KLASİK HİPERBOLİK 3–UZAYIN BİR SONLU BENZERİ

VE

PROJEKTİF DÜZLEMLERDE BAZI KONUM TEOREMLERİ

İbrahim Özgür

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

1991

KLASİK HİPERBOLİK 3–UZAYIN BİR SONLU BENZERİ
VE
PROJEKTİF DÜZLEMLERDE BAZI KONUM TEOREMLERİ

İbrahim Özgür

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman : Prof.Dr. Rüstem Kaya
(20.2.1985 – 17.10.1989)
Doç.Dr. Şükrü Olgun
(18.10.1989 – 15.4.1991)

Nisan – 1991

İbrahim Özgür'ün DOKTORA tezi olarak hazırladığı "Klasik Hiperbolik 3-Uzayın Bir Sonlu Benzeri Ve Projektif Düzlemlerde Bazı Konum Teoremleri" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

5/7/1991

Üye : Prof.Dr. Rüstem KAYA

Üye : Prof.Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR

Üye : Doç.Dr. Şükrü OLGUN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .280-2...
gün ve .12 TEMMUZ 1991...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof.Dr. Rüstem KAYA

ÖZET

Bu çalışma üç bölüm olarak düzenlenmiştir.

Birinci bölümde; projektif uzaylar ve düzlemlerle ilgili temel kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde, sonlu hiperbolik uzaylarla ilgili olarak klasik hiperbolik 3-uzayın sonlu bir modeli inşa edilerek, bazı kombinetörsel özellikleri incelenmiştir. Bu model, mertebesi n olan $S=(\mathcal{P},\mathcal{L}, I)$ projektif 3-uzayından S nin düzlemlerinin bir cümlesi olan $\mathcal{D}$ nin atılmasıyla elde edilmiştir. Öyleki S nin her projektifdüzlemi, $\mathcal{D}$ nin düzlemlerini noktadaş olmayan en az üç doğru boyunca keser ve $|\mathcal{D}|=d$ olmak üzere $4 \leqslant d \leqslant n + \frac{1}{2}(1- 4n+5)$, $n \geqslant 5$ dir.

Son bölümde, Dezargsel ve Pappussel düzlemlerde bazı konum (konfigürasyon) teoremleri verilmiş, Pappussel düzlemlerde geçerli olan teoremlerin Dezargsel düzlemlerde de sağlanıp sağlanmadığı araştırılmıştır. Bu bölümde son olarak "üçüncü mertebeden Dezargsel projektif düzlemin Pappussel olduğu" gerçeğine ilişkin sentetik bir ispat verilmiştir.

Anahtar Kelimeler:

Lineer uzay, Projektif düzlem, Dezargsel düzlem, Pappussel düzlem, Bölümlü halka, Kuaterniyonlar halkası, P_2Q projektif düzlemi, Projektif 3-uzay, Hiperbolik düzlem, Sonlu hiperbolik uzay, Konfigürasyon teoremleri.

SUMMARY

This study has been arranged as three chapters.

In the first chapter, the fundamental concepts related to the projective spaces and projective planes have been given.

In the second chapter, a finite model of the classical three-space has been constructed and some combinatorial properties of this space have been examined. This model is attained from the projective three-space $S=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ of order n, by removing a set $\mathcal{D}$ of the planes of S, such that each projective plane of S meets the planes of $\mathcal{D}$ in at least three distinct nonconcurrent lines and if d is the cardinality of $\mathcal{D}$, then d satisfied $4 \leqslant d \leqslant n+\frac{1}{2}(1- 4n+5), n \geqslant 5$.

In the last chapter, some configuration theorems in Desarguesian and Pappian projective planes have been given. Then it has been searched that if some of this theorems are valid in a Pappian plane. Lastly, it has been tried to give an axiomatic proof of the finite Desarguesian plane of order 3 is the Pappian plane.

Key Words:

Linear spaces; Projective plane, Desarguesian plane, Pappian plane, Division ring, Ring of quaternions, P_2Q projective plane, Projective 3-space, Hyperbolic space, Finite hyperbolic space, Configuration theorem.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana veren ve çalışmalarım süresince yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, halen Anadolu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Öğretim Üyesi ve Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü Sayın Hocam; Prof.Dr. Rüstem Kaya'ya, aynı Fakülte Öğretim Üyesi Sayın Hocam; Doç.Dr. Şükrü Olgun'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İbrahim ÖZGÜR

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

GÖSTERİMLER LİSTESİ

Sembol	Açıklama
$\mathcal{P}, \mathcal{N}$	Noktalar cümlesi
$\mathcal{L}$	Doğrular cümlesi
$\mathcal{D}$	Düzlemler cümlesi
I	Üzerinde bulunma bağıntısı
$(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$	Geometrik yapı
$S=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$	Lineer uzay
$\delta = \{X, Y, ..\}$	S nin nokta ve doğrularının cümlesi
$< \delta >$	δ nın ürettiği tam altuzay
dim S	S nin boyutu
$+, \cdot, \oplus, \odot$	İkili işlemler
$(R, +, \cdot)$	Gerçel sayılar cismi
$(B, +, \cdot)$	Bölümlü halka
$(Q, +, \cdot)$	Kuaterniyonlar bölümlü halkası
P	Projektif düzlem
$\mathbb{P}_2F$	F cismiyle koordinatlanan projektif düzlem
$\mathbb{P}_2R$	Gerçel projektif düzlem
$\mathbb{P}_2B$	B bölümlü halkasına karşılık gelen projektif düzlem
$\mid \ \mid$	Bir cümlenin kardinalitesi
$a \to b$	a nın görüntüsü b dir.
$\Longrightarrow$	Gerektirme
ε	Elemanıdır
Λ	Doğrular için kesişim

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

TANIM 1.

Aşağıdaki iki aksiyomu sağlayan bir $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ geometrik yapısına bir lineer uzay denir:

L1 : Farklı herhangi iki nokta bir tek doğru üzerindedir.

L2 : Herhangi bir doğru üzerinde en az iki nokta vardır.

$S=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ bir lineer uzay olsun. $\mathcal{P}'\subset\mathcal{P}$, $\mathcal{L}'\subset\mathcal{L}$ ve $I'=I\cap(\mathcal{P}'\times\mathcal{L}')$ olmak üzere eğer $S'=(\mathcal{P}', \mathcal{L}', I')$ bir lineer uzaysa S' ye S nin bir altuzayı adı verilir. S' altuzayının herhangi bir doğrusu üzerindeki S nin tüm noktaları $\mathcal{P}'$ ye aitse S' ye S nin bir tam altuzayı denir. S nin herhangi iki altuzayının arakesiti L1 i sağlar fakat L2 yi sağlamak zorunda değildir. Ancak iki tam altuzayın arakesiti gene bir tam altuzaydır. S nin nokta ve doğrularının bir $\delta=\{X,Y,\ldots\}$ cümlesi verilsin. S nin δ yı kapsayan tüm tam altuzaylarının arakesitine δ nın ürettiği tam altuzay denir ve $<\delta>$ ile gösterilir. Sonlu bir A nokta cümlesi için eğer

(1) $\qquad \exists P \in A$ için $\quad P \in < A-\{P\}>$

ise A ya bağımlıdır denir. Herhangi bir nokta cümlesinin hiçbir sonlu alt cümlesi bağımlı değilse cümleye bağımsızdır denir. S', S nin bir tam altuzayı olduğuna göre, S' yü üreten bir bağımsız alt cümleye S' nün bir bazı denir. Sonlu olarak üretilmiş S nin her S' tam altuzayının bir baza sahip olacağı aşikârdır.

TANIM 2.

S bir lineer uzay olsun. S nin sonlu olarak üretilebilen her tam altuzayının herhangi iki bazında eşit sayıda eleman varsa S ye geometriktir denir.

Herhangi bazdaki bu eleman sayısına S' nün rankı denir ve r(S') ile gösterilir. S' nün boyutu dim S' ile gösterilir ve dim S'=r(S')-1 olarak tanımlanır.

Boyutu -1, 0 ve 1 olan tam altuzaylar sırasıyla boş cümle, bir tek nokta cümlesi ve bir doğrudur. Bir S geometrik lineer uzayının t boyutlu bir tam altuzayına t-uzay denir. 2-uzaylar düzlemlerdir. S, sonlu t boyutluysa (t-1)-altuzaylara hiperdüzlemler denir.

TANIM 3.

Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir S=($\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, I) lineer uzayına projektif düzlem denir:

P1 : Farklı herhangi iki doğru bir tek noktada kesişir.

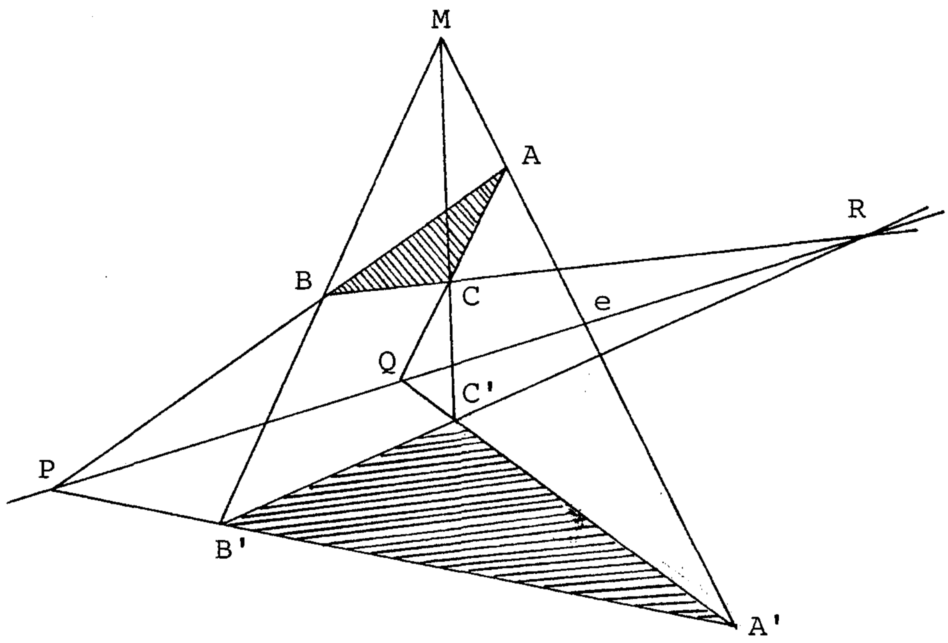
P2 : Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Bir doğrusu üzerinde n+1 nokta bulunan sonlu bir projektif düzlemin mertebesi n dir denir. Mertebesi n olan bir projektif düzlemin her doğrusu üzerinde n+1 nokta olduğu, her noktasından n+1 doğru geçtiği, toplam nokta ve doğru sayılarının n^2+n+1 er olduğu kolaylıkla ispatlanabilir.

A,B,C,A',B',C' bir geometrik yapının herhangi altı noktası olsun. Eğer A,B,C doğrudaş değilse {A,B,C} cümlesine bir üçgen denir. {A,B,C} ve {A',B',C'} iki üçgen olsun. A ve A', B ve B', C ve C' ye üçgenlerin karşılıklı köşeleri denilsin. M,A,A'; M,B,B'; M,C,C' nokta üçlüleri doğrudaş olacak biçimde bir M noktası varsa bu üçgenler M den perspektiftir denir. Ayrıca M noktasına perspektiflik merkezi; AB ve A'B', AC ve A'C', BC ve B'C' doğru ikililerine bu üçgenlerin karşılıklı kenarları denir. Bu üçgenlerin karşılıklı kenarlarının $P=AB\wedge A'B'$, $Q=AC\wedge A'C'$ ve $R=BC\wedge B'C'$ arakesit noktaları doğrudaşsa, bunların üzerinde bulunduğu doğruya perspektiflik ekseni denir. Perspektiflik ekseni e doğrusu olan iki üçgene de e ekseninden perspektif üçgenler denir.

P4(Dezarg Aksiyomu): İki üçgenin karşılıklı köşelerini birleştiren doğrular noktadaş ise, bunların karşılıklı kenarlarının arakesit noktaları doğrudaştır.

Dezarg aksiyomu, daha kısaca, "bir noktadan perspektif iki üçgen bir doğrudan da perspektif olur" biçiminde ifade edilebilir (Şekil 1.1).



Şekil 1.1

Dezarg aksiyomunu gerçekleyen bir projektif düzleme Dezarg düzlemi ya da Dezargsel düzlem, bu aksiyomu gerçeklemiyen bir düzleme de Dezargsel olmayan projektif düzlem denir.

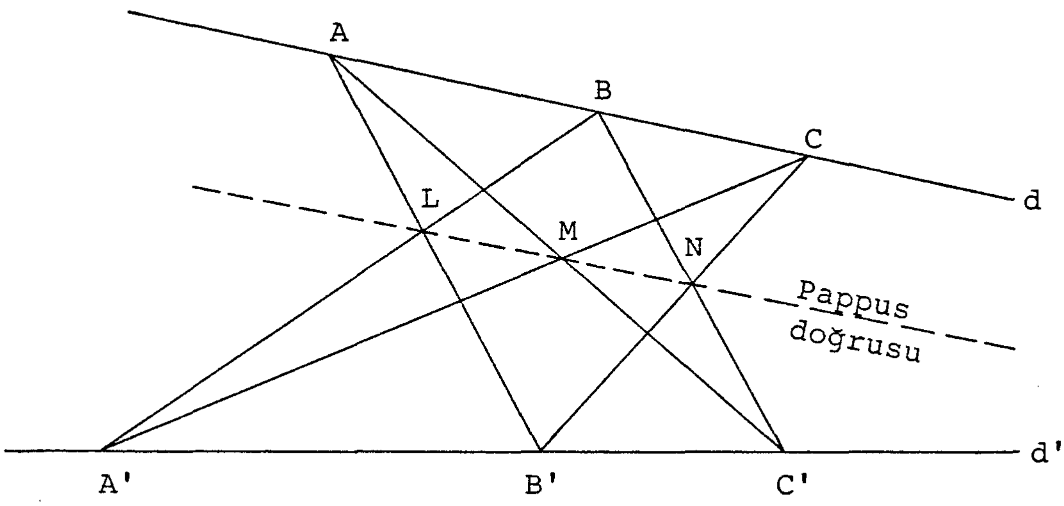
F herhangi bir cisim olmak üzere $\mathbb{P}_2F$ projektif düzlemlerinin hepsinin Dezargsel olduğu bilinmektedir.

"Farklı iki noktadan geçen en çok bir doğru vardır" önermesini sağlayan herhangi bir geometrik yapıya kısmi düzlem denir. Eğer bir kısmi düzlem sonluysa (yani $\mathcal{P} \times \mathcal{L}$ cümlesi sonlu ise) ona konfigürasyon denir. Her doğrusu üzerinde en az üç nokta bulunan ve her noktasından en az üç doğru geçen konfigürasyona kısıtlı konfigürasyon denir.

Projektif düzlemlere bir aksiyom daha eklemekle özel projektif düzlemler tanımlanabilir.

P5(Pappus Aksiyomu): A,B,C ve A',B',C' bir projektif düzlemde sırayla d ve d' gibi iki doğru üzerinde bulunan, $d \wedge d'$ den ve birbirlerinden farklı herhangi altı nokta ise $L=AB' \wedge A'B$, $M=AC' \wedge A'C$ ve $N=BC' \wedge B'C$ noktaları doğrudaştır.

Pappus aksiyomuna ilişkin bir konfigürasyon (Pappus konfigürasyonu) dokuz nokta ve dokuz doğrudan oluşur. Böyle bir konfigürasyonda L,M,N noktalarını üzerinde bulunduran doğruya Pappus doğrusu denir (Bkz. Şekil 1.2).



Şekil 1.2

P5 aksiyomunu gerçekleyen bir projektif düzleme Pappus düzlemi veya Pappussel düzlem denir.

Pappus aksiyomunun değişik bir ifadesi için şunlar tanımlansın: $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$ noktaları bir altıgenin sıra ile alınmış köşeleri olsun. i=1,2,3 olmak üzere N_i ve ve N_{i+3} köşelerine yani arada iki köşe atlayarak bulunan köşe çiftlerine altıgenin karşılıklı köşeleri; N_iN_{i+1} ve $N_{i+3}N_{i+4}$ kenarlarına yani uçları karşılıklı köşeler olan kenarlarına altıgenin karşılıklı kenarları denir. Ayrıca N_1, N_3, N_5 ve N_2, N_4, N_6 köşelerine altıgenin alterne köşeleri denir. Buna göre Pappus aksiyomu şöyle ifade edilebilir:

P5: Alterne köşeleri iki doğru üzerinde bulunan altıgenin karşılıklı kenarlarının ortak noktaları doğrudaştır.

F herhangi bir cisim olmak üzere $\mathbb{P}_2F$ projektif düzlemi Pappus düzlemidir. Bir projektif düzlemde P5$\Rightarrow$P4 dür, yani her Pappussel düzlem aynı zamanda Dezargseldir (Kaya, 1978). Fakat bunun karşıtı her zaman geçerli değildir. Dezargsel olan fakat Pappussel olmayan bir projektif düzlem ailesi olarak sonlu olmayan bölümlü halkalar yardımıyla tanımlanan projektif düzlemler gösterilebilir. Ayrıca bir bölümlü halka sınıfı olarak kuaterniyonlar bölümlü halkası verilebilir.

B bir cümle + ve $\cdot$ da BxB den B ye (yani B üzerinde) sırayla toplama ve çarpma denilen iki ikili işlem olsun. Eğer $(B,+,\cdot)$ sistemi aşağıdaki koşulları da gerçeklerse ona bölümlü halka denir:

B1: $(B,+)$ değişmeli bir gruptur.

B2: $(B-\{0\},\cdot)$ bir gruptur.

B3: $\cdot$ işlemi, + işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılır. Yani her $x,y,z\varepsilon B$ için $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ ve $(y+z)\cdot x=y\cdot x+z\cdot x$ dir.

Bölümlü halkaların toplamsal ve çarpımsal birim elemanları 0 ve 1 ile gösterilebilir. $x\cdot y$ yerine de yalnızca xy yazılabilir.

Bölümlü halkalarla ilgili olarak sonsuz elemanlı bir bölümlü halka örneği kuaterniyonlar halkasıdır. Bu örnek aşağıda verilmiştir.

ÖRNEK Kuaterniyonlar halkası:

$(R,+,\cdot)$ reel sayılar cismi olmak üzere $Q=\{(a_1,a_2,a_3,a_4): a_i\varepsilon R;\ i=1,2,3,4\}$ cümlesini gözönüne alalım. Bu cümlenin elemanlarına kuaterniyonlar denir. $a,b\varepsilon R$ olmak üzere Q üzerinde $\oplus$ toplama ikili işlemi R nin + işlemi yardımıyla

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)\oplus(b_1,b_2,b_3,b_4)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,a_4+b_4)$$

biçiminde, $\odot$ çarpma ikili işlemi de

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)\odot(b_1,b_2,b_3,b_4)=(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4,\\ a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3,\\ a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2,\\ a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1)$$

biçiminde tanımlansın. $(Q,\oplus,\odot)$ sistemi bir bölümlü halkadır, fakat cisim değildir. Buna kuaterniyonların bölümlü halkası yada kısaca kuaterniyonlar halkası denir. Burada her $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\varepsilon Q$ için $x\odot 1=1\odot x=x$ olacak biçimde bir çarpımsal birim eleman vardır. Her $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\varepsilon Q$ için $x\odot y=1=y\odot x$ olacak biçimde bir tek $y=(\frac{x_1}{|x|},\frac{-x_2}{|x|},\frac{-x_3}{|x|},\frac{-x_4}{|x|})$ çarpımsal tersi vardır. Burada $|x|=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ dir. Ayrıca

$$(0,1,0,0)\odot(0,0,1,0)=(0,0,0,1)$$

ve

$$(0,0,1,0)\odot(0,1,0,0)=(0,0,0,-1)$$

olduğundan $\odot$ işlemi değişmeli değildir (Kaya, 1978).

Her B bölümlü halkasına karşılık, nokta ve doğruları bu bölümlü halkanın elemanlarıyla homojen olarak koordinatlanabilen bir projektif düzlem vardır. (Bu projektif düzlem $\mathbb{P}_2B$ ile gösterilir).

$\mathbb{P}_2B$ projektif düzleminin Dezargsel olduğu ispatlanabilmektedir. $\mathbb{P}_2B$ projektif düzlemi P5 aksiyomunu gerçeklemez, yani $\mathbb{P}_2B$ Pappussel değildir (Kaya, 1978).

Pappussel düzlemlerde geçerli olan bir konfigürasyon (konum) teoreminin Dezargsel düzlemlerde hatta Moufang projektif düzlemlerinde sağlanıp sağlanmadığına bakmak için konum teoremindeki noktalar yerine kuaterniyonlar bölümlü halkasıyla tanımlanan projektif düzleme ait bazı özel noktalar seçilerek teoremin geçerliliği araştırılabilir. Eğer bu özel hallerden biri için konum teoremi geçerli değilse Dezargsel düzlemlerde de gerçeklenmesi sözkonusu olamaz.

Dezarg aksiyomunun, perspektiflik merkezinin perspektiflik ekseni üzerinde olması özel halini gerçekleyen projektif düzlemlere de Moufang projektif düzlemi denir.

Moufang projektif düzlemi ile ilgili diğer tanımlar ve teoremler için (Kaya, 1978) e bakılabilir.

TANIM 4.

İki boyutlu her altuzayı bir projektif düzlem olan bir lineer uzaya bir projektif uzay denir.

Herhangi bir projektif düzleminin mertebesi n olan bir projektif uzayın da mertebesi n olarak tanımlanır. Üç boyutlu bir projektif uzaya kısaca projektif 3-uzay denir.

Bir projektif 3-uzayda aşağıdaki önermeler geçerlidir:

a) Farklı iki düzlem bir tek doğru boyunca kesişir.

b) Bir düzlemde bulunan farklı iki noktayı birleştiren doğrunun her noktası bu düzlemde bulunur.

c) Bir düzlem ve bu düzlemde bulunmayan bir doğru bir tek noktada kesişirler (Kaya, 1978).

Mertebesi n olan bir projektif 3-uzayda aşağıdaki önermeler geçerlidir:

(i) Toplam nokta sayısı n^3+n^2+n+1 dir.

(ii) Bir doğrudan geçen toplam düzlem sayısı $n+1$ dir.

(iii) Toplam düzlem sayısı n^3+n^2+n+1 dir.

(iv) Toplam doğru sayısı $(n^2+1)(n^2+n+1)$ dir.

(v) Bir noktadan geçen düzlem sayısı n^2+n+1 dir.

İSPAT

(i) Projektif 3-uzayın bir düzlemi α olsun. α bir projektif düzlem olduğundan toplam n^2+n+1 noktaya sahiptir. Projektif 3-uzayda α düzlemi dışında bir M noktası vardır. L1 gereği M noktasını α nın n^2+n+1 tane noktasına birleştiren n^2+n+1 doğru vardır. Projektif 3-uzayın tüm noktaları bu doğrular üzerindedir. Bu doğrular üzerinde bulunmayan α düzlemi dışında bir N noktası olsa L1 gereği bir MN doğrusu vardır ve bu doğru projektif uzayın düzlemlerini en az bir noktada kesmesi gerektiğinden α düzleminin n^2+n+2 tane farklı noktası olurdu, çelişki. O halde bu doğrular üzerindeki noktaların sayısı kadar toplam nokta vardır. Doğrular projektif düzlemlere ait olduğundan herbiri üzerinde n+1 nokta vardır. Böylece M den geçen doğrular demetindeki herbir doğru üzerinde M den başka n nokta bulunur. Böylece M dışında $(n^2+n+1)n=n^3+n^2+n$ nokta vardır. M noktasının da katılmasıyla projektif 3-uzayın toplam nokta sayısı olarak n^3+n^2+n+1 bulunur.

(ii) Bir d doğrusu ile d dışında bir α düzlemi gözönüne alınsın. $d \wedge \alpha = A$ olsun. Projektif 3-uzayda iki düzlem bir tek doğru boyunca kesiştiğinden, d den geçen her düzlem, α düzlemini bir tek doğru boyunca keser. Şu halde $\forall \beta I d$ için $\beta \to \alpha \wedge \beta$ eşlemesi bire-bir ve örten olup d den geçen düzlem sayısı, α da A dan geçen doğru sayısına eşittir. α bir projektif düzlem olduğundan her bir noktadan n+1 doğru geçer. Dolayısıyla d den n+1 düzlem geçer.

(iii) Bir α düzleminin bütün doğruları gözönüne alınsın. Bunların sayısı n^2+n+1 dir. Projektif 3-uzayda iki düzlem bir doğru boyunca kesiştiğinden α yı kesen bütün düzlemleri bulmak gerekir. Bunun için α nın içindeki herbir doğrudan geçen düzlem sayısı bulunmalıdır. Projektif 3-uzayda α ya ait her d den, α dışında n tane düzlem geçer. Böylece α daki doğrulardan, α dışında $(n^2+n+1)n$ tane düzlem geçer. α düzlemiyle birlikte projektif uzayın toplam düzlemi $(n^2+n+1)n+1=n^3+n^2+n+1$ dir.

(iv) Bir α düzlemindeki noktaların sayısı n^2+n+1 dir. Uzayda bir noktadan geçen doğru sayısı (i) şıkkında ispatlandığı gibi n^2+n+1 dir. Buna göre α düzleminin herhangi bir noktasından geçen doğrular iki kısma ayrılabilir; α düzlemine ait olanlar n+1 tane, α düzleminin dışındakiler n^2 tanedir. α düzleminin tüm noktalarından geçen, fakat bu düzleme ait olmayan doğruların toplam sayısı ise $n^2(n^2+n+1)$ dir. Düzleme ait olanlar da n^2+n+1 dir. O halde uzayın toplam doğru sayısı $n^2(n^2+n+1)+(n^2+n+1)=(n^2+1)(n^2+n+1)$ dir. Projektif 3-uzayda bunlar dışında başka doğru olamaz. Eğer böyle bir doğru olsa, bu doğru α düzlemini keseceğinden α

konursa sırasıyla standart olmayan yarı afin uzay, afin uzay veya projektif uzay tanımları elde edilir.

TANIM 6.

Her doğrusu üzerinde eşit sayıda nokta bulunan ve her noktasından eşit sayıda doğru geçen bir hiperbolik uzaya regülerdir denir.

Bir $S=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ sonlu lineer uzayı için aşağıdaki gösterimleri kullanalım:

$v=|\mathcal{P}|$, $b=|\mathcal{L}|$, (Burada "| |" kardinaliteyi göstermektedir). S nin herhangi P noktası ve ℓ doğrusu için $r(P)=|\{\ell\varepsilon\mathcal{L}: PI\ell\}|$, $k(\ell)=|\{P\varepsilon\mathcal{P}: PI\ell\}|$
v sonluysa S sonludur denir. Sonlu S lineer uzayı için şu ilave gösterimler de kullanılsın:

$k_m=\min\{k(\ell):\ell\varepsilon\mathcal{L}\}$ $k_M=\max\{k(\ell):\ell\varepsilon\mathcal{L}\}$

$r_m=\min\{r(P):P\varepsilon\mathcal{P}\}$ $r_M=\max\{r(P):P\varepsilon\mathcal{P}\}$

$k_m=k_M=k$, $r_m=r_M=r$ ise S, (k,r) mertebeden regülerdir denir.

Bir geometrik yapının sonlu bir hiperbolik düzlem olup olmadığını test etmek için oldukça kolaylık sağlayan aşağıdaki teoremiispatsız olarak ifade edelim:

TEOREM 1 (Bumcrot, 1971):

Aşağıdaki özellikleri sağlayan herhangi sonlu lineer uzay bir hiperbolik düzlemdir.

(i) $r_m \geqq k_M+2$

(ii) $k_m\cdot(k_m-1) \geqq r_M$

2. BÖLÜM

SONLU HİPERBOLİK UZAYLAR

Çalışmamızın ikinci bölümünü teşkil eden bu kısımda klasik hiperbolik 3-uzayın sonlu bir modeli inşa edilerek, onun bazı kombinetörsel özellikleri incelenecektir.

Projektif düzlemlerle bazı hiperbolik düzlemler arasında, projektif düzlemlerle afin düzlemler arasındaki gibi ilginç bir ilişki kurulabilmektedir. Yani, bir projektif düzlemden bazı nokta ve doğruların atılması suretiyle Graves'in birinci bölümde zikrettiğimiz aksiyom sistemini sağlayan yapılar elde edilebilmektedir. Bu hususta zengin bir literatür mevcuttur (Ostrom, Sandler, Bumcrot, Kaya-Özcan). Projektif düzlemlerden bu yolla elde edilen en genel sonlu hiperbolik düzlem modeli Bumcrot, (1971) a ait olup aşağıda hatırlatılmaktadır:

ÖNERME 1 (Bumcrot, 1971):

$S=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ sonlu bir projektif düzlem, $\mathcal{M}$ de S nin noktadaş olmayan üç doğru kapsayan herhangi doğrular cümlesi olsun. Q, $\mathcal{M}$ nin doğruları üzerindeki tüm noktaların cümlesi olmak üzere

$$S_{\mathcal{M}}=(\mathcal{P}\setminus Q \; , \; \mathcal{L}\setminus\mathcal{M} \; , \; I\cap(\mathcal{P}\setminus Q)\times(\mathcal{L}\setminus\mathcal{M}))$$

geometrik yapısını gözönüne alalım. $|\mathcal{M}|=m$ olduğuna göre eğer $3 \leqq m \leqq n + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4n+5})$, $n \geqslant 5$ ise $S_{\mathcal{M}}$ sonlu bir hiperbolik düzlemdir.

İSPAT

Farklı iki noktanın birtek doğru belirteceği aşikârdır, yani L1 sağlanır. m, en büyük değeri olan

$n + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4n+5})$ e ulaşsa bile

$n+1-m=n+1-n-\frac{1}{2}(1-\sqrt{4n+5})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4n+5}$, $n \geqq 5$ olduğundan $k_m=n+1-m \geqq 2$ dir. Dolayısıyla $S_{\mathcal{M}}$ de bir doğru üzerinde enaz iki nokta vardır, yani L2 sağlanır.

L1,L2 $\Longrightarrow$ $S_{\mathcal{M}}$ bir lineer uzaydır.

Şimdi teorem 1 in kalan hipotezlerinin sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

$S_{\mathcal{M}}$ de $r_m=r_M=n+1$ dir, $m \geqq 3$ olduğundan $k_M \leqq n-1$ diyebiliriz. Kabul edelim ki $k_M=n-1$ dir.

$n + 1 = (n - 1) + 2 \Longrightarrow r_m \geqq k_M + 2$

elde edilir. Diğer taraftan $k_m(k_M-1) \geqq r_M$ olduğu da

$m \leqq n + \frac{1}{2}\ (1 - \sqrt{4n + 5})$ eşitsizliği gözönüne alınarak kolayca gösterilebilir. O halde teorem 1 in tüm hipotezlerini sağlayan $S_{\mathcal{M}}$ sonlu bir hiperbolik düzlemdir. ■

Bumcrot, (1971); önerme 1 ile ifade edilen yapıyı verdikten sonra şu sorunun cevabının araştırılmaya değer olduğunu vurgulamıştır:

> "Öyle bir S projektif düzlemi ve öyle bir $\mathcal{M}$ doğrular cümlesi var mıdır ki, $S_{\mathcal{M}}$ bir regüler hiperbolik düzlem olsun?"

Hemen belirtelim ki bu sorunun olumlu bir cevabı Olgun,(yayınlanacak) da verilmektedir.

Bumcrot,(1971) ilgili surveyinde sonlu hiperbolik düzlemlere dair cevap bekleyen daha birçok sorunun yanında sonlu hiperbolik 3-uzaya dair de bir soruyu şöyle yöneltmektedir:

> "Klasik hiperbolik 3-uzayın sonlu modelleri var mıdır?"

İşte çalışmamızın 2. bölümü bu soruya cevap bulma gayretinden ibarettir.

Şunu açıkça belirtmekte yarar vardır; boyutu 2 den büyük olan sonlu hiperbolik uzayların varlığı meselesi açık bir problemdir. Bununla beraber regülerlik ve geometrik olma kısıtlamaları kabulü altında kuvvetli yokluk sonuçları elde edilmiş bulunmaktadır (Bumcrot,1971). Şu halde, mesela, geometrik olan ve regülerlik özeliğini sağlayan sonlu hiperbolik 3-uzayın olmadığını söyleyebiliriz. Dolayısıyla ilgili soruya cevap olacağını iddia edeceğimiz aşağıdaki önermeyle verilen inşa Klasik hiperbolik 3-uzayın geometrik olan ama regüler olmayan sonlu bir modeli olacaktır.

ÖNERME 2.

$S=(\mathcal{P},\mathcal{L}, I)$ mertebesi n olan sonlu bir projektif 3-uzay, $\mathcal{D}$ de S nin aşağıdaki şartları sağlayan projektif düzlemlerinin bir cümlesi olsun.

C. S nin $\mathcal{D}$ ye ait olmayan her projektif düzlemi $\mathcal{D}$ nin düzlemlerini enaz noktadaş olmayan üç doğru boyunca keser. $\mathcal{P}_1$ ve $\mathcal{L}_1$ sırasıyla $\mathcal{D}$ nin düzlemlerine ait tüm nokta ve doğrular cümlesi olsunlar. Bu durumda $|\mathcal{D}|=d$ olmak üzere eğer

$4 \leqq d \leqq n + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4n+5})$ ise

$S_{\mathcal{D}}=(\mathcal{P}\setminus\mathcal{P}_1, \mathcal{L}\setminus\mathcal{L}_1, I\cap(\mathcal{P}\setminus\mathcal{P}_1)\times(\mathcal{L}\setminus\mathcal{L}_1))$

geometrik yapısı sonlu bir hiperbolik 3-uzaydır.

İSPAT

C. şartının $\mathcal{D}$ nin hepsi noktadaş olmayan dört düzlem kapsamasını gerektirdiği aşikārdır. bu nedenle $d \geqslant 4$ olmalıdır.

$S_{\mathcal{D}}$ nin 2-boyutlu her altuzayı önerme 1 in hipotezlerini sağladığından sonlu bir hiperbolik düzlemdir. Böylece herbir hiperdüzlemi hiperbolik düzlem olan $S_{\mathcal{D}}$ lineer uzayı sonlu bir hiperbolik 3-uzaydır.

Hatırlatma:

Önerme 1 de m için verilen üst sınır gerekli olmayan bir yeter şarttır. Çünkü bu sınır, atılan doğruların herhangi üçünün noktadaş olmaması pozisyonunda, düzlemin mertebesinin tek olması halinde n+1 e; mertebenin çift olması halinde de n+2 ye kadar çıkabilmektedir (Ostrom, 1962; Olgun, (yayınlanacak)).

$S_{\mathcal{D}}$ nin herbir noktasından geçen toplam doğru sayısı n^2+n+1 olduğu halde herbir doğrusu üzerinde eşit sayıda nokta bulunmak zorunda olmadığından $S_{\mathcal{D}}$ sonlu hiperbolik 3-uzayı regüler değildir.

ÖNERME 3.

$S_{\mathcal{D}}$ nin toplam düzlem sayısı $n^3+n^2+n+1-d$ dir.

İSPAT

S nin toplam düzlem sayısı n^3+n^2+n+1 olup, $S_{\mathcal{D}}$, S den d adet düzlem atılarak elde olunduğundan ispat aşikârdır.

ÖNERME 4.

$S_{\mathcal{D}}$ hiperbolik 3-uzayının toplam doğru sayısı b için

$$|\mathcal{L}| - 2(n^2+n+1)-(d-2)(n^2+n-2) \leqq b \leqq |\mathcal{L}| - d(n^2+n+2-d)-\binom{d}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir. (Burada $|\mathcal{L}|$, $S_{\mathcal{D}}$ nin elde edildiği S projektif 3-uzayının toplam doğru sayısıdır).

İSPAT

$S_{\mathcal{D}}$ inşa olunurken S den en az doğru, düzlemlerin herhangi üçünün doğrudaş olmaması halinde; en çok doğru da dört tanesi noktadaş olmamak üzere d-2 tanesinin doğrudaş olması halinde atılacağı söylenebilir. Şimdi önce S den atılan enaz doğru sayısını bulalım: d adet düzlemin ikişer ikişer arakesitlerinin teşkil ettiği toplam doğru sayısı $\binom{d}{2}$ dir. Atılan herbir düzlem d-1 adet arakesit doğrusu kapsayacağından bu düzlemde arakesit olmayan toplam doğru sayısı $n^2+n+1-(d-1)=n^2+n+2-d$ olur. d adet düzlemin kapsadığı arakesit doğrusu olmayan toplam doğru sayısı $d(n^2+n+2-d)$, arakesit olan toplam doğru sayısı da $\binom{d}{2}$ olduğundan sözkonusu pozisyonda d adet düzlemin atılmasıyla gerçekte $d(n^2+n+2-d)+\binom{d}{2}$ doğru atılmış olmaktadır. $S_{\mathcal{D}}$ nin ise en çok doğruyu bu pozisyonda kapsayacağı aşikârdır. O halde

(1) $$b \leq |\mathcal{L}| - d(n^2+n+2-d) - \binom{d}{2}$$
elde edilir.

S den atılan maksimum doğru sayısına, dolayısıyla $S_{\mathcal{B}}$ nin kapsayabileceği minimum doğru sayısına gelince; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ doğrudaş olmayan, atılan üç düzlem, α_4 de α_1, α_2, α_3 ün ortak noktasından geçmeyen, atılan bir düzlem olsun. $\alpha_i \wedge \alpha_j = \ell_{ij}$, $i \neq j$, $i,j=1,2,3,4$ diyelim. Atılan diğer d-4 düzlemin tamamı ℓ_{ij} lerden birinden, diyelim ki, $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = \ell_{12}$ den geçsin. Buna göre α_3 ün atılan diğer düzlemlerle ortak doğru sayısı d-1, α_4 ün ortak doğru sayısı da d-1, α_1 ve α_2 ve atılan diğer tüm düzlemlerin ortak doğru sayıları 3 er adettir. Böylece toplam ortak doğru sayısı $1+d-2+1+d-2=2d-2$ olur. Atılan d adet düzlemin kapsadığı ortak olmayan toplam doğru sayısının da $(d-2)(n^2+n-2)+2(n^2+n+1)$ olduğu kolaylıkla hesaplanabilir. O halde

(2) $$b \geq |\mathcal{L}| - (d-2)(n^2+n-2) - 2(n^2+n+1)$$
elde edilir.

(1) ve (2) nin birleştirilmesiyle b için iddia edilen eşitsizlik bulunmuş olur. ■

ÖNERME 5.

$S_{\mathcal{B}}$ hiperbolik 3-uzayının toplam nokta sayısı v olduğuna göre

$$|\mathcal{P}| - \delta_2 \leq v \leq |\mathcal{P}| - \delta_1$$

dir. (Burada δ_1 ve δ_2, sırasıyla atılan yapının kapsadığı minimum ve maksimum nokta sayısı, $|\mathcal{P}|$ de S projektif 3-uzayının toplam nokta sayısıdır).

İSPAT

Atılan yapının en az noktayı düzlemlerin herhangi üçünün doğrudaş olmaması ve herhangi dördünün noktadaş bulunmaması halinde kapsadığını söyleyebiliriz. O zaman $S_{\mathcal{B}}$ en fazla noktayı bu halde kapsayacaktır. Şimdi atılan yapının kapsadığı toplam nokta sayısını hesaplayalım.

Atılan herhangi üç düzlemin ortak noktasına köşe noktası diyelim. Buna göre $\binom{d}{3}$ köşe noktası mevcuttur. Diğer yandan $\binom{d}{2}$ adet arakesit doğrusunun olduğu ve köşe noktalarının tümünün de bu doğrular üzerinde bulunduğu aşikârdır. Herbir arakesit doğrusu üzerinde d-2 adet köşe noktası, dolayısıyla n+1-(d-2)=n+3-d adet köşe noktası olmayan nokta mevcuttur. Şu halde $\binom{d}{2}$ adet doğru tarafından kapsanan toplam nokta sayısı $\binom{d}{2}(n+3-d)+\binom{d}{3}$ olur. d adet düzlemin herbiri üzerindeki, ortak olmayan toplam nokta sayısı da

$$n^2+n+1-\left[(d-1)(n+1-(d-2))+\binom{d-1}{2}\right]$$

olacağından, atılan yapının kapsadığı toplam nokta sayısı

$$\delta_1=d\{n^2+n+1-\left[(d-1)(n+3-d)+\binom{d-1}{2}\right]\}+\binom{d}{2}(n+3-d)+\binom{d}{3}$$

olarak elde olunur. $S_{\mathcal{D}}$, en çok noktayı bu pozisyonda kapsayacağından

(1) $$v \leqq |\mathcal{P}| - \delta_1$$

dir.

Atılan yapının en çok nokta kapsadığı, dolayısıyla $S_{\mathcal{D}}$ nin en az nokta kapsayacağı pozisyon, d adet düzlemin dört tanesinin noktadaş olmaması ve d-2 tanesinin doğrudaş olması halidir. Bu pozisyonda, atılan yapının kapsadığı toplam nokta sayısını bulalım. Önce, atılan yapının kapsadığı arakesit doğruları tarafından kapsanan toplam nokta sayısının 2(dn-n-d+3) olduğu, sözkonusu düzlemler tarafından arakesit noktası olmayan toplam nokta sayısının da $(d-2)(n-1)^2+2((n+1)^2-(dn+4)+d)$ olduğu görülebilir. Böylece, atılan yapının kapsadığı toplam nokta sayısı

$$\delta_2=2(dn-n-d+3)+(d-2)(n-1)^2+2((n+1)^2-(dn+4)+d)$$

olur. Şu halde $S_{\mathcal{D}}$ nin kapsadığı toplam nokta sayısı en az $|\mathcal{P}| - \delta_2$ olup

(2) $$|\mathcal{P}| - \delta_2 \leqq v$$

elde edilir. (1) ve (2) birleştirilirse

$$|\mathcal{P}| - \delta_2 \leqq v \leqq |\mathcal{P}| - \delta_1$$

eşitsizliğine ulaşılır. (Burada $|\mathcal{P}|$ nin $S_{\mathcal{D}}$ nin elde edildiği S projektif 3-uzayının toplam nokta sayısı olduğunu hatırlatalım).

Hatırlatma:

Önerme 4 ve önerme 5 de, $S_{\mathcal{B}}$ nin sırasıyla toplam doğru sayısı b ve toplam nokta sayısı v için verilen benzer eşitsizlikler k_m , k_M , r_m ve r_M cinsinden de verilebilir.

3. BÖLÜM

BAZI KONUM (KONFİGÜRASYON) TEOREMLERİ

Birinci bölümde konfigürasyon tanımlanmıştı. Argunov-Skornyakov,(1964) bu konuda şöyle demektedir:

> "Bir konum teoremi; sonlu sayıda noktalar, doğrular ve bunlar arasında ortaya çıkan bağıntılarla ilgili bir teoremdir. Bir konum teoremi, çok defa bir takım noktaların bir doğru üzerinde bulunmaları veya bir takım doğruların bir noktadan geçmelerinden ötürü, diğer bazı noktaların bir doğru üzerinde olmaları gerektiğini veya diğer bazı doğruların bir noktadan geçtiklerini ifade eder."

Konum teoremlerinin önemi de yine aynı kaynakta şöyle verilmektedir:

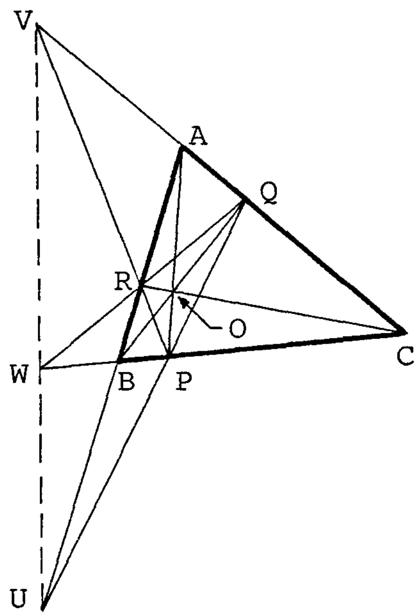
> "Konum teoremleri, çokgenlere ait özelliklerin incelenmesi ve bu özelliklerle ilgili problemlerin çözülmesinde başarıyla uygulanabilir. Bu teoremler, özellikle, muhtelif sınırlayıcı şartları haiz çizim problemlerinin çözülmesinde faydalı olur: Yalnız cetvel kullanarak yapılan çizimler, düzlemin sınırlayıcı bir kısmı içinde yapılan çizimler, yanına varılamayan noktaları bulunan çizimler, v.s... de olduğu gibi."

TEOREM 1.

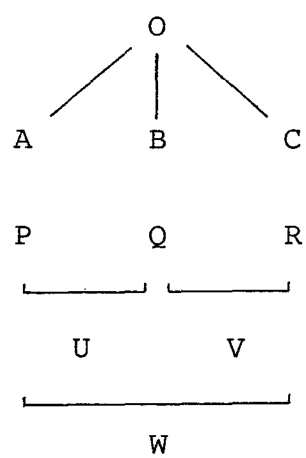
Dezargsel bir düzlemde $\{A,B,C\}$ üçgeni ve içinde bir O noktası verilsin. $OA \wedge BC = P$, $OB \wedge BC = Q$ ve $OC \wedge AB = R$ olsun. $AB \wedge PQ = U$, $AC \wedge PR = V$ ve $BC \wedge QR = W$ ise U, V, W noktaları doğrudaştır (Argunov-Skornyakov, 1964).

İSPAT

O noktasından perspektif {A,B,C} ve {P,Q,R} üçgenlerine P4 Dezarg aksiyomunu uygulamakla ispat doğrudan elde edilir (Bkz. Şekil 1 ve Şema 1).



Şekil 3.1



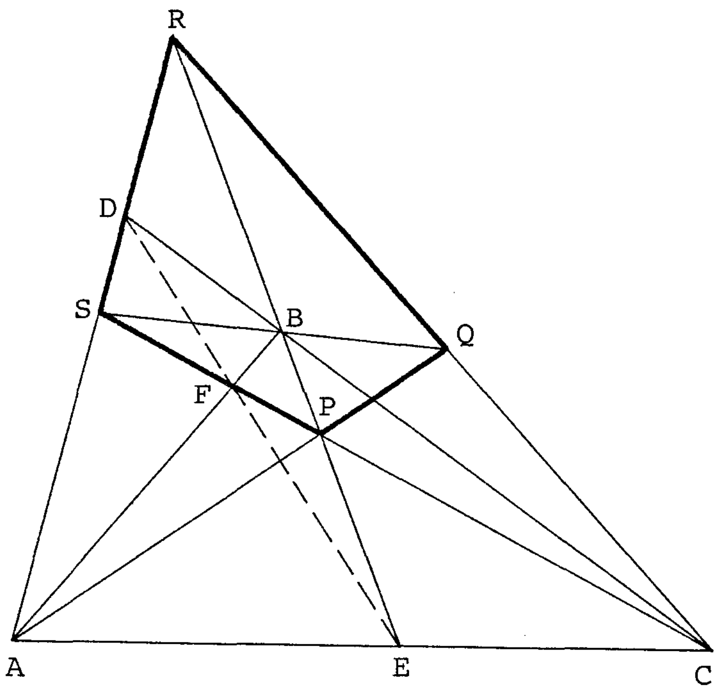
Şema 3.1

TEOREM 2.

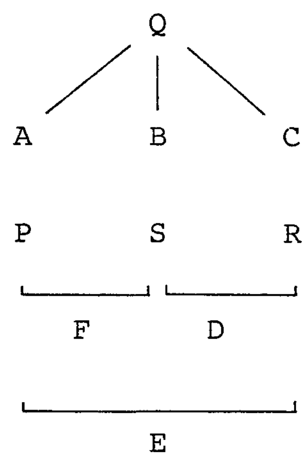
$\mathbb{P}$ Dezargsel bir düzlem ve P,Q,R,S bu düzlemde herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta olsun. $A=PQ\wedge RS$, $B=PR\wedge QS$, $C=PS\wedge QR$, $D=BC\wedge RS$, $E=AC\wedge PR$ ve $F=AB\wedge PS$ olmak üzere D, E, F noktaları doğrudaştır (Kaya, 1978).

İSPAT

Q dan perspektif {A,B,C} ve {P,S,R} üçgenlerine P4 Dezarg aksiyomunu uygulamakla D, E, F noktalarının doğrudaş oldukları görülür (Bkz. Şekil 3.2 ve Şema 3.2).



Şekil 3.2



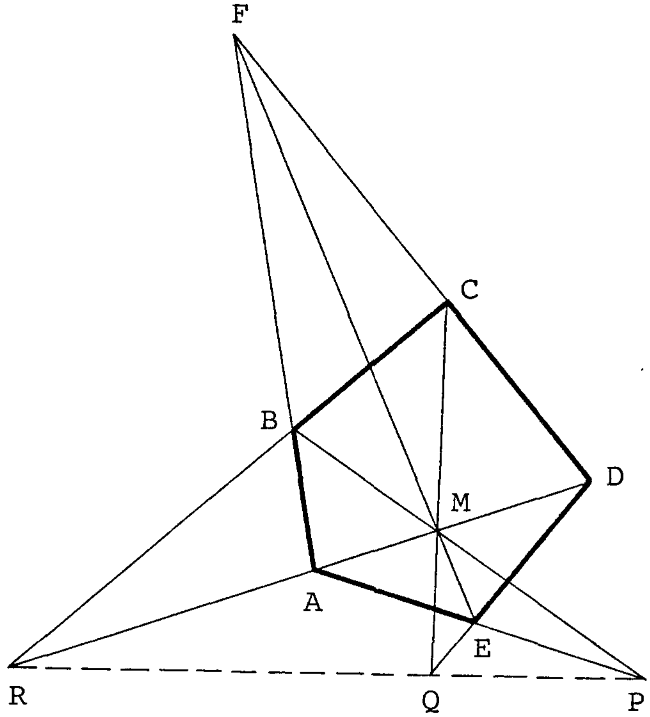
Şema 3.2

TEOREM 3.

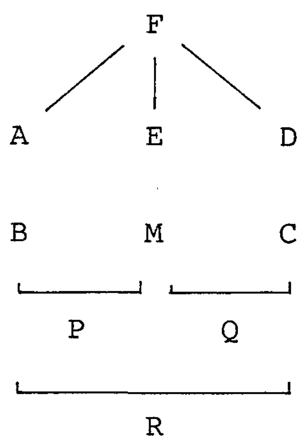
$\mathbb{P}$ Dezargsel düzleminde bir ABCD dörtgeni verilsin. $AB \wedge CD = E$, $AC \wedge BD = F$, $AD \wedge EF = M$ olsun. Bu halde $AB \wedge CM = P$, $BM \wedge CD = Q$, $AD \wedge BC = R$ noktaları doğrudaştır (Argunov-Skornyakov, 1964).

İSPAT

F noktasından perspektif {A,E,D} ve {B,M,C} üçgenlerine P4 Dezarg aksiyomu uygulanmakla sonuç doğrudan elde edilir (Bkz. Şekil 3.3 ve Şema 3.3).



Şekil 3.3



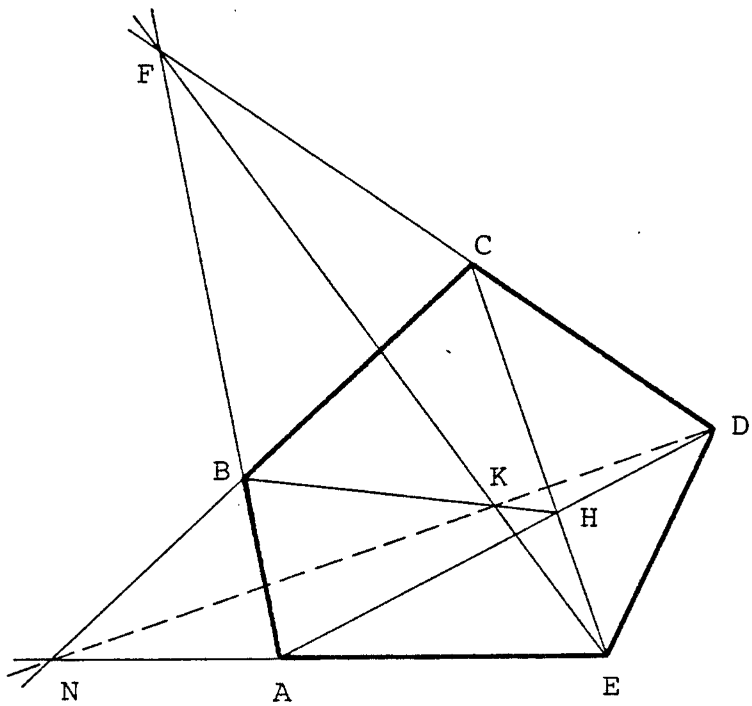
Şema 3.3

TEOREM 4.

$\mathbb{P}$ projektif düzleminde herhangi bir beşgen ABCDE olsun. Beşgenin bitişik olmayan AB ve CD kenarlarının kesim noktası F ile, yine bitişik olmayan diğer AE ve BC kenarlarının kesim noktası N ile ve EF ile BH doğrularının kesim noktası da K ile gösterilsin. Bu halde DK doğrusu N noktasından geçer (Argunov-Skornyakov, 1964).

İSPAT

Doğrudaş A,B,F ve E,H,C çiftlerinin oluşturduğu AEFCBH altıgenine P5 Pappus aksiyomu uygulanarak hemen ispat tamamlanır (Şekil 3.4).



Şekil 3.4

Bu teorem tüm Pappussel düzlemlerde geçerlidir. Ancak Dezargsel projektif düzlemlerde de geçerli olup olmadığını araştırmak için teoremdeki noktalar yerine kuaterniyonlar bölümlü halkasıyla tanımlanan projektif düzleme ait özel bazı noktalar seçilerek Pappussel olmayan düzlemlerde geçerliliği araştırılabilir. Bunun için özel noktalar, herhangi üçü doğrudaş olmayan şu noktalar olsun:

$A=(1,i,j)$, $B=(j,i,k)$, $C=(k,1,i)$, $D=(k,i,j)$ ve $E=(i,k,1)$ olsun. Buna göre doğrular ve kesim noktaları şunlardır: $AE=[i-j,-1,1]$, $AB=[1-i-j+k,1+i+j-k,2]$, $BC=[1,-k,0]$, $CD=[1+i-j+k,1-i+j-k,2]$, $AD=[0,-k,1]$ ve $CE=[-1+i-j-k,-1-i+j+k,2]$ bulunur. $F=AB\wedge CD=(1,1,-1)$, $N=AE\wedge BC=(k,1,1+i+j)$, $H=CE\wedge AD=(1-i+k,1,k)$, $BH=[-j,i+j,1]$, $FE=[-1+i+j-k,2,1+i+j-k]$, $FE=[-1+i+j-k,2,1+i+j-k]$ bulunur. $DN=[i+k,-i,1]$ elde edilir. $K=EF\wedge BH=(-3+2i-j,-k,-2+2i+k,3)$

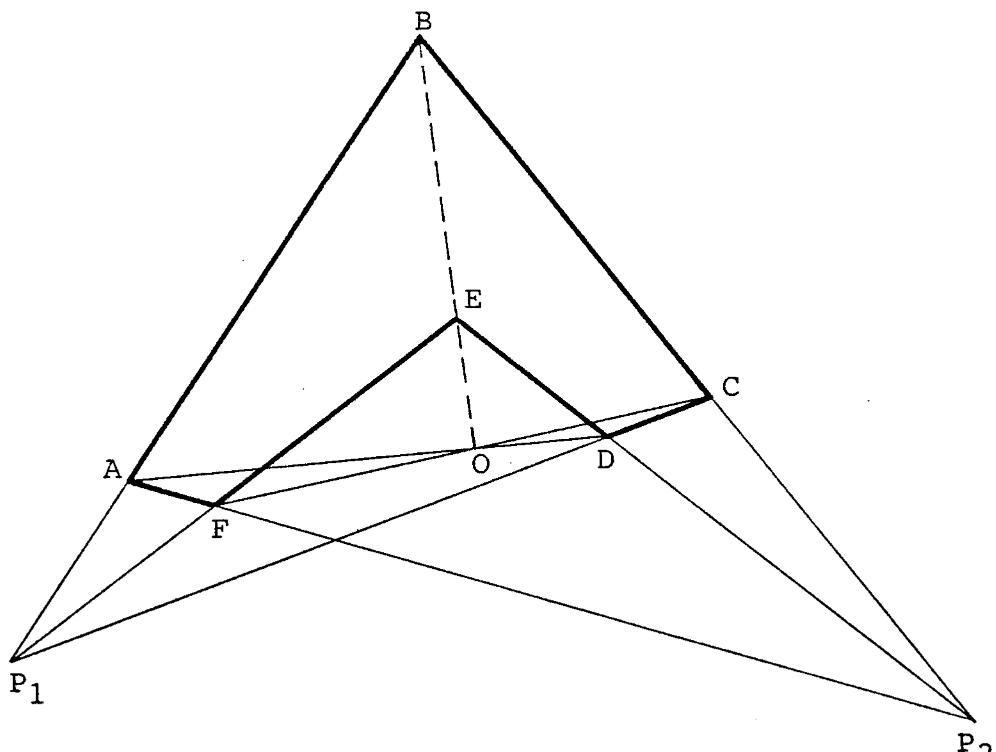
dir. Son olarak K noktasının DN üzerinde olup olmadığı araştırıldığında K nın DN üzerinde olmadığı görülür. Sonuç olarak, Dezargsel düzlemlerde geçerli olmadığı, dolayısıyla Moufang projektif düzleminde de sağlanamayacağı görülür.

TEOREM 5.

Bir altıgenin kenarları birer atlayarak verilen iki noktadan geçerlerse, karşılıklı köşeleri birleştiren üç doğru bir noktadan geçerler (Argunov-Skornyakov, 1964).

İSPAT

A,B,C,D,E,F noktaları, bir altıgenin sırayla köşeleri olsun. AB, CD, EF kenarları P_1 noktasından ve BC, DE, AF kenarları da P_2 noktasından geçsinler (Şekil 5). AD ve CF doğrularının kesim noktasına O denilsin. BE doğrusunun O noktasından geçtiği veya başka bir deyişle O, B ve E noktalarının doğrudaş olduğu ispatlanmalı. Burada ADP_2CFP_1 altıgenine Pappus aksiyomunu uygulamakla teoremin ispatı tamamlanır.



Şekil 3.5

Böylece teorem Pappussel düzlemlerde geçerlidir. Dezarg düzleminde de geçerliliğini araştırmak için önce kuaterniyonlar halkası üzerinde tanımlı projektif düzlemde seçilen özel bir beşgen için geçerli olup olmadığına bakılabilir; seçilen her özel beşgen için doğru olması mutlaka Dezarg düzleminde gerçeklenmesi anlamına gelmez, fakat doğru olma olasılığının büyük olduğu hakkında olumlu bir göstergedir. Aksine en az bir özel beşgen için bu teorem geçerli değilse, Dezarg düzleminde de geçersizdir.

Bunun için özel noktalardan üçü $P_1=(1,-1,0)$, $A=(1,-1,i)$ ve $B=(1,-1,j)$ olsun. P_1,A,B noktaları $[1,1,0]$ doğrusu üzerindedir. $P_2=(0,1,1)$ olsun. $AP_2=[1+i,1,-1]$ bulunur. $F=(1,-i,1)$ olsun. $P_1F=[1,1,-1+i]$ üzerinde üçüncü bir nokta $E=(0,1-i,1)$ olsun. $EP_2=[1,0,0]$ ve $BP_2=[1+j,1,-1]$ bulunur. $C=(1,-j,1)$ olsun. B, C, P_2 noktaları $[1+j,1,-1]$ doğrusu üzerindedir. $P_1C=[1,1,-1+j]$ olarak bulunur. $D=P_1C \wedge EP_2=(0,1-j,1)$ bulunur. $AD=[1+i+k,1,-1+j]$ ve $FC=|1,0,-1|$ bulunup, $O=AD \wedge FC=(1,-i-j-k,1)$ dir. Öte yandan $BE=[1+j-k,1,-1+i]$ bulunur. Kolayca görülür ki O noktası BE doğrusu üzerinde değildir. Demekki teorem Dezarg düzleminde geçerli değildir.

Son bir konfigürasyon teoremi olarak, üçüncü mertebeden bir projektif düzlemin Pappussel olduğu özel hali, sentetik yoldan ispatlanmaya çalışılacaktır.

Pappussel düzlemler aynı zamanda Dezargseldir. Fakat karşıtı her zaman doğru değildir. Sonlu olmayan Dezargsel düzlem Pappussel olmayabilir, fakat sonlu Dezargsel düzlemler Pappusseldir. Bu konuda Kaya, (1978) şöyle demektedir:

> "Sonuç 5.2.25: Her sonlu Dezargsel düzlem aynı zamanda Pappusseldir.
> Belirtelim ki, bu sonucun sentetik bir ispatı henüz verilebilmiş değildir."

Burada, "mertebesi üç olan Dezargsel projektif düzlemin Pappussel olduğu" gerçeğine ilişkin sentetik bir ispat veriyoruz:

$\mathbb{P}_3$ de on üç nokta, on üç doğru vardır. Her noktadan dört doğru geçer, her doğru üzerinde dört nokta bulunur.

Pappus konfigürasyonu için d_1 ve d_2 doğru çifti gözönüne alınsın. d_1 üzerindeki A,B,C ve d_2 üzerindeki A',B' ve C' noktalarının seçimi $d_1 \Lambda d_2=D$ noktası dışında, her doğru üzerinde ancak dört nokta olduğundan bir tek türlüdür. $d_1=\{A,B,C,D\}$, $d_2=\{A',B',C',D\}$ olsun. A ile A', B ile B', C ile C' karşılıklı köşeler olsun (Mesela AB'CA'BC' altıgeni için). $d_3=AA'$ ve $d_4=BB'$ doğrularının kesim noktası $d_3 \Lambda d_4$ =E olsun. $d_5=CC'$ doğrusu da E den geçmek zorundadır. (Aksi takdirde, $d_5=CC'$ doğrusu d_3 ü dördüncü noktası X de, d_4 ü de dördüncü noktası Y de olmak üzere E den farklı noktalarda kestiği kabul edilirse; $d_6=AB'$ doğrusu, $A=d_1 \Lambda d_3$ ve $B'=d_2 \Lambda d_4$ olduğundan d_1, d_2, d_3, d_4 doğrularının üzerindeki başka noktalardan geçemez. Oysa P1 gereğince $d_6 \Lambda d_5$ noktası vardır ve bu nokta C,C',X,Y dışında bir beşinci nokta olmak zorundadır, çelişki).

$d_5 \Lambda d_3=d_5 \Lambda d_4=E$ dir. $d_6=AB'$ doğrusu; d_1, d_2, d_3, d_4 doğrularını A veya B' noktalarından birinde kestiğinden bu dört doğruyu başka noktalarda kesemez. Dolayısıyla d_6 nın d_5 ile kesim noktası C,C',E dışında dördüncü noktası olmak zorundadır. Yani $d_6 \Lambda d_5=F$ dir. $d_7=BA'$ doğrusu d_1, d_2, d_3, d_4 ile B veya A' noktalarından birisinde kesiştiğinden bu doğrular üzerindeki diğer noktalardan geçemez. Dolayısıyla d_7 doğrusu d_5 doğrusunu C,C',E noktalarında kesemez; d_5 in dördüncü noktası F de kesmek zorundadır. Yani $d_7 \Lambda d_5=F$ dir. Bu nokta aynı zamanda d_6 ile de kesim noktasıdır.

$d_8=BC'$ doğrusu; d_1 ile d_4 doğrusunu B de, d_2 ile d_5 doğrusunu C' de kestiğinden bu doğrular üzerindeki diğer noktalardan geçemez. d_8 ile d_3 kesim noktası A,A',E noktaları dışında d_3 ün dördüncü G noktası olmak zorundadır. Yani $d_8 \Lambda d_3=G$ dir. d_8 doğrusunun d_6 doğrusu ile kesim noktası A I d_1 olduğundan, A olamaz; B' I d_2 olduğundan B' olamaz; F I d_5 olduğundan, F de olamaz; O halde d_8 doğrusunun

d_6 ile kesim noktası, d_6 üzerindeki dördüncü nokta H olmak zorundadır. Yani $d_8 \Lambda d_6 = H$ dir.

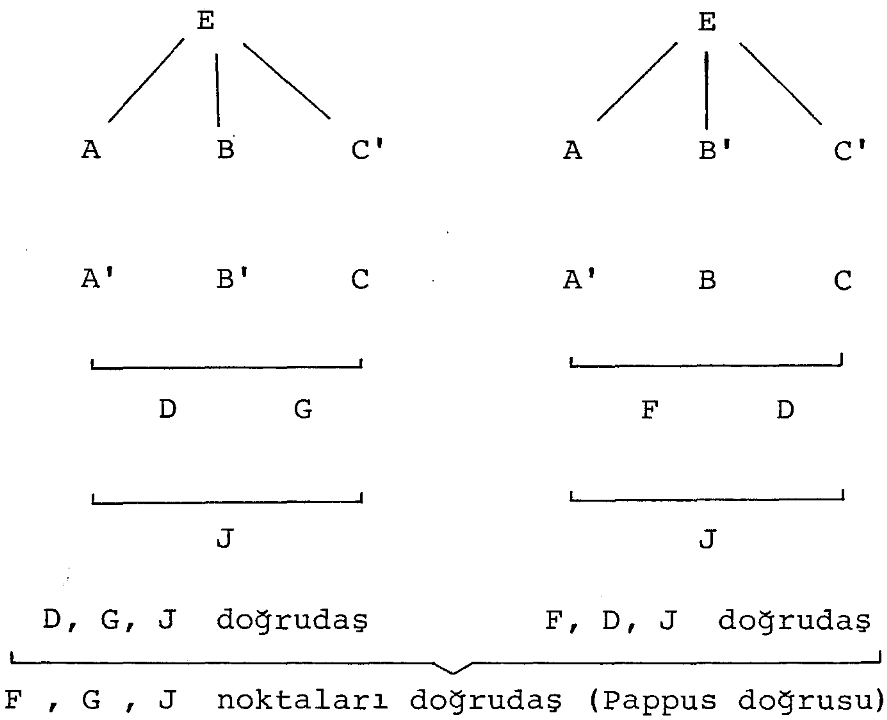
d_9 =CB' doğrusu d_1, d_2, d_4, d_5 doğrularını C veya B' noktalarının birinde kestiğinden bu doğrular üzerindeki başka noktalarından geçemez. Bundan dolayı d_9 doğrusunun d_3 doğrusu ile kesim noktası A,A' ve E olamaz. O halde $d_9 \Lambda d_3 = G$ olmak zorundadır. d_9 doğrusu d_7 doğrusunu B,A',F dışında dördüncü noktası K da kesmek zorundadır. Yani $d_9 \Lambda d_7 = K$ dır. $d_9 \Lambda d_6 = F$ ve $d_9 \Lambda d_8 = G$ dir.

d_{10}=AC' doğrusu d_1, d_2, d_3, d_5, d_6, d_8 doğrularını A veya C' noktalarının birinde kesmektedir. Bu doğrular üzerindeki diğer noktalardan geçemez. d_4 doğrusunu B,B',E dışında dördüncü J noktasında kesmek zorundadır. Yani $d_{10} \Lambda d_4 = J$ dir. d_{10} doğrusu d_7 doğrusu ile B,A',F dışında ancak I noktasında kesişir, yani $d_{10} \Lambda d_7 = I$ dır. d_{10} doğrusunun d_9 doğrusu ile de kesim noktası I dır.

d_{11}=CA' doğrusu d_1, d_2, d_3, d_5, d_7, d_9 doğrularını C veya A' noktalarının birinde kesmektedir. Dolayısıyla bu doğrular üzerindeki diğer noktalardan geçemez. d_{11} doğrusu d_4 doğrusunu B,B',E noktaları dışında J noktasında kesmek zorundadır, yani $d_{11} \Lambda d_4 = J$ dir. d_{11} doğrusu d_6 doğrusunu A,B',F noktaları dışında H noktasında, d_8 doğrusunu da yine H noktasında, d_{10} doğrusunu ise J de kesmek zorundadır.

Şimdi karşılıklı köşelerin kesim noktaları olan $AB' \Lambda BA' = d_6 \Lambda d_7 = F$, $BC' \Lambda B'C = d_8 \Lambda d_9 = G$ ve $AC' \Lambda C'A = d_{10} \Lambda d_{11} = J$ noktalarının doğrudaş olduğunu Dezargsel olan P_3 düzleminde P4 aksiyomunu uygulamakla şöyle gösterebiliriz:

E den perspektif {A,B,C'} ve {A',B',C} üçgenlerine P4 aksiyomu uygulanarak D, G, J noktalarının doğrudaş olduğu ve yine E den perspektif {A,B',C'} ve {A',B,C} üçgenlerine P4 aksiyomu uygulanarak F, D, J noktalarının doğrudaş olduğu görülür. Bu iki sonuçtan F, G, J noktaları doğrudaş olur (Bkz. Şema 3.4).


E
A B C'
A' B' C
D G
J
E
A B' C'
A' B C
F D
J
D, G, J doğrudaş
F, D, J doğrudaş
F , G , J noktaları doğrudaş (Pappus doğrusu)

Şema 3.4

KAYNAKLAR DİZİNİ

Argunov, B.I. ve Skornyakov, L.A., 1964, Konum teoremleri, (Çev.Ş.Yamantürk), Türk Matematik Derneği Yayınları, İstanbul, No.23, 59 s.

Barnabei, M. and Bonetti, F., 1979, Two examples of finite Bolyai-Lobachevsky planes, Rend. Math. (1), 12, 291-296

Bumcrot, R.J., 1971, Finite hyperbolic spaces, Atti Convegno Geom. Comb. e sue Appl. Perugia, 113-130.

Dembowski, P., 1968, Finite geometries, Springer Verlag New York Inc., 375 p.

Graves, L.M., 1962, A finite Bolyai-Lobachevsky plane, Amer. Math. Monthly, (69), 130-132.

Kaya, R., 1978, Projektif geometri, Fırat Üniversitesi Fen Fak. Yay., Mat.I, Elazığ, 371 s.

Kaya, R. ve Özcan, E., 1984, On the construction of Bolyai-Lobachevsky planes from projective planes, Rendiconti Del Seminario Matematico Di Birescia, (7), 427-434.

Olgun, Ş., (yayınlanacak), A note on some finite hyperbolic planes, Journal of Sci. and Arts of Gazi Univ.

Ostrom, T.G., 1962, Ovals and finite Bolyai-Lobachevsky planes, Amer. Math. Monthly, (69), 899-902.

Sandler, R., 1963, Finite homogenous Bolyai-Lobachevsky planes, Amer. Math. Monthly, (70), 853-854.

Stevenson, F.W., 1972, Projective planes, W.H. Freeman and Company San Francisco U.S.A., 402 p.