464	0.1424	0.1443
	0.16	0.1366	0.1339	0.1356	0.1295	0.1317
	0.08	0.0907	0.0924	0.0914	0.0963	0.0941
<b>Entropi</b>		<b>2.9241</b>	<b>2.9262</b>	<b>2.9248</b>	<b>2.9296</b>	<b>2.9279</b>



**Şekil 4.22.** Hata dağılımı için beş kısıt altında MaxEnt dağılımları

**Çizelge 4.24.** Hata dağılımı için altı kısıt altında MaxEnt Dağılımları

	Gözlem Değerleri	MaxEnt Dağılımları
		P <sub>1.2.3.4.5.6</sub>
	0.0525	0.0524
	0.18	0.1813
	0.165	0.1587
	0.095	0.1089
	0.1275	0.112
	0.14	0.1483
	0.16	0.1586
	0.08	0.0798
<b>Entropi</b>		<b>2.9139</b>

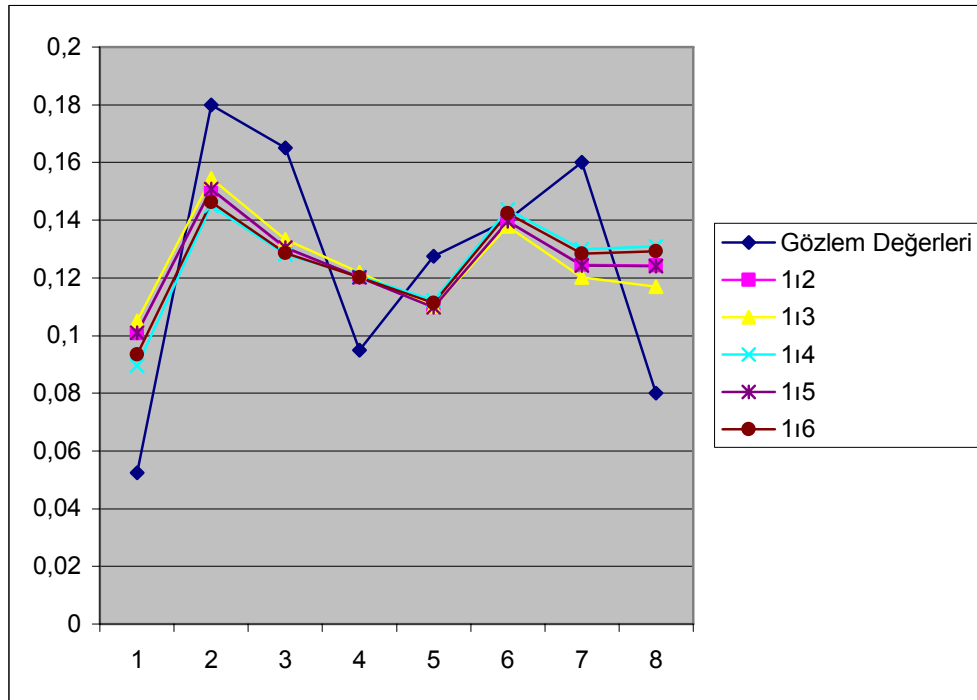


**Şekil 4.23.** Hata dağılımı için altı kısıt altında MaxEnt Dağılımları

Ek 2'deki m dosyasının  $P_0=[0.1; 0.15; 0.13; 0.12; 0.11; 0.14; 0.125; 0.125]$  önsel dağılımı alınarak çalıştırılması sonucunda Çizelge 4.25-4.29'da verilen MinxEnt dağılımları elde edilmiştir ve Şekil 4.24-4.28'de dağılımları gösterilmiştir.

Çizelge 4.25. Hata dağılımı için iki kısıt altında MinxEnt Dağılımları

	Gözlem Değerleri	MinxEnt Dağılımı				
		$P^*_{1,2}$	$P^*_{1,3}$	$P^*_{1,4}$	$P^*_{1,5}$	$P^*_{1,6}$
	0.0525	0.1008	0.1051	0.0896	0.101	0.0935
	0.18	0.1506	0.1545	0.145	0.1508	0.1463
	0.165	0.1304	0.1334	0.1282	0.1305	0.1285
	0.095	0.1201	0.122	0.1205	0.1201	0.1201
	0.1275	0.1099	0.1101	0.1122	0.1098	0.1114
	0.14	0.1396	0.1378	0.1437	0.1395	0.1425
	0.16	0.1244	0.1201	0.1299	0.1242	0.1284
	0.08	0.1242	0.117	0.1309	0.124	0.1293
<b>Entropi</b>		<b>2.9900</b>	<b>2.9897</b>	<b>2.9863</b>	<b>2.99</b>	<b>2.9881</b>



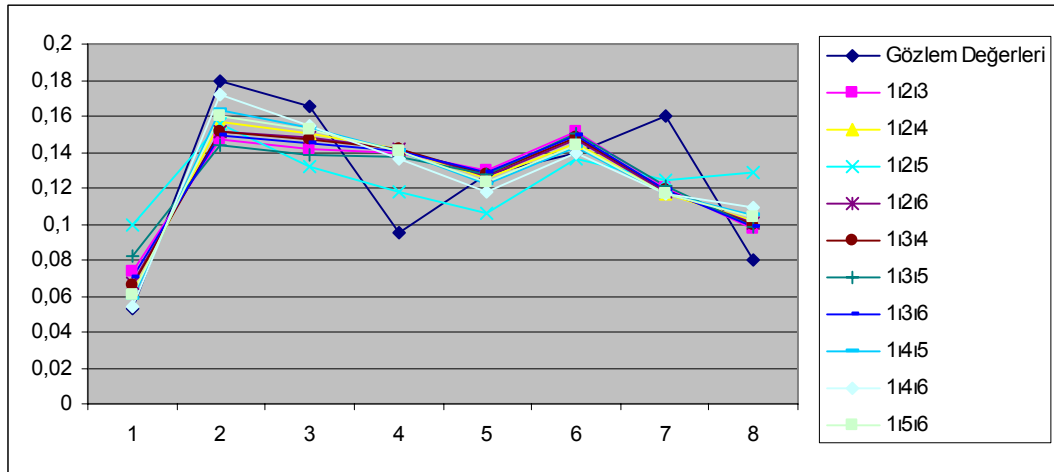
Şekil 4.24. Hata dağılımı için iki kısıt altında MinxEnt dağılımı

**Çizelge 4.26.** Hata dağılımı için üç kısıt altında MinxEnt Dağılımları

	Gözlem Değerleri	MinxEnt Dağılımları				
		P* <sub>1.2.3</sub>	P* <sub>1.2.4</sub>	P* <sub>1.2.5</sub>	P* <sub>1.2.6</sub>	P* <sub>1.3.4</sub>
	0.0525	0.0738	0.0621	0.0991	0.0674	0.0659
	0.18	0.1467	0.1566	0.1559	0.1512	0.1518
	0.165	0.142	0.1502	0.1316	0.1476	0.1468
	0.095	0.1395	0.1413	0.1179	0.1414	0.1411
	0.1275	0.1292	0.1255	0.1062	0.1269	0.1279
	0.14	0.1513	0.1453	0.1367	0.1469	0.1485
	0.16	0.1205	0.1172	0.1242	0.1178	0.1188
	0.08	0.0971	0.1018	0.1284	0.1008	0.0992
<b>Entropi</b>		<b>2.9681</b>	<b>2.9557</b>	<b>2.9872</b>	<b>2.9625</b>	<b>2.9603</b>

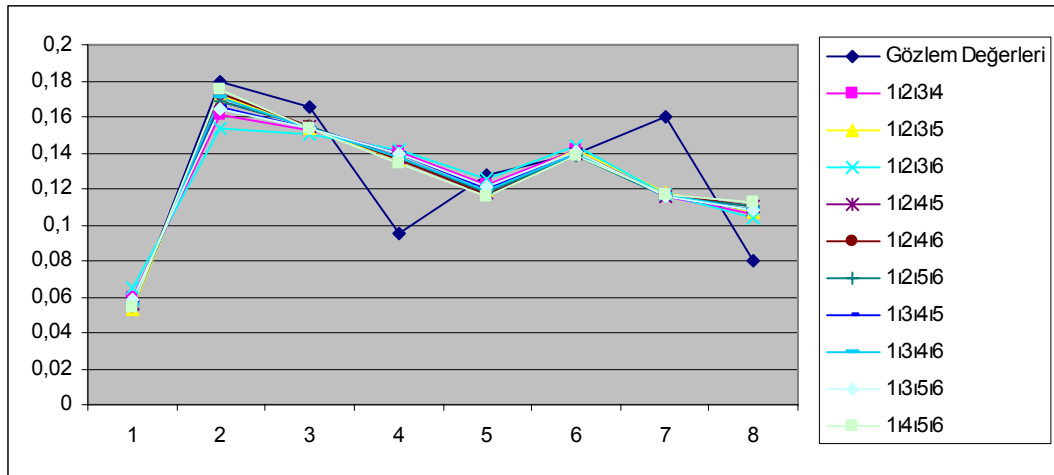
	Gözlem Değerleri	MinxEnt Dağılımları				
		P* <sub>1.3.5</sub>	P* <sub>1.3.6</sub>	P* <sub>1.4.5</sub>	P* <sub>1.4.6</sub>	P* <sub>1.5.6</sub>
	0.0525	0.0826	0.0701	0.0581	0.0544	0.0606
	0.18	0.1435	0.1487	0.1629	0.1716	0.1595
	0.165	0.1385	0.1448	0.153	0.1541	0.152
	0.095	0.1371	0.1406	0.1402	0.1367	0.141
	0.1275	0.1279	0.1284	0.1224	0.1179	0.1237
	0.14	0.1508	0.1494	0.1423	0.1394	0.1433
	0.16	0.121	0.1193	0.1163	0.1165	0.1163
	0.08	0.0987	0.0987	0.1048	0.1094	0.1035
<b>Entropi</b>		<b>2.9764</b>	<b>2.965</b>	<b>2.95</b>	<b>2.9436</b>	<b>2.9536</b>



**Şekil 4.25.** Hata dağılımı için üç kısıt altında MinxEnt dağılımları

**Çizelge 4.27.** Hata dağılımı için dört kısıt altında MinxEnt Dağılımları

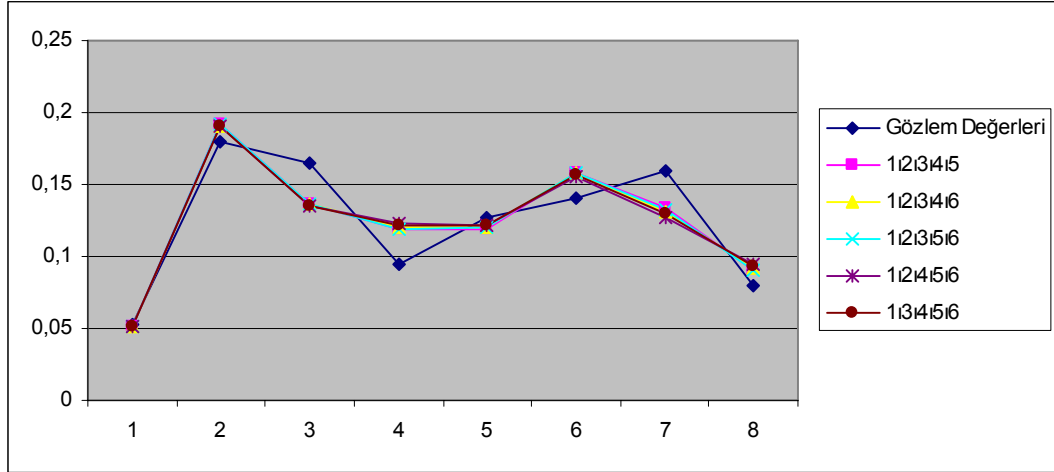
	Gözlem Değerleri	MinxEnt Dağılımları				
		P* <sub>1.2.3.4</sub>	P* <sub>1.2.3.5</sub>	P* <sub>1.2.3.6</sub>	P* <sub>1.2.4.5</sub>	P* <sub>1.2.4.6</sub>
	0.0525	0.0594	0.0526	0.0653	0.0557	0.0541
	0.18	0.1612	0.1723	0.1537	0.169	0.1729
	0.165	0.1528	0.1538	0.1501	0.1544	0.1541
	0.095	0.1404	0.1367	0.1415	0.1376	0.1359
	0.1275	0.1222	0.1191	0.1249	0.1182	0.1169
	0.14	0.1417	0.1414	0.1441	0.1391	0.1387
	0.16	0.116	0.1176	0.1166	0.1162	0.1167
	0.08	0.1062	0.1066	0.1039	0.1099	0.1107
<b>Entropi</b>		<b>2.9525</b>	<b>2.9404</b>	<b>2.9605</b>	<b>2.9462</b>	<b>2.9429</b>
	Gözlem Değerleri	MinxEnt Dağılımları				
		P* <sub>1.2.5.6</sub>	P* <sub>1.3.4.5</sub>	P* <sub>1.3.4.6</sub>	P* <sub>1.3.5.6</sub>	P* <sub>1.4.5.6</sub>
	0.0525	0.0563	0.057	0.0546	0.0584	0.0536
	0.18	0.1683	0.1657	0.1706	0.1638	0.1751
	0.165	0.1546	0.1539	0.154	0.1538	0.1538
	0.095	0.1377	0.1391	0.1373	0.1397	0.1345
	0.1275	0.118	0.1202	0.1187	0.1206	0.1155
	0.14	0.1387	0.1404	0.14	0.1403	0.1381
	0.16	0.116	0.116	0.1165	0.1158	0.1171
	0.08	0.1104	0.1076	0.1083	0.1077	0.1123
<b>Entropi</b>		<b>2.9472</b>	<b>2.9484</b>	<b>2.944</b>	<b>2.9507</b>	<b>2.9418</b>



**Şekil 4.26.** Hata dağılımı için dört kısıt altında MinxEnt dağılımları

**Çizelge 4.28.** Hata dağılımı için beş kısıt altında MinxEnt dağılımları

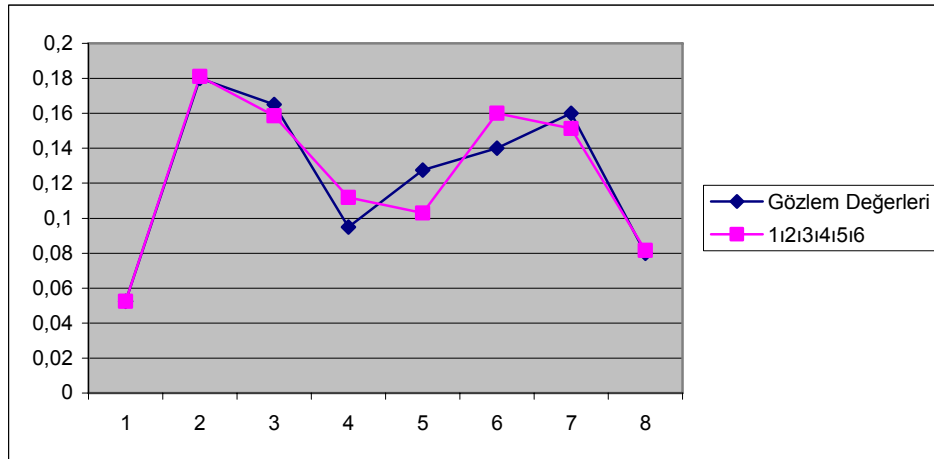
	Gözlem Değerleri	MinxEnt Dağılımları				
		P* <sub>1.2.3.4.5</sub>	P* <sub>1.2.3.4.6</sub>	P* <sub>1.2.3.5.6</sub>	P* <sub>1.2.4.5.6</sub>	P* <sub>1.3.4.5.6</sub>
0.0525	0.0512	0.0514	0.0512	0.0516	0.0515	
0.18	0.1915	0.191	0.1914	0.1901	0.1905	
0.165	0.1368	0.1359	0.1365	0.1354	0.1355	
0.095	0.1189	0.1203	0.1195	0.1229	0.1216	
0.1275	0.1194	0.1208	0.1199	0.1222	0.1216	
0.14	0.1584	0.1576	0.158	0.1552	0.1566	
0.16	0.1333	0.1313	0.1324	0.1275	0.1295	
0.08	0.0906	0.0919	0.0912	0.095	0.0932	
<b>Entropi</b>		<b>2.9225</b>	<b>2.9244</b>	<b>2.9231</b>	<b>2.9277</b>	<b>2.926</b>



**Şekil 4.27.** Hata dağılımı için beş kısıt altında MinxEnt dağılımları

**Çizelge 4.29.** Hata dağılımı için altı kısıt altında MinxEnt Dağılımları

	Gözlem Değerleri	MinxEnt Dağılımlar
		P* <sub>1.2.3.4.5.6</sub>
	0.0525	0.0524
	0.18	0.1811
	0.165	0.1586
	0.095	0.1119
	0.1275	0.1029
	0.14	0.1601
	0.16	0.1513
	0.08	0.0816
<b>Entropi</b>		<b>2.9124</b>



**Şekil 4.28.** Hata dağılımı için altı kısıt altında MinxEnt dağılımları

**Adım 4: MinMaxEnt, MaxMaxEnt, MinMinxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarının tespit edilmesi**

Bu aşamada, öncelikle Çizelge 4.20-4.24'ün her biri ayrı ayrı incelenerek en küçük entropi değerine sahip olan MaxEnt dağılımları ve en büyük entropi değerine

sahip olan MaxEnt dağılımları, başka bir deyişle MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları sırasıyla Çizelge 4.30-4.31’de gösterildiği gibi tespit edilmiştir.

**Çizelge 4.30.** MinMaxEnt dağılımları

$P_{1.4}$	$P_{1.4.6}$	$P_{1.2.3.5}$	$P_{1.2.3.4.5}$	$P_{1.2.3.4.5.6}$
0.1079	0.0587	0.0532	0.0509	0.0524
0.1163	0.1502	0.1639	0.1937	0.1813
0.1216	0.1614	0.1611	0.1324	0.1587
0.1255	0.1502	0.1421	0.1176	0.1089
0.1286	0.1368	0.1286	0.131	0.112
0.1312	0.1242	0.1217	0.147	0.1483
0.1334	0.1137	0.1169	0.1366	0.1586
0.1354	0.1048	0.1127	0.0907	0.0798

**Çizelge 4.31.** MaxMaxEnt dağılımları

$P_{1.5}$	$P_{1.2.5}$	$P_{1.2.3.6}$	$P_{1.2.4.5.6}$
0.1238	0.1168	0.0745	0.0514
0.124	0.1431	0.1296	0.1923
0.1244	0.128	0.1575	0.1299
0.1248	0.1166	0.1541	0.1228
0.1252	0.1122	0.1381	0.1354
0.1256	0.1154	0.1225	0.1424
0.1259	0.1252	0.1127	0.1295
0.1262	0.1427	0.111	0.0963

Çizelge 4.25-4.29’den en küçük entropi değerine sahip olan MinxEnt dağılımları ile en büyük entropi değerine sahip olan MinxEnt dağılımları belirlenmiştir. Başka bir ifade ile MinMinxEnt ve MaxMinxEnt dağılımları Çizelge 4.32-4.33’teki gibi bulunmuştur.



**Çizelge 4.32.** MinMinxEnt Dağılımları

$P^*_{1,4}$	$P^*_{1,4,6}$	$P^*_{1,2,3,5}$	$P^*_{1,2,3,4,5}$	$P^*_{1,2,3,4,5,6}$
0.0896	0.0544	0.0526	0.0512	0.0524
0.145	0.1716	0.1723	0.1915	0.1811
0.1282	0.1541	0.1538	0.1368	0.1586
0.1205	0.1367	0.1367	0.1189	0.1119
0.1122	0.1179	0.1191	0.1194	0.1029
0.1437	0.1394	0.1414	0.1584	0.1601
0.1299	0.1165	0.1176	0.1333	0.1513
0.1309	0.1094	0.1066	0.0906	0.0816

**Çizelge 4.33.** MaxMinxEnt Dağılımları

$P^*_{1,2}$	$P^*_{1,2,5}$	$P^*_{1,2,3,6}$	$P^*_{1,2,4,5,6}$
0.1008	0.0991	0.0653	0.0516
0.1506	0.1559	0.1537	0.1901
0.1304	0.1316	0.1501	0.1354
0.1201	0.1179	0.1415	0.1229
0.1099	0.1062	0.1249	0.1222
0.1396	0.1367	0.1441	0.1552
0.1244	0.1242	0.1166	0.1275
0.1242	0.1284	0.1039	0.095

**Adım 5: POEOD'larının olasılıksal karışım modellerinin önerilmesi**

Adım 1- 4 dikkate alınarak, bu alt bölümde POEOD'larının olasılıksal karışım modelleri önerilmiştir. Söz konusu modellerde kullanılan dağılımlar,

$$P^{(1)} = P_{1,2,3,4,5}$$

$$P^{(2)} = P_{1,2,3,4,5,6}$$

$$P^{(3)} = P_{1,5}$$

$$P^{(4)} = P^*_{1,2,3,4,5}$$

olarak belirlenmiştir.

Bu durumda önerilen modeller,

$$M1 = c_1 P^{(1)} + c_2 P^{(2)},$$

$$M2 = c_1 P^{(2)} + c_2 P^{(3)},$$

$$M3 = c_1 P^{(1)} + c_2 P^{(4)}$$

şeklindedir.

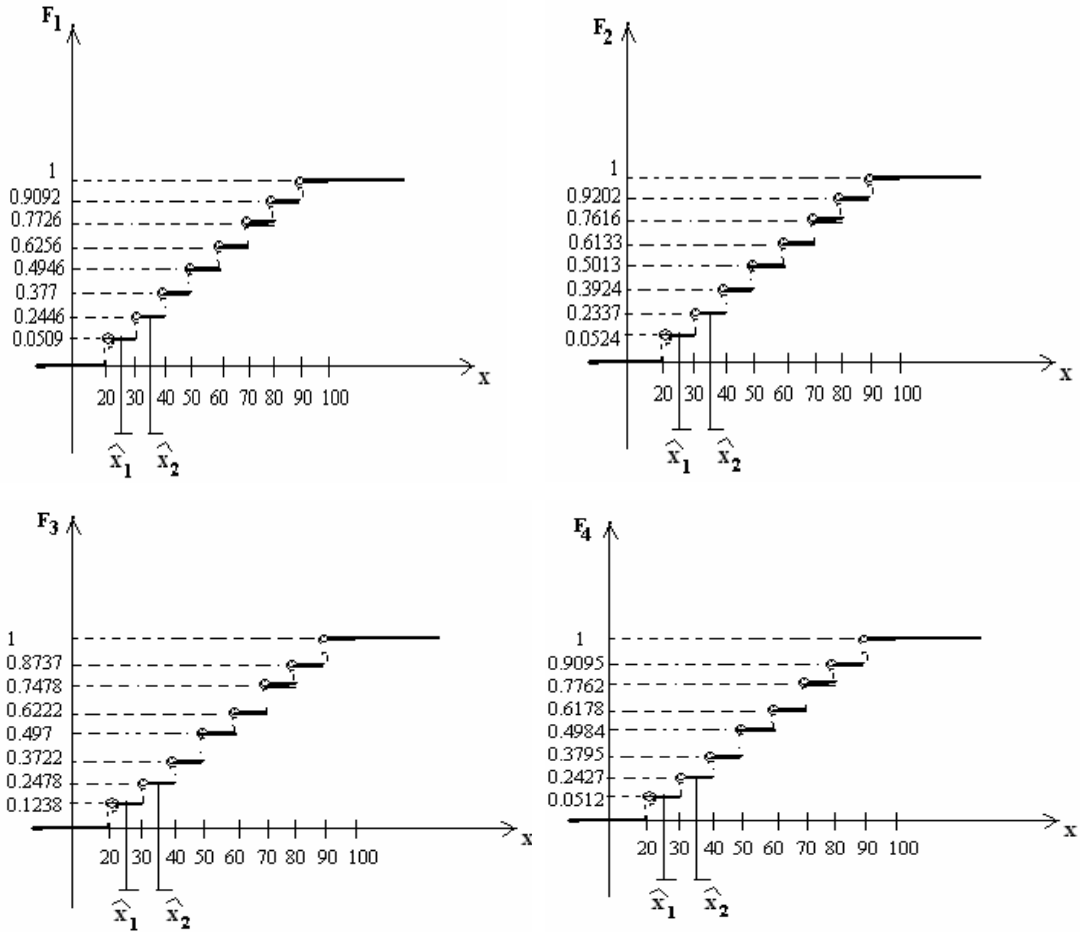
***Adım 6: Önerilen olasılıksal karışım modelleri için tanımlanabilirlik teoreminin yeter koşullarının kontrol edilmesi***

Öncelikle M1 ve M2 modellerinin tanımlanabilirliği için Teorem 3.2'nin ifade ettiği koşul, M3 ve M4 için Teorem 3.4'ün ifade ettiği koşul ve M5 için Teorem 3.5'in ifade ettiği koşul sağlanmalı. Çıkarsama 1 ve 2 gereğince söz konusu koşul,

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(\tilde{x}_1) & F_1(\tilde{x}_2) \\ F_2(\tilde{x}_1) & F_2(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} \neq 0$$

olmasıdır.

Bu amaçla Adım 5'te ifade edilen dağılımların birikimli olasılık dağılımları Şekil 4.29'daki gibi elde edilmiştir.



Şekil 4.29. Birikimli dağılım fonksiyonları

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(\tilde{x}_1) & F_1(\tilde{x}_2) \\ F_2(\tilde{x}_1) & F_2(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0509 & 0.2446 \\ 0.0524 & 0.2337 \end{vmatrix} = -0.00092 \neq 0$$

koşulu sağlandığından M1 ve

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_2(\tilde{x}_1) & F_2(\tilde{x}_2) \\ F_3(\tilde{x}_1) & F_3(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0524 & 0.2337 \\ 0.1238 & 0.2478 \end{vmatrix} = -0.0159 \neq 0$$

koşulu sağlandığından M2 ve

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(\tilde{x}_1) & F_1(\tilde{x}_2) \\ F_4(\tilde{x}_1) & F_4(\tilde{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0509 & 0.2446 \\ 0.0512 & 0.2427 \end{vmatrix} = -0.00017 \neq 0$$

koşulu sağlandığından M3 tanımlanabilir.

### ***Adım 7: Önerilen olasılıksal karışım modellerinin parametre tahmini***

Bu adımda, Adım 5’te önerilen ve Adım 6’da tanımlanabilirliği gösterilen olasılıksal karışım modellerinin parametre tahmini Alt Bölüm 4.1’de anlatılan yöntem kullanılarak yapılmıştır. Bu amaçla MATLAB paket programında yazılan kodlar Ek 4’te verilmiştir ve aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$M1 = 0.994785P^{(1)} + 0.005215P^{(2)},$$

$$M2 = 0.001275P^{(2)} + 0.998725P^{(3)},$$

$$M3 = 0.893625P^{(1)} + 0.106375P^{(4)}.$$

### ***Adım 8: Karşılaştırma ve en iyi uyum sağlayan modelin tespiti***

Bu adımda karşılaştırma yapabilmek amacıyla literatürde sıklıkla kullanılan Normal dağılımların karışım modeli ilgili veri seti için,

$$MK1 = 0.399X1 + 0.6006X2$$

yazılabilir. Burada  $X1 \sim N(38.69, 7.508)$ ,  $X2 \sim N(74.98, 14.551)$  şeklinde oluşturulmuştur.

MK1 modelinin elde edilmesi için kullanılan R Paket Program kodları Ek 3’te verilmiştir.

Ayrıca, (Shamilov, 2006d; Usta, 2006)’da MinMaxEnt dağılımın veri setine iyi uyum sağladığı vurgulanmasından dolayı, söz konusu veri seti için oluşturulmuş  $P^{(2)}$  tek başına MK2 modeli ile verilmiştir.

M1, M2, M3, MK1 ve MK2 modellerinin uyum değerleri Çizelge 4.34’de ve ilgili OKHK ve  $R^2$  ölçütleri Çizelge 4.35’te verilmiştir

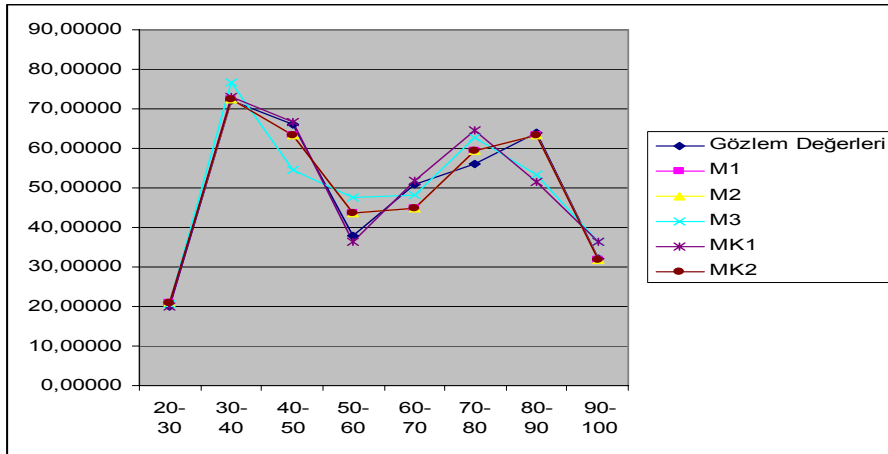
**Çizelge 4.34.** Uyum Değerleri

Aralıklar	Gözlem Değerleri	M1	M2	M3	MK1	MK2
20-30	20	20.96	20.99640	20.46720	19.98839	20.96000
30-40	72	72.56	72.49080	76.69360	72.93058	72.52000
40-50	66	63.44	63.46250	54.53280	66.65404	63.48000
50-60	38	43.56	43.56810	47.50470	36.26237	43.56000
60-70	51	44.84	44.80670	48.25360	51.87108	44.80000
70-80	56	59.32	59.30840	62.87490	64.58776	59.32000
80-90	64	63.4	63.42330	53.46040	51.42724	63.44000
90-100	32	31.96	31.94370	36.24430	36.27852	31.92000

**Çizelge 4.35.** Karşılaştırma için OKHK ve R<sup>2</sup> ölçütleri

Ölçütler	Önerilen Olasılıksal Karışım Modelleri			Karşılaştırılan Kontrol Modeller	
	M1	M2	M3	MK1	MK2
OKHK	<b>3.317228</b>	3.322547	7.31427	5.648027	3.321114
R <sup>2</sup>	<b>0.962627</b>	0.962521	0.817477	0.893149	0.962521

Son çizelge incelendiğinde M1 olasılıksal karışım modelinin en düşük hatalı ve yüksek R<sup>2</sup> değerine sahip olması nedeni ile veriye diğer modellerden daha iyi uyum sağladığı gözlenmektedir. Benzer tespit, Şekil 4.30 incelenerek de yapılabilir.



**Şekil 4.30.** Dağılımların uyumu

Başka bir deyişle, MinMaxEnt dağılımının (MK2) tek başına kullanılmasındansa MinMaxEnt dağılımlarının olasılıksal karışımının (M1) kullanılmasının daha uyumlu değerler elde ettiği tespit edilmiştir.

Sonuç olarak, radyo dalgalarını ölçen cihazın hata dağılımının iki tepeli olması nedeniyle belirli bir istatistiksel dağılımla ifade edilememesi sonucunda bu dağılım incelenmiştir. İki normal dağılımın karışımı olarak ifade edilebilen bu dağılımın MinMaxEnt dağılımlarının karışımı olarak daha iyi ifade edilebildiği tespit edilmiştir.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sunulan tezin özünü, tanımlanabilir yeni olasılıksal karışım modellerinin tanımlanması oluşturmaktadır. Bu amaçla öncelikle, sonlu sayıda karışım dağılımlarının tanımlanabilirliği için Lebesgue-Stieltjes integrali yardımıyla Teicher'ın 1. Teoremine alternatif bir ispat sunulmuştur. Buradan hareketle, önerilen olasılıksal karışım modellerinin uygulamasında göz önüne alınması gereken koşulları belirlemek amacıyla önerilen modellerin tanımlanabilirliğinin ispatlanması zorunlu hale gelmektedir. Bu yüzden sırasıyla,

1. POEOD'nın sonlu karışımının tanımlanabilir olduğu ispatlanmıştır;
2. POEOD'nın bilinen istatistiksel dağılımlar ile karışımını ifade etmek amacıyla öncelikle POEOD'nın parametreleştirilmesine gerek duyulmuştur. Bunun neticesinde, EOD dağılımları bir/iki parametreye bağlı ifadesi verilerek PEOD tanımlanmıştır;
3. PEOD'da moment fonksiyonları kümesini özel seçerek söz konusu PEOD'nın karışımının tanımlanabilir olduğu ispatlanmıştır;
4. PEOD ile Lognormal, Weibull ve Gamma dağılımlar ailelerinin üçlü, dörtlü birleşimlerinden oluşmuş yeni LGE, GWE, LWE, LGWE olasılıksal karışım modelleri önerilmiştir ve bu modellerin tanımlanabilir olduğu ispatlanmıştır. Bu dağılımlardan farklı olarak da logaritmik seriler dağılımı ailesi ile kesikli dikdörtgen dağılımlar ailesinin birleşiminden oluşmuş aileden alınan dağılımların sonlu karışımı tanımlanabilir olduğu ispatlanmıştır;
5. Ayrıca, farklı olarak da logaritmik seriler dağılımı ailesi ile kesikli dikdörtgen dağılımlar ailesinin birleşiminden oluşmuş aileden alınan dağılımların sonlu karışımının tanımlanabilir olduğu ispatlanmıştır.

Tanımlanabilirliği ispatlanan POEOD'nın olasılıksal karışım modellerinin gerçek hayatta uygulama bulduğunu betimlemek amacıyla iki problem ele alınmıştır.

1. Görüntü İşleme Problemi: Olasılıksal dağılımların, kodlama teorisindeki önemi göz ardı edilemeyecek kadar önemli (Yolacan, 2005) olduğundan ve pek çok veri sıkıştırma algoritması olasıksal dağılımları kullanarak tanımlandığından (Yolacan&Shamilov, 2007a) dolayı, Bölüm 4'teki ilk uygulama konusu bir görüntü işleme problemi olarak alınmıştır. Seçilen bir görüntünün önerilen POEOD olasıksal karışım modelleri yanından temsil edilebileceği tespit edilmiştir. Böylece, görüntünün kendisinin saklanması bilgisayarın belleğinde fazla yer kaplamasından dolayı görüntünün depolanması ya da aktarılması işlemlerinde söz konusu önerilen modellerin kullanılması önerilebilir. Bu aşamada depolanan görüntünün ters görüntüsünün elde edilmesi gibi ek problemler de ortaya çıkmaktadır. Ancak bu problemler farklı bir araştırma konusu teşkil ettiğinden bu tezde incelenmemiştir.
2. Hata Dağılımı Problemi: Radyo dalgaları ile mesafe ölçen bir cihazın hata dağılımı ele alınmıştır. Söz konusu bu dağılım bilinen istatistiksel dağılımlar ile ifade edilemeyen iki modlu bir dağılıma sahiptir. MaxEnt dağılımı ile ifade edilebilirliği incelenmiş olan bu dağılımın MaxEnt olasıksal karışım modeli aracılığı ile daha iyi temsil edildiği tespit edilmiştir.

Sonuçta, bu tezde daha uyumlu modeller belirlemek amacıyla, EOD'nın olasıksal karışımı ve EOD ile bilindik istatistiksel dağılımların olasıksal karışım modelleri geliştirilmiştir. Bu modeller istatistiğin, biyolojinin, mühendisliğin çeşitli alanlarında başarıyla uygulanabilir.



## KAYNAKLAR

- Aitkin, M. Ve Tunnicliffe Wilson, G. (1980), Mixture models, outliers and the EM algorithm. *Technometrics*, **22**, 325-332.
- Ashford, J. R. Ve Walker, P. J. (1972), Quantal response analysis for a mixture of populations. *Biometrics*, **28**, 981-988.
- Ashton, W. D. (1971). Distribution for gaps in road traffic. *J. Inst. Maths. Applics.*, **7**, 37-46.
- Atienza N., Garcia-Heras J. and Munoz-Pichardo J. M. (2006), A new condition for identifiability of finite mixture distributions, *Metrika*, **63**, 215-221.
- Bagnold, R. A. (1941). *The Physics of Blown Sand and Desert Dunes*. Methue, London.
- Barndorff-Nielsen, O. (1979). Models for non-Gaussian variation, with applications to turbulence. *Proc. Roy. Soc. A*, **353**, 401-419.
- Berry, E. R., ve Chanutin, A. (1955). Detailed electrophoretic analyses of sera of healthy young men. *J. Clin. Invest.*, **34**, 115-135.
- Bhattacharya, C. G. (1967). A simple method of resolution of a distribution into Gaussian components. *Biometrics*, **23**, 115-135.
- Binder, D. A. (1978). Bayesian cluster analysis. *Biometrika*, **65**, 31-38.
- Bishop C. M. (1995) *Neural Networks for Pattern Recognition*, Oxford University Pres Inc. New York.
- Blakley, G. R. (1967). Darwinian natural selection acting within populations. *J. Theoret. Biol.*, **17**, 252-281.
- Bohning D. (1985), "Numerical estimation of a probability measure", *Journal of Statistical Planning Inference*, **11**, 57-69.
- Bohning D. (1986), "The vertex-exchange-method in D-optimal design theory", *Metrika*, **33**, 337-347.
- Box, G. E. P., ve Tiao, G. C. (1968). A Bayesian approach to some outlier problems. *Biometrika*, **55**, 119-129.

- Brazier, S., Sparks, R. S. J., Carey, S. N., Sigurdsson, H., ve Westgate, J. A. (1983). Biomodal grain size distribution and secondary thickening in air-fall ash layers. *Nature*, **301**, 115-119.
- Broadbent, D. E. (1966). A difficulty in assessing bimodality in certain distributions. *Brit. J. Math. Stat. Psychol.*, **19**, 125-126.
- Brownell, G. L., ve Callaghan, A. B. (1963). Transform methods for tracer data analysis. *Ann. New York Acad. Sci.*, **108**, 172-181.
- Braynt, P., ve Williamson, J. A. (1978). Asymptotic Behaviour of classification ML estimates. *Biometrika*, **65**, 273-281.
- Bourke P. (2000), YCC colour space and image compression, [http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/texture\\_colour/ycc/](http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/texture_colour/ycc/).
- Buchanan-Wollaston, H. J., ve Hodgson W. C. (1928). A new method of treating frequency curves in fishery statistics, with some results. *J. Cons. Perm. Intern. Expl. Mer.*, **4**, 207-225.
- Cassie, R. M. (1954). Some uses of probability paper in the analysis of size frequency distributions. *Austral. J. Mar. Fish. Freshw. Res.*, **5**, 513-522.
- Cassie, R. M. (1962). Frequency distribution models in the ecology of plankton and other organisms. *J. Anim. Ecol.*, **31**, 65-92.
- Charlier, C. V. L., ve Wicksell, S. D. (1924). On the dissection of frequency functions. *Arkiv f. Matematik Astron. Och Fysik., Bd.* **18**, No:6.
- Chen J. (1998), "Penalized likelihood-ratio test for finite mixture models with multinomial observations", *Canadian Journal of Statistics*, **26**, 583-599.
- Chen H. ve Chen J. (2001), "Large sample distribution of the likelihood ratio test for normal mixtures", *Canadian Journal of Statistics*, **29**, 201-216.
- Chen H., Chen J. ve Kalbfleisch J. D. (2004), "Testing for a finite mixture model with two components", *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **66** (1), 95-115.
- Chen H., Chen J. ve Kalbfleisch J. D. (2001), "A modified likelihood ratio test for homogeneity in finite mixture models", *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **63**, 19-29.

- Cheng R. C. H. ve Traylor L. (1995), "Non-regular maximum likelihood problems", *J. R. Statist. Soc. B*, **57**, 3-44.
- Chernoff H. ve Lander E. (1995), "Asymptotic distribution of the likelihood ratio test that a mixture of two binomials is a single binomial", *Journal of Statistical Planning Inference*, **43**, 19-40.
- Clark, M. W. (1976). Some methods for statistical analysis of multimodal distributions and their application to grain-size data. *J. Math. Geol.*, **8**, 267-282.
- Clark, M. W. (1977). GETHEN: a computer program for the decomposition of mixtures of two normal distributions by the method of moments. *Comput. Geosci.*, **3**, 257-267.
- Clark, V. A., Chapman, J. M., Coulson, A. H., and Hasselblad, V. (1968). Dividing the blood pressure from the Los Angeles heart study into two normal distributions. *Johns Hopkins. Med. J.*, **122**, 77-83.
- Cohen, A. C. (1965). *Estimation in mixtures of discrete distributions*. In *Classical and Contagious Discrete Distributions* (ed. G. P. Patil), 373-378. Pergamon, New York.
- Cover, T. M. (1991) *Elements of information theory*. John Wiley, New York.
- Covey-Crump, P. A. K. (1970). Statistical analysis of granule size in the granular cells of the magnum of the hen oviduct. *Q. J. Exp. Physiol.*, **55**, 233-237.
- Cox, D. R. (1966). Notes on the analysis of mixed frequency distributions. *Br. J. Math. Stat. Psychol.*, **19**, 39-47.
- Dacunha-Castelle D. ve Gassiat E. (1999), "Testing in locally conic models", *Probability and Statistics*, **1**, 285-317.
- Dallaville, J. M., Orr, C., ve Blocker, H. G. (1951). Fitting bimodal particle size distribution curves. *Ind. Eng. Chem.*, **43**, 1377-1380.
- Daniels, H. E. (1961). Mixtures of geometric distributions. *J. R. Statist. Soc. B*, **23**, 409-413.
- Davis, D. J. (1952). An analysis of some failure data. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **47**, 113-150.

- Dempster A., Laird N., ve Rubin D. (1977), "Maximum likelihood estimation from incomplete data via the EM algorithm," *J. Roy. Statist. Soc. Series B*, **39**, 1–38.
- Dick, N. P., ve Bowden, D. C. (1973). Maximum likelihood estimation for mixtures of two normal distributions. *Biometrics*, **29**, 781-790.
- Do, K. Ve McLachlan, G. J. (1984). Estimation of mixing proportions: a case study. *Appl. Statist.*, **33**, 134-140.
- Du J., (2002), *Combined Algorithm for Constrained Estimation of Finite Mixture Distributions with Grouped Data and Conditional Data*, Master Project, McMasterUniversity.
- Elsgolts L. (1970), *Differential equations and the calculus of variations*, MIR Publishers, Moscow.
- Everett, G. V. (1973). The rainbow trout *Salmo gairdneri* (Rich.) fishery of Lake Titicaca. *J. Fish. Biol.*, **5**, 429-440.
- Everitt B. S. ve Hand D. J. (1981), *Finite Mixture Distributions*, London: Chapman and Hall.
- Essam H. and Khalaf E. A. (1981), On identifiability of finite mixtures of distributions, *IEE Transactions on Information Theory*, **IT-27**, No.5, pp.664-668.
- Fold, R. L. (1971). Longitudinal dunes of the Northwestern edge of the Simpson Desert, northern Territory, Australia. I. Geomorphology and quasi-size relationships. *Sedimentology*, **16**, 5-54.
- Fowlkes, E. B. (1979). Some methods for studying the mixture of two normal (lognormal) distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **74**, 561-575.
- Fraser, R. D. B. Ve Suzuki, B. (1966). Resolution of overlapping absorption bands by least squares procedures. *Anal. Chem.*, **38**, 1770-1773.
- Ganesalingam, S., ve McLachlan, G. J. (1979). A case study of two clustering methods based on maximum likelihood. *Stat. Neer.*, **33**, 81-90.
- Gardner, D. G. (1963). Resolution of multi-component exponential decay curves using Fourier transforms. *Ann. New York Acad. Sci.*, **108**, 195-203.

- Gelfand, A. E., ve Solomon, N. (1975). Analysing the decision making process of the American jury. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **70**, 305-310.
- Ghosh J. K. ve Sen P. K. (1985), "On the asymptotic performance of the log likelihood ratio statistics for the mixture model and related results", In: LeCam, L., Olshen R. A. (Eds.), *Proceedings of the Berk. Conference in Honor of J. Neyman and J. Kiefer*, **2**, 799-806.
- Ghose, B. K. (1970). Statistical analysis of mixed fossil populations. *J. Math. Geol.*, **2**, 265-276.
- Gordon, A. D., ve Prentice, I. C. (1977). Numerical methods in quaternary palaeoecology. IV. Separating mixtures of morphologically similar pollen taxa. *Rev. Palaeobot. Palynol.*, **23**, 359-372.
- Grannis, G. F., ve Lott, J. A. (1978). A technique for determining the probability of abnormality. *Clin. Chem.*, **24**, 640-651.
- Gregor, J. (1969). An algorithm for the decomposition of a distribution into Gaussian components. *Biometrics*, **25**, 79-93.
- Gridgeman, N. T. (1970). A comparison of two methods of analysis of mixtures of normal distributions. *Technometrics*, **12**, 823-833.
- Hald, A. (1952). *Statistical Theory with Engineering Applications*. Wiley, New York.
- Harding, J. P. (1949). The use of probability paper for the graphical analysis of polymodal frequency distributions. *J. Marine Biol. Assoc.*, **28**, 141-153.
- Haris, C. M. (1983). On finite mixtures of geometric and negative binomial distributions. *Commun. Statist. A*, **12**, 987-1007.
- Hasselblad, V. (1966). Estimation of finite mixtures of distributions from the exponential family. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **64**, 1459-1471.
- Havrda H., Chavrat F. (1967), "Quantification methods of classification Processes: Concepts of Structural  $\alpha$  entropy," *Kybernetika*, **3**, 30-35.
- Hayes, M. H. (1996) *Statistical digital signal processing and modeling*, New York : J. Wiley.
- Henna J. (1994) Examples of identifiable mixture, *J. Jpn Stat Soc*, **24**, pp. 193-200.

- Hosmer, D. W. (1973). A comparison of iterative maximum likelihood estimates of the parameters of a mixture of two normal distributions under three different types sample. *Biometrics*, **29**, 761-770.
- Hosmer, D. W. (1974). Maximum likelihood estimates of the parameters of a mixture of two regression lines. *Commun. Statist.*, **3**, 995-1006.
- Jones, T. A., ve James, W. R. (1972). Analysis of bimodal orientation data. *J. Math. Geol.*, **1**, 129-135.
- Kao, J. H. K. (1959). A graphical estimation of mixed Weibull parameters in life-testing electron tubes. *Technometrics*, **1**, 389-407.
- Kapur, J.N. and Kesevan, H.K.(1992), *Entropy Optimization Principle with Applications*, Academic Pres.
- Kapur J.N.(1967), "Generalized entropy of order  $\alpha$  and type  $\beta$ ," *The mathematical seminar*, **4**, 78-94.
- Karlis D. and Meligkotsidou L. (2007), Finite mixtures of multivariate Poisson distributions with application, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, pp. 1942-1960.
- Kati, S. K., ve Gurland, J. (1961). The Poisson Pascal distribution. *Biometrics*, **17**, 527-538.
- Kayacan M. (2000), Uluslar arası Türev Ürün Piyasalarında Sistemik Risk Ve Krize Teorik Ve Uygulamalı Bir Yaklaşım, Marmara Üniversitesi, Bankacılık Doktora Tezleri
- Khalaf E. A (1988), Identifiability of finite mixtures using a new transform, *Ann Inst Stat Math*, **40**, pp.261-265
- Kullback, S. (1959), *Information Theory and Statistics*. Wiley
- Laird, N. M. (1978), Emprical Bayes methods for two-way contingency tables. *Biometrika*, **65**, 581-590.
- Larkin, K. P. (1979), An algorithm for assessing bimodality vs. unimodality in a univariate distribution. *Behav. Res. Meth. Instr.*, **11**, 467-468.
- Leisch F. (2004), "FlexMix: A General Framework for Finite Mixture Models and Latent Class Regression in R", *Journal of Statitical Software*, **11** (8).

- Lepeltier, C. (1969), A simplified statistical treatment of geochemical data by graphical representation. *Econ. Geol.*, **64**, 538-550.
- Lemdani, M. ve Pons, O. (1999). Likelihood ratio tests in contamination models. *Bernoulli* **5**, 705-719.
- Leytham, K. M. (1984). Maximum likelihood estimates for the parameters of mixture distributions. *Water Resour. Res.*, **20**, 896-902.
- Lindsay, B.G. (1995) *Mixture models: Theory, Geometry and Applications*. IMS
- Lindsay (1983) "The Geometry of Mixture Likelihoods: A General Theory", *Annals of Statistics*, **11**, 86-94.
- Lindsay, B. G. (1989). Moment matrices: applications in mixtures. *Annals of Statistics*. **17**, 722-740.
- Lind N.C. (1997). "Three information theoretical methods to estimate a random variable," *Journal of Environmental Management*, **49**, 43-51.
- Lipscomb, W. N., Rubin, T. R., ve Sturdivant, J. H. (1947). An investigation of a method for the analysis of smokes according to particle size. *J. Appl. Physics*, **18**, 72-79.
- Lesperance, M. L. ve Kalbfleisch, J. D. (1992). An algorithm for computing the nonparametric MLE of a mixing distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **87**(417), 120-126.
- Macdonald, P. D. M. (1971). Comment on a paper by Choi and Bulgren. *J. R. Statist. Soc. B*, **33**, 326-329.
- Macdonald, P. D. M. (1975). Estimation of finite distribution mixtures. In *Applied Statistics* (Ed. R. P. Gupta), 231-245. North Holland, Amsterdam.
- Macdonald, P. D. M., ve Pitcher, T. J. (1979). Age groups from size-frequency data: a versatile and efficient method of analyzing distribution mixtures. *J. Fish. Res. Bd. Can.*, **36**, 987-1001.
- McGuire, J. U., Brindley, T. A., ve Bancroft, T. A. (1957). The distribution of European Corn borer larvae *pyrausta nubilalis* (H. N.) in field corn. *Biometrics*, **13**, 65-78.
- McLachlan G. ve Peel D. (2000). *Finite Mixture Models*. John Wiley and Sons Inc.

- McLachlan G. J. ve Basford K. E. (1988), *Mixture models: inference and applications to clustering*, Marcel Dekker, New York.
- Makov, U. E. (1980). The statistical problems of unconfirmed cases in medical statistics. *In Teoria dele Decisioni in Medicina* (Ed. E. Gireli-Bruni), 149-162. Bertani, Verona.
- Mandelbaum, J., ve Haris, C. M. (1982). Parameter estimation under progressive censoring conditions for a finite mixture of Weibull distributions. *TIMS/Studies in Management Sciences*, **19**, 239-260.
- Mardia, K. V., ve sutton, T. W. (1975). On the modes of the mixture of two von Mises distributions. *Biometrika*, **62**, 699-701.
- Marks, R. G., ve Rao, P. V. (1979). An estimation procedure for data containing outliers with a one-directional shift in the mean. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **74**, 614-620.
- Martin, E. S. (1936). A Study of an Egyptian series of mandibles. With special reference to mathematical methods of sexing. *Biometrika*, **28**, 149-178.
- Masuyama, M. (1977). A mixture of two gamma distributions applied to rheumatoid arthritis. *Rep. Stat. Appl. Res. JUSE*, **24**, 28-31.
- Mosimann, J. E. (1962). On the compound multinomial distribution, the multivariate beta distribution, and correlations among proportions. *Biometrika*, **49**, 64-82.
- Mert Kantar Y. (2006), *Entropi Optimization Metodlarıyla Rassal Değişkenlerin Dağılımlarının İncelenmesi*, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Danışman: A. Şamilov, 79 sayfa.
- Muench, H. (1936). The probability distribution of protection test results. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **31**, 677-689.
- Muench, H. (1938). Discrete frequency distributions arising from mixtures of several single probability values. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **33**, 390-398
- Mundry, E. (1972). On the resolution of mixed frequency distributions into normal components. *J. Math. Geol.*, **4**, 55-60.
- Nailong W. (1977), *The Maximum Entropy Method*, Springer-Verlag, Berlin.



- Neyman, J. (1939). On a new class of 'contagious distributions' applicable in entomology and bacteriology. *Ann. Math. Statist.*, **10**, 35-57.
- Nellen T., Murry Bergtraum High School,  
<http://www.beaconschool.org/~pththeory/vision.html>.
- O'Neill, T. J. (1978). Normal discrimination with unclassified observations. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **73**, 821-826.
- Paul, A. E. (1978). A generalized compound Poisson model for consumer purchase panel data analysis. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **73**, 706-713.
- Pearson, K. (1894), "Contributions to the mathematical theory of evolution", *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. **185**, 71-110.
- Pearson K., (1906), "On a Coefficient of Class Heterogeneity or Divergence", *Biometrika*, **5**, 198-203.
- Pearson, K. (1914). A study of Trypanosome strains. *Biometrika*, **10**, 85-143.
- Quandt, R. E. (1972). A new approach to estimating switching regressions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **67**, 306-310.
- Quandt, R. E., ve Ramsey, J. B. (1978). Estimating mixtures of normal distributions and switching regressions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **73**, 730-738.
- Ranneby B.(1984), "The maximum spacing method: an estimated method related to the maximum likelihood method." *Scand.J.Statists*, **11** ,93-112.
- Rengi A. (1961), "On measures of entropy and information," *Proc. 4. Berkeley Syms.Math. Stat.Prob.*, **1**, 547-561.
- Rao, C. R. (1948). The utilization of multiple measurements in problems of biological classification. *J. R. Statist. Soc. B.*, **10**, 159-203.
- Raper, L. P., Balkau, B., Taylor, R., Milner, B., Collins, V., ve Zimmet, P. (1982). Plasma glucose distributions in two Pacific populations: the bimodality phenomenon.
- Rider, P. R. (1961). The method of moments applied to a mixture of two exponential distributions. *Ann. Math.Statist.*, **32**, 143-147.

- Roseanna M. N. ve Borchers B. (2001). A MATLAB Implementation of the Minimum Relative Entropy Method for Linear Inverse Problems, *Computers & Geosciences*, **27**, 757-762.
- Rushforth, N. B., Bennett, P. H., Steinberg, A. G., Burch, T. A., ve Miller, M. (1971). Diabets in the Pima Indians. Evidence of bimodality in glucose tolerance distributions. *Diabetes*, **20**, 756-765.
- Sandor, T., Sridhar, B., ve Hollenberg, N. K. (1978). Multiexponential fit of data by using the maximum likelihood method on a minicomputer. *Comput. Biomed. Res.*, **11**, 35-40.
- Schilling, W. (1947). A frequency distribution represented as the sum of two Poisson distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **42**, 407-424.
- Scott, A. J., ve Symons, M. J. (1971). Clustering methods based on likelihood ratio criteria. *Biometrics*. **27**, 238-397.
- Shamilov A. (2006), A Development of Entropy Optimization Methods, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **5(5)**, 568-575.
- Shamilov A. , Mert Kantar Y. (2006), On a new method of obtaining probability distributions based on maximum entropy principle, *The scientific and pedagogical news of "Odlar Yurdu" University*, **16**, 74-81.
- Shamilov A., Usta I. ve Mert Kantar Y. (2006), The Distribution of Minimizing Maximum Entropy: Alternative to Weibull Distribution for Wind Speed, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **6 (5)**, 695-700.
- Shamilov A., Mert Kantar A. ve Usta İ. (2006), On a Functional Defined by Means of Kullback-Leibler Measure and its Statistical Applications, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **6 (5)**, 677-683.
- Shamilov A., Mert Kantar Y. (2006), Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Metodlarının Matematiksel Temelleri, *5. İstatistik Günleri sempozyumu*, 13.
- Shamilov A., Ağaoğlu E., Usta İ., Mert Kantar Y., Yolaçan Ş., Giriftinoğlu Ç. (2006), "MinMaxEnt Dağılımı Yardımıyla Modelleme, *5. İstatistik Günleri sempozyumu*, 12.

- Shamilov A., Giriftinoglu C., Usta İ. ve Mert Kantar Y. (2006), Determining Probability Distribution by Minimum Cross Entropy Method, *Proceedings of the 6th WSEAS International Conference on Simulation, Modelling and Optimization*, Lisbon, Portugal, 644-647.
- Shamilov A. ve Mert Kantar Y. (2005), On a Distribution Minimizing Maximum Entropy, *Ordered Statistical Data: Approximations, Bounds and Characterizations*, Izmir University of Economics, 56.
- Shamilov A. ve Yolacan S. (2006a), Statistical Structure of Printed Turkish, English, German, French, Russian and Spanish, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **6**(5), 756-762.
- Shamilov A., Yolacan S. (2006b), Comparisons of the Turkish, English, German, French, Russian and Spanish Languages For Communication of Same Semantic Content, *Proceedings of the 6th WSEAS International Conference on Simulation, Modelling and Optimization*, Lisbon, Portugal, 206-209.
- Shamilov A., Yolaçan Ş. (2006c), Türkçe, İngilizce, Almanca, Fransızca, Rusça ve İspanyolca İçin İkili Kodların kurulması ve Optimal Kodlama Yönteminin Belirlenmesi, *5. İstatistik Günleri sempozyumu*, 15.
- Shamilov A, Ağaoğlu E., Usta İ., Mert Kantar Y., Yolaçan Ş., Giriftinoğlu Ç. (2006d), MinMaxEnt Dağılımı Yardımıyla Modelleme, *5. İstatistik Günleri sempozyumu*, 12.
- Shamilov A., Yolacan S. (2005), Various Binary Codes For Probability Distribution of Turkish Letters, *Ordered Statistical Data: Approximations, Bounds and Characterizations*, Izmir University of Economics, 70.
- Shamilov A, Giriftinoğlu Ç., Yolaçan Ş, Mert Kantar Y., Usta İ. (2006 a), Dünya Ülkelerinin Kentsel ve Kırsal Nüfus Homojenliğinin Genişletilmiş Maksimum Entropi Ölçümü ile Belirlenmesi, *5. İstatistik Günleri sempozyumu*, 54.
- Shamilov A. (2007), Generalized Entropy Optimization Problems and the Existence of Their Solutions, *Physica A*, **382**(2), 465-472.
- Sichel, H. S. (1975), On a distribution law for word frequencies. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **70**, 542-547.

- Silverman, B. W. (1978), Density ratios, empirical likelihood, and cot death, *Appl. Statist.*, **27**, 26-33.
- Silverman, B. W. (1981), Using kernel density estimates to investigate multimodality. *J. R. Statist. Soc. B*, **43**, 97-99.
- Skellam, J. G. (1948). A probability distribution derived from the binomial distribution by regarding the probability of success as variable between sets of trials. *J. R. Statist. Soc. B*, **10**, 257-261.
- Skene, A. M. (1978). Discrimination using latent structure models. In *COMPSTAT 1978* (Eds. L. Corsten ve J. Hermans), 199-204, Physica-Verlag, Vienna.
- Smith, D. M., ve Bartlett, J. C. (1961). Calculation of the areas of isolated or overlapping normal probability curves, *Nature*, **191**, 688-689.
- Spira R. (1971), Calculation of the Gamma Function by Stirling's Formula *Mathematics of Computation*, Vol. 25, No. 114, 317-322.
- Suchindran, C. M., ve Lachenbruch, P. A. (1974). Estimates of parameters in a probability model for first livebirth interval. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **69**, 507-513.
- Symons, M. J. (1981), Clustering criteria and multivariate normal mixtures. *Biometrics*, **37**, 35-43.
- Şamilov A. (2007), *Ölçüm Teorisi, Olasılık ve Lebesgue Integrali*, Anadolu Üniversitesi Yayınları, Eskişehir.
- Tan, W. Y., and Chang, W. C. (1972). Convolution approach to genetic analysis of quantitative characters of self-fertilized population. *Biometrics*, **28**, 1073-1090.
- Tanaka, S. (1962), A method of analysing a polymodal frequency distribution and its application to the length distribution of the porgy, *Taius tumifrons* (T&S). *J. Fish. Res. Bd. Can.*, **19**, 1143-1159.
- Tanner, W. F. (1959), Sample components obtained by the method of differences. *J. Sed. Pet.*, **29**, 408-411.
- Tanner, W. F. (1962), Components of the hypsometric curve of the earth. *J. Geophys. Res.*, **67**, 2841-2843.

- Tarter, M., ve Silvers, A. (1975), Implementation and application of bivariate Gaussian mixture decomposition. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **70**, 47-55.
- Taylor, B. J. R. (1965), The analysis of polymodal frequency distributions. *J. Anim. Ecol.*, **34**, 445-452.
- Teicher, H. (1961), Identifiability of mixtures. *Annals of Math. Stats.*, **32**, 244-48.
- Teicher, H. (1963), Identifiability of finite mixtures. *Ann. Math. Stats.*, **34**, 1265-1269.
- Thomas, E. A. C. (1969). Distribution free tests for mixed probability distributions. *Biometrika*, **56**, 475-484.
- Tiselius, A., ve Kabat, E. A. (1939). Electrophoretic study of immune sera and purified antibody preparations. *J. Exp. Med.*, **69**, 119-131.
- Titterington, D. M. (1976). Updating a diagnostic system using unconfirmed cases. *Appl. Statist.*, **25**, 238-247.
- Titterington D., Smith A. ve Makov U. (1985), *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*, Chichester: Wiley.
- Unger, H. (1975). *Pollenanalytische und stratigraphische Untersuchungen an zwei Spätglazial-Vorkommen in Schleswig-Holstein*. Mitt. Arbeitsgem. Geobot. Schleswig-Holstein, Hamburg, 25.
- Usta, İ. (2006). MaxEnt ve MinxEnt Optimizasyon Prensiplerine Bağlı Nümerik İncelemeler ve İstatistiksel Uygulamalar, Anadolu Üniversitesi Yüksek Lisans Tezi.
- Van Andel, T. H. (1973). Texture and disposal of sediments in the Panama Basin. *J. Geol.*, **81**, 434-457.
- Wallace C., Michigan Technological University, <http://www.learning-org.com/00.01/0116.html>, 2000.
- Wadhams, P. D. (1981). Sea-ice topography of the Arctic Ocean. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, **302**, 45-85.
- Wedel M. ve Kamakura W. A. (2001), *Market Segmentation – Conceptual and Methodological Foundations*, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, USA, 2nd edition.

- Wedel M. ve DeSarbo W. S. (1995), "A Mixture Likelihood Approach for Generalized Linear Models", *Journal of Classification*, **12**, 21-55.
- Weldon, W. F. R. (1892). "Certain correlated variations in *Crangon vulgaris*". *Proceedings of the Royal Society of London* **51**, 2-21.
- Wild, A. E. (1965). Protein concentration of the rabbit foetal fluids. *Proc. Roy. Soc. B*, **163**, 95-115.
- Wilkins, C. A. (1961). A problem concerned with weighting of distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **56**, 281-292.
- Wolfe, J. H. (1970). Pattern clustering by multivariate mixture analysis. *Multivar. Behav. Res.*, **5**, 329-350.
- Wu C., (1983) "On the convergence properties of the EM algorithm," *Ann. Statist.*, **11**, 95-103.
- Yakowitz, S. J. Ve Spragins, J. D. (1968), On the identifiability of finite mixtures. *Ann. Math. Stats.*, **39**, 209-214.
- Yolacan S., Shamilov A. (2007a), "A Fano-Huffman Based Statistical Coding Method", *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 6 (1).
- Yolacan S., Shamilov A. (2007b), "Maximum Equality Estimator Versus Maximum Likelihood Estimator For The Parameters of a Mixture of Two Normal Distributions", ICMSAO, Abu Dhabi, UAE.
- Yolaçan Ş. (2005), *Farklı Dillerin Entropi ve İnfomasyon Teorisi Açısından İstatistiksel Özellikleri*, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi.
- Zhu S.C., Wu Y. N. ve Mumford D. (1997), Minimax Entropy Principle and Its Application to Texture Modeling, *Neural Computation*, **9**, 1627-1660.
- [http://www.saglikb.gazi.edu.tr/bolumler/ders\\_katologlari/katolog\\_tip.doc](http://www.saglikb.gazi.edu.tr/bolumler/ders_katologlari/katolog_tip.doc) (2007)
- <http://tr.wikipedia.org/wiki/RGB> (2007)
- Венцель, Е. С., Теория Вероятностей, Москва, (1969)

**Ek-1 Sonlu karışım modellerinin literatürdeki uygulamaları**

UYGULAMA	KARIŞIM TİPİ	Veri Seti	Tahmin Yöntemi	Referans
<b>BALIKÇILIK ARAŞTIRMALARI</b>				
Halibut'un cinsiyetlerine uzunlukları (Kalkan) göre	Normal	H	ML	Hosmer (1973)
	Normal/non-parametrik	R	Çeşitli	Murray ve Titterington (1978)
Halibut uzunlukları, iki yaş grubu (cinsiyet)	Regresyonlar	-	ML	Hosmer (1974)
Turna balığı uzunlukları (yaşa göre)	Normaller	-	MD, ML	Macdonald (1971)
		D	Çeşitli	Macdonald (1975)
		H	MD	Macdonald ve Pitcher (1979)
Golyan balığının uzunlukları	Normaller	D	ML, MD	Macdonald (1975)
Sinarit uzunlukları (yaş)	Normaller	D	GR	Tanaka (1962)
		D	GR	Bhattacharya (1967)
		R	Çeşitli	Clark (1976)
Ringa balığının uzunlukları (yumurtalı)	Normaller	-	GR	Buchanan-Wollaston ve Hodgson (1928)
		H	GR	Harding (1949)
Alabalık uzunlukları	Normaller	-	MM, ML	Dick ve Bowden (1973)
Levrek uzunlukları (yaşa göre)	Normaller	D	GR	Cassie (1954)
Alaca alabalık	Normaller	H	GR	Everett (1973)
<b>EKONOMİ</b>				
Maaş regresyonu	Regresyonlar	-	MD	Quandt ve Ramsey (1978)
Barınma regresyonu	Regresyonlar	-	ML	Quandt (1972)

UYGULAMA	KARIŞIM TİPİ	Veri Seti	Tahmin Yöntemi	Referans
<b>EKONOMİ (devam)</b>				
Alışveriş sayısı	Poisson bileşen Negatif binomial bileşen	D	ML	Paul (1978)
<b>TIBBİ</b>				
Klinik test skorları (kafatası yaralanma sonuçları)	Gizli (latent) sınıf	-	ML	Skene (1978)
Klinik test skorları	Çok değişkenli normal	R	B	Titterington (1976)
Mast hücre sayımı (bebek ölümleri)	Non- parametrikler	R	-	Silverman (1978)
Romatizma ilk atak yaşı	Gammalar	R	MM	Masuyama (1977)
Klinik test skoru (hemofili gelişimi)	normaller	R	Çeşitli	Makov (1980)
		D	ML, CA	Ganesalingam ve McLachlan (1979)
Böbrek ksenon düzeyleri (kaynaklar)	Üssel	-	FD	Sandor, Sridhar ve Hollenberg (1978)
DNA	Normaller	D	FD	Gregor (1969)
Gebe kalma zamanı	Üssel	D	ML	Suchindran ve Lachenbruch (1974)
Diş basıncı (hata)	Normaller	D	MM	Marks ve Rao (1979)
Kolesterol trigliserid veri seti	Tek değişkenli normaller	-	FD (GR)	Tarter ve Silver (1975)
Kromozom bileşimi	Beta binomial	R	MM, ML	Skellam (1948)
Değerlendirmede alel oranı	Kesikli (Markov)	-	-	Blakley (1967)
Klinik test skorları (diabetik)	Çok değişkenli normaller	R	ML, CA	Symons (1981)
Plazma glukoz düzeyleri (iki anakütle)	Normaller	H	ML	Raper v.d. (1982)
Kan glukoz düzeyleri (diabetik)	Normaller	H	GR, ML	Rushforth v.d. (1971)
Kan basıncı	Normaller	H	ML	Clark v.d. (1968)
Klinik ölçümler	Çeşitli	C	-	Grannis ve Lott (1978)



<b>UYGULAMA</b>	<b>KARIŞIM TİPİ</b>	<b>Veri Seti</b>	<b>Tahmin Yöntemi</b>	<b>Referans</b>
<b>PSİKOLOJİ</b>				
Yanıt zamanları	Lognormaller	D	-	Broadbent (1966)
			GR	Cox (1966)
Reaksiyon zamanları	Kesikli	H	-	Thomas (1969)
<b>PALEONTOLOJİ</b>				
Foraminifer çapı (tipleri)	Normaller	H	MM	Ghose(1970)
		R	Çeşitli	Clark (1976)
Mısırlıların altçene genişliği (cinsiyete göre)	Normaller	D	MM	Martin (1936)
<b>ELEKTROFOREZ</b>				
Emilim spektrumu	Normaller	C	FD	Fraser ve Suzuki (1966)
Protein yoğunlaşması	Normaller	C	FD	Tiselius ve Kabat (1939)
Protein yoğunlaşması	Normaller	C	FD	Berry ve Chanutin (1955)
Protein yoğunlaşması	Normaller	C	FD	Wild (1965)
Gaz kromatogram	Normaller	-	FG/GR	Smith ve Bartlet (1961)
<b>SEDİMENTOLOJİ/JEOLOJİ</b>				
Yansıma (kömür tipleri)	Normaller	H	MD	Mundry (1972)
Kireçtaşı (çapraz yatak)	Von Mises	H	ML	Jones ve James (1972)
Kalay çözümüleme	Normaller	D	MM	M. W. Clark (1977)
Kömür külü veri seti	Normaller	D	GR	Hald (1952)
			ML	Hasselblad (1966)
			MM	Everitt ve Hand (1981)
		R	Çeşitli	Clark (1976)
Kumlu göktaş meteoru	Non-parametrik	R	Modality	Silverman (1981)
Kum tanesi genişliği	Normaller	D	GR	Taner (1959)

UYGULAMA	KARIŞIM TİPİ	Veri Seti	Tahmin Yöntemi	Referans
<b>SEDİMENTOLOJİ/JEOLOJİ</b>				
<b>devam...</b>				
Kum tanesi genişliği	Normaller	C	FD	Van Andel (1973)
Kum tanesi genişliği	Simetrik+eğik	C	FD	Bagnold (1941)
Kum tanesi yapısı	Normaller	-	MD	Clark (1976)
Metal yoğunluğu	Lognormaller	C	GR	Lepeltier (1969)
	Kuadratik üsseller	D	CF	Dallaville, Orr ve Blocker (1951)
Kum tepesi bileşimi	Normaller	-	FD	Folk (1971)
Volkanik kül tabakası	-	H*(top. ağırlık %)	-	Brazier v.d. (1983)
<b>BOTANİK</b>				
Polen tanecikleri	Normaller	D	GR(FD)	Usinger (1975)
Polen tanecikleri	Multinomial	D	ML, MD	Gordon ve Prentice (1977)
İris veri seti	Tek değişkenli normaller	R	CA	Scott ve Symons(1971)
			ML	Wolfe (1970)
			ML	O'Neill (1978)
			Bayes CA	Binder (1978)
			ML	Everitt ve Hand (1981)
Bitki çiftlerinin yükseklik farkı (Darwin'in veri seti)	Normaller	D	Bayes	Box ve Tiao (1968)
			ML	Aitkin ve Tunnicliffe Wilson (1980)
Bitki uzunluğu	Normaller	D	MM,ML	Rao (1948)
			GR	Tanaka (1962)
			R	Çeşitli Clark (1976)

UYGULAMA	KARIŞIM TİPİ	Veri Seti	Tahmin Yöntemi	Referans
<b>BOTANİK devam...</b>				
Polen sayımı	(bileşenler multinomial)	D	MM	Mosimann (1962)
Çiçek verme zamanı	Normaller	D	MM, ML	Tan ve Chang (1972)
<b>ZİRAAT</b>				
Ekin yoğunluğu	Bilinen bileşenler	-	ML	Peters ve Coberly (1976)
Arpa verimi	Faktoriyel model	R	Bayes CA	Binder (1978)
Panikül uzunluğu (pirinç soyu)	Normaller	D	MM, ML	Tan ve Chang (1972)
<b>ZOOLOJİ</b>				
Kuş hızı (gruplar)	-	H	CA	Larkin (1979)
Tripanazoma uzunlukları (soyları)	Normaller	D	MM	Pearson (1914)
		R	Çeşitli	Clark (1976)
		D	GR	Fowlkes (1979)
		D	ML	Everitt ve Hand (1981)
Yengeç alın genişliği	Normaller	D	MM	Pearson (1894)
		R	Çeşitli	Clark (1976)
Dişsel uzaklık (karides cinsiyete göre)	Normaller	D	MM	Pearson (1894)
		R	Çeşitli	Clark (1976)
Deniz kabuğu genişliği (cinsiyete göre)	Normaller	H	GR	Harding (1949)
Fare çeşitleri kafatası genişliği	Çok değişkenli normaller	-	ML	Do ve McLachlan (1984)
Yumurta sayımı	Poisson	D	MM	Muench (1936)
Fare ölüm zamanı	Binomial	D	MM	Muench (1936)
Yunusun yüzme yönleri	Von Mises	R	ML	Mardia ve Sutton (1975)

UYGULAMA	KARIŞIM TİPİ	Veri Seti	Tahmin Yöntemi	Referans
<b>ZOOLOJİ devam...</b>				
Yılanbalığı uzunluğu	Normaller	H	FD	Taylor (1965)
Plankton frekansı	Normaller	D	GR	Cassie (1962)
Tavuk yumurta kanalındaki granül genişliği	Normaller	H	ML	Covey-Crump (1970)
Mısır kurtçuk lavrası	(Neyman A)	D	MM	Neyman (1939)
	(Neyman)	D	MM	Beall (1940)
	(Poisson bileşenler)	D	MM	McGuire, Brindley ve Bancroft (1957)
Lavra	(Poisson, Pascal)	D	Ad hoc	Kati ve Gurland (1961)
<b>BOZULMA ZAMANI, vb.</b>				
Lambanın ömrü (yiplerine göre)	Üssel	D	-	Davis (1952)
İletken ömrü	Üssel	D	ML	Mendenhall ve Hader (1958)
Otobüs ömür süresi	Normal+üssel	H	-	Davis (1952)
Elektron tüpleri	Weibull	D	GR	Kao (1959)
Telefon çağrı uzunluğu	Lognormal	D	GR	Fowlkes (1979)
Lazer ömrü	Normaller	R	GR	Fowlkes (1979)
Emniyet	Weibull/üssel	-	ML	Mandelbaum ve Haris (1982)
<b>KARIŞIK</b>				
Yüzey kusurları	Poisson	D	MM	Rider (1961) Cohen (1965)
Gece sıcaklığı (iki mevsim)	normaller	D	MM	Charlier ve Wicksell (1924)
Raf hasar veri seti (hata)	Regresyonlar	R	ML	Aitkin ve Tunncliffe Wilson (1980)

UYGULAMA	KARIŞIM TİPİ		Veri Seti	Tahmin Yöntemi	Referans
<b>KARIŞIK devam...</b>					
Ölüm frekansı (mevsimler)	haberci	Poisson	D	MM	Schilling (1947)
			D	ML	Hasselblad (1969)
			D	MM	Everitt ve Hand (1981)
Erkek ölümleri (nedenleriyle)		Deneysel Bayes	D	ML	Laird (1978)
Jeodezik ölçümler		Normaller	H	MM	Gridgeman (1970)
Kuyruklu frekansı	yıldız	Poisson	D	MM	Schilling (1947)
Jüri kararları		Binomial	D	MM, MD	Gelfand ve solomon (1975)
Kelime frekansları		(Poisson bileşenler)	D	ML	Sichel (1975)
Maya frekansları	hücre	(Neyman A)	D	MM	Neyman (1939)
Genetik üreme		Kesikli	-	ML, CA	Bryant ve Williamson (1978)
Kuyruktaki sayısı (yoğun an)	kişi	(Geometrik bileşen)	-	-	Barndorff-Nielsen (1979)
Hipsometri eğrisi		Normaller	D	GR	Taner (1962)
Duman genişliği	parçacıkları	Teorik eğriler	D	-	Lipscomb, Rubin ve Sturdivant (1947)
Radyoaktif sürücü	iz	üssel	-	FD	Brownell ve Callahan (1963)
Sprey yoğunluğu		Truncated normal ya da Cauchy	-	MD	Wilkins (1961)
Deniz-buz kalınlığı		Özelleşmemiş	C	-	Wadhams (1981)
Arsenic yanıt		Probit modeller	D	GR, ML	Ashford ve Walker (1972)
Trafikte boşluklar		Üssel	D	MM, ML	Ashton (1971)
Suç frekansları		Geometrik	D	ML	Haris (1983)
Yağış		Normaller	-	ML	Leytham (1984)

## Ek-2 MaxEnt ve MinxEnt dağılımları için yazılan MATLAB kodları

```
clear all
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10
syms T
syms TP
%DATA
dat=[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10];
% A matrisindeki 1'ler satirinin olusturulmasi
s=length(dat);
for i=1:s
    b(i)=1;
end
%-----
P0=(1/s)*ones(s,1);
%Gozlenen olasiliklar
Histo1=[0 0 0 1 2 2 4 4 7 9 11 15 14 18 17 22 22 22 20 23 27 29 28 28 25 29 28 35
29 29 33 32 32 32 42 32 34 32 31 27 32 28 26 31 28 25 28 29 23 31 27 31 24 31 31
30 29 35 25 29 30 32 30 31 30 33 29 38 31 34 36 35 37 38 36 31 37 42 37 40 47 52
49 52 52 42 47 40 42 39 36 30 38 34 27 31 34 33 31 29 28 28 30 28 29 29 27 28 29
33 34 31 33 29 29 29 28 23 24 25 30 19 21 30 24 30 26 30 25 30 32 31 29 28 29 32
29 31 29 35 33 30 30 24 19 17 17 17 13 14 10 14 12 11 16 12 13 15 15 18]
n=0;
for k=1:10
    t=0;
    for i=(1+n*16):(k*16)
        t=t+Histo1(i);
        H(k)=t;
    end
    n=n+1;
end
pr=H/sum(H);
%g(j) fonksiyonlari
g1=inline('x');g2=inline('x.^2');g3=inline('log(x)');g4=inline('(log(x).^2)');
g5=inline('log(1+x.^2)');
% p(x)*g(x)'in olusturulmasi
pg1=g1(dat)*pr; pg2=g2(dat)*pr; pg3=g3(dat)*pr; pg4=g4(dat)*pr;
pg5=g5(dat)*pr;
for i=1:s
    gxpx1(i)=pg1(i,i); gxpx2(i)=pg2(i,i); gxpx3(i)=pg3(i,i);
    gxpx4(i)=pg4(i,i); gxpx5(i)=pg5(i,i);
end
% Katsayilar matrisi A
G=[b; g1(dat);g2(dat); g3(dat); g4(dat); g5(dat)];
```

```

% Moment hesabi be b vektorunun elde edilmesi
GP=[gpx1 ; gpx2; gpx3; gpx4; gpx5];
M=[1; sum(gpx1); sum(gpx2); sum(gpx3); sum(gpx4); sum(gpx5)];
%-----
ub=[1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1];
lb=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
%-----
Kisitboyut=size(G);
Kisitsayisi=Kisitboyut(1,1);
%---Herbir kisit kombinasyonu icin Maximum Entropi dagiliminin bulunmasi
for k=1:Kisitsayisi-1
kisit=k;
combos = combntns([2:Kisitsayisi],k)
ks=size(combos,1)
for i=1:ks
sayac=i;
KV=combos(i,:); %kombinasyon siralama vektoru
KVT=KV'
A1=G(1,:);
A2=G(KVT,:);
A=[A1;A2];
b1=M(1,:);
b2=M(KVT,:);
b=[b1; b2];
P=fmincon(inline('sum(x.*log(x))'),P0,[],[],A,b,lb,ub,[]);
for j=1:s
if P(j)==0
P(j)=0.000001;
end
end
MaximumEntropyDist(i,:,k)=P
entropi(i,:,k)=-(P'*log2(P))
Top(i,:,k)=sum(MaximumEntropyDist(i,:,k));
end
end
end

```

### Ek-3 İki normal dağılımın karışımının elde edilmesi için R kodları

```
> elek
  x frek
1 30 21
2 40 72
3 50 66
4 60 38
5 70 51
6 80 56
7 90 64
8 Inf 32
> sum(elek$frek)
> fitcass1<-mix(elek, mixparam(c(40, 90),1),"norm",mixconstr(consigma="CCV"))
> summary(fitcass1)
```

Parameters:

```
  pi  mu sigma
1 0.3994 38.69 7.508
2 0.6006 74.98 14.551
```

Standard Errors:

```
  pi.se mu.se sigma.se
1 0.02987 0.8658 0.4415
2 0.02987 1.1622 NA
```

Analysis of Variance Table

```
      Df Chisq Pr(>Chisq)
Residuals 3 4.7372 0.1921
```

```
> fitted(fitcass1)$mixed
[1] 19.98839 72.93058 66.65404 36.26237 51.87108 64.58776 51.42724
[8] 36.27852
```



#### Ek-4 Yarıya bölme yöntemi ile maksimum eşitlik parametre tahmini için geliştirilen kodlar

```
---- fonk3.m ----
function f = fonk3(teta)
a=[0.1411 0.1362 0.0429 0.2122
0.0001 0.0846 0.0636 0.1348 0.0001
0.1845];
b=[0 0.1649 0.1244 0.0435 0.0987
0.1824 0.1225 0.0723 0.1913
0.0001];
for i=1:10
    c(i)=((exp(1)*teta*(a(i)-
b(i)))+(exp(1)*b(i))^(a(i)-b(i)));
end
y=(prod(c));
f=y-1;
-----Kokbulma.m -----
L=0; m=1; delta=0.0001;
yL=feval('fonk3',L);
ym=feval('fonk3',m);
if yL*ym>0
disp('l ve m baslangic değerleri uygun
secilmedięinden yakınsama
saglanamadı');
end
max1=1+round((log(L-m)-
log(delta))/log(2));
for k=1:max1
p=(L+m)/2; yp=feval('fonk3',p);
if yp==0
L=p;
m=p
else if ym*yp>0
m=p;ym=yp;
else
L=p;yL=yp;
end
if m-L<delta
break
end
end
p=(L+m)/2
disp('hesaplamada yapılan hata
miktarı')
hata=abs(m-L)
disp('bulunan p değeri f fonksiyonunu
yp kadar hata ile sağlıyor')
yp=feval('fonk3',p)
disp('iterasyon sayısı')
k
end
```