KONTROL VEKTÖRLÜ DİFERANSİYEL İÇERME İLE VERİLEN DİNAMİK SİSTEMLER

Nihal EGE

Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Kasım – 2005

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Nihal Ege'nin "Kontrol Vektörlü Diferansiyel İçerme ile Verilen Dinamik Sistemler" başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki, Doktora tezi 21/10/ 2005 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Doç. Dr. Haluk Hüseyin	....
Üye	:	Prof. Dr. Şahin Koçak	....
Üye	:	Prof. Dr. Kamal Soltanov	....
Üye	:	Yard. Doç. Dr. Aydın Aybar	....
Üye	:	Yard. Doç. Dr. Vakıf Cafer	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

KONTROL VEKTÖRLÜ DİFERANSİYEL İÇERME İLE VERİLEN DİNAMİK SİSTEMLER

NİHAL EGE

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: **Doç. Dr. Haluk Hüseyin**
2005, 196 sayfa

Tezde, davranışı kontrol vektörlü diferansiyel içerme ile verilen dinamik sistemlerin özellikleri incelenmiştir. Bu dinamik sistemler ters bağlantı prensibi ile kontrol edilip, kontrol fonksiyonları olarak süper stratejiler kullanılmıştır. Süper stratejinin ürettiği yörüngeler kümesi tanımlanmış ve yörüngeler kümesinin kompakt küme olduğu kanıtlanmıştır. Verilen kapalı kümenin kontrol vektörlü diferansiyel içermeye göre pozisyonlu zayıf invaryant olması için yeter koşullar elde edilmiştir. Bu koşullar infinitesimal biçimde olup, sistemin sağ tarafını verilen küme değerli dönüşümün türev kümeleri ile ilişkilendirmektedir. Verilen yeter koşullardan yararlanarak, kontrol sistemin yörüngesinin verilen kümede kalmasını garanti eden süper stratejiler bulunmuştur.

Ayrıca sürekli ve alttan yarı sürekli fonksiyonların seviye kümesi olarak verilen kümelerin pozisyonlu zayıf invaryantlık özellikleri incelenmiştir. Verilen fonksiyonun yöne göre üst türevi kullanılarak, seviye kümelerinin pozisyonlu zayıf invaryantlığı için yeter koşullar verilmiş ve kontrol sistemin yörüngesinin verilen kümede kalmasını garanti eden süper stratejiler bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler : **Diferansiyel İçerme, Kontrol Sistem, Süper Strateji, Yörüngeler Kümesi, Pozisyonlu Zayıf İnvaryant Küme**

ABSTRACT

PhD Thesis

DYNAMICAL SYSTEMS DESCRIBED BY DIFFERENTIAL INCLUSION WITH CONTROL VECTOR

NİHAL EGE

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Haluk Hüseyin
2005, 196 pages

In this thesis, the properties of the dynamical systems described by differential inclusion with control vector are investigated. This dynamical systems are controlled with feedback principle and super strategies are chosen as control functions. The set of motions of the system generated by given super strategy is defined and it is proved that the set of motions is compact. Sufficent conditions for positionally weak invariance of the given closed set with respect to a differential inclusion with control vector are obtained. These conditions have infinitesimal form and connect the right hand side of systems with derivative sets of given set valued map. Using sufficient conditions the super strategies are defined which guarantee that the motions of the system remain on the given set.

Furthermore, the positionally weak invariance properties of the level sets of the continuous and lower semicontinuous functions are studied. Using upper directional derivatives of the function, the sufficient conditions for positionally weak invariance of the level sets are given. Based on these sufficient conditions the super strategies are found that guarantee the motions of the system remain on the given set.

Keywords: Differential Inclusion, Control System, Super Strategy, Set of Motions, Positionally Weakly Invariant Set

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Haluk HÜSEYİN'ne, vakit ayırıp beni dinledikleri için sayın hocalarım Prof. Dr. Şahin KOÇAK, Yrd. Doç. Dr. Vakıf CAFER'e, her zaman beni destekleyen eşim Murat EGE'ye ve özverilerinden dolayı ailemin diğer üyelerine en içten teşekkürlerimi sunarım.

Nihal EGE

Kasım – 2005

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	:	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
$\lVert x \rVert$	:	x vektörünün Öklid normu
B	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının açık birim yuvarı
$\overline{B}$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının kapalı birim yuvarı
$\langle\, x, y \,\rangle$	:	x ve y vektörlerinin iç çarpımları
$B(x_0, \delta)$	:	x_0 noktasının açık δ komşuluğu
$\overline{B}(x_0, \delta)$	:	x_0 noktasının kapalı δ komşuluğu
$d(x, A)$	:	x noktasının A kümesine uzaklığı
$C([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$	:	$[t_0, \theta]$ aralığından $\mathbb{R}^n$ uzayına tanımlı, sürekli fonksiyonlar uzayı
$comp\,(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının boş olmayan, kompakt alt kümeleri uzayı
$conv\,(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının boş olmayan, konveks, kompakt alt kümeleri uzayı
$h(E, F)$	:	E ve F kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı
$F(\cdot) : X \rightsquigarrow Y$	:	X'de tanımlı ve her $x \in X$ için $F(x) \subset Y$ olacak biçimde küme değerli dönüşüm
$X(t_0, x_0)$	:	Diferansiyel içermenin $x\,(t_0) = x_0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerinin kümesi
$X(t_0, X_0)$	:	Diferansiyel içermenin $x\,(t_0) \in X_0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerinin kümesi
$X(t; t_0, x_0)$	:	(t_0, x_0) başlangıç noktası için diferansiyel içermenin t anındaki erişim kümesi
$X(t; t_0, X_0)$	:	(t_0, X_0) başlangıç kümesi için diferansiyel içermenin t anındaki erişim kümesi
$X(t_0, x_0, u_0)$	:	Kontrol vektörlü diferansiyel içermenin, u_0 kontrol vektörüne karşılık, $x\,(t_0) = x_0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerinin kümesi
$X(t_0, X_0, u_0)$	:	Kontrol vektörlü diferansiyel içermenin, u_0 kontrol vektörüne karşılık, $x\,(t_0) \in X_0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerinin kümesi

U_{pos}	:	Pozisyonlu stratejiler kümesi
$\Delta(0,1)$	:	$\{\delta(\mu,t,x,u) : (0,1)\times[0,\theta]\times\mathbb{R}^n\times P\to(0,\mu)\}$ ile tanımlanan fonksiyonlar kümesi
$\Delta_{\mu_*}(\delta(\cdot))$	:	$\{h(t,x,u) : [0,\theta]\times\mathbb{R}^n\times P\to(0,1)\mid h(t,x,u)\leq \delta_*(\mu_*,t,x,u)\}$ ile tanımlanan fonksiyonlar kümesi
$X(t_0,x_0,U_*,\delta_*(\cdot))$	:	Kontrol vektörlü diferansiyel içermenin, (t_0,x_0) başlangıç pozisyonundan $(U_*,\delta_*(\cdot))\in U_{pos}\times\Delta(0,1)$ süper stratejisinin ürettiği yörüngeler kümesi
$\mathcal{Y}_{\mu_*}(t_0,x_0,U_*,h_*(\cdot))$	:	$U_*\in U_{pos}$ pozisyonlu stratejinin ve $h_*(\cdot)\in\Delta_{\mu_*}(\delta(\cdot))$ fonksiyonunun, (t_0,x_0) başlangıç pozisyonundan ürettiği fonksiyonlar kümesi
$\mathcal{Z}_{\mu_*}(t_0,x_0,U_*,\delta_*(\cdot))$	:	Kontrol vektörlü diferansiyel içermenin, $(U_*,\delta_*(\cdot))\in U_{pos}\times\Delta(0,1)$ süper stratejisinin (t_0,x_0) başlangıç pozisyonundan ürettiği adımlı yörüngeler kümesi
$L\{[t_0,\theta];x(\cdot),U,h(\cdot)\}$	:	U pozisyonlu stratejisi ve $h(\cdot)\in\Delta_{\mu_*}(\delta(\cdot))$ fonksiyonunun, $x(\cdot)$ adımlı yörüngesi tanımlanırken doğurduğu $[t_0,\theta]$ aralığının iyi sıralı kümesi
$D^+W(t,x)$	:	$W(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün (t,x) noktasındaki üst sağ türev kümesi
$D^+_*W(t,x)$	:	$W(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün (t,x) noktasındaki alt sağ türev kümesi
$\dfrac{\partial^+ c(t,x)}{\partial(\alpha,f)}$	:	$c(\cdot)$ fonksiyonunun (t,x) noktasındaki (α,f) yönündeki üst türevi
$\dfrac{D^+ c(t,x)}{D(\alpha,f)}$	:	$c(\cdot)$ fonksiyonunun (t,x) noktasındaki (α,f) yönündeki üst D-türevi

1 GİRİŞ

Tez Konusunun Güncelliği. Küme değerli analizin uygulama alanı bulduğu dallardan biri de diferansiyel içermeler teorisidir. Diferansiyel içermeler iki açıdan ele alınabilir. İlk olarak diferansiyel içerme, sağ tarafı küme değerli dönüşüm olan diferansiyel denklemdir. İkinci olarak davranışı diferansiyel denklemle verilen kontrol sisteminin genel formudur. Diferansiyel içermeler ilk olarak (bkz. [54, 79]), sağ tarafı küme değerli dönüşüm olan diferansiyel denklemler olarak incelenmiş, daha sonra (bkz. [2, 21, 23, 27, 46]), sağ tarafı durum vektörüne göre süreksiz diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin çözümlerinin varlığı araştırılırken altyapı olarak kullanılmıştır.

60'lı yıllarda diferansiyel içermeler için Cauchy probleminin çözümlerinin varlığı, erişim kümeleri ve integral tünelin kapalılığı, kompaktlığı, bağlantılılığı, çözümler kümesinin başlangıç koşullarına bağımlılığı araştırılmıştır (bkz. [21, 22, 25, 39, 40, 77]). 70'lerde diferansiyel içermeler bir kontrol sistemi olarak incelenmeye başlanmış, davranışı diferansiyel içerme olarak verilen kontrol sistemleri için Pontryagin maksimum prensibi kanıtlanmıştır (bkz. [11-13]). Bunu 80'lerde diferansiyel içermelerin evalusyon denklemlerinin bulunuşu (bkz. [57 - 59, 78]), çözümlerin viability özelliklerinin (bkz. [4, 5, 14, 19, 27, 30, 35 - 37, 42, 44, 48, 51, 60, 61, 74]) incelenmesi izlemiştir. 80'li yılların sonu ve 90'lı yıllarda diferansiyel içermelerin viability özelliği, diferansiyel oyunlar teorisi ve Hamilton-Jacobi denklemleri teorisinde çeşitli uygulama alanları bulmuştur (bkz.[18, 24, 31, 32, 43, 66, 68, 69, 71, 72, 76]). Verilen bir diferansiyel oyunun değer fonksiyonuna, uygun bir Hamilton-Jacobi denkleminin bir viscosity (veya minimaks) çözümü karşılık getirilebileceği ve tersine verilen bir Hamilton-Jacobi denkleminin bir viscosity çözümünün, uygun bir diferansiyel oyunun değer fonksiyonu olduğu kanıtlanmıştır (bkz. [26, 52, 65, 66 - 69, 71, 72]). Böylece diferansiyel oyunlar teorisi ve Hamilton-Jacobi denklemleri teorisi arasındaki sıkı bağ ortaya çıkarılmıştır. Diferansiyel içermelerin erişim kümelerinin farklı özellikleri ve nümerik yöntemlerle hesaplanması da, bu yıllarda diferansiyel içermeler teorisindeki önemli araştırma konularından biri olmuştur (bkz. [1, 8, 10, 15 - 17, 32, 33, 49, 50, 55, 56, 73, 75]).

Kontrol teoride, ortaya çıkan sistemlerden biride kontrol vektörlü diferansiyel içerme ile verilen dinamik sistemlerdir. Bu sistemler konfliktli kontrol sistemlerin genelleşmesi olarak ele alınabilir. Ayrıca bu sistemler sağ tarafı faz vektörüne göre süreksiz olan diferansiyel denklemle verilen kontrol sistemlerin incelenmesinde ortaya çıkmaktadır. (bkz. [2, 5, 21 - 23, 46, 47])

Tezde dinamiği kontrol vektörlü diferansiyel içerme ile verilen kontrol sistemler incelenmektedir. Bu sistemlerde, kontrol fonksiyonu olarak, pozisyonlu strateji (bkz.[34, 46, 47, 67, 70]) yardımı ile yapılandırılan süper strateji kullanılmaktadır. Süper strateji, pozisyonlu strateji ve ulaşılan pozisyonda kontrol etkinin süreceği aralığı belirleyen fonksiyon ikilisi olarak tanımlanır. Verilen başlangıç pozisyonu için süper stratejinin ürettiği yörünge tanımlanmıştır. Sistemin yörüngesi kavramı diferansiyel oyunlar teorisinde (bkz.[46, 47, 62, 70]) kullanılan yörünge kavramına benzer olarak verilmektedir. Süper stratejinin ürettiği farklı bir yörünge kavramı [29] çalışmasında verilmiştir. Bu kavram tezde verilen yörünge kavramından daha karmaşık olup, ulaşılan pozisyonda kontrol etkinin süreceği aralığı belirleyen fonksiyonun, pozisyonlar uzayında verilen bir kümeye ve sistemin sağ tarafına bağlantılı olmasını istemektedir.

Teori ve uygulamada, güncel problemlerden biri, verilen kontrol sistemin yörüngesini önceden verilen bir kümede bulundurmaktır. Bu problem, verilen kümenin verilen dinamik sisteme göre zayıf invaryant veya güçlü invaryant olması kapsamında incelenmektedir (bkz.[5, 14, 19, 28, 29, 36, 48]). Ayrıca verilen dinamik sistemin viability özelliği de (bkz.[44, 48, 51, 61]), sistemin bir yörüngesinin verilen kümede bulunması ile denktir.

Tezde kontrol fonksiyonu olarak süper stratejiler seçilerek, dinamiği kontrol vektörlü diferansiyel içerme ile verilen dinamik sistemin yörüngesinin önceden verilen kümede kalması özelliği incelenmektedir. Pozisyonlar uzayında verilen kapalı kümenin kontrol vektörlü diferansiyel içermeye göre pozisyonlu zayıf invaryantlık kavramı [28, 29] çalışmalarında verilmiştir. Ele alınan dinamik sistemin bu özelliği, verilen kümenin kontrol vektörlü diferansiyel içermeye göre pozisyonlu zayıf invaryant olması kapsamında incelenmektedir. Verilen kümenin kontrol vektörlü diferansiyel içermeye göre pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliği, kümelerin diferansiyel içermeye göre zayıf ve güçlü invaryantlık kavramlarının genelleşmesi olup (bkz. [14, 19, 28, 29, 36, 64]) diferansiyel oyunlar teorisinde kullanılan stabil köprü kavramına yakındır (bkz. [46, 47, 67, 70]). Tez de pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliği, küme değerli analizde ve düzgün olmayan analizde sıkça kullanılan küme değerli dönüşümlerin türev kümeleri (bkz. [4, 5, 6, 9, 14, 19, 20, 34, 41, 67, 69]) yardımı ile incelenmektedir. Pozisyonlu zayıf invaryantlık için [29] çalışmasında verilen yeter koşullar, tezde bulunan yeter koşulların bazılarının sonucu olarak elde edilebilir. Ayrıca, verilen kapalı kümenin kontrol vektörlü diferansiyel içermeye göre pozisyonlu zayıf invaryant olması için yeni yeter koşullar bulunmuştur.

Tezin Amacı. Tez de davranışı kontrol vektörlü diferansiyel içerme ile verilen dinamik sistemlerin kontrol yöntemleri, verilen süper stratejinin ürettiği yörüngelerin özellikleri araştırılmıştır. Verilen bir kümenin bu sistemlere göre pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliği ve sistemin yörüngelerinin verilen kümede kalmasını garanti eden süper stratejinin bulunması incelenmektedir. Pozisyonlu zayıf invaryantlık için [29] çalışmasında verilen yeter koşullar, tezde bulunan yeter koşulların bazılarının sonucu olarak elde edilebilir. Ayrıca, verilen kapalı kümenin kontrol vektörlü diferansiyel içermeye göre pozisyonlu zayıf invaryant olması için yeni yeter koşullar bulunmuştur.

Araştırma Yöntemleri. Tezde geliştirilen yöntemelerin temelini, fonksiyonel analizin, diferansiyel denklemler ve içermeler teorisinin, küme değerli analizin, düzgün olmayan analizin, diferansiyel oyunlar teorisinin yöntem ve kavramları oluşturmaktadır.

Bilimsel Yenilik.

1. Süper strateji ve süper stratejinin verilen başlangıç pozisyondan ürettiği yörüngeler kümesi tanımlanmıştır. Yörüngelerin mutlak sürekli fonksi-

yonlar ve yörünge kümelerinin boştan farklı kompakt olduğu kanıtlanmıştır.

2. Verilen kapalı kümenin kontrol vektörlü diferansiyel içermeye göre pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliği incelenmiştir. Küme değerli dönüşümlerin türev kümesi kullanılarak verilen kümenin pozisyonlu zayıf invaryant olması için yeter koşul verilmiştir. Bu yeter koşullardan yararlanarak, sistemin yörüngesinin verilen kümede kalmasını garanti eden süper stratejiler bulunmuştur. Verilen yeter koşullar küçük bir hata ile sağlandığında, pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliğinin de küçük bir hata ile bozulacağı gösterilmiştir.

3. Sürekli ve alttan yarı sürekli fonksiyonların seviye kümesi olarak verilen kümelerin pozisyonlu zayıf invaryantlık özellikleri incelenmiştir. Verilen fonksiyonun yöne göre üst türevi kullanılarak, seviye kümelerinin pozisyonlu zayıf invaryantlığı için yeter koşullar verilmiş ve sistemin yörüngesinin verilen kümede kalmasını garanti eden süper stratejiler bulunmuştur. Seviye kümesi olarak verilen kümelerin pozisyonlu zayıf invaryantlığı için bulunan yeter koşullar belli bir hata ile sağlandığında, pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliğinin uygun bir hata ile bozulacağı kanıtlanmıştır.

Tezin Teorik ve Pratik Değeri. Tezde elde edilen sonuçlar belirsizlik içeren kontrol sistemlerin yörüngelerine önceden verilen özelliği garanti edecek kontrol fonksiyonlarının bulunmasında kullanılabilir.

Tez, ilk bölüm giriş olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölüm tezde yapılan araştırmalarda kullanılan önbilgiler, temel tanım ve teoremlerden oluşmuştur.

Üçüncü bölümde, pozisyonlu stratejinin ve süper stratejinin ürettiği yörüngeler tanımlanmış, yörüngelerin ve yörünge kümelerinin özellikleri incelenmiştir.

Her yörüngenin mutlak sürekli fonksiyon, yörüngeler kümesinin ise sürekli fonksiyonlar uzayında boştan farklı kompakt küme olduğu kanıtlanmıştır.

Dördüncü bölümde, verilen kapalı kümenin kontrol vektörlü diferansiyel içerme ile verilen kontrol sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliği incelenmektedir. Verilen kümenin pozisyonlu zayıf invaryant olması için yeter koşullar verilmiştir. Bu koşullar infinitesimal biçimde olup, uygun küme değerli dönüşümün türev kümeleri ile sistemin sağ tarafını ilişkilendirmektedir. Pozisyonlu zayıf invaryantlık için bulunan yeter koşullardan yararlanarak, sistemin yörüngesinin verilen kümede kalmasını garanti eden süper strateji bulunmuştur. Bu bölümde, verilen yeter koşullar belli bir anlamda çok az bozulduğunda, pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliğinin de bir anlamda çok az bozulacağı kanıtlanmıştır. Bu bölümde elde edilen sonuçlar bir örnekle örneklendirilmiştir.

Beşinci bölümde, sürekli ve alttan yarı sürekli fonksiyonların seviye kümesi olarak verilen kümelerin pozisyonlu zayıf invaryantlık özellikleri incelenmiştir. Bu tür kümelerin pozisyonlu zayıf invaryantlığı için yeter koşullar bulunmuştur. Bu koşullar dinamik sistemin sağ tarafı ile verilen fonksiyonun yöne göre üst türevlerini ilişkilendirmektedir. Ayrıca bulunan yeter koşulların stabilliği incelenmiştir. Yani bulunan yeter koşullar küçük bir hata ile sağlanırken, pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliğinin de küçük bir hata ile bozulacağı kanıtlanmıştır.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde analiz, konveks analiz, küme değerli analiz ve diferansiyel içermeler teorisinin sonraki bölümler için gerekli olan bazı temel tanım ve teoremleri verilecektir.

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

$\mathbb{R}^n$ ile n-boyutlu Öklid uzayı, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

ile x vektörünün normu,

$$\langle\, x, y\,\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

ile x ve y vektörlerinin iç çarpımları gösterilsin. Açıktır ki, $\|x\| = \sqrt{\langle\, x, x\,\rangle}$ olur.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\delta > 0$ olmak üzere, x_0 noktasının açık δ komşuluğu

$$B(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x - x_0\| < \delta\}$$

ve x_0 noktasının kapalı δ komşuluğu

$$\overline{B}(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x - x_0\| \leq \delta\}$$

ile gösterilsin. Ayrıca,

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x\| < 1\}$$

$$\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x\| \leq 1\}$$

yani sırasıyla $B = B(0, 1)$ ve $\overline{B} = \overline{B}(0, 1)$ olarak gösterilsin.

Şimdi konveks kümenin tanımı verilsin.

Tanım 2.1.1. *$E \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall\, x \in E,\ y \in E$ ve $\alpha \in [0,1]$için*

$$\alpha\, x + (1-\alpha)\, y \in E$$

olursa, E kümesi konvekstir denir.

Bunların dışında, x noktasının A kümesine uzaklığı

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

olarak tanımlanır.

$C\left([a,b], \mathbb{R}^n\right)$ ile $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonların kümesi gösterilsin. $x(\cdot) \in C\left([a,b], \mathbb{R}^n\right)$ için

$$\|x(\cdot)\|_C = \max_{t \in [a,b]} \|x(t)\|$$

olsun. $C\left([a,b], \mathbb{R}^n\right)$ kümesi $\|\cdot\|_C$ ile normlu uzaydır.

Aşağıdaki önerme $\mathbb{R}^n$ uzayındaki kümelerin kompaktlığını karakterize etmektedir.

Önerme 2.1.1. *$A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul, A kümesinin kapalı ve sınırlı olmasıdır.*

Önerme 2.1.2. *[3, 6] $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ integrallenebilir fonksiyon $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme, h.h $t \in [a,b]$ için $x(t) \in M$ olsun. Bu durumda*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b x(t)dt \in coM$$

olur.

Burada coM kümesi, $M \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks zarfını göstermektedir.

$f(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun mutlak sürekliliği aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.2. *[53] $f(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$ ve $[a,b]$ aralığının ikişer ikişer ayrık keyfi (a_i, b_i), $(i = 1, 2, \ldots, k)$ alt aralıkları için $\sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i) < \delta$ iken*

$$\sum_{i=1}^{k} \|f(b_i) - f(a_i)\| < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *sayısı varsa,* $f(\cdot)$ *fonksiyonuna* $[a, b]$ *aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir.*

Yukarıdaki tanımdan mutlak sürekli fonksiyonlar aynı zamanda düzgün süreklidir. Ancak bunun tersi doğru değildir.

Tanım 2.1.3. $E \subset \mathbb{R}^m$, $f(\cdot) : E \to \mathbb{R}^n$ *bir fonksiyon olsun. Her* $x_1, x_2 \in E$ *için*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L|x_1 - x_2|$$

olacak şekilde $L > 0$ *sayısı varsa,* $f(\cdot)$ *fonksiyonuna* L *sabiti ile Lipschitz sürekli fonksiyon denir.*

Tanım 2.1.4. $E \subset \mathbb{R}^m$, $f(\cdot) : E \to \mathbb{R}^n$ *bir fonksiyon olsun. Her* $D \subset E$ *sınırlı kümesi ve her* x_1, $x_2 \in D$ *için*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

olacak şekilde $L = L(D) > 0$ *sayısı varsa,* $f(\cdot)$ *fonksiyonuna yerel Lipschitz fonksiyon denir.*

Mutlak sürekli fonksiyonların tanımından aşağıdaki önermeler elde edilir.

Önerme 2.1.3. $f(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *fonksiyonu Lipschitz sürekli ise,* $[a, b]$ *aralığında mutlak süreklidir.*

Önerme 2.1.4. $u(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrallenebilir fonksiyon ve her* $t \in [a, b]$ *için*

$$f(t) = \int_a^t u(\tau)\, d\tau$$

ise, $f(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}$ *mutlak sürekli fonksiyondur.*

2.2 Küme Değerli Dönüşümler. Süreklilik Kavramı ve Türev Kümeleri

Bu bölümde küme değerli analizin temel tanımları verilecek ve konu ile ilgili bazı teoremler ifade edilecektir.

Aşağıda küme değerli dönüşüm kavramı tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.1. *X ve Y topolojik uzaylar, $\forall\ x \in X$ için $F(x) \subset Y$ olsun. Bu durumda, $F(\cdot)$ dönüşümüne küme değerli dönüşüm ya da küme değerli fonksiyon denir ve $F(\cdot) : X \rightsquigarrow Y$ şeklinde gösterilir. Ayrıca*

$$\{(x, y) \in X \times Y \mid\ y \in F(x)\}$$

olarak tanımlanan kümeye $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün grafiği denir ve $grF\,(\cdot)$ ile gösterilir.

Şimdi küme değerli dönüşümler için süreklilik kavramı verilsin.

Süreklilik

Tanım 2.2.2. *[5, 6] X ve Y topolojik uzaylar, $F(\cdot) : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. $F(x_0)$ kümesini içeren keyfi $N\,(F(x_0))$ açık komşuluğu alındığında, $\forall\ x \in M(x_0)$ için, $F(x) \subset N\,(F(x_0))$ olacak biçimde x_0 noktasının bir $M(x_0)$ açık komşuluğu varsa, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne x_0 noktasında üstten yarı süreklidir denir.*

Tanım 2.2.3. *[5, 6] X ve Y topolojik uzaylar, $F(\cdot) : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Keyfi $y_0 \in F(x_0)$ ve y_0 noktasının keyfi $N(y_0)$ komşuluğu alındığında, $\forall\ x \in M(x_0)$ için, $F(x) \bigcap N(y_0) \neq \emptyset$ olacak biçimde x_0 noktasının bir $M(x_0)$ açık komşuluğu varsa, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne x_0 noktasında alttan yarı süreklidir denir.*

Tanım 2.2.4. *[5, 6] X ve Y topolojik uzaylar, $F(\cdot) : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü x_0 noktasında alttan ve üstten yarı sürekli ise, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne x_0 noktasında süreklidir denir.*
$F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü her $x_0 \in X$ noktasında sürekli ise $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü X uzayında süreklidir denir.

Aşağıda $\mathbb{R}^n$'de verilen iki küme arasındaki Hausdorff uzaklığı tanımlanmaktadır.

Tanım 2.2.5. *$E, F \subset \mathbb{R}^n$ olsun.*

$$h(E,F) = \max\left\{\sup_{x\in E} d(x,F), \sup_{y\in F} d(y,E)\right\}$$

sayısına E ve F kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı denir.

Çoğu zaman iki küme arasındaki Hausdorff uzaklığının bulunması için aşağıdaki önerme kullanılır.

Önerme 2.2.1. *$E, F \in \mathbb{R}^n$ olsun.*

$$h(E,F) = \inf\{r > 0 \,|\, E \subset F + r\cdot B \;, \quad F \subset E + r\cdot B\}$$

olur.

Önerme 2.2.2. *$E, F \subset \mathbb{R}^n$ için $\beta(E,F) = \sup_{x\in E} d(x,F)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\beta(E,F) = inf\{r > 0 \,:\, E \subset F + r\cdot B\}$ olur.*

Ayrıca $comp(\mathbb{R}^m)$ ile $\mathbb{R}^m$ uzayının boştan farklı kompakt alt kümeleri uzayı, $conv(\mathbb{R}^m)$ ile $\mathbb{R}^m$ uzayının boştan farklı kompakt, konveks alt kümeleri uzayı gösterilsin. Bu durumda $(comp(\mathbb{R}^m), h(\cdot,\cdot))$ ve $(conv(\mathbb{R}^m), h(\cdot,\cdot))$ metrik u-zaylardır.(bkz. $[6], [8], [23], [41]$).
$2^{\mathbb{R}^m}$ ile $\mathbb{R}^m$ uzayının boştan farklı alt kümeleri uzayını, $cl(\mathbb{R}^m)$ ile $\mathbb{R}^m$ uzayının boştan farklı kapalı alt kümeleri uzayı gösterilsin.

$A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $F(\cdot) : A \to comp(\mathbb{R}^m)$ veya $F(\cdot) : A \to conv(\mathbb{R}^m)$ biçiminde olan küme değerli dönüşümlerin $x_0 \in A$ alttan ve üstten yarı sürekliliğin karakterizasyonu verilsin.

Önerme 2.2.3. *[5, 6] $A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $F(\cdot) : A \to comp(\mathbb{R}^m)$ ve $x_0 \in A$ olsun. $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün x_0 noktasında üstten yarı sürekli olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık keyfi $x \in B(x_0,\delta) \cap A$ için*

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon \cdot B$$

olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısının var olmasıdır.

Önerme 2.2.4. *[5, 6] $A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $F(\cdot) : A \to comp(\mathbb{R}^m)$ ve $x_0 \in A$ olsun. $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün x_0 noktasında alttan yarı sürekli olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık keyfi $x \in B(x_0, \delta) \cap A$ için*

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon \cdot B$$

olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısının var olmasıdır.

Önerme 2.2.5. *[5, 6] $A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $F(\cdot) : A \to comp(\mathbb{R}^m)$ ve $x_0 \in A$ olsun. $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık keyfi $x \in B(x_0, \delta) \cap A$ için*

$$h(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısının var olmasıdır.

Şimdi, alttan yarı sürekli küme değerli dönüşümün dizilerle karakterizasyonu verilsin.

Önerme 2.2.6. *[5, 6, 41] $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to cl(\mathbb{R}^m)$ ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün alttan yarı sürekli olması için gerek ve yeter koşul $n \to \infty$ iken $x_n \to x_0$ olacak biçimdeki keyfi $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi ve $\forall\ y_0 \in F(x_0)$ için, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ $y_n \in F(x_n)$ ve $n \to \infty$ iken $y_n \to y_0$ olacak biçimde bir $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin var olmasıdır.*

Yine fonksiyonlarda olduğu gibi küme değerli dönüşümler için de Lipschitz süreklilik tanımı yapılabilir.

Tanım 2.2.6. *$A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $F(\cdot) : A \to comp\,(\mathbb{R}^m)$ olsun. Her $x, y \in A$ için*

$$h(F(x), F(y)) \leq L\,\|x - y\|$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı varsa, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne L sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlıyor veya L sabitiyle Lipschitz süreklidir denir.

Konveks küme değerli dönüşüm ve kompakt küme değerli dönüşüm tanımları aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.2.7. *$A \subset \mathbb{R}^n$ konveks küme olmak üzere $F(\cdot) : A \to 2^{\mathbb{R}^m}$ küme değerli dönüşümünün grafiği konveks küme ise $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü konvekstir denir.*

Tanım 2.2.8. *$A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme olmak üzere $F(\cdot) : A \to 2^{\mathbb{R}^m}$ küme değerli dönüşümünün grafiği kompakt küme ise $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü kompaktır denir.*

Önerme 2.2.7. *$A \subset \mathbb{R}^n$ konveks küme olmak üzere $F(\cdot) : A \to 2^{\mathbb{R}^m}$ küme değerli dönüşüm olsun. $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün konveks olması için gerek ve yeter koşul her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\lambda \cdot F(x_1) + (1-\lambda) \cdot F(x_2) \subset F(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2) \tag{2.2.1}$$

içermesinin sağlanmasıdır.

Tanım 2.2.9. *$A \subset \mathbb{R}^n$ kapalı küme olmak üzere, $F(\cdot) : A \to 2^{\mathbb{R}^m}$ küme değerli dönüşümün grafiği kapalı küme ise, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü kapalıdır denir.*

Türev Kümeleri

$K \subset \mathbb{R}^n$ kapalı bir küme olsun. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ için

$$T_K(x) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta} d(x + \delta \cdot r, K) = 0 \right\}$$

$$T_K^*(x) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta} d(x + \delta \cdot r, K) = 0 \right\}$$

olarak tanımlansın.

Tanım 2.2.10. *[5, 6, 9] $T_K(x)$ ($T_K^*(x)$) kümesine K kümesinin x noktasındaki üst (alt) contingent konisi adı verilir.*

Önerme 2.2.8. *$K \subset \mathbb{R}^n$ kapalı küme olmak üzere $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ için $T_K(x)$, $T_K^*(x)$ kümeleri kapalıdır.*

- *$x \notin K$ ise $T_K(x) = \emptyset,\ T_K^*(x) = \emptyset,$*

- $x \in intK$ *ise* $T_K(x) = \mathbb{R}^n$, $T_K^*(x) = \mathbb{R}^n$.

Önerme 2.2.9. $T_K(x)$, $T_K^*(x)$ *kümeleri konidir.*

Kapalı $W(\cdot) : [a,b] \to 2^{\mathbb{R}^n}$ küme değerli dönüşümünün alt ve üst diferansiyeli tanımları aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.2.11. *[5, 6, 41]* $W(\cdot) : [a,b] \to 2^{\mathbb{R}^n}$ *herhangi bir kapalı küme değerli dönüşüm,* $(t_*, x_*) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ *olsun.* $p \in \mathbb{R}$ *olmak üzere grafiği* $T_W(t_*, x_*) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *kümesiyle aynı olan*

$$p \to DW(t_*, x_*)|(p)$$

küme değerli dönüşümüne $W(\cdot)$ *küme değerli dönüşümünün* (t_*, x_*) *noktasındaki üst diferansiyeli denir.*

Tanım 2.2.12. *[5, 6, 41]* $W(\cdot) : [a,b] \to 2^{\mathbb{R}^n}$ *herhangi bir kapalı küme değerli dönüşüm,* $(t_*, x_*) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ *olsun.* $p \in \mathbb{R}$ *olmak üzere grafiği* $T_W^*(t_*, x_*) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *kümesiyle aynı olan*

$$p \to D^*W(t_*, x_*)|(p)$$

küme değerli dönüşümüne $W(\cdot)$ *küme değerli dönüşümünün* (t_*, x_*) *noktasındaki alt diferansiyeli denir.*

$W(\cdot) : [a,b] \to 2^{\mathbb{R}^n}$ kapalı küme değerli dönüşüm, $(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$DW(t,x)|(1) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n : \exists\, x_k \in W(t_k)\,,\ t_k > t\,,\ \lim_{t_k \to t^+} \frac{x_k - x}{t_k - t} = r \right\} \quad (2.2.2)$$

kümesine $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün (t,x) noktasındaki üst sağ türev kümesi,

$$D^*W(t,x)|(1) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n : \exists x(\tau) \in W(\tau), \tau > t, \lim_{\tau \to t^+} \frac{x(\tau) - x}{\tau - t} = r \right\} \quad (2.2.3)$$

kümesine $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün (t,x) noktasındaki alt sağ türev kümesi,

$$DW(t,x)|(-1) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n : \exists x_k \in W(t_k), t_k < t, \lim_{t_k \to t^-} \frac{x_k - x}{t_k - t} = r \right\} \quad (2.2.4)$$

kümesine $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün (t,x) noktasındaki üst sol türev kümesi,

$$D^*W(t,x)|(-1) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n : \exists x(\tau) \in W(\tau), \tau < t, \lim_{\tau \to t^-} \frac{x(\tau) - x}{\tau - t} = r \right\}$$

kümesine $W(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün (t,x) noktasındaki alt sol türev kümesi denir. (bkz. [6, 14, 19, 33])

Önerme 2.2.10. *Türev kümeleri kapalı kümelerdir.*

Önerme 2.2.11. *Aşağıdaki eşitlikler doğrudur.*

$$DW(t,x)|(1) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n : \liminf_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta} d(x + \delta r, W(t+\delta)) = 0 \right\}$$

$$D^*W(t,x)|(1) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n : \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta} d(x + \delta r, W(t+\delta)) = 0 \right\}$$

$$DW(t,x)|(-1) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n : \liminf_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta} d(x - \delta r, W(t-\delta)) = 0 \right\}$$

$$D^*W(t,x)|(-1) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n : \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta} d(x - \delta r, W(t-\delta)) = 0 \right\}$$

Türev kümelerinin, teğet konilerle bağlantısı aşağıdaki önermede verilmektedir.

Önerme 2.2.12. *Aşağıdaki içermeler doğrudur.*

$$DW(t,x)|(1) \subset \{r \in \mathbb{R} \mid (1,r) \in T_W(t,x)\}$$

$$D^*W(t,x)|(1) \subset \{r \in \mathbb{R}^n \mid (1,r) \in T_W^*(t,x)\}$$

$W(\cdot) : [a,b] \to comp(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü Lipschitz koşulunu sağlıyorsa, Önerme 2.2.12'deki içermeler eşitliğe dönüşür.

$(t,x) \in int(grW(\cdot))$ ise türev kümelerinin tamamı $\mathbb{R}^n$, $(t,x) \notin grW(\cdot)$ ise boş küme olur. f türevlenebilir fonksiyon ve $\forall t \in [a,b]$ için $W(t) = \{f(t)\}$ ise $\forall t \in (a,b)$ için

$$\begin{aligned} DW(t,x)|(1) &= D^*W(t,x)|(1) = DW(t,x)|(-1) \\ &= D^*W(t,x)|(-1) = \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} \end{aligned}$$

olur. Kolaylık olması açısından

$$\begin{aligned} DW(t,x)|(1) &= D^+W(t,x), \qquad DW(t,x)|(-1) = D^-W(t,x) \\ D^*W(t,x)|(1) &= D^+_*W(t,x), \qquad D^*W(t,x)|(-1) = D^-_*W(t,x) \end{aligned}$$

ile gösterilecektir.

2.3 Alttan ve Üstten Yarı Sürekli Fonksiyonlar, Yöne Göre Alt ve Üst Türevler

Bir $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun alt limit ve üst limit kavramlarını verelim.

Tanım 2.3.1. *[3] $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun.*

$$\sup_{\delta>0} \inf_{x\in B(x_0,\delta)} f(x), \qquad \inf_{\delta>0} \sup_{x\in B(x_0,\delta)} f(x)$$

ifadelerine $f(\cdot)$ fonksiyonunun x_0 noktasında sırasıyla alt limiti, üst limiti denir. $f(\cdot)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki alt limiti $\liminf_{x\to x_0} f(x)$ ile üst limiti $\limsup_{x\to x_0} f(x)$ ile gösterilir. Yani

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \sup_{\delta>0} \inf_{x\in B(x_0,\delta)} f(x)$$

ve

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \inf_{\delta>0} \sup_{x\in B(x_0,\delta)} f(x)$$

olur.

Tanım 2.3.2. *[3, 14, 30] $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $v \in \mathbb{R}^n$ olsun.*

$$\liminf_{\substack{\delta\to 0^+ \\ \|y\|\to 0^+}} \frac{f(x_0+\delta\, v+\delta\, y)-f(x_0)}{\delta}, \qquad \limsup_{\substack{\delta\to 0^+ \\ \|y\|\to 0^+}} \frac{f(x_0+\delta\, v+\delta\, y)-f(x_0)}{\delta}$$

sayısına $f(\cdot)$ fonksiyonunun sırasıyla yöne göre alt ve üst türev sayıları denir ve $\dfrac{\partial^- f(x_0)}{\partial\, v}$, $\dfrac{\partial^+ f(x_0)}{\partial\, v}$ ile gösterilir.

Önerme 2.3.1. *$f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonu yerel Lipschitz ise, keyfi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $v \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\frac{\partial^+ f(x_0)}{\partial\, v} = \limsup_{\delta \to 0^+} \frac{f(x_0 + \delta\, v) - f(x_0)}{\delta}$$
$$\frac{\partial^- f(x_0)}{\partial\, v} = \liminf_{\delta \to 0^+} \frac{f(x_0 + \delta\, v) - f(x_0)}{\delta}$$

olur.

Teorem 2.3.1. *[20] I sonlu bir küme ve $\forall\ i \in I$ için $f_i(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için*

$$f(x) = \max_{i \in I} f_i(x)$$

olsun. O zaman $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu keyfi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında keyfi $v \in \mathbb{R}^n$ yönüne göre türevlenebilirdir ve $I(x_0) = \{i_* \in I : f_{i_*}(x_0) = f(x_0)\}$ olmak üzere

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial\, v} = \max_{i \in I(x_0)} \langle \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial\, x}, v \rangle$$

olur. Burada $\dfrac{\partial f_i(x_0)}{\partial\, x} = \left\{ \dfrac{\partial f_i(x_0)}{\partial\, x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f_i(x_0)}{\partial\, x_n} \right\} = grad\, f_i(x_0)$ olarak tanımlıdır.

Tanım 2.3.3. *$f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\| x - x_0 \| < \delta$ iken*

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ var ise $f(\cdot)$ fonksiyonuna x_0 noktasında alttan yarı süreklidir denir.

$\forall\ \varepsilon > 0$ için $\| x - x_0 \| < \delta$ iken

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ var ise $f(\cdot)$ fonksiyonuna x_0 noktasında üstten yarı süreklidir denir.

$\forall\ x \in A \subset \mathbb{R}^n$ için $f(\cdot)$ fonksiyonu alttan (üstten) yarı sürekli ise $f(\cdot)$ fonksiyonuna A kümesi üzerinde alttan (üstten) yarı süreklidir denir. Açık olarak $f(\cdot)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerekli ve yeter koşul $f(\cdot)$ fonksiyonunun hem alttan hemde üstten yarı sürekli olmasıdır.

2.4 Diferansiyel İçermeler. Varlık Teoremleri ve İnvaryantlık

Bu bölümde diferansiyel içermeler teorisinin temel tanımları verilecek ve konunun bazı önemli teoremleri ifade edilecektir.

$F(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşüm olsun.

$$\frac{dx(t)}{dt} \in F(t, x(t))\ ,\ t \in [a,b] \tag{2.4.1}$$

ifadesine diferansiyel içerme denir. Burada $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ bilinmeyen fonksiyondur.

Tanım 2.4.1. *[5, 8, 23] Hemen her* $t \in [a,b]$ *için* (2.4.1) *içermesini sağlayan mutlak sürekli* $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *fonksiyonuna* (2.4.1) *diferansiyel içermesinin çözümü denir.*

Özel olarak, (2.4.1) diferansiyel içermesinde $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü tek değerli ise (2.4.1) diferansiyel içermesi diferansiyel denkleme dönüşür. Yani keyfi $(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ için $F(t,x) = \{f(t,x)\}$ ise, (2.4.1) diferansiyel içermesi

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))\ ,\ t \in [a,b]$$

diferansiyel denklemine dönüşür.

(2.4.1) diferansiyel içermesinin $t_0 \in [a,b]$ olmak üzere $x(t_0) = x_0$ koşulunu sağlayan çözümlerinin bulunması problemine Cauchy problemi denir. Somut olarak, $t_0 \in [a,b]$ olmak üzere, Cauchy problemini aşağıdaki gibi yazılır.

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \tag{2.4.2}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.4.3}$$

$(2.4.2) - (2.4.3)$ probleminin çözümler kümesi $X(t_0, x_0)$ ile gösterilsin ve $t \in [a, b]$ için

$$X(t; t_0, x_0) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n \,|\, x(\cdot) \in X(t_0, x_0)\}$$

olarak tanımlansın. $X(t; t_0, x_0)$ kümesine, (2.4.2) diferansiyel içermesinin (t_0, x_0) başlangıç noktası için t anındaki erişim kümesi denir. $t_0 \in [a, b]$ ve $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere, (2.4.2) diferansiyel içermesinin $x(t_0) \in X_0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümler kümesi $X(t_0, X_0)$ ile gösterilsin. Yani $X(t_0, X_0)$

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \tag{2.4.4}$$

$$x(t_0) \in X_0 \tag{2.4.5}$$

Cauchy probleminin çözümlerinin kümesi olsun. Açıktır ki,

$$X(t_0, X_0) = \{x(\cdot) \in X(t_0, x_0) \; : x_0 \in X_0\}$$

olur.

$$X(t; t_0, X_0) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n \; : x(\cdot) \in X(t_0, X_0)\}$$

olsun. $X(t; t_0, X_0)$ kümesine (2.4.4) diferansiyel içermesinin (t_0, X_0) başlangıç kümesi için t anındaki erişim kümesi denir.

Teorem 2.4.1. *[5, 8, 19, 42] $F(\cdot) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to conv(\mathbb{R}^n)$ alttan yarı sürekli dönüşüm ve $t_0 \in (a, b)$ olsun. O zaman $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ aralığında $(2.4.2) - (2.4.3)$ Cauchy probleminin çözümü var olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.*

Teorem 2.4.2. *[5, 8, 19, 42] $F(\cdot) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to conv(\mathbb{R}^n)$ üstten yarı sürekli dönüşüm, $t_0 \in (a, b)$ olsun. O zaman $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ aralığında $(2.4.2) - (2.4.3)$ Cauchy probleminin çözümü var olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.*

Teorem 2.4.3. *[5, 8] $F(\cdot) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to conv(\mathbb{R}^n)$ üstten yarı sürekli dönüşüm, $t_0 \in [a, b]$ ve $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme olsun. $\forall \; (t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$ ve bir $c > 0$ sayısı için*

$$\max\{\|f\| \mid f \in F(t, x)\} \leq c\,(1 + \|x\|) \tag{2.4.6}$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman $\forall \; x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ çözümü, tüm $[a, b]$ aralığında tanımlanmış fonksiyondur ve *i.* $\forall\ x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ *için* $\|x(\cdot)\|_C \leq R$,

ii. $\forall\ t \in [a,b]$, $x \in X(t; t_0, X_0)$ *için* $\|x\| \leq R$

olacak biçimde $R > 0$ *vardır.*

Teorem 2.4.4. *[5, 8] Teorem 2.4.3 tüm koşulları sağlansın. O zaman* $X(t_0, X_0)$ *çözümler kümesi* $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ *uzayında ve her* $t \in [a,b]$ *için* $X(t; t_0, X_0)$ *erişim kümesi* $\mathbb{R}^n$ *uzayında kompakt kümelerdir.*

$W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı bir küme, $t \in [t_0, \theta]$ için

$$W(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (t,x) \in W\}$$

olsun. O halde $W(\cdot) : [0,\theta] \to cl(\mathbb{R}^n)$ biçiminde kapalı bir küme değerli dönüşümdür ve $gr\, W(\cdot) = W$ olur. W kümesinin,

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \tag{2.4.7}$$

diferansiyel içermesine göre zayıf invaryantlığı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.4.2. *[5, 14, 19, 35 - 37, 64]* $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ *kapalı kümesi ve* (2.4.7) *diferansiyel içermesi verilsin. Keyfi* $(t_*, x_*) \in W$ *noktasına karşılık, her* $t \in [t_*, \theta]$ $(t \in [0, t_*])$ *için* $x(t) \in W(t)$ *olacak biçimde* $x(\cdot) \in X(t_*, x_*)$ *çözümü varsa,* W *kümesi* (2.4.7) *diferansiyel içermesine göre sağa (sola) zayıf invaryanttır denir.*

Sıradaki teorem, W kümesinin (2.4.7) diferansiyel içermesine göre zayıf invaryantlığını karakterize etmektedir.

Teorem 2.4.5. *[4, 5, 19, 35, 36]* $F(\cdot) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to conv(\mathbb{R}^n)$ *küme değerli dönüşümü ve* $W \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ *kapalı kümesi verilsin.*

i. $F(\cdot)$ *üstten yarı sürekli,*

ii. $\forall\ (t,x) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ *ve bir* $c > 0$ *sayısı için*

$$\max\{\|f\| : f \in F(t,x)\} \leq c(1 + \|x\|)$$

eşitsizliği sağlanıyor olsun.

W kümesinin, (2.4.7) *diferansiyel içermesine göre sağa zayıf invaryant olması için gerek ve yeter koşul $t < \theta$ olmak üzere $\forall\ (t,x) \in W$ için*

$$F(t,x) \cap D^{+}W\,(t,x) \neq \emptyset$$

olmasıdır.

W kümesinin, (2.4.7) *diferansiyel içermesine göre sola zayıf invaryant olması için gerek ve yeter koşul $t > 0$ olmak üzere $\forall\ (t,x) \in W$ için*

$$F(t,x) \cap D^{-}W\,(t,x) \neq \emptyset$$

olmasıdır.

Burada $D^{+}W\,(t,x)\,(D^{-}W\,(t,x))$ kümesi, $W(\cdot)\ :\ [t_0,\theta]\ \rightarrow\ cl\,(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün (t,x) noktasındaki sağ (sol) üst türev kümesidir ve (2.2.2) ((2.2.4)) ile tanımlanır.

Wkümesinin (2.4.7) diferansiyel içermesine göre güçlü invaryantlığı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.4.3. *[5, 14, 19, 35 - 37, 64] $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı kümesi ve* (2.4.7) *diferansiyel içermesi verilsin. Keyfi $(t_*, x_*) \in W$ noktası, keyfi $x\,(\cdot) \in X\,(t_*, x_*)$ çözümü ve her $t \in [t_*, \theta]$ $(t \in [0, t_*])$ için $x\,(t) \in W\,(t)$ oluyorsa, W kümesi* (2.4.7) *diferansiyel içermesine göre sağa (sola) güçlü invaryanttır denir.*

Aşağıdaki teorem W kümesinin (2.4.7) diferansiyel içermesine göre güçlü invaryantlığını karakterize etmektedir.

Teorem 2.4.6. *[5, 19, 35, 36] $F\,(\cdot)\ :\ [0,\theta] \times \mathbb{R}^n\ \rightarrow\ conv\ (\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü ve $W \subset [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı kümesi verilsin.*

i. $F\,(\cdot) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \rightarrow conv\ (\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü sürekli,

ii. $F\,(\cdot)\ :\ [0,\theta] \times \mathbb{R}^n\ \rightarrow\ conv\ (\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü x'e göre yerel Lipschitz, yani keyfi sınırlı $D \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$, $\forall\ (t_1,t_2) \in D$, $\forall\ (t_1,t_2) \in D$ için

$$h\,(F(t,x_1), F(t,x_2)) \leq\ L(D)\,\parallel x_1 - x_2 \parallel$$

olacak biçimde $L(D)$ olsun.

iii. $\forall\ (t,x) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ *ve bir* $c > 0$ *sayısı için*

$$\max\{\|f\| \mid f \in F(t,x)\} \leq c(1+\|x\|)$$

eşitsizliği sağlanıyor olsun.

W kümesinin, (2.4.7) *diferansiyel içermesine göre sağa güçlü invaryant olması için gerek ve yeter koşul, $t < \theta$ olmak üzere, $\forall\ (t,x) \in W$ için*

$$F(t,x) \subset D^{+}W(t,x)$$

içermesinin sağlanmasıdır.

W kümesinin, (2.4.7) *diferansiyel içermesine göre sola güçlü invaryant olması için gerek ve yeter koşul, $t > t_0$ olmak üzere, $\forall\ (t,x) \in W$ için*

$$F(t,x) \subset D^{-}W(t,x)$$

içermesinin sağlanmasıdır.

Burada $D^{+}W(t,x)\,(D^{-}W(t,x))$ kümesi, $W(\cdot)\ :\ [t_0,\theta] \rightarrow cl(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün (t,x) noktasındaki sağ (sol) üst türev kümesidir ve (2.2.2) ((2.2.4)) *ile tanımlanır.*

2.5 Kontrol Vektörü Olan Diferansiyel İçermeler ve Özellikleri

$$\dot{x} \in F(t,x,u) \tag{2.5.1}$$

kontrol vektörü olan diferansiyel içermesi ile verilen dinamik sistem ele alınsın. Burada $x \in \mathbb{R}^n$ sistemin durum vektörü, $u \in P$ kontrol vektörü, $P \subset \mathbb{R}^p$ kompakt küme ve $t \in [0,\theta]$ ise zamandır. (2.5.1) sisteminin sağ tarafı aşağıdaki koşulları sağlasın:

1.5.A $\forall (t,x,u) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P$ için $F(t,x,u)$ konveks, kompakt kümedir;

1.5.B Her sabitlenmiş $u \in P$ için $(t,x) \to F(t,x,u)$ küme değerli dönüşümü üstten yarı süreklidir;

1.5.C $\forall (t,x) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ için $\max \{\|f\| : f \in F(t,x,u), u \in P\} \leq c\,(1 + \|x\|)$ dir. Burada $c > 0$ sabit bir sayıdır.

$u_* \in P$ sabitlenmiş kontrol vektörü olsun. *h.h.* $t \in [0,\theta]$ için

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t), u_*) \tag{2.5.2}$$

diferansiyel içermesini sağlayan mutlak sürekli $x(\cdot) : [0,\theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna (2.5.2) diferansiyel içermesinin $u_* \in P$ kontrol vektörüne karşılık bir çözümü denir. $t_0 \in [0,\theta]$ ve $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere, (2.5.1) diferansiyel içermesinin $u_* \in P$ kontrol vektörüne karşılık ve $x(t_0) \in X_0$ olacak biçimdeki çözümü,

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) \in F\left(t, x(t), u_*\right), \\ &x(t_0) \in X_0 \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Cauchy probleminin bir çözümüdür. $1.5.A$ - $1.5.C$ koşullarından dolayı, her $u_* \in P$ için (2.5.3) Cauchy probleminin en az bir çözümü vardır ve bu çözüm $[0,\theta]$ aralığına devam ettirilebilir. (2.5.3) Cauchy probleminin çözümler kümesi $X\left(t_0, X_0, u_*\right)$ olarak gösterilsin. Sabitlenmiş $t \in [0,\theta]$ için,

$$X\left(t; t_0, X_0, u_*\right) = \left\{x(t) \in \mathbb{R}^n | x(\cdot) \in X\left(t_0, X_0, u_*\right)\right\}$$

olsun. $X\left(t; t_0, X_0, u_*\right) \subset \mathbb{R}^n$ kümesine, (2.5.3) sisteminin (t_0, X_0) başlangıç kümesi için t anındaki erişim kümesi denir.

Önerme 2.5.1. *Keyfi $u_* \in P$ kontrol vektörü, keyfi $x_*(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, u_*\right)$ ve $\forall$ $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$\|x_*(t)\| \leq \left(\|x_0\| + 1\right) e^{c(t-t_0)} - 1 \tag{2.5.4}$$

olur. Burada $c > 0$ $1.5.C$ koşulunda verilen sayıdır.

Kanıt. $x_*(\cdot) \in X(t_0, x_0, u_*)$ alınsın ve sabitlensin. $X(t_0, x_0, u_*)$ çözümler kümesinin tanımından,

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &\in F(t, x_*(t), u_*) \qquad (2.5.5) \\ x_*(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

olur. 1.5.C koşulundan ve (2.5.5) Cauchy probleminden $h.h.\, t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|\dot{x}_*(t)\| \leq c(1 + \|x_*(t)\|) \qquad (2.5.6)$$

olur. Açıktır ki,

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\|x_*(t)\|^2 &= \tfrac{d}{dt}\left(x_{*_1}^2(t) + x_{*_2}^2(t) + \ldots + x_{*_n}^2(t)\right) \\ &= 2x_{*_1}(t)\dot{x}_{*_1}(t) + 2x_{*_2}(t)\dot{x}_{*_2}(t) + \ldots + 2x_{*_n}(t)\dot{x}_{*_n}(t) \\ &= 2\langle x_*(t), \dot{x}_*(t)\rangle \end{aligned}$$

eşittir. Ve buradan

$$\begin{aligned} \left| \tfrac{d}{dt}\|x_*(t)\|^2 \right| &= 2 \left| \langle x_*(t), \dot{x}_*(t)\rangle \right| \\ &\leq 2\,\|x_*(t)\|\|\dot{x}_*(t)\| \end{aligned}$$

olur. Burada (2.5.6) eşitsizliği kullanılırsa, $h.h.\, t \in [t_0, \theta]$ için

$$\left| \frac{d}{dt}\|x_*(t)\|^2 \right| \leq 2c\|x_*(t)\| + 2c\|x_*(t)\|^2$$

eşitsizliği elde edilir. O halde $h.h \;\; t \in [t_0, \theta]$ için

$$\frac{d}{dt}\|x_*(t)\|^2 \leq 2c\|x_*(t)\| + 2c\|x_*(t)\|^2 \qquad (2.5.7)$$

olur. $\|x_*(t)\|^2 = y(t)$ alınırsa $\|x_*(t)\| = \sqrt{y(t)}$ olur. (2.5.7) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt}y(t) \leq 2c\sqrt{y(t)} + 2cy(t) \qquad (2.5.8)$$

diferansiyel eşitsizliği elde edilir. $\varepsilon > 0$ alınsın ve sabitlensin. (2.5.8) eşitsizliğinden $h.h \;\; t \in [t_0, \theta]$ için

$$\frac{d}{dt}(y(t) + \varepsilon) < 2c\sqrt{y(t) + \varepsilon} + 2c\,(y(t) + \varepsilon)$$

olur. $t \in [t_0, \theta]$ için $y(t) + \varepsilon > 0$ olduğundan $h.h.$ $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(y(t) + \varepsilon\right)}{\sqrt{y(t) + \varepsilon}} < 2c + 2c\sqrt{y(t) + \varepsilon}$$

ve

$$\frac{d}{dt}\left(2\sqrt{y(t) + \varepsilon}\right) < 2c + 2c\sqrt{y(t) + \varepsilon}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $\sqrt{y(t) + \varepsilon} = z(t)$ olarak alınırsa son eşitsizlik

$$\dot{z}(t) < c\left(1 + z(t)\right)$$

olur. Buradan $h.h.$ $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(1 + z(t)\right)\right] < c$$

olduğu görülür. Son eşitsizlikten $\forall t \in [t_0, \theta]$ için,

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\left[\ln\left(1 + z(\tau)\right)\right] d\tau < \int_{t_0}^{t} c\, d\tau$$

$$\ln\left(1 + z(t)\right) - \ln\left(1 + z(t_0)\right) < c\left(t - t_0\right),$$

$$z(t) < \left(1 + z(t_0)\right) e^{c(t-t_0)} - 1$$

olduğu bulunur. $\|x_*(t)\|^2 = y(t)$ ve $\sqrt{y(t) + \varepsilon} = z(t)$ olduğundan ve elde edilen son eşitsizlikten, $\forall t \in [t_0, \theta]$ için,

$$\sqrt{\|x_*(t)\|^2 + \varepsilon} < \left(\sqrt{\|x_0\|^2 + \varepsilon} + 1\right) e^{c(t-t_0)} - 1 \tag{2.5.9}$$

olur. (2.5.9) eşitsizliği $\forall \varepsilon > 0$ için doğru olduğundan (2.5.9) eşitsizliğinden $\forall t \in [t_0, \theta]$ için,

$$\|x_*(t)\| \leq \left(\|x_0\| + 1\right) e^{c(t-t_0)} - 1$$

eşitsizliği elde edilir.

□

$$M = \left(\|x_0\| + 1\right) e^{c(\theta-t_0)} - 1 \tag{2.5.10}$$

$$L = c(1 + M) \tag{2.5.11}$$

olsun. Burada $c > 0$, $1.5.C$ koşulunda verilen sabittir.

Sonuç 2.5.1. *Keyfi* $u_* \in P$ *kontrol vektörü, keyfi* $x(\cdot) \in X(t_0, x_0, u_*)$ *için*

$$\|x(\cdot)\|_C \leq M$$

olur. Burada M*,* (2.5.10) *ile verilen sabittir.*

Şimdi çözümlerin aynı sabitle Lipschitz sürekli olduklarını gösteren önerme verilsin.

Önerme 2.5.2. *Keyfi* $u_* \in P$ *kontrol vektörü, keyfi* $x(\cdot) \in X(t_0, x_0, u_*)$ *ve* $\forall$ $t_1,\ t_2 \in [t_0, \theta]$ *için*

$$\|x_*(t_1) - x_*(t_2)\| \leq L \mid t_1 - t_2 \mid \tag{2.5.12}$$

olur. Burada L (2.5.11) *ile tanımlanır.*

Kanıt. Keyfi $x_*(\cdot) \in X(t_0, x_0, u_*)$ ve $\forall\ t_1,\ t_2 \in [t_0, \theta]$ alınsın ve sabitlensin. $t_1 < t_2$ olsun. $x_*(\cdot) \in X(t_0, x_0, u_*)$ çözümleri $[t_0, \theta]$ aralığında mutlak sürekli olduğundan $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}_*(\tau) d\tau$$

olur. O zaman $\forall\ t_1,\ t_2 \in [t_0, \theta]$ için

$$x_*(t_2) - x_*(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x_*}(\tau) d\tau$$

ve

$$\|x_*(t_2) - x_*(t_1)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{x}_*(\tau)\| d\tau \tag{2.5.13}$$

elde edilir. 1.5.C koşulundan

$$\sup\left\{\|f\| : f \in F(t, x, u),\ t \in [t_0, \theta],\ x \in B(0, M),\ u \in P\right\} \leq c\,(1 + M) \tag{2.5.14}$$

olur. $x_*(\cdot) \in X(t_0, x_0, u_*)$ olduğundan

$$\dot{x}_*(t) \in F(t, x_*(t), u_*) \tag{2.5.15}$$

$$x_*(t_0) = x_0$$

sağlanır. O halde Sonuç 2.5.1 ve (2.5.14) gereği $h.h.$ $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|\dot{x}_*(t)\| \leq c\,(1 + M)$$

olur. O zaman (2.5.13) eşitsizliğinden ve (2.5.11)'den

$$\begin{aligned} \|x_*(t_2) - x_*(t_1)\| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{x}_*(\tau)\| d\tau \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} c(1 + M)\, d\tau \qquad (2.5.16) \\ &\leq L\,(t_2 - t_1) \qquad (2.5.17) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $x_*(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, u_*)$ çözümleri $[t_0, \theta]$ aralığında L sabiti ile Lipschitzdir. □

Sonuç 2.5.1 ve Önerme 2.5.2 gereği aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.5.2. *$\forall\ u_* \in P$ kontrol vektörü için, $X\,(t_0, x_0, u_*)$ çözümler kümesi $C\,([t_0, \theta]\,, \mathbb{R}^n)$ uzayında prekompakt kümedir.*

2.6 Transfinit İndüksiyon Yöntemi

Transfinit indüksiyon yöntemi sunulmadan önce kısmi sıralı, sıralı, iyi sıralı küme tanımları ve bu kümelerin sağladığı bazı özellikler verilsin.

Tanım 2.6.1. *[45, 53] A herhangi bir küme ve $<$ aşağıdaki özellikleri sağlayan bir kural olmak üzere,*

i $\forall\ a \in A$ için $a < a$,

ii Eğer $a < b$, $b < a$ ise $a = b$,

iii Eğer $a < b$, $b < c$ ise $a < c$

oluyorsa, A kümesine kısmi sıralı küme denir.

Tanım 2.6.2. *[45, 53] A kısmi sıralı bir küme ve $<$ A kümesi üzerinde tanımlı bir kural olsun. Bu durumda $\forall\ a, b \in A$ için $a < b$ yada $b < a$ oluyorsa, A kümesine sıralı küme, $<$ kuralına ise sıralama yöntemi denir.*

Tanım 2.6.3. *A sıralı bir küme ve $<$ A kümesi üzerinde sıralama yöntemi ve $a_* \in A$ olsun. Eğer $a < a_*$ olacak biçimde $a \in A$ yoksa a_* 'a A'nın en küçük (yada birinci) elemanı denir.*

Tanım 2.6.4. *A sıralı bir küme ve $<$ A'da sıralama yöntemi ve $a, b \in A$ için $a < b$ olsun. Eğer $a < b < c$ olacak biçimde a ve b'den farklı $c \in A$ yoksa a elemanına b'nin öncül elemanı denir.*

Tanım 2.6.5. *[45, 53] A ve B sıralı kümeler, $<$ ve $<^*$ sırası ile A'da ve B'de sıralama yöntemleri olsun. Eğer keyfi $a < b$ için $\varphi(a) <^* \varphi(b)$ olacak biçimde bire bir, örten bir $\varphi(\cdot) : A \to B$ dönüşümü varsa, A ve B'ye sıraca eşyapılıdır denir ve $A \cong B$ olarak gösterilir.*

Önerme 2.6.1. *[45, 53] A, B, C sıralı kümeler olsun. O zaman*

i $A \cong A$

ii $A \cong B$ *ise* $B \cong A$

iii $A \cong B$ *ve* $B \cong C$ *ise* $A \cong C$

olur.

Böylece sıralı kümeler denklik sınıflarına ayrılabilir. Aynı denklik sınıfına ait sıralı kümeler sınıfına bir simge karşılık getirilsin. Bu durumda bu simgeye, verilen denklik sınıfına ait herhangi bir sıralı kümenin order türü denilsin. Böylece aynı denklik sınıfına ait tüm sıralı kümelerin order türü aynıdır.
$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ doğal sayılar kümesinin order türü ω ile,
$N^+ = \{\ldots, 3, 2, 1\}$ ters sıralı doğal sayılar kümesinin order türü ω^+ ile
$N = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ kümesinin order türü ise π ile gösterilsin.

Şimdi iyi sıralı kümenin tanımı verilsin.

Tanım 2.6.6. *[45, 53] A sıralı küme olsun. Eğer A kümesinin boştan farklı keyfi alt kümesinin en küçük elemanı varsa, A kümesine iyi sıralı küme denir.*

Tanım 2.6.7. *[45, 53] İyi sıralı kümenin order türüne order sayısı denir. Eğer iyi sıralı kümenin eleman sayısı sonlu değil ise order sayısına transfinit sayı denir.*

Önerme 2.6.2. *Verilen iki α ve β order sayıları için aşağıdaki üç durumdan biri sağlanır.*

$$\alpha < \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \alpha > \beta.$$

Şimdi aşağıda verilen teoremle transfinit indüksiyon yönteminin ifadesi verilsin.

Teorem 2.6.1. *[45, 53] α order sayısı, $T(\alpha)$ bir önerme olmak üzere,*

i $T(\alpha)$ önermesi, $\alpha = \alpha_0$ iken doğru olsun.

ii $T(\alpha)$ önermesi, $\alpha_0 \leq \alpha < \beta$ olacak biçimdeki keyfi α için doğru iken, $T(\beta)$ önermesi de doğru olsun.

O zaman keyfi $\alpha \geq \alpha_0$ için $T(\alpha)$ önermesi doğru olur.

$[t_0, \theta]$ aralığı ve $h(\cdot) : [t_0, \theta] \to (0, \delta)$ $(\delta > 0)$ fonksiyonu verilsin. $L\left([t_0, \theta] ; h\left(\cdot\right)\right) \subset [t_0, \theta]$ kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$t_1 = t_0 + h(t_0)$ olsun. $t_1 \geq \theta$ ise

$$L\left([t_0, \theta] ; h\left(\cdot\right)\right) = \{t_0, \theta\}$$

olarak alınsın.

$t_1 < \theta$ iken $t_2 = t_1 + h(t_1)$ olsun. $t_2 \geq \theta$ ise

$$L\left([t_0, \theta] ; h\left(\cdot\right)\right) = \{t_0, t_1, \theta\}$$

olarak alınsın.

$t_2 < \theta$ iken $t_3 = t_2 + h(t_2)$ olsun. $t_3 \geq \theta$ ise $L\left([t_0, \theta] ; h\left(\cdot\right)\right) = \{t_0, t_1, t_2, \theta\}$ olarak alınsın.

Bu prosedür devam ettirilirken,

$t_{k-1} < \theta$ iken $t_k = t_{k-1} + h(t_{k-1})$ olsun. $t_k \geq \theta$ ise

$$L\left([t_0, \theta]\,; h\left(\cdot\right)\right) = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, \theta\}$$

olarak alınsın. Keyfi $k = 1, 2, \ldots$ için $t_k = t_{k-1} + h(t_{k-1})$ olmak üzere $t_k < \theta$ olsun. $\sup\{t_k : k = 1, 2, \ldots\} = t_\omega = \theta$ ise

$$L\left([t_0, \theta]\,; h\left(\cdot\right)\right) = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots; \theta\}$$

olarak alınsın.

$$\sup\{t_k : k = 1, 2, \ldots\} = t_\omega < \theta$$

ise $t_{\omega+1} = t_\omega + h(t_\omega)$ olsun. $t_{\omega+1} \geq \theta$ iken

$$L\left([t_0, \theta]\,; h\left(\cdot\right)\right) = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots; t_\omega, \theta\}$$

olarak alınsın.

$t_{\omega+1} < \theta$ ise $t_{\omega+2} = t_{\omega+1} + h(t_{\omega+1})$ olsun. $t_{\omega+2} \geq \theta$ ise

$$L\left([t_0, \theta]\,; h\left(\cdot\right)\right) = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots; t_\omega, t_{\omega+1}, \theta\}$$

olarak alınsın. Bu prosedür devam ettirilirken

$t_{\omega+k-1} < \theta$ iken $t_{\omega+k} = t_{\omega+k-1} + h(t_{\omega+k-1})$ olsun. $t_{\omega+k} \geq \theta$ ise

$$L\left([t_0, \theta]\,; h\left(\cdot\right)\right) = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots; t_\omega, t_{\omega+1}, t_{\omega+2}, \ldots t_{\omega+k-1}, \theta\}$$

olsun.

Keyfi $k = 1, 2, \ldots$ için $t_{\omega+k} = t_{\omega+k-1} + h(t_{\omega+k-1})$ olmak üzere $t_{\omega+k} < \theta$ olsun.

$$\sup\{t_{\omega+k} : k = 1, 2, \ldots\} = t_{2\omega} = \theta$$

ise

$$L\left([t_0, \theta]\,; h\left(\cdot\right)\right) = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots; t_\omega, t_{\omega+1}, \ldots; \theta\}$$

olarak alınsın.

$\sup\{t_{\omega+k} : k = 1, 2, \ldots\} = t_{2\omega} < \theta$ ise $t_{2\omega+1} = t_{2\omega} + h(t_{2\omega})$ olsun. $t_{2\omega+1} \geq \theta$ ise

$$L([t_0, \theta]; h(\cdot)) = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots; t_\omega, t_{\omega+1}, \ldots; t_{2\omega}, \theta\}$$

olarak alınsın.

$t_{2\omega+1} < \theta$ ise $t_{2\omega+2} = t_{2\omega+1} + h(t_{2\omega+1})$ olsun. $t_{2\omega+2} \geq \theta$ ise

$$L([t_0, \theta]; h(\cdot)) = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots; t_\omega, t_{\omega+1}, \ldots; t_{2\omega}, t_{2\omega+1}, \theta\}$$

olarak alınsın. Bu prosedür devam ettirilirken keyfi $k = 1, 2, \ldots$ için $t_{k\omega} < \theta$ olsun. $\sup\{t_{k\omega} : k = 1, 2, \ldots\} = t_{\omega^2} = \theta$ ise

$$L([t_0, \theta]; h(\cdot)) = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots; t_\omega, \ldots; t_{2\omega}, \ldots; t_{k\omega}, \ldots; \theta\}$$

olarak alınsın. $\sup\{t_{k\omega} : k = 1, 2, \ldots\} = t_{\omega^2} < \theta$ ise $t_{\omega^2+1} = t_{\omega^2} + h(t_{\omega^2})$ olsun. $t_{\omega^2+1} \geq \theta$ ise

$$L([t_0, \theta]; h(\cdot)) = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots; t_\omega, \ldots; t_{2\omega}, \ldots; t_{k\omega}, \ldots; t_{\omega^2}, \theta\}$$

olarak alınsın.

$t_{\omega^2+1} < \theta$ ise $t_{\omega^2+2} = t_{\omega^2+1} + h(t_{\omega^2+1})$ olsun. $t_{\omega^2+2} \geq \theta$ ise

$$L([t_0, \theta]; h(\cdot)) = \{t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots; t_\omega, \ldots; t_{2\omega}, \ldots; t_{k\omega}, \ldots; t_{\omega^2}, t_{\omega^2} + 1, \theta\}$$

olarak alınsın. v.s.

Önerme 2.6.3. *[7, 38, 62, 63]* $[t_0, \theta]$ *aralığı ve* $h(\cdot) : [t_0, \theta] \to (0, \delta)$ $(\delta > 0)$ *fonksiyonu verilsin.* $L([t_0, \theta]; h(\cdot)) \subset [t_0, \theta]$ *kümesi iyi sıralı kümedir ve bu kümenin kardinal sayısı kontinyumdan büyük değildir.*

3 STRATEJİNİN ÜRETTİĞİ YÖRÜNGELER KÜMESİ

Bu bölümde davranışı kontrol vektörlü (2.5.1) diferansiyel içermesi ile verilen dinamik sistemin, yörüngeler kümesi tanımlanıp özellikleri incelenecektir.

3.1 Pozisyonlu Stratejinin Ürettiği Yörüngeler Kümesi ve Özellikleri

Davranışı kontrol vektörlü (2.5.1) diferansiyel içermesi ile verilen kontrol edilebilir dinamik sistem ele alınsın. (2.5.1) sisteminin kontrolü ters bağlantı yöntemi ile yapılır. $U(t,x) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to P$ biçimdeki fonksiyona pozisyonlu strateji denir (bkz. [46, 47, 67, 70]). Tüm pozisyonlu stratejilerin kümesi $\mathcal{U}_{pos}$ ile gösterilsin.

$(t_0, x_0) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$, $U_* \in \mathcal{U}_{pos}$ olsun. Şimdi, U_* pozisyonlu stratejisinin (t_0, x_0) başlangıç pozisyonundan ürettiği yörüngeler kümesi tanımlansın. Bundan önce ise U_* pozisyonlu stratejisinin (t_0, x_0) başlangıç pozisyonundan ürettiği adımlı yörünge tanımlansın ve özellikleri incelensin. $[t_0, \theta]$ aralığının bir

$$\Delta = \{t_0 < t_1 < \ldots t_{m-1} < t_m = \theta\}$$

keyfi bölüntüsü alınsın. $x_\Delta(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu

$$\begin{aligned} &\dot{x}_\Delta(t) \in F\left(t, x_\Delta(t), U_*\left(t_i, x_\Delta(t_i)\right)\right), \qquad t \in [t_i, t_{i+1}) \qquad (3.1.1)\\ &x_\Delta(t_0) = x_0, \qquad i = 0, 1, 2 \ldots, m-1 \end{aligned}$$

Cauchy probleminin çözümü olarak alınsın. 1.5.A - 1.5.C koşullarından dolayı (3.1.1) Cauchy probleminin en az bir $x_\Delta(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ çözümü vardır. Bu şekilde tanımlanmış mutlak sürekli $x_\Delta(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna, $U_* \in \mathcal{U}_{pos}$ pozisyonlu stratejisinin Δ bölüntüsüne karşılık bir adımlı yörüngesi denir. Bu şekilde tanımlanmış adımlı yörüngelerin kümesi $X\left(t_0, x_0, U_*, \Delta\right)$ ile gösterilsin.

Açıktır ki keyfi $x_*(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_*, \Delta)$ için $x_*(\cdot)$ mutlak süreklidir ve

$$X(t_0, x_0, U_*, \Delta) \subset C([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$$

olur.

Önerme 3.1.1. *$\forall\ U_* \in \mathcal{U}_{pos}$ pozisyonlu stratejisi, $\forall\ \Delta = \{t_0 < t_1 < \dots t_{m-1} < t_m = \theta\}$ bölüntüsü, keyfi $x_*(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_*, \Delta)$ ve $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için*

$$\|x_*(t)\| \leq (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t-t_0)} - 1 \tag{3.1.2}$$

olur.

Kanıt. $x_*(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_*, \Delta)$ alınsın ve sabitlensin. $X(t_0, x_0, U_*, \Delta)$ adımlı yörüngeler kümesinin tanımından

$$\begin{aligned} &\dot{x}_*(t) \in F(t, x_*(t), U_*(t_i, x_*(t_i))), \qquad t \in [t_i, t_{i+1}) \\ &x_*(t_0) = x_0, \qquad i = 0, 1, 2 \dots, m-1 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

olur. $i = 0$ iken $h.h\ \ t \in [t_0, t_1)$ için

$$\begin{aligned} &\dot{x}_*(t) \in F(t, x_*(t), U_*(t_0, x_*(t_0))) \\ &x_*(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

olur. $u_0 = U_*(t_0, x_*(t_0)) \in P$ olduğundan ve Önerme 2.5.1 gereği $\forall t \in [t_0, t_1)$ için,

$$\|x_*(t)\| \leq (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t-t_0)} - 1 \tag{3.1.4}$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.1.3) uyarınca $i = 1$ iken $h.h\ \ t \in [t_1, t_2)$ için

$$\dot{x}_*(t) \in F(t, x_*(t), U_*(t_1, x_1))$$

olur. $x_*(t_1) = x_1$ denilirse (3.1.4) eşitliğine benzer olarak $\forall t \in [t_1, t_2)$ için

$$\|x_*(t)\| \leq (\|x_1\| + 1)\, e^{c(t-t_1)} - 1 \tag{3.1.5}$$

olduğu bulunur. Ayrıca (3.1.4) eşitsizliğinden

$$\|x_1\| \leq (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t_1 - t_0)} - 1$$

olur. Bu eşitsizlik (3.1.5) eşitsizliğinde yerine yazılırsa $\forall t \in [t_1, t_2)$ için,

$$\begin{aligned} \|x_*(t)\| &\leq \left[(\|x_0\| + 1)\, e^{c(t_1 - t_0)} - 1 + 1\right] e^{c(t - t_1)} - 1 \\ &= (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t - t_0)} - 1 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan $\forall t \in [t_0, t_2)$ için

$$\|x_*(t)\| \leq (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t - t_0)} - 1$$

olduğu elde edilir.

Şimdi, $\forall t \in [t_{i-1}, t_i)$ aralığında $x_*(\cdot)$ adımlı yörüngesinin

$$\|x_*(t)\| \leq (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t - t_0)} - 1 \tag{3.1.6}$$

eşitsizliğini sağladığı kabul edilsin. $\forall t \in [t_i, t_{i+1})$ için $x_*(\cdot)$ adımlı yörüngesinin

$$\|x_*(t)\| \leq (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t - t_0)} - 1$$

eşitsizliğini sağladığı gösterilsin.

(3.1.3) gereği $h.h \;\; t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\dot{x}_*(t) \in F\left(t, x_*(t), U_*(t_i, x_i)\right)$$

olur. $x_*(t_i) = x_i$ denilsin. $u_i = U_*\left(t_i, x_*(t_i)\right) \in P$ olduğundan ve Önerme 2.5.1 gereği $\forall t \in [t_i, t_{i+1})$ için,

$$\|x_*(t)\| \leq (\|x_i\| + 1)\, e^{c(t - t_i)} - 1 \tag{3.1.7}$$

olur. (3.1.6) eşitsizliğinden

$$\|x_i\| \leq (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t_i - t_0)} - 1$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (3.1.7) eşitsizliğinde yerine yazılırsa $\forall t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\begin{aligned} \|x_*(t)\| &\leq \Big((\|x_0\| + 1)\, e^{c(t_i - t_0)} - 1 + 1\Big)\, e^{c(t - t_i)} - 1 \\ &= (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t - t_0)} - 1 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak tümevarım yönteminden $\forall t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x_*(t)\| \leq (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t-t_0)} - 1$$

olduğu elde edilir. Böylece önerme kanıtlanır. $\square$

Sonuç 3.1.1. *$\forall\, U_* \in \mathcal{U}_{pos}$ pozisyonlu stratejisi, $\forall\, \Delta = \{t_0 < t_1 < \ldots t_{m-1} < t_m = \theta\}$ bölüntüsü ve keyfi $x(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*, \Delta)$ için*

$$\|x(\cdot)\|_C \leq M$$

olur. Burada M, (2.5.10) *ile verilen sabittir.*

Şimdi adımlı yörüngelerin aynı sabitle Lipschitz sürekli olduklarını gösteren önerme verilsin.

Önerme 3.1.2. *$\forall\, U_* \in \mathcal{U}_{pos}$ pozisyonlu stratejisi, $\forall\, \Delta = \{t_0 < t_1 < \ldots t_{m-1} < t_m = \theta\}$ bölüntüsü, $\forall\, x(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*, \Delta)$ ve $\forall\, t_1,\, t_2 \in [t_0, \theta]$ için*

$$\|x_*(t_1) - x_*(t_2)\| \leq L \mid t_1 - t_2 \mid \tag{3.1.8}$$

olur. Burada L, (2.5.11) *ile tanımlanır.*

Kanıt. Keyfi $x_*(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*, \Delta)$ ve $\forall\, t_1,\, t_2 \in [t_0, \theta]$ alınsın ve sabitlensin. $t_1 < t_2$ olsun. $x_*(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*, \Delta)$ adımlı yörüngesi $[t_0, \theta]$ aralığında mutlak sürekli olduğundan $\forall t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}_*(\tau) d\tau$$

olur. O zaman $\forall\, t_1,\, t_2 \in [t_0, \theta]$ için

$$x_*(t_2) - x_*(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x_*}(\tau) d\tau$$

ve

$$\|x_*(t_2) - x_*(t_1)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{x}_*(\tau)\| d\tau \tag{3.1.9}$$

elde edilir. 1.5.C koşulundan

$$\begin{aligned} \sup\{\|f\| : f \in F(t,x,u),\ t \in [t_0,\theta]\,,\ x &\in B(0,M), u \in P\} \\ &\leq c\,(1+M) \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

olur. $x_*(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*, \Delta)$ olduğundan

$$\begin{aligned} &\dot{x}_*(t) \in F\,(t, x_*(t), U_*\,(t_i, x_*(t_i)))\,, \qquad t \in [t_i, t_{i+1}) \\ &x_*(t_0) = x_0, \qquad i = 0, 1, 2 \ldots, m-1 \end{aligned}$$

sağlanır. O halde Sonuç 3.1.1 ve (3.1.10) gereği $h.h.$ $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|\dot{x}_*(t)\| \leq c\,(1+M)$$

olur. O zaman (3.1.9) eşitsizliğinden ve L sabiti, (2.5.11) ile tanımlı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|x_*(t_2) - x_*(t_1)\| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{x}_*(\tau)\| d\tau \\ &\leq L\,(t_2 - t_1) \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

elde edilir. Yani $x_*(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*, \Delta)$ adımlı yörüngesi $[t_0, \theta]$ aralığında L sabiti ile Lipschitzdir. □

Sonuç 3.1.1 ve Önerme 3.1.2'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.2. *$\forall\, U_* \in \mathcal{U}_{pos}$ pozisyonlu stratejisi, $\forall\, \Delta = \{t_0 < t_1 < \ldots t_{m-1} < t_m = \theta\}$ bölüntüsü için $X\,(t_0, x_0, U_*, \Delta)$ adımlı yörüngeler kümesi $C\,([t_0, \theta]\,, \mathbb{R}^n)$ uzayında prekompakt kümedir.*

Şimdi (t_0, x_0) başlangıç pozisyonu için $U_* \in \mathcal{U}_{pos}$ pozisyonlu stratejinin ürettiği yörüngeler kümesi tanımlansın.

Tanım 3.1.1.

$$\begin{aligned} X\,(t_0, x_0, U_*) = \{x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n \mid \exists\,\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}\,, \exists\, x_k(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_*, \Delta_k) \ni \\ k \to \infty \ \textit{için}\ \textit{diam}(\Delta_k) \to 0, \quad x_k(\cdot) \to x(\cdot)\} \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

kümesi tanımlansın. Bu kümeye U_* pozisyonlu stratejisinin (t_0, x_0) başlangıç pozisyonundan ürettiği yörüngeler kümesi, $x(\cdot) \in X\big(t_0, x_0, U_*\big)$ fonksiyonuna ise yörünge denir.

Burada $\Delta_k = \left\{t_0 = t_0^{(k)} < t_1^{(k)} < \ldots < t_{m(k)}^{(k)} = \theta\right\}$ *olmak üzere*

$$diam(\Delta_k) = max\left\{\left(t_{i+1}^{(k)} - t_i^{(k)}\right) : i = 0, 1, \ldots, m(k)\right\}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 3.1.3. *$\forall\ U_* \in \mathcal{U}_{pos}$, keyfi $x_*(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_*)$ ve $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için*

$$\|x_*(t)\| \leq (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t-t_0)} - 1 \tag{3.1.13}$$

olur.

Kanıt. Keyfi sabitlenmiş $U_* \in \mathcal{U}_{pos}$ için $x_*(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_*)$ alınsın ve sabitlensin. $X(t_0, x_0, U_*)$ yörüngeler kümesinin tanımından $k \to \infty$ iken $diam(\Delta_k) \to 0$ olan $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ bölüntüler dizisi ve $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ olacak şekilde $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty} \subset X\left(t_0, x_0, U_*, \Delta_k\right)$ adımlı yörüngeler dizisi vardır.

$\forall k = 1, 2, \ldots$ için $x_k(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_*, \Delta_k\right)$ olduğundan Önerme 3.1.1 gereği $\forall t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x_k(t)\| \leq (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t-t_0)} - 1 \tag{3.1.14}$$

olur. Ayrıca $k \to \infty$ iken $diam(\Delta_k) \to 0$ ve $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ düzgün yakınsak olduğundan, (3.1.14) eşitsizliğinde limit alınırsa $\forall t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x_*(t)\| \leq (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t-t_0)} - 1$$

olduğu elde edilir. □

Sonuç 3.1.3. *$\forall\ U_* \in \mathcal{U}_{pos}$ ve keyfi $x_*(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_*)$ için*

$$\|x_*(\cdot)\|_C \leq M \tag{3.1.15}$$

olur. Burada M (2.5.10) ile tanımlanır.

Şimdi yörüngelerin aynı sabitle Lipschitz sürekli olduklarını gösteren bir önerme verilsin .

Önerme 3.1.4. *$\forall\ U_* \in \mathcal{U}_{pos}$ pozisyonlu stratejisi, keyfi $x(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*)$ ve $\forall\ t_1,\ t_2 \in [t_0, \theta]$ için*

$$\|x_*(t_1) - x_*(t_2)\| \leq L \mid t_1 - t_2 \mid \tag{3.1.16}$$

olur. Burada L, (2.5.11) ile tanımlanır.

Kanıt. Keyfi sabitlenmiş $U_* \in \mathcal{U}_{pos}$ için $x_*(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_*)$ alınsın ve sabitlensin. $t_1 < t_2$ olsun. $X(t_0, x_0, U_*)$ yörüngeler kümesinin tanımından $k \to \infty$ iken $diam(\Delta_k) \to 0$ olan $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ bölüntüler dizisi ve $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ olacak şekilde $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty} \subset X\,(t_0, x_0, U_*, \Delta_k)$ adımlı yörüngeler dizisi vardır.

$\forall k = 1, 2, \ldots$ için $x_k(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*, \Delta_k)$ olduğundan ve Önerme 3.1.2 gereği

$$\|x_k(t_1) - x_k(t_2)\| \leq L \mid t_1 - t_2 \mid \tag{3.1.17}$$

olur. Ayrıca $k \to \infty$ iken $diam(\Delta_k) \to 0$ ve $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ düzgün yakınsak olduğundan, (3.1.17) eşitsizliğinde limit alınırsa,

$$\|x_*(t_2) - x_*(t_1)\| \leq L\,(t_2 - t_1)$$

olduğu elde edilir. □

Önerme 3.1.5. *$\forall\ U_* \in \mathcal{U}_{pos}$ pozisyonlu stratejisi için $X\,(t_0, x_0, U_*)$ yörüngeler kümesi kapalı kümedir.*

Kanıt. Keyfi sabitlenmiş $U_* \in \mathcal{U}_{pos}$ için $\{x_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty} \subset X\,(t_0, x_0, U_*)$ alınsın ve $n \to \infty$ iken $x_n(\cdot) \to x_*(\cdot)$ olsun. Bu durumda $x_*(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*)$ olduğu gösterilsin.

$\forall\ n = 1, 2, \ldots$ için $x_n(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*)$ olduğundan ve $X\,(t_0, x_0, U_*)$ yörüngeler kümesinin tanımından her $\forall\ n = 1, 2, \ldots$ için $k \to \infty$ iken $diam(\Delta_n^{(k)}) \to 0$ olacak şekilde $\left\{\Delta_n^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ bölüntüler dizisi ve $\forall k$ için $x_n^{(k)}(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_*, \Delta_n^{(k)}\right)$ olmak üzere $k \to \infty$ iken $x_n^{(k)}(\cdot) \to x_n(\cdot)$ olacak şekilde $\left\{x_n^{(k)}(\cdot)\right\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi vardır.

$x_n(\cdot) \to x_*(\cdot)$ olduğundan $\dfrac{1}{2i}$ için

$$\|x_{n_i}(\cdot) - x_*(\cdot)\| < \frac{1}{2i} \tag{3.1.18}$$

olacak şekilde bir n_i vardır. $\forall i$ için $x_{n_i}(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*)$ olduğundan, $k \to \infty$ iken

$$x_{n_i}^{(k)}(\cdot) \to x_{n_i}(\cdot)$$

düzgün yakınsar. Ayrıca $k \to \infty$ iken $diam(\Delta_{n_i}^{(k)}) \to 0$ olur. O zaman $\dfrac{1}{2i}$ için

$$diam(\Delta_{n_i}^{(k_i)}) < \frac{1}{i} \tag{3.1.19}$$

ve

$$\|x_{n_i}^{(k_i)}(\cdot) - x_{n_i}(\cdot)\| \leq \frac{1}{2i} \tag{3.1.20}$$

olacak şekilde bir k_i vardır. Seçilmiş ve sabitlenmiş i için $(3.1.18) - (3.1.20)$ eşitsizliklerinden $diam(\Delta_{n_i}^{(k_i)}) < \dfrac{1}{i}$ iken

$$\begin{aligned}
\|x_{n_i}^{(k_i)}(\cdot) - x_*(\cdot)\| &= \|x_{n_i}^{(k_i)}(\cdot) - x_{n_i}(\cdot) + x_{n_i}(\cdot) - x_*(\cdot)\| \\
&\leq \|x_{n_i}^{(k_i)}(\cdot) - x_{n_i}(\cdot)\| + \|x_{n_i}(\cdot) - x_*(\cdot)\| \\
&< \frac{1}{i}
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak $\Delta_{n_i}^{(k_i)} = \Delta_*^i$ ve $x_{n_i}^{(k_i)}(\cdot) = x_*^i(\cdot)$ olarak alınırsa $x_*^i(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*, \Delta_*^i)$ olmak üzere

$$diam(\Delta_*^i) < \frac{1}{i} \tag{3.1.21}$$

ve

$$\|x_*^i(\cdot) - x_*(\cdot)\| < \frac{1}{i} \tag{3.1.22}$$

olur. (3.1.21) ve (3.1.22) den $i \to \infty$ iken $diam(\Delta_*^i) \to 0$, $x_*^i(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*, \Delta_*^i)$ olmak üzere

$$x_*^i(\cdot) \to x_*(\cdot)$$

olduğu görülür. $X\,(t_0, x_0, U_*)$ yörüngeler kümesinin tanımından $x_*(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*)$ olur. O zaman $X\,(t_0, x_0, U_*)$ yörüngeler kümesi kapalı kümedir. $\square$

Sonuç 3.1.3, Önerme 3.1.4 ve Önerme 3.1.5 gereği aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.4. *$\forall(t_0, x_0) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ ve $U \in \mathcal{U}_{pos}$ için $X(t_0, x_0, U,)$ kümesi $C\big([t_0,\theta], \mathbb{R}^n\big)$ uzayında kompakt kümedir.*

(2.5.1) ile verilen dinamik sistemlerde, kontrol fonksiyonu olarak pozisyonlu stratejiler değil, sadece zamana bağlı kontrol fonksiyonlar da kullanılabilir. Ancak bu tür kontrol yöntemi, (2.5.1) ile verilen kontrol sistemlerde kontrolün kalitesini büyük ölçüde düşürebilir. Aşağıdaki örnek bu durumu açıklamaktadır.

Örnek 3.1.1. *Davranışı,*

$$\dot{x}(\cdot) \in [-1,1] + u \tag{3.1.23}$$

ile verilen sistem ele alınsın. Burada $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$, $u \in [-1,1]$ olsun. Pozisyonlu stratejinin tanımından dolayı,

$$\mathcal{U}_{pos} = \{U(\cdot) \mid U(t,x) : [0,1] \times \mathbb{R} \to [-1,1]\}$$

olur.

$$\mathcal{U}_{pr} = \{u(\cdot) \mid u(t) : [0,1] \to [-1,1], u(\cdot) \textit{ölçülebilir}\}$$

fonksiyonlar kümesi tanımlansın. U_{pr} kümesine programlı kontrol fonksiyonları kümesi denir.

$$W = \{(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R} : x = 0\} \tag{3.1.24}$$

olmak üzere, $W \subset [0,1] \times \mathbb{R}$ için,

$$W(t) = \{x \in \mathbb{R} : (t,x) \in W\}$$

kümesi tanımlansın. O halde (3.1.24) *gereği $\forall\ t \in [0,1]$ için $W(t) = \{0\}$ olur. $U_* \in \mathcal{U}_{pos}$, $t_0 \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}$ için* (3.1.23) *sisteminin U_* pozisyonlu stratejisinin (t_0, x_0) başlangıç pozisyonundan ürettiği yörüngeler kümesi $X\left(t_0, x_0, U_*\right)$ olarak gösterilsin.*

Şimdi $u_*(\cdot) \in U_{pr}$, $t_0 \in [0,1]$, $x_0 \in \mathbb{R}$ alınsın.

$$\dot{x}(t) \in [-1,1] + u_*(t), \quad x(t_0) = x_0$$

diferansiyel içermesinin çözümler kümesi $\mathcal{Y}(t_0, x_0, u_*(\cdot))$ *olarak gösterilsin.* $\mathcal{Y}(t_0, x_0, u_*(\cdot))$ *kümesine,* (3.1.23) *sisteminin* $u_*(\cdot)$ *programlı kontrol fonksiyonlarının* (t_0, x_0) *başlangıç pozisyonundan ürettiği yörüngeler kümesi denir. Açıktır ki* $(0,0) \in W$ *olur. Aşağıdaki iki problem ele alınsın.*

Problem1 $(t_0, x_0) = (0,0)$ *olsun.* $\forall\ x(\cdot) \in \mathcal{Y}(0,0,u_*(\cdot))$ *ve* $\forall\ t \in [0,1]$ *için* $x(t) \in W(t)$ *olacak biçimde bir* $u_*(\cdot) \in U_{pr}$ *var mı?*

Problem2 $(t_0, x_0) = (0,0)$ *olsun.* $\forall\ x(\cdot) \in X(0,0,U_*)$ *ve* $\forall\ t \in [0,1]$ *için* $x(t) \in W(t)$ *olacak biçimde bir* $U_* \in U_{pos}$ *var mı?*

Önce Problem1 *incelensin.*

Problem1*'in çözümü olacak biçimde* $u_*(\cdot) \in U_{pr}$ *olduğu kabul edilsin.* $\forall\ t \in [0,1]$ *için erişim kümesi,*

$$\mathcal{Y}(t; 0,0,u_*(\cdot)) = \{x(t) \in \mathbb{R} : x(\cdot) \in \mathcal{Y}(0,0,u_*(\cdot))\}$$

olarak tanımlıdır. Programlı kontrol fonksiyonu Problem1'in çözümü, $u_*(\cdot) \in U_{pr}$ *ve* $\forall\ t \in [0,1]$ *için* $W(t) = \{0\}$ *olduğundan,* $\forall\ t \in [0,1]$ *için*

$$\mathcal{Y}(t; 0,0,u_*(\cdot)) = \{0\} \tag{3.1.25}$$

olduğu bulunur. Ancak $\mathcal{Y}(0,0,u_*(\cdot))$ *yörüngeler kümesi,*

$$\dot{x}(t) \in [-1,1] + u_*(t), \quad x(0) = 0$$

Cauchy probleminin çözümler kümesi olduğundan açıktır ki,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -1 + u_*(t), \quad y_1(0) = 0 \\ \dot{y}_2(t) &= 1 + u_*(t), \quad y_2(0) = 0 \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

Cauchy problemlerinin çözümleri olan, $y_1(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$, $y_2(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ *için* $y_1(\cdot) \in \mathcal{Y}(0,0,u_*(\cdot))$, $y_2(\cdot) \in \mathcal{Y}(0,0,u_*(\cdot))$ *olur.* (3.1.26) *Cauchy problemlerinden* $\forall\ t \in [0,1]$ *için*

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -t + \int_0^t u_*(\tau)d\tau \\ y_2(t) &= t + \int_0^t u_*(\tau)d\tau \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. O halde buradan $\forall\ t \in [0,1]$ *için,*

$$y_2(t) - y_1(t) = 2t \tag{3.1.27}$$

bulunur. (3.1.25) *gereği* $\forall\ t \in [0,1]$ *için*

$$y_1(t) = 0, \qquad y_2(t) = 0 \tag{3.1.28}$$

olduğu elde edilir. Bu durumda (3.1.27) *ile* (3.1.28) *çelişir. O halde problem1'in çözümü olacak biçimde* $u_*(\cdot) \in U_{pr}$ *yoktur.*

Şimdi problem2 ele alınsın. $\forall\ t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,*

$$U(t,x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases} \tag{3.1.29}$$

pozisyonlu stratejisi alınsın.

$$X\left(0,0,U_*\right) = \{x(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R} | \forall\, t \in [0,1] \quad \textit{için} \quad x(t) = 0\}$$

olduğu kanıtlansın. $[0,1]$ *aralığının,* $k = 1,2,...$ *için*

$$\Delta^{(k)} = \left\{0 = t_0^{(k)} < t_1^{(k)} < \ldots < t_{m(k)}^{(k)} = 1\right\}$$

bölüntüleri alınsın ve $k \to \infty$ *iken diam* $\left(\Delta^{(k)}\right) \to 0$ *olsun. Burada*

$$diam\left(\Delta^{(k)}\right) = max\left\{t_{i+1}^{(k)} - t_i^{(k)} : i = 0,1,2,\ldots m(k)-1\right\}$$

olarak tanımlıdır. Şimdi $\forall\ x_k(\cdot) \in X\left(0,0,U_*,\Delta^{(k)}\right)$ *adımlı yörüngeler alınsın. Adımlı yörüngenin tanımından*

$$\begin{aligned} &\dot{x}_k(t) \in [-1,1] + U_*(t_i^{(k)}, x_i^{(k)}), \qquad t \in \left[t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)}\right) \\ &x_k(0) = 0, \qquad i = 0,1,2\ldots,m(k)-1 \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

olur. Burada $x_i^{(k)} = x_k(t_i^{(k)})$ *olarak tanımlıdır. Bu durumda* $\forall\ t \in [0,1]$ *için*

$$\mid x_k(t) \mid \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \tag{3.1.31}$$

olduğu kanıtlansın.

$t \in [0, t_1^{(k)}]$ *alınsın. O halde* $x_k(t_0^{(k)}) = x_k(0) = 0$ *olduğundan,* (3.1.29) *ve* (3.1.30) *gereği h.h.*$t \in [0, t_1^{(k)})$ *için*

$$\dot{x}_k(t) \in [-1, 1]$$

olur. Buradan, $\forall\ t \in [0, t_1^{(k)})$ *için*

$$\mid x_k(t) \mid \leq t \leq t_1^{(k)} \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \tag{3.1.32}$$

olduğu bulunur.

Şimdi $t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)})$ *olsun. O halde* (3.1.30) *gereği h.h.*$t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)})$ *için*

$$\dot{x}_k(t) \in [-1, 1] + U_*(t_1^{(k)}, x_1^{(k)}) \tag{3.1.33}$$

olur. Burada $x_1^{(k)} = x_k(t_1^{(k)})$ *olarak alınmıştır. Bu durumda* (3.1.32) *eşitsizliğinden*

$$\mid x_1^{(k)} \mid \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \tag{3.1.34}$$

olduğu bulunur. $x_1^{(k)}$ *için üç durum söz konusudur.*

1. $x_1^{(k)} > 0$ *olsun*

   Bu durumda (3.1.29) *gereği* $U_*(t_1^{(k)}, x_1^{(k)}) = -1$ *ve* (3.1.33) *gereği* $x_k(\cdot)$ *fonksiyonu* $[t_1^{(k)}, t_2^{(k)}]$ *aralığında, h.h.*$t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)})$ *için*

   $$\dot{x}_k(t) \in [-1, 1] - 1, \quad x_k(t_1^{(k)}) = x_1^{(k)}$$

   Cauchy probleminin çözümü olur. O halde buradan h.h.$t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)})$ *için*

   $$\dot{x}_k(t) \in [-2, 0], \quad x_k(t_1^{(k)}) = x_1^{(k)}$$

   elde edilir. O zaman $\forall\ t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)})$ *için*

   $$-2(t - t_1^{(k)}) + x_1^{(k)} \leq x_k(t) \leq x_1^{(k)} \tag{3.1.35}$$

   olduğu bulunur. (3.1.34) *ve* (3.1.35) *eşitsizliklerinden* $\forall\ t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)})$ *için*

   $$x_k(t) \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \tag{3.1.36}$$

olur. Ayrıca $x_1^{(k)} > 0$, (3.1.35) *eşitsizliği ve diam* $\left(\Delta^{(k)}\right)$*'nın tanımından,*

$$\begin{aligned} x_k(t) &\geq -2(t - t_1^{(k)}) + x_1^{(k)} \\ &\geq -2diam\left(\Delta^{(k)}\right) + x_1^{(k)} \\ &\geq -2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \end{aligned} \tag{3.1.37}$$

olduğu bulunur. (3.1.36) *ve* (3.1.37) *eşitsizliklerinden* $\forall\ t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)})$ *için*

$$\mid x_k(t) \mid \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \tag{3.1.38}$$

olduğu elde edilir.

2. $x_1^{(k)} < 0$ *olsun.*

O halde (3.1.29) *gereği* $U_*(t_1^{(k)}, x_1^{(k)}) = 1$ *ve* (3.1.33) *gereği* $x_k(\cdot)$ *fonksiyonu* $[t_1^{(k)}, t_2^{(k)}]$ *aralığında, h.h.*$t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)})$ *için*

$$\dot{x}_k(t) \in [-1, 1] + 1, \quad x_k(t_1^{(k)}) = x_1^{(k)}$$

Cauchy probleminin çözümü olur. O halde h.h.$t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)})$ *için*

$$\dot{x}_k(t) \in [0, 2], \quad x_k(t_1^{(k)}) = x_1^{(k)}$$

elde edilir. O zaman $\forall\ t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)})$ *için*

$$x_1^{(k)} \leq x_k(t) \leq 2(t - t_1^{(k)}) + x_1^{(k)} \tag{3.1.39}$$

olduğu bulunur. Buradan $\forall\ t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)})$ *için* $(t - t_1^{(k)}) \leq diam\left(\Delta^{(k)}\right)$, $x_1^{(k)} < 0$ *olduğundan ve* (3.1.39) *eşitsizliğinden* $\forall\ t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)})$ *için*

$$x_k(t) \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \tag{3.1.40}$$

olur. Ayrıca (3.1.34) *eşitsizliğinden* $-x_1(k) \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right)$ *olur. Buradan ve* (3.1.39) *eşitsizliğinden* $\forall\ t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)})$ *için*

$$x_k(t) \geq x_1^{(k)} \geq -2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \tag{3.1.41}$$

olduğu görülür. O halde (3.1.40) *ve* (3.1.41) *eşitsizliklerinden*

$$\mid x_k(t) \mid \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \tag{3.1.42}$$

olduğu elde edilir.

3. $x_1^{(k)} = 0$ *olsun.*

Bu durumda (3.1.29) *gereği* $U_*(t_1^{(k)}, x_1^{(k)}) = 0$ *ve* (3.1.33) *gereği* $x_k(\cdot)$ *fonksiyonu* $[t_1^{(k)}, t_2^{(k)}]$ *aralığında h.h.*$t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)})$ *için*

$$\dot{x}_k(t) \in [-1, 1], \quad x_k(t_1^{(k)}) = 0$$

Cauchy probleminin çözümü olur. O halde $\forall\ t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)})$ *için*

$$-(t - t_1^{(k)}) \leq x_k(t) \leq (t - t_1^{(k)})$$

olduğu bulunur. $(t - t_1^{(k)}) \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right)$ *olduğundan ve son eşitsizlikten* $\forall\ t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)})$ *için*

$$\mid x_k(t) \mid \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \tag{3.1.43}$$

olur.

Sonuç olarak (3.1.38), (3.1.42) *ve* (3.1.43) *eşitsizliklerinden* $\forall\ t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)})$ *için*

$$\mid x_k(t) \mid \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right)$$

olduğu elde edilir.

Şimdi, $\forall\ t \in [t_{i-1}^{(k)}, t_i^{(k)})$ *için*

$$\mid x_k(t) \mid \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \tag{3.1.44}$$

doğru olduğu kabul edilsin, $\forall\ t \in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ *için*

$$\mid x_k(t) \mid \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \tag{3.1.45}$$

olduğu kanıtlansın.

(3.1.30) *gereği* $\forall\ t \in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ *için*

$$\dot{x}_k(t) \in [-1, 1] + U_*(t_i^{(k)}, x_i^{(k)}), \tag{3.1.46}$$

$$x_k(t_i^{(k)}) = x_i(k),$$

olarak yazılır. (3.1.44) *eşitsizliğinden*

$$\mid x_i^{(k)} \mid \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \tag{3.1.47}$$

olduğu bulunur. O zaman $x_i^{(k)}$ *için üç durum olabilir.*

1. $x_i^{(k)} > 0$ *olsun.*

Bu durumda (3.1.29) *gereği* $U_*(t_i^{(k)}, x_i^{(k)}) = -1$ *ve* (3.1.46) *gereği* $x_k(\cdot)$ *fonksiyonu* $[t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)}]$ *aralığında, h.h.* $t \in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ *için*

$$\dot{x}_k(t) \in [-1, 1] - 1, \quad x_k(t_i^{(k)}) = x_i^{(k)}$$

Cauchy probleminin çözümü olur. O halde buradan h.h.t $\in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ *için*

$$\dot{x}_k(t) \in [-2, 0], \quad x_k(t_i^{(k)}) = x_i^{(k)}$$

elde edilir. O zaman $\forall\ t \in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ *için*

$$-2(t - t_i^{(k)}) + x_i^{(k)} \le x_i(t) \le x_i^{(k)} \tag{3.1.48}$$

olur. (3.1.47) *ve* (3.1.48) *eşitsizliklerinden* $\forall\ t \in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ *için*

$$x_k(t) \le 2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \tag{3.1.49}$$

olduğu bulunur. Ayrıca (3.1.46) *gereği* $(t - t_i^{(k)}) \le diam\left(\Delta^{(k)}\right)$ *olduğundan,*

$$\begin{aligned} x_k(t) &\ge -2(t - t_i^{(k)}) + x_i^{(k)} \\ &\ge -2(t - t_i^{(k)}) \\ &\ge -2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \end{aligned} \tag{3.1.50}$$

olduğu bulunur. (3.1.49) *ve* (3.1.50) *eşitsizliklerinden* $\forall\ t \in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ *için*

$$\mid x_k(t) \mid \le 2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \tag{3.1.51}$$

olduğu elde edilir.

2. $x_1^{(k)} < 0$ *olsun.*

Bu durumda (3.1.29) *gereği* $U_*(t_i^{(k)}, x_i^{(k)}) = 1$ *ve* (3.1.46) *gereği* $x_k(\cdot)$ *fonksiyonu* $[t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)}]$ *aralığında, h.h.* $t \in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ *için*

$$\dot{x}_k(t) \in [-1, 1] + 1, \quad x_k(t_i^{(k)}) = x_i^{(k)}$$

Cauchy probleminin çözümü olur. Buradan, h.h.t $\in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ *için*

$$\dot{x}_k(t) \in [0,2], \quad x_k(t_i^{(k)}) = x_i^{(k)}$$

elde edilir. O halde $\forall\ t \in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ *için*

$$x_i^{(k)} \le x_k(t) \le 2(t - t_i^{(k)}) + x_i^{(k)} \tag{3.1.52}$$

olduğu bulunur. (3.1.52) *eşitsizliğinden,* $(t - t_i^{(k)}) \le diam\left(\Delta^{(k)}\right)$ *ve* $x_1^{(k)} < 0$ *olduğundan* $\forall\ t \in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ *için*

$$\begin{aligned} x_k(t) &\le 2(t - t_i^{(k)}) + x_i^{(k)} \\ &\le 2(t - t_i^{(k)}) \\ &\le 2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \end{aligned} \tag{3.1.53}$$

elde edilir. Ayrıca (3.1.47) *eşitsizliğinden* $-x_i(k) \le 2diam\left(\Delta^{(k)}\right)$ *olur. Buradan ve* (3.1.52) *eşitsizliğinden* $\forall\ t \in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ *için*

$$x_k(t) \ge x_i^{(k)} \ge -2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \tag{3.1.54}$$

olur. O halde (3.1.53) *ve* (3.1.54) *eşitsizliklerinden* $\forall\ t \in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ *için*

$$\mid x_k(t) \mid \le 2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \tag{3.1.55}$$

olduğu elde edilir.

3. $x_i^{(k)} = 0$ *olsun.*

Bu durumda (3.1.29) *gereği* $U_*(t_i^{(k)}, x_i^{(k)}) = 0$ *ve* (3.1.46) *gereği* $x_k(\cdot)$ *fonksiyonu* $[t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)}]$ *aralığında, h.h.t* $\in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ *için*

$$\dot{x}_k(t) \in [-1,1], \quad x_k(t_i^{(k)}) = 0$$

Cauchy probleminin çözümü olur . Buradan $\forall\ t \in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ *için*

$$-(t - t_i^{(k)}) \le x_k(t) \le (t - t_i^{(k)}) \tag{3.1.56}$$

olduğu elde edilir. $(t - t_i^{(k)}) \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right)$ *olduğundan ve* (3.1.56) *eşitsizliklerinden* $\forall\ t \in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ *için*

$$| x_k(t) | \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right) \qquad (3.1.57)$$

olur.

(3.1.51), (3.1.55) *ve* (3.1.57) *eşitsizliklerinden* $\forall\ t \in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ *için* (3.1.45) *eşitsizliğinin doğru olduğu bulunur. O halde tümevarım yönteminden* $\forall\ t \in [0,1]$ *için,*

$$| x_k(t) | \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right)$$

olduğu elde edilir. Böylece $[0,1]$ *aralığının,* $k \to \infty$ *iken* $diam\left(\Delta^{(k)}\right) \to 0$ *olacak biçimde* $diam\left(\Delta^{(k)}\right)$ *bölüntüleri ve keyfi* $x_k(\cdot) \in X\left(0,0,U_*,\Delta^{(k)}\right)$ *adımlı yörüngesi için* (3.1.31) *eşitsizliği doğru olur.*

Şimdi keyfi $x_*(\cdot) \in X(0,0,U_*)$ *alınsın. O zaman* $x_*(\cdot)$ *yörüngesinin tanımından,* $k \to \infty$ *iken* $diam\left(\Delta^{(k)}\right) \to 0$, $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ *olacak biçimde* $x_k(\cdot) \in X\left(0,0,U_*,\Delta^{(k)}\right)$ *adımlı yörüngeleri vardır. O halde* (3.1.31) *eşitsizliğinden* $\forall\ t \in [0,1]$ *için,*

$$| x_k(t) | \leq 2diam\left(\Delta^{(k)}\right)$$

olur. $k \to \infty$ *iken limit alınırsa* $\forall\ t \in [0,1]$ *için,* $x_*(t) \equiv 0$ *olduğu elde edilir. Böylece* $\forall\ x(\cdot) \in X(0,0,U_*)$ *ve* $\forall\ t \in [0,1]$ *için,* $x(t) \equiv 0$ *olur.*

O halde $\forall\ t \in [0,1]$ *için,* $W(t) = \{0\}$ *olduğundan* $\forall\ x(\cdot) \in X(0,0,U_*)$ *ve* $\forall\ t \in [0,1]$ *için* $x(t) \in W(t)$ *olur. Bu ise* (3.1.29) *ile verilen* U_* *pozisyonlu stratejinin* problem2*'nin çözümü olması demektir.*

3.2 Süper Stratejinin Ürettiği Yörüngeler Kümesi ve Özellikleri

Önceki bölümde, $[t_0,\theta]$ aralığının verilen bir $\Delta = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \theta\}$ bölüntüsü için $U_*(\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to P$ pozisyonlu stratejisinin ürettiği adımlı yörünge tanımlanırken, sistem herhangi bir t_i $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$ zaman anında x_i durumuna ulaşdığında, sisteme verilen kontrol etkisi $U_*(t_i, x_i)$ olarak alınıp, bu etki önceden belirlenmiş $[t_i, t_{i+1}]$ aralığında etkisini sürdürüyordu. Böylece $U_*(t_i, x_i)$ kontrol etkisi önceden verilen $[t_i, t_{i+1}]$ aralığında devam ediyor ve bu etkinin bitecegi t_{i+1} zaman anı (t_i, x_i) pozisyonuna ve $U_*(t_i, x_i)$ kontrol etkisine bağlı olmuyordu. Bu bölümde daha karmaşık bir kontrol yöntemi uygulanacak. Sistem bir (t_*, x_*) pozisyonuna ulaştığında, bu sisteme verilen kontrol etki, yine de verilen $U_*(\cdot)$ pozisyonlu stratejinin yardımıyla $U_*(t_*, x_*)$ olarak seçilecek ve bu etki, (t_*, x_*) pozisyonuna ve $U_*(t_*, x_*)$ etkisine bağlı $[t_*, t_* + h\,(t_*, x_*, U_*(t_*, x_*))]$ aralığında devam edecektir.

$$\Delta\,(0,1) = \{\delta\,(\mu, t, x, u) : (0,1) \times [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \to (0,\mu)\}$$

fonksiyonlar kümesi tanımlansın. $U \in \mathcal{U}_{pos}$, $\delta(\cdot) \in \Delta\,(0,1)$ olmak üzere $(U, \delta(\cdot)) \in \mathcal{U}_{pos} \times \Delta(0,1)$ ikilisine süper strateji denir. Şimdi herhangi bir $(t_0, x_0) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ başlangıç pozisyonu için $(U_*, \delta_*(\cdot)) \in \mathcal{U}_{pos} \times \Delta\,(0,1)$ süper stratejisinin ürettiği yörünge tanımlansın. Bunun için ise ilk olarak $(U_*, \delta_*(\cdot))$ süper stratejisinin ürettiği adımlı yörünge tanımlansın.

Herhangi bir $\mu_* \in (0,1)$ alınsın ve sabitlensin. Şimdi $\forall\,(t, x, u) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P$ olmak üzere $\delta_*(\cdot) \in \Delta\,(0,1)$ için

$$\Delta_{\mu_*}\,(\delta_*(\cdot)) = \{h(t,x,u) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \to (0,1) |\ h(t,x,u) \le \delta_*\,(\mu_*, t, x, u)\}$$

kümesi tanımlansın. Burada $\delta_*\,(\mu_*, t, x, u) \in \Delta_{\mu_*}\,(\delta_*(\cdot))$ olduğundan $\Delta_{\mu_*}\,(\delta_*(\cdot)) \neq \emptyset$ olur. $h_*\,(\cdot) \in \Delta_{\mu_*}\,(\delta_*(\cdot))$ alınsın ve sabitlensin. $x_*\,(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t_0 + h_*(t_0, x_0, U_*\,(t_0, x_0))]$ aralığında

$$\begin{aligned} &\dot{x}_*(t) \in F\,(t, x_*(t), U_*\,(t_0, x_0)) \\ &x_*(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınsın. Bu durumda $x_*\,(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t_0 + h_*(t_0, x_0, U_*\,(t_0, x_0))]$ aralığında tanımlanmış olur.

$$t_1 = t_0 + h_*(t_0, x_0, U_*\,(t_0, x_0)), \quad x_1 = x_*(t_1)$$

olarak alınsın. Şimdi $x_*(\cdot)$ fonksiyonu, $[t_1, t_1 + h_*(t_1, x_1, U_*(t_1, x_1))]$ aralığında

$$\begin{aligned} &\dot{x}_*(t) \in F(t, x_*(t), U_*(t_1, x_1)) \\ &x_*(t_1) = x_1 \end{aligned}$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınsın.

$$t_2 = t_1 + h_*(t_1, x_1, U_*(t_1, x_1)), \quad x_2 = x_*(t_2)$$

denilsin. Bu durumda $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t_2]$ aralığında tanımlanmış olur.

Bu şekilde devam edilirse,

$x_k = x_*(t_k)$, $t_{k+1} = t_k + h_*(t_k, x_k, U_*(t_k, x_k))$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_k, t_{k+1}]$ aralığında

$$\begin{aligned} &\dot{x}_*(t) \in F(t, x_*(t), U_*(t_k, x_k)) \\ &x_*(t_k) = x_k \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. Böylece $x_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımlanışında,

$$t_{k+1} = t_k + h_*(t_k, x_k, U_*(t_k, x_k)) \tag{3.2.2}$$

olmak üzere bir $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ sayıları elde edilmiş olur. (3.2.2) ile bulunan $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ sayılarının tanımlanışında iki durum söz konusudur.

İlk durumda

$$t_{k_*+1} = t_{k_*} + h_*(t_{k_*}, x_{k_*}, U_*(t_{k_*}, x_{k_*})) \geq \theta$$

olacak biçimde $k_* > 0$ vardır. O halde $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, \theta]$ aralığında sonlu sayı adımda tanımlanır.

İkinci durumda $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ olmak üzere $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi elde edilir ve

$$t_* = \sup\{t_k : k = 0, 1, 2, \ldots\} \leq \theta$$

olur. O halde $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $t = t_*$ noktasında $x_*(t_*) = \lim\limits_{k\to\infty} x_*(t_k)$ olarak tanımlanır.

Sıradaki önerme, gerçekten $\{x_*(t_k)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin yakınsak olduğunu göstermektedir.

Önerme 3.2.1. *$x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_k, t_{k+1}]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ aralığında (3.2.1) Cauchy probleminin çözümlerinden biri, her $k = 0, 1, 2, \ldots$ için t_k sayıları (3.2.2) ile tanımlanmış ve $t_* = \sup\{t_k : k = 0, 1, 2, \ldots\} \le \theta$ olsun. O zaman $\lim\limits_{k\to\infty} x_*(t_k)$ vardır ve $x_*(t_*) = \lim\limits_{k\to\infty} x_*(t_k)$ denilirse, keyfi $t \in [t_0, t_*]$ için*

$$\|x_*(t)\| \le (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t-t_0)} - 1$$

olur.

Kanıt. $\{x_*(t_k)\}_{k=0}^{\infty}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğu gösterilsin. $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $\forall k$ için $[t_0, t_k]$ aralığında tanımlıdır. Önerme 3.1.1 gereği $\forall t \in [t_0, t_k]$ için

$$\|x_*(t)\| \le (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t-t_0)} - 1 \tag{3.2.3}$$

olur. O halde $k \to \infty$ iken $t_k \to t_*^{-0}$ olduğundan, $\forall t \in [t_0, t_*)$ için

$$\|x_*(t)\| \le (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t-t_0)} - 1 \tag{3.2.4}$$

olduğu elde edilir ve M sabiti (2.5.10) ile tanımlı olmak üzere, (3.2.4) eşitsizliğinden $\forall t \in [t_0, t_*)$ için

$$\|x_*(t)\| \le M \tag{3.2.5}$$

olduğu bulunur. $\forall\, k$ için $x_*(\cdot)$ fonksiyonunun $[t_0, t_k]$ aralığında tanımlanışından, $k = 0, 1, 2, \ldots$ ve $\forall t \in [t_0, t_k]$ için

$$x_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}_*(\tau)d\tau \tag{3.2.6}$$

integral eşitliği sağlanır. O halde (3.2.6) eşitsizliğinden

$$x_*(t_{k+1}) - x_*(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x}_*(\tau)d\tau$$

eşitliği ve

$$\|x_*(t_{k+1}) - x_*(t_k)\| \leq \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \|\dot{x}_*(\tau)\| d\tau \tag{3.2.7}$$

eşitsizliği doğru olur. $x_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımlanışından $h.h.$ $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$\dot{x}_*(t) \in F(t, x_*(t), U_*(t_k, x_k))$$

olduğundan ve 1.5.C koşulundan, $h.h.$ $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$\|\dot{x}_*(t)\| \leq c(\|x_*(t)\| + 1) \tag{3.2.8}$$

olur. (3.2.5) ve (3.2.8) eşitsizliklerinden, M sabiti (2.5.10) ile tanımlı olmak üzere, $h.h.$ $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$\|\dot{x}_*(t)\| \leq c(M+1) \tag{3.2.9}$$

olur. L sabiti (2.5.11) ile tanımlı olmak üzere , (3.2.7) eşitsizliğinden

$$\|x_*(t_{k+1}) - x_*(t_k)\| \leq L(t_{k+1} - t_k) \tag{3.2.10}$$

elde edilir.

Şimdi $\{x_*(t_k)\}_{k=0}^{\infty}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğu gösterilsin. $\forall p$ için,

$$\begin{aligned} \|x_*(t_{k+p}) - x_*(t_k)\| &\leq \|x_*(t_{k+p}) - x_*(t_{k+p-1}) + x_*(t_{k+p-1}) + \ldots - x_*(t_{k+1}) \\ &\quad + x_*(t_{k+1}) - x_*(t_k)\| \\ &\leq \|x_*(t_{k+p}) - x_*(t_{k+p-1})\| + \|x_*(t_{k+p-1}) - x_*(t_{k+p-2})\| \\ &\quad + \ldots + \|x_*(t_{k+1}) - x_*(t_k)\| \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

olur. O zaman (3.2.10) ve (3.2.11) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \|x_*(t_{k+p}) - x_*(t_k)\| &\leq L(t_{k+p} - t_{k+p-1} + t_{k+p-1} - \ldots + t_{k+1} - t_{k+1} + t_k) \\ &= L(t_{k+p} - t_k) \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

olduğu görülür. $k \to \infty$ iken $t_k \to t_*$ olduğundan $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ dizisi Cauchy dizisidir. Bu durumda $\dfrac{\varepsilon}{L} > 0$ alındığında $\forall k > N_0$ ve $\forall p > 0$ için

$$\|t_{k+p} - t_k\| \leq \frac{\varepsilon}{L}$$

olacak şekilde bir $N_0 > 0$ vardır. O zaman (3.2.12) eşitsizliğinden keyfi $\varepsilon > 0$ alındığında $\forall k > N_0$ ve $\forall p > 0$ için

$$\begin{aligned} \| x_* (t_{k+p}) - x_* (t_k) \| &\leq L (t_{k+p} - t_k) \\ &\leq L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon \end{aligned}$$

olacak biçimde bir $N_0 > 0$ vardır. Yani $\{x_* (t_k)\}_{k=0}^{\infty}$ dizisi Cauchy dizisidir. O halde $\{x_* (t_k)\}_{k=0}^{\infty}$ dizisi yakınsak dizidir. Eğer

$$x_* (t_*) = \lim_{k \to \infty} x_* (t_k)$$

denilirse $x_* (\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t_*]$ aralığında tanımlanmış olur ve (3.2.4) eşitsizliğinden $\forall t \in [t_0, t_*]$ için

$$\| x_* (t) \| \leq (\| x_0 \| + 1) e^{c(t - t_0)} - 1$$

olduğu bulunur. □

Sıradaki önerme, t_k sayıları (3.2.2) ile tanımlanmış ve

$$t_* = \sup \{ t_k : k = 0, 1, 2, ... \} \leq \theta$$

olmak üzere, $[t_0, t_*]$ aralığında tanımlı $x_* (\cdot)$ fonksiyonunun Lipschitz sürekli olduğunu göstermektedir.

Önerme 3.2.2. *t_k sayıları* (3.2.2) *ile tanımlansın ve* $t_* = \sup \{ t_k : k = 0, 1, 2, ... \} \leq \theta$ *olsun. O zaman $[t_0, t_*]$ aralığında tanımlı $x_* (\cdot)$ fonksiyonu L sabiti ile Lipschitz süreklidir.*
Burada L sabiti (2.5.11) *ile tanımlanır.*

Kanıt. Keyfi k alınsın ve sabitlensin. O zaman Önerme 3.1.2 benzer olarak, $x_* (\cdot)$ fonksiyonunun $[t_0, t_k]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağladığı kanıtlanabilir. Yani, keyfi τ_1, $\tau_2 \in [t_0, t_k]$ için

$$\| x_* (\tau_1) - x_* (\tau_2) \| \leq L (\tau_1 - \tau_2)$$

olur. Şimdi $x_* (\cdot)$ fonksiyonunun $[t_0, t_*]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağladığı kanıtlansın.

$\forall t_1, t_2 \in [t_0, t_*]$ alınsın. $t_1 < t_2$ olsun.

- $t_2 < t_*$ olsun.

  $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = t_*$ olduğundan $t_2 < t_{k_*}$ olacak biçimde bir $k_* > 0$ vardır. O zaman $t_1, t_2 \in [t_0, t_{k_*}]$ olur. O halde

$$\|x_*\,(t_2) - x_*\,(t_1)\,\| \le L\,(t_2 - t_1)$$

  elde edilir.

- $t_2 = t_*$ olsun.

  O halde $\forall k$ için

$$\|x_*\,(t_k) - x_*\,(t_1)\,\| \le L\,(t_k - t_1)$$

  olur. Bu durumda $k \to \infty$ iken $t_k \to t_*$, $x_*(t_k) \to x_*(t_*)$ olduğundan

$$\|x_*\,(t_*) - x_*\,(t_1)\,\| \le L\,(t_* - t_1)$$

  olur.

Sonuç olarak $x_*\,(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t_*]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz dir. $\square$

Böylece (3.2.2) ile tanımlanan t_k sayıları ve $t_* = \sup\{t_k : k = 0, 1, 2, ...\} \le \theta$ olmak üzere, $x_*\,(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t_*]$ aralığında tanımlanmış olur.
Eğer $t_* = \theta$ ise $x_*\,(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, \theta]$ aralığında tanımlanmış olur. Eğer $t_* < \theta$ ise,

$$x_* = x_*\,(t_*)\,, \quad t_*^1 = t_* + h_*(t_*, x_*, U_*\,(t_*, x_*))$$

olmak üzere $x_*\,(\cdot)$ fonksiyonu $[t_*, t_*^1]$ aralığında

$$\dot{x}_*(t) \in F\,(t, x_*(t), U_*\,(t_*, x_*))\,, \quad x_*(t_*) = x_*$$

Cauchy probleminin çözümlerinden keyfi biri olarak tanımlanır. O zaman $\forall t \in [t_*, t_*^1]$ için

$$\|x_*\,(t)\,\| \le (\|x_*\| + 1)\,e^{c(t-t_*)} - 1 \tag{3.2.13}$$

eştsizliği sağlanır. Ayrıca $\forall t \in [t_0, t_*]$ için

$$\|x_*\,(t)\,\| \le (\|x_0\| + 1)\,e^{c(t-t_0)} - 1$$

olduğu gösterildi. Bu durumda

$$\|x_*\| \leq (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t_* - t_0)} - 1$$

olur. Bu eşitsizlik (3.2.13) eşitsizliğinde yerine yazılırsa $\forall t \in [t_*, t_*^1]$ için

$$\begin{aligned} \|x_*(t)\| &\leq \left[(\|x_0\| + 1)\, e^{c(t_* - t_0)} - 1 + 1\right] e^{c(t - t_*)} - 1 \\ &= (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t - t_0)} - 1 \\ &\leq M \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. O zaman $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $\forall t \in [t_0, t_*^1]$ için

$$\begin{aligned} \|x_*(t)\| &\leq (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t - t_0)} - 1 \\ &\leq M \end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlar.

$x_*(\cdot)$ fonksiyonu Önerme 3.2.2 gereği $[t_0, t_*]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz olur. $[t_*, t_*^1]$ aralığında da L sabiti ile Lipschitz dir. Bu durumda $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t_*^1]$ de L sabiti ile Lipschitz olur.

Bu prosedüre devam edilirse, $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, \theta]$ aralığında tanımlanır.

Böylece $x_*(\cdot)$ fonksiyonunu $[t_0, \theta]$ aralığında tanımlarken $U_*(\cdot)$ pozisyonlu stratejisi ve $h_*(\cdot) \in \Delta_{\mu_*}(\delta_*(\cdot))$ fonksiyonu $[t_0, \theta]$ aralığının bir alt kümesini doğurur. Bu alt küme $L\{[t_0, \theta]; x_*(\cdot), U_*, h_*(\cdot)\}$ ile gösterilir. Önerme 2.6.3 gereği, $L\{[t_0, \theta]; x_*(\cdot), U_*, h_*(\cdot)\}$ iyi sıralı kümedir ve bu kümenin kardinal sayısı kontinyumdan büyük değildir.

Önerme 3.2.3. *$x_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için*

$$\begin{aligned} \|x_*(t)\| &\leq (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t_* - t_0)} - 1 \\ &\leq M \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

eşitsizliğini sağlar ve L sabiti ile Lipschitz süreklidir. M sabiti (2.5.10) *ile, L sabiti* (2.5.11) *ile tanımlanır.*

Kanıt. Eğer $L\{[t_0,\theta];x_*(\cdot),U_*,h_*(\cdot)\}$ iyi sıralı kümesinin order türüne karşılık order sayısı sonlu ise, yani t_k sayıları (3.2.2) ile tanımlanırken

$$t_{k_*}+h_*(t_{k_*},x_{k_*},U_*(t_{k_*},x_{k_*}))\geq\theta$$

olacak biçimde k_* varsa, önermenin kanıtı Önerme 3.1.1 ve Önerme 3.1.2 ile aynıdır.

$L\{[t_0,\theta];x_*(\cdot),U_*,h_*(\cdot)\}$ iyi sıralı kümesinin order türüne karşılık order sayısı sonlu olmasın. Bu durumda Önermenin kanıtı için transfinit indüksiyon yöntemi kullanılır(bkz.[45, 53, 38]). t_k sayıları (3.2.2) ile tanımlı ve $t_*=\sup\{t_k:k=0,1,2,...\}\leq\theta$ olmak üzere, Önerme 3.2.1 gereği $\forall t\in[t_0,t_*]$ için

$$\begin{aligned}\|x_*(t)\| &\leq (\|x_0\|+1)e^{c(t_*-t_0)}-1 \\ &\leq M\end{aligned}\tag{3.2.15}$$

ve Önerme 3.2.2 gereği $\forall t_1,t_2\in[t_0,t_*]$ için

$$\|x_*(t_2)-x_*(t_1)\|\leq L(t_2-t_1)\tag{3.2.16}$$

olur.

Şimdi, $\forall t_\nu\in L\{[t_0,\theta];x_*(\cdot),U_*,h_*(\cdot)\}$ alınsın. t_ν'ye karşılık gelen order sayısı ν olmak üzere $x_*(\cdot)$ fonksiyonunun keyfi $\lambda<\nu$ için $[t_0,t_\lambda]$ aralığında (3.2.14) eşitsizliğini sağladığı ve $x_*(\cdot)$ fonksiyonunun $[t_0,t_\lambda]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz olduğu kabul edilsin.

Şimdi $x_*(\cdot)$ fonksiyonunun $[t_0,t_\nu]$ aralığında (3.2.14) eşitsizliğini sağladığı ve $[t_0,t_\nu]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz olduğu gösterilsin.

t_ν için iki durum sözkonusudur.

i t_ν sayısının öncülü olan $t_\sigma\in L\{[t_0,\theta];x_*(\cdot),U_*,h_*(\cdot)\}$ sayısı vardır. Bu durumda $(t_\sigma,t_\nu)\cap L\{[t_0,\theta];x_*(\cdot),U_*,h_*(\cdot)\}=\emptyset$ olur. $L\{[t_0,\theta];x_*(\cdot),U_*,h_*(\cdot)\}$ kümesinin tanımından

$$t_\nu=t_\sigma+h_*(t_\sigma,x_*(t_\sigma),U_*(t_\sigma,x_*(t_\sigma)))$$

olur. Varsayımdan dolayı $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t_\sigma]$ da tanımlı olup, $\forall t \in [t_0, t_\sigma]$ için (3.2.14) eşitsizliğini sağlar. Yani $\forall\ t \in [t_0, t_\sigma]$ için

$$\begin{aligned} \|x_*(t)\| &\leq (\|x_0\|+1)\, e^{c(t-t_0)} - 1 \\ &\leq M \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

olur. $x_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımlanışından $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_\sigma, t_\nu]$ aralığında

$$\begin{aligned} &\dot{x}_*(t) \in F(t, x_*(t), U_*(t_\sigma, x_\sigma)) \\ &x_*(t_\sigma) = x_\sigma \end{aligned}$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. Ayrıca $\forall t \in [t_\sigma, t_\nu]$ için

$$\|x_*(t)\| \leq (\|x_\sigma\|+1)\, e^{c(t-t_\sigma)} - 1 \tag{3.2.18}$$

eşitsizliğinin sağladığı gösterilebilinir. $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t_\sigma]$ aralığında (3.2.14) eşitsizliğini sağladığından

$$\|x_\sigma\| \leq (\|x_0\|+1)\, e^{c(t_\sigma-t_0)} - 1$$

olur. Bu eşitsizlik (3.2.18) eşitsizliğinde yerine yazılırsa $\forall t \in [t_\sigma, t_\nu]$ için

$$\begin{aligned} \|x_*(t)\| &\leq \left[(\|x_0\|+1)\, e^{c(t_\sigma-t_0)} - 1 + 1\right] e^{c(t-t_\sigma)} - 1 \\ &= (\|x_0\|+1)\, e^{c(t-t_0)} - 1 \\ &\leq M \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

olduğu elde edilir. (3.2.17) ve (3.2.19) eşitsizliklerinden $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $\forall t \in [t_0, t_\nu]$ için (3.2.14) eşitsizliğini sağlar.

Şimdi $x_*(\cdot)$ fonksiyonunun, $[t_0, t_\nu]$ aralığında Lipschitz sürekli olduğu kanıtlansın.

Varsayımdan dolayı $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t_\sigma]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlar. $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $h.h.$ $t \in [t_\sigma, t_\nu]$ için

$$\dot{x}_*(t) \in F(t, x_*(t), U_*(t_\sigma, x_\sigma)), \quad x_*(t_\sigma) = x_\sigma$$

Cauchy probleminin bir çözümü olduğundan ve 1.5.C koşulundan $h.h.$ $t \in [t_\sigma, t_\nu]$ için

$$\|\dot{x}_*(t)\| \le c\,(\|x_*\,(t)\,\| + 1)$$

olur. Böylece (3.2.17) eşitsizliğinden $h.h.$ $t \in [t_\sigma, t_\nu]$ için

$$\begin{aligned} \|\dot{x}_*(t)\| &\le c\,(\|x_*\,(t)\,\| + 1) \\ &\le c\,(M + 1) \\ &= L \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

olduğu elde edilir. Keyfi $t_1, t_2 \in [t_\sigma, t_\nu]$ alınsın. Genelliği bozmaksızın $t_1 < t_2$ olsun.

$$x_*\,(t_2) - x_*\,(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \dot{x}_*(\tau) d\tau$$

olduğundan ve (3.2.20) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|x_*\,(t_2) - x_*\,(t_1)\,\| &\le \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \|\dot{x}_*(\tau)\| d\tau \\ &\le L(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Böylece $x_*\,(\cdot)$ fonksiyonunun, $[t_\sigma, t_\nu]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlar. $x_*\,(\cdot)$ fonksiyonunun, $[t_0, t_\sigma]$ aralığında da L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağladığından, $x_*\,(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t_\nu]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlar.

ii ν order sayısının öncülü olmasın. Yani t_ν noktası $L\,\{[t_0, \theta]; x_*\,(\cdot)\,, U_*, h_*(\cdot)\}$ iyi sıralı kümesinin yığılma noktası olsun. Bu durumda $t_{\lambda_1} < t_{\lambda_2} < \ldots < t_{\lambda_k} < \ldots$, $\forall k$ için $t_{\lambda_k} \in L\,\{[t_0, \theta]; x_*\,(\cdot)\,, U_*, h_*(\cdot)\}$ olmak üzere $\lim\limits_{k\to\infty} t_{\lambda_k} = t_\nu - 0$ olacak biçimde $\{t_{\lambda_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi vardır.
Varsayımdan dolayı $\forall k$ için $x_*\,(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t_{\lambda_k}]$ aralığında (3.2.14) eşitsizliğini sağlar ve L sabiti ile Lipschitz süreklidir. Bu durumda

$$x_*\,(t_\nu) = \lim_{k\to\infty} x_*\,(t_{\lambda_k})$$

olarak tanımlanır.

Şimdi bu limitin var olduğu gösterilsin. $\forall k$ için $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_{\lambda_k}, t_{\lambda_{k+1}}]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz sürekli olduğundan

$$\|x_*(t_{\lambda_{k+1}}) - x_*(t_{\lambda_k})\| \leq L\left(t_{\lambda_{k+1}} - t_{\lambda_k}\right) \tag{3.2.21}$$

olur. $\forall k$ ve $\forall p > 0$ için

$$\begin{aligned}
\|x_*(t_{\lambda_{k+p}}) - x_*(t_{t_{\lambda_k}})\| &\leq \|x_*(t_{\lambda_{k+p}}) - x_*(t_{\lambda_{k+p-1}}) + x_*(t_{\lambda_{k+p-1}}) + \ldots \\
&\quad -x_*(t_{\lambda_{k+1}}) + x_*(t_{\lambda_{k+1}}) - x_*(t_{\lambda_k})\| \\
&\leq \|x_*(t_{\lambda_{k+p}}) - x_*(t_{\lambda_{k+p-1}})\| + \|x_*(t_{\lambda_{k+p-1}}) \\
&\quad -x_*(t_{\lambda_{k+1}}))\| + \ldots + \|x_*(t_{\lambda_{k+1}}) - x_*(t_{\lambda_k})\| \\
&\leq L\Big(t_{\lambda_{k+p}} - t_{\lambda_{k+p-1}} + t_{\lambda_{k+p-1}} - \ldots + t_{\lambda_{k+1}} \\
&\quad -t_{\lambda_{k+1}} + t_{\lambda_k}\Big) \\
&= L\left(t_{\lambda_{k+p}} - t_{\lambda_k}\right)
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

olarak yazılır. $k \to \infty$ iken $t_{\lambda_k} \to t_\nu - 0$ olduğundan $\{t_{\lambda_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi Cauchy dizisidir. O halde $\dfrac{\varepsilon}{L} > 0$ olmak üzere $\forall k > N_0$ ve $\forall p > 0$ için

$$\|t_{\lambda_{k+p}} - t_{\lambda_k}\| \leq \frac{\varepsilon}{L}$$

olacak şekilde $N_0 > 0$ vardır. Elde edilen son eşitsizlikten ve (3.2.22) eşitsizliğinden $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\forall k > N_0$ ve $\forall p > 0$ için

$$\begin{aligned}
\|x_*(t_{\lambda_{k+p}}) - x_*(t_{\lambda_k})\| &\leq L(t_{\lambda_{k+p}} - t_{\lambda_k}) \\
&\leq L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon
\end{aligned}$$

olacak biçimde $N_0 > 0$ vardır. Yani $\Big\{x_*(t_{\lambda_k})\Big\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi Cauchy dizisi olup limiti vardır.

Şimdi $x_*(\cdot)$ fonksiyonunun $[t_0, t_\nu]$ aralığında (3.2.14) eşitsizliğini sağladığı ve L sabiti ile Lipschitz sürekli olduğu gösterilsin.

$\forall t_* \in [t_0, t_\nu]$ alınsın ve sabitlensin.

- $t_* < t_\nu$ olsun. O zaman $k \to \infty$ iken $t_{\lambda_k} \to t_\nu - 0$ olduğundan $t_{\lambda_{k*}} > t_\nu$ olacak biçimde bir k_* vardır. $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t_{\lambda_{k*}}]$ aralığında (3.2.14) eşitsizliğini sağladığından ve $t_* \in [t_0, t_{\lambda_{k*}}]$ olduğundan, (3.2.14) eşitsizliği t_* noktasında da sağlanır.

- $t_* = t_\nu$ olsun. $\forall\, k = 0, 1, 2, \ldots$ için $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t_{\lambda_k}]$ aralığında (3.2.14) eşitsizliğini sağladığından $\forall\, k = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$\|x_*(t_{\lambda_k})\| \leq (\|x_0\| + 1)\, e^{c(t_{\lambda_k} - t_0)} - 1$$

  olur. $k \to \infty$ iken $t_{\lambda_k} \to t_\nu - 0$, $x_*(t_{\lambda_k}) \to x_*(t_\nu)$ olduğundan (3.2.14) eşitsizliği $t_* = t_\nu$ noktasında da sağlanır.

Şimdi $x_*(\cdot)$ fonksiyonunun $[t_0, t_\nu]$ aralığında L sabiti ile Lipschtz olduğu gösterilsin. $\forall \tau_1, \tau_2 \in [t_0, t_\nu]$ alınsın ve $\tau_1 < \tau_2$ olsun.

- $\tau_2 < t_\nu$ olsun.
  $k \to \infty$ iken $t_{\lambda_k} \to t_\nu - 0$ olduğundan $\tau_2 < t_{\lambda_{k*}}$ olacak biçimde k_* vardır. O zaman $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, t_{\lambda_{k*}}]$ olur ve varsayımdan dolayı

$$\|x_*(\tau_2) - x_*(\tau_1)\| \leq L(\tau_2 - \tau_1)$$

  olur.

- $\tau_2 = t_\nu$ olsun. $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $\forall k$ için $[t_0, t_{\lambda_k}]$ aralığında aynı L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağladığından, $\forall k$ için

$$\|x_*(t_{\lambda_k}) - x_*(\tau_1)\| \leq L(t_{\lambda_k} - \tau_1)$$

  olur. O zaman buradan ve $k \to \infty$ iken $t_{\lambda_k} \to t_\nu - 0$, $x_*(t_{\lambda_k}) \to x_*(t_\nu)$ olduğundan

$$\|x_*(\tau_2) - x_*(\tau_1)\| \leq L(\tau_2 - \tau_1)$$

  olduğu bulunur.

Böylece $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t_\nu]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlar. O halde transfinit indüksiyon yöntemine göre $\forall t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x_*(t)\| &\leq (\|x_0\| + 1) e^{c(t-t_0)} - 1 \\ &\leq M \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır ve $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, \theta]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz olur. $\square$

$U_* \in \mathcal{U}_{pos}$ ve keyfi sabitlenmiş $h_*(\cdot) \in \Delta_{\mu_*}(\delta_*(\cdot))$ fonksiyonunun yukarıdaki yöntemle ürettiği tüm fonksiyonlar kümesi

$$\mathcal{Y}_{\mu_*}(t_0, x_0, U_*, h_*(\cdot))$$

ile gösterilsin.

$$\mathcal{Z}_{\mu_*}(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot)) = \bigcup_{h(\cdot)\in\Delta_{\mu_*}(\delta_*(\cdot))} \mathcal{Y}_{\mu_*}(t_0, x_0, U_*, h(\cdot)) \qquad (3.2.23)$$

olsun.

Tanım 3.2.1. *$\mathcal{Z}_{\mu_*}(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ fonksiyonlar kümesine $(U_*, \delta_*(\cdot))$ süper stratejisinin (t_0, x_0) başlangıç pozisyonundan ürettiği adımlı yörüngeler kümesi, $x(\cdot) \in \mathcal{Z}_{\mu_*}(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ fonksiyonuna ise adımlı yörünge denir.*

Açıktır ki, her $x_*(\cdot) \in \mathcal{Z}_{\mu_*}(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ için $x_*(\cdot) \in \mathcal{Y}_{\mu_*}(t_0, x_0, U_*, h_*(\cdot))$ olacak biçimde $h_*(\cdot) \in \Delta_{\mu_*}(\delta_*(\cdot))$ fonksiyonu vardır. Bu durumda $x_*(\cdot)$ fonksiyonunu tanımlarken $h_*(\cdot) \in \Delta_{\mu_*}(\delta_*(\cdot))$ fonksiyonu ve U_* pozisyonlu stratejisi $[t_0, \theta]$ aralığının bir $L\{[t_0, \theta]; x_*(\cdot), U_*, h_*(\cdot)\}$ iyi sıralı kümesini doğurur.

Önerme 3.2.3' den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.1. $(U_*, \delta_*(\cdot)) \in \mathcal{U}_{pos} \times \Delta(0,1)$ *ve* $\mu_* \in (0,1)$ *için* $\mathcal{Z}_{\mu_*}(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ *adımlı yörüngeler kümesi* $C([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$ *uzayında prekompakt kümedir. Ayrıca* $x_*(\cdot) \in \mathcal{Z}_{\mu_*}(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ *adımlı yörüngesi* L *sabiti Lipschitz koşulunu sağladığından mutlak süreklidir.*

Şimdi $(U_*, \delta_*(\cdot)) \in \mathcal{U}_{pos} \times \Delta(0,1)$ süper stratejinin (t_0, x_0) başlangıç pozisyonunda ürettiği yörüngeler kümesi tanımlansın.

Tanım 3.2.2. *$(t_0, x_0) \in [t_0, \theta]$, $(U_*, \delta_*(\cdot)) \in \mathcal{U}_{pos} \times \Delta(0,1)$ için*

$$X\left(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot)\right) = \{x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n \mid \exists \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty},\ \exists\, x_k(\cdot) \in \mathcal{Z}_{\mu_k}(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$$
$$\ni k \to \infty \text{ iken } \mu_k \to 0^+, \quad x_k(\cdot) \to x(\cdot)\big\} \qquad (3.2.24)$$

olsun.

$X\left(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot)\right)$ kümesine $\big(U_*, \delta_*(\cdot)\big)$ süper stratejinin (t_0, x_0) başlangıç pozisyonundan ürettiği yörüngeler kümesi, $x(\cdot) \in X\big(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot)\big)$ fonksiyonuna ise yörünge denir.

Teorem 3.2.1. *$\forall\, (t_0, x_0) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ ve $\big(U, \delta(\cdot)\big) \in \mathcal{U}_{pos} \times \Delta(0,1)$ için $X\left(t_0, x_0, U, \delta(\cdot)\right)$ yörüngeler kümesi $C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^n\big)$ uzayında boş kümeden farklı, kompakt kümedir. $\forall\, x(\cdot) \in X\big(t_0, x_0, U, \delta(\cdot)\big)$ yörüngesi $[t_0, \theta]$ aralığında mutlak süreklidir.*

Kanıt. İlk olarak $X\left(t_0, x_0, U, \delta(\cdot)\right) \neq \varnothing$ olduğu gösterilsin.
$k \to \infty$ iken $\mu_k \to 0^+$ olacak biçimde $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi alınsın ve $\forall\, k$ için $\mu_k < 1$ olsun. Şimdi $\forall\, k$ için $x_k(\cdot) \in \mathcal{Z}_{\mu_k}(t_0, x_0, U, \delta(\cdot))$ olacak biçimde $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngeleri alınsın. (3.2.14) gereği $\forall\, k$ için $\| x_k(\cdot) \|_C \leq M$ ve $x_k(\cdot)$ fonksiyonları L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlar. Burada M sabiti (2.5.10) ile L sabiti (2.5.11) ile tanımlanır.
O halde $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi düzgün sınırlı ve eş sürekli fonksiyonlar ailesi olur ve Arzela-Askoli teoreminden dolayı(bkz.[45]) $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^n\big)$ uzayında prekompakt küme olur. O zaman $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin en az bir yakınsak $\{x_{k_m}(\cdot)\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. $m \to \infty$ iken $x_{k_m}(\cdot) \to x_*(\cdot)$ olsun. $\forall\, m = 1, 2, \ldots$ için $x_{k_m}(\cdot) \in \mathcal{Z}_{\mu_{k_m}}(t_0, x_0, U, \delta(\cdot))$ olduğundan, $X\left(t_0, x_0, U, \delta(\cdot)\right)$ yörüngeler kümesinin tanımından $x_*(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U, \delta(\cdot)\right)$ olur. Bu ise $X\left(t_0, x_0, U, \delta(\cdot)\right) \neq \varnothing$ olması demektir.

Şimdi $X\left(t_0, x_0, U, \delta(\cdot)\right)$ yörüngeler kümesinin $C\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^n\big)$ kümesinde prekompakt olduğu kanıtlansın.

Keyfi $x_*(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U, \delta(\cdot)\right)$ yörüngesi alınsın ve sabitlensin. Yörüngeler kümesinin tanımından, $k \to \infty$ iken $\mu_k \to 0^+$ olmak üzere $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ olacak biçimde $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{Z}_{\mu_k}(t_0, x_0, U, \delta(\cdot))$ adımlı yörüngeler dizisi vardır. $\forall\ k$ için $x_k(\cdot) \in \mathcal{Z}_{\mu_k}(t_0, x_0, U, \delta(\cdot))$ olduğundan Önerme 3.2.3 gereği

$$\| x_k(\cdot) \| \leq M \tag{3.2.25}$$

olur. $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ düzgün yakınsadığından ve (3.2.25) eşitsizliğinden

$$\| x_*(\cdot) \| \leq M \tag{3.2.26}$$

olduğu elde edilir. Yani keyfi $x_*(\cdot)$ yörüngesi için

$$\| x_*(\cdot) \|_C = \max_{t\in[t_0,\theta]} \| x_*(\cdot) \| \leq M$$

olur. Bu ise $X\left(t_0, x_0, U, \delta(\cdot)\right)$ yörüngeler kümesinin $C\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^n\big)$ uzayında düzgün sınırlı olması demektir. Ayrıca $\forall\ k$ için $\tau_1,\ \tau_2 \in [t_0,\theta]$olmak üzere

$$\| x_k(\tau_1) - x_k(\tau_2) \| \leq L \| \tau_1 - \tau_2 \|$$

olur. $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ düzgün yakınsadığından

$$\| x_*(\tau_1) - x_*(\tau_2) \| \leq L \| \tau_1 - \tau_2 \| \tag{3.2.27}$$

olduğu elde edilir .Böylece $x_*(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U, \delta(\cdot)\right)$ yörüngesi L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlar. O halde $x_*(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U, \delta(\cdot)\right)$ yörüngeler kümesi $C\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^n\big)$ uzayında eş sürekli olur. $x_*(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U, \delta(\cdot)\right)$ kümesi düzgün sınırlı ve eş sürekli olduğundan Arzela-Askoli teoreminden(bkz.[45]) dolayı bu küme $C\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^n\big)$ uzayında prekompakt bir kümedir.

Şimdi $X\left(t_0, x_0, U, \delta(\cdot)\right)$ yörüngeler kümesinin kapalı olduğu kanıtlansın. Keyfi sabitlenmiş $(U, \delta(\cdot)) \in \mathcal{U}_{pos} \times \Delta(0,1)$ için $\{x_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty} \subset X\left(t_0, x_0, U, \delta(\cdot)\right)$

alınsın ve $n \to \infty$ iken $x_n(\cdot) \to x_*(\cdot)$ olsun. Bu durumda $x_*(\cdot) \in X(t_0, x_0, U, \delta(\cdot))$ olduğu gösterilsin.

$\forall\ n = 1, 2, \ldots$ için $x_n(\cdot) \in X(t_0, x_0, U, \delta(\cdot))$ olduğundan, $X(t_0, x_0, U, \delta(\cdot))$ yörüngeler kümesinin tanımından, her $\forall\ n = 1, 2, \ldots$ için $k \to \infty$ iken $\mu_k \to 0^+$ olacak şekilde $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0,1)$ dizisi ve $\forall k$ için $x_n^{(k)}(\cdot) \in \mathcal{Z}_{\mu_k}(t_0, x_0, U, \delta(\cdot))$ olmak üzere $k \to \infty$ iken $x_n^{(k)}(\cdot) \to x_n(\cdot)$ olacak şekilde $\left\{x_n^{(k)}(\cdot)\right\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi vardır.

$x_n(\cdot) \to x_*(\cdot)$ olduğundan $\dfrac{1}{2i}$ için

$$\|x_{n_i}(\cdot) - x_*(\cdot)\| < \frac{1}{2i} \tag{3.2.28}$$

olacak şekilde bir n_i vardır. $\forall i$ için $x_{n_i}(\cdot) \in X(t_0, x_0, U, \delta(\cdot))$ olduğundan, $k \to \infty$ iken

$$x_{n_i}^{(k)}(\cdot) \to x_{n_i}(\cdot)$$

düzgün yakınsar. Ayrıca $k \to \infty$ iken $\mu_{n_i}^{(k)} \to 0^+$ olur. O zaman $\dfrac{1}{2i}$ için

$$\mu_{n_i}^{(k_i)} < \frac{1}{i} \tag{3.2.29}$$

ve

$$\|x_{n_i}^{(k_i)}(\cdot) - x_{n_i}(\cdot)\| \leq \frac{1}{2i} \tag{3.2.30}$$

olacak şekilde bir k_i vardır. Seçilmiş ve sabitlenmiş i için (3.2.28) − (3.2.30) eşitsizliklerinden $\mu_{n_i}^{(k_i)} < \dfrac{1}{i}$ iken

$$\begin{aligned}
\|x_{n_i}^{(k_i)}(\cdot) - x_*(\cdot)\| &= \|x_{n_i}^{(k_i)}(\cdot) - x_{n_i}(\cdot) + x_{n_i}(\cdot) - x_*(\cdot)\| \\
&\leq \|x_{n_i}^{(k_i)}(\cdot) - x_{n_i}(\cdot)\| + \|x_{n_i}(\cdot) - x_*(\cdot)\| \\
&< \frac{1}{i}
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak $\mu_{n_i}^{(k_i)} = \mu_*^i$ ve $x_{n_i}^{(k_i)}(\cdot) = x_*^i(\cdot)$ olarak alınırsa $x_*^i(\cdot) \in \mathcal{Z}_{\mu_*^i}(t_0, x_0, U, \delta(\cdot))$ olmak üzere

$$\mu_*^i < \frac{1}{i} \tag{3.2.31}$$

ve

$$\|x_*^i(\cdot) - x_*(\cdot)\| < \frac{1}{i} \tag{3.2.32}$$

olur. (3.2.31) ve (3.2.32) eşitsizliklerinden $i \to \infty$ iken $\mu_*^i \to 0^+$, $x_*^i(\cdot) \in \mathcal{Z}_{\mu_*^i}(t_0, x_0, U, \delta(\cdot))$ olmak üzere

$$x_*^i(\cdot) \to x_*(\cdot)$$

olduğu görülür. $X\,(t_0, x_0, U, \delta(\cdot))$ yörüngeler kümesinin tanımından $x_*(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U, \delta(\cdot))$ olur. Bu ise $X\,(t_0, x_0, U, \delta(\cdot))$ yörüngeler kümesinin kapalı olması demektir.

$X\,(t_0, x_0, U, \delta(\cdot))$ yörüngeler kümesi $C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^n\big)$ uzayında prekompakt ve kapalı olduğundan, $X\,(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ yörüngeler kümesi $C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^n\big)$ uzayında kompakt küme olur. $\square$

4 KONTROL VEKTÖRLÜ DİFERANSİYEL İÇERMEYE GÖRE POZİSYONLU ZAYIF İNVARYANT KÜMELER

Bu bölümde verilen kapalı kümenin, davranışı kontrol vektörlü (2.5.1) diferansiyel içerme ile verilen dinamik sisteme göre pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliği ele alınmıştır. Uygun küme değerli dönüşümün türev kümesi kullanılarak verilen kümenin pozisyonlu zayıf invaryant olması için yeter koşullar elde edilmiştir.

4.1 Kontrol Vektörü Olan Diferansiyel İçermelerin Türev Kümeleri İle İlişkisi

Bu bölümde, pozisyonlu zayıf invaryant kümeler için verilen yeter koşulların kanıtlarında kullanılacak önermeler verilmiştir.

$W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme olmak üzere, $t \in [0,\theta]$ için,

$$W(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (t,x) \in W\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $t \in [0,\theta]$ için $t \to W(t)$ küme değerli dönüşümdür.

Önerme 4.1.1. $(t_*, x_*, u_*) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P$ *olsun. O zaman* $\forall \mu \in (0,1)$ *için* $\delta \in [0, \eta_*^{\mu}]$ *iken*

$$X\left(t_* + \delta; t_*, x_*, u_*\right) \subset x_* + \delta \cdot F\left(t_*, x_*, u_*\right) + \delta\mu \cdot \overline{B}$$

olacak şekilde bir $\eta_*^{\mu} = \eta_*^{\mu}\left(t_*, x_*, u_*\right)$ *vardır.*
Burada $\overline{B}$ *kapalı birim yuvarı göstermektedir.* $X\left(t_* + \delta; t_*, x_*, u_*\right)$ *kümesi ise*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\in F(t, x(t), u_*) \\ x(t_*) &= x_* \end{aligned}$$

Cauchy probleminin $t_* + \delta$ *anındaki erişim kümesidir.*

Kanıt. $\forall x_*(\cdot) \in X(t_*, x_*, u_*)$ alınsın ve sabitlensin. Önerme 2.5.2 gereği, $x_*(\cdot) : [t_*, \theta] \to \mathbb{R}^n$ çözümü L sabiti ile Lipschitz süreklidir. Burada $L > 0$ (2.5.11) ile tanımlanır. O halde $\forall\ t \in [t_*, \theta]$ için

$$\|x_*(t) - x_*\| = \|x_*(t) - x_*(t_*)\| \leq L(t - t_*) \tag{4.1.1}$$

olduğu görülür.

Ayrıca her sabitlenmiş $u_* \in P$ için $(t, x) \to F(t, x, u_*)$ küme değerli dönüşümü üstten yarı sürekli olduğundan $\forall \mu > 0$ için

$$\|x - x_*\| < \eta^\mu \qquad \text{ve} \qquad \|t - t_*\| < \eta^\mu \tag{4.1.2}$$

iken

$$F(t, x, u_*) \subset F(t_*, x_*, u_*) + \mu \cdot B \tag{4.1.3}$$

olacak biçimde $\eta^\mu = \eta^\mu(t_*, x_*, u_*) > 0$ vardır. Bu durumda (4.1.1) ve (4.1.2) eşitsizliklerinden $\|t - t_*\| < \eta^\mu$ iken

$$\begin{aligned} \|x_*(t) - x_*\| &\leq L(t - t_*) \\ &< L\,\eta^\mu \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan $\eta_*^\mu = \min\{\eta^\mu, \dfrac{\eta^\mu}{L}\}$ olarak alınırsa, $\forall t \in [t_*, t_* + \eta_*^\mu]$ iken

$$\begin{aligned} \|t - t_*\| &\leq \eta_*^\mu \\ &\leq \eta^\mu \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|x_*(t) - x_*\| &\leq L(t - t_*) \\ &\leq L\,\frac{\eta^\mu}{L} \\ &= \eta^\mu \end{aligned}$$

olur. O zaman (4.1.2) eşitsizliğinden ve (4.1.3) kapsamından $\forall t \in [t_*, t_* + \eta_*^\mu]$ iken

$$F(t, x_*(t), u_*) \subset F(t_*, x_*, u_*) + \mu \cdot B \tag{4.1.4}$$

olduğu elde edilir. $\dot{x}_*(\cdot) \in X(t_*, x_*, u_*)$ olduğundan $h.h.$ $t \in [t_*, \theta]$ için

$$\dot{x}_*(t) \in F(t, x_*(t), u_*)$$

olur. O halde (4.1.4) kapsamından $h.h.$ $t \in [t_*, t_* + \eta_*^\mu]$ iken

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &\in F(t_*, x_*, u_*) + \mu \cdot B \\ &\subset F(t_*, x_*, u_*) + \mu \cdot \overline{B} \end{aligned}$$

olacaktır. $\forall \tau_* \in [t_*, t_* + \eta_*^\mu]$ alınsın ve sabitlensin. $x_*(\cdot)$ mutlak sürekli olduğundan, $\forall \tau \in [t_*, \tau_*]$ için

$$x_*(\tau) = x_* + \int\limits_{t_*}^{\tau} \dot{x}_*(s)ds$$

olur. O zaman buradan, $h.h.$ $\tau \in [t_*, \tau_*]$ için

$$\dot{x}_*(\tau) \in F(t_*, x_*, u_*) + \mu \cdot \overline{B},$$

ve $F(t_*, x_*, u_*) + \mu \cdot \overline{B}$ konveks küme olduğundan, Önerme 2.1.2 gereği

$$\frac{1}{\tau_* - t_*} \int\limits_{t_*}^{\tau_*} \dot{x}_*(s)ds \in F(t_*, x_*, u_*) + \mu \cdot \overline{B}$$

olur. O halde

$$x_*(\tau_*) - x_* \in (\tau_* - t_*) \cdot F(t_*, x_*, u_*) + (\tau_* - t_*)\mu \cdot \overline{B}$$

ve

$$x_*(\tau_*) \in x_* + (\tau_* - t_*) \cdot F(t_*, x_*, u_*) + (\tau_* - t_*)\mu \cdot \overline{B}$$

olduğu elde edilir. $x_*(\cdot)$ ve $\tau_* \in [t_*, t_* + \eta_*^\mu]$ keyfi olduğundan, $\forall \tau \in [t_*, t_* + \eta_*^\mu]$ için

$$X(\tau; t_*, x_*, u_*) \subset x_* + (\tau - t_*) \cdot F(t_*, x_*, u_*) + (\tau - t_*)\mu \cdot \overline{B}$$

olur ve $\delta = (\tau - t_*)$ denilirse $\forall \delta \in [t_*, t_* + \eta_*^\mu]$ için

$$X(t_* + \delta; t_*, x_*, u_*) \subset x_* + \delta \cdot F(t_*, x_*, u_*) + \delta\mu \cdot \overline{B}$$

olduğu elde edilir. $\square$

Önerme 4.1.2. *$W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme, $(t_*, x_*) \in W$, $u_* \in P$ ve*

$$F(t_*, x_*, u_*) \subset D_*^+ W(t_*, x_*) \tag{4.1.5}$$

olsun. O zaman $\forall\ \mu \in (0,1)$ için $\delta \in [0, \xi_1^\mu(t_*, x_*, u_*)]$ iken

$$X\left(t_* + \delta; t_*, x_*, u_*\right) \subset W\left(t_* + \delta\right) + 2\mu\delta \cdot \overline{B}$$

olacak biçimde $\xi_1^\mu = \xi_1^\mu(t_*, x_*, u_*) > 0$ vardır.

Burada $\overline{B}$ kapalı birim yuvarı göstermektedir. $X\left(t_* + \delta; t_*, x_*, u_*\right)$ kümesi ise

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\in F(t, x(t), u_*) \\ x(t_*) &= x_* \end{aligned}$$

Cauchy probleminin $t_* + \delta$ anındaki erişim kümesidir.

Kanıt. İlk olarak $(t_*, x_*) \in W$ ve $u_* \in P$ olmak üzere $\forall \mu > 0$ ve $\forall\, \delta \in [0, \sigma^\mu(t_*, x_*, u_*)]$ için

$$x_* + \delta \cdot F(t_*, x_*, u_*) \subset W(t_* + \delta) + \mu\delta \cdot \overline{B}$$

olacak biçimde $\sigma^\mu(t_*, x_*, u_*) > 0$ sayısının var olduğu gösterilsin. Aksi varsayılsın. Yani, $i \to \infty$ iken $\delta_i \to 0^+$ olmak üzere,

$$x_* + \delta_i \cdot F(t_*, x_*, u_*) \not\subseteq W(t_* + \delta_i) + \mu_*\delta_i \cdot \overline{B}$$

olacak biçimde bir $\mu_* > 0$ sayısı ve $\{\delta_i\}_{i=1}^\infty$ dizisinin var olduğu kabul edilsin. O halde $\forall\, i$ için

$$x_* + \delta_i f_i \notin W(t_* + \delta_i) + \mu_*\delta_i \cdot \overline{B} \tag{4.1.6}$$

olacak biçimde bir $f_i \in F(t_*, x_*, u_*)$ olduğu görülür. $F(t_*, x_*, u_*)$ kompakt olduğundan, genelliği bozmadan $i \to \infty$ iken $f_i \to f_*$ olacak şekilde bir $f_* \in F(t_*, x_*, u_*)$ vardır . O zaman (4.1.5) koşulundan $f_* \in D_*^+ W(t_*, x_*)$ olur ve alt sağ türev kümesinin tanımından $\frac{\mu_*}{4} > 0$ ve $\forall\ \delta \in [0, \lambda^\mu(t_*, x_*, u_*)]$ için

$$x_* + \delta f_* \in W(t_* + \delta) + \frac{\mu_*}{4}\delta \cdot \overline{B} \tag{4.1.7}$$

olacak biçimde bir $\lambda_* = \lambda^\mu(t_*, x_*, u_*) > 0$ vardır.

Şimdi $i \to \infty$ iken $\delta_i \to 0^+$ ve $f_i \to f_*$ olduğundan , $\forall\, i > N_1$ için

$$\delta_i < \lambda_* \qquad ve \qquad \|f_i - f_*\| \leq \frac{\mu_*}{4} \tag{4.1.8}$$

olacak biçimde $N_1 > 0$ vardır. O zaman (4.1.7) içermesinden $i > N_1$ için

$$x_* + \delta_i f_* \in W(t_* + \delta_i) + \frac{\mu_*}{4}\delta_i \cdot \overline{B} \tag{4.1.9}$$

olduğu görülür. O zaman (4.1.8) eşitsizliğinden ve (4.1.9) içermesinden $\forall\, i > N_1$ için

$$\begin{aligned} x_* + \delta_i f_i &= x_* + \delta_i f_* + \delta_i\,(f_i - f_*) \\ &\in W(t_* + \delta_i) + \frac{\mu_*}{4}\delta_i \cdot \overline{B} + \frac{\mu_*}{4}\delta_i \cdot \overline{B} \\ &= W(t_* + \delta_i) + \frac{\mu_*}{2}\delta_i \cdot \overline{B} \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

olur. Bu durumda (4.1.10) gereği keyfi $i > N_1$ için

$$x_* + \delta_i f_i \in W(t_* + \delta_i) + \frac{\mu_*}{2}\delta_i \cdot \overline{B}$$

olduğu elde edilir. Bu ise (4.1.6) ile çelişir. O halde varsayımımız yanlıştır. Yani $(t_*, x_*) \in W$, $u_* \in P$ iken, $\mu > 0$ ve $\forall\, \delta \in [0, \sigma^\mu(t_*, x_*, u_*)]$ için

$$x_* + \delta \cdot F(t_*, x_*, u_*) \subset W(t_* + \delta) + \mu\delta \cdot \overline{B} \tag{4.1.11}$$

olacak biçimde $\sigma^\mu(t_*, x_*, u_*) > 0$ vardır. Önerme 4.1.1 gereği keyfi $\delta \in [0, \eta_*^\mu(t_*, x_*, u_*)]$ için

$$X\,(t_* + \delta; t_*, x_*, u_*) \subset W\,(t_* + \delta) + 2\mu\delta \cdot \overline{B} \tag{4.1.12}$$

olur. Bu durumda

$$\xi_1^\mu\,(t_*, x_*, u_*) = min\,\{\eta_*^\mu(t_*, x_*, u_*), \sigma^\mu(t_*, x_*, u_*)\}$$

alınırsa, (4.1.11) ve (4.1.12) kapsamlarından, $\forall\, \delta \in [0, \xi_1^\mu(t_*, x_*, u_*)]$ için

$$X\,(t_* + \delta; t_*, x_*, u_*) \subset W\,(t_* + \delta) + 2\mu\delta \cdot \overline{B}$$

olduğu elde edilir. □

Önerme 4.1.3. *$W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme, $(t_*, x_*) \in W$, $u_* \in P$, $\alpha > 0$ ve*

$$F(t_*, x_*, u_*) \subset D_*^+ W(t_*, x_*) + \alpha \cdot \overline{B} \tag{4.1.13}$$

olsun. O zaman $\forall\ \mu \in (0,1)$ için $\delta \in [0, \xi_2^\mu(t_*, x_*, u_*)]$ iken

$$X\,(t_* + \delta; t_*, x_*, u_*) \subset W\,(t_* + \delta) + (2\mu + \alpha)\,\delta \cdot \overline{B}$$

olacak biçimde $\xi_2^\mu(t_*, x_*, u_*) > 0$ vardır.

Kanıt. İlk olarak $(t_*, x_*) \in W$ ve $u_* \in P$ olmak üzere $\forall \mu > 0$ ve $\forall\, \delta \in [0, \sigma_1^\mu(t_*, x_*, u_*)]$ için

$$x_* + \delta \cdot F(t_*, x_*, u_*) \subset W(t_* + \delta) + (\mu + \alpha)\,\delta \cdot \overline{B}$$

olacak biçimde $\sigma_1^\mu(t_*, x_*, u_*) > 0$ sayısının var olduğu gösterilsin. Aksi varsayılsın. Yani, $i \to \infty$ iken $\delta_i \to 0^+$ olmak üzere,

$$x_* + \delta_i \cdot F(t_*, x_*, u_*) \not\subseteq W(t_* + \delta_i) + (\mu_* + \alpha)\,\delta_i \cdot \overline{B}$$

olacak biçimde bir $\mu_* > 0$ sayısı ve $\{\delta_i\}_{i=1}^\infty$ dizisinin var olduğu kabul edilsin. O halde $\forall\, i$ için

$$x_* + \delta_i f_i \notin W(t_* + \delta_i) + (\mu_* + \alpha)\,\delta_i \cdot \overline{B} \tag{4.1.14}$$

olacak biçimde bir $f_i \in F(t_*, x_*, u_*)$ olduğu görülür. $F(t_*, x_*, u_*)$ kompakt olduğundan, genelliği bozmadan $i \to \infty$ iken $f_i \to f_*$ olacak şekilde bir $f_* \in F(t_*, x_*, u_*)$ vardır . O zaman (4.1.13) koşulundan,

$$f_* = v_* + \alpha b \tag{4.1.15}$$

olacak biçimde $v_* \in D_*^+ W(t_*, x_*)$ ve $b \in \overline{B}$ vardır. Bu durumda alt sağ türev kümesinin tanımından $\frac{\mu_*}{4} > 0$ ve $\forall\ \delta \in [0, \lambda^\mu(t_*, x_*, u_*)]$ için

$$x_* + \delta v_* \in W(t_* + \delta) + \frac{\mu_*}{4}\delta \cdot \overline{B} \tag{4.1.16}$$

olacak biçimde bir $\lambda_* = \lambda^\mu(t_*, x_*, u_*)] > 0$ vardır. O zaman (4.1.15) ve (4.1.16) içermesinden

$\frac{\mu_*}{4} > 0$ ve $\forall\ \delta \in [0, \lambda_*]$ için

$$x_* + \delta f_* \in W(t_* + \delta) + \frac{\mu_*}{4}\delta\overline{B} + \alpha\delta \cdot \overline{B} \tag{4.1.17}$$

olur. Şimdi $i \to \infty$ iken $\delta_i \to 0^+$ ve $f_i \to f_*$ olduğundan , $\forall\ i > N_1$ için

$$\delta_i < \lambda_* \qquad ve \qquad \|f_i - f_*\| \leq \frac{\mu_*}{4} \tag{4.1.18}$$

olacak biçimde $N_1 > 0$ vardır. O zaman (4.1.17) gereği $i > N_1$ için

$$x_* + \delta_i f_* \in W(t_* + \delta_i) + \frac{\mu_*}{4}\delta_i \cdot \overline{B} + \alpha\delta_i \cdot \overline{B} \tag{4.1.19}$$

olduğu görülür. Şimdi

$$x_* + \delta_i f_i = x_* + \delta_i f_* + \delta_i\,(f_i - f_*) \tag{4.1.20}$$

olarak yazılsın. O zaman (4.1.18), (4.1.19) ve (4.1.20) eşitliğinden $\forall\ i > N_1$ için

$$\begin{aligned} x_* + \delta_i f_i &= x_* + \delta_i f_* + \delta_i\,(f_i - f_*) \\ &\in W(t_* + \delta_i) + \frac{\mu_*}{4}\delta_i \cdot \overline{B} + \alpha\delta_i \cdot \overline{B} + \frac{\mu_*}{4}\delta_i \cdot \overline{B} \\ &= W(t_* + \delta_i) + \frac{\mu_*}{2}\delta_i \cdot \overline{B} + \alpha\delta_i \cdot \overline{B} \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

olur. Bu durumda (4.1.20) ve (4.1.21) içermesinden $i > N_1$ için

$$x_* + \delta_i f_i \in W(t_* + \delta_i) + \frac{\mu_*}{2}\delta_i \cdot \overline{B} + \alpha\delta_i \cdot \overline{B} \tag{4.1.22}$$

elde edilir. Bu ise (4.1.14) ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır. Yani $(t_*, x_*) \in W$, $u_* \in P$ iken, $\mu > 0$ ve $\forall\,\delta \in [0, \sigma_1^\mu(t_*, x_*, u_*)]$ için

$$x_* + \delta \cdot F(t_*, x_*, u_*) \subset W(t_* + \delta) + (\mu + \alpha)\,\delta \cdot \overline{B} \tag{4.1.23}$$

olacak biçimde $\sigma_1^\mu(t_*, x_*, u_*) > 0$ vardır. Önerme 4.1.1 gereği keyfi $\delta \in [0, \eta_*^\mu(t_*, x_*, u_*)]$ için

$$X\,(t_* + \delta; t_*, x_*, u_*) \subset W\,(t_* + \delta) + 2\mu\delta \cdot \overline{B} \tag{4.1.24}$$

olur. Bu durumda

$$\xi_2^{\mu}\left(t_*, x_*, u_*\right) = min\left\{\eta_*^{\mu}\left(t_*, x_*, u_*\right), \sigma_1^{\mu}(t_*, x_*, u_*)\right\}$$

alınırsa, (4.1.23) ve (4.1.24) kapsamlarından, $\forall\, \delta \in [0, \xi_2^{\mu}(t_*, x_*, u_*)]$ için

$$X\left(t_* + \delta; t_*, x_*, u_*\right) \subset W\left(t_* + \delta\right) + \left(2\mu + \alpha\right)\delta \cdot \overline{B}$$

olduğu elde edilir. □

$W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme, $\varepsilon \geq 0$, $p(\cdot) : [0, \theta] \to (0, \infty)$ sürekli fonksiyon olsun. $t \in [0, \theta]$ için,

$$W^{\varepsilon p(\cdot)}(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : d\left(x, W(t)\right) \leq \varepsilon\, p(t)\} \tag{4.1.25}$$

$$W^{\varepsilon p(\cdot)} = grW^{\varepsilon p(\cdot)}(\cdot) = \left\{(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n : x \in W^{\varepsilon p(\cdot)}(t)\right\} \tag{4.1.26}$$

olsun.

Önerme 4.1.4. *$W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme $\varepsilon \geq 0$, $p(\cdot) : [0, \theta] \to (0, \infty)$ sürekli fonksiyon, $(t_*, x_*) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}$, $u_* \in P$ ve*

$$F(t_*, x_*, u_*) \subset D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t_*, x_*)$$

olsun. Bu durumda $\forall\ \mu \in (0, 1)$ için $x(\cdot) \in X\left(\, t_*, x_*, u_*\right)$, $t \in [t_*, t_* + \eta_1^{\mu}(t_*, x_*, u_*)]$ iken

$$d\left(x(t), W(t)\right) \leq \varepsilon p(t) + 2\mu(t - t_*)$$

olacak biçimde $\eta_1^{\mu}(t_*, x_*, u_*) > 0$ vardır.

Kanıt. $(t_*, x_*) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}$, $F(t_*, x_*, u_*) \subset D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t_*, x_*)$ olduğundan Önerme 4.1.2 gereği $\forall \mu > 0$ ve $\forall \delta \in [0, \eta_1^{\mu}(t_*, x_*, u_*)]$ için

$$\begin{aligned} X\left(t_* + \delta; t_*, x_*, u_*\right) &\subset W^{\varepsilon p(\cdot)}\left(t_* + \delta\right) + 2\mu\delta \cdot \overline{B} \\ &= W\left(t_* + \delta\right) + \varepsilon p(t_* + \delta) \cdot \overline{B} + 2\mu\delta \cdot \overline{B} \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\eta_1^{\mu}(t_*, x_*, u_*) > 0$ vardır. Bu durumda $\forall t \in [t_*, t_* + \eta_1^{\mu}(t_*, x_*, u_*)]$ için

$$X\left(t; t_*, x*, u_*\right) \subset W\left(t\right) + \left[\varepsilon p(t) + 2\mu(t - t_*)\right] \cdot \overline{B}$$

olur ve buradan $\forall\ x(\cdot) \in X\,(\ t_*, x_*, u_*)$ ve $\forall\ t \in [t_*, t_* + \eta_1^{\mu}(t_*, x_*, u_*)]$ için

$$d\,(x(t), W(t)) \leq \varepsilon p(t) + 2\mu(t - t_*)$$

elde edilir. □

Önerme 4.1.5. *$W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme, $\varepsilon \geq 0$, $p(\cdot) : [0, \theta] \to (0, \infty)$ sürekli fonksiyon, $(t_*, x_*) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}$, $u_* \in P$ ve*

$$F(t_*, x_*, u_*) \subset D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t_*, x_*) + \alpha \cdot \overline{B}$$

olsun. Bu durumda $\forall\ \mu \in (0, 1)$ için $\forall\ x(\cdot) \in X\,(\ t_*, x_*, u_*)$, $\forall$ $t \in [t_*, t_* + \eta_2^{\mu}(t_*, x_*, u_*)]$ iken

$$d\,(x(t), W(t)) \leq \varepsilon p(t) + (2\mu + \alpha)\,(t - t_*)$$

olacak biçimde $\eta_2^{\mu}(t_*, x_*, u_*) > 0$ vardır.

Kanıt. $(t_*, x_*) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}$, $F(t_*, x_*, u_*) \subset D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)} + \alpha \cdot \overline{B}$ olduğundan Önerme 4.1.3 gereği $\forall \mu > 0$ ve $\forall \delta \in [0, \eta_2^{\mu}(t_*, x_*, u_*)]$ için

$$\begin{aligned} X\,(t_* + \delta; t_*, x_*, u_*) &\subset W^{\varepsilon p(\cdot)}\,(t_* + \delta) + (2\mu + \alpha)\,\delta \cdot \overline{B} \\ &= W\,(t_* + \delta) + \varepsilon p(t_* + \delta) \cdot \overline{B} + (2\mu + \alpha)\,\delta \cdot \overline{B} \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\eta_2^{\mu}(t_*, x_*, u_*) > 0$ vardır. Bu durumda $\forall t \in [t_*, t_* + \eta_2^{\mu}(t_*, x_*, u_*)]$ için

$$X\,(t; t_*, x_*, u_*) \subset W\,(t) + [\varepsilon p(t) + 2\,(\mu + \alpha)\,(t - t_*)] \cdot \overline{B}$$

olur ve buradan $\forall\ x(\cdot) \in X\,(\ t_*, x_*, u_*)$ ve $\forall\ t \in [t_*, t_* + \eta_2^{\mu}(t_*, x_*, u_*)]$ için

$$d\,(x(t), W(t)) \leq \varepsilon p(t) + (2\mu + \alpha)\,(t - t_*)$$

elde edilir. □

Önerme 4.1.6. *$W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme, $p(\cdot) : [0, \theta] \to (0, \infty)$ sürekli fonksiyon, $\varepsilon > 0$ olsun. $\forall\ (t, x) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}$ için*

$$D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t, x) \neq \emptyset$$

ise $t \to W^{\varepsilon p(\cdot)}(t)$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı sürekli olur.

Burada $t \in [0,\theta]$ için $W^{\varepsilon p(\cdot)}(t)$ kümesi (4.1.25) ile tanımlanır, $D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t,x)$ ise $t \to W^{\varepsilon p(\cdot)}(t), t \in [0,\theta)$ küme değerli dönüşümünün (t,x) noktasında hesaplanmış alt sağ türev kümesidir.

Kanıt. Keyfi sabitlenmiş $t_* \in [0,\theta)$ için $t \to W^{\varepsilon p(\cdot)}(t)$ küme değerli dönüşümünün sağdan alttan yarı sürekli olduğu gösterilsin. Bunu göstermek için ise, Önerme 2.2.6 gereği, $\forall\, x_* \in W^{\varepsilon p(\cdot)}(t_*)$ ve $n \to \infty$ iken $t_n \to t_*^{+0}$ olacak şekilde $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için, $x_n \in W^{\varepsilon p(\cdot)}(t_n)$ olmak üzere $x_n \to x_*$ olacak şekildeki $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi bulunsun.
$(t_*, x_*) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}$ ve $D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t_*, x_*) \neq \emptyset$ olduğundan, bir $d_* \in D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t_*, x_*)$ vardır. Bu durumda alt sağ türev kümesi tanımından,

$$\lim_{t \to t_*^{+0}} \frac{x(t) - x_*}{t - t_*} = d_*$$

olacak biçimde bir $x(t) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}(t)$ vardır. O zaman buradan $\lim_{t \to t_*^{+0}} s(t - t_*) = 0$ olmak üzere

$$x(t) = x_* + d_*(t - t_*) + s(t - t_*)(t - t_*)$$

olur. $x(t_n) = x_n$ denilirse, $\forall\, n$ için $x_n \in W^{\varepsilon p(\cdot)}(t_n)$ olmak üzere

$$x_n = x_* + d_*(t_n - t_*) + s(t_n - t_*)(t_n - t_*)$$

olur ve $n \to \infty$ iken $x_n \to x_*$ olduğu bulunur. □

Önerme 4.1.7. *$W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme, $p(\cdot) : [0,\theta] \to (0,\infty)$ sürekli fonksiyon, $\varepsilon_* > 0$ olsun. $\forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ için $t \to W^{\varepsilon p(\cdot)}(t)$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı sürekli ise $t \to W(t)$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı sürekli olur.*

Kanıt. Aksi varsayılsın. $t \to W(t)$ küme değerli dönüşümü $t_* \in [0,\theta]$ noktasında sağdan alttan yarı sürekli olmasın. Tanım 2.2.3 gereği, $i \to \infty$ iken $\delta_i \to 0^+$ ve $t_i \in [t_*, t_* + \delta_i]$ olmak üzere

$$W(t_i) \bigcap B(\tilde{x}, \mu_*) = \emptyset \tag{4.1.27}$$

olacak biçimde $\mu_* > 0$ ve $\tilde{x} \in W(t_*)$ vardır. O zaman (4.1.27) eşitliğinden $t_i = t_* + \lambda_i$ denilirse $\lambda_i \leq \delta_i$ olduğundan, $i \to \infty$ iken $\lambda_i \to 0^+$ ve $\forall\, i = 1, 2, \dots$ için

$$W\left(t_* + \lambda_i\right) \bigcap B(\tilde{x}, \mu_*) = \emptyset \tag{4.1.28}$$

olur. $b = max\{p(t) : t \in [0, \theta]\}$ olsun. Açıktır ki $0 < b < +\infty$ olur. Genelliği bozmadan $\frac{\mu_*}{4b} < \varepsilon_*$ olduğu kabul edilsin. $t \to W^{\varepsilon p(\cdot)}(t)$ küme değerli dönüşümü $\forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ için sağdan alttan yarı sürekli olduğundan, $\frac{\mu_*}{4b} > 0$ için $t \to W^{\frac{\mu_*}{4b}p(\cdot)}(t)$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı sürekli olur. O zaman $\frac{\mu_*}{4b}$ ve $\tilde{x} \in W^{\frac{\mu_*}{4b}}(t_*)$ için $\forall\, \delta \in [t_*, t_* + \delta_*]$ olmak üzere,

$$W^{\frac{\mu_*}{4b}p(\cdot)}\left(t_* + \delta\right) \bigcap B(\tilde{x}, \frac{\mu_*}{4}) \neq \emptyset$$

yada

$$\left[W\left(t_* + \delta\right) + \frac{\mu_*}{4b} p(t_* + \delta) B\right] \bigcap B(\tilde{x}, \frac{\mu_*}{4}) \neq \emptyset \tag{4.1.29}$$

olacak biçimde $\delta_* > 0$ vardır. $i \to \infty$ iken $\lambda_i \to 0^+$ olduğundan $\forall\, i > i_*$ için $t_* + \lambda_i \in [t_*, t_* + \delta_*]$ olacak şekilde bir $i_* > 0$ vardır. Bu durumda (4.1.29) gereği $i > i_*$ için

$$\left[W\left(t_* + \lambda_i\right) + \frac{\mu_*}{4b} p(t_* + \lambda_i) B\right] \bigcap B(\tilde{x}, \frac{\mu_*}{4}) \neq \emptyset \tag{4.1.30}$$

olduğu görülür. O zaman (4.1.30) gereği

$$y_i \in W\left(t_* + \lambda_i\right) + \frac{\mu_*}{4b} p(t_* + \lambda_i) B \quad \text{ve} \quad y_i \in B(\tilde{x}, \frac{\mu_*}{4})$$

olacak biçimde bir y_i vardır. Bu durumda

$$\| y_i - \tilde{x} \| \leq \frac{\mu_*}{4} \quad \text{ve} \quad y_i = w_i + \frac{\mu_*}{4b} p(t_* + \lambda_i) b_i \tag{4.1.31}$$

olacak biçimde $w_i \in W\left(t_* + \lambda_i\right)$ ve $b_i \in B$ vardır. O zaman (4.1.31) ve $\frac{p(t_* + \lambda_i)}{b} \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \| w_i - \tilde{x} \| &= \| y_i - \tilde{x} - \frac{\mu_*}{4b} p(t_* + \lambda_i) b_i \| \\ &\leq \| y_i - \tilde{x} \| + \frac{\mu_*}{4} \\ &\leq \frac{\mu_*}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $w_i \in B(\tilde{x}, \frac{\mu_*}{2})$ olur. Ayrıca, $w_i \in W\left(t_* + \delta_i\right)$ olduğundan, $\forall$ $i \geq i_*$ için

$$W\left(t_* + \lambda_i\right) \bigcap B(\tilde{x}, \frac{\mu_*}{2}) \neq \emptyset \tag{4.1.32}$$

olduğu görülür. Bu ise (4.1.28) ile çelişir. O zaman kabul yanlış olup $t \to W(t)$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı sürekli olur. □

Önerme 4.1.8. $(t_*, x_*) \in [0, \theta) \times \mathbb{R}^n$, $\mu \in (0, 1)$, $p(\cdot) : [0, \theta] \to (0, \infty)$ *sürekli fonksiyon,* $a = min\left\{p(t) : t \in [0, \theta]\right\}$ *ve*

$$\sigma(x_*, \mu) = \frac{1}{c} ln\left(1 + \frac{\mu a}{3(1+ \parallel x_* \parallel)}\right) \tag{4.1.33}$$

olsun. O zaman $\forall\ u \in P$, $\forall\ x(\cdot) \in X(t_*, x_*, u)$ *ve* $\forall\ t \in [t_*, t_* + \sigma(x_*, \mu)]$ *için*

$$\parallel x(t) - x_* \parallel \leq \frac{1}{3} \mu a$$

olur. (4.1.33) *eşitsizliğinde alınan c sabiti* $1.5.C$ *koşulunda belirtilen sabittir.*

Kanıt. Keyfi sabitlenmiş $u \in P$, $x(\cdot) \in X(t_*, x_*, u)$ için $t \in [t_*, \theta]$ iken

$$x(t) = x_* + \int_{t_*}^{t} \dot{x}(\tau) d\tau$$

olur. O halde buradan

$$\parallel x(t) - x_* \parallel \leq \int_{t_*}^{t} \parallel \dot{x}(\tau) \parallel d\tau \tag{4.1.34}$$

eşitsizliği sağlanır. Önerme 2.5.1 gereği

$$\parallel x(t) \parallel \leq (1+ \parallel x_* \parallel) e^{c(t - t_*)} - 1 \tag{4.1.35}$$

olur. Ayrıca $h.h.$ $\tau \in [t_*, \theta]$ için $\dot{x}(t) \in F\left(\tau, x(\tau), u\right)$ olduğundan, $1.5.C$ koşulundan, (4.1.34) ve (4.1.35) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned} \parallel x(t) - x_* \parallel &\leq \int_{t_*}^{t} c(1+ \parallel x(\tau) \parallel) d\tau \\ &\leq \int_{t_*}^{t} c(1+ \parallel x_* \parallel) e^{c(\tau - t_*)} d\tau \\ &= (1+ \parallel x_* \parallel)\left[e^{c(t - t_*)} - 1\right] \end{aligned} \tag{4.1.36}$$

olduğu elde edilir. $\sigma(x_*, \mu)$ (4.1.33) ile tanımlı olduğundan ve (4.1.36) eşitsizliğinden $\forall\ t \in [t_*, t_* + \sigma(x_*, \mu)]$ için

$$\begin{aligned} \| x(t) - x_* \| &\leq (1+ \| x_* \|) \left[e^{c(t-t_*)} - 1\right] \\ &\leq (1+ \| x_* \|)\, e^{c\left(\frac{1}{c} ln(1+\frac{\mu a}{3(1+ \| x_* \|)})\right)} - 1 \\ &= \frac{1}{3}\mu a \end{aligned}$$

elde edilir.

□

Önerme 4.1.9. *$W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme, $(t_*, x_*) \in W$, $\mu \in (0, 1)$, $t \to W(t)$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı sürekli, $p(\cdot) : [0, \theta] \to (0, \infty)$ sürekli fonksiyon ve $a = min\,\{p(t) : t \in [0, \theta]\}$ olsun. O zaman $\forall\ u \in P$, $x(\cdot) \in X(t_*, x_*, u)$ ve $t \in [t_*, t_* + \gamma(t_*, x_*, \mu)]$ için*

$$d\,(x(t), W(t)) \leq \frac{2}{3}\mu p(t)$$

olacak biçimde $\gamma(t_*, x_*, \mu) > 0$ vardır.

Kanıt. Önerme 4.1.8 gereği, $\sigma(x_*, \mu) > 0$ (4.1.33) ile tanımlanmak üzere, $\forall\ u \in P$, $x(\cdot) \in X(t_*, x_*, u)$ ve $t \in [t_*, t_* + \sigma(x_*, \mu)]$ için

$$\| x(t) - x_* \| \leq \frac{1}{3}\mu a \tag{4.1.37}$$

olur. Ayrıca $t \to W(t)$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı sürekli, $x_* \in W(t_*)$ olduğundan $\frac{1}{3}\mu a$ için, $\forall\ t \in [t_*, t_* + \lambda^{\mu}(t_*, x_*)]$ olmak üzere,

$$W\,(t) \bigcap B(x_*, \frac{1}{3}\mu a) \neq \emptyset$$

olacak şekilde $\lambda^{\mu}(t_*, x_*) > 0$ sayısı vardır. $t \in [t_*, t_* + \lambda^{\mu}(t_*, x_*)]$ iken

$$w_t \in W\,(t) \bigcap B(x_*, \frac{1}{3}\mu a)$$

olsun. O halde $w_t \in W\,(t)$ ve

$$\| w_t - x_* \| \leq \frac{1}{3}\mu a \tag{4.1.38}$$

olur.

$$\gamma(t_*, x_*, \mu) = min\left\{\sigma(x_*, \mu), \lambda^{\mu}(t_*, x_*)\right\}$$

olarak alınsın. Bu durumda $\forall\ t \in [t_*, t_* + \gamma(t_*, x_*, \mu)]$ için (4.1.37) ve (4.1.38) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \| \ x(t) - w_t \ \| &\leq \| \ x(t) - x_* \ \| + \| \ x_* - w_t \ \| \\ &\leq \frac{1}{3}\mu a + \frac{1}{3}\mu a \\ &= \frac{2}{3}\mu a \\ &\leq \frac{2}{3}\mu p(t) \end{aligned} \tag{4.1.39}$$

olur. O zaman

$$d\left(x(t), W(t)\right) = \inf_{w \in W(t)} \| \ x(t) - w \ \|,$$

$\forall\ t \in [t_*, t_* + \gamma(t_*, x_*, \mu)]$ için, $\omega_t \in W(t)$ olduğundan $\forall\ t \in [t_*, t_* + \gamma(t_*, x_*, \mu)]$ için,

$$d\left(x(t), W(t)\right) \leq \frac{2}{3}\mu p(t)$$

olduğu elde edilir. □

4.2 Kapalı Kümelerin Pozisyonlu Zayıf İnvaryantlığı İçin Yeter Koşul

Şimdi kapalı $W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesinin (2.5.1) sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant olmasının tanımı verilsin.

Tanım 4.2.1. *[28, 29] $W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme olsun. Eğer $\forall (t_0, x_0) \in W$ olmak üzere $\forall x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot)\right)$ ve $\forall t \in [t_0, \theta]$ için $(t, x(t)) \in W$ olacak biçimde $(U_*, \delta_*(\cdot)) \in \mathcal{U}_{pos} \times \Delta(0, 1)$ süper stratejisi varsa, W kümesine (2.5.1) kontrol sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant küme denir.*

$W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesinin (2.5.1) sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant olması için bir yeter koşul verilsin.

$\varepsilon > 0$, sürekli $p(\cdot) : [0, \theta] \to (0, \infty)$ fonksiyonu ve kapalı $W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesi için

$$W^{\varepsilon p(\cdot)}(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, W(t)) \leq \varepsilon p(t)\}$$

olsun. O halde her sabitlenmiş $\varepsilon > 0$ için $t \to W^{\varepsilon p(\cdot)}(t)$ yeni bir küme değerli dönüşüm olur. $W^{\varepsilon p(\cdot)} = grW^{\varepsilon p(\cdot)}(\cdot)$ olarak alınsın.

Teorem 4.2.1. *$W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme $\varepsilon_* > 0$ ve $p(\cdot) : [0, \theta] \to (0, \infty)$ sürekli fonksiyon olsun. Keyfi $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ ve $(t_*, x_*) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}$ için*

$$F(t_*, x_*, u_*) \subset D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t_*, x_*) \tag{4.2.1}$$

olacak şekilde $u_* \in P$ varsa, W kümesi (2.5.1) kontrol sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant kümedir.

Kanıt. $\forall\ (t, x) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ alınsın. $d\,(x, W(t)) = \varepsilon(t, x)\ p(t)$ olacak şekilde $\varepsilon(t, x) \geq 0$ vardır. Açıktır ki, eğer $(t, x) \notin W$ ise $\varepsilon(t, x) > 0$ olur.

$$P_*(t, x) = \{u_* \in P : F(t, x, u_*) \subset D_*^+ W^{\varepsilon(t,x)p(\cdot)}(t, x)\}$$

kümesi tanımlansın ve $a = min\,\{p(t) : t \in [0, \theta]\} > 0$ alınsın.
Bu durumda $\forall\ (t, x) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ için süper strateji aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$U_*(t, x) = \begin{cases} u_* \in P_*(t, x) & , \varepsilon(t, x) \leq \varepsilon_* \\ u \in P & , \varepsilon(t, x) > \varepsilon_* \end{cases} \tag{4.2.2}$$

ve

$$\delta_*(\mu, t, x, u) = \begin{cases} min\{\eta_1^\mu(t, x, u), \mu, \theta - t\} & , \varepsilon(t, x) \leq \varepsilon_* \text{ ve } u = U_*(t, x) \\ min\{\mu, \theta - t\} & , \varepsilon(t, x) > \varepsilon_* \text{ veya } u \neq U_*(t, x) \end{cases} \tag{4.2.3}$$

alınsın. Burada kullanılan $\eta_1^\mu(t, x, u)$ sayısı Önerme 4.1.4 de bulunan sayıdır. $d\,(x_0, W(t_0)) = \varepsilon_0 p(t_0)$ olacak biçimde $(t_0, x_0) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ alınıp sabitlensin ve

$$0 \leq \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon_*}{2}$$

olduğu kabul edilsin. O halde $(t_0, x_0) \in W^{\varepsilon_0 p(\cdot)}$ olur.

Şimdi $(U_*, \delta_*(\cdot))$ süper stratejisinin, $(t_0, x_0) \in W^{\varepsilon_0 p(\cdot)}$ başlangıç noktasında ürettiği keyfi $x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot)\right)$ yörüngeleri için $\forall t \in [t_0, \theta]$ iken $(t, x(t)) \in W^{\varepsilon_0 p(\cdot)}$ olduğu gösterilsin.

Keyfi sabitlenmiş $x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot)\right)$ yörüngesi alındığında, $k \to \infty$ iken,
$\mu_k \to 0$ olan $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0,1)$ sayı dizisi ve $x_k(\cdot) \to x(\cdot)$ düzgün yakınsayan $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{Z}_{\mu_k}\left(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot)\right)$ adımlı yörüngeler dizisi vardır. $\mathcal{Z}_{\mu_k}\left(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot)\right)$ adımlı yörüngeler kümesinin tanımından, her k için $x_k(\cdot) \in \mathcal{Y}_{\mu_k}\left(t_0, x_0, U_*, h_k(\cdot)\right)$ olacak biçimde $h_k(\cdot) \in \Delta_{\mu_k}(\delta_*(\cdot))$ fonksiyonu vardır. $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi tanımlanırken, U_* pozisyonlu stratejisi ve $h_k(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, \theta]$ aralığının bir $L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ iyi sıralı kümesini doğurur (bkz. Önerme 2.6.3).

Genelliği bozmaksızın keyfi $k = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$\mu_k < a\frac{\varepsilon_* - \varepsilon_0}{2\theta}$$

olsun. Herhangi bir k seçilsin ve sabitlensin. $x_k(\cdot) \in \mathcal{Y}_{\mu_k}\left(t_0, x_0, U_*, h_k(\cdot)\right)$ ve $\forall$ $t_\alpha^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ için

$$d\left(x_k(t_\alpha^k), W(t_\alpha^k)\right) \le \varepsilon_0 p(t_\alpha^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\frac{p(t_\alpha^k)}{a}(t_\alpha^k - t_0) \qquad (4.2.4)$$

olduğu gösterilsin. $\forall$ k için $x_k(t_0) = x_0$ olduğundan, $(t_0, x_k(t_0)) \in W^{\varepsilon_0 p(\cdot)}$ ve $d\left(x_k(t_0), W(t_0)\right) = \varepsilon_0 p(t_0)$ olur. $\varepsilon_0 \in [0, \frac{\varepsilon_*}{2})$ olduğundan, (4.2.2) ile verilen $U_*(\cdot)$ pozisyonlu stratejinin tanımmından

$$F(t_0, x_k(t_0), U_*(t_0, x_k(t_0))) \subset D_*^+ W^{\varepsilon_0 p(\cdot)}(t_0, x_k(t_0))$$

olur. Adımlı yörüngenin tanımından, $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi, $[t_0, t_0 + h_k(t_0, x_0, U_*(t_0, x_0))]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), U_*(t_0, x_0)\right), \qquad x_k(t_0) = x_0$$

Cauchy probleminin çözümü olarak alınır. O zaman Önerme 4.1.4 gereği $\forall$ $t \in [t_0, t_0 + \eta_1^{\mu_k}(t_0, x_0, U_*(t_0, x_0))]$ için

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \le \varepsilon_0 p(t) + 2\mu_k(t - t_0) \qquad (4.2.5)$$

elde edilir.

$$t_1^k = t_0 + h_k\left(t_0, x_0, U_*(t_0, x_0)\right)$$

olarak alındığından, (4.2.3) ile verilen $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından ve $h_k(\cdot)$ fonksiyonunun seçiminden $(h_k(t,x,u) \leq \delta_*(\mu_k, t, x, u))$

$$\begin{aligned} t_1^k &= t_0 + h_k\left(t_0, x_0, U_*(t_0, x_0)\right) \\ &\leq t_0 + \delta_*\left(\mu_k, t_0, x_0, U_*(t_0, x_0)\right) \\ &\leq t_0 + \eta_1^{\mu_k}\left(t_0, x_0, U_*(t_0, x_0)\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda son eşitsizlikten ve (4.2.5) eşitsizliğinden

$$d\left(x_k(t_1^k), W(t_1^k)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_1^k) + 2\mu_k(t_1^k - t_0) \tag{4.2.6}$$

olduğu görülür. $\dfrac{p(t)}{a} \geq 1$ olduğundan ve (4.2.6) eşitsizliğinden

$$d\left(x_k(t_1^k), W(t_1^k)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_1^k) + 2\mu_k \frac{p(t_1^k)}{a}(t_1^k - t_0) \tag{4.2.7}$$

olur ve $\alpha = 1$ için (4.2.4) eşitsizliği sağlanır.

Şimdi (4.2.4) eşitsizliğinin $\alpha = 2$ için sağlandığı gösterilsin.

$x_k(t_1^k) = x_1^k$ denilirse

$$d\left(x_1^k, W(t_1^k)\right) = \varepsilon_1 p(t_1^k)$$

olacak biçimde $\varepsilon_1 \geq 0$ vardır. O zaman (4.2.7) eşitsizliğinden ve $\mu_k < a\dfrac{\varepsilon_* - \varepsilon_0}{2\theta}$ olduğundan

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0 + \frac{2}{a}\mu_k(t_1^k - t_0) < \varepsilon_* \tag{4.2.8}$$

olur. Bu durumda (4.2.2) ile verilen U_* pozisyonlu stratejinin tanımından, $\left(t_1^k, x_1^k\right) \in W^{\varepsilon_1 p(\cdot)}$ için

$$F\left(t_1^k, x_1^k, U_*(t_1^k, x_1^k)\right) \subset D_*^+ W^{\varepsilon_1 p(\cdot)}(t_1^k, x_1^k)$$

olduğu görülür. Adımlı yörüngenin tanımından, $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi, $\left[t_1^{(k)}, t_1^{(k)} + h_k\left(t_1^{(k)}, x_k(t_1^{(k)}), U_*(t_1^{(k)}, x_k(t_1^{(k)}))\right)\right]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), U_*(t_1^{(k)}, x_k(t_1^{(k)}))\right), \qquad x_k(t_1^{(k)}) = x_1^k$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır ve Önerme 4.1.2 gereği $\forall\ t \in \left[t_1^k, t_1^k + \eta_1^{\mu_k}(t_1^k, x_1^k, U_*(t_1^k, x_1^k))\right]$ için

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \leq \varepsilon_1 p(t) + 2\mu_k(t - t_1^k) \tag{4.2.9}$$

olur.

$$t_2^k = t_1^k + h_k\left(t_1^k, x_1^k, U_*(t_1^k, x_1^k)\right)$$

olarak alındığından ve (4.2.3) ile verilen $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından, $t_2^k \leq \eta_1^{\mu_k}\left(t_1^k, x_1^k, U_*(t_1^k, x_1^k)\right)$ olduğu görülür. Bu durumda buradan ve (4.2.9) eşitsizliğinden

$$d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \leq \varepsilon_1 p(t_2^k) + 2\mu_k(t_2^k - t_1^k)$$

elde edilir. O zaman buradan, $\dfrac{p(t)}{a} \geq 1$ olduğundan ve (4.2.8) eşitsizliğinden

$$d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_2^k) + 2\mu_k \frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0)$$

olur ve $\alpha = 2$ için (4.2.4) eşitsizliği sağlanır.

Şimdi, $\forall t_\nu^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ alınsın. ν t_ν^k'ye karşılık gelen order sayısı olmak üzere $x_k(\cdot)$ fonksiyonunun tüm $\lambda < \nu$ için

$$d\left(x_k(t_\lambda^k), W(t_\lambda^k)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_\lambda^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\lambda^k)}{a}(t_\lambda^k - t_0) \tag{4.2.10}$$

eşitsizliğini sağladığı kabul edilsin. O zaman $t = t_\nu^k$ için (4.2.4) eşitsizliğinin sağlandığı gösterilsin. t_ν^k için iki durum sözkonusudur.

I. t_ν^k'nın öncülü olan $t_\sigma^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ sayısı vardır. Bu durumda $\left(t_\sigma^k, t_\nu^k\right) \cap L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\} = \emptyset$ olur. $L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ kümesinin tanımından

$$t_\nu^k = t_\sigma^k + h_k\left(t_\sigma^k, x_k\left(t_\sigma^k\right), U_*\left(t_\sigma^k, x_k\left(t_\sigma^k\right)\right)\right)$$

olduğu görülür ve kabulden (4.2.10) gereği

$$d\left(x_k(t_\sigma^k), W(t_\sigma^k)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_\sigma^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\sigma^k)}{a}(t_\sigma^k - t_0) \tag{4.2.11}$$

olur. $x_k(t_\sigma^k) = x_\sigma^k$ denilsin. Bu durumda

$$d\left(x_\sigma^k, W(t_\sigma^k)\right) = \varepsilon_\sigma p(t_\sigma^k)$$

olacak biçimde $\varepsilon_\sigma \geq 0$ vardır. O zaman (4.2.11) eşitsizliğinden ve $\mu_k < a\dfrac{\varepsilon_* - \varepsilon_0}{2\theta}$ olduğundan

$$\varepsilon_\sigma \leq \varepsilon_0 + \frac{2}{a}\mu_k(t_\sigma^k - t_0) < \varepsilon_* \qquad (4.2.12)$$

olur. Bu durumda (4.2.2) ile verilen U_* pozisyonlu stratejinin tanımından, $\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) \in W^{\varepsilon_\sigma p(\cdot)}$ için

$$F\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_*(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right) \subset D_*^+ W^{\varepsilon_\sigma p(\cdot)}(t_\sigma^k, x_\sigma^k)$$

olduğu elde edilir. Adımlı yörüngenin tanımından, $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi, $\left[t_\sigma^{(k)}, t_\sigma^{(k)} + h_k\left(t_\sigma^{(k)}, x_\sigma^{(k)}, U_*(t_\sigma^{(k)}, x_\sigma(k))\right)\right]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), U_*(t_\sigma^{(k)}, x_\sigma^{(k)})\right), \qquad x_k(t_\sigma^{(k)}) = x_\sigma^{(k)}$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. O zaman Önerme 4.1.2 gereği $\forall\ t \in \left[t_\sigma^k, t_\sigma^k + \eta_1^{\mu_k}(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_*(t_\sigma^k, x_\sigma^k))\right]$ için

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \leq \varepsilon_\sigma p(t) + 2\mu_k(t - t_\sigma^k) \qquad (4.2.13)$$

olur.

$$t_\nu^k = t_\sigma^k + h_k\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_*(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right)$$

olarak tanımlı olduğundan $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından ($h_k(t, x, u) \leq \delta_*(\mu_k, t, x, u)$)

$$\begin{aligned} t_\nu^k &= t_\sigma^k + h_k\left(t_\sigma^k, x_k\left(t_\sigma^k\right), U_*\left(t_\sigma^k, x_k\left(t_\sigma^k\right)\right)\right) \\ &\leq t_\sigma^k + \delta_*\left(\mu_k, t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k), U_*(t_\sigma, x_0)\right) \\ &\leq t_\sigma^k + \eta_1^{\mu_k}\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_*(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (4.2.13) eşitsizliğinden

$$d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq \varepsilon_\sigma p(t_\nu^k) + 2\mu_k(t_\nu^k - t_\sigma^k) \qquad (4.2.14)$$

olduğu görülür. $\dfrac{p(t)}{a} \geq 1$ olduğundan ve (4.2.14) eşitsizliğinden

$$d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq \varepsilon_\sigma p(t_\nu^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\nu^k)}{a}\left(t_\nu^k - t_0\right) \qquad (4.2.15)$$

olur. O zaman (4.2.12) ve (4.2.15) eşitsizliklerinden

$$d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_\nu^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\nu^k)}{a}\left(t_\nu^k - t_0\right) \qquad (4.2.16)$$

olduğu elde edilir.

II. ν order sayısının öncülü olmasın. Yani t_ν^k noktası iyi sıralı $L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ kümesinin yığılma noktası olsun. Bu durumda $t_{\lambda_1}^k < t_{\lambda_2}^k < \ldots < t_{\lambda_i}^k < \ldots$, $\forall i$ için $t_{\lambda_i}^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ olmak üzere, $\lim\limits_{i\to\infty} t_{\lambda_i}^k = t_\nu^k - 0$ olacak biçimde $\left\{t_{\lambda_i}^k\right\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi vardır. Varsayımdan dolayı $\forall$ i için

$$d\left(x_k(t_{\lambda_i}^k), W(t_{\lambda_i}^k)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_{\lambda_i}^k) + 2\mu_k \frac{p(t_{\lambda_i}^k)}{a}(t_{\lambda_i}^k - t_0) \qquad (4.2.17)$$

olur. Adımlı yörüngenin tanımlanışından $\lim_{i\to\infty} x_k(t_{\lambda_i}^k) = x_k(t_\nu^k)$ olur. $p(\cdot) : [0, \theta] \to (0, \infty)$ sürekli fonksiyon, $W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme olduğundan ve (4.2.17) eşitsizliğinden

$$d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_\nu^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0) \qquad (4.2.18)$$

olduğu elde edilir.

Böylece (4.2.4) eşitsizliğinin doğru olduğu kanıtlandı. Şimdi $\forall \in [t_0, \theta]$ için

$$d\left(x(t), W(t)\right) \leq \varepsilon_0 p(t)$$

olduğu gösterilsin.

Keyfi $t_* \in [t_0, \theta]$ alınsın ve sabitlensin. $\forall\, t_\nu^k, t_{\nu+1}^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ için, $0 < t_{\nu+1}^k - t_\nu^k \leq \mu_k$ ve $k \to \infty$ iken $\mu_k \to 0^+$ olduğundan, her k için

$$|t_{n(k)}^{(k)} - t_*| \leq \mu_k$$

olacak biçimde $t_{n(k)}^{(k)} \in L\{[t_0,\theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\}$ vardır. O halde $k \to \infty$ iken $t_{n(k)}^{(k)} \to t_*$ olur. Diger taraftan, (4.2.18) eşitsizliğinden, $\forall\ k$ için

$$d\left(x_k(t_{n(k)}^{(k)}), W(t_{n(k)}^{(k)})\right) \leq \varepsilon_0 p(t_{n(k)}^{(k)}) + 2\mu_k p(t_{n(k)}^{(k)})(t_{n(k)}^{(k)} - t_0) \qquad (4.2.19)$$

olur. $k \to \infty$ iken $t_{n(k)}^{(k)} \to t_*$, $x_k(\cdot) \to x(\cdot)$, $p\left(t_{n(k)}^{(k)}\right) \to p(t_*)$, $\mu_k \to 0^+$, $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme olduğundan ve (4.2.19) eşitsizliğinden

$$d(x(t_*), W(t_*)) \leq \varepsilon_0 p(t_*) \qquad (4.2.20)$$

olduğu bulunur. $t_* \in [t_0,\theta]$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, (4.2.20) eşitsizliğinden $t \in [t_0,\theta]$ için,

$$d(x(t), W(t)) \leq \varepsilon_0 p(t) \qquad (4.2.21)$$

olduğu görülür. $x(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ keyfi olduğundan, (4.2.21) eşitsizliği keyfi $x(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ için doğru olur.

$\varepsilon_0 > 0$ sayısı $d(x(t_0), W(t_0)) = \varepsilon_0 p(t_0)$ koşulundan seçilmektedir. Eğer $(t_0, x_0) \in W$ ise, o zaman $d(x(t_0), W(t_0)) = 0$ ve $\varepsilon_0 = 0$ olur. O halde (4.2.21) eşitsizliğinden, $\forall\ x(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ ve $t \in [t_0,\theta]$ için,

$$d(x(t), W(t)) = 0$$

olur. Bu ise $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesinin (2.5.1) sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant olması demektir.

$\square$

Not Teorem 4.2.1 de $\forall\ t \in [0,\theta]$ için $p(t) = 1$ olarak alınırsa, [29] da verilen Teorem 6.1 elde edilir.

Kanıtlanan teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1. *Teorem 4.2.1 in koşulları sağlansın,* $(t_0, x_0) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$, $d(x_0, W(t_0)) = \varepsilon_0 p(t_0)$, $\varepsilon_0 \in [0, \frac{\varepsilon_*}{2})$ *olarak alınsın.* $(U_*, \delta_*(\cdot))$ *süper stratejisi*

(4.2.2) *ve* (4.2.3) *ile tanımlanmış olsun. Bu durumda* $\forall\ x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot)\right)$ *ve* $t \in [t_0, \theta]$ *için,*

$$d\left(x(t), W(t)\right) \leq \varepsilon_0 p(t)$$

olur.

4.3 Yeter Koşulun Stabilliği

Bu bölümde, Teorem 4.2.1 de verilen (4.2.1) koşulunun belli bir hata ile sağlandığı durumda, pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliğinin nasıl değişeceği konusu ele alınmıştır.

Şimdi Teorem 4.2.1 de verilen (4.2.1) koşulunun küçük bir hata ile sağlandığında, pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliğinin cok az bozulacağını ifade eden teorem verilsin.

Teorem 4.3.1. $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ *kapalı küme,* $p(\cdot) : [0,\theta] :\longrightarrow (0,\infty)$ *sürekli fonksiyon* $\varepsilon_* > 0$ *ve* $\alpha < \frac{a}{2\,\theta}\,\varepsilon_*$ *olacak şekilde* $\alpha > 0$ *sabit sayısı alınsın.* $\forall\,\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ *ve* $\forall\,(t_*, x_*) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}$ *için*

$$F(t_*, x_*, u_*) \subset D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t_*, x_*) + \alpha \overline{B} \qquad (4.3.1)$$

olacak şekilde $u_* \in P$ *olsun. O zaman* $\forall\,(t_0, x_0) \in W$, $\forall\,x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right)$ *ve* $\forall\,t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$d\left(x(t), W(t)\right) \leq \alpha \frac{p(t)}{a}\big(t - t_0\big) \qquad (4.3.2)$$

olacak biçimde $\left(U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right) \in \mathcal{U}_{pos} \times \Delta(0,1)$ *süper stratejisi vardır.*
Burada $a = min\left\{p(t) : t \in [0,\theta]\right\} > 0$ *olarak tanımlıdır.*

Kanıt. $\forall\ (t,x) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ alınsın. $d\left(x, W(t)\right) = \varepsilon(t,x)\ p(t)$ olacak şekilde $\varepsilon(t,x) \geq 0$ vardır. Açıktır ki, eğer $(t,x) \notin W$ ise $\varepsilon(t,x) > 0$, $(t,x) \in W$ ise $\varepsilon(t,x) = 0$ olur.

$$P_\alpha(t,x) = \{u_* \in P : F(t,x,u_*) \subset D_*^+ W^{\varepsilon(t,x)p(\cdot)}(t,x) + \alpha \overline{B}\}$$

kümesi tanımlansın.

Bu durumda $\forall\ (t,x) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ için süper strateji aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$U_\alpha(t,x) = \begin{cases} u_* \in P_\alpha(t,x) & ,\varepsilon(t,x) \leq \varepsilon_* \\ u \in P & ,\varepsilon(t,x) > \varepsilon_* \end{cases} \tag{4.3.3}$$

ve

$$\delta_\alpha(\mu,t,x,u) = \begin{cases} min\{\eta_2^\mu(t,x,u),\mu,\theta-t\} & ,\varepsilon(t,x) \leq \varepsilon_* \text{ ve } u = U_\alpha(t,x) \\ min\{\mu,\theta-t\} & ,\varepsilon(t,x) > \varepsilon_* \text{ veya } u \neq U_\alpha(t,x) \end{cases} \tag{4.3.4}$$

olsun. Burada kullanılan $\eta_2^\mu(t,x,u)$ sayısı Önerme 4.1.5 de bulunan sayıdır.

$d\,(x_0, W(t_0)) = \varepsilon_0 p(t_0)$ olacak biçimde $(t_0,x_0) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ alınıp sabitlensin ve

$$0 \leq \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon_*}{2}$$

olduğu kabul edilsin. O halde $(t_0,x_0) \in W^{\varepsilon_0 p(\cdot)}$ olur.

Şimdi $(U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ süper stratejisinin, $(t_0,x_0) \in W^{\varepsilon_0 p(\cdot)}$ başlangıç noktasında ürettiği keyfi $x(\cdot) \in X\,(t_0,x_0,U_\alpha,\delta_\alpha(\cdot))$ yörüngeleri için $\forall t \in [t_0,\theta]$ iken

$$d\,(x(t), W(t)) \leq \varepsilon_0 p(t) + \alpha\frac{p(t)}{a}(t-t_0)$$

olduğu gösterilsin.

Keyfi sabitlenmiş $x(\cdot) \in X\,(t_0,x_0,U_\alpha,\delta_\alpha(\cdot))$ yörüngesi alındığında, $k \to \infty$ iken, $\mu_k \to 0$ olan $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty \subset (0,1)$ sayı dizisi ve $x_k(\cdot) \to x(\cdot)$ düzgün yakınsayan $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{Z}_{\mu_k}\,(t_0,x_0,U_\alpha,\delta_\alpha(\cdot))$ adımlı yörüngeler dizisi vardır. $\mathcal{Z}_{\mu_k}\,(t_0,x_0,U_\alpha,\delta_\alpha(\cdot))$ adımlı yörüngeler kümesinin tanımından, $\forall\ k$ için $x_k(\cdot) \in \mathcal{Y}_{\mu_k}\,(t_0,x_0,U_\alpha,h_k(\cdot))$ olacak biçimde $h_k(\cdot) \in \Delta_{\mu_k}(\delta_\alpha(\cdot))$ fonksiyonu vardır. $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi tanımlanırken , U_α pozisyonlu strateji ve $h_k(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0,\theta]$ aralığının bir $L\,\{[t_0,\theta]; x_k\,(\cdot)\,, U_\alpha, h_k(\cdot)\}$ iyi sıralı kümesini doğurur (bkz. Önerme 2.6.3).

$$\alpha < \frac{a}{2\,\theta}\varepsilon_*, \qquad \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon_*}{2}$$

olduğundan

$$\varepsilon_* - \varepsilon_0 > \frac{\varepsilon_*}{2} \quad \text{ve} \quad \alpha < \frac{a}{\theta}\frac{\varepsilon_*}{2} < \frac{a}{\theta}(\varepsilon_* - \varepsilon_0)$$

olduğu bulunur. Son eşitsizlikten ise

$$a(\varepsilon_* - \varepsilon_0) - \alpha\theta > 0$$

olarak elde edilir. Genelliği bozmaksızın keyfi $k = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$\mu_k < \frac{a\left(\varepsilon_* - \varepsilon_0\right) - \alpha\theta}{2\theta}$$

olsun. Herhangi bir k alınsın ve sabitlensin. $x_k(\cdot) \in \mathcal{Y}_{\mu_k}\left(t_0, x_0, U_\alpha, h_k(\cdot)\right)$ ve $\forall$ $t_\alpha^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ için

$$d\left(x_k(t_\alpha^k), W(t_\alpha^k)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_\alpha^k) + \left(2\mu_k + \alpha\right)\frac{p(t_\alpha^k)}{a}(t_\alpha^k - t_0) \tag{4.3.5}$$

olduğu gösterilsin.

$\forall\, k$ için $x_k(t_0) = x_0$ olduğundan, $(t_0, x_k(t_0)) \in W^{\varepsilon_0 p(\cdot)}$ ve $d\left(x_k(t_0), W(t_0)\right) = \varepsilon_0 p(t_0)$ olur. $\varepsilon_0 \in [0, \frac{\varepsilon_*}{2})$ olduğundan, (4.3.3) ile verilen $U_\alpha(\cdot)$ pozisyonlu stratejinin tanımından

$$F(t_0, x_k(t_0), U_\alpha(t_0, x_k(t_0))) \subset D_*^+ W^{\varepsilon_0 p(\cdot)}(t_0, x_k(t_0)) + \alpha\overline{B}$$

olur. Adımlı yörüngenin tanımından, $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi, $[t_0, t_0 + h_k(t_0, x_0, U_\alpha(t_0, x_0))]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), U_\alpha(t_0, x_0)\right), \qquad x_k(t_0) = x_0$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. O zaman Önerme 4.1.5 gereği $\forall\ t \in [t_0, t_0 + \eta_2^{\mu_k}(t_0, x_0, U_\alpha(t_0, x_0))]$ için

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \leq \varepsilon_0 p(t) + \left(2\mu_k + \alpha\right)(t - t_0) \tag{4.3.6}$$

elde edilir.

$$t_1^k = t_0 + h_k\left(t_0, x_0, U_\alpha(t_0, x_0)\right)$$

olarak alındığından, (4.3.4) ile verilen $\delta_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından ve $h_k(\cdot)$ fonksiyonunun seçiminden $(h_k(t, x, u) \leq \delta_\alpha(\mu_k, t, x, u))$

$$\begin{aligned} t_1^k &= t_0 + h_k\left(t_0, x_0, U_\alpha(t_0, x_0)\right) \\ &\leq t_0 + \delta_\alpha\left(\mu_k, t_0, x_0, U_\alpha(t_0, x_0)\right) \\ &\leq t_0 + \eta_2^{\mu_k}\left(t_0, x_0, U_\alpha(t_0, x_0)\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda son eşitsizlikten ve (4.3.6) eşitsizliğinden

$$d\left(x_k(t_1^k), W(t_1^k)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_1^k) + (2\mu_k + \alpha)\,(t_1^k - t_0) \tag{4.3.7}$$

olduğu görülür. $\dfrac{p(t)}{a} \geq 1$ olduğundan ve (4.3.7) eşitsizliğinden

$$d\left(x_k(t_1^k), W(t_1^k)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_1^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\frac{p(t_1^k)}{a}(t_1^k - t_0) \tag{4.3.8}$$

olur ve $\alpha = 1$ için (4.3.5) eşitsizliği sağlanır.

Şimdi (4.3.5) eşitsizliğinin $\alpha = 2$ için doğru olduğu kanıtlansın.
$x_k(t_1^k) = x_1^k$ denilirse

$$d\left(x_1^k, W(t_1^k)\right) = \varepsilon_1 p(t_1^k)$$

olacak biçimde $\varepsilon_1 \geq 0$ vardır. O zaman (4.3.8) eşitsizliğinden ve $\mu_k < \dfrac{a\,(\varepsilon_* - \varepsilon_0) - \alpha\theta}{2\theta}$ olduğundan

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0 + \frac{1}{a}\,(2\mu_k + \alpha)\,(t_1^k - t_0) < \varepsilon_* \tag{4.3.9}$$

olur. Bu durumda (4.3.3) gereği $\left(t_1^k, x_1^k\right) \in W^{\varepsilon_1 p(\cdot)}$ için

$$F\left(t_1^k, x_1^k, U_*(t_1^k, x_1^k)\right) \subset D_*^+ W^{\varepsilon_1 p(\cdot)}(t_1^k, x_1^k) + \alpha\overline{B}$$

olur. Adımlı yörüngenin tanımından,
$x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi, $\left[t_1^{(k)}, t_1^{(k)} + h_k\left(t_1^{(k)}, x_k(t_1^{(k)}), U_\alpha(t_1^{(k)}, x_k(t_1^{(k)}))\right)\right]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), U_\alpha(t_1^{(k)}, x_k(t_1^{(k)}))\right), \qquad x_k(t_1^{(k)}) = x_1^k$$

Cauchy probleminin çözümü olarak alınır. O zaman Önerme 4.1.5 gereği $\forall\, t \in \left[t_1^k, t_1^k + \eta_2^{\mu_k}(t_1^k, x_1^k, U_\alpha(t_1^k, x_1^k))\right]$ için

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \leq \varepsilon_1 p(t) + (2\mu_k + \alpha)\,(t - t_1^k) \tag{4.3.10}$$

olur.

$$t_2^k = t_1^k + h_k\left(t_1^k, x_1^k, U_\alpha(t_1^k, x_1^k)\right)$$

olarak alındığından ve (4.3.4) ile verilen $\delta_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından, $t_2^k \le \eta_2^{\mu_k}\left(t_1^k, x_1^k, U_\alpha(t_1^k, x_1^k)\right)$ olduğu görülür. Bu durumda buradan ve (4.3.10) eşitsizliğinden

$$d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \le \varepsilon_1 p(t_2^k) + (2\mu_k + \alpha)(t_2^k - t_1^k) \tag{4.3.11}$$

elde edilir. $\dfrac{p(t)}{a} \ge 1$ olduğundan ve (4.3.9) eşitsizliğinden

$$d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \le \varepsilon_0 p(t_2^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0) \tag{4.3.12}$$

olur ve $\alpha = 2$ için (4.3.5) eşitsizliği sağlanır.

Şimdi, $\forall t_\nu^k \in L\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\}$ alınsın. ν t_ν^k'ye karşılık gelen order sayısı olmak üzere $x_k(\cdot)$ fonksiyonunun tüm $\lambda < \nu$ için

$$d\left(x_k(t_\lambda^k), W(t_\lambda^k)\right) \le \varepsilon_0 p(t_\lambda^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_\lambda^k)}{a}(t_\lambda^k - t_0) \tag{4.3.13}$$

eşitsizliğini sağladığı kabul edilsin. O zaman $t = t_\nu^k$ için (4.2.4) eşitsizliğinin sağlandığı gösterilsin. t_ν^k için iki durum sözkonusudur.

I. t_ν^k'nün öncülü olan $t_\sigma^k \in L\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\}$ sayısı vardır. Bu durumda $\left(t_\sigma^k, t_\nu^k\right) \cap L\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\} = \emptyset$ olur. $L\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\}$ kümesinin tanımından

$$t_\nu^k = t_\sigma^k + h_k\left(t_\sigma^k, x_k\left(t_\sigma^k\right), U_\alpha\left(t_\sigma^k, x_k\left(t_\sigma^k\right)\right)\right)$$

olduğu görülür ve kabulden

$$d\left(x_k(t_\sigma^k), W(t_\sigma^k)\right) \le \varepsilon_0 p(t_\sigma^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_\sigma^k)}{a}(t_\sigma^k - t_0) \tag{4.3.14}$$

olur. $x_k(t_\sigma^k) = x_\sigma^k$ denilsin. Bu durumda

$$d\left(x_\sigma^k, W(t_\sigma^k)\right) = \varepsilon_\sigma p(t_\sigma^k)$$

olacak biçimde $\varepsilon_\sigma \ge 0$ vardır. O zaman (4.3.14) eşitsizliğinden ve $\mu_k < \dfrac{a(\varepsilon_* - \varepsilon_0) - \alpha\theta}{2\theta}$ olduğundan

$$\varepsilon_\sigma \le \varepsilon_0 + \frac{1}{a}(2\mu_k + \alpha)(t_\sigma^k - t_0) < \varepsilon_* \tag{4.3.15}$$

olur. Bu durumda (4.3.3) ile verilen U_α pozisyonlu stratejinin tanımından $\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) \in W^{\varepsilon_\sigma p(\cdot)}$ için

$$F\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_\alpha(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right) \subset D_*^+ W^{\varepsilon_\sigma p(\cdot)}(t_\sigma^k, x_\sigma^k) + \alpha\overline{B}$$

olduğu elde edilir. Adımlı yörüngenin tanımından,
$x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi, $\left[t_\sigma^{(k)}, t_\sigma^{(k)} + h_k\left(t_\sigma^{(k)}, x_\sigma^{(k)}, U_\alpha(t_\sigma^{(k)}, x_\sigma(k))\right)\right]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), U_\alpha(t_\sigma^{(k)}, x_\sigma^{(k)})\right), \qquad x_k(t_\sigma^{(k)}) = x_\sigma^{(k)}$$

Cauchy probleminin çözümü olarak alındığından ve Önerme 4.1.5 gereği $\forall\ t \in \left[t_\sigma^k, t_\sigma^k + \eta_2^{\mu_k}(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_\alpha(t_\sigma^k, x_\sigma^k))\right]$ için

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \le \varepsilon_\sigma p(t) + (2\mu_k + \alpha)\left(t - t_\sigma^k\right) \tag{4.3.16}$$

olur.

$$t_\nu^k = t_\sigma^k + h_k\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_\alpha(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right)$$

olarak tanımlı olduğundan $\delta_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından $(h_k(t,x,u) \le \delta_\alpha(\mu_k, t, x, u))$

$$\begin{aligned} t_\nu^k &= t_\sigma^k + h_k\left(t_\sigma^k, x_k\left(t_\sigma^k\right), U_\alpha\left(t_\sigma^k, x_k\left(t_\sigma^k\right)\right)\right) \\ &\le t_\sigma^k + \delta_\alpha\left(\mu_k, t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k), U_\alpha(t_\sigma, x_0)\right) \\ &\le t_\sigma^k + \eta_2^{\mu_k}\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_\alpha(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (4.3.16) eşitsizliğinden

$$d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \le \varepsilon_\sigma p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\left(t_\nu^k - t_\sigma^k\right) \tag{4.3.17}$$

olduğu görülür. $\dfrac{p(t)}{a} \ge 1$ olduğundan, (4.3.15) ve (4.3.17) eşitsizliklerinden

$$d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \le \varepsilon_0 p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_\nu^k)}{a}\left(t_\nu^k - t_0\right) \tag{4.3.18}$$

olur.

II. ν order sayısının öncülü olmasın. Yani t_{ν}^{k} noktası iyi sıralı $L\left\{[t_0,\theta];x_k\left(\cdot\right),U_{\alpha},h_k(\cdot)\right\}$ kümesinin yığılma noktası olsun. Bu durumda $t_{\lambda_1}^{k}<t_{\lambda_2}^{k}<\ldots<t_{\lambda_i}^{k}<\ldots$, $\forall i$ için $t_{\lambda_i}^{k}\in L\left\{[t_0,\theta];x_k\left(\cdot\right),U_{\alpha},h_k(\cdot)\right\}$ olmak üzere $\lim\limits_{i\to\infty}t_{\lambda_i}^{k}=t_{\nu}^{k}-0$ olacak biçimde $\left\{t_{\lambda_i}^{k}\right\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi vardır. Varsayımdan dolayı $\forall$ i için

$$d\left(x_k(t_{\lambda_i}^{k}),W(t_{\lambda_i}^{k})\right)\leq\varepsilon_0p(t_{\lambda_i}^{k})+(2\mu_k+\alpha)\,\frac{p(t_{\lambda_i}^{k})}{a}(t_{\lambda_i}^{k}-t_0)\qquad(4.3.19)$$

olur. Adımlı yörüngenin tanımlanışından $\lim_{i\to\infty}x_k(t_{\lambda_i}^{k})=x_k(t_{\nu}^{k})$ olur. $p(\cdot):[0,\theta]\to(0,\infty)$ sürekli fonksiyon, $W\subset[0,\theta]\times\mathbb{R}^n$ kapalı küme olduğundan ve (4.3.19) eşitsizliğinden

$$d\left(x_k(t_{\nu}^{k}),W(t_{\nu}^{k})\right)\leq\varepsilon_0p(t_{\nu}^{k})+(2\mu_k+\alpha)\,\frac{p(t_{\nu}^{k})}{a}(t_{\nu}^{k}-t_0)\qquad(4.3.20)$$

olduğu elde edilir.

Böylece (4.3.5) eşitsizliğinin doğru olduğu kanıtlandı. Şimdi $t\in[t_0,\theta]$ için

$$d\left(x(t),W(t)\right)\leq\varepsilon_0p(t)+\alpha\frac{p(t)}{a}(t-t_0)\qquad(4.3.21)$$

olduğu gösterilsin.

Keyfi $t_*\in[t_0,\theta]$ alınsın ve sabitlensin. $\forall\,t_{\nu}^{k},t_{\nu+1}^{k}\in L\left\{[t_0,\theta];x_k\left(\cdot\right),U_{\alpha},h_k(\cdot)\right\}$ için, $0<t_{\nu+1}^{k}-t_{\nu}^{k}\leq\mu_k$ ve $k\to\infty$ iken $\mu_k\to0^{+}$ olduğundan, her k için

$$|t_{n(k)}^{(k)}-t_*|\leq\mu_k$$

olacak biçimde $t_{n(k)}^{(k)}\in L\left\{[t_0,\theta];x_k\left(\cdot\right),U_{\alpha},h_k(\cdot)\right\}$ vardır. O halde $k\to\infty$ iken $t_{n(k)}^{(k)}\to t_*$ olur. Diger taraftan, (4.3.6) eşitsizliğinden, $\forall$ k için

$$d\left(x_k(t_{n(k)}^{(k)}),W(t_{n(k)}^{(k)})\right)\leq\varepsilon_0p(t_{n(k)}^{(k)})+(2\mu_k+\alpha)\,\frac{p(t_{n(k)}^{(k)})}{a}(t_{n(k)}^{(k)}-t_0)\qquad(4.3.22)$$

olur. $k\to\infty$ iken $t_{n(k)}^{(k)}\to t_*$, $x_k(\cdot)\to x(\cdot)$, $p\left(t_{n(k)}^{(k)}\right)\to p\left(t_*\right)$, $\mu_k\to0^{+}$, $W\subset[0,\theta]\times\mathbb{R}^n$ kapalı küme olduğundan ve (4.3.22) eşitsizliğinden

$$d\left(x(t_*),W(t_*)\right)\leq\varepsilon_0p(t_*)+\alpha\frac{p(t_*)}{a}(t_*-t_0)\qquad(4.3.23)$$

olduğu bulunur. $t_* \in [t_0, \theta]$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, (4.3.23) eşitsizliğinden $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$d\left(x(t), W(t)\right) \leq \varepsilon_0 p(t) + \alpha \frac{p(t)}{a}(t - t_0) \tag{4.3.24}$$

olduğu görülür.

$x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right)$ keyfi olduğundan, (4.3.24) eşitsizliği keyfi $x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right)$ için doğru olur.

$\varepsilon_0 \geq 0$ sayısı $d\left(x(t_0), W(t_0)\right) = \varepsilon_0 p(t_0)$ koşulundan seçilmektedir. Eğer $(t_0, x_0) \in W$ ise, o zaman $d\left(x(t_0), W(t_0)\right) = 0$ ve $\varepsilon_0 = 0$ olur. O halde (4.3.24) eşitsizliğinden, $\forall\ x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right)$ ve $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$d\left(x(t), W(t)\right) \leq \alpha \frac{p(t)}{a}(t - t_0)$$

olur.

□

Teorem 4.3.1'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.1. *Teorem 4.3.1'in koşulları sağlansın.* $(t_0, x_0) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ *başlangıç pozisyonu,* $d\left(x_0, W(t_0)\right) = \varepsilon_0 p(t_0)$*,* $\varepsilon_0 \in [0, \frac{\varepsilon_*}{2})$ *olsun ve* $\alpha < \frac{a}{2\,\theta}\varepsilon_*$ *olarak alınsın.* $(U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ *süper stratejisi* (4.3.3) *ve* (4.3.4)*ile tanımlansın. O zaman* $\forall\, x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right)$ *ve* $t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$d\left(x(t), W(t)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_0) + \alpha \frac{p(t)}{a}\big(t - t_0\big) \tag{4.3.25}$$

olur. Burada $a = min\left\{p(t) : t \in [0, \theta]\right\}$ *olarak tanımlıdır.*

Şimdi,

$$\dot{x} \in F(t, x, u) + \alpha B \tag{4.3.26}$$

kontrol sistemi ele alınsın. (4.3.26) sisteminde $(U, \delta(\cdot)) \in U_{pos} \times \Delta(0, 1)$ süper stratejisinin (t_0, x_0) başlangıç noktasından ürettiği yörüngeler kümesi $X_*\left(t_0, x_0, U, \delta(\cdot)\right)$ ile gösterilsin.

Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.3.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.2. *$W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme, $p(\cdot) : [0,\theta] :\rightarrow (0,\infty)$ sürekli fonksiyon $\varepsilon_* > 0$ ve $\alpha < \frac{a}{2\theta}\varepsilon_*$ olsun. $\forall\, \varepsilon \in [0,\varepsilon_*]$ ve $\forall\,(t_*,x_*) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}$ için*

$$F(t_*,x_*,u_*) \subset D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t_*,x_*) \tag{4.3.27}$$

olacak şekilde $u_* \in P$ olsun. O zaman $\forall\,(t_0,x_0) \in W$, $\forall\, x(\cdot) \in X_*\,(t_0,x_0,U_\alpha,\delta_\alpha(\cdot))$ ve $\forall\, t \in [t_0,\theta]$ olmak üzere

$$d\,(x(t),W(t)) \leq \alpha \frac{p(t)}{a}\big(t-t_0\big) \tag{4.3.28}$$

olacak biçimde $(U_\alpha,\delta_\alpha(\cdot)) \in \mathcal{U}_{pos} \times \Delta(0,1)$ süper stratejisi vardır.
Burada $a = min\,\{p(t) : t \in [0,\theta]\} > 0$ olarak tanımlıdır.

Sonuç 4.3.3. *Sonuç 4.3.2'in koşulları sağlansın. $(t_0,x_0) \in [0,\theta]\times\mathbb{R}^n$ başlangıç pozisyonu, $d\,(x_0,W(t_0)) = \varepsilon_0 p(t)$, $\varepsilon_0 \in [0,\dfrac{\varepsilon_*}{2})$, $\alpha < \frac{a}{2\theta}\varepsilon_*$ olarak alınsın. O zaman $\forall\, x(\cdot) \in X_*\,(t_0,x_0,U_\alpha^*,\delta_\alpha^*(\cdot))$ ve $t \in [t_0,\theta]$ için*

$$d\,(x(t),W(t)) \leq \varepsilon_0 p(t) + \alpha \frac{p(t)}{a}\big(t-t_0\big) \tag{4.3.29}$$

olacak biçimde $(U_\alpha^*,\delta_\alpha^*(\cdot))$ süper stratejisi vardır.

4.4 Pozisyonlu Zayıf İnvaryantlık İçin Zayıflatılmış Yeter Koşul

Bu bölümde verilen kapalı kümenin pozisyonlu zayıf invaryant olması için daha zayıf bir yeter koşul verilecektir. Kapalı $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesinin (2.5.1) sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant olması için, Teorem 4.2.1'de (4.2.1) koşulunun tüm $(t,x) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}$ için sadece $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*]$ olurken sağlanacağının yeterli olduğu kanıtlanacaktır. Yani (4.2.1) koşulunun $\varepsilon = 0$ için sağlanmasından vazgeçilecektir.

Şimdi kapalı $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesinin (2.5.1) sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant olması için, Teorem 4.2.1 den daha zayıf olan yeter koşul verilsin.

Teorem 4.4.1. *$W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme $\varepsilon_* > 0$ ve $p(\cdot) : [0,\theta] \to (0,\infty)$ sürekli fonksiyon olsun. $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ olmak üzere $\forall (t_*, x_*) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}$ için*

$$F(t_*, x_*, u_*) \subset D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t_*, x_*) \tag{4.4.1}$$

olacak şekilde $u_* \in P$ varsa, W kümesi (2.5.1) kontrol sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant kümedir.

Kanıt. Keyfi $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ alınsın ve sabitlensin. O halde (4.4.1) koşulundan, $\forall$ $(t,x) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}$ için

$$F(t, x, u_*) \subset D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t, x)$$

olacak şekilde $u_* \in P$ vardır. O halde $\forall$ $(t,x) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}$ için

$$D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t, x) \neq \emptyset$$

olur. Bu durumda Önerme 4.1.6 gereği $t \to W^{\varepsilon p(\cdot)}(t)$, $t \in [0,\theta]$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı sürekli olur. $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, $\forall$ $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ için $t \to W^{\varepsilon p(\cdot)}(t)$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı sürekli olur. O zaman Önerme 4.1.7 gereği $t \to W(t)$, $t \in [0,\theta]$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı süreklidir.

$\forall$ $(t,x) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ alınsın. $d\,(x, W(t)) = \varepsilon(t,x)\, p(t)$ olacak şekilde $\varepsilon(t,x) \geq 0$ vardır.

$$P_*(t,x) = \{u_* \in P : F(t,x,u_*) \subset D_*^+ W^{\varepsilon(t,x)p(\cdot)}(t,x)\}$$

kümesi tanımlansın ve $a = min\,\{p(t) : t \in [0,\theta]\} > 0$ alınsın.

(4.4.1) koşulundan $0 < \varepsilon(t,x) \leq \varepsilon_*$ olacak biçimdeki $(t,x) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ için $P_*(t,x) \neq \emptyset$ olur.

Bu durumda $\forall$ $(t,x) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ için süper strateji aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$U_*(t,x) = \begin{cases} u_* \in P_*(t,x) & , \quad 0 < \varepsilon(t,x) \leq \varepsilon_* \\ u \in P & , \quad \varepsilon(t,x) = 0 \quad \text{veya } \varepsilon(t,x) > \varepsilon_* \end{cases} \tag{4.4.2}$$

ve

$$\delta_*(\mu,t,x,u)=\begin{cases} min\{\eta_1^{\mu}(t,x,u),\mu,\theta-t\} & , \ 0<\varepsilon(t,x)\le\varepsilon_*, \quad u=U_*(t,x) \\ min\{\mu,\gamma(t,x,\mu),\theta-t\} & , \ \varepsilon(t,x)=0, \quad u\in P \\ min\{\mu,\theta-t\} & , \ \varepsilon(t,x)>\varepsilon_*, \quad u\in P \\ min\{\mu,\theta-t\} & , \ 0<\varepsilon(t,x)\le\varepsilon_*, \quad u\ne U_*(t,x) \end{cases} \tag{4.4.3}$$

alınsın. Burada kullanılan $\eta_1^{\mu}(t,x,u)$ sayısı Önerme 4.1.4 de, $\gamma(t,x,\mu)$ ise Önerme 4.1.9 da bulunan sayılardır.

$0\le\varepsilon_0<\frac{\varepsilon_*}{2}$ olmak üzere $d\left(x_0,W(t_0)\right)=\varepsilon_0 p(t_0)$ olacak biçimde $(t_0,x_0)\in[0,\theta]\times\mathbb{R}^n$ alınıp sabitlensin. O halde $(t_0,x_0)\in W^{\varepsilon_0 p(\cdot)}$ olur.

Şimdi $(U_*,\delta_*(\cdot))$ süper stratejinin, $(t_0,x_0)\in W^{\varepsilon_0 p(\cdot)}$ başlangıç noktasında ürettiği keyfi $x(\cdot)\in X\left(t_0,x_0,U_*,\delta_*(\cdot)\right)$ yörüngeleri ve $\forall\ t\in[t_0,\theta]$ için,

$$d\left(x(t),W(t)\right)\le\varepsilon_0 p(t)$$

olduğu gösterilsin.

Keyfi sabitlenmiş $x(\cdot)\in X\left(t_0,x_0,U_*,\delta_*(\cdot)\right)$ yörüngesi alındığında, $k\to\infty$ iken $\mu_k\to 0$ ve $x_k(\cdot)\to x(\cdot)$ düzgün yakınsayan $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathcal{Z}_{\mu_k}(t_0,x_0,U_*,\delta_*(\cdot))$ adımlı yörüngeler dizisi vardır. $\mathcal{Z}_{\mu_k}(t_0,x_0,U_*,\delta_*(\cdot))$ adımlı yörüngeler kümesinin tanımından, $\forall\ k$ için $x_k(\cdot)\in\mathcal{Y}_{\mu_k}\left(t_0,x_0,U_*,h_k(\cdot)\right)$ olacak biçimde $h_k(\cdot)\in\Delta_{\mu_k}(\delta_*(\cdot))$ fonksiyonu vardır. $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi tanımlanırken, U_* pozisyonlu stratejisi ve $h_k(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0,\theta]$ aralığının bir $L\left\{[t_0,\theta];x_k\left(\cdot\right),U_*,h_k(\cdot)\right\}$ iyi sıralı kümesini doğurur (bkz. Önerme 2.6.3).

Genelliği bozmaksızın, keyfi $k=1,2,\dots$ için

$$\mu_k<\begin{cases} min\left\{\varepsilon_0, a\dfrac{\varepsilon_*-\varepsilon_0}{2\theta},\dfrac{3a\varepsilon_*}{2a+6\theta})\right\} & , \ \varepsilon_0>0 \\ \\ min\left\{a\dfrac{\varepsilon_*-\varepsilon_0}{2\theta},\dfrac{3a\varepsilon_*}{2a+6\theta})\right\} & , \ \varepsilon_0=0 \end{cases} \tag{4.4.4}$$

olsun. Herhangi bir k alınsın ve sabitlensin. $x_k(\cdot)\in\mathcal{Y}_{\mu_k}(t_0,x_0,U_*,h_k(\cdot))$

ve $t_\alpha^k \in L\{[t_0,\theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\}$ için

$$d\left(x_k(t_\alpha^k), W(t_\alpha^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_\alpha^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_\alpha^k)}{a}(t_\alpha^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 > 0 \\ \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_\alpha^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_\alpha^k)}{a}(t_\alpha^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{4.4.5}$$

olduğu gösterilsin.

$\forall\, k$ için $x_k(t_0) = x_0$ olduğundan, $(t_0, x_k(t_0)) \in W^{\varepsilon_0 p(\cdot)}$ ve $d\left(x_k(t_0), W(t_0)\right) = \varepsilon_0 p(t_0)$ olur.

$$t_1^k = t_0 + h_k\left(t_0, x_0, U_*(t_0, x_0)\right)$$

olarak tanımlıdır. Bu durumda

I. $\varepsilon_0 = 0$ olsun.

$x_k(\cdot)$ adımlı yörüngenin ve (4.4.2) ile verilen U_* pozisyonlu stratejinin tanımından, $[t_0, t_1^k]$ aralığında $x_k(\cdot)$ fonksiyonu bir $u_* \in P$ için

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_*\right), \quad x_k(t_0) = x_0$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. $\varepsilon_0 = 0$ olduğundan, $d\left(x_0, W(t_0)\right) = 0$ ve $(t_0, x_0) \in W$ olduğu bulunur. $t \to W(t)$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı sürekli olduğundan Önerme 4.1.9 gereği $\forall$ $t \in [t_0, t_0 + \gamma(t_0, x_0, \mu_k)]$ için,

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \leq \frac{2}{3}\mu_k p(t) \tag{4.4.6}$$

olur. Burada verilen $\gamma(t_0, x_0, \mu_k)$, Önerme 4.1.9 da tanımlanan pozitif sayıdır. Ayrıca (4.4.3) ile verilen $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} t_1^k &= t_0 + h_k\left(t_0, x_0, U_*(t_0, x_0)\right) \\ &\leq t_0 + \delta_*\left(\mu_k, t_0, x_0, U_*(t_0, x_0)\right) \\ &\leq t_0 + \gamma\left(t_0, x_0, \mu_k\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (4.4.6) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_1^k), W(t_1^k)\right) \leq& \frac{2}{3}\mu_k p(t_1^k) \\ \leq& \frac{2}{3}\mu_k p(t_1^k) + 2\mu_k \frac{p(t_1^k)}{a}(t_1^k - t_0) \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

elde edilir

II. $\varepsilon_0 > 0$ olsun

(4.4.2) ile verilen U_* pozisyonlu stratejinin tanımından

$$F(t_0, x_0, U_*(t_0, x_0)) \subset D_*^+ W^{\varepsilon_0 p(\cdot)}(t_0, x_0)$$

olur. Bu durumda Önerme 4.1.4 gereği $\forall\, t \in [t_0, t_0 + \eta_1^{\mu_k}(t_0, x_0, U_*(t_0, x_0))]$ için,

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \leq \varepsilon_0 p(t) + 2\mu_k(t - t_0) \tag{4.4.8}$$

olur. Ayrıca (4.4.3) ile verilen $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} t_1^k &= t_0 + h_k\left(t_0, x_0, U_*(t_0, x_0)\right) \\ &\leq t_0 + \delta_*\left(\mu_k, t_0, x_0, U_*(t_0, x_0)\right) \\ &\leq t_0 + \eta_1^{\mu_k}(t_0, x_0, U_*(t_0, x_0)) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (4.4.8) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_1^k), W(t_1^k)\right) &\leq \varepsilon_0 p(t_1^k) + 2\mu_k(t_1^k - t_0) \\ &\leq \varepsilon_0 p(t_1^k) + 2\mu_k \frac{p(t_1^k)}{a}(t_1^k - t_0) \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

elde edilir.

O zaman (4.4.7)ve (4.4.9) eşitsizliklerinden $t_1^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ için (4.4.5) eşitsizliği sağlanır. Yani

$$d\left(x_k(t_1^k), W(t_1^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_1^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_1^k)}{a}(t_1^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 > 0 \\[2ex] \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_1^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_1^k)}{a}(t_1^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{4.4.10}$$

olur. Açıktır ki, $x_k(t_1^k)$ için

$$d\left(x_k(t_1^k), W(t_1^k)\right) = \varepsilon_1 p(t_1^k)$$

olacak biçimde $\varepsilon_1 = \varepsilon\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right) \geq 0$ vardır. O halde (4.4.10) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_1 \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + 2\mu_k \dfrac{1}{a}(t_1^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k + 2\mu_k \dfrac{1}{a}(t_1^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{4.4.11}$$

olur.

$$\mu_k < \begin{cases} min\left\{\varepsilon_0, a\dfrac{\varepsilon_* - \varepsilon_0}{2\theta}, \dfrac{3a\varepsilon_*}{2a+6\theta})\right\} & , \quad \varepsilon_0 > 0 \\ \\ min\left\{a\dfrac{\varepsilon_* - \varepsilon_0}{2\theta}, \dfrac{3a\varepsilon_*}{2a+6\theta})\right\} & , \quad \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

olduğundan ve (4.4.11) eşitsizliğinden $\varepsilon_0 = 0$ iken

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \leq &\ 2\mu_k \left(\frac{1}{3} + \frac{t_1^k - t_0}{a} \right) \\ < &\ 2\frac{3a\varepsilon_*}{2a+6\theta}\left(\frac{1}{3} + \frac{\theta}{a}\right) \\ \leq &\ \frac{3a\varepsilon_*}{a+3\theta}\frac{a+3\theta}{3a} \\ = &\ \varepsilon_* \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

ve $\varepsilon_0 > 0$ iken ise

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \leq &\ \varepsilon_0 + 2\mu_k \frac{1}{a}(t_1^k - t_0) \\ < &\ \varepsilon_0 + 2\frac{1}{a}a\frac{\varepsilon_* - \varepsilon_0}{2\theta}(t_1^k - t_0) \\ \leq &\ \varepsilon_0 + \varepsilon_* - \varepsilon_0 \\ = &\ \varepsilon_* \end{aligned} \tag{4.4.13}$$

olduğu bulunur. O zaman (4.4.12) ve (4.4.13) eşitsizliklerinden

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_*$$

olduğu görülür. Ayrıca $t_2^k = t_1^k + h_k\left(t_1^k, x_k(t_1^k), U_*(t_1^k, x_k(t_1^k))\right)$ olarak tanımlıdır. Bu durumda $\varepsilon_1 \geq 0$ için iki durum olabilir.

I. $\varepsilon_1 = 0$ olsun.

$x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesinin ve (4.4.2) ile verilen U_* pozisyonlu stratejinin tanımından $[t_0, t_1^k]$ aralığında $x_k(\cdot)$ fonksiyonu bir $u_* \in P$ için,

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_*\right), \quad x_k(t_1^k) = x_1^k$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. $\varepsilon_1 = 0$ olduğundan $d\left(x_k(t_1^k), W(t_1^k)\right) = 0$ ve $(t_1^k, x_k(t_1^k)) \in W$ olur. $t \to W(t)$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı sürekli olduğundan Önerme 4.1.9 gereği $\forall$ $t \in \left[t_1^k, t_1^k + \gamma(t_1^k, x_1^k, \mu_k)\right]$ için,

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \leq \frac{2}{3}\mu_k p(t) \tag{4.4.14}$$

olur. Ayrıca (4.4.3) ile verilen $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} t_2^k &= t_1^k + h_k\left(t_1^k, x_1^k, U_*(t_1^k, x_1^k)\right) \\ &\leq t_1^k + \delta_*\left(\mu_k, t_1^k, x_1^k, U_*(t_1^k, x_1^k)\right) \\ &\leq t_1^k + \gamma\left(t_1^k, x_1^k, \mu_k\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (4.4.14) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \leq & \frac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) \\ \leq & \frac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) + 2\mu_k \frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_1^k) \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

olduğu elde edilir.

II. $\varepsilon_1 > 0$ olsun

(4.4.2) ile verilen U_* pozisyonlu stratejinin tanımından

$$F(t_1^k, x_1^k, U_*(t_1^k, x_1^k)) \subset D_*^+ W^{\varepsilon_1 p(\cdot)}(t_1^k, x_1^k)$$

olur. Bu durumda Önerme 4.1.4 gereği $\forall$ $t \in$ $\left[t_1^k, t_1^k + \eta_1^{\mu_k}(t_1^k, x_1^k, U_*(t_1^k, x_1^k))\right]$ için,

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \leq \varepsilon_1 p(t) + 2\mu_k(t - t_1^k) \tag{4.4.16}$$

olduğu görülür. Ayrıca (4.4.3) ile verilen $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} t_2^k &= t_1^k + h_k\left(t_1^k, x_1^k, U_*(t_1^k, x_1^k)\right) \\ &\leq t_1^k + \delta_*\left(\mu_k, t_1^k, x_1^k, U_*(t_1^k, x_1^k)\right) \\ &\leq t_0 + \eta_*^{\mu_k}\left(t_1^k, x_1^k, U_*(t_1^k, x_1^k)\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (4.4.16) eşitsizliğinden

$$d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \le \varepsilon_1 p(t_2^k) + 2\mu_k (t_2^k - t_1^k)$$
$$\le \varepsilon_1 p(t_2^k) + 2\mu_k \frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_1^k) \tag{4.4.17}$$

elde edilir. Böylece (4.4.15) ve (4.4.17) eşitsizliklerinden

$$d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \le \begin{cases} \varepsilon_1 p(t_2^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_1^k), & \varepsilon_1 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_1^k), & \varepsilon_1 = 0 \end{cases} \tag{4.4.18}$$

olur.

$\varepsilon_0 = 0$ olsun. O halde (4.4.11) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_1 \le \frac{2}{3}\mu_k + 2\mu_k \frac{1}{a}(t_1^k - t_0) \tag{4.4.19}$$

olur. Bu durumda eğer $\varepsilon_1 = 0$ ise (4.4.18) eşitsizliğinden

$$d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \le \frac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) + 2\mu_k \frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_1^k)$$
$$\le \frac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) + 2\mu_k \frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0) \tag{4.4.20}$$

olur. Eğer $\varepsilon_1 > 0$ ise (4.4.18) ve (4.4.19) eşitsizliklerinden

$$d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \le \varepsilon_1 p(t_2^k) + 2\mu_k \frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_1^k)$$
$$\le \frac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) + 2\mu_k \frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0) \tag{4.4.21}$$

olur. Böylece (4.4.20) ve (4.4.21) eşitsizliklerinden $\varepsilon_0 = 0$ iken

$$d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \le \frac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) + 2\mu_k \frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0) \tag{4.4.22}$$

olduğu elde edilir.

$\varepsilon_0 > 0$ olsun. O halde (4.4.11) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_1 \le \varepsilon_0 + 2\mu_k \frac{1}{a}(t_1^k - t_0) \tag{4.4.23}$$

olur. Eğer $\varepsilon_1 = 0$ ise (4.4.4), (4.4.18) ve (4.4.23) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) &\leq \frac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) + 2\mu_k \frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_1^k) \\ &\leq \varepsilon_0 p(t_2^k) + 2\mu_k \frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0) \end{aligned} \tag{4.4.24}$$

olduğu görülür.

Eğer $\varepsilon_1 > 0$ ise (4.4.18) ve (4.4.23) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) &\leq \varepsilon_1 p(t_2^k) + 2\mu_k \frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_1^k) \\ &\leq \varepsilon_0 p(t_2^k) + 2\mu_k \frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0^k) \end{aligned} \tag{4.4.25}$$

olur. Böylece (4.4.24) ve (4.4.25) eşitsizliklerinden $\varepsilon_0 > 0$ iken

$$d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_2^k) + 2\mu_k \frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0^k) \tag{4.4.26}$$

olduğu elde edilir. O zaman (4.4.22) ve (4.4.26) eşitsizliklerinden $t_2^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ için

$$d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_2^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

olduğu görülür ve (4.4.5) eşitsizliği sağlanır.

Şimdi, $\forall t_\nu^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ alınsın. ν t_ν^k'ye karşılık gelen order sayısı olmak üzere, $\forall\ \beta < \nu$ için

$$d\left(x_k(t_\beta^k), W(t_\beta^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_\beta^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_\beta^k)}{a}(t_\beta^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_\beta^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_\beta^k)}{a}(t_\beta^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{4.4.27}$$

sağladığı kabul edilsin ve

$$d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_\nu^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{4.4.28}$$

olduğu gösterilsin. t_ν^k için iki durum söz konusudur.

1. t_ν^k'nın öncülü olan $t_\sigma^k \in L\{[t_0,\theta];x_k(\cdot),U_*,h_k(\cdot)\}$ sayısı vardır. Bu durumda $\left(t_\sigma^k,t_\nu^k\right)\cap L\{[t_0,\theta];x_k(\cdot),U_*,h_k(\cdot)\}=\emptyset$ olur.
$t_\sigma^k \in L\{[t_0,\theta];x_k(\cdot),U_*,h_k(\cdot)\}$ için (4.4.27) sağlandığından

$$d\left(x_k(t_\sigma^k),W(t_\sigma^k)\right)\leq\begin{cases}\varepsilon_0 p(t_\sigma^k)+2\mu_k\dfrac{p(t_\sigma^k)}{a}(t_\sigma^k-t_0), & \varepsilon_0>0\\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_\sigma^k)+2\mu_k\dfrac{p(t_\sigma^k)}{a}(t_\sigma^k-t_0), & \varepsilon_0=0\end{cases}\tag{4.4.29}$$

olur. Açıktır ki $x_k(t_\sigma^k)$ için

$$d\left(x_k(t_\sigma^k),W(t_\sigma^k)\right)=\varepsilon_\sigma p(t_\sigma^k)$$

olacak biçimde $\varepsilon_\sigma=\varepsilon\left(t_\sigma^k,x_k(t_\sigma^k)\right)\geq 0$ vardır. O halde (4.4.29) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_\sigma\leq\begin{cases}\varepsilon_0+2\mu_k\dfrac{1}{a}(t_\sigma^k-t_0), & \varepsilon_0>0\\ \dfrac{2}{3}\mu_k+2\mu_k\dfrac{1}{a}(t_\sigma^k-t_0), & \varepsilon_0=0\end{cases}\tag{4.4.30}$$

olur.

$$\mu_k<\begin{cases}min\left\{\varepsilon_0,a\dfrac{\varepsilon_*-\varepsilon_0}{2\theta},\dfrac{3a\varepsilon_*}{2a+6\theta})\right\} & ,\quad \varepsilon_0>0\\[2ex] min\left\{a\dfrac{\varepsilon_*-\varepsilon_0}{2\theta},\dfrac{3a\varepsilon_*}{2a+6\theta})\right\} & ,\quad \varepsilon_0=0\end{cases}$$

olduğundan ve (4.4.30) eşitsizliğinden $\varepsilon_0=0$ iken

$$\begin{aligned}\varepsilon_\sigma\leq\ & 2\mu_k\left(\frac{1}{3}+\frac{t_\sigma^k-t_0}{a}\right)\\ <\ & 2\frac{3a\varepsilon_*}{2a+6\theta}\left(\frac{1}{3}+\frac{\theta}{a}\right)\\ \leq\ & \frac{3a\varepsilon_*}{a+3\theta}\frac{a+3\theta}{3a}\\ =\ & \varepsilon_*\end{aligned}\tag{4.4.31}$$

ve $\varepsilon_0>0$ iken

$$\begin{aligned}\varepsilon_\sigma\leq\ & \varepsilon_0+2\mu_k\frac{1}{a}(t_\sigma^k-t_0)\\ <\ & \varepsilon_0+2\frac{1}{a}a\frac{\varepsilon_*-\varepsilon_0}{2\theta}(t_\sigma^k-t_0)\\ \leq\ & \varepsilon_0+\varepsilon_*-\varepsilon_0\\ =\ & \varepsilon_*\end{aligned}\tag{4.4.32}$$

olduğu bulunur. O zaman (4.4.31) ve (4.4.32) eşitsizliklerinden

$$\varepsilon_\sigma < \varepsilon_*$$

olduğu görülür. Ayrıca $L\left\{[t_0,\theta]; x_k\left(\cdot\right), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ kümesinin tanımından

$$t_\nu^k = t_\sigma^k + h_k\left(t_\sigma^k, x_k\left(t_\sigma^k\right), U_*\left(t_\sigma^k, x_k\left(t_\sigma^k\right)\right)\right)$$

olarak tanımlıdır. Bu durumda ε_σ için iki durum olabilir.

I. $\varepsilon_\sigma = 0$ olsun.

$x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesinin ve (4.4.2) ile verilen U_* pozisyonlu stratejinin tanımından $[t_\sigma^k, t_\nu^k]$ aralığında $x_k(\cdot)$ fonksiyonu bir $u_* \in P$ için,

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_*\right), \quad x_k(t_\sigma^k) = x_\sigma^k$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. $\varepsilon_\sigma = 0$ olduğundan $d\left(x_k(t_\sigma^k), W(t_\sigma^k)\right) = 0$ ve $(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)) \in W$ olur. $t \to W(t)$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı sürekli olduğundan Önerme 4.1.9 gereği $\forall\, t \in \left[t_\sigma^k, t_\sigma^k + \gamma(t_\sigma^k, x_\sigma^k, \mu_k)\right]$ için,

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \leq \frac{2}{3}\mu_k p(t) \tag{4.4.33}$$

olur. Ayrıca (4.4.3)'den ile verilen $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımlanışından

$$\begin{aligned} t_\nu^k &= t_\sigma^k + h_k\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_*(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right) \\ &\leq t_\sigma^k + \delta_*\left(\mu_k, t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_*(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right) \\ &\leq t_\sigma^k + \gamma\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, \mu_k\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (4.4.33) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq& \frac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) \\ \leq& \frac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_\sigma^k) \end{aligned} \tag{4.4.34}$$

olduğu elde edilir.

ii $\varepsilon_\sigma > 0$ olsun.

U_* pozisyonlu stratejinin tanımından,

$$F\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_*(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right) \subset D^* W^{\varepsilon_\sigma p(\cdot)}(t_\sigma^k, x_\sigma^k)$$

olur. Bu kapsam sağlandığından, Önerme 4.1.4 dikkate alınırsa $\forall\ t \in \left[t_\sigma^k, t_\sigma^k + \eta_1^{\mu_k}(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_*(t_\sigma^k, x_\sigma^k))\right]$ için,

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \leq \varepsilon_\sigma p(t) + 2\mu_k(t - t_\sigma^k) \tag{4.4.35}$$

olur. Ayrıca (4.4.3) ile verilen $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından,

$$\begin{aligned} t_\nu^k &= t_\sigma^k + h_k\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_*(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right) \\ &\leq t_\sigma^k + \delta_*\left(\mu_k, t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_*(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right) \\ &\leq t_0 + \eta_1^{\mu_k}(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_*(t_\sigma^k, x_\sigma^k)) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (4.4.35) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq & \varepsilon_\sigma p(t_\nu^k) + 2\mu_k(t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ \leq & \varepsilon_\sigma p(t_\nu^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_\sigma^k) \end{aligned} \tag{4.4.36}$$

olduğu görülür. Bu durumda (4.4.34) ve (4.4.36) eşitsizliklerinden

$$d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_\sigma p(t_\nu^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_\sigma), & \varepsilon_\sigma > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_\sigma), & \varepsilon_\sigma = 0 \end{cases} \tag{4.4.37}$$

olduğu elde edilir.

$\varepsilon_0 = 0$ olsun. O halde (4.4.30) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_\sigma \leq \frac{2}{3}\mu_k + 2\mu_k \frac{1}{a}(t_\sigma^k - t_0) \tag{4.4.38}$$

olur. Bu durumda, eğer $\varepsilon_\sigma = 0$ ise o zaman (4.4.37) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq & \frac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ \leq & \frac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0) \end{aligned} \tag{4.4.39}$$

olur. Eğer $\varepsilon_\sigma > 0$ ise (4.4.37) ve (4.4.38) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq & \varepsilon_\sigma p(t_\nu^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ \leq & \frac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0) \end{aligned} \tag{4.4.40}$$

olur. Böylece (4.4.39) ve (4.4.40) eşitsizliklerinden $\varepsilon_0 = 0$ iken

$$d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq \frac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0) \tag{4.4.41}$$

olduğu elde edilir.

$\varepsilon_0 > 0$ olsun. O halde (4.4.30) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_\sigma \leq \varepsilon_0 + 2\mu_k \frac{1}{a}(t_\sigma^k - t_0) \tag{4.4.42}$$

olur. Eğer $\varepsilon_\sigma = 0$ ise o zaman (4.4.42), (4.4.4) ve (4.4.37) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq & \frac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ \leq & \varepsilon_0 p(t_\nu^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0) \end{aligned} \tag{4.4.43}$$

olur.

Eğer $\varepsilon_\sigma > 0$ ise (4.4.37), (4.4.42) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq & \varepsilon_\sigma p(t_\nu^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ \leq & \varepsilon_0 p(t_\nu^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0^k) \end{aligned} \tag{4.4.44}$$

elde edilir. Böylece (4.4.43) ve (4.4.44) eşitsizliklerinden $\varepsilon_0 > 0$ iken

$$d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_\nu^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0^k) \tag{4.4.45}$$

olduğu elde edilir. O zaman (4.4.41) ve (4.4.45) eşitsizliklerinden $t_\nu^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ için

$$d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_\nu^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

olduğu görülür ve (4.4.28) eşitsizliği sağlanır.

2. ν order sayısının öncülü olmasın. Yani t_ν^k noktası iyi sıralı $L\left\{[t_0,\theta];x_k\left(\cdot\right),U_*,h_k(\cdot)\right\}$ kümesinin yığılma noktası olsun. Bu durumda $t_{\lambda_1}^k < t_{\lambda_2}^k < \ldots < t_{\lambda_i}^k < \ldots$, $\forall i$ için $t_{\lambda_i}^k \in L\left\{[t_0,\theta];x_k\left(\cdot\right),U_*,h_k(\cdot)\right\}$ olmak üzere $\lim\limits_{i\to\infty} t_{\lambda_i}^k = t_\nu^k - 0$ olacak biçimde $\left\{t_{\lambda_i}^k\right\}_{i=1}^\infty$ dizisi vardır. O zaman keyfi i için $t_{\lambda_i}^k \in L\left\{[t_0,\theta];x_k\left(\cdot\right),U_*,h_k(\cdot)\right\}$ olmak üzere (4.4.27) sağlandığından

$$d\left(x_k(t_{\lambda_i}^k),W(t_{\lambda_i}^k)\right) \le \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_{\lambda_i}^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_{\lambda_i}^k)}{a}(t_{\lambda_i}^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_{\lambda_i}^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_{\lambda_i}^k)}{a}(t_{\lambda_i}^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \qquad (4.4.46)$$

olur. O halde $\varepsilon_0 > 0$ iken keyfi $i = 1,2,\ldots$ için

$$d\left(x_k(t_{\lambda_i}^k),W(t_{\lambda_i}^k)\right) \le \varepsilon_0 p(t_{\lambda_i}^k) + 2\mu_k \frac{p(t_{\lambda_i}^k)}{a}(t_{\lambda_i}^k - t_0) \qquad (4.4.47)$$

ve $\varepsilon_0 = 0$ iken keyfi $i = 1,2,\ldots$ için

$$d\left(x_k(t_{\lambda_i}^k),W(t_{\lambda_i}^k)\right) \le \frac{2}{3}\mu_k p(t_{\lambda_i}^k) + 2\mu_k \frac{p(t_{\lambda_i}^k)}{a}(t_{\lambda_i}^k - t_0) \qquad (4.4.48)$$

olur. $i \to \infty$ iken $t_{\lambda_i}^k \to t_\nu^k - 0$, $x_k(\cdot) : [t_0,\theta] \to \mathbb{R}^n$ mutlak sürekli, $p(\cdot) : [0,\theta] \to (0,\infty)$ sürekli fonksiyon, $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme olduğundan, (4.4.47) ve (4.4.48) eşitsizliklerinden $i \to \infty$ iken limit alınırsa $\varepsilon_0 > 0$ için

$$d\left(x_k(t_\nu^k),W(t_\nu^k)\right) \le \varepsilon_0 p(t_\nu^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0) \qquad (4.4.49)$$

ve $\varepsilon_0 = 0$ için

$$d\left(x_k(t_\nu^k),W(t_\nu^k)\right) \le \frac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + 2\mu_k \frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0) \qquad (4.4.50)$$

olur . O zaman (4.4.49) ve (4.4.50) eşitsizliklerinden $t_\nu^k \in L\left\{[t_0,\theta];x\left(\cdot\right),U_*,h_k(\cdot)\right\}$ için

$$d\left(x_k(t_\nu^k),W(t_\nu^k)\right) \le \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_\nu^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanmış olur. Böylece (4.4.5) eşitsizliğinin doğruluğu kanıtlanır.

Şimdi keyfi sabitlenmiş $t_* \in [t_0, \theta]$ alınsın. Bu durumda $\forall\ t_\nu^k,\ t_{\nu+1}^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ için, $0 < t_{\nu+1}^k - t_\nu^k < \mu_k$ ve $k \to \infty$ iken $\mu_k \to 0^+$ olduğundan, her k için

$$|t_{n(k)}^{(k)} - t_*| \leq \mu_k$$

olacak biçimde $t_{n(k)}^{(k)} \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ vardır. O halde $k \to \infty$ iken $t_{n(k)}^{(k)} \to t_*$ olur ve $\forall\ k$ için (4.4.5)'den

$$d\left(x_k(t_{n(k)}^k), W(t_{n(k)}^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_{n(k)}^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_{n(k)}^k)}{a}(t_{n(k)}^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_{n(k)}^k) + 2\mu_k \dfrac{p(t_{n(k)}^k)}{a}(t_{n(k)}^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{4.4.51}$$

olur. Bu durumda $k \to \infty$ iken $t_{n(k)}^{(k)} \to t_*$, $x_k(\cdot) \to x(\cdot)$, $p\left(t_{n(k)}^{(k)}\right) \to p\left(t_*\right)$, $\mu_k \to 0^+$, $W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme olduğundan, (4.4.51) eşitsizliğinden

$$d\left(x(t_*), W(t_*)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_*) \tag{4.4.52}$$

olduğu bulunur. $t_* \in [t_0, \theta]$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, (4.4.52) eşitsizliğinden $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$d\left(x(t), W(t)\right) \leq \varepsilon_0 p(t) \tag{4.4.53}$$

olduğu görülür.

$x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot)\right)$ keyfi olduğundan, (4.4.53) eşitsizliği keyfi $x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot)\right)$ için doğru olur.

$\varepsilon_0 \geq 0$ sayısı $d\left(x(t_0), W(t_0)\right) = \varepsilon_0 p(t_0)$ koşulundan seçilmektedir. Eğer $(t_0, x_0) \in W$ ise, o zaman $d\left(x(t_0), W(t_0)\right) = 0$ ve $\varepsilon_0 = 0$ olur. O halde (4.4.53) eşitsizliğinden, $\forall\ x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot)\right)$ ve $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$d\left(x(t), W(t)\right) = 0$$

olur. Bu ise $W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesinin (2.5.1) sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant olması demektir. □

Sonuç 4.4.1. *Teorem 4.4.1 in koşulları sağlansın,* $(t_0, x_0) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ *başlangıç pozisyonu,* $d\left(x_0, W(t_0)\right) = \varepsilon_0 p(t_0)$, $\varepsilon_0 \in [0, \dfrac{\varepsilon_*}{2})$ *olarak alınsın.* $(U_*, \delta_*(\cdot))$

süper stratejisi (4.4.2) *ve* (4.4.3) *ile tanımlanmış olsun. Bu durumda* $\forall\ x(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ *ve* $t \in [t_0, \theta]$ *için,*

$$d\,(x(t), W(t)) \leq \varepsilon_0 p(t)$$

olur.

4.5 Zayıflatılmış Yeter Koşulun Stabilliği

Bu bölümde Teorem 4.4.1 de (4.4.1) koşulu belli bir hata ile sağlanırken, pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliğinin nasıl değişeceği incelenecektir.

Teorem 4.5.1. $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ *kapalı küme,* $p(\cdot) : [0,\theta] :\to (0,\infty)$ *sürekli fonksiyon,* $\varepsilon_* > 0$ *ve* $\alpha < \dfrac{a}{2\,\theta}\varepsilon_*$ *olsun.* $\forall\,\varepsilon \in (0,\varepsilon_*]$ *ve* $\forall\,(t_*, x_*) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}$ *için*

$$F(t_*, x_*, u_*) \subset D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t_*, x_*) + \alpha \overline{B} \qquad (4.5.1)$$

olacak şekilde $u_* \in P$ *olsun.* *O zaman* $\forall\,(t_0, x_0) \in W$, $\forall\,x(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ *ve* $\forall\,t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$d\,(x(t), W(t)) \leq \alpha \frac{p(t)}{a}\big(t - t_0\big) \qquad (4.5.2)$$

olacak biçimde $(U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)) \in \mathcal{U}_{pos} \times \Delta(0,1)$ *süper stratejisi vardır.*
Burada $a = min\,\{p(t) : t \in [0,\theta]\} > 0$ *olarak tanımlıdır.*

Kanıt. Keyfi $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ alınsın ve sabitlensin. O halde (4.5.1) koşulundan, $\forall\ (t,x) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}$ için

$$F(t, x, u_*) \subset D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t, x) + \alpha \overline{B}$$

olacak şekilde $u_* \in P$ vardır. O halde $\forall\ (t,x) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}$ için

$$D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t, x) \neq \emptyset$$

olur. Bu durumda Önerme 4.1.6 gereği, $t \to\ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t)$, $t \in [0,\theta]$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı sürekli olur. $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, $\forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ için $t \to\ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t)$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı sürekli olur. O zaman Önerme 4.1.7 gereği $t \to W(t)$, $t \in [0,\theta]$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı süreklidir.

$\forall$ $(t,x) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ alınsın. $d\left(x, W(t)\right) = \varepsilon(t,x)\ p(t)$ olacak şekilde $\varepsilon(t,x) \geq 0$ vardır.

$$P_*(t,x) = \{u_* \in P : F(t,x,u_*) \subset D_*^+ W^{\varepsilon(t,x)p(\cdot)}(t,x) + \alpha \overline{B}\}$$

kümesi tanımlansın ve $a = min\left\{p(t) : t \in [0,\theta]\right\} > 0$ alınsın. (4.5.1) koşulundan $0 < \varepsilon(t,x) \leq \varepsilon_*$ olacak biçimdeki $(t,x) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ için $P_*(t,x) \neq \emptyset$ olur.

Bu durumda $\forall$ $(t,x) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ için süper strateji aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$U_\alpha(t,x) = \begin{cases} u_* \in P_\alpha(t,x) & , \quad 0 < \varepsilon(t,x) \leq \varepsilon_* \\ u \in P & , \quad \varepsilon(t,x) = 0 \quad \text{veya } \varepsilon(t,x) > \varepsilon_* \end{cases} \tag{4.5.3}$$

ve

$$\delta_\alpha(\mu,t,x,u) = \begin{cases} min\{\eta_2^\mu(t,x,u), \mu, \theta - t\}, & 0 < \varepsilon(t,x) \leq \varepsilon_*, \quad u = U_\alpha(t,x) \\ min\{\mu, \gamma(t,x,\mu), \theta - t\}, & \varepsilon(t,x) = 0, \quad u \in P \\ min\{\mu, \theta - t\}, & \varepsilon(t,x) > \varepsilon_*, \quad u \in P \\ min\{\mu, \theta - t\}, & 0 < \varepsilon(t,x) \leq \varepsilon_*, \quad u \neq U_\alpha(t,x) \end{cases} \tag{4.5.4}$$

alınsın. Burada kullanılan $\eta_2^\mu(t,x,u)$ sayısı Önerme 4.1.5 de, $\gamma(t,x,\mu)$ ise Önerme 4.1.9 da bulunan sayılardır.

$0 \leq \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon_*}{2}$ olmak üzere $d\left(x_0, W(t_0)\right) = \varepsilon_0 p(t_0)$ olacak biçimde $(t_0,x_0) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ alınıp sabitlensin. O halde $(t_0,x_0) \in W^{\varepsilon_0 p(\cdot)}$ olur.

Şimdi $(U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ süper stratejinin, $(t_0,x_0) \in W^{\varepsilon_0 p(\cdot)}$ başlangıç noktasında ürettiği keyfi $x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right)$ yörüngeleri için $\forall$ $t \in [t_0,\theta]$ için,

$$d\left(x(t), W(t)\right) \leq \varepsilon_0 p(t) + \alpha \frac{p(t)}{a}\big(t - t_0\big)$$

olduğu gösterilsin.

Keyfi sabitlenmiş $x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right)$ yörüngesi alındığında, $k \to \infty$ iken $\mu_k \to 0$ ve $x_k(\cdot) \to x(\cdot)$ düzgün yakınsayan $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{Z}_{\mu_k}(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ adımlı yörüngeler dizisi vardır. $\mathcal{Z}_{\mu_k}(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ adımlı yörüngeler kümesinin tanımından, $\forall\ k$ için $x_k(\cdot) \in \mathcal{Y}_{\mu_k}\left(t_0, x_0, U_*, h_k(\cdot)\right)$ olacak biçimde $h_k(\cdot) \in \Delta_{\mu_k}(\delta_\alpha(\cdot))$ fonksiyonu vardır. $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi tanımlanırken, U_α pozisyonlu stratejisi ve $h_k(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, \theta]$ aralığının bir $L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ iyi sıralı kümesini doğurur (bkz. Önerme 2.6.3).

$$\alpha < \frac{a}{2\,\theta}\varepsilon_*, \qquad \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon_*}{2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{a}{\theta}\left(\varepsilon_* - \varepsilon_0\right) - \alpha > &\ \frac{a}{\theta}\left(\varepsilon_* - \varepsilon_0\right) - \frac{a}{2\,\theta}\,\varepsilon_* \\ = &\ \frac{a}{2\,\theta}\,\varepsilon_* - \frac{a}{\theta}\,\varepsilon_0 \\ = &\ \frac{a}{\theta}\,(\frac{\varepsilon_*}{2} - \varepsilon_0) \\ > &\ 0 \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

ve

$$\begin{aligned} a\,\varepsilon_* - \alpha\,\theta > &\ a\,\varepsilon_* - \theta\,\frac{a}{2\,\theta}\,\varepsilon_* \\ = &\ a\,\varepsilon_* - \frac{a}{2}\varepsilon_* \\ = &\ \frac{a}{2}\,\varepsilon_* \\ > &\ 0 \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

olur.

Şimdi genelliği bozmaksızın, keyfi $k = 1, 2, ...$ için

$$\mu_k < \begin{cases} min\left\{\varepsilon_0, \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a}{\theta}\left(\varepsilon_* - \varepsilon_0\right) - \alpha\right], \dfrac{3a\varepsilon_* - 3\alpha\,\theta}{2a + 6\theta})\right\} & , \quad \varepsilon_0 > 0 \\ \\ min\left\{\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a}{\theta}\left(\varepsilon_* - \varepsilon_0\right) - \alpha\right], \dfrac{3a\varepsilon_* - 3\alpha\,\theta}{2a + 6\theta})\right\} & , \quad \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{4.5.7}$$

olsun. Herhangi bir k alınsın ve sabitlensin. $x_k(\cdot) \in \mathcal{Y}_{\mu_k}(t_0, x_0, U_\alpha, h_k(\cdot))$ ve $\forall\ t_\alpha^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ için

$$d\left(x_k(t_\alpha^k), W(t_\alpha^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_\alpha^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\dfrac{p(t_\alpha^k)}{a}(t_\alpha^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 > 0 \\ \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_\alpha^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\dfrac{p(t_\alpha^k)}{a}(t_\alpha^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{4.5.8}$$

olduğu gösterilsin.

$\forall\ k$ için $x_k(t_0) = x_0$ olduğundan, $(t_0, x_k(t_0)) \in W^{\varepsilon_0 p(\cdot)}$ ve $d\left(x_k(t_0), W(t_0)\right) = \varepsilon_0 p(t_0)$ olur.

$$t_1^k = t_0 + h_k\left(t_0, x_0, U_\alpha(t_0, x_0)\right)$$

olarak tanımlıdır. Bu durumda

I. $\varepsilon_0 = 0$ olsun.

$x_k(\cdot)$ adımlı yörüngenin ve (4.5.3) ile verilen U_α pozisyonlu stratejinin tanımından, $[t_0, t_1^k]$ aralığında $x_k(\cdot)$ fonksiyonu bir $u_* \in P$ için

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_*\right), \quad x_k(t_0) = x_0$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. $\varepsilon_0 = 0$ olduğundan , $d\left(x_0, W(t_0)\right) = 0$ ve $(t_0, x_0) \in W$ olduğu bulunur. $t \to W(t)$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı sürekli olduğundan Önerme 4.1.9 gereği $\forall\ t \in [t_0, t_0 + \gamma(t_0, x_0, \mu_k)]$ için,

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \leq \frac{2}{3}\mu_k p(t) \tag{4.5.9}$$

olur. Ayrıca (4.5.4) ile verilen $\delta_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} t_1^k &= t_0 + h_k\left(t_0, x_0, U_\alpha(t_0, x_0)\right) \\ &\leq t_0 + \delta_\alpha\left(\mu_k, t_0, x_0, U_\alpha(t_0, x_0)\right) \\ &\leq t_0 + \gamma\left(t_0, x_0, \mu_k\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (4.5.9) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_1^k), W(t_1^k)\right) \leq & \frac{2}{3}\mu_k p(t_1^k) \\ \leq & \frac{2}{3}\mu_k p(t_1^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_1^k)}{a}(t_1^k - t_0) \end{aligned} \tag{4.5.10}$$

elde edilir

II. $\varepsilon_0 > 0$ olsun.

$x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi $[t_0, t_1^k]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), U_\alpha(t_0, x_0)\right), \quad x_k(t_0) = x_0$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. (4.5.3) ile verilen U_α pozisyonlu stratejinin tanımından

$$F(t_0, x_0, U_\alpha(t_0, x_0)) \subset D_*^+ W^{\varepsilon_0 p(\cdot)}(t_0, x_0) + \alpha \overline{B}$$

olur. Bu kapsam sağlandığından, Önerme 4.1.5 dikate alınırsa, $\forall\ t \in [t_0, t_0 + \eta_2^{\mu_k}(t_0, x_0, U_\alpha(t_0, x_0))]$ için,

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \leq \varepsilon_0 p(t) + (2\mu_k + \alpha)(t - t_0) \tag{4.5.11}$$

olur. Ayrıca (4.5.4) ile verilen $\delta_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} t_1^k &= t_0 + h_k\left(t_0, x_0, U_\alpha(t_0, x_0)\right) \\ &\leq t_0 + \delta_\alpha\left(\mu_k, t_0, x_0, U_\alpha(t_0, x_0)\right) \\ &\leq t_0 + \eta_2^{\mu_k}(t_0, x_0, U_\alpha(t_0, x_0)) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (4.5.11) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_1^k), W(t_1^k)\right) \leq & \varepsilon_0 p(t_1^k) + (2\mu_k + \alpha)(t_1^k - t_0) \\ \leq & \varepsilon_0 p(t_1^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_1^k)}{a}(t_1^k - t_0) \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

elde edilir.

O zaman elde edilen (4.5.10) ve (4.5.12) eşitsizliklerinden $t_1^k \in L\left\{[t_0,\theta]; x_k\left(\cdot\right), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ için (4.5.8) eşitsizliği sağlanır. Yani

$$d\left(x_k(t_1^k), W(t_1^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_1^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\dfrac{p(t_1^k)}{a}(t_1^k - t_0) & , \ \varepsilon_0 > 0 \\ \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_1^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\dfrac{p(t_1^k)}{a}(t_1^k - t_0) & , \ \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{4.5.13}$$

olur. Açıktır ki, $x_k(t_1^k)$ için

$$d\left(x_k(t_1^k), W(t_1^k)\right) = \varepsilon_1 p(t_1^k)$$

olacak biçimde $\varepsilon_1 = \varepsilon\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right) \geq 0$ vardır. O halde (4.5.13) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_1 \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + (2\mu_k + \alpha)\,\dfrac{1}{a}(t_1^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k + (2\mu_k + \alpha)\,\dfrac{1}{a}(t_1^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{4.5.14}$$

olduğu görülür.

$$\mu_k < \begin{cases} min\left\{\varepsilon_0, \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a}{\theta}\left(\varepsilon_* - \varepsilon_0\right) - \alpha\right], \dfrac{3a\varepsilon_* - 3\alpha\,\theta}{2a + 6\theta})\right\} & , \ \varepsilon_0 > 0 \\ \\ min\left\{\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a}{\theta}\left(\varepsilon_* - \varepsilon_0\right) - \alpha\right], \dfrac{3a\varepsilon_* - 3\alpha\,\theta}{2a + 6\theta})\right\} & , \ \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{4.5.15}$$

olduğundan ve (4.5.14) eşitsizliğinden $\varepsilon_0 = 0$ iken

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \leq & \ 2\mu_k\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{a}(t_1^k - t_0)\right] + \frac{\alpha}{a}(t_1^k - t_0) \\ < & \ 2\frac{3a\varepsilon_* - 3\alpha\,\theta}{2a + 6\theta}\left(\frac{1}{3} + \frac{\theta}{a}\right) + \frac{\alpha\theta}{a} \\ = & \ 3\,\frac{a\varepsilon_* - \alpha\theta}{a + 3\theta} \,.\, \frac{a + 3\theta}{3\,a} + \frac{\alpha\,\theta}{a} \\ = & \ \frac{a\,\varepsilon_* - \alpha\,\theta}{a} + \frac{\alpha\,\theta}{a} \\ = & \ \varepsilon_* \end{aligned} \tag{4.5.16}$$

ve $\varepsilon_0 > 0$ iken ise

$$\varepsilon_1 \leq \ \varepsilon_0 + (2\mu_k + \alpha)\,\frac{1}{a}(t_1^k - t_0)$$

$$
\begin{aligned}
&< \varepsilon_0 + \left[2\frac{1}{2}\frac{a}{\theta}\left(\varepsilon_* - \varepsilon_0\right) - \alpha + \alpha\right]\frac{\theta}{a} \\
&\leq \varepsilon_0 + \varepsilon_* - \varepsilon_0 \\
&= \varepsilon_* \qquad (4.5.17)
\end{aligned}
$$

olduğu bulunur. O zaman (4.5.16) ve (4.5.17) eşitsizliklerinden

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_*$$

olduğu görülür. Ayrıca $t_2^k = t_1^k + h_k\left(t_1^k, x_k(t_1^k), U_\alpha(t_1^k, x_k(t_1^k))\right)$ olarak tanımlıdır. Bu durumda $\varepsilon_1 \geq 0$ için iki durum olabilir.

I. $\varepsilon_1 = 0$ olsun.

$x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesinin ve (4.5.3) ile verilen U_α pozisyonlu stratejinin tanımından $[t_1^k, t_2^k]$ aralığında $x_k(\cdot)$ fonksiyonu bir $u_* \in P$için

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_*\right), \quad x_k(t_1^k) = x_1^k$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. $\varepsilon_1 = 0$ olduğundan $d\left(x_k(t_1^k), W(t_1^k)\right) = 0$ ve $(t_1^k, x_k(t_1^k)) \in W$ olur. $t \to W(t)$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı sürekli olduğundan Önerme 4.1.9 gereği $\forall$ $t \in \left[t_1^k, t_1^k + \gamma(t_1^k, x_1^k, \mu_k)\right]$ için,

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \leq \frac{2}{3}\mu_k p(t) \qquad (4.5.18)$$

olur. Ayrıca (4.5.4) ile verilen $\delta_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından

$$
\begin{aligned}
t_2^k &= t_1^k + h_k\left(t_1^k, x_1^k, U_\alpha(t_1^k, x_1^k)\right) \\
&\leq t_1^k + \delta_\alpha\left(\mu_k, t_1^k, x_1^k, U_\alpha(t_1^k, x_1^k)\right) \\
&\leq t_1^k + \gamma\left(t_1^k, x_1^k, \mu_k\right)
\end{aligned}
$$

olur. Bu durumda buradan ve (4.5.18) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) &\leq \frac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) \\
&\leq \frac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_1^k) \qquad (4.5.19)
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir.

II. $\varepsilon_1 > 0$ olsun

$x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi $[t_1^k, t_2^k]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), U_\alpha(t_1^k, x_1^k)\right), \quad x_k(t_1^k) = x_1^k$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. (4.5.3) ile verilen U_α pozisyonlu stratejinin tanımından

$$F(t_1^k, x_1^k, U_\alpha(t_1^k, x_1^k)) \subset D_*^+ W^{\varepsilon_1 p(\cdot)}(t_1^k, x_1^k) + \alpha \overline{B}$$

olur. Bu durumda Önerme 4.1.5 gereği
$\forall\ t \in \left[t_1^k, t_1^k + \eta_2^{\mu_k}(t_1^k, x_1^k, U_\alpha(t_1^k, x_1^k))\right]$ için,

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \leq \varepsilon_1 p(t) + \left(2\mu_k + \alpha\right)\left(t - t_1^k\right) \tag{4.5.20}$$

olduğu görülür. Ayrıca (4.5.4) ile verilen $\delta_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} t_2^k &= t_1^k + h_k\left(t_1^k, x_1^k, U_\alpha(t_1^k, x_1^k)\right) \\ &\leq t_1^k + \delta_\alpha\left(\mu_k, t_1^k, x_1^k, U_\alpha(t_1^k, x_1^k)\right) \\ &\leq t_0 + \eta_2^{\mu_k}\left(t_1^k, x_1^k, U_\alpha(t_1^k, x_1^k)\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (4.5.20) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) &\leq \varepsilon_1 p(t_2^k) + \left(2\mu_k + \alpha\right)\left(t_2^k - t_1^k\right) \\ &\leq \varepsilon_1 p(t_2^k) + \left(2\mu_k + \alpha\right)\frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_1^k) \end{aligned} \tag{4.5.21}$$

elde edilir. Böylece (4.5.19) ve (4.5.21) eşitsizlillerinden

$$d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_1 p(t_2^k) + \left(2\mu_k + \alpha\right)\dfrac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_1^k), & \varepsilon_1 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) + \left(2\mu_k + \alpha\right)\dfrac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_1^k), & \varepsilon_1 = 0 \end{cases} \tag{4.5.22}$$

olur.

$\varepsilon_0 = 0$ olsun. O halde (4.5.14) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_1 \leq \frac{2}{3}\mu_k + \left(2\mu_k + \alpha\right)\frac{1}{a}(t_1^k - t_0) \tag{4.5.23}$$

olur. Bu durumda, eğer $\varepsilon_1 = 0$ ise (4.5.22)eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \leq & \frac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_1^k) \\ \leq & \frac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0) \end{aligned} \tag{4.5.24}$$

olduğu görülür. Eğer $\varepsilon_1 > 0$ ise (4.5.22) ve (4.5.23) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \leq & \varepsilon_1 p(t_2^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_1^k) \\ \leq & \frac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0) \end{aligned} \tag{4.5.25}$$

olur. Böylece (4.5.24) ve (4.5.25) eşitsizliklerinden $\varepsilon_0 = 0$ iken

$$d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \leq \frac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0) \tag{4.5.26}$$

olduğu elde edilir.

$\varepsilon_0 > 0$ olsun. O halde (4.5.14) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0 + 2\mu_k \frac{1}{a}(t_1^k - t_0) \tag{4.5.27}$$

olur. Eğer $\varepsilon_1 = 0$ ise o zaman (4.5.7), (4.5.22) ve (4.5.27) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \leq & \frac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_1^k) \\ \leq & \varepsilon_0 p(t_2^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0) \end{aligned} \tag{4.5.28}$$

yazılır.

Eğer $\varepsilon_1 > 0$ ise (4.5.22) ve (4.5.27) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \leq & \varepsilon_1 p(t_2^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_1^k) \\ \leq & \varepsilon_0 p(t_2^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0^k) \end{aligned} \tag{4.5.29}$$

elde edilir. Böylece (4.5.28) ve (4.5.29) eşitsizliklerinden $\varepsilon_0 > 0$ iken

$$d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_2^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0^k) \tag{4.5.30}$$

olduğu elde edilir. O zaman (4.5.26) ve (4.5.30) eşitsizliklerinden $t_2^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ için

$$d\left(x_k(t_2^k), W(t_2^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_2^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\dfrac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_2^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\dfrac{p(t_2^k)}{a}(t_2^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

olduğu görülür ve (4.5.8) eşitsizliği sağlanır.

Şimdi, $\forall t_\nu^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ alınsın. ν t_ν^k'ya karşılık gelen order sayısı olmak üzere, $\forall\ \beta < \nu$ için

$$d\left(x_k(t_\beta^k), W(t_\beta^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_\beta^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\dfrac{p(t_\beta^k)}{a}(t_\beta^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_\beta^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\dfrac{p(t_\beta^k)}{a}(t_\beta^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \quad (4.5.31)$$

sağladığı kabul edilsin ve

$$d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\dfrac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\dfrac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \quad (4.5.32)$$

olduğu gösterilsin. t_ν^k için iki durum söz konusudur.

1. t_ν^k'nın öncülü olan $t_\sigma^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ sayısı vardır. Bu durumda $\left(t_\sigma^k, t_\nu^k\right) \cap L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\} = \emptyset$ olur.
   $t_\sigma^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ için (4.5.31) sağlandığından

   $$d\left(x_k(t_\sigma^k), W(t_\sigma^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_\sigma^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\dfrac{p(t_\sigma^k)}{a}(t_\sigma^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_\sigma^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\dfrac{p(t_\sigma^k)}{a}(t_\sigma^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \quad (4.5.33)$$

   olur. Açıktır ki $x_k(t_\sigma^k)$ için

   $$d\left(x_k(t_\sigma^k), W(t_\sigma^k)\right) = \varepsilon_\sigma p(t_\sigma^k)$$

   olacak biçimde $\varepsilon_\sigma = \varepsilon\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)\right) \geq 0$ vardır. O halde (4.5.33) eşitsizliğinden

   $$\varepsilon_\sigma \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + (2\mu_k + \alpha)\,\dfrac{1}{a}(t_\sigma^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k + (2\mu_k + \alpha)\,\dfrac{1}{a}(t_\sigma^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \quad (4.5.34)$$

olur.

$$\mu_k < \begin{cases} min\left\{\varepsilon_0, \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a}{\theta}\left(\varepsilon_* - \varepsilon_0\right) - \alpha\right], \dfrac{3a\varepsilon_* - 3\alpha\,\theta}{2a+6\theta})\right\} & , \quad \varepsilon_0 > 0 \\ \\ min\left\{\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a}{\theta}\left(\varepsilon_* - \varepsilon_0\right) - \alpha\right], \dfrac{3a\varepsilon_* - 3\alpha\,\theta}{2a+6\theta})\right\} & , \quad \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{4.5.35}$$

olduğundan ve (4.5.34)'den $\varepsilon_0 = 0$ iken

$$\begin{aligned} \varepsilon_\sigma \leq \;& 2\mu_k\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{a}(t_\sigma^k - t_0)\right] + \frac{\alpha}{a}(t_\sigma^k - t_0) \\ < \;& 2\frac{3a\varepsilon_* - 3\alpha\,\theta}{2a+6\theta}\left(\frac{1}{3} + \frac{\theta}{a}\right) + \frac{\alpha\theta}{a} \\ = \;& 3\,\frac{a\varepsilon_* - \alpha\theta}{a+3\theta}\,.\,\frac{a+3\theta}{3\,a} + \frac{\alpha\,\theta}{a} \\ = \;& \frac{a\,\varepsilon_* - \alpha\,\theta}{a} + \frac{\alpha\,\theta}{a} \\ = \;& \varepsilon_* \end{aligned} \tag{4.5.36}$$

ve $\varepsilon_0 > 0$ iken ise

$$\begin{aligned} \varepsilon_\sigma \leq \;& \varepsilon_0 + (2\mu_k + \alpha)\,\frac{1}{a}(t_\sigma^k - t_0) \\ < \;& \varepsilon_0 + \left[2\frac{1}{2}\frac{a}{\theta}\left(\varepsilon_* - \varepsilon_0\right) - \alpha + \alpha\right]\frac{\theta}{a} \\ \leq \;& \varepsilon_0 + \varepsilon_* - \varepsilon_0 \\ = \;& \varepsilon_* \end{aligned} \tag{4.5.37}$$

olduğu bulunur. O zaman (4.5.36) ve (4.5.37) eşitsizliklerinden

$$\varepsilon_\sigma < \varepsilon_*$$

olduğu görülür. Ayrıca $L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ kümesinin tanımlanışından

$$t_\nu^k = t_\sigma^k + h_k\left(t_\sigma^k, x_k\left(t_\sigma^k\right), U_\alpha\left(t_\sigma^k, x_k\left(t_\sigma^k\right)\right)\right)$$

olarak tanımlıdır. Bu durumda ε_σ için iki durum olabilir.

I. $\varepsilon_\sigma = 0$ olsun.

$x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesinin ve (4.5.3) ile verilen U_α pozisyonlu stratejinin tanımından $[t_\sigma^k, t_\nu^k]$ aralığında $x_k(\cdot)$ fonksiyonu bir $u_* \in P$ için

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_*\right), \quad x_k(t_\sigma^k) = x_\sigma^k$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. $\varepsilon_\sigma = 0$ olduğundan $d\big(x_k(t_\sigma^k), W(t_\sigma^k)\big) = 0$ ve $(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)) \in W$ olur. $t \to W(t)$ küme değerli dönüşümü sağdan alttan yarı sürekli olduğundan Önerme 4.1.9 gereği $\forall\, t \in \left[t_\sigma^k, t_\sigma^k + \gamma(t_\sigma^k, x_\sigma^k, \mu_k)\right]$ için,

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \leq \frac{2}{3}\mu_k p(t) \tag{4.5.38}$$

olur. Ayrıca (4.5.4) ile verilen $\delta_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} t_\nu^k &= t_\sigma^k + h_k\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_\alpha(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right) \\ &\leq t_\sigma^k + \delta_\alpha\left(\mu_k, t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_\alpha(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right) \\ &\leq t_\sigma^k + \gamma\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, \mu_k\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (4.4.33) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) &\leq \frac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) \\ &\leq \frac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_\sigma^k) \end{aligned} \tag{4.5.39}$$

olduğu elde edilir.

ii $\varepsilon_\sigma > 0$ olsun.

$x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi $[t_\sigma^k, t_\sigma^k]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), U_\alpha(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right), \quad x_k(t_\sigma^k) = x_\sigma^k$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. U_α pozisyonlu stratejinin tanımından,

$$F\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_\alpha(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right) \subset D_*^+ W^{\varepsilon_\sigma p(\cdot)}(t_\sigma^k, x_\sigma^k) + \alpha \overline{B}$$

olur. Bu durumda Önerme 4.1.5 gereği $\forall$

$t \in \left[t_\sigma^k, t_\sigma^k + \eta_2^{\mu_k}(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_\alpha(t_\sigma^k, x_\sigma^k))\right]$ için,

$$d\left(x_k(t), W(t)\right) \leq \varepsilon_\sigma p(t) + 2\mu_k(t - t_\sigma^k) \tag{4.5.40}$$

olur. Ayrıca (4.5.4) ile verilen $\delta_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından,

$$\begin{aligned} t_\nu^k &= t_\sigma^k + h_k\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_\alpha(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right) \\ &\leq t_\sigma^k + \delta_\alpha\left(\mu_k, t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_\alpha(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right) \\ &\leq t_0 + \eta_2^{\mu_k}(t_\sigma^k, x_\sigma^k, U_\alpha(t_\sigma^k, x_\sigma^k)) \end{aligned}$$

olur. Böylece buradan ve (4.5.40) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq & \varepsilon_\sigma p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\left(t_\nu^k - t_\sigma^k\right) \\ \leq & \varepsilon_\sigma p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_\sigma^k) \end{aligned} \tag{4.5.41}$$

elde edilir. Bu durumda (4.5.39) ve (4.5.41) eşitsizliklerinden

$$d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_\sigma p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\dfrac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_\sigma), & \varepsilon_\sigma > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\dfrac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_\sigma), & \varepsilon_\sigma = 0 \end{cases} \tag{4.5.42}$$

olduğu görülür.

$\varepsilon_0 = 0$ olsun. O halde (4.5.34) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_\sigma \leq \frac{2}{3}\mu_k + (2\mu_k + \alpha)\frac{1}{a}(t_\sigma^k - t_0) \tag{4.5.43}$$

olur. Bu durumda, eğer $\varepsilon_\sigma = 0$ ise o zaman (4.5.42) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq & \frac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ \leq & \frac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0) \end{aligned} \tag{4.5.44}$$

olur. Eğer $\varepsilon_\sigma > 0$ ise (4.5.42) ve (4.5.43) eşitsizliğinden

$$d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq \varepsilon_\sigma p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_\sigma^k)$$

$$\leq \frac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0) \qquad (4.5.45)$$

olur. Böylece (4.5.44) ve (4.5.45) eşitsizliklerinden $\varepsilon_0 = 0$ iken

$$d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq \frac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0) \qquad (4.5.46)$$

olduğu elde edilir.

$\varepsilon_0 > 0$ olsun. O halde (4.5.34) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_\sigma \leq \varepsilon_0 + (2\mu_k + \alpha)\,\frac{1}{a}(t_\sigma^k - t_0) \qquad (4.5.47)$$

olur. Eğer $\varepsilon_\sigma = 0$ ise (4.5.7), (4.5.42) ve (4.5.47) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) &\leq \frac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ &\leq \varepsilon_0 p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0) \qquad (4.5.48) \end{aligned}$$

olur.

Eğer $\varepsilon_\sigma > 0$ ise (4.5.42), (4.5.47) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) &\leq \varepsilon_\sigma p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ &\leq \varepsilon_0 p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0^k) \qquad (4.5.49) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.5.48) ve (4.5.49) eşitsizliklerinden $\varepsilon_0 > 0$ iken

$$d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0^k) \qquad (4.5.50)$$

olduğu elde edilir. O zaman (4.5.46) ve (4.5.50) eşitsizliklerinden $t_\nu^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ için

$$d\left(x_k(t_\nu^k), W(t_\nu^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \frac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + (2\mu_k + \alpha)\,\frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

olduğu görülür ve (4.5.32) eşitsizliği sağlanır.

2. ν order sayısının öncülü olmasın. Yani t_ν^k noktası iyi sıralı $L\left\{[t_0,\theta];x_k\left(\cdot\right),U_\alpha,h_k(\cdot)\right\}$ kümesinin yığılma noktası olsun. Bu durumda $t_{\lambda_1}^k < t_{\lambda_2}^k < \ldots < t_{\lambda_i}^k < \ldots$, $\forall i$ için $t_{\lambda_i}^k \in L\left\{[t_0,\theta];x_k\left(\cdot\right),U_\alpha,h_k(\cdot)\right\}$ olmak üzere $\lim\limits_{i\to\infty} t_{\lambda_i}^k = t_\nu^k - 0$ olacak biçimde $\left\{t_{\lambda_i}^k\right\}_{i=1}^\infty$ dizisi vardır. O zaman keyfi i için $t_{\lambda_i}^k \in L\left\{[t_0,\theta];x_k\left(\cdot\right),U_\alpha,h_k(\cdot)\right\}$ olmak üzere (4.5.31) sağlandığından

$$d\left(x_k(t_{\lambda_i}^k),W(t_{\lambda_i}^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_{\lambda_i}^k) + (2\mu_k+\alpha)\,\dfrac{p(t_{\lambda_i}^k)}{a}(t_{\lambda_i}^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_{\lambda_i}^k) + (2\mu_k+\alpha)\,\dfrac{p(t_{\lambda_i}^k)}{a}(t_{\lambda_i}^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{4.5.51}$$

olur. Bu durumda $\varepsilon_0 > 0$ iken $i = 1,2,\ldots$ için

$$d\left(x_k(t_{\lambda_i}^k),W(t_{\lambda_i}^k)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_{\lambda_i}^k) + (2\mu_k+\alpha)\,\frac{p(t_{\lambda_i}^k)}{a}(t_{\lambda_i}^k - t_0) \tag{4.5.52}$$

ve $\varepsilon_0 = 0$ iken $i = 1,2,\ldots$ için

$$d\left(x_k(t_{\lambda_i}^k),W(t_{\lambda_i}^k)\right) \leq \frac{2}{3}\mu_k p(t_{\lambda_i}^k) + (2\mu_k+\alpha)\,\frac{p(t_{\lambda_i}^k)}{a}(t_{\lambda_i}^k - t_0) \tag{4.5.53}$$

olur. $i \to \infty$ iken $t_{\lambda_i}^k \to t_\nu^k - 0$, $x_k(\cdot) : [t_0,\theta] \to \mathbb{R}^n$ mutlak sürekli, $p(\cdot) : [0,\theta] \to (0,\infty)$ sürekli fonksiyon, $W \subset [0,\theta]\times\mathbb{R}^n$ kapalı küme olduğundan, (4.5.52) ve (4.5.53) eşitsizliklerinden $i \to \infty$ iken limit alınırsa $\varepsilon_0 > 0$ için

$$d\left(x_k(t_\nu^k),W(t_\nu^k)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_\nu^k) + (2\mu_k+\alpha)\,\frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0) \tag{4.5.54}$$

ve $\varepsilon_0 = 0$ için

$$d\left(x_k(t_\nu^k),W(t_\nu^k)\right) \leq \frac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + (2\mu_k+\alpha)\,\frac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0) \tag{4.5.55}$$

olur. O zaman (4.5.54) ve (4.5.55) eşitsizliklerinden $t_\nu^k \in L\left\{[t_0,\theta];x\left(\cdot\right),U_*,h_k(\cdot)\right\}$ için

$$d\left(x_k(t_\nu^k),W(t_\nu^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_\nu^k) + (2\mu_k+\alpha)\,\dfrac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_\nu^k) + (2\mu_k+\alpha)\,\dfrac{p(t_\nu^k)}{a}(t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanmış olur. Böylece (4.5.8) eşitsizliğinin doğruluğu kanıtlanır.

Şimdi keyfi sabitlenmiş $t_* \in [t_0, \theta]$ alınsın. $\forall\ t_\nu^k,\ t_{\nu+1}^k \in L\{[t_0,\theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\}$ için, $0 < t_{\nu+1}^k - t_\nu^k < \mu_k$ ve $k \to \infty$ iken $\mu_k \to 0^+$ olduğundan, her k için

$$|t_{n(k)}^{(k)} - t_*| \leq \mu_k$$

olacak biçimde $t_{n(k)}^{(k)} \in L\{[t_0,\theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\}$ vardır. O halde $k \to \infty$ iken $t_{n(k)}^{(k)} \to t_*$ olur ve $\forall\ k$ için (4.5.8) eşitsizliğinden

$$d\left(x_k(t_{n(k)}^k), W(t_{n(k)}^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 p(t_{n(k)}^k) + (2\mu_k + \alpha)\dfrac{p(t_{n(k)}^k)}{a}(t_{n(k)}^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \dfrac{2}{3}\mu_k p(t_{n(k)}^k) + (2\mu_k + \alpha)\dfrac{p(t_{n(k)}^k)}{a}(t_{n(k)}^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{4.5.56}$$

olur. Bu durumda $k \to \infty$ iken $t_{n(k)}^{(k)} \to t_*$, $x_k(\cdot) \to x(\cdot)$, $p\left(t_{n(k)}^{(k)}\right) \to p(t_*)$, $\mu_k \to 0^+$, $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kapalı küme olduğundan , (4.5.56) eşitsizliğinden

$$d\left(x(t_*), W(t_*)\right) \leq \varepsilon_0 p(t_*) + \alpha\frac{p(t_*)}{a}(t_* - t_0) \tag{4.5.57}$$

olduğu bulunur. $t_* \in [t_0, \theta]$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, (4.5.57) eşitsizliğinden keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$d\left(x(t), W(t)\right) \leq \varepsilon_0 p(t) + \alpha\frac{p(t)}{a}(t - t_0) \tag{4.5.58}$$

olduğu görülür.

$x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right)$ keyfi olduğundan, (4.5.58) eşitsizliği keyfi $x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right)$ için doğru olur.

$\varepsilon_0 \geq 0$ sayısı $d\left(x(t_0), W(t_0)\right) = \varepsilon_0 p(t_0)$ koşulundan seçilmektedir. Eğer $(t_0, x_0) \in W$ ise, o zaman $d\left(x(t_0), W(t_0)\right) = 0$ ve $\varepsilon_0 = 0$ olur. O halde (4.5.58) eşitsizliğinden, $\forall\ x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right)$ ve $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$d\left(x(t), W(t)\right) \leq \alpha\frac{p(t)}{a}(t - t_0)$$

olur. □

Teorem 4.5.1'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.5.1. *Teorem 4.5.1'in koşulları sağlansın.* $(t_0, x_0) \in [0,\theta]\times\mathbb{R}^n$ *başlangıç pozisyonu,* $d\,(x_0, W(t_0)) = \varepsilon_0 p(t_0)$*,* $\varepsilon_0 \in (0, \dfrac{\varepsilon_*}{2}), \alpha < \dfrac{a}{2\,\theta}\,\varepsilon_*$ *olarak alınsın.* $(U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ *süper stratejisi* (4.5.3) *ve* (4.5.4) *ile tanımlansın. O zaman* $\forall\, x(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ *ve* $t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$d\,(x(t), W(t)) \leq \varepsilon_0 p(t) + \alpha\,\frac{p(t)}{a}\big(t - t_0\big) \tag{4.5.59}$$

olur. $a = min\,\{p(t) : t \in [0,\theta]\}$ *olarak tanımlıdır.*

Şimdi, (4.3.26) sisteminde $(U, \delta(\cdot)) \in U_{pos} \times \Delta(0,1)$ süper stratejisinin (t_0, x_0) başlangıç noktasından ürettiği yörüngeler kümesi $X_*\,(t_0, x_0, U, \delta(\cdot))$ olmak üzere Teorem 4.4.1 ve Teorem 4.5.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.5.2. $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ *kapalı küme,* $p(\cdot) : [0,\theta] :\longrightarrow (0,\infty)$ *sürekli fonksiyon* $\varepsilon_* > 0$*,* $\alpha < \dfrac{a}{2\,\theta}\,\varepsilon_*$ *olsun.* $\forall\,\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ *ve* $\forall\,(t_*, x_*) \in W^{\varepsilon p(\cdot)}$ *için*

$$F(t_*, x_*, u_*) \subset D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t_*, x_*) \tag{4.5.60}$$

olacak şekilde $u_* \in P$ *olsun. O zaman* $\forall\,(t_0, x_0) \in W$*,* $\forall\, x(\cdot) \in X_*\,(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ *ve* $\forall\, t \in [t_0, \theta]$ *olmak üzere*

$$d\,(x(t), W(t)) \leq \alpha\frac{p(t)}{a}\big(t - t_0\big) \tag{4.5.61}$$

olacak biçimde $(U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)) \in \mathcal{U}_{pos} \times \Delta(0,1)$ *süper stratejisi vardır.*
Burada $a = min\,\{p(t) : t \in [0,\theta]\} > 0$ *olarak tanımlıdır.*

Sonuç 4.5.3. *Sonuç 4.5.2'in koşulları sağlansın.* $(t_0, x_0) \in [0,\theta]\times\mathbb{R}^n$ *başlangıç pozisyonu,* $d\,(x_0, W(t_0)) = \varepsilon_0 p(t_0)$*,* $\varepsilon_0 \in (0, \dfrac{\varepsilon_*}{2}), \alpha < \dfrac{a}{2\,\theta}\,\varepsilon_*$ *olarak alınsın. O zaman* $\forall\, x(\cdot) \in X_*\,(t_0, x_0, U^*_\alpha, \delta^*_\alpha(\cdot))$ *ve* $t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$d\,(x(t), W(t)) \leq \varepsilon_0 p(t) + \alpha\,\frac{p(t)}{a}\big(t - t_0\big) \tag{4.5.62}$$

olacak biçimde $(U^*_\alpha, \delta^*_\alpha(\cdot))$ *süper stratejisi vardır.*

Burada $a = min\,\{p(t) : t \in [0,\theta]\} > 0$ *olarak tanımlıdır.*

4.6 Örnek

Şimdi, verilen kapalı bir kümenin, dinamiği kontrol edilebilir diferansiyel içerme ile ifade edilen kontrol sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant olması özelliğini örnekleyen bir örnek verilsin.

Davranışı

$$\dot{x} \in \left[\sqrt[3]{x} - \beta \, , \, \sqrt[3]{x} + \beta\right] + u \tag{4.6.1}$$

kontrol vektörlü diferansiyel içermesi ile verilen sistem ele alınsın. Burada $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$, $u \in [-\alpha, \alpha]$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ olsun. Kapalı $W \subset [0,1] \times \mathbb{R}$ kümesi

$$W = \{(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R} : x = 0\} \tag{4.6.2}$$

olarak tanımlansın. (4.6.2) ile verilen W kümesinin (4.6.1) sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliği incelensin.

$\alpha = \beta = 0$ olsun.
Bu durumda (4.6.1) sistemi

$$\dot{x} = \sqrt[3]{x} \tag{4.6.3}$$

olarak yazılır. $(0,0) \in W$ alınsın. O halde

$$x(t) = 0 \quad \text{ve} \quad x(t) = \sqrt{(\frac{2}{3}\, t)^3}, \quad t \in [0,1]$$

fonksiyonları (4.6.3) sisteminin $(0,0)$ noktasından çıkan yörüngeleri olur. $\forall$ $t \in (0,1]$ için $x(t) = \sqrt{(\frac{2}{3}\, t)^3} \notin W(t)$ olduğundan (4.6.2) ile verilen W kümesi (4.6.1) sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant küme değildir.

$\alpha > \beta \geq 0$ olsun.
$r = \alpha - \beta$, $\varepsilon_* = r^3$ ve $t \in [0,1]$ için $p(t) = 1$ alınsın. $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ için

$$W^{\varepsilon p(\cdot)} = \{(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R} : |x| \leq \varepsilon\}$$

olarak tanımlanır ve $t \to W^{\varepsilon p(\cdot)}(t)$, $t \in [0,1]$ küme değerli dönüşümünün $(t,x) \in [0,1) \times \mathbb{R}$ noktasındaki alt türev kümesi

$$D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t,x) = \begin{cases} (-\infty, 0], & x = \varepsilon \\ (-\infty, \infty), & |x| < \varepsilon \\ [0, \infty), & x = -\varepsilon \end{cases} \tag{4.6.4}$$

olarak bulunur. Bu durumda Teorem 4.2.1 de (4.2.1) koşulunun sağlanıp sağlanmadığı incelensin.

$(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ ve $|x| < \varepsilon$ alınsın. O zaman (4.6.4) gereği $D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t,x) = (-\infty, \infty)$ olduğundan, keyfi $u \in [-\alpha, \alpha]$ için (4.2.1) koşulu sağlanır.

$(t,x) \in [0,1) \times \mathbb{R}$ ve $x = \varepsilon$ alınsın. Bu durumda $u_* = -\alpha$ olarak seçilsin. O zaman $r = \alpha - \beta$, $\varepsilon_* = r^3$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$, $D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t,x) = (-\infty, 0]$ olduğundan, (4.6.1) sisteminin sağ tarafı,

$$\begin{aligned} \left[\sqrt[3]{x} - \beta\,, \sqrt[3]{x} + \beta\right] + u_* &= \left[\sqrt[3]{\varepsilon} - \alpha - \beta\,, \sqrt[3]{\varepsilon} - \alpha + \beta\right] \\ &= \left[\sqrt[3]{\varepsilon} - \alpha + \beta\ - \beta - \beta\,, \sqrt[3]{\varepsilon} - \alpha + \beta\right] \\ &= \left[\sqrt[3]{\varepsilon} - r - 2\beta\,, \sqrt[3]{\varepsilon} - r\right] \\ &\subset (-\infty\,, 0] \\ &= D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t,x) \end{aligned} \tag{4.6.5}$$

içermesini sağlar.

$(t,x) \in [0,1) \times \mathbb{R}$ ve $x = -\varepsilon$ alınsın. Bu durumda $u_* = \alpha$ olarak seçilsin. O zaman $r = \alpha - \beta$, $\varepsilon_* = r^3$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$, $D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t,x) = [0, \infty)$ olduğundan, (4.6.1) sisteminin sağ tarafı,

$$\begin{aligned} \left[\sqrt[3]{x} - \beta\,, \sqrt[3]{x} + \beta\right] + u_* &= \left[-\sqrt[3]{\varepsilon} + \alpha - \beta\,, -\sqrt[3]{\varepsilon} + \alpha + \beta\right] \\ &= \left[-\sqrt[3]{\varepsilon} + r\,, -\sqrt[3]{\varepsilon} + \alpha - \beta + \beta + \beta\right] \\ &= \left[-\sqrt[3]{\varepsilon} + r\,, -\sqrt[3]{\varepsilon} + r + 2\beta\right] \\ &\subset [0\,, \infty) \\ &= D_*^+ W^{\varepsilon p(\cdot)}(t,x) \end{aligned} \tag{4.6.6}$$

içermesini sağlar.

O zaman (4.6.5) ve (4.6.6) kapsamlarından, Teorem 4.2.1 de (4.2.1) koşulunun sağlandığı görülür. Böylece $\alpha > \beta \geq 0$ durumunda Teorem 4.2.1 de (4.2.1) koşulu sağlandığından (4.6.2) ile verilen W kümesi (4.6.1) sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant kümedir.

Şimdi Teorem 4.2.1 de (4.2.1) koşulunun $\varepsilon = 0$ olurken sağlanıp sağlanmadığı incelensin. $\varepsilon = 0$ olarak alınırsa, $W^{\varepsilon p(\cdot)} = W$ olur. Bu durumda W kümesinin tanımından $(t, x) \in W$ iken, (4.6.1) sisteminin sağ tarafı,

$$F(t, x, u) = [-\beta, \beta] + u$$

ve $(t, x) \in W$ noktasındaki üst türev kümesi $D_*^+ W(t, x) = \{0\}$ olur. O zaman Teorem 4.2.1 de (4.2.1) koşulunun sağlanabilmesi için

$$[-\beta, \beta] + u \subset \{0\} \tag{4.6.7}$$

olmalıdır. $\beta > 0$ olduğunda (4.6.7) yi sağlayacak biçimde $u \in [-\alpha, \alpha]$ bulunamaz.

Şimdi $\alpha \leq \beta$ durumu incelensin.

Keyfi $(U\,, \delta(\cdot)) \in U_{pos} \times \Delta(0,1)$ süper strateji alınsın ve sabitlensin. $X\,(0, 0, U, \delta(\cdot))$ kümesi $(U\,, \delta(\cdot))$ süper stratejisinin $(0, 0) \in W$ başlangıç pozisyonunda ürettiği yörüngeler kümesi olur. Şimdi $t \in (0, 1]$ için $x_*(t) \notin W(t)$ olacak biçimde bir $x_*(t) \in X\,(0, 0, U, \delta(\cdot))$ yörüngesinin olduğu gösterilsin.

$k \to \infty$ iken $\mu_k \to 0^+$ olacak biçimde $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi, her k için $h_k(\cdot) \in \Delta_{\mu_k}(\delta(\cdot))$ fonksiyonu alınsın . μ_k ve $h_k(\cdot)$ fonksiyonuna karşılık $x_k(\cdot) \in Y\,(0, 0, U, h_k(\cdot))$ adımlı yörüngesi aşağıdaki gibi alınsın.

Bu durumda $u_0^{(k)} = U(0, 0)$, $t_1^{(k)} = h_k(0, 0, u_0^{(k)})$ olmak üzere $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi $[0, t_1^{(k)}]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in \left[\sqrt[3]{x_k(t)} - \beta\,, \sqrt[3]{x_k(t)} + \beta\right] + u_0^{(k)}, \quad x_k(0) = 0$$

diferansiyel içermesinin çözümlerinden biri olarak alınır. Diferansiyel içerme tekrar düzenlenirse, $[0, t_1^{(k)}]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in \left[\sqrt[3]{x_k(t)} + u_0^{(k)} - \beta\,, \sqrt[3]{x_k(t)} + u_0^{(k)} + \beta\right], \quad x_k(0) = 0 \tag{4.6.8}$$

olur. $u_0^{(k)} \in [-\alpha, \alpha]$, $\alpha \le \beta$ olduğundan $u_0^{(k)} - \beta \le 0$ ve $u_0^{(k)} + \beta \ge 0$ olur. O zaman

$$\sqrt[3]{x_k(t)} + u_0^{(k)} - \beta \le \sqrt[3]{x_k(t)} \le \sqrt[3]{x_k(t)} + u_0^{(k)} + \beta \tag{4.6.9}$$

olduğundan

$$\sqrt[3]{x_k(t)} \in \left[\sqrt[3]{x_k(t)} + u_0^{(k)} - \beta \,,\, \sqrt[3]{x_k(t)} + u_0^{(k)} + \beta\right] \tag{4.6.10}$$

olarak bulunur. Bu durumda (4.6.8)– (4.6.10) den $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi $[0, t_1^{(k)}]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) = \sqrt[3]{x_k(t)}\,, \quad x_k(0) = 0 \tag{4.6.11}$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınabilir.

$$x_k(t) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^3}, \quad t \in [0, t_1^{(k)}] \tag{4.6.12}$$

fonksiyonu (4.6.11) Cauchy probleminin çözümlerinden biri olduğundan, $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi $[0, t_1^{(k)}]$ aralığında (4.6.12) ile verilen fonksiyon olsun.

$$x_1^{(k)} = x_k(t_1^{(k)}) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}t_1^{(k)}\right)^3}, u_1^{(k)} = U\left(t_1^{(k)}, x_1^{(k)}\right), t_2^{(k)} = t_1^{(k)} + h_k(t_1^{(k)}, x_1^{(k)}, u_1^{(k)})$$

olarak alınsın. $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi $[t_1^{(k)}, t_2^{(k)}]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in \left[\sqrt[3]{x_k(t)} - \beta \,,\, \sqrt[3]{x_k(t)} + \beta\right] + u_0^{(k)}, \quad x_k(t_1^{(k)}) = x_1^{(k)}$$

diferansiyel içermesinin çözümlerinden biri olarak alınır. Diferansiyel içerme tekrar düzenlenirse, diferansiyel içerme $[t_1^{(k)}, t_2^{(k)}]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in \left[\sqrt[3]{x_k(t)} + u_1^{(k)} - \beta \,,\, \sqrt[3]{x_k(t)} + u_1^{(k)} + \beta\right], \quad x_k(t_1^{(k)}) = x_1^{(k)} \tag{4.6.13}$$

olarak bulunur. $u_1^{(k)} \in [-\alpha, \alpha]$, $\alpha \le \beta$ olduğundan $u_1^{(k)} - \beta \le 0$ ve $u_1^{(k)} + \beta \ge 0$ olur. O zaman

$$\sqrt[3]{x_k(t)} + u_1^{(k)} - \beta \le \sqrt[3]{x_k(t)} \le \sqrt[3]{x_k(t)} + u_1^{(k)} + \beta \tag{4.6.14}$$

olduğundan

$$\sqrt[3]{x_k(t)} \in \left[\sqrt[3]{x_k(t)} + u_1^{(k)} - \beta\,,\, \sqrt[3]{x_k(t)} + u_1^{(k)} + \beta\right] \tag{4.6.15}$$

olur. Bu durumda (4.6.13) - (4.6.15) den $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi $[t_1^{(k)}, t_2^{(k)}]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) = \sqrt[3]{x_k(t)}\,, \quad x_k(t_1^{(k)}) = x_1^{(k)} \tag{4.6.16}$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınabilir.

$$x_k(t) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^3}, \quad t \in [t_1^{(k)}, t_2^{(k)}] \tag{4.6.17}$$

fonksiyonu (4.6.16) Cauchy probleminin çözümlerinden biri olduğundan, $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi $[t_1^{(k)}, t_2^{(k)}]$ aralığında (4.6.17) ile verilen fonksiyon olsun. Benzer biçimde bu prosedüre devam edilsin. O zaman

$$x_k(t) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^3}, \quad t \in [0, 1] \tag{4.6.18}$$

fonksiyonu, (4.6.1) sisteminin $(U, \delta(\cdot))$ stratejisi tarafından $(0, 0)$ başlangıç pozisyonundan ürettiği adımlı yörüngesi yani, $x_k(\cdot) \in \mathcal{Y}_{\mu_k}(0, 0, U, h_k(\cdot))$ olur. O zaman $k \to \infty$ iken

$$x_k(t) \to x_*(t) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^3}, \quad t \in [0, 1] \tag{4.6.19}$$

olduğundan $x_*(\cdot) \in X\,(0, 0, U, \delta(\cdot))$ olur. Yani (4.6.19) ile verilen $x_*(\cdot) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (4.6.1) sisteminin $(U, \delta(\cdot))$ stratejisi tarafından $(0, 0)$ başlangıç pozisyonundan ürettiği yörüngesidir. Bu durumda $t \in (0, 1]$ için $x_*(t) \notin W(t)$ olur. Yani (4.6.2) ile verilen W kümesi (4.6.1) sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant küme değildir.

5 FONKSİYONUN SEVİYE KÜMESİ OLARAK VERİLEN KÜMELERİN POZİSYONLU ZAYIF İNVARYANTLIĞI

Bu bölümde, fonksiyonun seviye kümesi olarak verilen kapalı kümenin, davranışı kontrol vektörlü (2.5.1) diferansiyel içermesi ile verilen dinamik sisteme göre pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliği ele alınmıştır. Verilen fonksiyonun yöne göre üst türevi kullanılarak seviye kümesi olarak verilen kümelerin pozisyonlu zayıf invaryant olması için yeter koşullar elde edilmiştir.

5.1 Fonksiyonların Yöne Göre Üst Türevlerinin Kontrol Vektörü Olan Diferansiyel İçerme İle İlişkisi

Bu bölümde, fonksiyonun seviye kümesi olarak verilen kümelerin pozisyonlu zayıf invaryantlığı için elde edilecek yeter koşulların kanıtlarında kullanılacak tanımlar ve önermeler verilmiştir.

$c(\cdot) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olsun. $c(\cdot)$ fonksiyonunun $(t,x) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ noktasında $(\alpha, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ yönüne göre üst türevi

$$\frac{\partial^+ c(t,x)}{\partial (\alpha, f)} = \limsup_{\substack{\delta \to 0^+ \\ \|(\beta,y)\| \to 0}} \left[c\left(t + \delta\,\alpha + \delta\,\beta, x + \delta\, f + \delta\, y\right) - c\left(t,x\right)\right]/\delta$$

olarak tanımlanır (bkz. [13, 20, 69]). Bu durumda $c(\cdot)$ fonksiyonunun $(t,x) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ noktasında $(1, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ yönüne göre üst türevi

$$\frac{\partial^+ c(t,x)}{\partial (1, f)} = \limsup_{\substack{\delta \to 0^+ \\ \|(\beta,y)\| \to 0}} \left[c\left(t + \delta + \delta\,\beta, x + \delta\, f + \delta\, y\right) - c\left(t,x\right)\right]/\delta$$

olur. Şimdi $c(\cdot)$ fonksiyonunun $(t,x) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ noktasında $(\alpha, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ yönüne göre farklı bir üst türevi tanımlansın.

Tanım 5.1.1. $c(\cdot) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (t,x) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n,\ (\alpha, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

olsun.

$$\limsup_{\substack{\delta\to 0^+\\ \|y\|\to 0}} \left[c\left(t+\delta\,\alpha, x+\delta\,f+\delta\,y\right)-c\left(t,x\right)\right]/\delta$$

sayısına $c(\cdot)$ *fonksiyonunun* $(t,x)\in[0,\theta)\times\mathbb{R}^n$ *noktasında* $(\alpha,f)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *yönüne göre üst* $D-$*türevi denir ve* $\dfrac{D^+\,c(t,x)}{D\,(\alpha,f)}$ *olarak gösterilir. Yani*

$$\frac{D^+\,c(t,x)}{D\,(\alpha,f)}=\limsup_{\substack{\delta\to 0^+\\ \|y\|\to 0}} \left[c\left(t+\delta\,\alpha, x+\delta\,f+\delta\,y\right)-c\left(t,x\right)\right]/\delta$$

olur.

Bu durumda açıktır ki,

$$\frac{D^+\,c(t,x)}{D\,(1,f)}=\limsup_{\substack{\delta\to 0^+\\ \|y\|\to 0}} \left[c\left(t+\delta, x+\delta\,f+\delta\,y\right)-c\left(t,x\right)\right]/\delta$$

olur.

Aşağıdaki önermeler doğrudur.

Önerme 5.1.1. $c(\cdot):[0,\theta]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $(t,x)\in[0,\theta)\times\mathbb{R}^n$, $(\alpha,f)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *olsun. O halde*

$$\frac{D^+\,c(t,x)}{D\,(\alpha,f)}\leq\frac{\partial^+\,c(t,x)}{\partial\,(\alpha,f)}$$

olur.

Önerme 5.1.2. $c(\cdot):[0,\theta]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. O halde* $\forall\ (t,x)\in[0,\theta)\times\mathbb{R}^n$ *ve* $(\alpha,f)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *için*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^+\,c(t,x)}{\partial\,(\alpha,f)} &= \frac{D^+\,c(t,x)}{D\,(\alpha,f)}\\ &= \alpha\,\frac{\partial\,c(t,x)}{\partial\,t}+\langle\frac{\partial\,c(t,x)}{\partial\,x},f\rangle\end{aligned}$$

olur.

Önerme 5.1.3. $c(\cdot):[0,\theta]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *fonksiyonu yerel Lipschitz olsun. O halde* $\forall\ (t,x)\in[0,\theta)\times\mathbb{R}^n$ *ve* $(\alpha,f)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *için*

$$\frac{\partial^+\,c(t,x)}{\partial\,(\alpha,f)}=\frac{D^+\,c(t,x)}{D\,(\alpha,f)}=\limsup_{\delta\to 0^+}\left[c\left(t+\delta\,\alpha, x+\delta\,f\right)-c\left(t,x\right)\right]/\delta$$

olur.

Önerme 5.1.4. *[20] $I = \{1, 2, \ldots r\}$ sonlu bir küme, $\forall\ i \in I$ için $c_i(\cdot) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, $(t,x) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ için*

$$c(t,x) = \max_{i \in I} c_i(t,x)$$

olsun. O zaman $c(\cdot) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $(t,x) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ noktasında $(\alpha, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ yönüne göre üst türevleri aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\frac{D^+ c(t,x)}{D(\alpha,f)} = \frac{\partial^+ c(t,x)}{\partial(\alpha,f)} = \max_{i \in I_0(t,x)} \left[\alpha \frac{\partial c_i(t,x)}{\partial t} + \langle \frac{\partial c_i(t,x)}{\partial x}, f \rangle \right].$$

Burada, $I_0(t,x) = \left\{ i_* \in I : c_{i_*}(t,x) = \max_{i \in I} c_i(t,x) \right\}$,

$$\frac{\partial c_i(t,x)}{\partial x} = grad_x c_i(t,x) = \{ \frac{\partial c_i(t,x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial c_i(t,x)}{\partial x_n} \}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 5.1.5. *$\delta_* > 0, \delta \in (0, \delta_*]$ olmak üzere, $D(\delta), E \subset \mathbb{R}^n$ alınsın. $\forall\ \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall\ \delta \in (0, \delta(\varepsilon)]$ için $D(\delta) \subset E + \varepsilon \cdot B$ olacak biçimde $\delta(\varepsilon) \in (0, \delta_*]$ olsun. Bu durumda $\forall\ \delta \in (0, \delta_*]$ için $D(\delta) \subset E + r(\delta) \cdot B$ olacak biçimde ve $\delta \to 0^+$ iken $r(\delta) \to 0^+$ olan $r(\cdot) : (0, \delta_*] \to [0, \infty)$ fonksiyonu vardır.*

Kanıt. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall\ \delta \in (0, \delta(\varepsilon)]$ için

$$D(\delta) \subset E + \varepsilon \cdot B \tag{5.1.1}$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ olsun. Önerme 2.2.2 gereği,

$$\beta(D(\delta), E) = inf\{r > 0 \,: D(\delta) \subset E + r \cdot B\}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda (5.1.1) kapsamından,

$$0 \leq \beta\left(D(\delta), E\right) \leq \varepsilon \tag{5.1.2}$$

olur. Böylece, $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\delta \in (0, \delta(\varepsilon)]$ iken $0 \leq \beta\left(D(\delta), E\right) \leq \varepsilon$ olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır. Bu ise

$$\lim_{\delta \to 0^+} \beta\left(D(\delta), E\right) = 0 \tag{5.1.3}$$

olması demektir. O zaman (5.1.3)'dan $\forall\ \delta \in (0, \delta_*]$ için

$$\beta\left(D(\delta), E\right) = r(\delta)$$

olacak biçimde ve $\delta \to 0^+$ iken $r(\delta) \to 0^+$ olan $r(\cdot) : (0, \delta_*] \to [0, \infty)$ fonksiyonu vardır. Bu durumda yeniden Önerme 2.2.2 gereği, $\delta \to 0^+$ iken $r(\delta) \to 0^+$ olmak üzere, $\forall\ \delta \in (0, \delta_*]$ için

$$D(\delta) \subset E + r(\delta) \cdot B$$

olduğu görülür. $\square$

Önerme 5.1.6. *$c(\cdot) : [0, \theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ alttan yarı sürekli fonksiyon, $(t_*, x_*, u_*) \in [0, \theta) \times \mathbb{R}^n \times P$ için*

$$\sup_{f \in F(t_*, x_*, u_*)} \frac{D^+ c(t, x)}{D(1, f)} \leq 0 \tag{5.1.4}$$

olsun. O zaman $\forall\ \mu \in (0, 1)$ için $x(\cdot) \in X\left(t_*, x_*, u_*\right)$ ve $\delta \in [0, \tau_1^{\mu}(t_*, x_*, u_*)]$ iken

$$c\left(t_* + \delta, x(t_* + \delta)\right) - c\left(t_*, x_*\right) \leq \delta\, \mu \tag{5.1.5}$$

olacak biçimde $\tau_1^{\mu}(t_*, x_*, u_*) > 0$ vardır.

Kanıt. Önermenin aksi kabul edilsin. O zaman

$$c\left(t_* + \delta_k, x_k(t_* + \delta_k)\right) - c\left(t_*, x_*\right) > \delta_k\, \mu_* \tag{5.1.6}$$

olacak biçimde $\mu_* > 0$ sayısı, $k = 1, 2, \ldots$ için $x_k(\cdot) \in X\left(t_*, x_*, u_*\right)$ olmak üzere $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi ve $k \to 0^+$ iken $\delta_k \to 0^+$ olan $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi vardır.
Ayrıca Önerme 4.1.1 gereği $(t_*, x_*, u_*) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P$ iken $\forall \mu > 0$ ve $\forall \delta \in [0, \eta_*^{\mu})$ için

$$X\left(t_* + \delta; t_*, x_*, u_*\right) \subset x_* + \delta \cdot F\left(t_*, x_*, u_*\right) + \delta\mu \cdot \overline{B} \tag{5.1.7}$$

olacak şekilde bir $\eta_*^{\mu} = \eta_*^{\mu}\left(t_*, x_*, u_*\right) > 0$ vardır. $\mu = 1$ iken $\eta_*^1 = \eta_*^1\left(t_*, x_*, u_*\right)$ olsun. Bu durumda Önerme 5.1.5 ve (5.1.7) kapsamından $\delta \to 0^+$ iken $r(\delta) \to 0^+$ olmak üzere, $\forall\ \delta \in (0, \eta_*^1]$ için

$$X\left(t_* + \delta; t_*, x_*, u_*\right) \subset x_* + \delta \cdot F\left(t_*, x_*, u_*\right) + \delta r(\delta) \cdot \overline{B} \tag{5.1.8}$$

olacak biçimde $r(\cdot) : (0, \eta_*^1] \to [0, \infty)$ fonksiyonu vardır. Genelliği bozmaksızın, $\forall\ k = 1, 2, \ldots$ için $\delta_k \le \eta_*^1$ olduğu varsayılsın. O zaman keyfi sabitlenmiş k için, (5.1.8) kapsamından $\delta_k \to 0^+$ iken $r(\delta_k) \to 0^+$ olmak üzere

$$x_k\,(t_* + \delta_k) = x_* + \delta_k\, f_k + \delta_k\, r(\delta_k)\, b_k, \quad \delta_k \in (0, \eta_*^1] \tag{5.1.9}$$

olacak biçimde $f_k \in F\,(t_*, x_*, u_*)$ ve $b_k \in \overline{B}$ vardır. $F(t_*, x_*, u_*)$ kompakt olduğundan, genelliği bozmadan $k \to \infty$ iken $f_k \to f_*$ olacak şekilde bir $f_* \in F(t_*, x_*, u_*)$ bulunur.

$$y_k = f_k - f_* + r(\delta_k) b_k$$

olarak alınırsa $k \to \infty$ iken $\| \, y_k \, \| \to 0^+$ olur. (5.1.9) eşitliği tekrar düzenlenirse $\delta_k \in (0, \eta_*^1]$ için

$$\begin{aligned} x_k\,(t_* + \delta_k) &= x_* + \delta_k\, f_k + \delta_k\, r(\delta_k)\, b_k \\ &= x_* + \delta_k\, f_k + \delta_k\, f_* - \delta_k\, f_* + \delta_k\, r(\delta_k)\, b_k \\ &= x_* + \delta_k\, f_* + \delta_k[f_k - f_* + r(\delta_k)\, b_k] \\ &= x_* + \delta_k\, f_* + \delta_k\, y_k \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

elde edilir. O zaman $\forall\ k = 1, 2, \ldots$ için (5.1.6) ve (5.1.10) eşitliğinden, $\delta_k \in (0, \eta_*^1]$ için

$$c\,(t_* + \delta_k,\, x_* + \delta_k\, f_* + \delta_k\, y_k) - c\,(t_*, x_*) > \delta_k\, \mu_* \tag{5.1.11}$$

olur. Buradan ve $c(\cdot)$ fonksiyonunun yöne göre üst türevi tanımından

$$\begin{aligned} 0 < \mu_* &\le \limsup_{k \to \infty} \left[c\,(t_* + \delta_k\,,\, x_* + \delta_k\, f_* + \delta_k\, y_k) - c\,(t_*, x_*)\right]/\delta_k \\ &\le \limsup_{\substack{\delta \to 0^+ \\ \|y\| \to 0^+}} \left[c\,(t_* + \delta\,,\, x_* + \delta\, f_* + \delta\, y) - c\,(t_*, x_*)\right]/\delta \\ &= \frac{D^+ c(t_*, x_*)}{D(1, f_*)} \end{aligned} \tag{5.1.12}$$

olduğu elde edilir. Yani bir $f_* \in F(t_*, x_*, u_*)$ için $\dfrac{D^+ c(t_*, x_*)}{D(1, f_*)} > 0$ olur. O zaman bu sonuç (5.1.4) ile çelişir. Bu durumda kabul yanlış olup $\forall\ \mu > 0$, $\forall\ x(\cdot) \in X\,(t_*, x_*, u_*)$ ve $\forall\ \delta \in [0, \tau_1^{\mu}(t_*, x_*, u_*)]$ için (5.1.5) eşitsizliği doğru olacak biçimde $\tau_1^{\mu}(t_*, x_*, u_*) > 0$ vardır. □

Önerme 5.1.7. *$c(\cdot) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ alttan yarı sürekli fonksiyon, $\alpha > 0$, $(t_*, x_*, u_*) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n \times P$ için*

$$\sup_{f \in F(t_*,x_*,u_*)} \frac{D^+ c(t,x)}{D(1,f)} \leq \alpha \tag{5.1.13}$$

olsun. O zaman $\forall\ \mu \in (0,1)$ için $x(\cdot) \in X\,(t_*, x_*, u_*)$ ve $\delta \in [0, \tau_2^\mu(t_*, x_*, u_*)]$ iken

$$c\,(t_* + \delta, x(t_* + \delta)) - c\,(t_*, x_*) \leq \delta\,(\mu + \alpha) \tag{5.1.14}$$

olacak biçimde $\tau_2^\mu(t_*, x_*, u_*) > 0$ vardır.

Kanıt. Önermenin aksi kabul edilsin. O zaman

$$c\,(t_* + \delta_k, x_k(t_* + \delta_k)) - c\,(t_*, x_*) > \delta_k\,(\mu_* + \alpha) \tag{5.1.15}$$

olacak biçimde $\mu_* > 0$ sayısı, $k = 1, 2, \ldots$ için $x_k(\cdot) \in X\,(t_*, x_*, u_*)$ olmak üzere $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi ve $k \to 0^+$ iken $\delta_k \to 0^+$ olan $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi vardır.
Ayrıca Önerme 4.1.1 gereği $(t_*, x_*, u_*) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P$ iken $\forall \mu > 0$ ve $\forall \delta \in [0, \eta_*^\mu]$ için

$$X\,(t_* + \delta; t_*, x_*, u_*) \subset x_* + \delta \cdot F\,(t_*, x_*, u_*) + \delta\mu \cdot \overline{B} \tag{5.1.16}$$

olacak şekilde bir $\eta_*^\mu = \eta_*^\mu\,(t_*, x_*, u_*) > 0$ vardır. $\mu = 1$ iken $\eta_*^1 = \eta_*^1\,(t_*, x_*, u_*)$ olsun. Bu durumda Önerme 5.1.5 ve (5.1.16) kapsamından $\delta \to 0^+$ iken $r(\delta) \to 0^+$ olmak üzere, $\forall\ \delta \in (0, \eta_*^1]$ için,

$$X\,(t_* + \delta; t_*, x_*, u_*) \subset x_* + \delta \cdot F\,(t_*, x_*, u_*) + \delta r(\delta) \cdot \overline{B} \tag{5.1.17}$$

olacak biçimde $r(\cdot) : (0, \eta_*^1] \to [0, \infty)$ fonksiyonu vardır. Genelliği bozmadan $\forall$ $k = 1, 2, \ldots$ için $\delta_k \leq \eta_*^1$ olduğu varsayılsın. O zaman keyfi sabitlenmiş k için, (5.1.17) kapsamından $\delta_k \to 0^+$ iken $r(\delta_k) \to 0^+$ olmak üzere

$$x_k\,(t_* + \delta_k) = x_* + \delta_k\, f_k + \delta_k\, r(\delta_k)\, b_k, \quad \delta_k \in (0, \eta_*^1] \tag{5.1.18}$$

olacak biçimde $f_k \in F\,(t_*, x_*, u_*)$ ve $b_k \in \overline{B}$ vardır. $F(t_*, x_*, u_*)$ kompakt olduğundan, genelliği bozmadan $k \to \infty$ iken $f_k \to f_*$ olacak şekilde bir $f_* \in F(t_*, x_*, u_*)$ bulunur.

$$y_k = f_k - f_* + r(\delta_k) b_k$$

olarak alınırsa $k \to \infty$ iken $y_k \to 0^+$ olur ve (5.1.18) eşitliği tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned} x_k\,(t_* + \delta_k) &= x_* + \delta_k\, f_k + \delta_k\, r(\delta_k)\, b_k \\ &= x_* + \delta_k\, f_k + \delta_k\, f_* - \delta_k\, f_* + \delta_k\, r(\delta_k)\, b_k \\ &= x_* + \delta_k\, f_* + \delta_k[f_k - f_* + r(\delta_k)\, b_k] \\ &= x_* + \delta_k\, f_* + \delta_k\, y_k \end{aligned} \tag{5.1.19}$$

elde edilir. O zaman $\forall\ k = 1, 2, \ldots$ için (5.1.15) ve (5.1.19) eşitliğinden $\delta_k \in (0, \eta_*^1]$ için

$$c\,(t_* + \delta_k, x_* + \delta_k\, f_* + \delta_k\, y_k) - c\,(t_*, x_*) > \delta_k\,(\mu_* + \alpha) \tag{5.1.20}$$

olur. Buradan ve $c(\cdot)$ fonksiyonunun yöne göre üst türev tanımından

$$\begin{aligned} \mu_* + \alpha &\leq \limsup_{k \to \infty}\, [c\,(t_* + \delta_k, x_* + \delta_k\, f_* + \delta_k\, y_k) - c\,(t_*, x_*)]\,/\delta_k \\ &\leq \limsup_{\substack{\delta \to 0^+ \\ \|y\| \to 0^+}}\, [c\,(t_* + \delta, x_* + \delta\, f_* + \delta\, y) - c\,(t_*, x_*)]\,/\delta \\ &= \frac{D^+ c(t_*, x_*)}{D(1, f_*)} \end{aligned} \tag{5.1.21}$$

olduğu elde edilir.Yani bir $f_* \in F(t_*, x_*, u_*)$ için $\dfrac{D^+ c(t_*, x_*)}{D(1, f_*)} > \mu_* + \alpha > \alpha$ olur. O zaman bu sonuç (5.1.13) ile çelişir. Varsayım yanlış olup (5.1.14) eşitsizliğinin doğruluğu elde edilir. □

5.2 Alttan Yarı Sürekli Fonksiyonun Seviye Kümesi Olarak Verilen Kümelerin Pozisyonlu Zayıf İnvaryantlığı İçin Yeter Koşul

Bu bölümde $c(\cdot) : [0, \theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ alttan yarı sürekli fonksiyon olmak üzere

$$W = \{(t, x) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n : c(t, x) \leq 0\} \tag{5.2.1}$$

ile tanımlı $W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ seviye kümesinin (2.5.1) sistemine göre, pozisyonlu zayıf invaryant olması için bir yeter koşul verilmiştir. $c(\cdot)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli olduğundan $W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesi kapalı kümedir.

Şimdi $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesinin (2.5.1) sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant olması için bir yeter koşul verilsin.

Teorem 5.2.1. *$c(\cdot) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ alttan yarı sürekli fonksiyon $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ (5.2.1) ile verilen küme, $\varepsilon_* > 0$ olsun. $c(t,x) < \varepsilon_*$ eşitsizliğini sağlayan her $(t,x) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ için*

$$\sup_{f \in F(t,x,u_*)} \frac{D^+ c(t,x)}{D(1,f)} \leq 0 \tag{5.2.2}$$

olacak biçimde $u_* \in P$ olsun. Bu durumda W kümesi (2.5.1) *sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant kümedir.*

Kanıt. $\forall\ (t,x) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ için

$$P_*(t,x) = \left\{ u_* \in P : \sup_{f \in F(t,x,u_*)} \frac{D^+ c(t,x)}{D(1,f)} \leq 0 \right\}$$

kümesi tanımlansın.
Bu durumda $\forall\ (\mu,t,x,u) \in (0,1) \times [0,\theta) \times \mathbb{R}^n \times P$ için süper strateji

$$U_*(t,x) = \begin{cases} u_* \in P_*(t,x) & , c(t,x) < \varepsilon_* \\ u \in P & , c(t,x) \geq \varepsilon_* \end{cases} \tag{5.2.3}$$

ve

$$\delta_*(\mu,t,x,u) = \begin{cases} min\{\tau_1^{\mu}(t,x,u), \mu, \theta - t\} & , c(t,x) < \varepsilon_* \text{ ve } u = U_*(t,x) \\ min\{\mu, \theta - t\} & , c(t,x) \geq \varepsilon_* \text{ veya } u \neq U_*(t,x) \end{cases} \tag{5.2.4}$$

olsun. Burada kullanılan $\tau_1^{\mu}(t,x,u) > 0$ sayısı Önerme 5.1.6 da bulunan sayıdır. Ayrıca, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için $U_*(\theta,x) = u_* \in P$ olsun.

$c(t_0,x_0) \leq \varepsilon_0$ olacak biçimde $(t_0,x_0) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ alınıp sabitlensin ve

$$\varepsilon_0 < \varepsilon_*$$

olduğu kabul edilsin.

Şimdi $(U_*, \delta_*(\cdot))$ süper stratejisinin, $(t_0,x_0) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ başlangıç noktasında ürettiği keyfi $x(\cdot) \in X(t_0,x_0,U_*,\delta_*(\cdot))$ yörüngeleri için $\forall t \in [t_0,\theta]$ iken

$$c(t,x(t)) \leq \varepsilon_0$$

olduğu gösterilsin.

Keyfi sabitlenmiş $x(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ yörüngesi alındığında, $k \to \infty$ iken, $\mu_k \to 0^+$ olan $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0,1)$ sayı dizisi ve $x_k(\cdot) \to x(\cdot)$ düzgün yakınsayan $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{Z}(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ adımlı yörüngeler dizisi vardır. $\mathcal{Z}(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ adımlı yörüngeler kümesinin tanımından her k için $x_k(\cdot) \in \mathcal{Y}_{\mu_k}(t_0, x_0, U_*, h_k(\cdot))$ olacak biçimde $h_k(\cdot) \in \Delta_{\mu_k}(\delta_*(\cdot))$ fonksiyonu vardır. $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi tanımlanırken, U_* pozisyonlu stratejisi ve $h_k(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, \theta]$ aralığının bir $L\{[t_0,\theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\}$ iyi sıralı kümesini doğurur (bkz. Önerme 2.6.3).

Genelliği bozmaksızın keyfi $k = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$\mu_k < \frac{\varepsilon_* - \varepsilon_0}{\theta}$$

olsun. Herhangi bir k seçilsin ve sabitlensin. $x_k(\cdot) \in \mathcal{Y}_{\mu_k}(t_0, x_0, U_*, h_k(\cdot))$ ve $\forall$ $t_\alpha^k \in L\{[t_0,\theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\}$ için

$$c\left(t_\alpha^k, x_k(t_\alpha^k)\right) \leq \varepsilon_0 + \mu_k(t_\alpha^k - t_0) \tag{5.2.5}$$

olduğu gösterilsin.

$\forall$ k için $x_k(t_0) = x_0$ olduğundan $c(t_0, x_k(t_0)) \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_*$ olur. O zaman (5.2.3) ile verilen $U_*(\cdot)$ pozisyonlu stratejinin tanımından, $u_0 = U_0(t_0, x_0)$ denilirse $u_0 \in P_*(t_0, x_0)$ olur. $P_*(t_0, x_0)$ kümesinin tanımından

$$\sup_{f \in F(t_0, x_0, u_0)} \frac{D^+ c(t_0, x_0)}{D(1, f)} \leq 0$$

olduğu görülür. O zaman Önerme 5.1.6 gereği $\forall$ $x(\cdot) \in X(t_0, x_0, u_0)$ ve $\forall$ $\delta \in [0, \tau_1^{\mu_k}(t_0, x_0, u_0)]$ için

$$c(t_0 + \delta, x_k(t_0 + \delta)) - c(t_0, x_0) \leq \delta\, \mu_k \tag{5.2.6}$$

olur.

Adımlı yörüngenin tanımından, $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi, $[t_0, t_0 + h_k(t_0, x_0, u_0)]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F(t, x_k(t), u_0), \qquad x_k(t_0) = x_0$$

Cauchy probleminin çözümü olarak alınır. Yani $x_k(\cdot) \in X(t_0, x_0, u_0)$ olur. $t_1^k = t_0 + h_k(t_0, x_0, u_0)$, $h_k(t, x, u) \leq \delta_*(\mu_k, t, x, u)$ ve (5.2.4) ile verilen $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından,

$$\begin{aligned} t_1^k - t_0 &= h_k\left(t_0, x_0, u_0\right) \\ &\leq \delta_*\left(\mu_k, t_0, x_0, u_0\right) \\ &\leq \tau_1^{\mu_k}\left(t_0, x_0, u_0\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $x_k(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, u_0\right)$ olduğundan, son eşitsizlikten ve (5.2.6) eşitsizliğinden

$$c\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right) - c\left(t_0, x_0\right) \leq \mu_k\left(t_1^k - t_0\right) \tag{5.2.7}$$

elde edilir. $c\left(t_0, x_0\right) \leq \varepsilon_0$ olduğundan (5.2.7) eşitsizliği tekrar yazılırsa

$$c\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right) \leq \varepsilon_0 + \mu_k\left(t_1^k - t_0\right) \tag{5.2.8}$$

olur . O halde $\alpha = 1$ için (5.2.5) eşitsizliği sağlanır.
$\mu_k < \dfrac{\varepsilon_* - \varepsilon_0}{\theta}$ olduğundan, $x_k(t_1^k) = x_1^k$ denilirse (5.2.8) eşitsizliğinden

$$c\left(t_1^k, x_1^k\right) < \varepsilon_*$$

olur. O zaman (5.2.3) ile verilen $U_*(\cdot)$ pozisyonlu stratejinin tanımından $u_1^k = U_*(t_1^k, x_1^k)$ denilirse $u_1^k \in P_*(t_1^k, x_1^k)$ olur. $P_*(t_1^k, x_1^k)$ kümesinin tanımından

$$\sup_{f \in F\left(t_1^k, x_1^k, u_1^k\right)} \frac{D^+ c(t_1^k, x_1^k)}{D(1, f)} \leq 0$$

olur. O zaman Önerme 5.1.6 gereği $\forall\ x(\cdot) \in X\left(t_1^k, x_1^k, u_1^k\right)$ ve $\forall\ \delta \in [0, \tau_1^{\mu_k}(t_1^k, x_1^k, u_1^k)]$ için

$$c\left(t_1^k + \delta, x_k(t_1^k + \delta)\right) - c\left(t_1^k, x_1^k\right) \leq \delta\, \mu_k \tag{5.2.9}$$

olur.

Adımlı yörüngenin tanımından, $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi, $\left[t_1^k, t_1^k + h_k(t_1^k, x_1^k, u_1^k)\right]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_1^k\right), \qquad x_k(t_1^k) = x_1^k$$

Cauchy probleminin çözümü olarak alınır. Yani $x_k(\cdot) \in X(t_1^k, x_1^k, u_1^k)$ olur. $t_2^k = t_1^k + h_k(t_1^k, x_1^k, u_1^k)$, $h_k(t,x,u) \leq \delta_*(\mu_k, t, x, u)$ ve (5.2.4) ile verilen $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından,

$$\begin{aligned} t_2^k - t_1^k &= h_k\left(t_1^k, x_1^k, u_1^k\right) \\ &\leq \delta_*\left(\mu_k, t_1^k, x_1^k, u_1^k\right) \\ &\leq \tau_1^{\mu_k}\left(t_1^k, x_1^k, u_1^k\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $x_k(\cdot) \in X(t_1^k, x_1^k, u_1^k)$ olduğundan, son eşitsizlikten ve (5.2.9) eşitsizliğinden

$$c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) - c\left(t_1^k, x_1^k\right) \leq \mu_k\left(t_2^k - t_1^k\right) \tag{5.2.10}$$

elde edilir. O halde (5.2.8) eşitsizliğinden (5.2.10) eşitsizliği tekrar yazılırsa

$$c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq \varepsilon_0 + \mu_k\left(t_2^k - t_0\right) \tag{5.2.11}$$

olur ve $\alpha = 2$ için (5.2.5) eşitsizliği sağlanır.

Şimdi, $\forall\ t_\nu^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ alınsın. ν t_ν^k'ye karşılık gelen order sayısı olmak üzere, $x_k(\cdot)$ fonksiyonunun tüm $\lambda < \nu$ için

$$c\left(t_\lambda^k, x_k(t_\lambda^k)\right) \leq \varepsilon_0 + \mu_k\left(t_\lambda^k - t_0\right) \tag{5.2.12}$$

eşitsizliğini sağlandığı kabul edilsin. O zaman $t = t_\nu^k$ için (5.2.5) eşitsizliğinin sağlandığı gösterilsin. t_ν^k için iki durum söz konusudur.

I. t_ν^k'nün öncülü olan $t_\sigma^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ sayısı vardır. Bu durumda $\left(t_\sigma^k, t_\nu^k\right) \cap L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\} = \emptyset$ olur.
$L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ kümesinin tanımlanışından

$$t_\nu^k = t_\sigma^k + h_k\left(t_\sigma^k, x_k\left(t_\sigma^k\right), U_*\left(t_\sigma^k, x_k\left(t_\sigma^k\right)\right)\right)$$

olduğu görülür. Kabulden

$$c\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)\right) \leq \varepsilon_0 + \mu_k\left(t_\sigma^k - t_0\right) \tag{5.2.13}$$

olur. O halde $\mu_k < \dfrac{\varepsilon_* - \varepsilon_0}{\theta}$ olduğundan, $x_k(t_\sigma^k) = x_\sigma^k$ denilirse (5.2.13) eşitsizliğinden

$$c\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) < \varepsilon_*$$

olur. O zaman (5.2.3) ile verilen $U_*(\cdot)$ pozisyonlu stratejinin tanımından $u_\sigma^k = U_*(t_\sigma^k, x_\sigma^k)$ denilirse $u_\sigma^k \in P_*(t_\sigma^k, x_\sigma^k)$ olur. $P_*(t_\sigma^k, x_\sigma^k)$ kümesinin tanımından

$$\sup_{f\in F\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right)} \frac{D^+c(t_\sigma^k, x_\sigma^k)}{D(1,f)} \le 0$$

olur. O zaman Önerme 5.1.6 gereği $\forall\ x(\cdot) \in X\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right)$ ve $\forall\ \delta \in [0, \tau_1^{\mu_k}(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k)]$ için

$$c\left(t_\sigma^k + \delta, x_k(t_\sigma^k + \delta)\right) - c\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) \le \delta\,\mu_k \tag{5.2.14}$$

olur.

Adımlı yörüngenin tanımından, $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi, $\left[t_\sigma^k, t_\sigma^k + h_k(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k)\right]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_\sigma^k\right), \qquad x_k(t_\sigma^k) = x_\sigma^k$$

Cauchy probleminin çözümü olarak alınır. Yani $x_k(\cdot) \in X(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k)$ olur.

$t_\nu^k = t_\sigma^k + h_k(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k)$, $h_k(t,x,u) \le \delta_*(\mu_k, t, x, u)$ ve (5.2.4) ile verilen $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından,

$$\begin{aligned} t_\nu^k - t_\sigma^k &= h_k\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right) \\ &\le \delta_*\left(\mu_k, t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right) \\ &\le \tau_1^{\mu_k}\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $x_k(\cdot) \in X(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k)$ olduğundan, son eşitsizlikten ve (5.2.14) eşitsizliğinden

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) - c\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) \le \mu_k\left(t_\nu^k - t_\sigma^k\right) \tag{5.2.15}$$

elde edilir. O halde (5.2.13) eşitsizliğinden (5.2.15) eşitsizliği tekrar yazılırsa

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \le \varepsilon_0 + \mu_k\left(t_\nu^k - t_0\right) \tag{5.2.16}$$

olur ve $t = t_\nu^k$ için (5.2.5) eşitsizliği sağlanır.

II. ν order sayısının öncülü olmasın. Yani t^k_ν noktası iyi sıralı $L\{[t_0,\theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\}$ kümesinin yığılma noktası olsun. Bu durumda $t^k_{\lambda_1} < t^k_{\lambda_2} < \ldots < t^k_{\lambda_i} < \ldots$, $\forall i$ için $t^k_{\lambda_i} \in L\{[t_0,\theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\}$ olmak üzere $\lim\limits_{i\to\infty} t^k_{\lambda_i} = t^k_\nu - 0$ olacak biçimde $\left\{t^k_{\lambda_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi vardır. Varsayımdan dolayı $\forall$ i için

$$c\left(t^k_{\lambda_i}, x_k(t^k_{\lambda_i})\right) \leq \varepsilon_0 + \mu_k\left(t^k_{\lambda_i} - t_0\right) \tag{5.2.17}$$

olur. Adımlı yörüngenin tanımlanışından

$$x_k(t^k_\nu) = \lim_{i\to\infty} x_k(t^k_{\lambda_i})$$

olur. $x_k(t^k_\nu) = x^k_\nu$ denilsin. O zaman $c(\cdot)$ fonksiyonu $\left(t^k_\nu, x^k_\nu\right)$ noktasında alttan yarı sürekli olduğundan $\forall\ \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall\ (t,x) \in B\left(\left(t^k_\nu, x^k_\nu\right), \delta(\varepsilon)\right)$ için

$$c\left(t^k_\nu, x^k_\nu\right) - \varepsilon \leq c\,(t,x) \tag{5.2.18}$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır. $i \to \infty$ iken $\left(t^k_{\lambda_i}, x_k(t^k_{\lambda_i})\right) \to \left(t^k_\nu, x^k_\nu\right)$ olduğundan $i > i_*$ için $\left(t^k_{\lambda_i}, x_k(t^k_{\lambda_i})\right) \in B\left(\left(t^k_\nu, x^k_\nu\right), \delta(\varepsilon)\right)$ olacak biçimde $i_* > 0$ vardır. O zaman (5.2.18) den $i > i_*$ için

$$c\left(t^k_\nu, x^k_\nu\right) - \varepsilon \leq c\left(t^k_{\lambda_i}, x_k(t^k_{\lambda_i})\right) \tag{5.2.19}$$

olur. O halde (5.2.17) ve (5.2.19) eşitsizliklerinden $i > i_*$ için

$$\begin{aligned} c\left(t^k_\nu, x_k(t^k_\nu)\right) - \varepsilon &\leq c\left(t^k_{\lambda_i}, x_k(t^k_{\lambda_i})\right) \\ &\leq \varepsilon_0 + \mu_k\left(t^k_{\lambda_i} - t_0\right) \\ &< \varepsilon_0 + \mu_k\left(t^k_\nu - t_0\right) \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

olduğu elde edilir. (5.2.20) eşitsizliği keyfi $\varepsilon > 0$ için sağlandığından

$$c\left(t^k_\nu, x_k(t^k_\nu)\right) \leq \varepsilon_0 + \mu_k\left(t^k_\nu - t_0\right) \tag{5.2.21}$$

olur. Böylece $t = t^k_\nu$ için (5.2.5) eşitsizliğinin doğru olduğu kanıtlanır.

Şimdi $\forall\, t \in [t_0, \theta]$ için

$$c\,(t, x(t)) \leq \varepsilon_0$$

olduğu gösterilsin.

Keyfi $t_* \in [t_0, \theta]$ alınsın ve sabitlensin. $\forall\, t_\nu^k, t_{\nu+1}^k \in L\,\{[t_0, \theta]; x_k\,(\cdot)\,, U_*, h_k(\cdot)\}$ için,

$0 < t_{\nu+1}^k - t_\nu^k \leq \mu_k$ ve $k \to \infty$ iken $\mu_k \to 0^+$ olduğundan, her k için

$$|t_{\alpha(k)}^{(k)} - t_*| \leq \mu_k$$

olacak biçimde $t_{\alpha(k)}^{(k)} \in L\,\{[t_0, \theta]; x_k\,(\cdot)\,, U_*, h_k(\cdot)\}$ vardır. O halde $k \to \infty$ iken $t_{\alpha(k)}^{(k)} \to t_*$ olur. Diger taraftan, (5.2.5) eşitsizliğinden, $\forall\, k$ için

$$c\left(t_{\alpha(k)}^{(k)}, x_k(t_{\alpha(k)}^{(k)})\right) \leq \varepsilon_0 + \mu_k(t_{\alpha(k)}^{(k)} - t_0) \qquad (5.2.22)$$

olur. $k \to \infty$ iken $t_{\alpha(k)}^{(k)} \to t_*$, $x_k(\cdot) \to x(\cdot)$, $\mu_k \to 0^+$, $c(\cdot)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli olduğundan ve (5.2.22) eşitsizliğinden

$$c\,(t_*, x(t_*)) \leq \varepsilon_0 \qquad (5.2.23)$$

olduğu bulunur. $t_* \in [t_0, \theta]$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, (5.2.23) eşitsizliğinden $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$c\,(t, x(t)) \leq \varepsilon_0 \qquad (5.2.24)$$

olduğu görülür.

$x(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ keyfi olduğundan, (5.2.24) eşitsizliği keyfi $x(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ için doğru olur.

$\varepsilon_0 < \varepsilon_*$ sayısı $c\,(t_0, x_0) \leq \varepsilon_0$ koşulundan seçilmektedir. Eğer $(t_0, x_0) \in W$ ise, o zaman $c\,(t_0, x_0) \leq 0$ olur ve $\varepsilon_0 = 0$ olarak seçilebilir. O halde (5.2.24) eşitsizliğinden, $\forall\, x(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ ve $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$c\,(t, x(t)) \leq 0$$

olduğu görülür. Bu ise (5.2.1) ile tanımlı $W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesinin (2.5.1) sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant olması demektir. $\square$

Kanıtlanan teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2.1. *Teorem 5.2.1 in koşulları sağlansın,* $(t_0, x_0) \in [0, \theta) \times \mathbb{R}^n$, $\varepsilon_0 < \varepsilon_*$, $c\,(t_0, x_0) = \varepsilon_0$ *olarak alınsın.* $(U_*, \delta_*(\cdot))$ *süper stratejisi* (5.2.3) *ve* (5.2.4) *ile tanımlanmış olsun. Bu durumda* $\forall\ x(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ *ve* $t \in [t_0, \theta]$ *için,*

$$c\,(t, x(t)) \leq \varepsilon_0$$

olur.

5.3 Yeter Koşulun Stabilliği

Bu bölümde, (5.2.1) ile verilen $W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesinin (2.5.1) sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant olması için bir yeter koşul olan (5.2.2) koşulunun belli bir hata ile sağlandığı durumda, W kümesinin pozisyonlu zayıf invaryantlığının nasıl değişeceği konusu ele alınmıştır.

Teorem 5.3.1. $c(\cdot) : [0, \theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *alttan yarı sürekli fonksiyon olmak üzere* W (5.2.1) *ile verilen küme,* $\varepsilon_* > 0$ *ve* $\alpha < \frac{\varepsilon_*}{2\theta}$ *olsun.* $c(t, x) < \varepsilon_*$ *eşitsizliğini sağlayan her* $(t, x) \in [0, \theta) \times \mathbb{R}^n$ *için*

$$\sup_{f \in F(t,x,u_*)} \frac{D^+ c(t, x)}{D(1, f)} \leq \alpha \tag{5.3.1}$$

olacak biçimde $u_* \in P$ *olsun. O zaman* $\forall\,(t_0, x_0) \in W$, $\forall\,x(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ *ve* $\forall\,t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$c\,(t, x(t)) \leq \alpha\big(t - t_0\big) \tag{5.3.2}$$

olacak biçimde $(U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)) \in \mathcal{U}_{pos} \times \Delta(0, 1)$ *süper stratejisi vardır.*

Kanıt. $\forall\ (t, x) \in [0, \theta) \times \mathbb{R}^n$ için

$$P_\alpha(t, x) = \left\{ u_* \in P : \sup_{f \in F(t,x,u_*)} \frac{\partial^+ c(t, x)}{\partial(1, f)} \leq \alpha \right\}$$

kümesi tanımlansın.

Bu durumda $\forall\ (\mu,t,x,u) \in (0,1)\times[0,\theta)\times\mathbb{R}^n\times P$ için süper strateji aşağıdaki gibi alınsın.

$$U_\alpha(t,x)=\begin{cases} u_*\in P_\alpha(t,x) & ,c(t,x)<\varepsilon_* \\ u\in P & ,c(t,x)\geq\varepsilon_* \end{cases} \tag{5.3.3}$$

ve

$$\delta_\alpha(\mu,t,x,u)=\begin{cases} min\{\tau_2^\mu(t,x,u),\mu,\theta-t\} & ,c(t,x)<\varepsilon_* \text{ ve } u=U_\alpha(t,x) \\ min\{\mu,\theta-t\} & ,c(t,x)\geq\varepsilon_* \text{ veya } u\neq U_\alpha(t,x). \end{cases} \tag{5.3.4}$$

Burada kullanılan $\tau_2^\mu(t,x,u)>0$ sayısı Önerme 5.1.7 de bulunan sayıdır. Ayrıca $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$ için $U_\alpha(\theta,x)=u_*\in P$ olsun.

$c(t_0,x_0)\leq\varepsilon_0$ olacak biçimde $(t_0,x_0)\in[0,\theta)\times\mathbb{R}^n$ alınıp sabitlensin ve

$$\varepsilon_0<\frac{\varepsilon_*}{2}$$

olduğu kabul edilsin.

Şimdi $(U_\alpha,\delta_\alpha(\cdot))$ süper stratejisinin, $(t_0,x_0)\in[0,\theta)\times\mathbb{R}^n$ başlangıç noktasından ürettiği keyfi $x(\cdot)\in X\left(t_0,x_0,U_\alpha,\delta_\alpha(\cdot)\right)$ yörüngeleri için $\forall t\in[t_0,\theta]$ iken

$$c(t,x)\leq\varepsilon_0+\alpha(t-t_0)$$

olduğu gösterilsin.

Keyfi sabitlenmiş $x(\cdot)\in X\left(t_0,x_0,U_\alpha,\delta_\alpha(\cdot)\right)$ yörüngesi alındığında, $k\to\infty$ iken, $\mu_k\to0^+$ olan $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}\subset(0,1)$ sayı dizisi ve $x_k(\cdot)\to x(\cdot)$ düzgün yakınsayan $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathcal{Z}\left(t_0,x_0,U_\alpha,\delta_\alpha(\cdot)\right)$ adımlı yörüngeler dizisi vardır. $\mathcal{Z}\left(t_0,x_0,U_\alpha,\delta_\alpha(\cdot)\right)$ adımlı yörüngeler kümesinin tanımından her k için $x_k(\cdot)\in\mathcal{Y}_{\mu_k}\left(t_0,x_0,U_\alpha,h_k(\cdot)\right)$ olacak biçimde $h_k(\cdot)\in\Delta_{\mu_k}(\delta_\alpha(\cdot))$ fonksiyonu vardır. $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi tanımlanırken, U_α pozisyonlu stratejisi ve $h_k(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0,\theta]$ aralığının bir $L\left\{[t_0,\theta];x_k(\cdot),U_\alpha,h_k(\cdot)\right\}$ iyi sıralı kümesini doğurur (bkz. Önerme 2.6.3).

$$\alpha<\frac{1}{2\,\theta}\varepsilon_*,\qquad \varepsilon_0<\frac{\varepsilon_*}{2}$$

olduğundan

$$\varepsilon_* - \varepsilon_0 > \frac{\varepsilon_*}{2} \quad \text{ve} \quad \alpha < \frac{1}{\theta}\frac{\varepsilon_*}{2} < \frac{1}{\theta}(\varepsilon_* - \varepsilon_0)$$

olduğu bulunur. Son eşitsizlikten ise

$$(\varepsilon_* - \varepsilon_0) - \alpha\theta > 0$$

olarak elde edilir. Genelliği bozmaksızın keyfi $k = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$\mu_k < \frac{(\varepsilon_* - \varepsilon_0) - \alpha\theta}{\theta}$$

olsun.

Herhangi bir k alınsın ve sabitlensin. $x_k(\cdot) \in \mathcal{Y}_{\mu_k}(t_0, x_0, U_\alpha, h_k(\cdot))$ ve $\forall\, t_\beta^k \in L\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\}$ için

$$c\left(t_\beta^k, x_k(t_\beta^k)\right) \leq \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)(t_\beta^k - t_0) \tag{5.3.5}$$

olduğu gösterilsin.

$x_k(t_0) = x_0$ olduğundan $c(t_0, x_k(t_0)) \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_*$ olur. O zaman (5.3.3) ile verilen $U_\alpha(\cdot)$ pozisyonlu stratejinin tanımından $u_0 = U_\alpha(t_0, x_0)$ denilirse $u_0 \in P_\alpha(t_0, x_0)$ olur. $P_\alpha(t_0, x_0)$ kümesinin tanımından

$$\sup_{f \in F(t_0, x_0, u_0)} \frac{D^+ c(t_0, x_0)}{D(1, f)} \leq \alpha$$

olduğu görülür. O zaman Önerme 5.1.7 gereği $\forall\ x(\cdot) \in X(t_0, x_0, u_0)$ ve $\forall\ \delta \in [0, \tau_2^\mu(t_0, x_0, u_0)]$ için

$$c(t_0 + \delta, x_k(t_0 + \delta)) - c(t_0, x_0) \leq \delta(\mu_k + \alpha) \tag{5.3.6}$$

olacak biçimde $\tau_2^\mu(t_0, x_0, u_0) > 0$ vardır.

Adımlı yörüngenin tanımından, $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi, $[t_0, t_0 + h_k(t_0, x_0, u_0)]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F(t, x_k(t), u_0), \qquad x_k(t_0) = x_0$$

Cauchy probleminin çözümü olarak alınır. Yani $x_k(\cdot) \in X(t_0, x_0, u_0)$ olur. $t_1^k = t_0 + h_k(t_0, x_0, u_0)$, $h_k(t, x, u) \leq \delta_*(\mu_k, t, x, u)$ ve (5.3.4) ile verilen $\delta_\alpha(\cdot)$

fonksiyonunun tanımından,

$$\begin{aligned} t_1^k - t_0 &= h_k\left(t_0, x_0, u_0\right) \\ &\leq \delta_\alpha\left(\mu_k, t_0, x_0, u_0\right) \\ &\leq \tau_2^{\mu_k}\left(t_0, x_0, u_0\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $x_k(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, u_0\right)$ olduğundan, son eşitsizlikten ve (5.3.6) eşitsizliğinden

$$c\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right) - c\left(t_0, x_0\right) \leq \left(\mu_k + \alpha\right)\left(t_1^k - t_0\right) \tag{5.3.7}$$

elde edilir. $c\left(t_0, x_0\right) \leq \varepsilon_0$ olduğundan (5.3.7) eşitsizliği tekrar yazılırsa

$$c\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right) \leq \varepsilon_0 + \left(\mu_k + \alpha\right)\left(t_1^k - t_0\right) \tag{5.3.8}$$

olur ve $\beta = 1$ için (5.3.5) eşitsizliği sağlanır.
$\mu_k < \dfrac{(\varepsilon_* - \varepsilon_0) - \alpha\theta}{\theta}$ olduğundan, $x_k(t_1^k) = x_1^k$ denilirse, (5.3.8) eşitsizliğinden

$$c\left(t_1^k, x_1^k\right) < \varepsilon_*$$

olduğu bulunur.

Şimdi (5.3.3) ile verilen U_α pozisyonlu stratejinin tanımından $u_1^k = U_\alpha(t_1^k, x_1^k)$ denilirse $u_1^k \in P_\alpha(t_1^k, x_1^k)$ olur. $P_\alpha(t_1^k, x_1^k)$ kümesinin tanımından

$$\sup_{f \in F\left(t_1^k, x_1^k, u_1^k\right)} \frac{D^+ c(t_1^k, x_1^k)}{D(1, f)} \leq \alpha$$

olur. O zaman Önerme 5.1.7 gereği $\forall\ x(\cdot) \in X\left(t_1^k, x_1^k, u_1^k\right)$ ve $\forall\ \delta \in [0, \tau_2^\mu(t_1^k, x_1^k, u_1^k)]$ için

$$c\left(t_1^k + \delta, x_k(t_1^k + \delta)\right) - c\left(t_1^k, x_1^k\right) \leq \delta\left(\mu_k + \alpha\right) \tag{5.3.9}$$

olacak biçimde $\tau_2^\mu(t_1^k, x_1^k, u_1^k) > 0$ vardır. Burada $\tau_2^\mu(t_1^k, x_1^k, u_1^k)$ Önerme 5.1.7 de tanımlanır. Adımlı yörüngenin tanımından, $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi, $\left[t_1^k, t_1^k + h_k(t_1^k, x_1^k, u_1^k)\right]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_1^k\right), \qquad x_k(t_1^k) = x_1^k$$

Cauchy probleminin çözümü olarak alınır. Yani $x_k(\cdot) \in X\left(t_1^k, x_1^k, u_1^k\right)$ olur. $t_2^k = t_1^k + h_k(t_1^k, x_1^k, u_1^k)$, $h_k(t,x,u) \leq \delta_\alpha(\mu_k, t, x, u)$ ve (5.3.4) ile verilen $\delta_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından,

$$\begin{aligned} t_2^k - t_1^k &= h_k\left(t_1^k, x_1^k, u_1^k\right) \\ &\leq \delta_\alpha\left(\mu_k, t_1^k, x_1^k, u_1^k\right) \\ &\leq \tau_2^{\mu_k}\left(t_1^k, x_1^k, u_1^k\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $x_k(\cdot) \in X\left(t_1^k, x_1^k, u_1^k\right)$ olduğundan, son eşitsizlikten ve (5.3.9) eşitsizliğinden

$$c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) - c\left(t_1^k, x_1^k\right) \leq (\mu_k + \alpha)\left(t_2^k - t_1^k\right) \tag{5.3.10}$$

elde edilir. O halde (5.3.8) eşitsizliğinden (5.3.10) eşitsizliği tekrar yazılırsa

$$c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\left(t_2^k - t_0\right) \tag{5.3.11}$$

olur ve $\beta = 2$ için (5.3.5) eşitsizliği sağlanır.

Şimdi, $\forall t_\nu^k \in L\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\}$ alınsın. ν t_ν^k'ye karşılık gelen order sayısı olmak üzere $x_k(\cdot)$ fonksiyonunun tüm $\lambda < \nu$ için

$$c\left(t_\lambda^k, x_k(t_\lambda^k)\right) \leq \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\left(t_\lambda^k - t_0\right) \tag{5.3.12}$$

eşitsizliğinin sağlandığı kabul edilsin. O zaman $t = t_\nu^k$ için (5.3.5) eşitsizliğinin sağlandığı gösterilsin. t_ν^k için iki durum sözkonusudur.

I. t_ν^k'nün öncülü olan $t_\sigma^k \in L\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\}$ sayısı vardır. Bu durumda $\left(t_\sigma^k, t_\nu^k\right) \cap L\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\} = \emptyset$ olur.
   $L\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\}$ kümesinin tanımlanışından

   $$t_\nu^k = t_\sigma^k + h_k\left(t_\sigma^k, x_k\left(t_\sigma^k\right), U_\alpha\left(t_\sigma^k, x_k\left(t_\sigma^k\right)\right)\right)$$

   olduğu görülür ve kabulden

   $$c\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)\right) \leq \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\left(t_\sigma^k - t_0\right) \tag{5.3.13}$$

olur. O halde $\mu_k < \dfrac{(\varepsilon_* - \varepsilon_0) - \alpha\theta}{\theta}$ olduğundan, $x_k(t_\sigma^k) = x_\sigma^k$ denilirse (5.3.13) eşitsizliğinden

$$c\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) < \varepsilon_*$$

olur. O zaman (5.3.3) ile verilen U_α pozisyonlu stratejinin tanımından $u_\sigma^k = U_\alpha(t_\sigma^k, x_\sigma^k)$ denilirse $u_\sigma^k \in P_\alpha(t_\sigma^k, x_\sigma^k)$ olur. $P_\alpha(t_\sigma^k, x_\sigma^k)$ kümesinin tanımından

$$\sup_{f \in F\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right)} \frac{D^+c(t_\sigma^k, x_\sigma^k)}{D(1,f)} \leq \alpha$$

olur. O zaman Önerme 5.1.7 gereği $\forall\ x(\cdot) \in X\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right)$ ve $\forall\ \delta \in [0, \tau_2^\mu(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k)]$ için

$$c\left(t_\sigma^k + \delta, x_k(t_\sigma^k + \delta)\right) - c\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) \leq \delta\left(\mu_k + \alpha\right) \tag{5.3.14}$$

olacak biçimde $\tau_2^\mu(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k) > 0$ vardır. Burada $\tau_2^\mu(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k)$ Önerme 5.1.7 de tanımlanır. Adımlı yörüngenin tanımından, $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi, $\left[t_\sigma^k, t_\sigma^k + h_k(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k)\right]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_\sigma^k\right), \qquad x_k(t_\sigma^k) = x_\sigma^k$$

Cauchy probleminin çözümü olarak alınır. Yani $x_k(\cdot) \in X\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right)$ olur.

$t_\nu^k = t_\sigma^k + h_k(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k)$, $h_k(t,x,u) \leq \delta_\alpha(\mu_k, t, x, u)$ ve (5.3.4) ile verilen $\delta_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından,

$$\begin{aligned} t_\nu^k - t_\sigma^k &= h_k\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right) \\ &\leq \delta_\alpha\left(\mu_k, t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right) \\ &\leq \tau_2^{\mu_k}\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $x_k(\cdot) \in X\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right)$ olduğundan, son eşitsizlikten ve (5.3.14) eşitsizliğinden

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) - c\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) \leq \left(\mu_k + \alpha\right)\left(t_\nu^k - t_\sigma^k\right) \tag{5.3.15}$$

elde edilir. O halde (5.3.13) eşitsizliğinden (5.3.15) eşitsizliği tekrar yazılırsa

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \leq \varepsilon_0 + \left(\mu_k + \alpha\right)\left(t_\nu^k - t_0\right) \tag{5.3.16}$$

olur ve $\beta = \nu$ için (5.3.5) eşitsizliği sağlanır.

II. ν order sayısının öncülü olmasın. Yani t_ν^k noktası iyi sıralı $L\left\{[t_0,\theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ kümesinin yığılma noktası olsun. Bu durumda $t_{\lambda_1}^k < t_{\lambda_2}^k < \ldots < t_{\lambda_i}^k < \ldots$, $\forall i$ için $t_{\lambda_i}^k \in L\left\{[t_0,\theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ olmak üzere $\lim\limits_{i\to\infty} t_{\lambda_i}^k = t_\nu^k - 0$ olacak biçimde $\left\{t_{\lambda_i}^k\right\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi vardır. Varsayımdan dolayı $\forall$ i için

$$c\left(t_{\lambda_i}^k, x_k(t_{\lambda_i}^k)\right) \leq \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\,(t_{\lambda_i}^k - t_0) \tag{5.3.17}$$

olur. Adımlı yörüngenin tanımlanışından

$$x_k(t_\nu^k) = \lim_{i\to\infty} x_k(t_{\lambda_i}^k)$$

olur. $x_k(t_\nu^k) = x_\nu^k$ denilsin. O zaman $c(\cdot)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli olduğundan $\forall\ \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall\ (t,x) \in B\left(\left(t_\nu^k, x_\nu^k\right), \delta(\varepsilon)\right)$ için

$$c\left(t_\nu^k, x_\nu^k\right) - \varepsilon \leq c\,(t,x) \tag{5.3.18}$$

olcak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır. $i \to \infty$ iken $\left(t_{\lambda_i}^k, x_k(t_{\lambda_i}^k)\right) \to \left(t_\nu^k, x_\nu^k\right)$ olduğundan $i > i_*$ için $\left(t_{\lambda_i}^k, x_k(t_{\lambda_i}^k)\right) \in B\left(\left(t_\nu^k, x_\nu^k\right), \delta(\varepsilon)\right)$ olacak biçimde $i_* > 0$ vardır. O zaman (5.3.18) den $i > i_*$ için

$$c\left(t_\nu^k, x_\nu^k\right) - \varepsilon \leq c\left(t_{\lambda_i}^k, x_k(t_{\lambda_i}^k)\right) \tag{5.3.19}$$

olur. O halde (5.3.17) ve (5.3.19) eşitsizliklerinden $i > i_*$ için

$$\begin{aligned} c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) - \varepsilon &\leq c\left(t_{\lambda_i}^k, x_k(t_{\lambda_i}^k)\right) \\ &\leq \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\,(t_{\lambda_i}^k - t_0) \\ &< \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\,(t_\nu^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.3.20}$$

olduğu elde edilir. (5.3.20) eşitsizliği keyfi $\varepsilon > 0$ için sağlandığından

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \leq \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\,(t_\nu^k - t_0) \tag{5.3.21}$$

olur. Böylece (5.3.5) eşitsizliğinin doğru olduğu kanıtlandı.

Şimdi $\forall \in [t_0, \theta]$ için

$$c\left(t, x(t)\right) \leq \varepsilon_0 + \alpha(t - t_0)$$

olduğu gösterilsin.

Keyfi $t_* \in [t_0, \theta]$ alınsın ve sabitlensin. $\forall\ t_\nu^k,\ t_{\nu+1}^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ için, $0 < t_{\nu+1}^k - t_\nu^k \leq \mu_k$ ve $k \to \infty$ iken $\mu_k \to 0^+$ olduğundan, her k için

$$|t_{\beta(k)}^{(k)} - t_0| \leq \mu_k$$

olacak biçimde $t_{\beta(k)}^{(k)} \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ vardır. O halde $k \to \infty$ iken $t_{\beta(k)}^{(k)} \to t_*$ olur. Diger taraftan, (5.3.5) eşitsizliğinden, $\forall\ k$ için

$$c\left(t_{\beta(k)}^{(k)}, x_k(t_{\beta(k)}^{(k)})\right) \leq \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)(t_{\beta(k)}^{(k)} - t_0) \tag{5.3.22}$$

olur. $k \to \infty$ iken $t_{\beta(k)}^{(k)} \to t_*$, $x_k(\cdot) \to x(\cdot)$, $\mu_k \to 0^+$, $c(\cdot)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli olduğundan ve (5.3.22) eşitsizliğinden

$$c\left(t_*, x(t_*)\right) \leq \varepsilon_0 + \alpha(t_* - t_0) \tag{5.3.23}$$

olduğu bulunur. $t_* \in [t_0, \theta]$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, (5.3.23) eşitsizliğinden $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$c\left(t, x(t)\right) \leq \varepsilon_0 + \alpha(t - t_0) \tag{5.3.24}$$

olduğu görülür.

$x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right)$ keyfi olduğundan, (5.3.24) eşitsizliği keyfi $x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right)$ için doğru olur.

$\varepsilon_0 < \dfrac{\varepsilon_*}{2}$ sayısı $c\left(t_0, x_0)\right) \leq \varepsilon_0$ koşulundan seçilmektedir. Eğer $(t_0, x_0) \in W$ ise, o zaman $c\left(t_0, x_0)\right) \leq 0$ ve $\varepsilon_0 = 0$ olarak seçilebilir. O halde (5.3.24) eşitsizliğinden, $(t_0, x_0) \in W$ iken $\forall\ x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right)$ ve $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$c\left(t, x(t)\right) \leq \alpha(t - t_0)$$

olur.

$\square$

Teorem 5.3.1'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.3.1. *Teorem 5.3.1'in koşulları sağlansın.* $\varepsilon_0 < \dfrac{\varepsilon_*}{2}$ *olmak üzere* $(t_0, x_0) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ *başlangıç pozisyonu,* $c(t_0, x_0) \leq \varepsilon_0$ *olacak biçimde seçilsin.* $(U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ *süper stratejisi* (5.3.3) *ve* (5.3.4) *ile tanımlansın. O zaman* $\forall\, x(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ *ve* $t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$c(t, x(t)) \leq \varepsilon_0 + \alpha(t - t_0) \tag{5.3.25}$$

olur.

5.4 Sürekli Fonksiyonun Seviye Kümesi Olarak Verilen Kümelerin Pozisyonlu Zayıf İnvaryantlığı İçin Yeter Koşul

Bu bölümde $c(\cdot) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon iken, (5.2.1) ile verilen $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ seviye kümesinin pozisyonlu zayıf invaryant olması için bir yeter koşul verilecektir.

Teorem 5.4.1. $c(\cdot) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sürekli fonksiyon olmak üzere,* $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ (5.2.1) *ile verilen küme,* $\varepsilon_* > 0$ *olsun.* $0 < c(t,x) < \varepsilon_*$ *eşitsizliğini sağlayan her* $(t,x) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ *için*

$$\sup_{f \in F(t,x,u_*)} \frac{D^+ c(t,x)}{D(1,f)} \leq 0 \tag{5.4.1}$$

olacak biçimde $u_* \in P$ *olsun. Bu durumda* W *kümesi* (2.5.1) *sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant kümedir.*

Kanıt. $c(\cdot) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olduğundan, her $(t,x) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ için $\forall\, \mu > 0$ verildiğinde, $|\tau - t| < \gamma_\mu(t,x)$, $\| y - x \| < \gamma_\mu(t,x)$ olmak üzere, keyfi $(\tau, y) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ için

$$c(\tau, y) \leq c(t,x) + \mu \tag{5.4.2}$$

olacak biçimde $\gamma_\mu(t,x) > 0$ vardır. Önerme 2.5.2 gereği, sabitlenmiş $(t,x) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ ve $\gamma_\mu(t,x) > 0$ verildiğinde, $\forall\ u \in P$ ve $\forall\ x(\cdot) \in X(t,x,u)$ ve $\delta \in (0, \beta(\mu,t,x)]$ için

$$\| x(t+\delta) - x \| \leq \gamma_\mu(t,x) \tag{5.4.3}$$

olacak biçimde $\beta(\mu,t,x) > 0$ vardır. O zaman

$$\gamma^*_\mu(t,x) = \min\left\{\gamma_\mu(t,x), \beta(\mu,t,x)\right\} \tag{5.4.4}$$

olarak alınsın. Bu durumda (5.4.2) ve (5.4.3) eşitsizliklerinden ve (5.4.4) tanımlanışından, $\forall\ \mu > 0$ verildiğinde $\forall\ u \in P$, $\forall\ x(\cdot) \in X(t,x,u)$ ve $\forall\ \delta \in (0, \gamma^*_\mu(t,x)]$ için

$$c\left(t+\delta, x(t+\delta)\right) - c(t,x) \leq \mu \tag{5.4.5}$$

olduğu elde edilir.

$\forall\ (t,x) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ için

$$P_*(t,x) = \left\{ u_* \in P : \sup_{f \in F(t,x,u_*)} \frac{D^+ c(t,x)}{D(1,f)} \leq 0 \right\}$$

kümesi tanımlansın. Bu durumda $\forall\ (\mu,t,x,u) \in (0,1) \times [0,\theta) \times \mathbb{R}^n \times P$ için süper strateji aşağıdaki gibi alınsın.

$$U_*(t,x) = \begin{cases} u_* \in P_*(t,x) & ,0 < c(t,x) < \varepsilon_* \\ u \in P & ,c(t,x) \geq \varepsilon_*\, veya\, c(t,x) \leq 0 \end{cases} \tag{5.4.6}$$

ve

$$\delta_*(\mu,t,x,u) = \begin{cases} min\{\tau_1^\mu(t,x,u), \mu, \theta - t\} & ,0 < c(t,x) < \varepsilon_* \text{ ve } u = U_*(t,x) \\ min\{\gamma^*_\mu(t,x), \mu, \theta - t\} & ,c(t,x) \leq 0 \text{ ve } u \in P \\ min\{\mu, \theta - t\} & ,c(t,x) \geq \varepsilon_* \text{ veya } u \neq U_*(t,x). \end{cases} \tag{5.4.7}$$

Burada kullanılan $\tau_1^\mu(t,x,u) > 0$ sayısı Önerme 5.1.6 da bulunan sayıdır. $\gamma^*_\mu(t,x)$ ise (5.4.4) ile tanımlıdır. Ayrıca $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için $U_*(\theta,x) = u_* \in P$ olsun.

$c(t_0,x_0) \leq \varepsilon_0$ olacak biçimde $(t_0,x_0) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ alınıp sabitlensin ve

$$0 \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_*$$

olduğu kabul edilsin.

Şimdi $(U_*, \delta_*(\cdot))$ süper stratejisinin, $(t_0, x_0) \in [0, \theta) \times \mathbb{R}^n$ başlangıç noktasından ürettiği keyfi $x(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ yörüngeleri için $\forall t \in [t_0, \theta]$ iken

$$c(t, x(t)) \le \varepsilon_0$$

olduğu gösterilsin.

Keyfi sabitlenmiş $x(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ yörüngesi alındığında, $k \to \infty$ iken, $\mu_k \to 0^+$ olan $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0,1)$ sayı dizisi ve $x_k(\cdot) \to x(\cdot)$ düzgün yakınsayan $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{Z}(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ adımlı yörüngeler dizisi vardır. $\mathcal{Z}(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ adımlı yörüngeler kümesinin tanımından her k için $x_k(\cdot) \in \mathcal{Y}_{\mu_k}(t_0, x_0, U_*, h_k(\cdot))$ olacak biçimde $h_k(\cdot) \in \Delta_{\mu_k}(\delta_*(\cdot))$ fonksiyonu vardır. $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi tanımlanırken, U_* pozisyonlu stratejisi ve $h_k(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, \theta]$ aralığının bir $L\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\}$ iyi sıralı kümesini doğurur (bkz. Önerme 2.6.3).

Genelliği bozmaksızın keyfi $k = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$\mu_k < \begin{cases} min\left\{\varepsilon_0, \dfrac{\varepsilon_* - \varepsilon_0}{\theta}\right\} & , \quad \varepsilon_0 > 0 \\ \\ \dfrac{\varepsilon_*}{1+\theta}, & , \quad \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.4.8}$$

olsun. Herhangi bir k seçilsin ve sabitlensin. $x_k(\cdot) \in \mathcal{Y}_{\mu_k}(t_0, x_0, U_*, h_k(\cdot))$ ve $\forall$ $t_\beta^k \in L\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\}$ için

$$c\left(t_\beta^k, x_k(t_\beta^k)\right) \le \begin{cases} \varepsilon_0 + \mu_k(t_\beta^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 > 0 \\ \\ \mu_k + \mu_k(t_\beta^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.4.9}$$

olduğu gösterilsin.

$\forall$ k için $x_k(t_0) = x_0$ olduğundan, $c(t_0, x_k(t_0)) \le \varepsilon_0$ olur. Şimdi $u_0 = U_*(t_0, x_0)$ ve

$$t_1^k = t_0 + h_k(t_0, x_0, u_0)$$

olarak alınsın. Bu durumda

I. $\varepsilon_0 = 0$ olsun. O halde $c\,(t_0, x_0) \le 0$ bulunur.

$x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesinin ve (5.4.6) ile verilen U_* pozisyonlu stratejinin tanımından, $[t_0, t_1^k]$ aralığında $x_k(\cdot)$ fonksiyonu bir $u_* \in P$ için

$$\dot{x}_k(t) \in F\,(t, x_k(t), u_*)\,, \quad x_k(t_0) = x_0$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. $\varepsilon_0 = 0$ olduğundan, $c\,(t_0, x_0) \le 0$ ve $(t_0, x_0) \in W$ olduğu bulunur. $c(\cdot)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, (5.4.5) eşitsizliğinden, keyfi $u \in P$, keyfi $x(\cdot) \in X(t_0, x_0, u)$ ve $\forall\ \delta \in \big(0, \gamma^*_{\mu_k}(t_0, x_0)\big]$ için,

$$c\,(t_0 + \delta, x(t_0 + \delta)) - c(t_0, x_0) \le \mu_k$$

olur. $x_k(\cdot) \in X(t_0, x_0, u_*)$ olduğundan, $\forall\ \delta \in \big(0, \gamma^*_{\mu_k}(t_0, x_0)\big]$ için,

$$c\,(t_0 + \delta, x_k(t_0 + \delta)) - c(t_0, x_0) \le \mu_k \tag{5.4.10}$$

olur. Burada $\gamma^*_{\mu_k}(t_0, x_0) > 0$ değeri (5.4.4) ile tanımlanır. Ayrıca $c(t_0, x_0)$ ≤ 0 olduğundan, (5.4.7) ile verilen $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından,

$$\begin{aligned} t_1^k - t_0 &= h_k\,(t_0, x_0, u_0) \\ &\le \delta_*\,(\mu_k, t_0, x_0, u_0) \\ &\le \gamma^*_{\mu_k}\,(t_0, x_0) \end{aligned}$$

olur. O zaman buradan, (5.4.10) eşitsizliğinden ve $c(t_0, x_0) \le 0$ olmasından

$$\begin{aligned} c\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right) \le& \mu_k \\ \le& \mu_k + \mu_k(t_1^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.4.11}$$

elde edilir.

II. $\varepsilon_0 > 0$ olsun.

O halde $0 < c\,(t_0, x_k(t_0)) \le \varepsilon_0 < \varepsilon_*$ olur. Bu durumda $u_0 = U_*(t_0, x_0)$ denilirse, (5.4.6) ile verilen U_* pozisyonlu stratejinin tanımından

$$\sup_{f \in F(t_0, x_0, u_0)} \frac{D^+ c(t_0, x_0)}{D(1, f)} \le 0 \tag{5.4.12}$$

olduğu görülür. Bu durumda Önerme 5.1.6 gereği, $\forall\ x(\cdot) \in X(t_0, x_0, u_0)$ ve $\forall\ \delta \in [0, \tau_1^{\mu_k}(t_0, x_0, u_0)]$ için,

$$c\,(t_0 + \delta, x(t_0 + \delta)) - c(t_0, x_0) \leq \delta\, \mu_k$$

olur. $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi $[t_0, t_1^k]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\,(t, x_k(t), u_0)\,, \quad x_k(t_0) = x_0$$

Cauchy probleminin çözümü olarak alınır. Yani $x_k(\cdot) \in X(t_0, x_0, u_0)$ olur. O halde $\forall\ \delta \in [0, \tau_1^{\mu_k}(t_0, x_0, u_0)]$ için,

$$c\,(t_0 + \delta, x_k(t_0 + \delta)) - c(t_0, x_0) \leq \delta\, \mu_k \tag{5.4.13}$$

olduğu elde edilir. Ayrıca (5.4.7) ile verilen $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından,

$$\begin{aligned} t_1^k - t_0 &= h_k\,(t_0, x_0, u_0) \\ &\leq \delta_*\,(\mu_k, t_0, x_0, u_0) \\ &\leq \tau_1^{\mu_k}(t_0, x_0, u_0) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (5.4.13) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} c\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right) &\leq c(t_0, x_0) + \mu_k(t_1^k - t_0) \\ &= \varepsilon_0 + \mu_k(t_1^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.4.14}$$

elde edilir.

O zaman (5.4.11) ve (5.4.14) eşitsizliklerinden $t_1^k \in L\,\{[t_0, \theta]; x_k\,(\cdot)\,, U_*, h_k(\cdot)\}$ için (5.4.9) eşitsizliği sağlanır. Yani

$$c\left(t_1^k\,, x_k(t_1^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + \mu_k(t_1^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 > 0 \\ \\ \mu_k + \mu_k(t_1^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.4.15}$$

olur. $\varepsilon_1^k = c\left(t_1^k\,, x_k(t_1^k)\right)$ denilsin. O zaman (5.4.15) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_1 \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + \mu_k(t_1^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 > 0 \\ \\ \mu_k + \mu_k(t_1^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.4.16}$$

olarak yazılır.

$$\mu_k < \begin{cases} min\left\{\varepsilon_0, \dfrac{\varepsilon_* - \varepsilon_0}{\theta}\right\} & , \quad \varepsilon_0 > 0 \\ \\ \dfrac{\varepsilon_*}{1+\theta}, & , \quad \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

olduğundan ve (5.4.15) eşitsizliğinden $\varepsilon_0 = 0$ iken

$$\begin{aligned} c\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right) &\leq \mu_k + \mu_k(t_1^k - t_0) \\ &\leq \mu_k(1+\theta) \\ &< \frac{\varepsilon_*}{1+\theta}(1+\theta) \\ &= \varepsilon_* \end{aligned} \tag{5.4.17}$$

ve $\varepsilon_0 > 0$ iken

$$\begin{aligned} c\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right) &\leq \varepsilon_0 + \mu_k(t_1^k - t_0) \\ &< \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_* - \varepsilon_0}{\theta}\theta \\ &\leq \varepsilon_0 + \varepsilon_* - \varepsilon_0 \\ &= \varepsilon_* \end{aligned} \tag{5.4.18}$$

olduğu bulunur. O zaman (5.4.17) ve (5.4.18) eşitsizliklerinden

$$c\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right) < \varepsilon_* \tag{5.4.19}$$

olduğu görülür.

$$t_2^k = t_1^k + h_k\left(t_1^k, x_k(t_1^k), U_*(t_1^k, x_k(t_1^k))\right), \quad x_k(t_1^k) = x_1^k$$

denilsin. Bu durumda $c\left(t_1^k, x_1^k\right)$ için iki durum olabilir.

I. $\varepsilon_1^k = c\left(t_1^k, x_1^k\right) \leq 0$ olsun.
$x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesinin ve (5.4.6) ile verilen U_* pozisyonlu stratejinin tanımından, $[t_1^k, t_2^k]$ aralığında $x_k(\cdot)$ fonksiyonu bir $u_* \in P$ için

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_*\right), \quad x_k(t_1^k) = x_1^k$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. $c\left(t_1^k, x_1^k\right) \leq 0$ olduğundan $\left(t_1^k, x_1^k\right) \in W$ olduğu bulunur. $c(\cdot)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, (5.4.5) eşitsizliğinden, keyfi $u \in P$, keyfi $x(\cdot) \in X(t_1^k, x_1^k, u)$ ve $\forall\ \delta \in \left(0, \gamma_{\mu_k}^*(t_1^k, x_1^k)\right]$ için,

$$c\left(t_1^k + \delta, x(t_1^k + \delta)\right) - c(t_1^k, x_1^k) \leq \mu_k$$

olur. $x_k(\cdot) \in X(t_1^k, x_1^k, u_*)$ olduğundan, $\forall\ \delta \in \left(0, \gamma_{\mu_k}^*(t_1^k, x_1^k)\right]$ için,

$$c\left(t_1^k + \delta, x_k(t_1^k + \delta)\right) - c(t_1^k, x_1^k) \leq \mu_k \tag{5.4.20}$$

olur. Burada $\gamma_{\mu_k}^*\left(t_1^k, x_1^k\right) > 0$ değeri (5.4.4) ile tanımlanır. Ayrıca $c\left(t_1^k, x_1^k\right)$
≤ 0 olduğundan (5.4.7) ile verilen $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} t_2^k - t_1^k &= h_k\left(t_1^k, x_1^k, u_*\right) \\ &\leq \delta_*\left(\mu_k, t_1^k, x_1^k, u_*\right) \\ &\leq \gamma_{\mu_k}^*\left(t_1^k, x_1^k\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan, (5.4.20) eşitsizliğinden ve $c(t_1^k, x_1^k) \leq 0$ olmasından

$$\begin{aligned} c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) &\leq \mu_k \\ &\leq \mu_k + \mu_k(t_2^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.4.21}$$

olduğu elde edilir.

II. $\varepsilon_1^k = c\left(t_1^k, x_1^k\right) > 0$ olsun.
O halde (5.4.19) eşitsizliğinden, $0 < c\left(t_1^k, x_1^k\right) < \varepsilon_*$ olur. Bu durumda $u_1^k = U_*(t_1^k, x_1^k)$ denilirse, (5.4.6) ile verilen U_* pozisyonlu stratejinin tanımından

$$\sup_{f \in F\left(t_1^k, x_1^k, u_1^k\right)} \frac{D^+ c(t_1^k, x_1^k)}{D(1, f)} \leq 0 \tag{5.4.22}$$

olduğu görülür. Bu durumda Önerme 5.1.6 gereği $\forall\ x(\cdot) \in X(t_1^k, x_1^k, u_1^k)$ ve $\forall\ \delta \in \left[0, \tau_1^{\mu_k}(t_1^k, x_1^k, u_1^k)\right]$ için,

$$c\left(t_1^k + \delta, x(t_1^k + \delta)\right) - c(t_1^k, x_1^k) \leq \delta\, \mu_k$$

olur. $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi $[t_1^k, t_2^k]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_1^k\right), \quad x_k(t_1^k) = x_1^k$$

Cauchy probleminin çözümü olarak alınır. Yani $x_k(\cdot) \in X(t_1^k, x_1^k, u_1^k)$ olur. O halde $\forall\ \delta \in \left[0, \tau_1^{\mu_k}(t_1^k, x_1^k, u_1^k)\right]$ için,

$$c\left(t_1^k + \delta, x_k(t_1^k + \delta)\right) - c(t_1^k, x_1^k) \leq \delta\, \mu_k \tag{5.4.23}$$

olduğu elde edilir. Ayrıca (5.4.7) ile verilen $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} t_2^k - t_1^k &= h_k\left(t_1^k, x_1^k, u_1^k\right) \\ &\leq \delta_*\left(\mu_k, t_1^k, x_1^k, u_1^k\right) \\ &\leq \tau_1^{\mu_k}(t_1^k, x_1^k, u_1^k) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (5.4.23) eşitsizliğinden

$$c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq c(t_1^k, x_1^k) + \mu_k(t_2^k - t_1^k) \tag{5.4.24}$$

olur.

Böylece $\varepsilon_1 = c\left(t_1^k, x_1^k\right)$ olduğundan, (5.4.21) ve (5.4.24) eşitsizliklerinden

$$c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq \begin{cases} \mu_k + \mu_k(t_2^k - t_1^k), & \varepsilon_1 \leq 0 \\ \varepsilon_1 + \mu_k(t_2^k - t_1^k), & \varepsilon_1 > 0 \end{cases} \tag{5.4.25}$$

olur.

$\varepsilon_0 = 0$ olsun. O halde (5.4.16) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_1 \leq \mu_k + \mu_k(t_1^k - t_0) \tag{5.4.26}$$

olarak yazılır. Bu durumda, eğer $\varepsilon_1 \leq 0$ ise o zaman (5.4.25) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) &\leq \mu_k + \mu_k(t_2^k - t_1^k) \\ &\leq \mu_k + \mu_k(t_2^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.4.27}$$

olur. Eğer $\varepsilon_1 > 0$ ise (5.4.25) ve (5.4.26) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq & \varepsilon_1 + \mu_k(t_2^k - t_1^k) \\ \leq & \mu_k + \mu_k(t_2^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.4.28}$$

olur. Böylece (5.4.27) ve (5.4.28) eşitsizliklerinden $\varepsilon_0 = 0$ iken

$$c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq \mu_k + \mu_k(t_2^k - t_0) \tag{5.4.29}$$

olduğu elde edilir.

$\varepsilon_0 > 0$ olsun. O halde (5.4.16) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0 + \mu_k(t_1^k - t_0) \tag{5.4.30}$$

olur. Eğer $\varepsilon_1 \leq 0$ ise o zaman (5.4.8) ve (5.4.25) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq & \mu_k + \mu_k(t_2^k - t_1^k) \\ \leq & \varepsilon_0 + \mu_k(t_2^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.4.31}$$

olur.

Eğer $\varepsilon_1 > 0$ ise (5.4.25) ve (5.4.30) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq & \varepsilon_1 + \mu_k(t_2^k - t_1^k) \\ \leq & \varepsilon_0 + \mu_k(t_2^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.4.32}$$

olduğu elde edilir. Böylece (5.4.31) ve (5.4.32) eşitsizliklerinden $\varepsilon_0 > 0$ iken

$$c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq \varepsilon_0 + \mu_k(t_2^k - t_0) \tag{5.4.33}$$

olduğu elde edilir. O zaman (5.4.29) ve (5.4.33) eşitsizliklerinden $t_2^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ için

$$c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + \mu_k(t_2^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + \mu_k(t_2^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

olduğu görülür ve (5.4.9) eşitsizliği sağlanır.

Şimdi, $\forall t_\nu^k \in L\{[t_0,\theta];x_k(\cdot),U_*,h_k(\cdot)\}$ alınsın. ν t_ν^k'ye karşılık gelen order sayısı olmak üzere, $\forall\ \beta < \nu$ için

$$c\left(t_\beta^k, x_k(t_\beta^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + \mu_k(t_\beta^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + \mu_k(t_\beta^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.4.34}$$

sağlandığı kabul edilsin ve

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + \mu_k(t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + \mu_k(t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.4.35}$$

olduğu gösterilsin. t_ν^k için iki durum söz konusudur.

1. t_ν^k'nın öncülü olan $t_\sigma^k \in L\{[t_0,\theta];x_k(\cdot),U_*,h_k(\cdot)\}$ sayısı vardır. Bu durumda $\left(t_\sigma^k, t_\nu^k\right) \cap L\{[t_0,\theta];x_k(\cdot),U_*,h_k(\cdot)\} = \emptyset$ ve $t_\nu^k = t_\sigma^k + h\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k), U_*\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)\right)\right)$ olur. $t_\sigma^k \in L\{[t_0,\theta];x_k(\cdot),U_*,h_k(\cdot)\}$ için (5.4.34) sağlandığından

$$c\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + \mu_k(t_\sigma^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + \mu_k(t_\sigma^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.4.36}$$

olur. $\varepsilon_\sigma^k = c\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)\right)$ denilsin. O zaman (5.4.36) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_\sigma^k \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + \mu_k(t_\sigma^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + \mu_k(t_\sigma^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.4.37}$$

olarak yazılır.

$$\mu_k < \begin{cases} min\left\{\varepsilon_0, \dfrac{\varepsilon_* - \varepsilon_0}{\theta}\right\} & , \ \varepsilon_0 > 0 \\ \\ \dfrac{\varepsilon_*}{1+\theta}, & , \ \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

olduğundan ve (5.4.36) eşitsizliğinden $\varepsilon_0 = 0$ iken

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_\sigma^k = c\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)\right) \le\; & \mu_k \;+ \mu_k(t_\sigma^k - t_0)\\
\le\; & \mu_k(1+\theta)\\
<\; & \frac{\varepsilon_*}{1+\theta}(1+\theta)\\
=\; & \varepsilon_* \qquad (5.4.38)
\end{aligned}
$$

ve $\varepsilon_0 > 0$ iken

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_\sigma^k = c\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)\right) \le\; & \varepsilon_0 + \mu_k(t_\sigma^k - t_0)\\
<\; & \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_* - \varepsilon_0}{\theta}\theta\\
\le\; & \varepsilon_0 + \varepsilon_* - \varepsilon_0\\
=\; & \varepsilon_* \qquad (5.4.39)
\end{aligned}
$$

olduğu bulunur. O zaman (5.4.38) ve (5.4.39) eşitsizliklerinden

$$
\varepsilon_\sigma^k = c\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)\right) < \varepsilon_* \qquad (5.4.40)
$$

olduğu görülür. $x_k(t_\sigma^k) = x_\sigma^k$ denilsin. Bu durumda $c\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right)$ için iki durum olabilir.

I. $\varepsilon_\sigma^k = c\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) \le 0$ olsun.

$x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesinin ve (5.4.6) ile verilen U_* pozisyonlu stratejinin tanımından, $[t_\sigma^k, t_\nu^k]$ aralığında $x_k(\cdot)$ fonksiyonu bir $u_* \in P$ için

$$
\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_*\right), \quad x_k(t_\sigma^k) = x_\sigma^k
$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. $c\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) \le 0$ olduğundan $\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) \in W$ olduğu bulunur. $c(\cdot)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, (5.4.5) eşitsizliğinden, keyfi $u \in P$, keyfi $x(\cdot) \in X(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u)$ ve $\forall\ \delta \in \left(0, \gamma_{\mu_k}^*(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right]$ için,

$$
c\left(t_\sigma^k + \delta, x(t_\sigma^k + \delta)\right) - c(t_\sigma^k, x_\sigma^k) \le \mu_k
$$

olur. $x_k(\cdot) \in X(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_*)$ olduğundan, $\forall\ \delta \in \big(0, \gamma^*_{\mu_k}(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\big]$ için,

$$c\left(t_\sigma^k + \delta, x_k(t_\sigma^k + \delta)\right) - c(t_\sigma^k, x_\sigma^k) \le \mu_k \tag{5.4.41}$$

olur. Ayrıca $c\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) \le 0$ olduğundan, (5.4.7) ile verilen $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} t_\nu^k - t_\sigma^k &= h_k\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_*\right) \\ &\le \delta_*\left(\mu_k, t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_*\right) \\ &\le \gamma^*_{\mu_k}\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan, (5.4.41) eşitsizliğinden ve $c(t_\sigma^k, x_\sigma^k) \le 0$ olmasından

$$\begin{aligned} c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) &\le \mu_k \\ &\le \mu_k + \mu_k(t_\nu^k - t_\sigma^k) \end{aligned} \tag{5.4.42}$$

elde edilir.

II. $\varepsilon_\sigma^k = c\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) > 0$ olsun.

O halde (5.4.40) eşitsizliğinden $0 < c\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) < \varepsilon_*$ olur. Bu durumda $u_\sigma^k = U_*(t_\sigma^k, x_\sigma^k)$ denilirse, (5.4.6) ile verilen U_* pozisyonlu stratejinin tanımından,

$$\sup_{f \in F\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right)} \frac{D^+ c(t_\sigma^k, x_\sigma^k)}{D(1, f)} \le 0 \tag{5.4.43}$$

olduğu görülür. Bu durumda Önerme 5.1.6 gereği $\forall\ x(\cdot) \in X(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k)$ ve $\forall\ \delta \in \big[0, \tau_1^{\mu_k}(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k)\big]$ için,

$$c\left(t_\sigma^k + \delta, x(t_\sigma^k + \delta)\right) - c(t_\sigma^k, x_\sigma^k) \le \delta\, \mu_k$$

olur. $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi $[t_\sigma^k, t_\nu^k]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_\sigma^k\right), \quad x_k(t_\sigma^k) = x_\sigma^k$$

Cauchy probleminin çözümü olarak alınır. Yani $x_k(\cdot) \in X(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k)$ olur. O halde Önerme 5.1.6 gereği $\forall\ \delta \in \big[0, \tau_1^{\mu_k}(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k)\big]$ için,

$$c\left(t_\sigma^k + \delta, x_k(t_\sigma^k + \delta)\right) - c(t_\sigma^k, x_\sigma^k) \le \delta\, \mu_k \tag{5.4.44}$$

olur. Ayrıca (5.4.7) ile verilen $\delta_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} t_\nu^k - t_\sigma^k &= h_k\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right) \\ &\le \delta_*\left(\mu_k, t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right) \\ &\le \tau_1^{\mu_k}(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (5.4.44) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) &\le c(t_\sigma^k, x_\sigma^k) + \mu_k(t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ &= \varepsilon_\sigma^k + \mu_k(t_\nu^k - t_\sigma^k) \end{aligned} \tag{5.4.45}$$

olarak yazılır.

Böylece (5.4.42) ve (5.4.45) eşitsizliklerinden

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \le \begin{cases} \mu_k + \mu_k(t_\nu^k - t_\sigma^k), & \varepsilon_\sigma^k \le 0 \\ \varepsilon_\sigma^k + \mu_k(t_\nu^k - t_\sigma^k), & \varepsilon_\sigma > 0 \end{cases} \tag{5.4.46}$$

olur. Burada $\varepsilon_\sigma^k = c\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)\right)$ olarak tanımlıdır.

$\varepsilon_0 = 0$ olsun. O halde (5.4.37) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_\sigma^k \le \mu_k + \mu_k(t_\sigma^k - t_0) \tag{5.4.47}$$

olarak yazılır. Bu durumda, eğer $\varepsilon_\sigma^k \le 0$ ise o zaman (5.4.46) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) &\le \mu_k + \mu_k(t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ &\le \mu_k + \mu_k(t_\nu^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.4.48}$$

olur. Eğer $\varepsilon_\sigma^k > 0$ ise (5.4.46) ve (5.4.47) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) &\le \varepsilon_\sigma^k + \mu_k(t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ &\le \mu_k + \mu_k(t_\nu^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.4.49}$$

olur. Böylece (5.4.48) ve (5.4.49) eşitsizliklerinden $\varepsilon_0 = 0$ iken

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \le \mu_k + \mu_k(t_\nu^k - t_0) \tag{5.4.50}$$

olduğu elde edilir.

$\varepsilon_0 > 0$ olsun. O halde (5.4.37) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_\sigma^k \leq \varepsilon_0 + \mu_k(t_\sigma^k - t_0) \tag{5.4.51}$$

olur. Eğer $\varepsilon_\sigma^k \leq 0$ ise o zaman (5.4.8) ve (5.4.46) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \leq & \mu_k + \mu_k(t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ \leq & \varepsilon_0 + \mu_k(t_\nu^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.4.52}$$

olur.

Eğer $\varepsilon_\sigma^k > 0$ ise (5.4.46) ve (5.4.51) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \leq & \varepsilon_\sigma^k + \mu_k(t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ \leq & \varepsilon_0 + \mu_k(t_\nu^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.4.53}$$

elde edilir. Böylece (5.4.52) ve (5.4.53) eşitsizliklerinden $\varepsilon_0 > 0$ iken

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \leq \varepsilon_0 + \mu_k(t_\nu^k - t_0) \tag{5.4.54}$$

olduğu elde edilir. O zaman (5.4.50) ve (5.4.54) eşitsizliklerinden $t_\nu^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ için

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + \mu_k(t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + \mu_k(t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

olduğu görülür ve (5.4.9) eşitsizliği sağlanır.

2. ν order sayısının öncülü olmasın. Yani t_ν^k noktası iyi sıralı $L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ kümesinin yığılma noktası olsun. Bu durumda $t_{\lambda_1}^k < t_{\lambda_2}^k < \ldots < t_{\lambda_i}^k < \ldots$, $\forall i$ için $t_{\lambda_i}^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ olmak üzere $\lim\limits_{i\to\infty} t_{\lambda_i}^k = t_\nu^k - 0$ olacak biçimde $\left\{t_{\lambda_i}^k\right\}_{i=1}^\infty$ dizisi vardır. O

zaman keyfi i için $t^k_{\lambda_i} \in L\left\{[t_0,\theta]; x_k\left(\cdot\right), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ olmak üzere (5.4.34) sağlandığından

$$c\left(t^k_{\lambda_i}, x_k(t^k_{\lambda_i})\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + \mu_k(t^k_{\lambda_i} - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + \mu_k(t^k_{\lambda_i} - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.4.55}$$

olur. O halde $\varepsilon_0 > 0$ iken keyfi $i = 1, 2, \ldots$ için

$$c\left(t^k_{\lambda_i}, x_k(t^k_{\lambda_i})\right) \leq \varepsilon_0 + \mu_k(t^k_{\lambda_i} - t_0) \tag{5.4.56}$$

ve $\varepsilon_0 = 0$ iken keyfi $i = 1, 2, \ldots$ için

$$c\left(t^k_{\lambda_i}, x_k(t^k_{\lambda_i})\right) \leq \mu_k + \mu_k(t^k_{\lambda_i} - t_0) \tag{5.4.57}$$

olur. $i \to \infty$ iken $t^k_{\lambda_i} \to t^k_\nu - 0$, $x_k(\cdot) : [t_0,\theta] \to \mathbb{R}^n$ mutlak sürekli, $c(\cdot)$ sürekli fonksiyon olduğundan (5.4.56) ve (5.4.57) eşitsizliklerinden $i \to \infty$ iken limit alınırsa $\varepsilon_0 > 0$ için

$$c\left(t^k_\nu, x_k(t^k_\nu)\right) \leq \varepsilon_0 + \mu_k(t^k_\nu - t_0) \tag{5.4.58}$$

ve $\varepsilon_0 = 0$ için

$$c\left(t^k_\nu, x_k(t^k_\nu)\right) \leq \mu_k + \mu_k(t^k_\nu - t_0) \tag{5.4.59}$$

olur . O zaman (5.4.58) ve (5.4.59) eşitsizliklerinden
$t^k_\nu \in L\left\{[t_0,\theta]; x_k\left(\cdot\right), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ için

$$c\left(t^k_\nu, x_k(t^k_\nu)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + \mu_k(t^k_\nu - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + \mu_k(t^k_\nu - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanmış olur. Böylece (5.4.9) eşitsizliğinin doğruluğu kanıtlanır.

Şimdi keyfi sabitlenmiş $t_* \in [t_0,\theta]$ alınsın. $\forall\ t^k_\nu,\ t^k_{\nu+1} \in L\left\{[t_0,\theta]; x_k\left(\cdot\right), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ için, $0 < t^k_{\nu+1} - t^k_\nu < \mu_k$ ve $k \to \infty$ iken $\mu_k \to 0^+$ olduğundan, her k için

$$|t^{(k)}_{\alpha(k)} - t_*| \leq \mu_k$$

olacak biçimde $t_{\alpha(k)}^{(k)} \in L\left\{[t_0,\theta]; x_k(\cdot), U_*, h_k(\cdot)\right\}$ vardır. O halde $k \to \infty$ iken $t_{\alpha(k)}^{(k)} \to t_*$ olur ve $\forall\, k$ için (5.4.9)'den

$$c\left(t_{\alpha(k)}^{k}, x_k(t_{\alpha(k)}^{k})\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + \mu_k(t_{\alpha(k)}^{k} - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + \mu_k(t_{\alpha(k)}^{k} - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.4.60}$$

olur. Bu durumda $k \to \infty$ iken $t_{\alpha(k)}^{(k)} \to t_*$, $x_k(\cdot) \to x(\cdot)$, $\mu_k \to 0^+$, $c(\cdot)$ sürekli fonksiyon olduğundan, (5.4.60) eşitsizliğinden

$$c\left(t_*, x(t_*)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0, & \varepsilon_0 > 0 \\ 0, & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.4.61}$$

olduğu bulunur. $t_* \in [t_0,\theta]$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, (5.4.61) eşitsizliğinden $t \in [t_0,\theta]$ için,

$$c\left(t, x(t)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0, & \varepsilon_0 > 0 \\ 0, & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.4.62}$$

olduğu görülür.

$x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot)\right)$ keyfi olduğundan, (5.4.62) eşitsizliği keyfi $x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot)\right)$ için doğru olur.

$\varepsilon_0 < \varepsilon_*$ sayısı $c\left(t_0, x_0\right) \leq \varepsilon_0$ koşulundan seçilmektedir. Eğer $(t_0, x_0) \in W$ ise, o zaman $c\left(t_0, x_0\right) \leq 0$ olur ve $\varepsilon_0 = 0$ olarak seçilebilir. O halde (5.4.62) eşitsizliğinden, $\forall\, x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot)\right)$ ve $t \in [t_0,\theta]$ için,

$$c\left(t, x(t)\right) \leq 0$$

olur. Yani $\forall\, x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot)\right)$ ve $t \in [t_0,\theta]$ için $(t, x(t)) \in W$ olduğu elde edilir. Bu ise $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesinin (2.5.1) sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant olması demektir.

$\square$

Teorem 5.4.1 'ün kanıtından aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.4.1. *Teorem 5.4.1 'in koşulları sağlansın.* $(t_0, x_0) \in [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$, $c\left(t_0, x_0\right) \leq \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in [0, \varepsilon_*)$ *olarak alınsın.* $\left(U_*, \delta_*(\cdot)\right)$ *süper stratejisi* (5.4.6) *ve* (5.4.7) *ile tanımlanmış olsun. Bu durumda* $\forall\ x(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_*, \delta_*(\cdot))$ *ve* $t \in [t_0, \theta]$ *için,*

$$c\,(t, x(t)) \leq \varepsilon_0$$

olur.

Şimdi I sonlu bir küme olmak üzere $\forall\ i \in I$ için $c_i(\cdot,\cdot) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. $(t, x) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ için

$$c(t, x) = \max_{i \in I} c_i(t, x) \tag{5.4.63}$$

olarak $c(\cdot,\cdot) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda Teorem 2.3.1 ve Teorem 5.4.1 gereği aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.4.2. $c(\cdot) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (5.4.63) *ile tanımlanmış fonksiyon,* $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ (5.2.1) *ile verilen küme,* $\varepsilon_* > 0$ *olsun.* $0 < c(t, x) < \varepsilon_*$ *eşitsizliğini sağlayan her* $(t, x) \in [0, \theta) \times \mathbb{R}^n$ *için*

$$\sup_{f \in F(t,x,u_*)} \max_{i \in I_0(t,x)} \left[\frac{\partial c_i(t,x)}{\partial t} + \langle \frac{\partial c_i(t,x)}{\partial x}, f \rangle \right] \leq 0 \tag{5.4.64}$$

olacak biçimde $u_* \in P$ *olsun. Bu durumda* W *kümesi* (2.5.1) *sistemine göre pozisyonlu zayıf invaryant kümedir.*

Burada $I_0(t,x) = \left\{ i_* \in I : c_{i_*}(t,x) = \max_{i \in I} c_i(t,x) \right\}$ *olarak tanımlanır.*

5.5 Sürekli Fonksiyonun Seviye Kümesi Olarak Verilen Kümelerin Pozisyonlu Zayıf İnvaryantlığı İçin Yeter Koşulun Stabilliği

Bu bölümde Teorem 5.4.1 de (5.4.1) koşulu belli bir hata ile sağlanırken, W kümesinin pozisyonlu zayıf invaryantlığının nasıl değişeceği incelenmiştir.

Teorem 5.5.1. $c(\cdot) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sürekli fonksiyon olmak üzere,* $W \subset [0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ (5.2.1) *ile verilen küme,* $\varepsilon_* > 0$ *ve* $\alpha < \dfrac{1}{2\,\theta}\varepsilon_*$ *olsun.* $0 < c(t, x) < \varepsilon_*$ *eşitsizliğini sağlayan her* $(t, x) \in [0, \theta) \times \mathbb{R}^n$ *için*

$$\sup_{f \in F(t,x,u_*)} \frac{D^+ c(t,x)}{D(1,f)} \leq \alpha \tag{5.5.1}$$

olacak biçimde $u_* \in P$ *olsun. O zaman* $\forall\,(t_0,x_0) \in W$, $\forall\,x(\cdot) \in X\,(t_0,x_0,U_\alpha,\delta_\alpha(\cdot))$ *ve* $\forall\,t \in [t_0,\theta]$ *için*

$$c\,(t,x(t)) \leq \alpha\big(t-t_0\big) \tag{5.5.2}$$

olacak biçimde $(U_\alpha,\delta_\alpha(\cdot)) \in \mathcal{U}_{pos} \times \Delta(0,1)$ *süper stratejisi vardır.*

Kanıt. $c(\cdot) : [0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olduğundan, $\gamma^*_\mu(t,x)$ (5.4.4) ile tanımlı olmak üzere, $\forall\ \mu > 0$ verildiğinde $\forall\ u \in P$, $\forall\ x(\cdot) \in X\,(t,x,u)$ ve $\forall\ \delta \in (0,\gamma^*_\mu(t,x)]$ için

$$c\,(t+\delta,x(t+\delta)) - c(t,x) \leq \mu \tag{5.5.3}$$

olduğu elde edilir.

$\forall\ (t,x) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ için

$$P_\alpha(t,x) = \left\{ u_* \in P : \sup_{f \in F(t,x,u_*)} \frac{D^+c(t,x)}{D(1,f)} \leq \alpha \right\}$$

kümesi tanımlansın.

Bu durumda $\forall\ (\mu,t,x,u) \in (0,1) \times [0,\theta) \times \mathbb{R}^n \times P$ için süper strateji aşağıdaki gibi alınsın.

$$U_\alpha(t,x) = \begin{cases} u_* \in P_\alpha(t,x) & ,0 < c(t,x) < \varepsilon_* \\ u \in P & ,c(t,x) \geq \varepsilon_*\, veya\, c(t,x) \leq 0 \end{cases} \tag{5.5.4}$$

ve

$$\delta_\alpha(\mu,t,x,u) = \begin{cases} min\{\tau_2^\mu(t,x,u),\mu,\theta-t\} & ,0 < c(t,x) < \varepsilon_* \text{ ve } u = U_\alpha(t,x) \\ min\{\gamma^*_\mu(t,x),\mu,\theta-t\} & ,c(t,x) \leq 0 \text{ ve } u \in P \\ min\{\mu,\theta-t\} & ,c(t,x) \geq \varepsilon_* \text{ veya } u \neq U_\alpha(t,x). \end{cases} \tag{5.5.5}$$

Burada kullanılan $\tau_2^\mu(t,x,u) > 0$ sayısı Önerme 5.1.7 de bulunan sayıdır. $\gamma^*_\mu(t,x)$ ise (5.4.4) ile tanımlıdır. Ayrıca $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için $U_\alpha(\theta,x) = u_* \in P$ olsun.

$c(t_0,x_0) \leq \varepsilon_0$ olacak biçimde $(t_0,x_0) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ alınıp sabitlensin ve

$$0 \leq \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon_*}{2}$$

olduğu kabul edilsin.

Şimdi $(U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ süper stratejisinin, $(t_0, x_0) \in [0, \theta) \times \mathbb{R}^n$ başlangıç noktasında ürettiği keyfi $x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right)$ yörüngeleri için $\forall t \in [t_0, \theta]$ iken

$$c\left(t, x(t)\right) \leq \varepsilon_0 + \alpha\left(t - t_0\right) \tag{5.5.6}$$

olduğu gösterilsin.

Keyfi sabitlenmiş $x(\cdot) \in X\left(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right)$ yörüngesi alındığında, $k \to \infty$ iken, $\mu_k \to 0^+$ olan $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0,1)$ sayı dizisi ve $x_k(\cdot) \to x(\cdot)$ düzgün yakınsayan $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{Z}\left(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right)$ adımlı yörüngeler dizisi vardır. $\mathcal{Z}\left(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot)\right)$ adımlı yörüngeler kümesinin tanımından her k için $x_k(\cdot) \in \mathcal{Y}_{\mu_k}\left(t_0, x_0, U_\alpha, h_k(\cdot)\right)$ olacak biçimde $h_k(\cdot) \in \Delta_{\mu_k}(\delta_\alpha(\cdot))$ fonksiyonu vardır. $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi tanımlanırken, U_α pozisyonlu stratejisi ve $h_k(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, \theta]$ aralığının bir $L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ iyi sıralı kümesini doğurur (bkz. Önerme 2.6.3).

$$\alpha < \frac{\varepsilon_*}{2\,\theta}, \qquad \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon_*}{2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta}\left(\varepsilon_* - \varepsilon_0\right) - \alpha > &\ \frac{1}{\theta}\left(\varepsilon_* - \varepsilon_0\right) - \frac{\varepsilon_*}{2\,\theta} \\ = &\ \frac{\varepsilon_*}{2\,\theta} - \frac{\varepsilon_0}{\theta} \\ = &\ \frac{1}{\theta}\left(\frac{\varepsilon_*}{2} - \varepsilon_0\right) \\ > &\ 0 \end{aligned} \tag{5.5.7}$$

ve

$$\begin{aligned} \varepsilon_* - \alpha\,\theta > &\ \varepsilon_* - \frac{\varepsilon_*}{2\,\theta}\,\theta \\ = &\ \varepsilon_* - \frac{\varepsilon_*}{2} \\ = &\ \frac{\varepsilon_*}{2} \\ > &\ 0 \end{aligned} \tag{5.5.8}$$

olur. Şimdi genelliği bozmaksızın, keyfi $k = 1, 2, \ldots$ için

$$\mu_k < \begin{cases} min\left\{\varepsilon_0, \dfrac{\varepsilon_* - \varepsilon_0 - \alpha\,\theta}{\theta}\right\} & , \quad \varepsilon_0 > 0 \\ \\ \dfrac{\varepsilon_* - \alpha\,\theta}{1+\theta}, & , \quad \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.5.9}$$

olsun. Herhangi bir k seçilsin ve sabitlensin. $x_k(\cdot) \in \mathcal{Y}_{\mu_k}(t_0, x_0, U_\alpha, h_k(\cdot))$ ve $\forall\ t_\beta^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ için

$$c\left(t_\beta^k, x_k(t_\beta^k)\right) \le \begin{cases} \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\ (t_\beta^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 > 0 \\ \\ \mu_k + (\mu_k + \alpha)\ (t_\beta^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.5.10}$$

olduğu gösterilsin.

$\forall\ k$ için $x_k(t_0) = x_0$ olduğundan, $c\left(t_0, x_k(t_0)\right) \le \varepsilon_0$ olur. $u_0 = U_\alpha(t_0, x_0)$ ve

$$t_1^k = t_0 + h_k\left(t_0, x_0, u_0\right)$$

olarak alınsın. Bu durumda

I. $\varepsilon_0 = 0$ olsun. O halde $c\left(t_0, x_k(t_0)\right) \le 0$ olur.

$x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesinin ve (5.5.4) ile verilen U_α pozisyonlu stratejinin tanımından, $[t_0, t_1^k]$ aralığında $x_k(\cdot)$ fonksiyonu bir $u_* \in P$ için

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_*\right), \quad x_k(t_0) = x_0$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. $\varepsilon_0 = 0$ olduğundan, $c\left(t_0, x_0\right) \le 0$ ve $(t_0, x_0) \in W$ olduğu bulunur. $c(\cdot)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, (5.5.3) eşitsizliğinden, keyfi $u \in P$ keyfi $x(\cdot) \in X(t_0, x_0, u)$ ve $\forall\ \delta \in \left(0, \gamma_{\mu_k}^*(t_0, x_0)\right]$ için,

$$c\left(t_0 + \delta, x(t_0 + \delta)\right) - c(t_0, x_0) \le \mu_k$$

olur. $x_k(\cdot) \in X(t_0, x_0, u_*)$ olduğundan, $\forall\ \delta \in \left(0, \gamma_{\mu_k}^*(t_0, x_0)\right]$ için,

$$c\left(t_0 + \delta, x_k(t_0 + \delta)\right) - c(t_0, x_0) \le \mu_k \tag{5.5.11}$$

olur. Burada $\gamma^*_{\mu_k}(t_0, x_0) > 0$ değeri (5.4.4) ile tanımlanır. Ayrıca $c\,(t_0, x_0) \leq 0$ olduğundan (5.5.5) ile verilen $\delta_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun tanımlanışından,

$$\begin{aligned} t_1^k - t_0 &= h_k\,(t_0, x_0, u_0) \\ &\leq \delta_\alpha\,(\mu_k, t_0, x_0, u_0) \\ &\leq \gamma^*_{\mu_k}\,(t_0, x_0) \end{aligned}$$

olur. O zaman buradan, (5.5.11) eşitsizliğinden ve $c(t_0, x_0) \leq 0$ olmasından

$$\begin{aligned} c\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right) &\leq \mu_k \\ &\leq \mu_k + (\mu_k + \alpha)\,(t_1^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.5.12}$$

elde edilir.

II. $\varepsilon_0 > 0$ olsun.

Yani $0 < c\,(t_0, x_k(t_0)) = \varepsilon_0 < \dfrac{\varepsilon_*}{2}$ olur. Bu durumda $u_0 = U_\alpha(t_0, x_0)$ denilirse, (5.5.4) ile verilen U_α pozisyonlu stratejinin tanımından

$$\sup_{f \in F(t_0, x_0, u_0)} \frac{D^+ c(t_0, x_0)}{D(1, f)} \leq \alpha \tag{5.5.13}$$

olduğu görülür. Bu durumda Önerme 5.1.7 gereği $\forall\ u \in P$, $\forall\ x(\cdot) \in X(t_0, x_0, u)$ ve $\forall\ \delta \in [0, \tau_2^{\mu_k}(t_0, x_0, u_0)]$ için,

$$c\,(t_0 + \delta, x(t_0 + \delta)) - c(t_0, x_0) \leq \delta\ (\mu_k + \alpha)$$

olur. Burada $\tau_2^{\mu_k}(t_0, x_0, u_0)$ Önerme 5.1.7 de tanımlanır. $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi $[t_0, t_1^k]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\,(t, x_k(t), u_0)\,, \quad x_k(t_0) = x_0$$

Cauchy probleminin çözümü olarak alınır. Yani $x_k(\cdot) \in X(t_0, x_0, u_0)$ olur. O halde $\forall\ \delta \in [0, \tau_2^{\mu_k}(t_0, x_0, u_0)]$ için,

$$c\,(t_0 + \delta, x_k(t_0 + \delta)) - c(t_0, x_0) \leq \delta\ (\mu_k + \alpha) \tag{5.5.14}$$

elde edilir. Ayrıca (5.5.5) ile verilen $\delta_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun tanımlanışından,

$$\begin{aligned} t_1^k - t_0 &= h_k\,(t_0, x_0, u_0) \\ &\leq \delta_\alpha\,(\mu_k, t_0, x_0, u_0) \\ &\leq \tau_2^{\mu_k}(t_0, x_0, u_0) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (5.5.14) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} c\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right) \leq & c(t_0, x_0) + (\mu_k + \alpha)\,(t_1^k - t_0) \\ = & \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\,(t_1^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.5.15}$$

elde edilir.

O zaman (5.5.12) ve (5.5.15) eşitsizliklerinden $t_1^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k\,(\cdot)\,, U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ için (5.5.10) eşitsizliği sağlanır. Yani

$$c\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\,(t_1^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 > 0 \\ \\ \mu_k + (\mu_k + \alpha)\,(t_1^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.5.16}$$

olur. $\varepsilon_1 = c\left(t_1^k\,, x_k(t_1^k)\right)$ denilsin. O zaman (5.5.16) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_1 \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\ (t_1^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 > 0 \\ \\ \mu_k + (\mu_k + \alpha)(t_1^k - t_0) & , \quad \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.5.17}$$

olarak yazılır.

$$\mu_k < \begin{cases} min\left\{\varepsilon_0, \dfrac{\varepsilon_* - \varepsilon_0 - \alpha\,\theta}{\theta}\right\} & , \quad \varepsilon_0 > 0 \\ \\ \dfrac{\varepsilon_* - \alpha\,\theta}{1 + \theta}, & , \quad \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.5.18}$$

olduğundan ve (5.5.16) eşitsizliğinden $\varepsilon_0 = 0$ iken

$$\begin{aligned} c\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right) &\leq \mu_k \ + (\mu_k+\alpha)\,(t_1^k-t_0) \\ &\leq \mu_k(1+\theta)+\alpha\,\theta \\ &< \frac{\varepsilon_*-\alpha\,\theta}{1+\theta}\,(1+\theta)+\alpha\,\theta \\ &= \varepsilon_* \end{aligned} \tag{5.5.19}$$

ve $\varepsilon_0 > 0$ iken

$$\begin{aligned} c\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right) &\leq \varepsilon_0 + (\mu_k+\alpha)\,(t_1^k-t_0) \\ &< \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_*-\varepsilon_0-\alpha\,\theta}{\theta}\,\theta+\alpha\,\theta \\ &= \varepsilon_0+\varepsilon_*-\varepsilon_0-\alpha\,\theta+\alpha\,\theta \\ &= \varepsilon_* \end{aligned} \tag{5.5.20}$$

olduğu bulunur. O zaman (5.5.19) ve (5.5.20) eşitsizliklerinden

$$c\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right) < \varepsilon_* \tag{5.5.21}$$

olduğu görülür.

$\varepsilon_1^k = c\left(t_1^k, x_k(t_1^k)\right)$, $t_2^k = t_1^k + h_k\left(t_1^k, x_k(t_1^k), U_\alpha(t_1^k, x_k(t_1^k))\right)$, $x_k(t_1^k) = x_1^k$ denilsin. Bu durumda $\varepsilon_1^k = c\left(t_1^k, x_1^k\right)$ için iki durum olabilir.

I. $\varepsilon_1^k = c\left(t_1^k, x_1^k\right) \leq 0$ olsun.

$x_k(\cdot)$ adımlı yörüngenin ve (5.5.4) ile verilen U_α pozisyonlu stratejinin tanımından, $[t_1^k, t_2^k]$ aralığında $x_k(\cdot)$ fonksiyonu bir $u_* \in P$ için

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_*\right), \quad x_k(t_1^k) = x_1^k$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. $c\left(t_1^k, x_1^k\right) \leq 0$ olduğundan $\left(t_1^k, x_1^k\right) \in W$ olduğu bulunur. $c(\cdot)$ fonksiyonu sürekli olduğundan (5.5.3) eşitsizliğinden, keyfi $x(\cdot) \in X(t_1^k, x_1^k, u)$ ve $\forall\ \delta \in \left(0, \gamma_{\mu_k}^*(t_1^k, x_1^k)\right]$ için,

$$c\left(t_1^k+\delta, x(t_1^k+\delta)\right) - c(t_1^k, x_1^k) \leq \mu_k$$

olur. $x_k(\cdot) \in X(t_1^k, x_1^k, u_*)$ olduğundan, $\forall\ \delta \in \left(0, \gamma^*_{\mu_k}(t_1^k, x_1^k)\right]$ için,

$$c\left(t_1^k + \delta, x_k(t_1^k + \delta)\right) - c(t_1^k, x_1^k) \leq \mu_k \tag{5.5.22}$$

olur. Ayrıca (5.5.5) ile verilen $\delta_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun tanımlanışından,

$$\begin{aligned} t_2^k - t_1^k &= h_k\left(t_1^k, x_1^k, u_*\right) \\ &\leq \delta_\alpha\left(\mu_k, t_1^k, x_1^k, u_*\right) \\ &\leq \gamma^*_{\mu_k}\left(t_1^k, x_1^k\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan, (5.5.22) eşitsizliğinden ve $c(t_1^k, x_1^k) \leq 0$ olmasından

$$\begin{aligned} c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq& \mu_k \\ \leq& \mu_k + (\mu_k + \alpha)\left(t_2^k - t_0\right) \end{aligned} \tag{5.5.23}$$

elde edilir.

II. $\varepsilon_1^k = c\left(t_1^k, x_1^k\right) > 0$ olsun.

O halde (5.5.21) eşitsizliğinden $0 < c\left(t_1^k, x_1^k\right) < \varepsilon_*$ olur. Bu durumda $u_1^k = U_\alpha(t_1^k, x_1^k)$ denilirse, (5.5.4) ile verilen U_α pozisyonlu stratejinin tanımından,

$$\sup_{f \in F\left(t_1^k, x_1^k, u_1^k\right)} \frac{D^+ c(t_1^k, x_1^k)}{D(1, f)} \leq \alpha \tag{5.5.24}$$

olduğu görülür. Bu durumda Önerme 5.1.7 gereği $\forall\ x(\cdot) \in X(t_1^k, x_1^k, u_1^k)$ ve $\forall\ \delta \in \left[0, \tau_2^{\mu_k}(t_1^k, x_1^k, u_1^k)\right]$ için,

$$c\left(t_1^k + \delta, x(t_1^k + \delta)\right) - c(t_1^k, x_1^k) \leq \delta\ (\mu_k + \alpha)$$

olur. $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi $[t_1^k, t_2^k]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_1^k\right), \quad x_k(t_1^k) = x_1^k$$

Cauchy probleminin çözümü olarak alınır. Yani $x_k(\cdot) \in X(t_1^k, x_1^k, u_1^k)$ olur. O halde $\forall\ \delta \in \left[0, \tau_2^{\mu_k}(t_1^k, x_1^k, u_1^k)\right]$ için,

$$c\left(t_1^k + \delta, x_k(t_1^k + \delta)\right) - c(t_1^k, x_1^k) \leq \delta\ (\mu_k + \alpha) \tag{5.5.25}$$

olarak bulunur. Ayrıca (5.5.5) ile verilen $\delta_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun tanımlanışından,

$$\begin{aligned} t_2^k - t_1^k &= h_k\left(t_1^k, x_1^k, u_1^k\right) \\ &\leq \delta_\alpha\left(\mu_k, t_1^k, x_1^k, u_1^k\right) \\ &\leq \tau_2^{\mu_k}(t_1^k, x_1^k, u_1^k) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (5.5.25) eşitsizliğinden

$$c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq c(t_1^k, x_1^k) + (\mu_k + \alpha)\,(t_2^k - t_1^k) \tag{5.5.26}$$

olduğu görülür.

Böylece $\varepsilon_1 = c\left(t_1^k, x_1^k\right)$ olduğundan, (5.5.23) ve (5.5.26) eşitsizliklerinden

$$c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq \begin{cases} \mu_k + (\mu_k + \alpha)\,(t_2^k - t_1^k), & \varepsilon_1 \leq 0 \\ \varepsilon_1 + (\mu_k + \alpha)\,(t_2^k - t_1^k), & \varepsilon_1 > 0 \end{cases} \tag{5.5.27}$$

olduğu elde edilir.

$\varepsilon_0 = 0$ olsun. O halde (5.5.17) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_1 \leq \mu_k + (\mu_k + \alpha)\,(t_1^k - t_0) \tag{5.5.28}$$

olarak yazılır. Bu durumda, eğer $\varepsilon_1 = 0$ ise o zaman (5.5.27) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) &\leq \mu_k + (\mu_k + \alpha)\,(t_2^k - t_1^k) \\ &\leq \mu_k + (\mu_k + \alpha)\,(t_2^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.5.29}$$

olur. Eğer $\varepsilon_1 > 0$ ise (5.5.27) ve (5.5.28) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) &\leq \varepsilon_1 + (\mu_k + \alpha)\,(t_2^k - t_1^k) \\ &\leq \mu_k + (\mu_k + \alpha)\,(t_2^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.5.30}$$

olur. Böylece (5.5.29) ve (5.5.30) eşitsizliklerinden $\varepsilon_0 \leq 0$ iken

$$c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq \mu_k + (\mu_k + \alpha)\,(t_2^k - t_0) \tag{5.5.31}$$

olduğu elde edilir.

$\varepsilon_0 > 0$ olsun. O halde (5.5.17) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\left(t_1^k - t_0\right) \tag{5.5.32}$$

olur. Eğer $\varepsilon_1 \leq 0$ ise o zaman (5.5.18) ve (5.5.27) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq & \mu_k + (\mu_k + \alpha)\left(t_2^k - t_1^k\right) \\ \leq & \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\left(t_2^k - t_0\right) \end{aligned} \tag{5.5.33}$$

olur.

Eğer $\varepsilon_1 > 0$ ise (5.5.27) ve (5.5.32)'den

$$\begin{aligned} c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq & \varepsilon_1 + (\mu_k + \alpha)\left(t_2^k - t_1^k\right) \\ \leq & \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\left(t_2^k - t_0\right) \end{aligned} \tag{5.5.34}$$

elde edilir. Böylece (5.5.33) ve (5.5.34) eşitsizliklerinden $\varepsilon_0 > 0$ iken

$$c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\left(t_2^k - t_0\right) \tag{5.5.35}$$

olduğu elde edilir. O zaman (5.5.31) ve (5.5.35) eşitsizliklerinden $t_2^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ için

$$c\left(t_2^k, x_k(t_2^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\left(t_2^k - t_0\right), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + (\mu_k + \alpha)\left(t_2^k - t_0\right), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

olduğu görülür ve (5.5.10) eşitsizliği sağlanır.

Şimdi, $\forall t_\nu^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ alınsın. ν t_ν^k'ye karşılık gelen order sayısı olmak üzere, $\forall\ \beta < \nu$ için

$$c\left(t_\beta^k, x_k(t_\beta^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\ \left(t_\beta^k - t_0\right), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + (\mu_k + \alpha)\ \left(t_\beta^k - t_0\right), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.5.36}$$

sağlandığı kabul edilsin ve

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\ \left(t_\nu^k - t_0\right), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + (\mu_k + \alpha)\ \left(t_\nu^k - t_0\right), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.5.37}$$

olduğu gösterilsin. t_ν^k için iki durum söz konusudur.

1. t_ν^k'nın öncülü olan $t_\sigma^k \in L\{[t_0,\theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\}$ sayısı vardır. Bu durumda $\left(t_\sigma^k, t_\nu^k\right) \cap L\{[t_0,\theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\} = \emptyset$ ve $t_\nu^k = t_\sigma^k + h\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k), U_\alpha\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)\right)\right)$ olur. $t_\sigma^k \in L\{[t_0,\theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\}$ için (5.5.36) sağlandığından

$$c\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)\right) \le \begin{cases} \varepsilon_0 + (\mu_k+\alpha)\ (t_\sigma^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + (\mu_k+\alpha)\ (t_\sigma^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.5.38}$$

olur. $\varepsilon_\sigma^k = c\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)\right)$ denilsin. O zaman (5.5.38) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_\sigma^k \le \begin{cases} \varepsilon_0 + (\mu_k+\alpha)\ (t_\sigma^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + (\mu_k+\alpha)\ (t_\sigma^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.5.39}$$

olarak yazılır.

$$\mu_k < \begin{cases} min\left\{\varepsilon_0, \dfrac{\varepsilon_* - \varepsilon_0 - \alpha\,\theta}{\theta}\right\} & , \ \varepsilon_0 > 0 \\ \\ \dfrac{\varepsilon_* - \alpha\,\theta}{1+\theta}, & , \ \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.5.40}$$

olduğundan ve (5.5.38) eşitsizliğinden $\varepsilon_0 \le 0$ iken

$$\begin{aligned} \varepsilon_\sigma^k = c\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)\right) &\le \mu_k\ + (\mu_k+\alpha)\ (t_\sigma^k - t_0) \\ &\le \mu_k(1+\theta) + \alpha\,\theta \\ &< \frac{\varepsilon_* - \alpha\,\theta}{1+\theta}(1+\theta) + \alpha\,\theta \\ &= \varepsilon_* \end{aligned} \tag{5.5.41}$$

ve $\varepsilon_0 > 0$ iken

$$\begin{aligned} \varepsilon_\sigma^k = c\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)\right) &\le \varepsilon_0 + \mu_k(t_\sigma^k - t_0) \\ &< \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_* - \varepsilon_0 - \alpha\,\theta}{\theta}\theta + \alpha\,\theta \\ &= \varepsilon_0 + \varepsilon_* - \varepsilon_0 - \alpha\,\theta + \alpha\,\theta \\ &= \varepsilon_* \end{aligned} \tag{5.5.42}$$

olduğu bulunur. O zaman (5.5.41) ve (5.5.42) eşitsizliklerinden

$$\varepsilon_\sigma^k = c\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)\right) < \varepsilon_* \tag{5.5.43}$$

olduğu görülür.

$x_k(t_\sigma^k) = x_\sigma^k$ denilsin. Bu durumda $\varepsilon_\sigma^k = c\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right)$ için iki durum olabilir.

I. $\varepsilon_\sigma^k = c\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) \leq 0$ olsun.

$x_k(\cdot)$ adımlı yörüngenin ve (5.5.4) ile verilen U_α pozisyonlu stratejinin tanımından, $[t_\sigma^k, t_\nu^k]$ aralığında $x_k(\cdot)$ fonksiyonu bir $u_* \in P$ için

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_*\right), \quad x_k(t_\sigma^k) = x_\sigma^k$$

Cauchy probleminin çözümlerinden biri olarak alınır. $c\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) \leq 0$ olduğundan $\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) \in W$ olduğu bulunur. $c(\cdot)$ fonksiyonu sürekli olduğundan (5.5.3) eşitsizliğinden, keyfi $u \in P$, keyfi $x(\cdot) \in X(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u)$ ve $\forall\ \delta \in \left(0, \gamma_{\mu_k}^*(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right]$ için,

$$c\left(t_\sigma^k + \delta, x(t_\sigma^k + \delta)\right) - c(t_\sigma^k, x_\sigma^k) \leq \mu_k$$

olur. $x_k(\cdot) \in X(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_*)$ olduğundan, $\forall\ \delta \in \left(0, \gamma_{\mu_k}^*(t_\sigma^k, x_\sigma^k)\right]$ için,

$$c\left(t_\sigma^k + \delta, x_k(t_\sigma^k + \delta)\right) - c(t_\sigma^k, x_\sigma^k) \leq \mu_k \tag{5.5.44}$$

olur. Burada $\gamma_{\mu_k}^*\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) > 0$ değeri (5.4.4) ile tanımlanır. Ayrıca (5.5.5) ile verilen $\delta_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun tanımlanışından,

$$\begin{aligned} t_\nu^k - t_\sigma^k &= h_k\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_*\right) \\ &\leq \delta_\alpha\left(\mu_k, t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_*\right) \\ &\leq \gamma_{\mu_k}^*\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan, (5.5.44) eşitsizliğinden ve $c(t_\sigma^k, x_\sigma^k) \leq 0$ olmasından

$$\begin{aligned} c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) &\leq \mu_k \\ &\leq \mu_k + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_\sigma^k) \end{aligned} \tag{5.5.45}$$

elde edilir.

II. $\varepsilon_\sigma^k = c\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) > 0$ olsun

O halde (5.5.43) eşitsizliğinden $0 < c\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k\right) < \varepsilon_*$ olur. Bu durumda $u_\sigma^k = U_\alpha(t_\sigma^k, x_\sigma^k)$ denilirse, (5.5.4) ile verilen U_α pozisyonlu stratejinin tanımından

$$\sup_{f \in F\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right)} \frac{D^+ c(t_\sigma^k, x_\sigma^k)}{D(1,f)} \leq \alpha \tag{5.5.46}$$

olduğu görülür. Bu durumda Önerme 5.1.7 gereği $\forall\ x(\cdot) \in X(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k)$ ve $\forall\ \delta \in \left[0, \tau_2^{\mu_k}(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k)\right]$ için,

$$c\left(t_\sigma^k + \delta, x(t_\sigma^k + \delta)\right) - c(t_\sigma^k, x_\sigma^k) \leq \delta\ (\mu_k + \alpha)$$

olur. $x_k(\cdot)$ adımlı yörüngesi $[t_\sigma^k, t_\nu^k]$ aralığında

$$\dot{x}_k(t) \in F\left(t, x_k(t), u_\sigma^k\right), \quad x_k(t_\sigma^k) = x_\sigma^k$$

Cauchy probleminin çözümü olarak alınır. Yani $x_k(\cdot) \in X(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k)$ olur. O halde $\forall\ \delta \in \left[0, \tau_2^{\mu_k}(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k)\right]$ için,

$$c\left(t_\sigma^k + \delta, x_k(t_\sigma^k + \delta)\right) - c(t_\sigma^k, x_\sigma^k) \leq \delta\ (\mu_k + \alpha) \tag{5.5.47}$$

olur. Ayrıca (5.5.5) ile verilen $\delta_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun tanımlanışından,

$$\begin{aligned} t_\nu^k - t_\sigma^k &= h_k\left(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right) \\ &\leq \delta_\alpha\left(\mu_k, t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k\right) \\ &\leq \tau_2^{\mu_k}(t_\sigma^k, x_\sigma^k, u_\sigma^k) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda buradan ve (5.5.47) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) &\leq c(t_\sigma^k, x_\sigma^k) + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ &= \varepsilon_\sigma^k + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_\sigma^k) \end{aligned} \tag{5.5.48}$$

olarak yazılır.

Böylece (5.5.45) ve (5.5.48) eşitsizliklerinden

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \leq \begin{cases} \mu_k + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_\sigma^k), & \varepsilon_\sigma^k \leq 0 \\ \varepsilon_\sigma^k + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_\sigma^k), & \varepsilon_\sigma^k > 0 \end{cases} \tag{5.5.49}$$

olur. Burada $\varepsilon_\sigma^k = c\left(t_\sigma^k, x_k(t_\sigma^k)\right)$ dır.

$\varepsilon_0 = 0$ olsun. O halde (5.5.39) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_\sigma^k \leq \mu_k + (\mu_k + \alpha)\ (t_\sigma^k - t_0) \tag{5.5.50}$$

olur. Bu durumda, eğer $\varepsilon_\sigma^k \leq 0$ ise o zaman (5.5.49) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) &\leq \mu_k + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ &\leq \mu_k + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.5.51}$$

olur. Eğer $\varepsilon_\sigma^k > 0$ ise (5.5.49) ve (5.5.50) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) &\leq \varepsilon_\sigma^k + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ &\leq \mu_k + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.5.52}$$

olur. Böylece (5.5.51) ve (5.5.52) eşitsizliklerinden $\varepsilon_0 = 0$ iken

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \leq \mu_k + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_0) \tag{5.5.53}$$

olduğu elde edilir.

$\varepsilon_0 > 0$ olsun. O halde (5.5.39) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_\sigma^k \leq \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\ (t_\sigma^k - t_0) \tag{5.5.54}$$

olur. Eğer $\varepsilon_\sigma^k \leq 0$ ise o zaman (5.5.18), (5.5.49) ve (5.5.54) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) &\leq \mu_k + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ &\leq \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.5.55}$$

olur.

Eğer $\varepsilon_\sigma^k > 0$ ise (5.5.49) ve (5.5.54) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) &\leq \varepsilon_\sigma^k + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_\sigma^k) \\ &\leq \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_0) \end{aligned} \tag{5.5.56}$$

elde edilir. Böylece (5.5.55) ve (5.5.56) eşitsizliklerinden $\varepsilon_0 > 0$ iken

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \leq \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_0) \tag{5.5.57}$$

olduğu elde edilir. O zaman (5.5.53) ve (5.5.57) eşitsizliklerinden $t_\nu^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ için

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

olduğu görülür ve (5.5.10) eşitsizliği sağlanır.

2. ν order sayısının öncülü olmasın. Yani t_ν^k noktası iyi sıralı $L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ kümesinin yığılma noktası olsun. Bu durumda $t_{\lambda_1}^k < t_{\lambda_2}^k < \ldots < t_{\lambda_i}^k < \ldots$, $\forall i$ i çin $t_{\lambda_i}^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ olmak üzere $\lim\limits_{i\to\infty} t_{\lambda_i}^k = t_\nu^k - 0$ olacak biçimde $\left\{t_{\lambda_i}^k\right\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi vardır. O zaman keyfi i için $t_{\lambda_i}^k \in L\left\{[t_0, \theta]; x_k\left(\cdot\right), U_\alpha, h_k(\cdot)\right\}$ olmak üzere (5.5.36) sağlandığından

$$c\left(t_{\lambda_i}^k, x_k(t_{\lambda_i}^k)\right) \leq \begin{cases} \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\ (t_{\lambda_i}^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + (\mu_k + \alpha)\ (t_{\lambda_i}^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.5.58}$$

olur. O halde $\varepsilon_0 > 0$ iken keyfi $i = 1, 2, \ldots$ için

$$c\left(t_{\lambda_i}^k, x_k(t_{\lambda_i}^k)\right) \leq \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\ (t_{\lambda_i}^k - t_0) \tag{5.5.59}$$

ve $\varepsilon_0 = 0$ iken keyfi $i = 1, 2, \ldots$ için

$$c\left(t_{\lambda_i}^k, x_k(t_{\lambda_i}^k)\right) \leq \mu_k + (\mu_k + \alpha)\ (t_{\lambda_i}^k - t_0) \tag{5.5.60}$$

olur. $i \to \infty$ iken $t_{\lambda_i}^k \to t_\nu^k - 0$, $x_k(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ mutlak sürekli, $c(\cdot)$ sürekli fonksiyon olduğundan (5.5.59) ve (5.5.60)'den $i \to \infty$ iken limit alınırsa $\varepsilon_0 > 0$ için

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \leq \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_0) \tag{5.5.61}$$

ve $\varepsilon_0 = 0$ için

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \le \mu_k + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_0) \tag{5.5.62}$$

olur . O zaman (5.5.61) ve (5.5.62) eşitsizliklerinden $t_\nu^k \in L\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\}$ için

$$c\left(t_\nu^k, x_k(t_\nu^k)\right) \le \begin{cases} \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + (\mu_k + \alpha)\ (t_\nu^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanmış olur. Böylece (5.5.10) eşitsizliğinin doğruluğu kanıtlanır.

Şimdi keyfi $t_* \in [t_0, \theta]$ alınsın ve sabitlensin. Bu durumda $\forall\ t_\nu^k,\ t_{\nu+1}^k \in L\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\}$ için, $0 < t_{\nu+1}^k - t_\nu^k < \mu_k$ ve $k \to \infty$ iken $\mu_k \to 0^+$ olduğundan, her k için

$$\mid t_{\beta(k)}^{(k)} - t_* \mid \le \mu_k$$

olacak biçimde $t_{\beta(k)}^k \in L\{[t_0, \theta]; x_k(\cdot), U_\alpha, h_k(\cdot)\}$ vardır. O halde $k \to \infty$ iken $t_{\beta(k)}^k \to t_*$ olur ve $\forall\ k$ için (5.5.10) eşitsizliğinden

$$c\left(t_{\beta(k)}^k, x_k(t_{\beta(k)}^k)\right) \le \begin{cases} \varepsilon_0 + (\mu_k + \alpha)\ (t_{\beta(k)}^k - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \mu_k + (\mu_k + \alpha)\ (t_{\beta(k)}^k - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.5.63}$$

olur. Bu durumda $k \to \infty$ iken $t_{\beta(k)}^k \to t_*$, $x_k(\cdot) \to x(\cdot)$, $\mu_k \to 0^+$, $c(\cdot)$ sürekli fonksiyon olduğundan, (5.5.63) eşitsizliğinden

$$c\left(t_*, x(t_*)\right) \le \begin{cases} \varepsilon_0 + \alpha\,(t_* - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \alpha\,(t_* - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.5.64}$$

olduğu bulunur. $t_* \in [t_0, \theta]$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, (5.5.64) eşitsizliğinden $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$c\left(t, x(t)\right) \le \begin{cases} \varepsilon_0 + \alpha\,(t - t_0), & \varepsilon_0 > 0 \\ \alpha\,(t - t_0), & \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \tag{5.5.65}$$

olduğu görülür.

$x(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ keyfi olduğundan, (5.5.65) eşitsizliği keyfi $x(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ için doğru olur.

$0 \le \varepsilon_0 < \varepsilon_*$ sayısı $c(t_0, x_0)) \le \varepsilon_0$ koşulundan seçilmektedir. Eğer $(t_0, x_0) \in W$ ise, o zaman $c(t_0, x_0) \le 0$ olur ve $\varepsilon_0 = 0$ olarak seçilebilir. O halde (5.5.65) eşitsizliğinden, $\forall\, x(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ ve $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$c(t, x(t)) \le \alpha(t - t_0)$$

olur.

□

Teorem 5.5.1'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.5.1. *Teorem 5.5.1'in koşulları sağlansın.* $\varepsilon_0 \in [0, \frac{\varepsilon_*}{2})$ *olmak üzere* $(t_0, x_0) \in [0, \theta) \times \mathbb{R}^n$ *başlangıç pozisyonu,* $c(t_0, x_0) \le \varepsilon_0$ *olcak biçimde seçilsin.* $(U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ *süper stratejisi* (5.5.4) *ve* (5.5.5) *ile tanımlansın. O zaman* $\forall\, x(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_\alpha, \delta_\alpha(\cdot))$ *ve* $t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$c(t, x(t)) \le \varepsilon_0 + \alpha(t - t_0) \tag{5.5.66}$$

olur.

Sonuç 5.5.2. $c(\cdot) : [0, \theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sürekli fonksiyon olmak üzere,* $W \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ (5.2.1) *ile verilen küme,* $\varepsilon_* > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ *olsun.* $0 < c(t, x) < \varepsilon_*$ *eşitsizliğini sağlayan her* $(t, x) \in [0, \theta) \times \mathbb{R}^n$ *için*

$$\inf_{u \in P} \sup_{f \in F(t,x,u)} \frac{D^+ c(t, x)}{D(1, f)} \le 0 \tag{5.5.67}$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman $\forall\, (t_0, x_0) \in W$, $\forall\, x(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_\varepsilon, \delta_\varepsilon(\cdot))$ *ve* $\forall\, t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$c(t, x(t)) \le \varepsilon \tag{5.5.68}$$

olacak biçimde $(U_\varepsilon, \delta_\varepsilon(\cdot)) \in \mathcal{U}_{pos} \times \Delta(0, 1)$ *süper stratejisi vardır.*

Kanıt. $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ için $0 < \alpha_\varepsilon < \dfrac{\varepsilon}{2\,\theta}$ olarak alınsın. O halde (5.5.67) koşulundan $0 < c(t,x) < \varepsilon_*$ eşitsizliğini sağlayan her $(t,x) \in [0,\theta) \times \mathbb{R}^n$ için

$$\sup_{f \in F(t,x,u_\varepsilon)} \frac{D^+ c(t,x)}{D(1,f)} \le \alpha_\varepsilon \tag{5.5.69}$$

olacak biçimde $u_\varepsilon \in P$ vardır. O halde Teorem 5.5.1 gereği $\forall\,(t_0, x_0) \in W$, $\forall\, x(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_\varepsilon, \delta_\varepsilon(\cdot))$ ve $\forall\, t \in [t_0, \theta]$ için

$$c\,(t, x(t)) \le \alpha_\varepsilon\,(t - t_0) \tag{5.5.70}$$

olacak biçimde $(U_\varepsilon, \delta_\varepsilon(\cdot)) \in \mathcal{U}_{pos} \times \Delta(0,1)$ süper stratejisi vardır. $\forall\ \alpha_\varepsilon < \dfrac{\varepsilon}{2\,\theta}$, $t_0 \in [0,\theta]$ olduğundan $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\alpha_\varepsilon\,(t - t_0) < \frac{\varepsilon}{2\,\theta}\,(t - t_0) \le \varepsilon$$

olur. O halde (5.5.70) eşitsizliğinden, $\forall\,(t_0, x_0) \in W$, $\forall\, x(\cdot) \in X\,(t_0, x_0, U_\varepsilon, \delta_\varepsilon(\cdot))$ ve $\forall\, t \in [t_0, \theta]$ için

$$c\,(t, x(t)) \le \varepsilon$$

olduğu elde edilir. □

6 SONUÇLAR

Tezde, davranışı kontrol vektörlü diferansiyel içerme ile verilen dinamik sistemlerin kontrol yöntemleri, verilen süper stratejinin ürettiği yörüngelerin özelliklerinin araştırılması, verilen bir kümenin bu sistemlere göre pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliği ve sistemin yörüngelerinin verilen kümede kalmasını garanti eden süper stratejinin bulunması amaçlanmıştır.

Tezde geliştirilen yöntemelerin temelini, fonksiyonel analizin, diferansiyel denklemler ve içermeler teorisinin, küme değerli analizin, düzgün olmayan analizin, diferansiyel oyunlar teorisinin yöntem ve kavramları oluşturmaktadır.

Bu amaçlar doğrultusunda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. Süper strateji ve süper stratejinin verilen başlangıç pozisyondan ürettiği yörüngeler kümesi tanımlanıp, yörüngelerin mutlak sürekli fonksiyonlar ve yörünge kümelerinin kompakt olduğu kanıtlanmıştır.

2. Verilen kapalı kümenin kontrol vektörlü diferansiyel içermeye göre pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliği incelenmiştir. Küme değerli dönüşümlerin türev kümesi kavramından yararlanarak verilen kümenin pozisyonlu zayıf invaryant olması için yeter koşul verilmiştir. Bu yeter koşullardan yararlanarak, sistemin yörüngesinin verilen kümede kalmasını garanti eden süper stratejiler bulunmuştur. Verilen yeter koşullar küçük bir hata ile sağlandığında, pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliğinin de küçük bir hata ile bozulacağı gösterilmiştir.

3. Sürekli ve alttan yarı sürekli fonksiyonların seviye kümesi olarak verilen kümelerin pozisyonlu zayıf invaryantlık özellikleri incelenmiştir. Verilen fonksiyonun yöne göre üst türevi kullanılarak, seviye kümelerinin pozisyonlu zayıf invaryantlığı için yeter koşullar verilmiş ve sistemin yörüngesinin verilen kümede kalmasını garanti eden süper stratejiler bulunmuştur. Seviye kümesi olarak verilen kümelerin pozisyonlu zayıf invaryantlığı için bulunan yeter koşullar belli bir hata ile sağlandığında,

pozisyonlu zayıf invaryantlık özelliğinin uygun bir hata ile bozulacağı kanıtlanmıştır.

Elde edilen sonuçlar, belirsizlik içeren kontrol sistemlerin yörüngelerine önceden verilen özelliği garanti edecek kontrol fonksiyonlarının bulunmasında kullanılabilir.

KAYNAKLAR

[1] ACHHAB, M.E. ve WERTZW, V., *On Reachable Sets for a Class of Nonlinear Systems with Constraints*, J. Math. Anal. and Appl., **229**, 105-118, (1999).

[2] AIZERMAN M.A. ve PYATNITSKII E.S., *Foundations of a Theory of Discontinuous Systems*, I. Automat. Remote Control, **35(7)** 1066-1079, (1974).

[3] AUBIN, J.P., *Optima and Equilibria*, Springer, Berlin Heidelberg, (1998).

[4] AUBIN, J.P.,*Viability Theory*, Birkhauser, Boston, (1991).

[5] AUBIN, J.P. ve CELLINA, A., *Differential Inclusions, Springer-Verlag*, (1984)

[6] AUBIN, J.P. ve FRANKOWSKA H. *Set Valued Analysis*, Birkhauser, Boston, (1990).

[7] AZAMOW, A.A., *On An Alternative for Pursuit-Evasion Games in a Infinite Time Interval*, J. Appl. Math. Mech., **50(4)**, 428-432, (1986).

[8] BLAGODATSKIKH V.I. ve FILIPPOV A.F., *Differantial Inclutions and Optimal Control*, Proc. of The Steklov Inst. of Math., **169**, 199-256, (1986).

[9] BOULIGAND G., *Sur L'existence des Dimi-tTangents a Une Courbe de Jordan*, Fund. Math., **15**, 215-218, (1930).

[10] CHERNOUSKO, F.L., *State Estimation for Dynamic Systems*, SRC Press, Boca Raton, FL, (1993).

[11] CLARKE, F.H., *Generalized Gradients and Applications*, Trans. Amer. Math. Soc., **205**, 247-262, (1975).

[12] CLARKE, F.H., *The Maximum Principle Under Minimal Hypothesis*, SIAM J. Control Optim., **14**, 1078-1091, (1976).

[13] CLARKE, F.H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley Intersciences, New York, (1983).

[14] CLARKE, F.H., LEDYAEV, YU., STERN, R.J. ve WOLENSKI, P.R., *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer-Verlag, New York, (1998).

[15] COLONIUS, F. ve KLIENMANN, W., *The Dynamics of Control*, Birkhäuser, (2000).

[16] COLONIUS, F. ve KLIENMANN, W., *An Invariance Radius for Nonlinear Systems*, Advances in mathematical systems theory, 77-91, Systems Control Found.Appl, Birkhaur Boston, (2001).

[17] COLONIUS, F. ve DU, W., *Hyperbolic Control Sets and Chain Control Sets*, J.Dynam. Control Systems **7(1)**, 49-59, (2001).

[18] CRANDALL, M.G. ve LIONS P.L., *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **277**, 1-22, (1983).

[19] DEIMLING, K., *Multivalued Differential Equations*, D.Gruyter, Berlin, (1992).

[20] DEMYANOV, V.F. ve RUBINOV, A.M. *Nonsmooth Analysis and Quasidifferantial Calculus*, Nauka, Moskow.

[21] FILIPPOV, A.F., *On Certain Questions in The Theory of Optimal Control*, SIAM J. Control , **1(1)**, 76-84, (1962).

[22] FILIPPOV, A.F., *Classical Solutions of Differential Equations with Multivalued Right Hand Side*, SIAM J. Control, **5**, 609-621, (1967).

[23] FILIPPOV, A.F., *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, (1988).

[24] FLEMING, W.H. ve SOUGANIDIS, P.E., *PDE-Viscosity Solution Approach to Some Problems of Large Deviations*, Ann. Scuol. norm. super. Pisa, Cl. sci., **13(2)**, 171-192, (1986).

[25] FRANKOWSKA, H. ve OLECH, C., *Boundary Solutions to Differential Inclusions*, J. Diff. Eqs., **44**, 156-165, (1982).

[26] FRANKOWSKA, H., *Optimal Trajectories Associated to A Solution of Contingent Hamilton-Jacobi Equation*, Proc. 26th IEEE Conf. Decis. and Contr., Los Angeles, Dec. 9-11, 1987, New York, 1, 727-732, (1987).

[27] GUSEINOV, KH., *Strongly Invariant Sets with Respect to A Differential Inclution and The Aproach Problem for Discontinuous Control Systems*, Differential Equations, **28(9)**, 1213-1221, (1992).

[28] GUSEINOV, KH., *On Control Systems Descriebed by Differential Inclusions*, Part 1. Differential Equations, **31(8)** 1229 - 1237, (1995).

[29] GUSEINOV, KH., *On Control Systems Descriebed by Differential Inclusions*, Part 2. Differential Equations, **31(9)**, 1401 - 1408, (1995).

[30] GUSEINOV, KH., *Strongly Invariant Sets and Periodic Solutions of A Differential Inclusion*, Differential Equations,**26(10)**, 1246 - 1254, (1990).

[31] GUSEINOV, KH. ve DZHAFAROV, V.Y., *Left-Hand Solutions of The Hamilton-Jacobi Equation*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics,**2**, 54 - 66, (2000).

[32] GUSEINOV, KH. , MOISEYEV A.N. ve USHAKOV V.N., *On The Approximation of Reachable Domains of Control Systems*, J. Appl. Math. Mech. **62(2)**, 169-175, (1998).

[33] GUSEINOV, KH., OZER,O. ve DUZCE, S., *On Differential Inclusions with Prescribed Attainable Sets*, J. Math. Anal. Appl. **277(2)**, 701-713, (2003).

[34] GUSEINOV, KH., SUBBOTIN, A.I. ve USHAKOV V.N., *Derivatives for Multivalued Mappings with Applications to Game-Theoretical Problems of Control*, Problems of Control and Information Theory, **14(3)**, 155-167, (1985).

[35] GUSEINOV KH.G. ve USHAKOV V.N., *Strongly and Weakly Invariant Sets with Respect to A Differential Inclusion, Their Derivatives and Application to Control Problems*, Differential Equations, **26(11)**, 1399-1405, (1990).

[36] GUSEINOV KH.G. ve USHAKOV, V.N., *Strongly and Weakly Invariant Sets with Respect to A Differential Inclusions*, Soviet Math. Dokl., **38(3)**, 603-605, (1989).

[37] HADDAD G., *Monotone Trajectories of Differential Inclusions and Functional Differential Inclusion with Memory*, Israel J. of Math., **39(1)**, 83-100, (1981).

[38] HALMOS , P.R., *Naive Set Theory*, Springer-Verlag New York, (1974).

[39] HALKIN, H., *Topological Aspects of Optimal Control*, Contr. Diff. Eqns., **3**, 377-385, (1964).

[40] HERMES, H., *On The Closure and Convexity of Attainable Sets in Finite and Infinite Dimensions*, SIAM J. Control, **5(3)**, 409-417, (1967).

[41] HU, S. ve PAPAGEORGIOU, N.S., *Handbook of Multivalued Analysis*, Volum I:Theory, Kluwer Academic Press, (1997).

[42] HU, S. ve PAPAGEORGIOU, N.S., *Handbook of Multivalued Analysis*, Volum II:Application, Kluwer Academic Press,

[43] ISHII, H., *Uniqueness of Unbounded Viscosity Solution of Hamilton-Jacobi Equations*, Indiana Univ. Math. J., **33(5)**, 721-748, (1984).

[44] KANNAI, Z. ve TALLOS, P., *Viable Trajectories of Nonconvex Differential Inclusions*, Nonl. Anal. Theory Math. and Appl., **18(3)**, 295-306, (1992).

[45] KOLMOGOROV, A.N. ve FOMIN, S.V, *Introductory Real Analysis*, Dover Publications, New York, (1975).

[46] KRASOVSKII, N.N. ve SUBBOTIN, A.I., *Positional Differential Games*, Moscow, Nauka, (1974).

[47] KRASOVSKII, N.N. ve SUBBOTIN, A.I., *Game Theoretical Control Problems*, Springer, New York (1988).

[48] KURZHANSKII, A.B. ve FILIPPOVA, T.F., *Dynamics of The Set of Viable Trajectories to A Differential Inclusion: The Evolution Equation*, Problems Contr. Inform. Theory, **17**, 137-144, (1988).

[49] KURZHANSKII, A.B. ve VALYI, I., *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*, Birkhäuser, Boston, MA, (1996).

[50] KURZHANSKII, A.B. ve VARAIYA, P., *Reachability Under dDisturbances*, 38th Annual Allerton Conference on Communications, Control and Computing, University of Ilinois, **224**, 403-411, (2000).

[51] LEDYAYEV, YU.S., *Criteria for Viability of Trajectories of Non Autonomous Differential Inclusion and Their Applications*, Preprint CMR - 1583, Centre de Recherches Math., Univ. de Montreal, 1-22, (1988).

[52] LIONS, P.L. ve SOUGANDIS, P.E., *Differential Games, Optimal Control and Directional Derivatives of Viscosity Solutions of Belmann's and Isaacs Equations*, SIAM J. Control and Optim., **23**, 566-583, (1985).

[53] NATANSON, I.P., *Theory of Functions of a Real Variable*, Nauka,Moscow, (1974).

[54] MARCHAUD, A., *Sur Les Champs des Demi-Cones et Les Equations Differentielles du Premier Ordre*, Bull. Soc. Math. France, **62(1)**, 1-38, (1934).

[55] NIKOL'SKII, M.S., *A Method for Approximating Reachable Sets for A Differential Inclusion*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **28**, 1252-1254, (1988).

[56] NIKOL'SKII, M.S., *The Approximation of Reachable Sets for A Controllable Process*, Mat. Zametki, **41**, 71-76, (1987).

[57] PANASYUK, A.I., *Equations of Attainable Set Dynamics, Part I: Integral Funnel Equations*, Journal of Optimization Theory and Aplications, **64(2)**, 349-365, (1990).

[58] PANASYUK, A.I., *Equations of Attainable Set Dynamics, Part II: Partial Differantial Equations*, Journal of Optimization Theory and Aplications, **64(2)**, 367-377, (1990).

[59] PANASYUK, A.I. ve PANASYUK, V.I., *On One Equation Generated by Differential Inclusion*, Math. Notes, **27(3)**, 429-437, (1980).

[60] PAPAGEORGIOU, N.S., *Viable and Periodic Solutions for Differential Inclusions in Banach Spaces*, Kobe J. Math., **5(1)**, 29-42, (1988).

[61] PAPAGEORGIOU, N.S., *Viability Theorems for Nonautonomous Differential Inclusions with Nonconvex Domain*, Meth. Jap., **40(1)**, 67-77, (1994).

[62] PSHENITCHNY, B.N. *ε-Strategy in Differantial Games*, Topics Differential Games, New-York,P, 45-99, (1973).

[63] ROBERT, R.S., *Set Theory And Logic*, W.H. Freeman And Company, San Francisco and Londan, (1963).

[64] ROXIN, E., *Stability in General Control Systems*, J.Differantial Equations, **1**, 115-150, (1965).

[65] SOUGANDIS, P.E., *Max-min Representations and Product Formulas for The Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations with Applications to Differential Games*, Nonlinear Anal. Theory, Meth. and Appl., **9(3)**, 217-257, (1985).

[66] SUBBOTIN, A.I., *Generalization of The Main Equation of Differential Game Theory*, J. Optim. Theory and Appl., **43(1)**, 103-133, (1984).

[67] SUBBOTIN, A.I., *Minimax and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Moscow, Nauka, (1991).

[68] SUBBOTIN, A.I., *Discontinuous Solutions of a Dirichlet-Type Boundary Value Problem for The First-Order Partial Differential Equation*, J. Numer. Anal. Math. Modelling, **8(2)**, 145-164, (1993).

[69] SUBBOTIN, A.I., *Generalized Solutions of First Order Partial Differential Equations*, The dynamical optimization perspective, Birkhäuser, (1995).

[70] SUBBOTIN, A.I. ve CHENTSOV, A.G., *Guarandeed Optimization in Control Problems*, Nauka, Moscow, (1981).

[71] SUBBOTIN, A.I. ve TARASYEV, A.M.,*Stability Properties of The Value Function of A Differential Game and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Probl. Contr. and Inform. Theory, **15(6)**, 451-463, (1986).

[72] SUBBOTINA, N.N. ve SUBBOTIN, A.I., *Tret'jakov, V.E., Stochastic and Deterministic Control*, Differential Inequalities, Ibid. **14(6)**, 405-419, (1985).

[73] SZOLNOKI, D., *Algorithms for Reachablity Problems*, Dissertation, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, Augsburg, (2001).

[74] TALLOS, P., *Viability Problems for Nonautonomous Differential Inclusions*, SIAM J. on Contr. Optimiz., **29(2)**, 253-263, (1991).

[75] USHAKOV, V.N. ve Khripunov, A.P., *The Approximate Construction of Integral Cones of Differential Inclusions*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **34**, 965-977, (1994).

[76] VINTER, R.B., *Is The Costate Variable The State Derivative of The Value Function?*, Proc. 25th IEEE Conf. Decis. and Contr., Athens, Dec.10-12, 1986, New York, **3**, 1988-1989, (1986).

[77] WAZEWSKI, T., *On An Optimal Control Problem*, Proc. Conference Differential Equations and Their Applications, 229-242, (1965).

[78] WOLENSKI, P., *The Exponential Formula for The Reachable Set of Lipschitz Differential Inclusion*, SIAM J. Contr. Optimiz., **28(5)**, 1148-1161, (1990).

[79] ZAREMBA, S.C., *Sur Les Equations Au Paratingent*, Bull. Sci. Math., **60**, 139-160, (1936).