KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN TEĞET KONİLERİ VE DİFERANSİYELLENEBİLMELERİ ÜZERİNE

İlknur ATASEVER

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Temmuz – 2006

Bu tez çalışması Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu Başkanlığı tarafından desteklenmiştir. Proje No:051029

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

İlknur Atasever'in **"Küme Değerli Dönüşümlerin Teğet Konileri ve Diferansiyellenebilmeleri Üzerine"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 14.07.2006 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	:	**Prof. Dr. YALÇIN KÜÇÜK**	....
Üye	:	**Prof. Dr. REFAİL GASIMOV**	....
Üye	:	**Doç. Dr. NEDİM DEĞİRMENCİ**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN TEĞET KONİLERİ VE DİFERANSİYELLENEBİLMELERİ ÜZERİNE

İlknur ATASEVER

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: **Prof. Dr. Yalçın Küçük**

2006, 138 sayfa

Bouligand-Contingent koni, Clarke koni, Radial koni gibi farklı teğet konileri non-smooth analiz, kontrol teori, viability teori gibi konularda önemli rol oynarlar (bkz.[1-17]). Küme konveks olduğunda bunlar çakışırlar ve teğet konisi adını alırlar.

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde çalışma için gerekli tanımlar ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde ise Bouligand-Contingent koniler tanımlanmış, bu tanıma denk ifadeler verilmiş ve Bouligand-Contingent konilerin temel özellikleri ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca bu koniler üzerindeki küme işlemleri araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde kapalı, konveks küme üzerine izdüşüm tanımı verilerek özellikleri incelenmiştir. İzdüşüm kullanılarak, bir konveks kümenin teğet konilerle dış tanımlaması verilmiştir.

Dördüncü ve beşinci bölümlerde, sırasıyla, Clarke ve Radial koniler tanımlanmış, tanımlara denk ifadeler araştırılmış ve bazı özellikler kanıtlanmıştır. Beşinci bölümün sonunda konilerin karşılaştırılması yapılmıştır.

Son bölümde Bouligand-Contingent koniler kullanılarak küme değerli dönüşümler için Contingent türev ve Contingent epitürev kavramları tanımlanıp özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Küme Değerli Dönüşüm, Contingent Koni, Clarke Koni, Radial Koni, Contingent Türev, Contingent Epitürev

ABSTRACT

Master of Science Thesis

ON THE TANGENT CONES AND DIFFERENTIABILITY OF SET VALUED MAPS

İlknur ATASEVER

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: **Prof. Dr. Yalçın Küçük**
2006, 138 pages

Different tangent cones, like the Bouligand-Contingent cone, the Clarke tangent cone, the Radial tangent cone ect., play an important role in non-smooth analysis, control theory, viability theory ect (see[1-17]). In the case of convex sets these cones coincide and called tangent cone.

In the first section of this work, which consists of six sections, some basic definitions and theorems necessary for this work are given. The second section deals with Bouligand-Contingent cones. The definition and its equavilents are given. Some basic properties of Bouligand-Contingent cones are expressed and proved. Also, set operations on these cones have been investigated.

In the third section, the definition of projection on to closed convex sets is given. Some properties of this projection are investigated and by using projections, the outer description of convex set is given by means of tangent cones.

In fourth and fifth sections, respectively, Clarke and Radial cones are defined, their equivalents have been investigated and some properties of these cones are proved. At the end of the fifth section cones have been compared with each other.

The last section, by using Bouligand-Contingent cones, Contingent derivative and Contingent epiderivative of set valued maps are defined and some properties of them have been investigated.

Keywords: Set-Valued Map, Contingent Cone, Clarke Cone, Radial Cone, Contingent Derivative, Contingent Epiderivative

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK, Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK ve Prof. Dr. Refail GASIMOV'a, tezin yazımında yardımcı olan Yrd. Doç. Dr. Ali DENİZ ve Arş. Gör. Serpil ALTAY'a ve beni her zaman destekleyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İlknur ATASEVER

Temmuz 2006

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
$\|x\|_X$	:	x vektörünün X uzayında normu
$\langle x, y\rangle$	:	x ve y vektörlerinin iç çarpımları
$conv(A)$	:	A kümesinin konveks örtüsü
$\text{cone}(A)$	:	A kümesinin konik örtüsü
B_X	:	X uzayının açık birim yuvarı
$\overline{B}_X$	:	X uzayının kapalı birim yuvarı
$B(x_0, \varepsilon)$	:	x_0 nokrasının açık ε komşuluğu
$\overline{B}(x_0, \varepsilon)$	:	x_0 noktasının kapalı ε komşuluğu
$d(x, A)$	:	x noktasının A kümesine uzaklığı
$d(A, B)$	:	A kümesinin B kümesine uzaklığı
$\text{dom}(F)$	:	F küme değerli dönüşümünün tanım kümesi
$\text{gr}(F)$	:	F küme değerli dönüşümünün grafiği
$\text{epi}(F)$	:	F küme değerli dönüşümünün epigrafı
$\tilde{A}$	:	A kümesinin yığılma noktaları kümesi
$int(A)$	:	A kümesinin iç noktaları kümesi
$cl(A)$	:	A kümesinin kapanış noktaları kümesi
$bd(A)$	:	A kümesinin sınır noktaları kümesi
$\partial F(\cdot)$	:	$F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün subdiferansiyeli
$p_A(x)$	:	x noktasının A kümesi üzerine izdüşümü
$L(X, Y)$	:	X uzayından Y uzayına tanımlı doğrusal dönüşümlerin uzayı
$B(X, Y)$	:	X uzayından Y uzayına tanımlı sürekli, doğrusal dönüşümlerin uzayı
$T(S, x)$	:	S kümesinin x noktasındaki Contingent konisi
$C(S, x)$	:	S kümesinin x noktasındaki Clarke konisi
$R(S, x)$	:	S kümesinin x noktasındaki Radial konisi
$A(S, x)$	:	S kümesinin x noktasındaki Nagumo konisi
$N(S, x)$	:	S kümesinin x noktasındaki normal konisi

K°	:	K konisinin polar konisi
$D_C F(x, y)$	:	F küme değerli dönüşümünün (x, y) noktasındaki Contingent türevi
$DF(x, y)$	:	F küme değerli dönüşümünün (x, y) noktasındaki Contingent epitürevi

1 GİRİŞ

Bu bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremler verilecektir.

1.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 1.1.1. *$X \neq \emptyset$ herhangi bir küme olmak üzere*

$$\begin{aligned} d: \quad X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) \end{aligned}$$

fonksiyonu

(i) $\forall\ x, y \in X$ *için* $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $\forall\ x, y \in X$ *için* $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $\forall\ x, y, z \in X$ *için* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

koşullarını sağlıyorsa d'ye X üzerinde bir metrik denir. (X,d) ikilisine de metrik uzay denir.

Tanım 1.1.2. *X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir doğrusal uzay olsun.*

$$\begin{aligned} \|.\|: \quad X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

fonksiyonu

(i) $\forall\ x \in X$ *için* $\|x\| \geq 0$ *ve* $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(ii) $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$ *ve* $\forall\ x \in X$ *için* $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$

(iii) $\forall\ x, y \in X$ *için* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

koşullarını sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna norm denir. $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 1.1.3. *X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir doğrusal uzay olsun.*

$$\begin{array}{rrcl} \langle .,. \rangle : & X \times X & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \mapsto & \langle x,y \rangle \end{array}$$

fonksiyonu

(i) $\forall\ x,y \in X$ *için* $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$

(ii) $\forall\ x,y,z \in X$ *için* $\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$

(iii) $\forall\ x,y \in X$ *ve* $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$ *için* $\langle \alpha x,y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$

(iv) $\forall\ x \in X$ *için* $\langle x,x \rangle \geq 0$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu ve $(X, \langle .,. \rangle)$ ikilisine de bir iç çarpım uzayı denir.

Özel olarak $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında standart iç çarpım $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

olarak tanımlanır. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı üzerindeki standart norm ise

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

olarak tanımlanır.

(X,d) metrik uzay, $A, B \subseteq X$ kümesi ve $x \in X$ verilsin.

$$d(x,A) = \inf \{d(x,a) : a \in A\}$$

değeri x noktasının A kümesine olan uzaklığını,

$$d(A,B) = \inf \{d(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$$

değeri de A kümesinin B kümesine olan uzaklığını gösterecektir.

(X,d) metrik uzay $x_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$B_X = \{x \in X : d(x,0) < 1\}$$

kümesi ile X uzayının açık birim yuvarı,

$$\overline{B}_X = \{x \in X : d(x,0) \leq 1\}$$

kümesi ile X uzayının kapalı birim yuvarı,

$$B(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,x_0) < \varepsilon\}$$

kümesi ile X uzayında x_0 merkezli ε yarıçaplı açık yuvarı,

$$\overline{B}(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,x_0) \leq \varepsilon\}$$

kümesi ile X uzayında x_0 merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvarı gösterilecektir.

Tanım 1.1.4. (X,d) *bir metrik uzay,* $U \subseteq X$ *verilsin.*

a. $\forall\ x \in U$ *için* $B(x,\varepsilon) \subseteq U$ *olacak şekilde* $\exists\ \varepsilon > 0$ *sayısı bulunabiliyorsa* U *kümesine* X*'de açık küme denir.*

b. $X \backslash U$ *kümesi* X *üzerinde açık ise* U *kümesine kapalı küme denir.*

c. $\forall\ \varepsilon > 0$ *için*

$$B(x,\varepsilon) \cap (U \backslash \{x\}) \neq \emptyset$$

oluyorsa x*'e* U *kümesinin yığılma noktası denir.* U *kümesinin yığılma noktaları kümesi* $\tilde{U}$ *olarak gösterilir.*

d. U *kümesi ile* U *kümesinin yığılma noktalarının birleşim kümesine* U *kümesinin kapanışı denir ve* $cl(U)$ *olarak gösterilir. Yani*

$$cl(U) = U \cup \tilde{U}$$

e. $x \in X$ *için* $B(x,\varepsilon) \subseteq U$ *olacak şekilde* $\exists\ \varepsilon > 0$ *varsa* x*'e* U *kümesinin bir iç noktası denir.* U*'nun iç noktalarının oluşturduğu kümeye* U *kümesinin içi denir ve* $int(U)$ *olarak gösterilir.*

f. *$cl(U) \cap cl(X \backslash U)$ kümesine U'nun sınırı denir ve $bd(U)$ olarak gösterilir.*

Tanım 1.1.5. *X doğrusal uzayı, $A, B \subseteq X$ boş kümeden farklı altkümeleri ve $\lambda \in \mathbb{R}$ verilsin.*

$$A + B := \{x + y : x \in A, \; y \in B\}$$

kümesine A ve B kümelerinin cebirsel toplamı denir. A kümesinin bir λ sayısı ile çarpımı da

$$\lambda A := \{\lambda x : x \in A\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.1.6. *X normlu uzay $\emptyset \neq K \subseteq X$ kümesi verilsin. $\forall\ x \in K$ ve $\forall\ \lambda \geq 0$ için $\lambda x \in K$ oluyorsa K kümesine bir koni denir.*

Özel olarak

$$K \cap (-K) = \{0_X\}$$

oluyorsa K konisine pointed koni denir.

Tanım 1.1.7. *X bir doğrusal uzay $\emptyset \neq S \subseteq X$ kümesi verilsin.*

$$\textit{cone(S)} = \{x \in X : \exists\ s \in S \text{ ve } \exists\ \lambda > 0 \text{ için } x = \lambda s\}$$

kümesine S kümesinin konik örtüsü denir.

Tanım 1.1.8. *X normlu uzay, $S \subseteq X$ kümesi verilsin. Eğer $\forall\ x, y \in S$ ve $\forall\ \lambda \in [0, 1]$ için*

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in S$$

oluyorsa S kümesine konveks küme denir.

Tanım 1.1.9. *X normlu uzay, $S \subseteq X$ kümesi verilsin.*

$$conv(S) = \left\{ x \in X : x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \; x_i \in S, \; i = 1, 2, ..., k \right\}$$

kümesine S kümesinin konveks örtüsü denir.

Tanım 1.1.10. *X bir doğrusal uzay, $C \subseteq X$ konveks koni olsun. $\forall\ x, y \in X$ için*

$$x \leq_C y \iff y - x \in C$$

ya da

$$\leq_C = \{(x, y) \in X \times X : y - x \in C\}$$

olarak verilen bağıntı X üzerinde C konveks konisiyle tanımlanmış sıralama bağıntısıdır. Eğer C pointed koni ise bağıntı ters simetrik olur.

Tanım 1.1.11. *X, Y iki küme olsun.*

a) *X'in herbir x elemanını Y'nin bir alt kümesine eşleyen bir F bağıntısına küme değerli dönüşüm denir ve*

$$F : X \rightrightarrows Y$$

ile gösterilir. Bu durumda $x \in X$ için $F(x) \subseteq Y$ olan $F(x)'e$ x'in F altındaki görüntüsü denir.

$$\bigcup_{x \in X} F(x) \subseteq Y$$

kümesine F'in görüntü kümesi denir ve $F(X)$ ile gösterilir.

b) *$dom(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$ kümesine F'in tanım kümesi denir.*

c) *$gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$ kümesine F küme değerli dönüşümünün grafiği denir.*

d) *X, Y normlu uzaylar Y, C konisiyle sıralı olsun.*
$epi(F) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in X,\ y \in F(x) + C\}$ kümesine F fonksiyonunun epigrafı denir.

e) *$F : X \rightrightarrows Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun. $\forall\ x \in dom(F)$ için $f(x) \in F(x)$ olacak şekilde bir $f : dom(F) \to Y$ tek değerli dönüşümüne F'in bir selection'u denir.*

d) $F : X \rightrightarrows Y$ *bir küme değerli dönüşüm olsun.* $\forall\ x \in X$ *için* $F(x) \subseteq Y$ *sınırlı (kapalı,konveks vb.) oluyorsa F'e sınırlı değerli (kapalı değerli, konveks değerli vb.) denir. F'in grafiği sınırlı (kapalı, konveks vb.) ise F'e sınırlıdır (kapalıdır, konvekstir vb.) denir.*

Tanım 1.1.12. X, Y *normlu uzaylar,* $F : X \rightrightarrows Y$ *küme değerli dönüşümü ve* $x_0 \in X$ *verilsin.*

$$\limsup_{x\to x_0} F(x) := \{y \in Y \ : \ x_n \to x \text{ olan } \exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \text{ için } \exists\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y \text{ dizisi } \forall\ n \in \mathbb{N} \text{ için } y_n \in F(x_n) \text{ ve } y_n \to y \text{ olacak şekilde vardır.}\}$$

kümesine F'in x_0 *noktasındaki üst limiti denir.*

$$\liminf_{x\to x_0} F(x) := \{y \in Y : \ F\text{'in en az bir selection'unun } x_0\text{'daki limiti } y\text{'dir.}\}$$

$$:= \{y \in Y : \ \forall\ x \in X \text{ için } f(x) \in F(x) \text{ olan } \exists\ f : X \to Y \text{ tek değerli fonksiyonu için } \lim_{x\to x_0} f(x) = y\text{'dir.}\}$$

kümesine F'in x_0 *noktasındaki alt limiti denir.*

Tanım 1.1.13. X *normlu uzay* $\emptyset \neq S \subseteq X$ *konveks kümesi ve*

$$f : S \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall\ x, y \in S$ *ve* $\forall\ \lambda \in [0,1]$ *için*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

oluyorsa f'e konveks fonksiyon denir.

Tanım 1.1.14. $(X, \|.\|_X)$ *ve* $(Y, \|.\|_Y)$ *gerçel normlu uzaylar* $(Y, \|.\|_Y)$ *uzayı* $C \subseteq Y$ *konveks konisiyle kısmi sıralı,* $\emptyset \neq S \subseteq X$ *konveks kümesi ve*

$$F : X \rightrightarrows Y$$

küme değerli dönüşümü verilsin. Eğer $\forall\ x, y \in X$ *ve* $\forall\ \lambda \in [0,1]$ *için*

$$\lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) \subseteq F(\lambda x + (1-\lambda y)) + C$$

oluyorsa F küme değerli dönüşümüne C-konvekstir denir.

Tanım 1.1.15. $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ *gerçel normlu uzaylar,* $\emptyset \neq S \subseteq X$, $\bar{x} \in S$ *ve* $f : S \to Y$ *fonksiyonu verilsin.*

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

olan $f'(\bar{x}) : X \to Y$ *sürekli , doğrusal dönüşümü bulunabiliyorsa* f*'e* $\bar{x}$ *noktasında Frechet diferansiyellenebilir fonksiyon ve* $f'(\bar{x})$*'e de* f*'in* $\bar{x}$ *noktasındaki Ferchet türevi denir.*

Teorem 1.1.16. (Eidelheit Ayırma Teoremi) *[1, 2, 18]* X *gerçel doğrusal topolojik uzay,* $S, T \subseteq X$ *boş kümeden farklı alt kümeler ve* $int(S) \neq \emptyset$ *olsun. Bu durumda* $int(S) \cap T = \emptyset$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\forall\ s \in S$ *ve* $\forall\ t \in T$ *için*

$$l(s) \leq \alpha \leq l(t)$$

ve $\forall\ s \in int(S)$ *için*

$$l(s) < \alpha$$

olan $\exists\ l$ *sürekli, doğrusal fonksiyonelinin ve* $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ *sayısının bulunmasıdır.*

Teorem 1.1.17. (Hahn Banach Teoremi) *[17,19-21]* $(X, \|.\|_X)$ *normlu uzay,* E *de* X*'in bir doğrusal altuzayı olsun.* $f : E \to \mathbb{K}$ *sınırlı, doğrusal fonksiyoneli verildiğinde* $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$,

$$\tilde{f}\ |_E = f \ \text{ ve } \ \left\|\tilde{f}\right\| = \|f\|$$

olan $\exists\ \tilde{f}$ *fonksiyoneli vardır.*

Sonuç 1.1.18. *[17]* $(X, \|.\|_X)$ *normlu uzayı ve* $0 \neq x_0 \in X$ *verilsin. Bu durumda*

$$f(x_0) = \|x_0\| \ \text{ ve } \ \|f\| = 1$$

olan bir $f : X \to \mathbb{R}$ *doğrusal dönüşümü vardır.*

Teorem 1.1.19. (Açık Dönüşüm Teoremi) *[22, 23]* $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ *Banach uzayları olsunlar.*

$$f : X \to Y$$

dönüşümü sürekli ve örten ise açık dönüşümdür.

Teorem 1.1.20. (Kapalı Grafik Teoremi) *[6] X, Y Banach uzayları, $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü kapalı, konveks, $dom(F) \neq \emptyset$, $F(X) \neq \emptyset$ olsun. $y_0 \in int(F(X))$ ve $x_0 \in F^{-1}(y_0)$ seçilsin. Bu durumda $\forall\ x \in dom(F)$ ve $\forall\ y \in y_0 + \gamma B_Y$ için*

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq \frac{1}{\gamma} d(y, F(x))(1 + \|x - x_0\|)$$

olan $\exists\ \gamma > 0$ sayısı vardır.

Sonuç 1.1.21. *[6] X, Y Banach uzaylar, $\emptyset \neq L \subseteq X$ ve $\emptyset \neq M \subseteq Y$ kapalı, konveks kümeler ve $A \in L(X,Y)$ verilsin. $\forall\ y \in Y$ için*

$$F^{-1}(y) = \{x \in L : A(x) \in M + y\}$$

kümesi tanımlansın. $int(A(L) - M) \neq \emptyset$ olsun. $y_0 \in int(A(L) - M)$ ve $x_0 \in F^{-1}(y_0)$ verilsin. Bu durumda $\forall\ x \in L$ ve $\forall\ y \in y_0 + \gamma B_Y$ için

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq \frac{1}{\gamma} d(A(x) - y, M)(1 + \|x - x_0\|)$$

olan $\exists\ \gamma > 0$ vardır.

2 CONTİNGENT KONİLER

Bir S kümesi verildiğinde bir x noktası civarında S için daha basit kümelerle yaklaşım kurma fikri oldukça yararlı bir fikirdir. Klasik diferansiyel geometride bir S düzgün yüzeyine S'ye teğet olan affine hiperdüzlemlerle yaklaşılmaktadır. Bu fikir $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ üzerinde grafiği, bir $(x_0, f(x_0))$ noktasında bir teğet afin hiperdüzleme sahip olan $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonunun diferansiyellenebilmesinde çok sıklıkla kullanılmaktadır.

Bu durumda $(x_0, f(x_0))$ noktası civarında f fonksiyonun grafiği için bir yaklaşım aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathrm{gr}(f) \cong \{(x, y) : y - f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle\} \text{ dir.}$$

Konveks kümeler için düzgünlük konusunda pek sıkıntı yoktur. Uygun afin hiperdüzlemle yaklaşım yapılabilir. Afin hiperdüzlemler alt uzayların kaydırılmışları olduklarından $V_S(x)$ bir alt uzay olmak üzere S'ye x civarında $V_S(x)$'e paralel olan

$$H_S(x) = \{x\} + V_S(x)$$

kümeleriyle yaklaşılabilir. Bu durumda x civarında $H_S(x) \cong S$ olur.

Konveks analizin tek yüzlü dünyasındaki yaklaşımlarda alt uzaylar yerine kapalı konveks konilerin kullanılması doğaldır. Bunun yanısıra S'ye normal(dik) olan küme yani $V_S(x)$'e dik olan alt uzay ise yerini koninin polarına bırakacaktır.

Uygun tanımları koyabilmek için teğetin tanımlanışına bir göz atılsın.

Herhangibir $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi, $x_0 \in S$ noktası ve bir d yönü alınsın. S içinde çizilen ve x_0'dan geçen bir eğrinin x_0'deki türevi d ise d vektörü bu eğrinin x_0 noktasındaki teğetinin eğimidir. Dahası $(d, -1)$ vektörü bu eğriye $(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğet hiperdüzleminin normal vektörü olur. Aynı vektör yukarıdaki yorumlar göz önüne alınırsa $V_S(x_0)$ alt uzayının teğet hiperdüzleminin normal vektörüdür. Bu ise $(-d, 1)$ vektörünün de aynı alt uzayın normali olduğunu verir. Konveks analizde türev kavramının yanısıra yönlü türev, subgradient kavramları da yoğun bir şekilde kullanılmaktadır.

Bir küme için yukarıdaki anlamda türev kavramı kullanılarak teğet hiperdüzlem tanımlanamıyorsa, bunun yerine türev veya teğet tanımı diziler kullanılarak aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

2.1 Tanım ve Denk İfadeler

Tanım 2.1.1. a) *[3] X normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ herhangibir küme $d \in X$ herhangibir yön ve $x \in cl(S)$ olsun.*

$$x_n \to x,\ h_n \to 0^+ \ ve\ \frac{x_n - x}{h_n} \to d$$

olan S içinde bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizisi varsa d'ye S kümesinin x noktasındaki teğeti denir.

b) *S kümesinin x'deki teğetlerinin oluşturduğu kümeye S'nin x noktasındaki teğet konisi (Contingent konisi veya Bouligant'ın konisi) denir ve $T(S, x)$ ile gösterilir.*

Önerme 2.1.2. *X gerçel normlu uzay $\emptyset \neq S \subseteq X$ herhangibir küme ve $x \in cl(S)$ olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} d \in T(S,x)\text{'dir} \quad \Longleftrightarrow \quad & d_n \to d,\ h_n \to 0^+ \ ve\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ için \\ & x + h_n d_n \in S\ olan\ \exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X\ ve \\ & \exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+\ dizileri\ vardır. \end{aligned}$$

Kanıt.

($\Longrightarrow$) $d \in T(S, x)$ olsun. Bu durumda $\exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$, $x_n \to x$, $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$, $h_n \to 0^+$ öyle ki $\dfrac{x_n - x}{h_n} \to d$ olur.

$$d_n = \frac{x_n - x}{h_n} \text{ olsun.}$$

Bu durumda $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ için $d_n \to d$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x + h_n d_n \in S$ olur.

($\Longleftarrow$) Tersine $d_n \to d$, $h_n \to 0^+$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n d_n$ olan $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ve $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ dizileri var olsun. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = x + h_n d_n \text{ olarak tanımlansın.}$$

$d_n \to d$ ve $h_n \to 0^+$ iken $h_n d_n \to 0.d = 0$ olacaktır. Böylece $x_n \to x$ olur. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ olduğu açıktır. Böylece $x_n \to x$ olan bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ ve $h_n \to 0^+$ olan bir $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ için $d_n = \dfrac{x_n - x}{h_n} \to d$ olur. O halde $d \in T(S,x)$'dir. $\square$

Önerme 2.1.3. *X gerçel normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ ve $x \in cl(S)$ verilsin. Bu durumda*

$$d \in T(S,x) \iff \begin{array}{l} x_n \to x \textit{ ve } d = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n (x_n - x) \\ \textit{olan } \exists\ (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+ \textit{ ve } \exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S \\ \textit{dizileri vardır.} \end{array}$$

Kanıt.

($\Longrightarrow$) $d \in T(S,x)$ alınsın. Bu durumda $d_n \to d$, $h_n \to 0^+$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n d_n \in S$ olan $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ve $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ dizileri vardır. Buradan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ dizisi $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = x + h_n d_n$$

olarak tanımlanırsa $x_n \to x$ olduğu açıktır. $x_n = x + h_n d_n$ eşitliğinden d_n çekilirse

$$d_n = \frac{1}{h_n}\,(x_n - x)$$

bulunur. $\dfrac{1}{h_n} = \lambda_n$ denirse $\forall\ \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n > 0$ ve

$$d = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \lambda_n (x_n - x)$$

olur. Böylece istenilen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ ve $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri bulunmuş olur.

($\Longleftarrow$) Tersine $\exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$, $x_n \to x$ ve $\exists\ (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri

$$d = \lim_{n\to\infty} \lambda_n (x_n - x)$$

olacak şekilde bulunsun. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$d_n = \lambda_n(x_n - x)$$

olarak tanımlanırsa

$$x_n = x + \frac{d_n}{\lambda_n}$$

olur. $\dfrac{1}{\lambda_n} = h_n$ olarak alınırsa $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $h_n > 0$ ve

$$x_n = x + h_n d_n$$

olur. $x_n \to x$ ve $d_n \to d$ olduğundan $h_n \to 0^+$ olmalıdır. O halde $\exists\ h_n \to 0^+$ ve $\exists\ d_n \to d$ öyle ki $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n d_n \in S$ yani $d \in T(S, x)$ elde edilir. $\square$

$T(S, x)$ bir konidir. $\forall\ x \in cl(S)$ için $0 \in T(S, x)$'dir. Gerçekten $x \in cl(S)$ olduğundan $x_n \to x$ olan $\exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ dizisi vardır. Önerme 2.1.3'de $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = 1$ alınırsa $x_n \to x$ olan herhangibir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(x_n - x) = \lim_{n\to\infty} (x_n - x) = 0$$

olur.

Ayrıca $\forall\ d \in T(S, x)$ ve $\forall\ \alpha > 0$ alınsın. $d \in T(S, x)$ olduğundan tanımdan $\exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ ve $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri

$$x_n \to x \text{ ve } h_n \to 0^+ \text{ iken } \frac{x_n - x}{h_n} \to d$$

olacak şekilde vardır. Doğal olarak

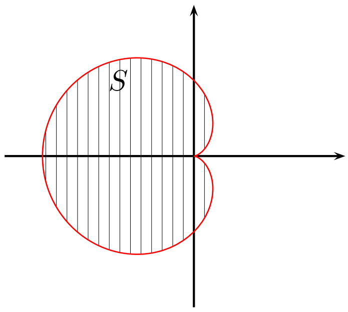
$$\alpha\left(\frac{x_n - x}{h_n}\right) \to \alpha d \text{ dir.}$$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S,\ x_n \to x \text{ ve } \frac{1}{\alpha}h_n \to 0^+$$

olacağından $\dfrac{x_n - x}{\frac{1}{\alpha}h_n} \to \alpha d$ olur ki buradan $\alpha d \in T(S, x)$ olur.

Önerme 2.1.4. *[4] X gerçel normlu uzay $\emptyset \neq S \subseteq X$ kümesi verilsin. $x \in int(S)$ ise $T(S, x) = X$'dir.*

Not 2.1.5. *$x \notin int(S)$ olsa bile $T(S, x) = X$ olabilir. Örneğin S kümesi grafikteki küme olarak alınırsa $(0,0) \notin int(S)$ fakat $T(S,(0,0)) = \mathbb{R}^2$ olur.*



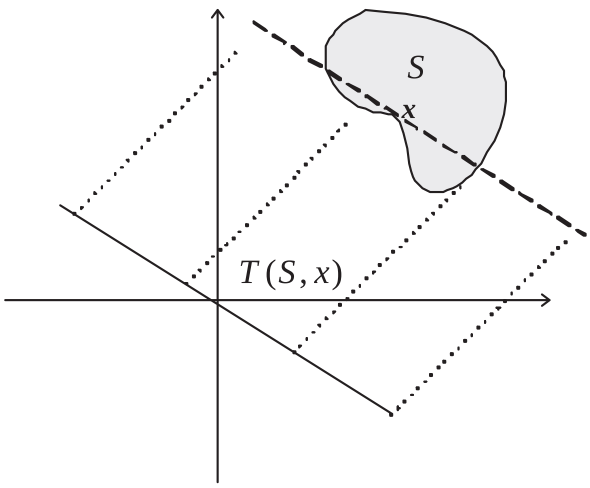
Şekil 2.1: $(0,0) \notin int(S)$ fakat $T(S,(0,0)) = \mathbb{R}^2$ olan S kümesi

Önerme 2.1.6. *[6] X gerçel normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ ve $x \in cl(S)$ verilsin. Bu durumda*

$$T(cl(K), x) = T(K, x)$$

olur.

Örnek 2.1.7. *Aşağıdaki şekilde S kümesinin x noktasındaki Contingent konisi verilmiştir.*

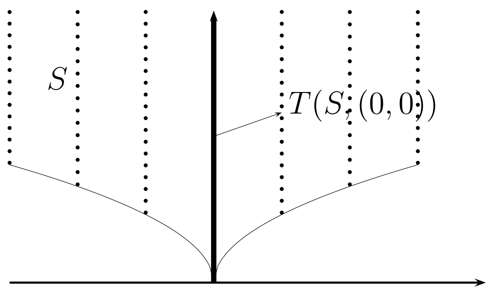


Şekil 2.2: Bir S kümesinin $x \in cl(S)$ noktasındaki Contingent konisi

Örnek 2.1.8. *$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{|x|},\ x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin $(x_1, x_2) = (0, 0)$ noktasındaki Contingent konisi*

$$T(S, (0, 0)) = \{0\} \times [0, \infty)$$

olur.



Şekil 2.3: $S = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{|x|},\ x \in \mathbb{R}\Big\}$ kümesi ve $(0, 0)$ noktasındaki Contingent konisi

Çünkü $\forall\ (0, d) \in \{0\} \times [0, \infty)$ alındığında $(0, d_n) \to (0, d)$ ve $h_n \to 0^+$ olan $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $((0, d_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{0\} \times [0, \infty)$ dizileri alındığında $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $(0, 0) + h_n(0, d_n) \in \{0\} \times [0, \infty) \subseteq S$ olacağından

$$(0, d) \in T(S, (0, 0))$$

olur.

$\forall\ (d^1, d^2) \in \mathbb{R}^2 \backslash (\{0\} \times [0, \infty))$ için $(d^1, d^2) \notin\ T(S, (0, 0))$ olur. Çünkü $y = \sqrt{|x|}$ eğrisi y eksenine $(0, 0)$ noktasında sağdan ve soldan teğet olduğundan $(d^1_n, d^2_n) \to (d^1, d^2)$ ve $h_n \to 0^+$ olan $\forall\ ((d^1_n, d^2_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\forall\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri için $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı

$$(0, 0) + h_{n_0}({d^1}_{n_0}, {d^2}_{n_0}) \notin S$$

olacak şekilde bulunabilir.

Örnek 2.1.9. *$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ |x| = |y|\}$ kümesi verilsin. Bu durumda $T(S, (0, 0)) = S$ olur. Gerçekten, $A = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ ve $B = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere $S = A \cup B$ olarak yazılabilir.*

$(d,d) \in A$ *verilsin.* $\left(d_n^1, d_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} = ((d,d))_{n\in\mathbb{N}}$ *sabit dizisi ve* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizileri alınırsa* $(d_n^1, d_n^2) \to (d,d)$, $h_n \to 0^+$ *ve* $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *için* $(0,0) + h_n(d_n^1, d_n^2) = \left(\dfrac{d}{n}, \dfrac{d}{n}\right) \in S$ *olur. Buradan* $(d,d) \in T(S,(0,0))$ *dolayısıyla*

$$A \subseteq T(S,(0,0)) \tag{2.1.1}$$

elde edilir.

$(d,-d) \in B$ *verilsin.* $\left(d_n^1, d_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} = ((d,-d))_{n\in\mathbb{N}}$ *sabit dizisi ve* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizileri alınırsa* $(d_n^1, d_n^2) \to (d,-d)$, $h_n \to 0^+$ *ve* $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *için*
$(0,0) + h_n(d_n^1, d_n^2) = \left(\dfrac{d}{n}, -\dfrac{d}{n}\right) \in S$ *olur. Buradan* $(d,-d) \in T(S,(0,0))$ *dolayısıyla*

$$B \subseteq T(S,(0,0)) \tag{2.1.2}$$

elde edilir. O halde (2.1.1) ve (2.1.2) kapsamları kullanılarak

$$S = A \cup B \subseteq T(S,(0,0))$$

elde edilir.

$\mathbb{R}^2 \backslash S$ *kümesindeki elemanlar Contingent koniye ait değildir.*
$(d^1, d^2) \in \mathbb{R}^2 \backslash S$ *için* $(d^1, d^2) \in T(S,(0,0))$ *olsaydı* $h_n \to 0^+$,
$(d_n^1, d_n^2) \to (d^1, d^2)$ *ve* $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *için*

$$(0,0) + h_n(d_n^1, d_n^2) \in S$$

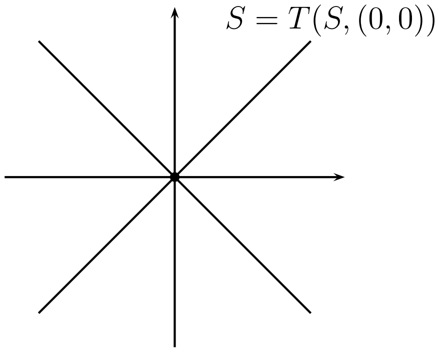
olan $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ *ve* $\left(d_n^1, d_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ *dizileri vardır. Bu dururumda* $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *için* $(0,0) + h_n(d_n^1, d_n^2) = (h_n d_n^1, h_n d_n^2) \in S$ *olduğundan* S *kümesinin tanımlanışından* $h_n d_n^1 = h_n d_n^2$ *veya* $h_n d_n^1 = -h_n d_n^2$ *yani*

$$d_n^1 = d_n^2 \text{ veya } d_n^1 = -d_n^2 \tag{2.1.3}$$

olur. $(d_n^1, d_n^2) \to (d^1, d^2)$ *olduğundan ve (2.1.3) eşitliklerinden* $d^1 = d^2$ *veya* $d^1 = -d^2$ *olmalıdır. Bu ise* $(d^1, d^2) \in \mathbb{R}^2 \backslash S$ *seçimiyle çelişir. Dolayısıyla*

$$T(S,(0,0)) = S$$

elde edilir.

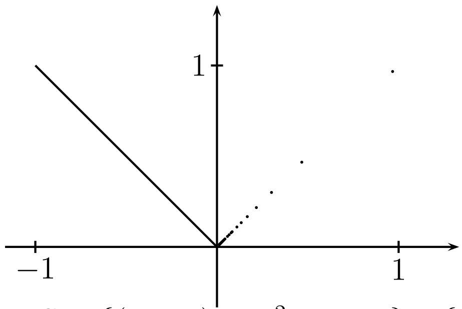


Şekil 2.4: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| = |y|\}$ kümesi ve $(0,0)$ noktasındaki Contingent konisi

Örnek 2.1.10. *$S = \{(x,-x) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\} \cup \{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin $(0,0) \in S$ noktasındaki Contingent konisi*

$$T(S,(0,0)) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\right\}$$

olur.



Şekil 2.5: $S = \{(x,-x) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\} \cup \{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi

$\forall\ (d,-d) \in \{(x,-x) : x \leq 0\}$ *için* $(d,-d) \in T(S,(0,0))$ *olur. Çünkü*

$$((d_n^1, d_n^2))_{n\in\mathbb{N}} = ((d,-d))_{n\in\mathbb{N}}$$

ve

$$(h_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

dizileri alınırsa $(d_n^1, d_n^2) \to (d,-d)$ *ve* $h_n \to 0^+$ *olduğu açıktır. Aynı zamanda* $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *için*

$$(0,0) + h_n(d_n^1, d_n^2) = (0,0) + \frac{1}{n}(d,-d) = (\frac{d}{n}, -\frac{d}{n}) \in S$$

olduğundan $(d,-d) \in T(S,(0,0))$ *olur.*

$\forall\, (d,d) \in \{(x,x) : x > 0\}$ *için* $(d,d) \in T(S,(0,0))$ *olur. Gerçekten öncelikle* $(1,1) \in T(S,(0,0))$ *olduğunu gösterilsin.*

$$\left((d_n^1, d_n^2)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left((1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

ve

$$(h_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

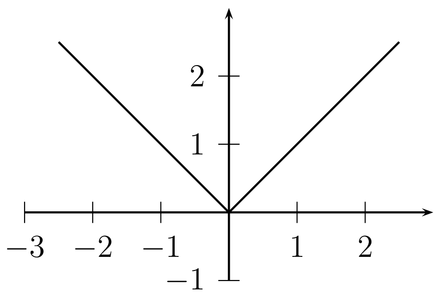
olarak alınırsa

$(d_n^1, d_n^2) \to (1,1)$ *ve* $h_n \to 0^+$ *olduğu açıktır. Üstelik* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\begin{aligned}(0,0) + h_n(d_n^1, d_n^2) &= (0,0) + \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in S\end{aligned}$$

olduğundan $(1,1) \in T(S,(0,0))$ *olur.* $T(S,(0,0))$ *koni olduğundan* $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}_+$ *için* $(\alpha,\alpha) \in T(S,(0,0))$ *olur.*

Örnek 2.1.9'daki yöntem kullanılarak $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}$ *kümesindeki elemanların Contingent koniye ait olmadığı kolayca görülür.*



Şekil 2.6: $S = \{(x,-x) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\} \cup \{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin $(0,0)$ noktasındaki Contingent konisi

Önerme 2.1.11. *X gerçel normlu uzay $\emptyset \neq S \subseteq X$ ve $x \in cl(S)$ verilsin. Bu durumda*

$$T(S,x) = \overbrace{\{d \in X : \liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\ d(x+hd, S) = 0\}}^{A} \ \textit{olur.}$$

Kanıt. $x \in S$ verilsin.

$$d \in A \iff \liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{h} d(x+hd, S) = 0$$

$$\iff \lim_{h_n\to 0^+} \frac{1}{h_n} d(x+h_n d, S) = 0$$
olacak şekilde $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizisi vardır.

$$\iff \frac{1}{h_n} d(x+h_n d, S) = t_n \text{ ve } n\to\infty \text{ iken } t_n \to 0 \text{ olacak şekilde}$$
$\exists\ (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri vardır.

$$\iff d(x+h_n d, S) = t_n h_n \text{ ve } t_n \to 0 \text{ olacak şekilde } \exists\ (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
ve $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri vardır.

$$\iff \forall\ n\in\mathbb{N} \text{ için } \|x_n - x - h_n d\| = t_n h_n \text{ ve } t_n \to 0 \text{ olan}$$
$\exists\ x_n \in S,\ \exists\ (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri vardır.

$$\iff \forall\ n\in\mathbb{N} \text{ için } x_n - x - h_n d = t_n h_n e_n \text{ ve } t_n \to 0 \text{ olan } \exists\ e_n \in \overline{B}_X,$$
$\exists\ (t_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ ve $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ vardır.

$$\iff \forall\ n\in\mathbb{N} \text{ için } x_n = x + h_n \overbrace{(d+t_n e_n)}^{d_n} \text{ ve } d_n \to d \text{ olan}$$
$\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ve $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ vardır.

$$\iff \forall\ n\in\mathbb{N} \text{ için } x_n = x + h_n d_n \in S,\ h_n \to 0^+ \text{ ve } d_n \to d \text{ olan}$$
$\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ve $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ vardır.

$$\iff d \in T(S,x)$$

□

Önerme 2.1.12. *X gerçel normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$, $x \in cl(S)$ ve*

$$\begin{array}{rcl} F: \ \mathbb{R}_+ & \rightrightarrows & X \\ h & \mapsto & F(h) = \dfrac{S-x}{h} \end{array}$$

küme değerli dönüşümü verilsin. Bu durumda

$$T(S,x) = \limsup_{h \to 0^+} F(h) \ \textit{olur.}$$

Kanıt. $d \in T(S,x)$ alınsın. Bu durumda $h_n \to 0^+$, $d_n \to d$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n d_n \in S$ olan $\exists\, (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\exists\, (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizileri vardır. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = x + h_n d_n$$

olarak alınırsa

$$\frac{x_n - x}{h_n} = d_n \in \frac{S-x}{h_n} = F(h_n) \text{ olur.}$$

$\exists\, h_n \to 0^+$ ve $d_n \in F(h_n)$ iken $d_n \to d$ olacak şekilde diziler bulunabildiğinden $d \in \limsup_{h\to 0^+} F(h)$ olur. O halde

$$T(S,x) \subseteq \limsup_{h \to 0^+} F(h) \tag{2.1.4}$$

elde edilir. Tersine $d \in \limsup_{h\to 0^+} F(h)$ alınsın. Bu durumda $h_n \to 0^+$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $d_n \in F(h_n)$ olmak üzere $d_n \to d$ olacak şekilde $\exists\, (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\exists\, (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizileri vardır.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $d_n \in F(h_n)$ olduğundan $d_n = \dfrac{x_n - x}{h_n}$ olacak şekilde $x_n \in S$ vardır. Buradan $x_n = x + h_n d_n \in S$ olur. $d_n \to d$ ve $h_n \to 0^+$ olarak alınmıştı. O halde $d \in T(S,x)$ dir. Dolayısıyla

$$\limsup_{h \to 0^+} F(h) \subseteq T(S,x) \tag{2.1.5}$$

olur. (2.1.4) ve (2.1.5) kapsamlarından istenilen eşitlik elde edilir. □

Önerme 2.1.13. *X gerçel normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ ve $x \in cl(S)$ verilsin. Bu durumda*

$$\begin{array}{rcl} d \in T(S,x) & \Longleftrightarrow & \forall\, U \in \mathcal{N}(d) \ \textit{ve} \ \forall\, \lambda > 0 \ \textit{için} \\ & & (x + \mu U) \cap S \neq \emptyset \ \textit{olan} \ \exists\, \mu \in (0,\lambda) \ \textit{vardır.} \end{array}$$

Kanıt.

$$
\begin{aligned}
d \in T(S,x) \quad & \Longleftrightarrow \quad \liminf_{\mu \to 0^+} \frac{d(x+\mu d, S)}{\mu} = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \sup_{\lambda > 0} \inf_{0 \leq \mu \leq \lambda} \frac{d(x+\mu d, S)}{\mu} = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \forall\ \varepsilon > 0 \text{ ve } \forall\ \lambda > 0 \text{ için } \exists\ \mu \in (0,\lambda) \\
& \qquad\quad \text{öyle ki } \frac{d(x+\mu d, S)}{\mu} < \varepsilon \\
& \Longleftrightarrow \quad \forall\ \varepsilon > 0 \text{ ve } \forall\ \lambda > 0 \text{ için } \exists\ \mu \in (0,\lambda) \\
& \qquad\quad \text{öyle ki } d(x+\mu d, S) < \varepsilon\mu \\
& \Longleftrightarrow \quad \forall\ \varepsilon > 0 \text{ ve } \forall\ \lambda > 0 \text{ için } \exists\ \mu \in (0,\lambda) \text{ öyle ki} \\
& \qquad\quad x + \mu d \in S + B(0, \varepsilon\mu) \\
& \Longleftrightarrow \quad \forall\ \varepsilon > 0 \text{ ve } \forall\ \lambda > 0 \text{ için } \exists\ \mu \in (0,\lambda) \text{ öyle ki} \\
& \qquad\quad d \in \frac{S-x}{\mu} + B(0,\varepsilon) \\
& \Longleftrightarrow \quad \forall\ \lambda > 0 \text{ için } \exists\ \mu \in (0,\lambda) \text{ öyle ki } d \in cl\left(\frac{S-x}{\mu}\right) \\
& \Longleftrightarrow \quad \forall\ U \in \mathcal{N}(d) \text{ ve } \forall\ \lambda > 0 \text{ için } \exists\ \mu \in (0,\lambda) \text{ öyle ki} \\
& \qquad\quad U \cap \left(\frac{S-x}{\mu}\right) \neq \emptyset \\
& \Longleftrightarrow \quad \forall\ U \in \mathcal{N}(d) \text{ ve } \forall\ \lambda > 0 \text{ için } \exists\ \mu \in (0,\lambda) \text{ öyle ki} \\
& \qquad\quad (\mu U) \cap (S-x) \neq \emptyset \\
& \Longleftrightarrow \quad \forall\ U \in \mathcal{N}(d) \text{ ve } \forall\ \lambda > 0 \text{ için } \exists\ \mu \in (0,\lambda) \text{ öyle ki} \\
& \qquad\quad (x + \mu U) \cap S \neq \emptyset
\end{aligned}
$$

olur. $\square$

Önerme 2.1.14. *X gerçel normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ ve $x \in cl(S)$ verilsin. Bu durumda*

$$T(S,x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\delta>0} \bigcup_{0<\lambda<\delta} \left(\frac{S-x}{\lambda} + \varepsilon B_X \right)$$

olur.

Kanıt. $d \in T(S,x)$ verilsin. Önerme 2.1.11 gereği

$$\liminf_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda}\, d(x+\lambda d, S) = 0$$

olur. Buradan

$$\liminf_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda}\, d(x+\lambda d, S) = \sup_{\delta} \inf_{\lambda \leq \delta} \frac{d(x+\lambda d, S)}{\lambda} = 0$$

olur. O halde $\forall\ \varepsilon > 0$ ve $\forall\ \delta > 0$ için $\exists\ \lambda \in (0,\delta)$

$$\frac{d(x+\lambda d, S)}{\lambda} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde vardır. Buradan

$$\left\| \frac{x+\lambda d - y}{\lambda} \right\| \leq \frac{d(x+\lambda d, S)}{\lambda} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

olan $\exists\ y \in S$ vardır.

$$u = \frac{y-x}{\lambda}$$

olarak alınırsa $u \in \dfrac{S-x}{\lambda}$ ve $d \in u + \varepsilon B_X \subseteq \dfrac{S-x}{\lambda} + \varepsilon B_X$ olur. Bu durum $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall\ \delta > 0$ ve $\exists\ \lambda \in (0,\delta)$ için sağlandığından

$$d \in \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\delta>0} \bigcup_{0<\lambda<\delta} \left(\frac{S-x}{\lambda} + \varepsilon B_X \right)$$

dolayısıyla

$$T(S,x) \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\delta>0} \bigcup_{0<\lambda<\delta} \left(\frac{S-x}{\lambda} + \varepsilon B_X \right) \tag{2.1.6}$$

elde edilir.

$d \in \displaystyle\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\delta>0} \bigcup_{0<\lambda<\delta} \left(\frac{S-x}{\lambda} + \varepsilon B_X \right)$ olsun. Bu durumda $\forall\ \varepsilon > 0$ ve $\forall\ \delta > 0$ için $\exists\ \lambda \in (0,\delta)$

$$d \in \frac{S-x}{\lambda} + \varepsilon B_X$$

olacak şekilde vardır. Buradan

$$d \in y + \varepsilon B_X \tag{2.1.7}$$

olan $\exists\, y \in \dfrac{S-x}{\lambda}$ vardır. $x + \lambda y \in S$ olduğundan ve (2.1.7) kullanılarak

$$\frac{d(x+\lambda d, S)}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda}\|x + \lambda d - (x + \lambda y)\| \leq \|d - y\| < \varepsilon$$

elde edilir. O halde

$$\liminf_{\lambda \to 0^+} \frac{d(x+\lambda d, S)}{\lambda} = 0$$

olur. Önerme 2.1.11 gereği $d \in T(S,x)$ olur. O halde

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\delta>0} \bigcup_{0<\lambda<\delta} \left(\frac{S-x}{\lambda} + \varepsilon B_X \right) \subseteq T(S,x) \tag{2.1.8}$$

elde edilir.

(2.1.6) ve (2.1.8) kapsamları kullanılarak

$$T(S,x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\delta>0} \bigcup_{0<\lambda<\delta} \left(\frac{S-x}{\lambda} + \varepsilon B_X \right)$$

elde edilir. □

Önerme 2.1.15. *X gerçel normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ ve $x \in cl(S)$ verilsin. Bu durumda*

$$\begin{aligned} T(S,x) &= \limsup_{\lambda \to 0^+} \frac{S-x}{\lambda} = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\delta>0} \bigcup_{0<\lambda<\delta} \left(\frac{S-x}{\lambda} + \varepsilon B_X \right) \\ &= \bigcap_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{0<\lambda<\frac{1}{n}} \left(\frac{S-x}{\lambda} + \frac{1}{m} B_X \right) \end{aligned}$$

olur.

Kanıt.

$$T(S,x) = \limsup_{\lambda \to 0^+} \frac{S-x}{\lambda} = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\delta>0} \bigcup_{0<\lambda<\delta} \left(\frac{S-x}{\lambda} + \varepsilon B_X \right)$$

olduğu gösterilmişti.

Eşitliği gösterebilmek için

$$\overbrace{\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcap_{\delta>0}\bigcup_{0<\lambda<\delta}\left(\frac{S-x}{\lambda}+\varepsilon B_X\right)}^{A}=\overbrace{\bigcap_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{0<\lambda<\frac{1}{n}}\left(\frac{S-x}{\lambda}+\frac{1}{m}B_X\right)}^{B}$$

olduğunun gösterilmesi gerekmektedir.

$d\in A$ alınsın. Bu durumda $\forall\ \varepsilon\geq 0,\ \forall\ \delta>0$ için $\exists\ 0<\lambda<\delta$ öyle ki $d\in\dfrac{S-x}{\lambda}+\varepsilon B_X$ olur. Özel olarak $\forall\ n\geq 1$ için $\delta=\dfrac{1}{n}$, $\forall\ m\geq 1$ için $\varepsilon=\dfrac{1}{m}$ olsun. Bu durumda d'nin seçilişinden

$\forall\ m\geq 1,\ \forall\ n\geq 1$ için $\exists\ 0<\lambda<\frac{1}{n}=\delta$ öyle ki

$$d\in\frac{S-x}{\lambda}+\frac{1}{m}B_X$$

olur. Buradan $d\in B$ dolayısıyla

$$A\subseteq B \tag{2.1.9}$$

elde edilir.

Tersine $d\in B$ alınsın. Bu durumda

$$\forall\ m\geq 1 \text{ ve } \forall\ n\geq 1 \text{ için } \exists\ 0<\lambda<\frac{1}{n} \text{ öyle ki } d\in\frac{S-x}{\lambda}+\frac{1}{m}B_X \tag{2.1.10}$$

olur.

Bir $\varepsilon>0$ ve bir $\delta>0$ alınsın. $\varepsilon>0$ için $\exists\ m\in\mathbb{N}$ öyle ki $\frac{1}{m}<\varepsilon$, $\delta>0$ için $\exists\ n\in\mathbb{N}$ öyle ki $\frac{1}{n}<\delta$ olur. O halde (2.1.10) gereği

$\forall\ \varepsilon>0$ ve $\forall\ \delta>0$ için $\exists\ 0<\lambda<\frac{1}{n}<\delta$ öyle ki

$$d\in\frac{S-x}{\lambda}+\varepsilon B_X$$

olur. Buradan $d\in A$ dolayısıyla

$$B\subseteq A \tag{2.1.11}$$

elde edilir.

O halde (2.1.9) ve (2.1.11) kapsamlarından $A=B$ olur. $\square$

Aağıdaki teorem Lyusternic tarafından verilmiştir.

Teorem 2.1.16. (Lyusternic teoremi)*[1, 2] $(X, \|.\|_X)$ ve $(Z, \|.\|_Z)$ gerçel Banach uzayları,*

$$h : X \longrightarrow Z$$

dönüşümü yardımıyla

$$S := \{x \in X : h(x) = 0_Z\}$$

kümesi tanımlansın. $\bar{x} \in S$ verilsin. h, $\bar{x}$'nin bir komşuluğunda Frechet türevlenebilir, $h'(.)$ $\bar{x}$'de sürekli ve $h'(\bar{x})$ örten ise

$$\{x \in X : h'(\bar{x})(x) = 0_Z\} \subseteq T(S, \bar{x})$$

olur.

Kanıt. $h'(\bar{x})$ sürekli, lineer ve örten olduğundan açık dönüşüm teoremi gereği $h'(\bar{x})$ açık dönüşümdür. O halde $\exists\ \rho > 0$

$$B(0_Z, \rho) \subseteq h'(\bar{x})(B(0_X, 1)) \tag{2.1.12}$$

olacak şekilde vardır.

$$\rho_0 = \sup\{\rho : B(0_Z, \rho) \subseteq h'(\bar{x})(B(0_X, 1))\}$$

olarak tanımlansın.

$\forall\ \varepsilon \in \left(0, \frac{\rho_0}{2}\right)$ seçilsin. $h'(.)$ $\bar{x}$'de sürekli olduğundan $\exists\ \delta > 0$ sayısı

$$\forall\ \tilde{x} \in B(\bar{x}, 2\delta) \text{ için } \|h'(\tilde{x}) - h'(\bar{x})\|_{L(X,Z)} \leq \varepsilon \tag{2.1.13}$$

olur. $\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}} \in B(\bar{x}, 2\delta)$ elemanları seçildikten sonra sabitlenirse Hahn-Banach teoreminden

$\exists\ l \in Z^*$ sürekli, lineer fonksiyoneli

$$\|l\|_{L(X,Z)} = 1$$

ve

$$l(h(\tilde{\tilde{x}}) - h(\tilde{x}) - h'(\bar{x})(\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x})) = \left\| h(\tilde{\tilde{x}}) - h(\tilde{x}) - h'(\bar{x})(\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}) \right\|_Z \qquad (2.1.14)$$

olacak şekilde vardır. $\forall\ t \in [0,1]$ için

$$\varphi(t) = l(h(\tilde{x} + t(\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x})) - th'(\bar{x})(\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}))$$

fonksiyonu tanımlansın.

$$\varphi'(t) = l(h'(\tilde{x} + t(\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}))(\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}) - h'(\bar{x})(\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}))$$

Ortalama değer teoreminden $\exists\ \bar{t} \in (0,1)$

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\bar{t}) \qquad (2.1.15)$$

olacak şekilde vardır. (2.1.13), (2.1.14) ve (2.1.15)'den

$$\begin{aligned}
\left\| h(\tilde{\tilde{x}}) - h(\tilde{x}) - h'(\bar{x})(\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}) \right\|_Z &= l(h(\tilde{\tilde{x}}) - h(\tilde{x}) - h'(\bar{x})(\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x})) \\
&= \varphi(1) - \varphi(0) \\
&= \varphi'(\bar{t}) \\
&= l(h'(\tilde{x} + \bar{t}(\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}))(\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}) - h'(\bar{x})(\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x})) \\
&\leq \left\| h'(\tilde{x} + \bar{t}(\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x})) - h'(\bar{x}) \right\|_{L(X,Z)} \\
&\qquad \left\| \tilde{\tilde{x}} - \tilde{x} \right\|_X \\
&\leq \varepsilon \left\| \tilde{\tilde{x}} - \tilde{x} \right\|_X
\end{aligned}$$

olur. O halde $\forall\ \tilde{x},\ \tilde{\tilde{x}} \in B(\bar{x}, 2\delta)$ için

$$\left\| h(\tilde{\tilde{x}}) - h(\tilde{x}) - h'(\bar{x})(\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}) \right\|_Z \leq \varepsilon \left\| \tilde{\tilde{x}} - \tilde{x} \right\|_X \qquad (2.1.16)$$

olur.

$\alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{\rho_0}\right)\leq 1$ koşulunu sağlayan $\forall\ \alpha > 1$ sayısı ve $h'(\bar{x})(x) = 0_Z$ koşulunu sağlayan bir $x \in X$ seçilsin.

$x = 0_X$ ise $0_X \in T(S,\bar{x})$ olduğu aşikardır. $x \neq 0_X$ için $x \in T(S,\bar{x})$ olduğu gösterilmelidir.

$\hat{\lambda} := \dfrac{\delta}{\|x\|_X}$ ve $\lambda \in (0,\hat{\lambda}]$ seçilsin ve

$$r_1 = 0_X \tag{2.1.17}$$

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \text{ için } h'(\bar{x})(u_n) = h(\bar{x}+\lambda x + r_n) \tag{2.1.18}$$

$$r_{n+1} = r_n - u_n \tag{2.1.19}$$

olan u_n ve r_n dizileri tanımlansın. $h'(\bar{x})$ örten olduğundan verilen r_n için $\exists\ u_n \in X\ h'(\bar{x})(u_n) = h(\bar{x}+\lambda x + r_n)$ olacak şekilde vardır. O halde $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için r_n ve u_n dizileri tanımlıdır.

$\rho := \dfrac{\rho_0}{\alpha}$ olarak alınsın. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $r_n \in X$ ve bu diziye karşılık gelen u_n elemanı alınsın. $\dfrac{u_n}{\|u_n\|} \in B(0_X,1)$ olduğundan (2.1.12)ve (2.1.18)'den $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\rho &\leq \left\| h'(\bar{x})\left(\tfrac{u_n}{\|u_n\|}\right)\right\| \\
\Longrightarrow \qquad \rho &\leq \left\|\tfrac{h(\bar{x}+\lambda x+r_n)}{\|u_n\|}\right\| \\
\Longrightarrow \qquad \|u_n\| &\leq \tfrac{1}{\rho}\,\|h(\bar{x}+\lambda x + r_n)\|
\end{aligned}$$

O halde $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$\|u_n\|_X \leq \frac{\alpha}{\rho_0}\|h(\bar{x}+\lambda x + r_n)\|_Z \tag{2.1.20}$$

olur.

$d(\lambda) := \|h(\bar{x}+\lambda x)\|_Z$ fonksiyonunu tanımlansın ve $q := \dfrac{\varepsilon\alpha}{\rho_0}$ alınsın.

λ'nın seçilişinden

$$\|\lambda x\| \leq \delta \text{ olur.} \tag{2.1.21}$$

(2.1.16) ve (2.1.21) eşitsizlikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
d(\lambda) &= \|h(\bar{x}+\lambda x) - \underbrace{h(\bar{x})}_{0} - \underbrace{h'(\bar{x})(\lambda x)}_{0}\|_Z \\
&\leq \varepsilon\|\bar{x}+\lambda x-\bar{x}\|_X \\
&= \varepsilon\|\lambda x\|_X \\
&\leq \varepsilon\delta
\end{aligned}
\tag{2.1.22}
$$

elde edilir. $\alpha > 1$ ve $\alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{\rho_0}\right) \leq 1$ olduğundan

$$
q \leq 1-\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2} \tag{2.1.23}
$$

olur. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$
\|r_n\|_X \ \leq\ \frac{\alpha}{\rho_0}d(\lambda)\frac{1-q^{n-1}}{1-q} \tag{2.1.24}
$$

$$
\|h(\bar{x}+\lambda x+r_n)\|_Z \ \leq\ d(\lambda)q^{n-1} \tag{2.1.25}
$$

$$
\|u_n\|_X \leq \frac{\alpha}{\rho_0}d(\lambda)q^{n-1} \tag{2.1.26}
$$

olduğu tümevarımla gösterilebilir.

$n=1$ için $r_1=0$ olduğundan $\|r_1\|=0$ olur. Dolayısıyla (2.1.24) sağlanmış olur.

$\|h(\bar{x}+\lambda x+\underbrace{r_1}_{0})\| = \|h(\bar{x}+\lambda x)\| = d(\lambda)$ olduğundan (2.1.25) sağlanmış olur.

(2.1.20)'den

$$
\begin{aligned}
\|u_1\| &\leq \frac{\alpha}{\rho_0}\|h(\bar{x}+\lambda x+\underbrace{r_1}_{0})| \\
&\leq \frac{\alpha}{\rho_0}d(\lambda)
\end{aligned}
$$

olur. O halde (2.1.26) da $n=1$ için sağlanmış olur.

(2.1.24), (2.1.25) ve (2.1.26) eşitsizlikleri bir $n \in \mathbb{N}$ için doğru olsun. Bu eşitsizliklerin $n+1$ için doğrulukları gösterilmelidir.

(2.1.24) ve (2.1.26) eşitsizlikleri gereği

$$\begin{aligned}
\|r_{n+1}\| &= \|r_n - u_n\| \\
&\leq \|r_n\| + \|u_n\| \\
&\leq \frac{\alpha}{\rho_0} d(\lambda) \frac{1-q^{n-1}}{1-q} + \frac{\alpha}{\rho_0} d(\lambda) q^{n-1} \\
&= \frac{\alpha}{\rho_0} d(\lambda) \left(\frac{1-q^{n-1}}{1-q} + q^{n-1} \right) \\
&= \frac{\alpha}{\rho_0} d(\lambda) \frac{1-q^n}{1-q}
\end{aligned}$$

olur. O halde (2.1.24) eşitsizliği $n+1$ için sağlanmış olur.

(2.1.21), (2.1.22) ve (2.1.24) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
\|\lambda x + r_n\| &\leq \|\lambda x\| + \|r_n\| \\
&\leq \delta + \frac{\alpha}{\rho_0} d(\lambda) \frac{1-q^{n-1}}{1-q} \\
&\leq \delta + \frac{\alpha \varepsilon \delta}{\rho_0} \frac{1-q^{n-1}}{1-q} \\
&< \delta(1 + \underbrace{\frac{q}{1-q}}_{<1} (\underbrace{1-q^{n-1}}_{<1})) \\
&< 2\delta
\end{aligned} \tag{2.1.27}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|\lambda x + r_n - u_n\| &\leq \|\lambda x\| + \|r_{n+1}\| \\
&\leq \delta + \frac{\alpha}{\rho_0} d(\lambda) \frac{1-q^n}{1-q} \\
&\leq \delta(1 + \underbrace{\frac{q}{1-q}}_{<1}(\underbrace{1-q^n}_{<1})) \\
&< 2\delta \qquad (2.1.28)
\end{aligned}$$

olur. (2.1.27) ve (2.1.28) gereği

$$\bar{x} + \lambda x + r_n,\ \bar{x} + \lambda x + r_n - u_n \in B(\bar{x}, 2\delta)$$

olur. (2.1.16), (2.1.18), (2.1.19) ve (2.1.26) gereği

$$\begin{aligned}
\|h(\bar{x} + \lambda x + r_{n+1})\| &= \|h(\bar{x} + \lambda x + r_n - u_n)\| \\
&= \|-h'(\bar{x})(-u_n) - h(\bar{x} + \lambda x + r_n) + h(\bar{x} + \lambda x + r_n - u_n)\| \\
&\leq \varepsilon \|\bar{x} + \lambda x + r_n - u_n - \bar{x} + \lambda x + r_n\| \\
&= \varepsilon \|-u_n\| \\
&= \varepsilon \frac{\alpha}{\rho_0} d(\lambda) q^{n-1} \\
&= d(\lambda) q^n
\end{aligned}$$

olur. Buradan (2.1.25)'in sağlandığı görülür.

(2.1.20) ve (2.1.25)'den

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1}\| &\leq \frac{\alpha}{\rho_0}\|h(\bar{x}+\lambda x+r_{n+1})\| \\
&\leq \frac{\alpha}{\rho_0}d(\lambda)q^n
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla (2.1.26) eşitsizliği $n+1$ için sağlanır.

(2.1.26)'dan $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\|u_n\| &\leq \frac{\alpha}{\rho_0}d(\lambda)q^{n-1} \\
&\leq \frac{\alpha\varepsilon\delta}{\rho_0}q^{n-1} \\
&\leq \delta q^n
\end{aligned}$$

$q < \dfrac{1}{2}$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\| \leq \lim_{n\to\infty}\delta q^n = 0$$

Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0_X \tag{2.1.29}$$

olur. (2.1.18) ve (2.1.26)'dan

$$\begin{aligned}
\|r_{n+k}-r_n\| &= \|r_n - u_n - u_{n+1} - ... - u_{n+k-2} - u_{n+k-1} - r_n\| \\
&\leq \|u_n\| + \|u_{n+1}\| + ... + \|u_{n+k-2}\| + \|u_{n+k-1}\| \\
&\leq \frac{\alpha}{\rho_0}d(\lambda)\left(q^{n-1}+q^n+...+q^{n+k-2}\right) \\
&= \frac{\alpha}{\rho_0}d(\lambda)q^{n-1}\left(1+q+...+q^{k-1}\right) \\
&= \frac{\alpha}{\rho_0}d(\lambda)q^{n-1}\frac{1-q^k}{1-q} \\
&< \frac{\alpha d(\lambda)}{\rho_0(1-q)}q^{n-1}
\end{aligned}$$

olur. O halde r_n Cauchy dizisidir. X Banach uzayı olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r(\lambda)$$

olacak şekilde $r(\lambda) \in X$ vektörü vardır ve (2.1.29) ve (2.1.18)'den

$$h(\bar{x} + \lambda x + r(\lambda)) = 0_Z \tag{2.1.30}$$

olur.

(2.1.24)'den

$$\begin{aligned} \frac{\|r(\lambda)\|}{\lambda} &\leq \frac{\alpha}{\lambda\rho_0} d(\lambda) \frac{q^{n-1}}{1-q} \\ &< \frac{\alpha}{\lambda\rho_0} d(\lambda) \frac{1}{1-q} \\ &= \frac{\alpha}{\rho_0(1-q)} \left\| \frac{h(\bar{x}+\lambda x) - h(\bar{x}) - \lambda h'(\bar{x})(x)}{\lambda} \right\| \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{r(\lambda)}{\lambda} = 0 \tag{2.1.31}$$

elde edilir.

$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \in (0, \hat{\lambda}]$ ve $\lambda_n \to 0$ olarak seçilsin.

$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizilerini $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \mu_n &:= \frac{1}{\lambda_n} > 0 \\ x_n &:= \bar{x} + \lambda_n x + r(\lambda_n) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. (2.1.30) gereği

$$h(\bar{x} + \lambda_n x + r(\lambda_n)) = 0$$

olur. Dolayısıyla S kümesinin tanımlanışından $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n \in S$$

olur.(2.1.31)'den

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} \bar{x} + \lambda_n \left(x + \frac{r(\lambda_n)}{\lambda_n} \right) \\ &= \bar{x}\end{aligned}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n (x_n - \bar{x}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} (\lambda_n x + r(\lambda_n)) = x$$

olur. O halde

$$x \in T(S, \bar{x}) \text{ dir.}$$

□

Önerme 2.1.17. *X normlu uzay $c = (c_1, c_2, ..., c_p) : X \to \mathbb{R}^p$ sürekli fonksiyon olsun.*

$$S = \{x \in X \mid c_i(x) \geq 0 \ , i = 1, ..., p\}$$

ve

$$I(x) = \{i = 1, 2, ..., p : c_i(x) = 0\}$$

olarak tanımlansın.

(*i*) *$I(x) = \emptyset$ ise $T(S, x) = X$,*

(*ii*) *$I(x) \neq \emptyset$ ve c Frechet türevlenebilir olduğunda*

$$T(S, x) \subset \{d \in X : \forall \ i \in I(x), \ \langle c_i'(x), d \rangle \geq 0\},$$

(*iii*) *$\forall \ i \in I(x)$ için $\exists \ v_0 \in X$ $\langle c_i'(x), v_0 \rangle > 0$ koşulunu sağlayacak şekilde varsa*

$$T(S, x) = \{d \in X : \forall \ i \in I(x), \ \langle c_i'(x), d \rangle \geq 0\}$$

olur.

Kanıt. (*i*) $I(x) = \emptyset$ ise $x \in int(S)$ olacağından Önerme 2.1.4 gereği

$$T(S, x) = X$$

olur.

(ii) $x \in S$, $d \in T(S,x)$ verilsin. O zaman $h_n \to 0^+$ ve $d_n \to d$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n d_n \in S$ olan $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizileri vardır. Buradan $\forall\ i \in \{1,2,...,p\}$ için $c_i(x + h_n d_n) \geq 0$ elde edilir.

$\forall\ i_0 \in I(x)$ alındığında $c_{i_0}(x) = 0$ olur.

$$c_{i_0}(x + h_n d_n) - c_{i_0}(x) \geq 0$$

ve g Frechet türevlenebilir olduğundan

$$\begin{aligned} c_{i_0}(x + h_n d_n) - c_{i_0}(x) &= \left\langle \frac{dc_{i_0}(x)}{dx}, x + h_n d_n - x \right\rangle \\ &+ o(\|x + h_n d_n - x\|) \\ &= \left\langle \frac{dc_{i_0}(x)}{dx}, h_n d_n \right\rangle + o(\|h_n d_n\|) \end{aligned}$$

$\forall\ \ n \in \mathbb{N}$ için $h_n > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|d_n\|\, h_n}\left(c_{i_0}(x + h_n d_n) - c_{i_0}(x)\right) &= \left\langle \frac{dc_{i_0}(x)}{dx}, \frac{d_n}{\|d_n\|} \right\rangle \\ &+ \frac{1}{h_n\, \|d_n\|}\quad o(\|h_n d_n\|) \\ &\geq\ 0 \end{aligned}$$

Bu durumda

$$\lim_{h_n \to 0^+} \frac{1}{h_n\, \|d_n\|}\left(c_{i_0}(x + h_n d_n) - c_{i_0}(x)\right) = \langle c'_{i_0}(x), \frac{d}{\|d\|} \rangle \geq 0$$

olur. Buradan

$$T(S,x) \subset \{d \in X : \forall\ i \in I(x),\ \langle c'_i(x), d \rangle \geq 0\} \tag{2.1.32}$$

elde edilir.

(iii) $u \in \{d \in X : \forall\ i \in I(x),\ \langle c'_i(x), d\rangle \geq 0\}$ olsun. Bu durumda $\forall\ i \in I(x)$ için $\langle c'_i(x), u\rangle \geq 0$ olur. $i \notin I(x)$ için $c_i(x) > 0$ olur ama $\exists\ \alpha > 0$ sayısı $\forall\ h \in [0,\alpha]$ ve $\forall\ i \notin I(x)$ için $c_i(x + hu) \geq 0$ olacak şekilde vardır.

İlk olarak $\forall\ i \in I(x)$ için $\langle c_i'(x), u\rangle > 0$ durumu göz önüne alınsın. Bu durumda $\forall\ i \in I(x)$ için

$$c_i(x+hu) - c_i(x) = \langle c_i'(x), hu\rangle + h\ \varepsilon_i(h)$$

ve $h \to 0$ iken $\varepsilon_i(h) \to 0$ olan ε_i fonksiyonu vardır. Dolayısıyla yeterince küçük h sayıları ve $\forall\ i \in I(x)$ için $c_i(x+hu) \geq 0$ dır. Yani $x + hu \in S$ olur. Bu ise $u \in T(S,x)$ olması demektir.

Genel durumu göz önüne alınsın. $\forall\ \beta \in (0,1)$ için $u_\beta = (1-\beta)u + \beta v_0$ olarak alınsın. $\langle c_i'(x), u\rangle \geq 0$ ve $\langle c_i'(x), v_0\rangle > 0$ olduğu biliniyor. Buradan $\forall\ i \in I(x)$ için $\langle c_i'(x), (1-\beta)u + \beta v_0\rangle = \langle c_i'(x), u_\beta\rangle > 0$ olur. Bu durumda $u_\beta \in T(S,x)$ olur. $\lim\limits_{\beta \to 0} u_\beta = u$ ve $T(S,x)$ kapalı koni olduğundan $u \in T(S,x)$ olur. Dolayısıyla

$$\{d \in X : \forall\ i \in I(x),\ \langle c_i'(x), d\rangle \geq 0\} \subseteq T(S,x) \tag{2.1.33}$$

elde edilir. (2.1.32) ve (2.1.33) kapsamlarından

$$T(S,x) = \{d \in X : \forall\ i \in I(x),\ \langle c_i'(x), d\rangle \geq 0\}$$

olur.

□

Aşağıdaki önerme $\mathbb{R}^n$ uzayı içindeki özel bir S kümesinin teğet konisinin nasıl bulunacağını vermektedir.

Önerme 2.1.18. *$i = 1,2,...,m$ için $c_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar olsunlar.*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : c_i(x) = 0,\ i = 1,2,...,m\}$$

kümesi tanımlansın. $x \in S$ için $\nabla c_1(x), ..., \nabla c_m(x)$ vektörleri lineer bağımsız ise

$$T(S,x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla c_i(x), d\rangle = 0,\ i = 1,2,...,m\}$$

olur.

Kanıt. $d \in T(S,x)$ alınsın. Bu durumda $h_n \to 0^+$, $d_n \to d$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n d_n \in S$ olacak şekilde $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R^n$ dizileri vardır. S kümesinin tanımlanışından $c_i(x + h_n d_n) = 0$ ve $c_i(x) = 0$ olur. Buradan $\forall\ i = 1, 2, ..., m$ için c_i ler diferansiyellenebilen fonksiyonlar olduklarından

$$\begin{aligned} 0 &= c_i(x + h_n d_n) - c_i(x) \\ &= \langle \nabla c_i(x), x + h_n d_n - x\rangle + o(\|x + h_n d_n - x\|) \end{aligned}$$

yazılabilir. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $h_n > 0$ olarak verilmişti. O halde

$$0 = \frac{1}{h_n \|d_n\|}(c_i(x + h_n d_n) - c_i(x)) = \langle \nabla c_i(x), \frac{d_n}{\|d_n\|}\rangle + \frac{1}{h_n \|d_n\|} o(\|h_n d_n\|)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \left(\langle \nabla c_i(x), \frac{d_n}{\|d_n\|}\rangle + \frac{1}{h_n \|d_n\|}\ o\ (\|h_n d_n\|) \right) \\ &= \langle \nabla c_i(x), \frac{d}{\|d\|}\rangle \end{aligned}$$

elde edilir. $d \in \{d \in \mathbb{R} : \langle \nabla c_i(x), d\rangle = 0,\ i = 1, 2, ..., m\}$ olur. O halde

$$T(S,x) \subseteq \{d \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla c_i(x), d\rangle = 0,\ i = 1, 2, ..., m\} \qquad (2.1.34)$$

elde edilir.

$d = 0$ alınsın. Bu durumda $\langle \nabla c_i(x), d\rangle = 0$ olur. O halde
$D = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla c_i(x), d\rangle = 0,\ i = 1, 2, ..., m\} \neq \emptyset$ olur.

$d_* \in D$ ve $d_* \notin T(S,x)$ olsun. Bu durumda $\exists\ \mu > 0$ sayısı $\forall\ \delta \in (0, \mu]$ için $x + \delta d_* \notin S$ olacak şekilde vardır. $x + \delta d_* \notin S$ olduğundan $c_i(x + \delta d_*) \neq 0$ olur. O halde ya $c_i(x + \delta d_*) > 0$ ya da $c_i(x + \delta d_*) < 0$ dır. $c_i(x + \delta d_*) > 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$c_i(x + \delta d_*) - c_i(x) = \langle \nabla c_i(x), x + \delta d_* - x\rangle + o\ (\|\delta d_*\|) > 0$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta\,\|d_*\|}\left(c_i(x+\delta d_*)-c_i(x)\right) &= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta\,\|d_*\|}\left(\langle\nabla c_i(x), x+\delta d_*-x\rangle+o(\|\delta d_*\|)\right)\\ &= \langle\nabla c_i(x),\frac{d_*}{\|d_*\|}\rangle>0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise d_*'ın seçilişiyle çelişir. O halde $d_*\in T(S,x)$ olmalıdır. Buradan

$$\{d\in\mathbb{R}^n:\langle\nabla c_i(x),d\rangle=0,\ i=1,2,...,m\}\subseteq T(S,x) \tag{2.1.35}$$

olur. O halde (2.1.34) ve (2.1.35) kapsamlarından istenilen eşitlik elde edilir.

$\square$

Örnek 2.1.19. *$c_1,c_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonları*
$c_1(x,y)=x^2+y^2-1,\quad c_2(x,y)=x+2y$ olarak verilsin.

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:c_i(x,y)=0,\ i=1,2\}$$

kümesi tanımlansın. $x_0=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\in S$ ise $T(S,x_0)$ kümesini bulalım.

$\nabla c_1(x,y)=(2x,2y),\quad \nabla c_2(x,y)=(1,2)$ olur ve $\nabla c_1(x,y)$ ve $\nabla c_2(x,y)$ lineer bağımsızdır.

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:c_i(x,y)=0,\ i=1,2\}$$

olarak verilmişti.

$$\left.\begin{aligned}c_1(x,y) &= x^2+y^2-1=0\Longrightarrow x^2+y^2=1\\ c_2(x,y) &= x+2y=0\Longrightarrow x=-2y\end{aligned}\right\}$$

$\Longrightarrow 4y^2+y^2=1\Longrightarrow 5y^2=1\Longrightarrow y=\mp\frac{1}{\sqrt{5}}$ ve $x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

elde edilir. O halde

$$S=\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$$

olur. Önerme(2.1.18)'den

$$T(S,x_0)=\{d\in\mathbb{R}^2:\langle\nabla c_i(x_0),d\rangle=0,\ i=1,2\}$$

olmalıdır. O halde

$$\langle\nabla c_1(x_0),d\rangle=0 \text{ ve } \langle\nabla c_2(x_0),d\rangle=0$$

olan d'ler bulunmalıdır. Bu ise $\nabla c_1(x_0)=\left(\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ve $\nabla c_2(x_0)=(1,2)$ olduğundan $\langle\nabla c_1(x_0),(x,y)\rangle=\langle\left(\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right),(x,y)\rangle=0$ ve

$\langle\nabla c_2(x_0),(x,y)\rangle=\langle(1,2),(x,y)\rangle=0$ denklemlerini sağlayan $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ikililerinin bulunması demektir.

$\langle\left(\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right),(x,y)\rangle=\frac{4}{\sqrt{5}}\,x-\frac{2}{\sqrt{5}}\,y=0 \iff 2x-y=0$

$\langle(1,2),(x,y)\rangle=0 \iff x+2y=0$ olur.

$$\left.\begin{aligned}2x-y&=0\\x+2y&=0\end{aligned}\right\}\Longrightarrow (x,y)=(0,0) \text{ elde edilir. O halde}$$

$$T(S,x_0)=\{(0,0)\}$$

olur.

Önerme 2.1.20. $c_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *bir diferansiyellenebilir fonksiyon olsun.*

$$S=\{x\in\mathbb{R}^n:c_1(x)\le 0\}$$

kümesi verilsin. $x\in S$, $c_1(x)=0$ *ve* $\nabla c_1(x)\neq 0$ *olsun. Bu durumda*

$$T(S,x)=\{d\in\mathbb{R}^n:\langle\nabla c_1(x),d\ \rangle\le 0\}$$

olur.

Kanıt. $d\in T(S,x)$ alınsın. Bu durumda $h_n\to 0^+$, $d_n\to d$ ve $\forall\ n\in\mathbb{N}$ için $x+h_nd_n\in S$ olacak şekilde $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri vardır. $x+h_nd_n\in S$ olduğundan $c_1(x+h_nd_n)\le 0$ olur. $c_1(x)=0$ olarak verilmişti. Buradan

$$c_1(x+h_nd_n)-c_1(x)\le 0$$

olur. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $h_n > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_n \|d_n\|}(c_1(x+h_nd_n)-c_1(x)) &= \frac{1}{h_n \|d_n\|}(\langle \nabla c_1(x), h_nd_n\rangle + o\,(\|h_nd_n\|)) \\
&= \langle \nabla c_1(x), \frac{d_n}{\|d_n\|}\rangle + \frac{1}{h_n\|d_n\|}\ o(\|h_nd_n\|) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Her iki taraftan limit alınırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n \|d_n\|}(c_1(x+h_nd_n)-c_1(x)) &= \lim_{n\to\infty}(\langle \nabla c_1(x), \frac{d_n}{\|d_n\|}\rangle \\
&\quad + \frac{1}{h_n\|d_n\|} o(\|h_nd_n\|)) \\
&= \langle \nabla c_1(x), \frac{d}{\|d\|}\rangle \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Buradan $d \in \{d \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla c_1(x), d\ \rangle \leq 0\}$ ve dolayısıyla

$$T(S,x) \subseteq \{d \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla c_1(x), d\ \rangle \leq 0\} \tag{2.1.36}$$

elde edilir. $D(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla c_1(x), d\ \rangle \leq 0\}$ olsun. Hipotezden $\nabla c_1(x) \neq 0$ olur. $r = -\nabla c_1(x)$ alınsın. Bu durumda

$$\langle \nabla c_1(x), r\rangle = -\|\nabla c_1(x)\|^2 \leq 0$$

olur. Dolayısıyla $D(x) \neq \emptyset$ elde edilir.

$d_* \in D(x)$ ve $d_* \notin T(S,x)$ olsun. Bu durumda $\exists\, \mu > 0$ öyle ki $\forall\, \delta \in (0,\mu]$ için $x + \delta d_* \notin S$ dir. O halde $c_1(x+\delta d_*) > 0$ olur. $c_1(x) = 0$ ve $\delta > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta \|d_*\|}(c_1(x+\delta d_*)-c_1(x)) &= \frac{1}{\delta \|d_*\|}(\langle \nabla c_1(x), x+\delta d_* - x\rangle \\
&\quad + o(\|x+\delta d_* - x\|)) \\
&= \langle \nabla c_1(x), \frac{d_*}{\|d_*\|}\rangle + \frac{1}{\delta} o(\|\delta d_*\|) \\
&> 0
\end{aligned}$$

olur. Her iki taraftan limit alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta\,\|d_*\|}(c_1(x+\delta d_*)-c_1(x)) &= \lim_{\delta\to 0}\,(\langle\nabla c_1(x),\frac{d_*}{\|d_*\|}\rangle+\frac{1}{\delta\,\|d_*\|}\;o\,(\|\delta d_*\|))\\ &= \langle\nabla c_1(x),\frac{d_*}{\|d_*\|}\rangle\\ &> 0\end{aligned}$$

olur. Bu ise $d_* \in D(x)$ oluşuyla çelişir. O halde $d_* \in T(S,x)$ dir. Buradan

$$\{d\in\mathbb{R}^n : \langle\nabla c_1(x), d\ \rangle \leq 0\} \subseteq T(S,x) \tag{2.1.37}$$

olur. (2.1.36) ve (2.1.37) kapsamlarından istenilen eşitlik elde edilir. $\square$

Örnek 2.1.21. $c_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $c_1(x,y) = x^2+y^2-1$ *fonksiyonu,*

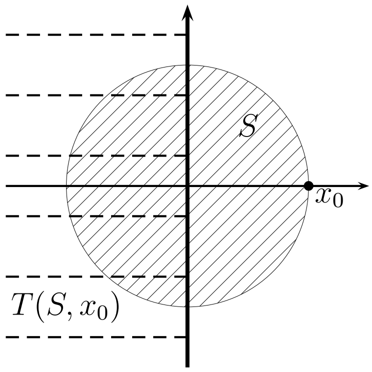
$$S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : c_1(x,y)\leq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$$

kümesi ve $x_0 = (1,0) \in S$ *noktası verilsin.*

$\nabla c_1(x,y) = (2x,2y)$ *ve* $\nabla c_1(x_0) = (2,0) \neq (0,0)$ *olur.* $c_1(x_0) = 0$ *dır. O halde Önerme 2.1.20 gereği*

$$\begin{aligned}T(S,x_0) &= \{(d_1,d_2)\in\mathbb{R}^2 : \langle\nabla c_1(x_0),(d_1,d_2)\rangle\leq 0\}\\ &= \{(d_1,d_2)\in\mathbb{R}^2 : \langle(2,0),(d_1,d_2)\rangle\leq 0\}\\ &= \{(d_1,d_2)\in\mathbb{R}^2 : d_1\leq 0\ ,\ \ d_2\in\mathbb{R}\}\\ &= (-\infty,0]\times\mathbb{R}\end{aligned}$$

elde edilir.



Şekil 2.7: $S = \{(x, y \in \mathbb{R}^2) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ kümesi ve $x_0 = (1, 0) \in S$ noktasındaki Contingent konisi

2.2 Contingent Konilerin Özellikleri

Önerme 2.2.1. *X normlu uzay , $\emptyset \neq S \subseteq X$ ve $x \in cl(S)$ olmak üzere $T(S, x)$ kapalı bir kümedir.(Contingent koni kapalıdır.)*

Kanıt. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(S, x)$ ve $d_n \to d$ olsun. $d \in T(S, x)$ olduğu gösterilmelidir. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $d_n \in T(S, x)$ olduğundan $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $\exists\, (x_{n,i})_{i\in\mathbb{N}} \subseteq S$, $\lim_{i\to\infty} x_{n,i} = x$ ve $\exists\, h_{n,i} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri $d_n = \lim_{i\to\infty} h_{n,i}(x_{n,i} - x)$ olacak şekilde vardır. Yakınsama tanımından $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $\exists\, i(n) \in \mathbb{N}$ sayısı $\forall\, i \geq i(n)$ için

$$\|x_{n,i} - x\| \leq \frac{1}{n}$$

ve

$$\|h_{n,i}(x_{n,i} - x) - d_n\| \leq \frac{1}{n}$$

olacak şekilde vardır. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n := x_{n,i(n)} \in S$$

ve

$$t_n := h_{n,i(n)} > 0$$

olarak tanımlansın. Buradan $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \|t_n(y_n - x) - d\| &= \|h_{n,i(n)}(x_{n,i(n)} - x) - d_n + d_n - d\| \\ &\leq \frac{1}{n} + \|d_n - d\| \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$d = \lim_{n\to\infty} t_n(y_n - x)$$

elde edilir. Yani $d \in T(S,x)$ olur. $\square$

Önerme 2.2.2. *$X,\ X_1,\ X_2$ gerçel normlu uzay olmak üzere*

a) *$\emptyset \neq S \subseteq L \subseteq X$ ve $x \in cl(S)$ ise $T(S,x) \subseteq T(L,x)$*

b) *$\emptyset \neq S_i \subset X$, $(i = 1,2)$ ve $x \in cl(S_i)$ ise*

$$T(S_1 \cup S_2, x) = T(S_1, x) \cup T(S_2, x)$$

c) *$\emptyset \neq S_i \subset X$, $(i = 1,2)$ ve $x \in cl(S_1 \cap S_2)$ ise*

$$T(S_1 \cap S_2, x) \subseteq T(S_1, x) \cap T(S_2, x)$$

d) *$\emptyset \neq S_i \subset X_i$, $(i = 1,2)$ ve $x_i \in cl(S_i)$ ise*

$$T(S_1 \times S_2, (x_1, x_2)) \subseteq T(S_1, x_1) \times T(S_2, x_2)$$

e) *$\emptyset \neq S_i \subset X_i$, $(i = 1,2)$ ve $x_i \in cl(S_i)$ ise*

$$T(S_1 + S_2, x_1 + x_2) \subseteq T(S_1, x_1) + T(S_2, x_2)$$

Kanıt. **a)** $x \in cl(S)$ verilsin. $S \subseteq L$ olduğundan $cl(S) \subseteq cl(L)$ olur. Dolayısıyla $x \in cl(L)$ elde edilir.

$d \in T(S,x)$ alınsın. Bu durumda $h_n \to 0^+$, $d_n \to d$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n d_n \in S$ olacak şekilde $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizileri vardır. $S \subseteq L$ olduğundan aynı diziler ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n d_n \in L$ olur. Dolayısıyla $d \in T(L,x)$ elde edilir.

b) $d \in T(S_1 \cup S_2, x)$ verilsin. Bu durumda Önerme 2.1.13 gereği $\forall\ U \in \mathcal{N}(d)$ ve $\forall\ \lambda > 0$ için

$$(x + \mu U) \cap (S_1 \cup S_2) \neq \emptyset$$

olan $\exists\ \mu \in (0, \lambda)$ vardır. O halde

$$((x + \mu U) \cap S_1) \cup ((x + \mu U) \cap S_2) \neq \emptyset$$

olur. Böylece

$$((x + \mu U) \cap S_1) \neq \emptyset \text{ veya } ((x + \mu U) \cap S_2) \neq \emptyset$$

olur. Dolayısıyla $d \in T(S_1, x)$ veya $d \in T(S_2, x)$ elde edilir. O halde

$$d \in T(S_1, x) \cup T(S_2, x)$$

olur. Buradan

$$T(S_1 \cup S_2, x) \subseteq T(S_1, x) \cup T(S_1, x) \tag{2.2.1}$$

olur.

Tersine $d \in T(S_1, x) \cup T(S_2, x)$ alınsın. $S_1 \subseteq S_1 \cup S_2$ ve $S_2 \subseteq S_1 \cup S_2$ olduğundan (a) özelliğinden

$$T(S_1, x) \subseteq T(S_1 \cup S_2, x)$$

ve

$$T(S_2, x) \subseteq T(S_1 \cup S_2, x)$$

, dolayısıyla $d \in T(S_1 \cup S_2, x)$ olur. Buradan

$$T(S_1, x) \cup T(S_2, x) \subseteq T(S_1 \cup S_2, x) \tag{2.2.2}$$

elde edilir.

Böylece (2.2.1) ve (2.2.2) kapsamlarından

$$T(S_1 \cup S_2, x) = T(S_1, x) \cup T(S_2, x)$$

olur.

c) $x \in cl(S_1 \cap S_2)$ verilsin. $cl(S_1 \cap S_2) \subseteq cl(S_1) \cap cl(S_2)$ olduğundan $x \in cl(S_1) \cap cl(S_2)$ dir.

$d \in T(S_1 \cap S_2, x)$ alınsın. $S_1 \cap S_2 \subseteq S_1$, $S_1 \cap S_2 \subseteq S_2$ olduğundan ve (a) özelliğinden

$$T(S_1 \cap S_2, x) \subseteq T(S_1, x)$$

ve

$$T(S_1 \cap S_2, x) \subseteq T(S_2, x)$$

olur. Buradan

$$T(S_1 \cap S_2, x) \subseteq T(S_1, x) \cap T(S_2, x)$$

elde edilir.

d) $x_i \in cl(S_i)$, $i = 1, 2$ verilsin. Bu durumda $(x_1, x_2) \in cl(S_1 \times S_2)$ olur.

$(d_1, d_2) \in T(S_1 \times S_2, (x_1, x_2))$ alınsın. Bu durumda $(d_1^n, d_2^n) \to (d_1, d_2)$, $h_n \to 0^+$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $(x_1, x_2) + h_n(d_1^n, d_2^n) \in S_1 \times S_2$ olan $((d_1^n, d_2^n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \times X$ ve $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri vardır. O halde bu diziler ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x_1 + h_n d_1^n \in S_1$ ve $x_2 + h_n d_2^n \in S_2$ olur.
$h_n \to 0^+$, $d_1^n \to d_1$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x_1 + h_n d_1^n \in S_1$ olan $(d_1^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_1$ ve $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri bulunduğundan

$$d_1 \in T(S_1, x_1) \tag{2.2.3}$$

olur.

Aynı şekilde $h_n \to 0^+$, $d_2^n \to d_2$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x_2 + h_n d_2^n \in S_2$ olan $(d_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_2$ ve $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri bulunduğundan

$$d_2 \in T(S_2, x_2) \text{ olur.} \tag{2.2.4}$$

O halde (2.2.3) ve (2.2.4)'den

$$(d_1, d_2) \in T(S_1, x_1) \times T(S_2, x_2)$$

olur.

Böylece

$$T(S_1 \times S_2, (x_1, x_2)) \subseteq T(S_1, x_1) \times T(S_2, x_2)$$

elde edilir.

e) $d^1 + d^2 \notin T(S_1, x_1) + T(S_2, x_2)$ olsun. Bu durumda $d^1 \notin T(S_1, x_1)$ veya $d^2 \notin T(S_2, x_2)$ olur. Buradan $h_n \to 0^+$ ve $d_n^1 \to d^1$ olan $\forall \ \left(d_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ve $\forall \ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri için $\exists \ n_1 \in \mathbb{N}$

$$x_1 + h_{n_1} d_{n_1}^1 \notin S_1 \tag{2.2.5}$$

olacak şekilde vardır veya $h_n \to 0^+$ ve $d_n^2 \to d^2$ olan $\forall \ \left(d_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ve $\forall \ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri için $\exists \ n_2 \in \mathbb{N}$

$$x_2 + h_{n_2} d_{n_2}^2 \notin S_2 \tag{2.2.6}$$

olacak şekilde vardır. (2.2.5) ve (2.2.6) kullanılarak

$$x_1 + x_2 + h_{n_1}(d_{n_1}^1 + d_{n_2}^2) \notin S_1 + S_2$$

elde edilir. Bu ise $d_1 + d_2 \notin T(S_1 + S_2, x_1 + x_2)$ olması demektir. O halde

$$T(S_1 + S_2, x_1 + x_2) \subseteq T(S_1, x_1) + T(S_2, x_2) \tag{2.2.7}$$

olur.

□

Önerme 2.2.3. *X normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ konveks küme olsun. Bu durumda $\forall \ x \in cl(S)$ için $T(S, x)$ konvekstir.*

Kanıt. $\forall \ x \in cl(S)$ verilsin. $\forall \ d_1, d_2 \in T(S, x)$ için $T(S, x)$ bir koni olduğundan $d_1 + d_2 \in T(S, x)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$d_1 \in T(S, x)$ olduğundan $\exists \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ ve $\exists \ (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ve $d_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(x_n - x)$ olacak şekilde vardır.

$d_2 \in T(S,x)$ olduğundan $\exists\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ ve $\exists\ (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$ ve $d_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(y_n - x)$ olacak şekilde vardır.

$\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \nu_n &:= \lambda_n + \mu_n \\ z_n &:= \frac{1}{\nu_n}(\lambda_n x_n + \mu_n y_n) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in S$ ve $y_n \in S$,

$$z_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n} x_n + \frac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n} y_n$$

ve S konveks olduğundan $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $z_n \in S$ dir.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} z_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\nu_n}(\lambda_n x_n + \mu_n y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\nu_n}(\lambda_n x_n - \lambda_n x + \mu_n y_n - \mu_n x + \lambda_n x + \mu_n x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda_n}{\nu_n}(x_n - x) + \frac{\mu_n}{\nu_n}(y_n - x) + \frac{(\lambda_n + \mu_n)x}{\nu_n} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda_n}{\nu_n}(x_n - x) + \frac{\mu_n}{\nu_n}(y_n - x) + x \right) \\ &= x \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \nu_n(z_n - x) &= \lim_{n\to\infty} \nu_n\left(\frac{\lambda_n x_n}{\nu_n} + \frac{\mu_n y_n}{\nu_n} - x\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\lambda_n x_n + \mu_n y_n - \nu_n x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lambda_n(x_n - x) + \mu_n(y_n - x) \\ &= d_1 + d_2 \end{aligned}$$

dolaysıyla $d_1 + d_2 \in T(S,x)$ elde edilir. $\square$

Tanım 2.2.4. *[4] X normlu uzay $S \subseteq X$ ve $x \in S$ verilsin. Eğer*

a) $T(S,x) = cl(\bigcup_{t>0} t(S-x))$

b) $S \subseteq \{x\} + T(S,x)$

denk koşullarından biri sağlanıyorsa S kümesine x noktasında pseudo-konvekstir denir.

Önerme 2.2.5. *X, Y normlu uzaylar, $A \in B(X,Y)$ sürekli, doğrusal dönüşüm, $S \subseteq X$ kümesi $x \in S$ noktasında pseudo-konveks ise*

$$cl(A(T(S,x))) = T(A(S), A(x))$$

olur.

Kanıt. $y \in A(T(S,x))$ olsun. Bu durumda $\exists\ d \in T(S,x)$, $A(d) = y$ olacak şekilde vardır. $d \in T(S,x)$ olduğundan $h_n \to 0^+$, $d_n \to d$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n d_n \in S$ olan $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\exists (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizileri vardır. Bu diziler ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$A(x + h_n d_n) \in A(S)$$

olur. A doğrusal dönüşüm olduğundan

$$A(x) + h_n A(d_n) \in A(S)$$

olur. A sürekli olduğundan $A(d_n) \to A(d) = y$ dolayısıyla
$y = A(d) \in T(A(S), A(x))$ olur ki bu

$$A(T(S,x)) \subseteq T(A(S), A(x)) \tag{2.2.8}$$

olması demektir. Her iki taraftan kapanış alınırsa Contingent koninin kapalı oluşu

$$cl(A(T(S,x))) \subseteq T(A(S), A(x)) \tag{2.2.9}$$

olduğunu verir.

Tersine $d \in T(A(S), A(x))$ olsun. Tanım gereği $d_n \to d$, $h_n \to 0^+$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $A(x) + h_n d_n \in A(S)$ olan $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizileri vardır. O halde bu diziler ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $h_n d_n \in A(S - x)$ olur. S pseudo-konveks olduğundan $h_n d_n \in A(S - x) \subseteq A(T(S, x))$ dir. Böylece $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $d_n \in A(T(S, x))$ elde edilir. $n \to \infty$ iken $d \in cl(A(T(S, x)))$ olur ki bu

$$T(A(S), A(x)) \subseteq cl(A(T(S, x))) \tag{2.2.10}$$

olması demektir. O halde (2.2.9) ve (2.2.10) kapsamlarından

$$T(A(S), A(x)) = cl(A(T(S, x)))$$

elde edilir. $\square$

Önerme 2.2.6. *$A \in \mathcal{L}(X, Y)$ sürekli, doğrusal dönüşüm, $L \subseteq X$, $M \subseteq Y$ kapalı, konveks kümeler, $0 \in int(A(L) - M)$ olsun. Bu durumda*

$$T(L \cap A^{-1}(M), x) = T(L, x) \cap A^{-1}(T(M, A(x))) \text{ dir.}$$

Kanıt.

$$\begin{aligned}
d \in T(L \cap A^{-1}(M), x) \implies\ & h_n \to 0^+,\ d_n \to d \text{ ve} \\
& \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ için } x + h_n d_n \in L \cap A^{-1}(M) \text{ olan} \\
& \exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+ \text{ ve } \exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \\
& \text{ dizileri vardır.} \\
\implies\ & \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ için } x + h_n d_n \in L \text{ ve} \\
& x + h_n d_n \in A^{-1}(M) \\
\implies\ & d \in T(L, x) \text{ ve } A(x) + h_n A(d_n) \in M \\
\implies\ & d \in T(L, x) \text{ ve } A(d) \in T(M, A(x)) \\
\implies\ & d \in T(L, x) \text{ ve } d \in A^{-1}(T(M, A(x))) \\
\implies\ & d \in T(L, x) \cap A^{-1}(T(M, A(x)))
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$T(L \cap A^{-1}(M), x) \subseteq T(L, x) \cap A^{-1}(T(M, A(x))) \qquad (2.2.11)$$

elde edilir.

Tersine $d \in T(L, x) \cap A^{-1}(T(M, A(x)))$ verilsin. Bu durumda $d \in T(L, x)$ ve $d \in A^{-1}(T(M, A(x)))$ olur. O halde $h_n^1 \to 0^+$, $d_n \to d$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n^1 d_n \in L$ olan $\exists\ (h_n^1)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizileri ve $h_n^2 \to 0^+$, $u_n \to A(d)$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $A(x) + h_n^2 u_n \in M$ olan $\exists\ (h_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\exists\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ dizileri vardır. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$h := \min(h_n^1, h_n^2, 1)$$

olarak tanımlansın. L ve M kümeleri konveks olduğundan $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n := x + h_n d_n \in L \text{ ve } y_n := A(x) + h_n u_n \in M$$

olur. Sonsuz çokluktaki indisler için $u_n = A(d_n)$ ise kanıt biter. Diğer durum için $F : L \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü

$$F(x) := A(x) - M$$

olarak tanımlansın. Sonuç (1.1.21) de $y_0 = 0$, $x \in F^{-1}(0) = L \cap A^{-1}(M)$ alınırsa kabulden $0 = y_0 \in int(F(L)) = int(A(L) - M)$ olur. Bu durumda $\forall\ y \in y_0 + \gamma B_Y$ ve $\forall\ x' \in L$ için

$$d(x', F^{-1}(y)) \leq \frac{1}{\gamma} d(y, F(x'))(1 + \left\| x' - x \right\|) \qquad (2.2.12)$$

olan $\exists\ \gamma > 0$ vardır. Özel olarak $y = 0$ ve $x' = x + h_n d$ olarak alınırsa

$$\left\| x' - x \right\| = \|x + h_n d - x\| = h_n \|d\|$$

ve

$$\begin{aligned} d(0, F(x + h_n d)) &= d(0, A(x) + h_n A(d) - M) \\ &= d(A(x) + h_n A(d), M) \\ &\leq d(A(x) + h_n u_n, M) + h_n \|A(d) - u_n\| \\ &= h_n \|A(d) - u_n\| \end{aligned}$$

olur. Bulunanlar (2.2.12) eşitsizliğinde yerine koyulursa ve eşitsizliğin her iki yanı $\frac{1}{h_n}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_n}d(x+h_nd, L\cap A^{-1}(M)) &\leq \frac{1}{\gamma h_n}d(0, F(x+h_nd))(1+\left\|x^{'}-x\right\|)\\ &\leq \frac{1}{\gamma}\left\|A(d)-u_n\right\|(h_n\left\|d\right\|+1)\end{aligned}$$

elde edilir. $u_n \to A(d)$ olduğundan

$$\inf_{h_n>0}\frac{d(x+h_nd, L\cap A^{-1}(M))}{h_n}=0$$

olduğundan $d\in T(L\cap A^{-1}(M))$ elde edilir. O halde

$$T(L,x)\cap A^{-1}(T(M,A(x)))\subseteq T(L\cap A^{-1}(M),x) \tag{2.2.13}$$

olur. (2.2.11) ve (2.2.13) kapsamlarından istenilen eşitlik elde edilir. □

Önerme 2.2.7. *X gerçel normlu uzay, $S_1,\ S_2\subseteq X$ kapalı, konveks kümeler, $x\in cl(S_1\cap S_2)$ olsun. $0\in int(S_1-S_2)$ ise*

$$T(S_1\cap S_2,x)=T(S_1,x)\cap T(S_2,x)$$

olur.

Kanıt.

$$A: X\to X \quad A(x)=x$$

sürekli, lineer dönüşümü, $L=S_1,\ M=S_2$ kapalı konveks kümeleri alınsın. Hipotezden $0\in int(S_1-S_2)=int(A(S_1)-S_2)$ olduğundan alınan $S_1,\ S_2$ kümeleri ve A lineer dönüşümü Önerme 2.2.6'nın koşullarını sağlar. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}T(S_1\cap S_2,x) &= T(S_1\cap A^{-1}(S_2),x)\\ &= T(S_1,x)\cap A^{-1}(T(S_2,A(x)))\\ &= T(S_1,x)\cap T(S_2,x)\end{aligned}$$

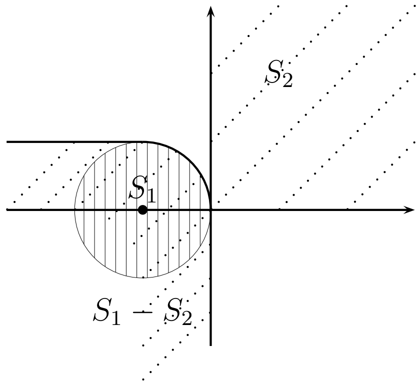
elde edilir. □

Örnek 2.2.8. *$S_1 = (-1,0) + \overline{B}_{\mathbb{R}^2}$, $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ olsun. $x = (0,0) \in cl(S_1 \cap S_2)$ verilsin. $T(S_1 \cap S_2, x)$ ve $T(S_1, x) \cap T(S_2, x)$ konileri arasındaki ilişkiye bakılsın.*

$(0,0) \notin int(S_1 - S_2)$, $S_1 \cap S_2 = \{(0,0)\}$ dır. O halde

$$T(S_1 \cap S_2, (0,0)) = \{(0,0)\}$$

olur.



Şekil 2.8: $S_1 = (-1,0) + \overline{B}_{\mathbb{R}^2}$, $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ ve $S_1 - S_2$ kümeleri

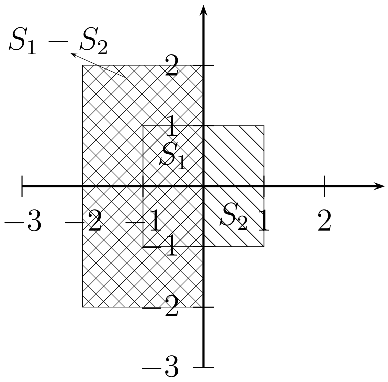
$$\begin{aligned} T(S_1, x) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0,\ y \in \mathbb{R}\} \\ T(S_2, x) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\} \\ T(S_1, x) \cap T(S_2, x) &= \{0\} \times [0, +\infty) \\ &\neq T(S_1 \cap S_2, x) \end{aligned}$$

olur.

Örnek 2.2.9. *$S_1 = [-1,0] \times [-1,1]$, $S_2 = [0,1] \times [-1,1]$ kümeleri için $T(S_1 \cap S_2, x)$ ve $T(S_1, x) \cap T(S_2, x)$ konileri arasındaki ilişkiye bakılsın.*

$$S_1 - S_2 = [-2,0] \times [-2,2] \text{ ve } (0,0) \notin int(S_1 - S_2)\text{'dir.}$$

$$S_1 \cap S_2 = \{0\} \times [-1,1]$$



Şekil 2.9: $S_1 = [-1, 0] \times [-1, 1]$, $S_2 = [0, 1] \times [-1, 1]$ ve $S_1 - S_2$ kümeleri

olduğundan

$$T(S_1 \cap S_2, (0,0)) = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{0\} \times \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} T(S_1, (0,0)) &= \{(x, y) : x \leq 0, \ y \in \mathbb{R}\} \\ T(S_2, (0,0)) &= \{(x, y) : x \geq 0, \ y \in \mathbb{R}\} \\ T(S_1, (0,0)) \cap T(S_2, (0,0)) &= \{0\} \times \mathbb{R} \\ &= T(S_1 \cap S_2, (0,0)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.10. *X_i normlu uzay $\emptyset \neq S_i \subset X_i$ konveks altkümeler $(i = 1, 2)$ ve $x_i \in cl(S_i)$ ise*

$$T(S_1 \times S_2, (x_1, x_2)) = T(S_1, x_1) \times T(S_2, x_2)$$

olur.

Kanıt.

$$T(S_1 \times S_2, (x_1, x_2)) \subseteq T(S_1, x_1) \times T(S_2, x_2) \tag{2.2.14}$$

olduğu Önerme 2.2.2 'de gösterilmişti. O halde eşitliği göstermek için

$$T(S_1, x_1) \times T(S_2, x_2) \subseteq T(S_1 \times S_2, (x_1, x_2))$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$(d^1, d^2) \in T(S_1, x_1) \times T(S_2, x_2)$ olsun. Bu durumda $d^1 \in T(S_1, x_1)$ ve $d_2 \in T(S_2, x_2)$ olur.

$d_1 \in T(S_1, x_1)$ ve S_1 konveks olduğundan Önerme 5.3.2 gereği $d_n^1 \to d^1$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x_1 + h_n^1 d_n^1 \in S_1$ olan $\exists\ (d_n^1)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X_1$ ve $\exists\ (h_n^1)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri vardır. $d^2 \in T(S_2, x_2)$ ve S_2 konveks olduğundan $d_n^2 \to d^2$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x_2 + h_n^2 d_n^2 \in S_2$ olan $\exists\ (d_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X_2$ ve $\exists\ (h_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri vardır. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$h_n = \min\{h_n^1, h_n^2\}$$

olarak alınırsa S_1 ve S_2 kümeleri konveks olduğundan $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x_1 + h_n d_n^1 \in S_1$ ve $x_2 + h_n d_n^2 \in S_2$ yani $(x_1 + h_n d_n^1, x_2 + h_n d_n^2) \in S_1 \times S_2$ olur. O halde $(d_n^1, d_n^2) \to (d^1, d^2)$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $(x_1 + h_n d_n^1, x_2 + h_n d_n^2) \in S_1 \times S_2$ olan $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\exists\ ((d_n^1, d_n^2))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X_1 \times X_2$ dizileri bulunabildiğinden

$$(d_1, d_2) \in T(S_1 \times S_2, (x_1, x_2))$$

elde edilir. O halde

$$T(S_1, x_1) \times T(S_2, x_2) \subseteq T(S_1 \times S_2, (x_1, x_2)) \tag{2.2.15}$$

olur. Bu nedenle (2.2.14) ve (2.2.15) kapsamlarından

$$T(S_1, x_1) \times T(S_2, x_2) = T(S_1 \times S_2, (x_1, x_2))$$

elde edilir. $\square$

3 KONVEKS KÜMELERİN TEĞET KONİLER CİNSİNDEN DIŞ TANIMLAMASI

3.1 Kapalı Konveks Kümeler Üzerine İzdüşüm

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir alt uzay olsun. $\mathbb{R}^n$'den V alt uzayına tanımlı bir izdüşüm dönüşümü

$$\begin{array}{rccc} p_V: & \mathbb{R}^n & \to & V \\ & x & \mapsto & p_V(x) \end{array}$$

ile tanımlı doğrusal, simetrik, pozitif semi-definite, idempotent ($p_V \circ p_V = p_V$) ve nonexpansive ($\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ için $\|p_V(x)\| \geq \|x\|$) özelliklerine sahip operatördür. Bu operatör $\mathbb{R}^n$'nin bir kanonik ayrışımını vermek için kullanılır. (Yani $\mathbb{R}^n$'yi $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ için $x = p_V(x) + p_{V^\perp}(x)$ formunda yazarak $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$ yazmak için kullanılır.)Bu düşünce $\mathbb{R}^n$'nin V alt vektör uzayı yerine C konveks kümesi alarak genellenecektir. Bu bizi $C \neq \emptyset$ kapalı, konveks bir C kümesi ve $x \in \mathbb{R}^n$ verildiğinde

$$inf\left\{\frac{\|y-x\|^2}{2} : y \in C\right\} \tag{3.1.1}$$

optimizasyon probleminin çözümü olan nokta var mıdır? ya da denk olarak verilen $x \in \mathbb{R}^n$ noktasına C içinde bir en yakın nokta var mıdır? sorusuna götürür. Şimdi bu problemin çözümüne bakılsın.

$$\begin{array}{rccc} f_x: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & f_x(y) := \dfrac{\|y-x\|^2}{2} \end{array}$$

fonksiyonunu tanımlansın. Bir $c \in C$ için

$$S = \{y \in \mathbb{R}^n : 0 \leq f_x(y) \leq f_x(c)\}$$

kümesi düzey kümesi olmak üzere f_x fonksiyonu kullanılarak (3.1.1) optimizasyon problemi

$$\inf\{f_x(y) : y \in C \cap S\}$$

problemine indirgenir. Norm fonksiyonu sürekli olduğundan f_x fonksiyonu süreklidir. S düzey kümesi kompakt, C kapalı olduğundan $C \cap S$ kompakt kümedir. Dolayısıyla bir $x \in \mathbb{R}^n$ verildiğinde

$$\inf\{f_x(y) : y \in C \cap S\} = f_x(y_0)$$

olan bir $y_0 \in C$ elemanının varlığı garantilenir ve yukarıdaki inf problemi min problemine dönüşür. Bu durumda C'nin konveks olmasının varlık problemine bir etkisi yoktur ama teklik tamamen konvekslikle ilgilidir. Yani C kapalı kümesi konveks ise izdüşüm tektir.

$y_1 \neq y_2$, $y_1, y_2 \in C$ bir $x \in \mathbb{R}^n$ için inf probleminin çözümü olsunlar. C konveks olduğundan $y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \in C$ olur. Dolayısıyla y_1 ve y_2'nin seçilişinden

$$f_x(y_0) \geq f_x(y_1) \text{ ve } f_x(y_0) \geq f_x(y_2)$$

olmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 &\geq \frac{1}{2}\|y_1 - x\|^2 \text{ ve} \\
\frac{1}{2}\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 &\geq \frac{1}{2}\|y_2 - x\|^2 \text{ olduğundan} \\
\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 &\geq \frac{1}{2}\left(\|y_1 - x\|^2 + \|y_2 - x\|^2\right) \\
f_x(y_0) &\geq \frac{1}{2}\left(f_x(y_1) + f_x(y_2)\right) \qquad (3.1.2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\frac{1}{2}\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|^2$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
f_x(y_0) &= \frac{1}{2}\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\left\|\frac{y_1 - x}{2} + \frac{y_2 - x}{2}\right\|^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\|y_1 - x\|^2 + \frac{1}{2}\|y_2 - x\|^2\right) - \frac{1}{8}\|y_1 - y_2\|^2$$

$$= \frac{1}{2}(f_x(y_1) + f_x(y_2)) - \frac{1}{8}\|y_1 - y_2\|^2 \tag{3.1.3}$$

olur. $y_1 \neq y_2$ kabulünden (3.1.3) eşitsizliği

$$f_x(y_0) < \frac{1}{2}(f_x(y_1) + f_x(y_2))$$

olduğunu verir ki bu ise (3.1.2) ile çelişir. Bu çelişkiden inf probleminin çözümünün yani izdüşümün tekliği çıkar.

Tanım 3.1.1. *[3] $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı, konveks küme ve $x \in \mathbb{R}^n$ verildiğinde (3.1.1) probleminin bir çözümü vardır ve tektir. Bu çözüme x'in C üzerine izdüşümü denir ve $p_C(x)$ ile gösterilir.*

Teorem 3.1.2. *$\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı, konveks küme ve $x \in \mathbb{R}^n$ verilsin. Bu durumda*

$$y_x \in C,\ y_x = p_C(x) \iff \forall\, y \in C \text{ için } \langle x - y_x, y - y_x\rangle \leq 0.$$

Kanıt.

($\Longrightarrow$) $y_x \in C$ ve $y_x = p_C(x)$ olsun. $\alpha \in (0,1)$ ve $y \in C$ olmak üzere C konveks küme olduğundan $y_x + \alpha(y - y_x) \in C$ olur. İzdüşümün tanımından

$$\begin{aligned}
f_x(y_x) &\leq f_x(y_x + \alpha(y - y_x)) \\
\frac{1}{2}\|y_x - x\|^2 &\leq \frac{1}{2}\|y_x + \alpha(y - y_x) - x\|^2 \\
0 &\leq \|y_x + \alpha(y - y_x) - x\|^2 - \|y_x - x\|^2 \\
&= \langle y_x - x + \alpha(y - y_x), y_x - x + \alpha(y - y_x)\rangle - \langle y_x - x, y_x - x\rangle \\
&= \alpha^2 \langle y - y_x, y - y_x\rangle + 2\alpha \langle y_x - x, y - y_x\rangle \\
&= \alpha^2 \|y - y_x\|^2 + 2\alpha \langle y_x - x, y - y_x\rangle
\end{aligned}$$

Eşitsizliğin her iki tarafı 2α'ya bölünürse

$$0 \leq \frac{\alpha}{2} \|y - y_x\|^2 + \langle y_x - x, y - y_x \rangle$$

$\alpha \to 0$ iken

$$0 \leq \langle y_x - x, y - y_x \rangle$$

yani

$$\langle x - y_x, y - y_x \rangle \leq 0$$

olur.

($\Longleftarrow$) $\forall y \in C$ için $\langle x - y_x, y - y_x \rangle \leq 0$ ve $y_x \in C$ olsun. Eğer $x = y_x$ ise y_x'in izdüşüm olduğu açıktır. $y_x \neq x$ olsun. ,

$$\begin{aligned}
0 &\geq \langle x - y_x, y - y_x \rangle \\
&= \langle x - y_x, y - x + x - y_x \rangle \\
&= \langle x - y_x, y - x \rangle + \langle x - y_x, x - y_x \rangle \\
&= -\langle x - y_x, x - y \rangle + \|x - y_x\|^2 \\
&\geq -\|x - y_x\| \|x - y\| + \|x - y_x\|^2
\end{aligned}$$

$x \neq y_x$ olduğundan $\|x - y_x\| \neq 0$ dır. Dolayısıyla eşitsizliğin her iki taraf $\|x - y_x\|$'e bölünürse

$$0 \geq -\|y - x\| + \|x - y_x\|$$

olur. Buradan $\forall\ y \in C$ için

$$\begin{aligned}
\|y - x\| \geq \|x - y_x\| &\implies \|y - x\|^2 \geq \|x - y_x\|^2 \\
&\implies \frac{1}{2}\|y - x\|^2 \geq \frac{1}{2}\|x - y_x\|^2 \\
&\implies f_x(y_x) = \inf\{f_x(y) : y \in C\}
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $y_x = p_C(x)$'dir. $\square$

Varyasyonel eşitsizlik denilen eşitsizlik $p_C(x) = y_x$ cinsinden şöyle ifade edilebilir: $x \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall\ y \in C$ için

$$\begin{aligned}
\langle x - y_x, y - y_x \rangle &= \langle x - y_x, y \rangle - \langle x - y_x, y_x \rangle \leq 0 \\
\iff \quad & \langle x - y_x, y \rangle \leq \langle x - y_x, y_x \rangle \\
\iff \quad & \langle x - p_C(x), y \rangle \leq \langle x - p_C(x), p_C(x) \rangle
\end{aligned}$$

Yani x'e karşılık gelen $p_C(x)$ vektörü C'nin yüzeyinde $x - p_C(x)$ vektörüyle belirlenen bir vektördür.

Şimdi C'nin özel bir konveks küme olması durumunda bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $p_C(x)$'in ne olacağına bakılsın.

1. C özel olarak afin uzay ya da alt uzay, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $p_C(x) = y_x$ ise $\forall\ y \in C$ için $y - y_x \in C$ iken $y_x - y \in C$ olacağından varyasyonel eşitsizlik $\langle x - y_x, y - y_x \rangle = 0$ koşuluna indirgenir. Yani $x - y_x$ vektörü C içindeki her $y - y_x$ vektörüne diktir. Bu ise izdüşümün klasik tanımıdır. O halde $x - y_x \in C^{\perp}$ ya da $x - p_C(x) \in C^{\perp}$ olacaktır.

2. $x \in C \subseteq \mathbb{R}^n$ ise $p_C(x) = x$ olur [3].

3. $p_C \circ p_C = p_C$ dir [3].

4. p_C doğrusaldır $\iff$ C altuzaydır [3].

Bir C kapalı, konveks kümesi ve bir $x \in \mathbb{R}^n$ verildiğinde x'in C'ye izdüşümünün varlığı ve tekliği ikinci bir yoldan şöyle görülebilir:

Önerme 3.1.3. *C kapalı konveks bir küme, $x \in \mathbb{R}^n$ ise $\forall\ y \in C$ için*

$$\|x - y_x\| \leq \|x - y\|$$

eşitsizliğini sağlyan tek bir $y_x \in C$ vardır.

Kanıt. $y_x \in C$'nin varlğını görmek için paralelkenar özelliği kullanılabilir.

$$\delta = \inf_{y \in C} \|x - y\|$$

olarak alınsın. Bu durumda inf tanımından $\exists\ (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$ dizisi $\|x - y_n\| \to \delta$ olacak şekilde vardır. Paralelkenar kuralından

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2$$

olur. δ'nın tanımından

$$\left\| x - \frac{y_n - y_m}{2} \right\| \geq \delta$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\| x - \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 \\ &\leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $n, m \to \infty$ iken $\|y_n - y_m\| \to 0$ olduğundan $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C \subseteq \mathbb{R}^n$ Cauchy dizisidir ve $\mathbb{R}^n$ tam olduğundan tek bir noktaya yakınsar.

$y_n \to y_x \in cl(C) = C$ olsun. Normun sürekliliğinden $\|x - y_n\| \to \|x - y_x\|$ olur .O halde $\exists\ y_x \in C$ için

$$\delta = \inf_{y\in C} \|x - y\| = \|x - y_x\|$$

olur.

y_x tektir. Çünkü tek olmasaydı $\exists\ {y_x}^*$ için $\delta = \|x - {y_x}^*\|$ olurdu.

$$y_n = \begin{cases} y_x & ; \ n \text{ tek} \\ {y_x}^* & ; \ n \text{ çift} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $(\|x - y_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ dizisi için $\|x - y_n\| \to \delta$ olur. Çünkü her iki alt dizi de δ'ya yakınsaktır. Paralelkenar kuralından $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ C içinde Cauchy dizisidir ve yakısaktır. Bunun olabilmesi için $y_x = {y_x}^*$ olmalıdır. O halde y_x tektir. □

Önerme 3.1.4. *C kapalı, konveks bir küme ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda $\forall\ y \in C$ için*

$$\|x - y_x\| \leq \|x - y\| \iff \langle x - y_x, y - y_x \rangle \leq 0$$

olur.

Kanıt.

($\Longrightarrow$) Kabul edilsin ki $\forall\ y \in C$ için $\|x - y_x\| \leq \|x - y\|$ olduğu halde $\exists\ y_0 \in C$ için $\langle x - y_x, y_0 - y_x \rangle > 0$ olsun. $y_x,\ y_0 \in C$ ve C konveks olduğundan $\forall\ \alpha \in (0, 1)$ için

$$y_\alpha = (1 - \alpha)y_x + \alpha y_0 \in C$$

olur.

$$\begin{aligned}\|x-y_\alpha\|^2 &= \|(1-\alpha)(x-y_x)+\alpha(x-y_0)\|^2\\ &= (1-\alpha)^2\|x-y_x\|^2+\alpha^2\|x-y_0\|^2+2\alpha(1-\alpha)\langle x-y_x, x-y_0\rangle\end{aligned}$$

olur. $\|x-y_\alpha\|^2$, α'ya göre türevlenebilirdir. O halde

$$\frac{d}{d\alpha}\|x-y_\alpha\|^2 = -2(1-\alpha)\|x-y_x\|^2+2\alpha\|x-y_0\|^2+2(1-2\alpha)\langle x-y_x, x-y_0\rangle$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha}\|x-y_\alpha\|^2\Big|_{\alpha=0} &= -2\|x-y_x\|^2+2\langle x-y_x, x-y_0\rangle\\ &< 0\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\|x-y_\alpha\|^2$ azalan fonksiyondur. α'nın 0'a çok yakın değerleri için

$$\begin{aligned}\|x-y_\alpha\|^2 &< \|x-y_x\|^2\\ \|x-y_\alpha\| &< \|x-y_x\|\end{aligned}$$

olur ki bu ise kabul ile çelişir. O halde $\forall\ y\in C$ için

$$\langle x-y_x, y-y_x\rangle \le 0$$

olur.

Tersine $\forall\ y \in C$ için $\langle x-y_x, y-y_x\rangle \le 0$ olsun. $y\neq y_x$ olan $y\in C$ alındığında

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2=\|x-y_x+y_x-y\|^2 &= \|x-y_x\|^2+2\underbrace{\langle x-y_x, y_x-y\rangle}_{\ge 0}\\ &\quad+\|y_x-y\|^2\\ &\ge \|x-y_x\|^2+\underbrace{\|y_x-y\|^2}_{>0}\\ &> \|x-y_x\|^2\end{aligned}$$

olur. Buradan $\forall\ y\in C$ için $\|x-y_x\|<\|x-y\|$ olur. $\square$

Sonuç 3.1.5. *C kapalı, konveks bir küme, $x \in \mathbb{R}^n$ verilsin. Bu durumda*

$$\begin{aligned} p_C(x) = y_x \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\ y \in C \text{ için } \langle x - y_x, y - y_x \rangle \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall\ y \in C \text{ için } \|x - y_x\| \leq \|x - y\| \end{aligned}$$

Önerme 3.1.6. $\forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *ise*

$$\|p_C(x_1) - p_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

olur. Ek olarak $0 \in C$ *ise* p_C *nonexpansive olur.*

Kanıt. Varyasyonel eşitsizlikte $x = x_1$ ve $y = p_C(x_2)$ alınırsa

$$\langle x_1 - p_C(x_1), p_C(x_2) - p_C(x_1) \rangle \leq 0 \tag{3.1.4}$$

olur.

$x = x_2$ ve $y = p_C(x_1)$ için varyasyonel eşitsizlik yazılırsa

$$\langle x_2 - p_C(x_2), p_C(x_1) - p_C(x_2) \rangle \leq 0 \tag{3.1.5}$$

elde edilir.(3.1.4) ve (3.1.5) taraf tarafa toplanırsa

$$\langle x_2 - x_1 + p_C(x_1) - p_C(x_2), p_C(x_1) - p_C(x_2) \rangle \leq 0$$

olur. Burada iç çarpım açılırsa

$$\|p_C(x_1) - p_C(x_2)\|^2 - \langle x_1 - x_2, p_C(x_1) - p_C(x_2) \rangle \leq 0$$

dolayısıyla

$$\|p_C(x_1) - p_C(x_2)\|^2 \leq \langle x_1 - x_2, p_C(x_1) - p_C(x_2) \rangle$$

sonucuna ulaşılır.

Ek olarak

$$\begin{aligned} \|p_C(x_1) - p_C(x_2)\|^2 &\leq \langle x_1 - x_2, p_C(x_1) - p_C(x_2) \rangle \\ &\leq \|p_C(x_1) - p_C(x_2)\|\, \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\|p_C(x_1) - p_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

elde edilir. $0 \in C$ ise $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için $\|p_C(x)\| \leq \|x\|$ olur ki bu da p_C dönüşümünün nonexpansive özelliğini sağladığını gösterir. □

En iyi Lipschitz sabiti

$$L = \sup \left\{ \frac{\|p_C(x_1) - p_C(x_2)\|}{\|x_1 - x_2\|} : x_1 \neq x_2,\ x_1, x_2 \notin C \right\}$$

ve C altuzay ise $p_C(x_1) = x_1$ ve $p_C(x_2) = x_2$ olduğundan $L = 1$ olur.

3.2 Kapalı Konveks Koniler Üzerine İzdüşüm

Konveks kümeler ailesi içinde konveks konilerin özel bir önemi vardır. Bunlar konveks kümelerle altuzaylar arasında bir sınıfı oluştururlar. Bunun bir sonucu olarak da konveks koniler üzerine izdüşüm daha çok özelliklere sahiptir. Bir bakımdan bu izdüşüm bir altuzaya izdüşüme daha yakın olarak düşünülebilir.

Tanım 3.2.1. *[3] K konveks bir koni olsun. Bu koninin (negatif) polar konisi*

$$K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall\ y \in K \text{ için } \langle x, y\rangle \leq 0\}$$

kümesidir.

- Polar koni $\langle .,. \rangle$ iç çarpımına bağlıdır. İç çarpım değiştikçe küme değişir.
- $\langle .,. \rangle$ süreklidir. Dolayısıyla $\langle .,. \rangle^{-1}((-\infty, 0]) = K^\circ$ kapalıdır.
- İç çarpımın sürekliliği göz önüne alınırsa K° konveks konidir.
- K altuzay ise K°, K kümesinin dik tamlayanıdır. Yani $K^\circ = K^\perp$. Çünkü $\forall\ y \in K$ için $\langle x, y\rangle \leq 0$, K altuzay olduğundan $-y \in K$ dır. O halde $\langle x, y\rangle \geq 0$ olur. Dolayısıyla $\forall\ y \in K$ için $\langle x, y\rangle = 0$ yani $x \in K^\perp$ elde edilir.
- $(K^\circ)^\circ = cl(K)$ dır.

  Kanıt. $\forall\ x \in K$ verilsin. Bu durumda $\forall\ y \in K^\circ$ için $\langle x, y\rangle \leq 0$ olur. Dolayısıyla $x \in (K^\circ)^\circ$ elde edilir. $(K^\circ)^\circ$ kapalı küme olduğundan

  $$cl(K) \subseteq (K^\circ)^\circ \tag{3.2.1}$$

olur.

$x \in (K^\circ)^\circ$ fakat $x \notin cl(K)$ olsun. O halde x ve $cl(K)$ kümesini ayıran (d, α) hiperdüzlemi $\forall\, y \in K$ için

$$\langle d, x\rangle > \alpha \geq \langle d, y\rangle \tag{3.2.2}$$

olacak şekilde vardır. $y = 0$ alınırsa $\alpha \geq 0$ olduğu görülür. $\langle d, y\rangle \leq 0$ ve $y \in K$ olduğundan $d \in K^\circ$ olur. $d \in K^\circ$ ve $x \in (K^\circ)^\circ$ olarak alındığından $\langle d, x\rangle \leq 0$ olmalıdır. Bu ise (3.2.2) ile çelişir. O halde $x \in cl(K)$ olur. Dolayısıyla

$$(K^\circ)^\circ \subseteq cl(K) \tag{3.2.3}$$

elde edilir.

(3.2.1) ve(3.2.3) dan istenilen eşitlik elde edilir. $\square$

- Kapalı, konveks kümeler ailesi üzerinde polarizasyon sıra değiştiren bir bağıntıdır. Yani

$$K_1 \subseteq K_2 \Longrightarrow (K_2)^\circ \subseteq (K_1)^\circ \text{ olur.}$$

- K kapalı ise $(K^\circ)^\circ = K$ olur.
- $K \cap K^\circ = \{0\}$ dır.

Örnek 3.2.2. *$i = 1, 2, ..., m$ olmak üzere $x_i \in \mathbb{R}^n$ ve*

$$K = \left\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i : \alpha_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., m\right\}$$

kümesi tanımlansın. K kümesinin poları

$$\begin{aligned} K^\circ &= \{s \in \mathbb{R}^n : \forall\ x \in K \text{ için } \langle s, x\rangle \leq 0\} \\ &= \left\{s \in \mathbb{R}^n : \forall\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., m \text{ için } \left\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i, s\right\rangle \leq 0\right\} \\ &= \left\{s \in \mathbb{R}^n : \forall\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., m \text{ için } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle x_i, s\rangle \leq 0\right\} \\ &= \{s \in \mathbb{R}^n : \langle x_i, s\rangle \leq 0,\ i = 1, 2, ..., m\} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek 3.2.3. $\mathbb{R}^n$*'deki standart iç çarpıma göre*

$$\Omega_+ = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : i = 1, 2, ..., n,\ x_i \geq 0\}$$

kümesinin poları

$$\begin{aligned}
(\Omega_+)^\circ &= \{y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : \forall\ x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega_+ \text{ için } \langle x, y\rangle \leq 0\} \\
&= \left\{y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n\right\} \\
&= \{y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : y_i \leq 0,\ i = 1, 2, ..., n\}
\end{aligned}$$

Örnek 3.2.4. $\mathbb{R}^n$ *içinde* $s \in \mathbb{R}^n$, $\|s\| = 1$ *ve* $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *ile belirlenen*

$$K_s(\theta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \cos\theta \leq \langle s, x\rangle\}$$

dönel konisi verildiğinde

$$(K_s(\theta))^\circ = K_{-s}(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

olur.

Önerme 3.2.5. K *kapalı, konveks koni olsun. Bu durumda* $x \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$\begin{aligned}
p_K(x) = y_x \quad &\Longleftrightarrow \quad y_x \in K,\ x - y_x \in K^\circ \text{ ve } \langle x - y_x, y_x\rangle = 0 \text{ dır.} \\
&\Longleftrightarrow \quad y_x \in K,\ x - y_x \in K^\circ \text{ ve } y_x \perp x - y_x
\end{aligned}$$

Kanıt.

($\Longrightarrow$) $p_K(x) = y_x$ olsun. $p_K(x)$'in tanımından $\forall\ y \in K$ için $\langle x - y_x, y - y_x\rangle \leq 0$ olur. $y_x \in K$ ve K koni olduğundan $\forall\ \alpha \geq 0$ için $\alpha y_x \in K$'dır. Varyasyonel eşitsizlikte $y = \alpha y_x$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\langle x - y_x, \alpha y_x - y_x\rangle &\leq 0 \\
\Longrightarrow\ (\alpha - 1)\langle x - y_x, y_x\rangle &\leq 0
\end{aligned}$$

olur. $\alpha - 1 \leq 0$ veya $\alpha - 1 \geq 0$ olacağından

$$\langle x - y_x, y_x\rangle = 0$$

olur.

$\forall\ y \in K$ için

$$\begin{aligned} \langle x - y_x, y - y_x \rangle &\leq 0 \\ \Longrightarrow \quad \langle x - y_x, y \rangle - \underbrace{\langle x - y_x, y_x \rangle}_{0} &\leq 0 \\ \Longrightarrow \quad \langle x - y_x, y \rangle &\leq 0 \\ \Longrightarrow \quad x - y_x \in K^{\circ} & \end{aligned}$$

olur.

$(\Longleftarrow)$ $y_x \in K,\ x - y_x \in K^{\circ}$ ve $\langle x - y_x, y_x \rangle = 0$ olsun. $\forall\ y \in K$ için

$$\begin{aligned} f_x(y) &= \tfrac{1}{2} \left\| x - y_x + y_x - y \right\|^2 \\ &= \tfrac{1}{2} \left(\left\| x - y \right\|^2 + \left\| y_x - y \right\|^2 + 2 \langle x - y_x, y_x - y \rangle \right) \\ &= \tfrac{1}{2} \left\| x - y \right\|^2 + \tfrac{1}{2} \left\| y_x - y \right\|^2 + \langle x - y_x, y_x - y \rangle \\ &= f_x(y_x) + \tfrac{1}{2} \underbrace{\left\| y_x - y \right\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{\langle x - y_x, y_x \rangle}_{0} - \underbrace{\langle x - y_x, y \rangle}_{\geq 0} \\ &\geq f_x(y_x) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\forall\ y \in K$ için $\|x - y_x\| \leq \|x - y\|$ olur ki bu ise $p_K(x) = y_x$ olması demektir. □

$x - p_K(x)$ ile belirlenen $p_K(x)$, K kümesinin bir yüzüne aittir. $y_x \in K$, $x - y_x \in K^{\circ}$, $\langle x - y_x, y_x \rangle = 0$ ifadesi $p_K(x)$ ile belirlenen $x - p_K(x)$ vektörünün de K° kümesinin bir yüzüne ait olduğunu söyler.

Önerme 3.2.6. *$K \subseteq X$ kapalı, konveks koni olmak üzere $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için*

i) $p_K(x) = 0 \iff x \in K^{\circ}$

ii) $\forall\ \alpha \geq 0$ *için* $p_K(\alpha x) = \alpha p_K(x)$

iii) $p_K(-x) = -p_{-K}(x)$ *olur.*

Kanıt. *i)*

$$\begin{aligned} p_K(x) = 0 \quad &\iff \quad \forall\, y \in K \text{ için } \langle x - 0, y - 0\rangle = \langle x, y\rangle \leq 0 \\ &\iff \quad x \in K^\circ \end{aligned}$$

ii) $\alpha = 0$ için açıktır. $\forall\, \alpha > 0$ ve $\forall\, y \in K$ verilsin. Önerme 3.2.5 kullanılarak

$$\begin{aligned} \langle \alpha x - \alpha p_K(x), y - \alpha p_K(x)\rangle &= \alpha \langle x - p_K(x), y - \alpha p_K(x)\rangle \\ &= \alpha \langle x - p_K(x), y\rangle - \alpha^2 \underbrace{\langle x - p_K(x), p_K(x)\rangle}_{0} \\ &= \alpha \langle x - p_K(x), y\rangle \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. İzdüşümün tekliğinden $p_K(\alpha x) = \alpha p_K(x)$ olur.

iii) $\forall\, -y \in -K$ verilsin. Varyasyonel eşitsizlik kullanılırsa

$$\begin{aligned} \langle x - p_{-K}(x), -y - p_{-K}(x)\rangle &\leq 0 \\ \Longrightarrow \langle -x + p_{-K}(x), y + p_{-K}(x)\rangle &\leq 0 \end{aligned}$$

olur. Yani $\forall\, y \in K$ için $\langle -x + p_{-K}(x), y + p_{-K}(x)\rangle \leq 0$ elde edilir. Projeksiyonun tekliğinden $-p_{-K}(x) = p_K(-x)$ olur.

□

Önerme 3.2.7. *$K \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı, konveks koni, $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere*

$$p_K(x) + p_{K^\circ}(x) = x$$

olur.

Kanıt. Önermenin ispatı için $x - p_K(x) = p_{K^\circ}(x)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü $x - p_K(x) + p_K(x) = x$'dir. $\forall\, y \in K^\circ$ verilsin. Önerme 3.2.5 kullanılarak

$$\begin{aligned} \langle x - (x - p_K(x)), y - (x - p_K(x))\rangle &= \langle p_K(x), y + p_K(x) - x\rangle \\ &= \langle p_K(x), y\rangle - \underbrace{\langle p_K(x), p_K(x) - x\rangle}_{0} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. □

V, $\mathbb{R}^n$'nin bir alt uzayı olmak üzere

$$p_V(x) + p_{V^\perp}(x) = x$$

eşitliğinin $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$'yi verdiği gibi benzer bir karakterizasyon da şu şekilde verilebilir:

Teorem 3.2.8. (J. J. Moreau) *K kapalı, konveks koni, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ verilsin. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

i) $x_1 \in K,\ x_2 \in K^\circ,\ x = x_1 + x_2$ *ve* $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$*'dır.*

ii) $p_K(x) = x_1$ *ve* $p_{K^\circ}(x) = x_2$*'dir.*

Kanıt.

$(i \Longrightarrow ii)$ $x_1 \in K,\ x_2 \in K^\circ,\ x = x_1 + x_2$ ve $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ olsun. Önerme 3.2.5 gereği

$x_1 \in K$ ve $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, x - x_1 \rangle = 0$ olduğundan $p_K(x) = x_1$ olur.

$x_2 \in K^\circ$ ve $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle x - x_2, x_2 \rangle = 0$ olduğundan $p_{K^\circ}(x) = x_2$ olur.

$(ii \Longrightarrow i)$ $p_K(x) = x_1$ olsun. Önerme 3.2.5'den $\langle x - x_1, x_1 \rangle = 0$ v e$x - x_1 \in K^\circ$ olur. $x_2 = x - x_1$ olarak alınırsa $x_2 \in K^\circ$, $x = x_1 + x_2$ ve $\langle x_2, x_1 \rangle = 0$ elde edilir. □

3.3 Konveks Kümelerin Teğet ve Normal Konileri

Önerme 3.3.1. *$\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı, konveks küme olsun. Bu durumda $\forall\ x \in C$ için*

$$C \subseteq \{x\} + T(C, x)$$

olur.

Kanıt. $y \in C - \{x\}$ ve $y \notin T(C, x)$ olsun. Bu durumda $\forall\ \delta \in [0, \mu]$ için $x + \delta y \notin C$ olacak şekilde $\exists\ \mu > 0$ vardır. $y \in C - \{x\}$ olduğundan

$\exists\ c \in C,\ y = c - x$ olacak şekilde vardır. δ yeterince küçük seçilirse de $x + \delta y \notin C$ durumu geçerli olur. Yani

$$(1-\delta)x + \delta c \notin C$$

olur ki bu ise C kümesinin konveks oluşuyla çelişir. Dolayısıyla $y \in T(C,x)$ olmalıdır. O halde

$$C \subseteq \{x\} + T(C,x)$$

olur. $\square$

Tanım 3.3.2. *[3] $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı, konveks küme olsun. $x \in C$ verilsin.*

$$\forall\ y \in C \text{ için } \langle s, y - x\rangle \leq 0$$

özelliğini sağlayan $s \in \mathbb{R}^n$ vektörüne C kümesine x noktasında normaldir denir. Bu özelliği sağlayan vektörlerin kümesine de C kümesinin x noktasındaki normal konisi denir ve $N(C,x)$ ile gösterilir.

- İç çarpım sürekli olduğundan $N(C,x)$ kapalı konidir.
- $x \in int(C)$ ise $N(C,x) = \{0\}$ olur.

Önerme 3.3.3. *$\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı, konveks küme olsun. $x \in C$ verilsin. Bu durumda*

$$N(C,x) = [T(C,x)]^\circ$$

olur.

Kanıt. $s \in N(C,x)$ olsun. Bu durumda $\forall\ y \in C$ için $\langle s, y - x\rangle \leq 0$ olur.

$$d = y - x$$

olarak tanımlansın. O halde $\forall\ d \in C - x$ için $\langle s, d\rangle \leq 0$ olur. Bu durumda $\forall\ d \in \mathbb{R}^+(C - x)$ içinde $\langle s, d\rangle \leq 0$ dir. Dolayısıyla $\forall\ d \in cl(\mathbb{R}^+(C - x))$ için $\langle s, d\rangle \leq 0$ olduğundan $s \in [T(C,x)]^\circ$ elde edilir. O halde

$$N(C,x) \subseteq [T(C,x)]^\circ \qquad (3.3.1)$$

elde edilir.

$s \in [T(C,x)]^\circ$ olsun. O halde $\forall\ d \in T(C,x)$ için $\langle s,d\rangle \leq 0$ olur. C konveks olduğundan Önerme 3.3.1 gereği $C - \{x\} \subseteq T(C,x)$ olur. O halde $\forall\ d \in C - x$ için de $\langle s,d\rangle \leq 0$ eşitsizliği gerçekleşir. Dolayısıyla $\forall\ y \in C$ için $\langle s, y-x\rangle \leq 0$ olur. Buradan $s \in N(C,x)$ elde edilir. Dolayısıyla

$$[T(C,x)]^\circ \subseteq N(C,x) \tag{3.3.2}$$

olur. (3.3.1) ve (3.3.2) kapsamlarından istenilen eşitlik elde edilir. □

Sonuç 3.3.4. *$\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı, konveks küme olsun. $x \in C$ verilsin. Bu durumda*

$$T(C,x) = [N(C,x)]^\circ$$

olur. Dolayısıyla

$$T(C,x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle s,d\rangle \leq 0,\ \ \forall\ s \in N(C,x)\}$$

olarak yazılabilir.

Kanıt. $(K^\circ)^\circ = cl(K)$ ve Contingent koninin kapalı olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}
(T(C,x))^\circ &= N(C,x)\\
(T(C,x))^{\circ\circ} &= (N(C,x))^\circ\\
cl(T(C,x)) &= (N(C,x))^\circ\\
T(C,x) &= (N(C,x))^\circ
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 3.3.5. *$\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı, konveks küme, $s \in \mathbb{R}^n$ için aşağıdakiler denktir.*

i) $s \in N(C,x)$

ii) $\langle s,x\rangle = \max\limits_{y\in C} \langle s,y\rangle$

iii) $x = p_C(x+s)$

Kanıt.

$(i \Longrightarrow ii)$ $s \in N(C, x)$ ise $\forall\ y \in C$ için

$$\begin{aligned}
\langle s, y - x\rangle &\leq 0 \\
\langle s, y\rangle - \langle s, x\rangle &\leq 0 \\
\langle s, y\rangle &\leq \langle s, x\rangle \\
\max_{y \in C} \langle s, y\rangle &\leq \langle s, x\rangle
\end{aligned}$$

Özel olarak $y = x \in C$ seçilirse

$$\max_{y \in C} \langle s, y\rangle = \langle s, x\rangle$$

elde edilir.

$(ii \Longrightarrow iii)$ $\max\limits_{y \in C} \langle s, y\rangle = \langle s, x\rangle$ olsun. Bu durumda $\forall\ y \in C$ için

$$\begin{aligned}
\langle s, y\rangle &\leq \langle s, x\rangle \\
\langle s, y - x\rangle &\leq 0 \\
\langle x + s - x, y - x\rangle &\leq 0
\end{aligned}$$

olduğundan Teorem 3.1.2 gereği $x = p_C(x + s)$ elde edilir.

$(iii \Longrightarrow i)$ $x = p_C(x+s)$ olsun. Bu durumda Teoarem 3.1.2'den dolayı $\forall\ y \in C$ için

$$\langle x + s - s, y - x\rangle \leq 0$$

dolayısıyla

$$\langle s, y - x\rangle \leq 0$$

olur. O halde $s \in N(C, x)$'dir.

$\square$

Önerme 3.3.5 kullanılarak

$$\begin{aligned}
{p_C}^{-1}(x) &= \{x + s : s \in N(C, x)\} \\
&= \{x\} + N(C, x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı zamanda $x' \neq x$ iken

$$[\{x\} + N(C,x)] \cap [\{x'\} + N(C,x')] = \emptyset$$

olur. Çünkü C konveks küme olduğunda izdüşüm tektir.

Önerme 3.3.6. *$\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi kapalı ve konveks ise*

$$C = \bigcap_{x \in C} (\{x\} + T(C,x))$$

olur.

Kanıt. Önerme 3.3.1'den dolayı $\forall\ x \in C$ için

$$C \subseteq \{x\} + T(C,x)$$

olur. O halde

$$C \subseteq \bigcap_{x \in C} (\{x\} + T(C,x)) \tag{3.3.3}$$

$y \notin C$ verilsin. Bu durumda $y = p_C(y) + s$ olacak şekilde $\exists\ s \neq 0$ vektörü vardır.

$$p_C(y) = p_C(p_C(y) + s)$$

olduğundan Önerme 3.3.5'den $s \in N(C, p_C(y))$ elde edilir. $s \neq 0$ olduğundan $s \notin T(C, p_C(y))$, dolayısıyla

$$y = p_C(y) + s \notin \{p_C(y)\} + T(C, p_C(y))$$

olur. O halde

$$C \supseteq \bigcap_{x \in C} (\{x\} + T(C,x)) \tag{3.3.4}$$

(3.3.3) ve (3.3.4) kapsamlarından istenen eşitlik elde edilir. $\square$

4 CLARKE KONİLER

4.1 Tanım ve Denk İfadeler

Tanım 4.1.1. *[1,4-6]*

a. *X gerçel normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ ve $x \in cl(S)$ verilsin. $x_n \xrightarrow{S} x$, $h_n \to 0^+$ olan $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ ve $\forall\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri için $d_n \to d$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_n + h_n d_n \in S$ olacak şekilde $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi bulunabiliyorsa d'ye bir Clarke teğet denir.*

b. *S kümesinin x'deki Clarke teğetlerinin oluşturduğu kümeye S'nin x noktasındaki Clarke konisi denir ve $C(S,x)$ ile gösterilir.*

$C(S,x)$ bir konidir. Bunu göstermek için $\forall\ d \in C(S,x)$ ve $\forall\ \alpha \geq 0$ verildiğinde $\alpha d \in C(S,x)$ olduğu gösterilmelidir.

$\alpha = 0$ ve bir $d \in C(S,x)$ verilsin. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ olarak alınırsa $x_n \to x$ ve $h_n \to 0^+$ olan $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$, $\forall\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_n + h_n d_n \in S$ olur. O halde $\alpha d = 0 \in C(S,x)$ olur.

$\alpha > 0$ ve bir $d \in C(S,x)$ verilsin. Bu durumda $x_n \to x$ ve $h_n \to 0^+$ olan $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ ve $\forall\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri için $d_n \to d$ olan $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n + h_n d_n \in S \tag{4.1.1}$$

olacak şekilde vardır.

$$(\alpha d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

olarak alınırsa $u_n \to \alpha d$ olduğu açıktır.

$$(h'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{\alpha} h_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

olarak alınırsa $h'_n \to 0^+$ olduğu açıktır. O halde $x_n \to x$ ve $h'_n \to 0^+$ olan $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ve $\forall\ (h'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri için $u_n \to \alpha d$ olan $\exists\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bulunmuş olur ki (4.1.1) kullanılarak $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n + h'_n u_n = x_n + \frac{h_n}{\alpha} \alpha d_n = x + h_n d_n \in S$$

olur. O halde

$$\alpha d \in C(S,x)$$

olur. Dolayısıyla $C(S,x)$ bir konidir.

Önerme 4.1.2. *X gerçel normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$, $x \in cl(S)$ verilsin. Bu durumda*

$$\begin{aligned} d \in C(S,x) \quad \Longleftrightarrow \quad & \forall\, U \in \mathcal{N}(d) \textit{ için } \exists\, V \in \mathcal{N}(x) \textit{ ve } \exists\, \lambda > 0 \textit{ öyle ki} \\ & \forall\, z \in S \cap V \textit{ ve } \forall\, \mu \in (0,\lambda) \textit{ için } (z + \mu U) \cap S \neq \emptyset \end{aligned}$$

olur.

Kanıt.

$$d \in C(S,x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\substack{z \xrightarrow{s} x \\ h \to 0^+}} \frac{d(z+hd,S)}{h} = 0$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad & \forall\, \varepsilon \text{ için } \exists\, \lambda > 0 \text{ öyle ki } z \in S,\ \|z - x\| < \lambda \\ & \text{ve } h \in (0,\lambda) \text{ iken } \frac{d(z+hd,S)}{h} < \varepsilon \text{ olur.} \end{aligned}$$

$V = B(x,\lambda) \in \mathcal{N}(x)$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, \lambda > 0 \text{ ve } \exists\, V \in \mathcal{N}(x) \text{ öyle ki } \forall\, h \in (0,\lambda) \\ & \text{ve } \forall\, z \in V \cap S \text{ için } \frac{d(z+hd,S)}{h} < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad & \forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, \lambda > 0 \text{ ve } \exists\, V \in \mathcal{N}(x) \text{ öyle ki } \forall\, h \in (0,\lambda) \\ & \text{ve } \forall\, z \in V \cap S \text{ için } d(z+hd,S) < \varepsilon h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad & \forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, \lambda > 0 \text{ ve } \exists\, V \in \mathcal{N}(x) \text{ öyle ki } \forall\, h \in (0,\lambda) \\ & \text{ve } \forall\, z \in V \cap S \text{ için } z + hd \in S + B(0,\varepsilon h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad & \forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, \lambda > 0 \text{ ve } \exists\, V \in \mathcal{N}(x) \text{ öyle ki } \forall\, h \in (0,\lambda) \\ & \text{ve } \forall\, z \in V \cap S \text{ için } d \in \frac{S - z}{h} + B(0,\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\iff \quad \forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, \lambda > 0 \text{ ve } \exists\, V \in \mathcal{N}(x) \text{ öyle ki } \forall\, h \in (0,\lambda)$$
$$\text{ve } \forall\, z \in V \cap S \text{ için } d \in cl\left(\frac{S-z}{h}\right)$$

$$\iff \quad \forall\, U \in \mathcal{N}(d) \text{ için } \exists\, \lambda > 0 \text{ ve } \exists\, V \in \mathcal{N}(x) \text{ öyle ki } \forall\, h \in (0,\lambda)$$
$$\text{ve } \forall\, z \in V \cap S \text{ için } U \cap \frac{S-z}{h} \neq \emptyset$$

$$\iff \quad \forall\, U \in \mathcal{N}(d) \text{ için } \exists\, \lambda > 0 \text{ ve } \exists\, V \in \mathcal{N}(x) \text{ öyle ki } \forall\, h \in (0,\lambda)$$
$$\text{ve } \forall\, z \in V \cap S \text{ için } (z + \mu U) \cap S \neq \emptyset$$

$\square$

Önerme 4.1.3.

$$\begin{aligned} C(S,x) &= \liminf_{\substack{z \xrightarrow{s} x \\ \lambda \to 0^+}} \frac{S-z}{\lambda} = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{\substack{\|z-x\|<\delta \\ 0<\lambda<\delta \\ z \in S}} \left(\frac{S-z}{\lambda} + \varepsilon B_X\right) \\ &= \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{\substack{\|z-x\|<\frac{1}{n} \\ 0<\lambda<\frac{1}{n} \\ x \in S}} \left(\frac{S-z}{\lambda} + \frac{1}{m} B_X\right) \end{aligned}$$

Kanıt. *i)* $C(S,x) = \liminf_{\substack{z \xrightarrow{s} x \\ \lambda \to 0^+}} \frac{S-z}{\lambda}$ olduğu gösterilsin.

$$d \in \liminf_{\substack{z \xrightarrow{s} x \\ \lambda \to 0^+}} \frac{S-z}{\lambda} \iff \lim_{\substack{z \xrightarrow{s} x \\ \lambda \to 0^+}} d(d, \frac{S-z}{\lambda})$$

$$\iff \quad \forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, \delta > 0 \text{ öyle ki } \forall\, \lambda \in (0,\delta) \text{ ve}$$
$$\|z - x\| < \delta \text{ olan } \forall\, z \in S \text{ için}$$
$$d(d, \frac{S-z}{\lambda}) < \varepsilon$$

$$\iff \quad \forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, \delta > 0 \text{ öyle ki } \forall\, \lambda \in (0,\delta) \text{ ve}$$
$$\|z - x\| < \delta \text{ olan } \forall\, z \in S \text{ için}$$
$$d \in \frac{S-z}{\lambda} + \varepsilon B_X$$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall\ \varepsilon>0 \text{ için } \exists\ \delta>0 \text{ öyle ki } \forall\ \lambda\in(0,\delta) \text{ ve}\\
&\qquad \|z-x\|<\delta \text{ olan } \forall\ z\in S \text{ için}\\
&\qquad \lambda d\in S-z+\lambda\varepsilon B_X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall\ \varepsilon>0 \text{ için } \exists\ \delta>0 \text{ öyle ki } \forall\ \lambda\in(0,\delta) \text{ ve}\\
&\qquad \|z-x\|<\delta \text{ olan } \forall\ z\in S \text{ için}\\
&\qquad z+\lambda d\in S+\lambda\varepsilon B_X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall\ \varepsilon>0 \text{ için } \exists\ \delta>0 \text{ öyle ki } \forall\ \lambda\in(0,\delta) \text{ ve}\\
&\qquad \|z-x\|<\delta \text{ olan } \forall\ z\in S \text{ için}\\
&\qquad d(z+\lambda d,S)<\varepsilon\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall\ \varepsilon>0 \text{ için } \exists\ \delta>0 \text{ öyle ki } \forall\ \lambda\in(0,\delta) \text{ ve}\\
&\qquad \|z-x\|<\delta \text{ olan } \forall\ z\in S \text{ için}\\
&\qquad \frac{d(z+\lambda d,S)}{\lambda}<\varepsilon
\end{aligned}$$

$$\iff \lim_{\substack{z\xrightarrow{s}x\\ \lambda\to 0^+}} \frac{d(z+\lambda d,S)}{\lambda}=0$$

$$\iff d\in C(S,x)$$

O halde

$$C(S,x)=\liminf_{\substack{z\xrightarrow{s}x\\ \lambda\to 0^+}} \frac{S-z}{\lambda} \tag{4.1.2}$$

olur.

ii) $\liminf\limits_{\substack{z\xrightarrow{s}x\\ \lambda\to 0^+}} \dfrac{S-z}{\lambda}=\bigcap\limits_{\varepsilon>0}\bigcup\limits_{\delta>0}\bigcap\limits_{\substack{\|z-x\|<\delta\\ 0<\lambda<\delta\\ z\in S}}\left(\dfrac{S-z}{\lambda}+\varepsilon B_X\right)$ olduğu gösterilsin.

$$d \in \liminf_{\substack{z \xrightarrow{s} x \\ \lambda \to 0^+}} \frac{S-z}{\lambda} \iff \lim_{\substack{z \xrightarrow{s} x \\ \lambda \to 0^+}} d(d, \frac{S-z}{\lambda})$$

$\iff$ $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists\ \delta > 0$ öyle ki $\forall\ \lambda \in (0, \delta)$ ve $\|z - x\| < \delta$ olan $\forall\ z \in S$ için $d(d, \frac{S-z}{\lambda}) < \varepsilon$

$\iff$ $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists\ \delta > 0$ öyle ki $\forall\ \lambda \in (0, \delta)$ ve $\|z - x\| < \delta$ olan $\forall\ z \in S$ için $d \in \frac{S-z}{\lambda} + \varepsilon B_X$

$$\iff d \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\delta > 0} \bigcap_{\substack{\|z-x\| < \delta \\ 0 < \lambda < \delta \\ z \in S}} \left(\frac{S-z}{\lambda} + \varepsilon B_X \right)$$

O halde

$$\liminf_{\substack{z \xrightarrow{s} x \\ \lambda \to 0^+}} \frac{S-z}{\lambda} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\delta > 0} \bigcap_{\substack{\|z-x\| < \delta \\ 0 < \lambda < \delta \\ z \in S}} \left(\frac{S-z}{\lambda} + \varepsilon B_X \right) \tag{4.1.3}$$

olur.

iii)

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\delta > 0} \bigcap_{\substack{\|z-x\| < \delta \\ 0 < \lambda < \delta \\ z \in S}} \left(\frac{S-z}{\lambda} + \varepsilon B_X \right) = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{\substack{\|z-x\| < \frac{1}{n} \\ 0 < \lambda < \frac{1}{n} \\ z \in S}} \left(\frac{S-z}{\lambda} + \frac{1}{m} B_X \right)$$

olduğu gösterilsin.

$(\Longrightarrow)$ $d \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\delta > 0} \bigcap_{\substack{\|z-x\| < \delta \\ 0 < \lambda < \delta \\ z \in S}} \left(\frac{S-z}{\lambda} + \varepsilon B_X \right)$ verilsin. Bu durumda $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists\ \delta > 0$ öyle ki $\forall\ \lambda \in (0, \delta)$ ve $\|z - x\| < \delta$ olan $\forall\ z \in S$ için

$$d \in \frac{S-z}{\lambda} + \varepsilon B_X \tag{4.1.4}$$

olur.

Özel olarak $m \geq 1$ olan $\forall\ m \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$ seçilsin. Seçilen $\varepsilon = \dfrac{1}{m} > 0$ için (4.1.4)'den $\exists\ \delta > 0$ vardır öyle ki $\|z-x\| < \delta$ olan $\forall\ z \in S$ için

$$d \in \frac{S-z}{\lambda} + \varepsilon B_X$$

olur. Bu δ için $\exists\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ ve $0 < \dfrac{1}{n} < \delta$ olacak şekilde vardır. O halde $\forall\ m \geq 1$ için $\exists\ n \geq 1$ öyle ki $\forall\ \lambda \in (0, \dfrac{1}{n})$ ve $\|z-x\| < \dfrac{1}{n}$ olan $\forall\ z \in S$ için

$$d \in \frac{S-z}{\lambda} + \frac{1}{m} B_X$$

dolayısıyla

$$d \in \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{\substack{\|z-x\|<\frac{1}{n} \\ 0<\lambda<\frac{1}{n} \\ x\in S}} \left(\frac{S-z}{\lambda} + \frac{1}{m} B_X \right)$$

olur. Buradan

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{\substack{\|z-x\|<\delta \\ 0<\lambda<\delta \\ z\in S}} \left(\frac{S-z}{\lambda} + \varepsilon B_X \right) \subseteq \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{\substack{\|z-x\|<\frac{1}{n} \\ 0<\lambda<\frac{1}{n} \\ z\in S}} \left(\frac{S-z}{\lambda} + \frac{1}{m} B_X \right) \tag{4.1.5}$$

elde edilir.

$(\Longrightarrow)$ $d \in \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{\substack{0<\lambda<\frac{1}{n} \\ \|z-x\|<\frac{1}{n} \\ z\in S}} \left(\dfrac{S-z}{\lambda} + \dfrac{1}{m} B_X \right)$ alınsın. Bu durumda $\forall\ m \geq 1$ için $\exists\ n \geq 1$ vardır öyle ki $\forall\ \lambda \in (0, \frac{1}{n})$ ve $\|z-x\| < \delta$ olan $\forall\ z \in S$ için

$$d \in \frac{S-z}{\lambda} + \frac{1}{m} B_X \tag{4.1.6}$$

olur.

$\forall\ \varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda $\exists\ m \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{m} < \varepsilon$ olacak şekilde vardır. Bu seçilen m için (4.1.6) gereği $\exists\ n \geq 1$ sayısı $\forall\ \lambda \in (0, \frac{1}{n})$ ve $\|z-x\| < \frac{1}{n}$

olan $\forall\ z \in S$ için $d \in \dfrac{S-z}{\lambda} + \dfrac{1}{m}B_X$ olacak şekilde vardır. m'nin seçilişinden

$$d \in \frac{S-z}{\lambda} + \frac{1}{m}B_X \subseteq \frac{S-z}{\lambda} + \varepsilon B_X$$

olur. Özel olarak $\delta = \frac{1}{n}$ seçilirse

$$d \in \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{\substack{\|z-x\|<\delta \\ 0<\lambda<\delta \\ z\in S}} \left(\frac{S-z}{\lambda} + \varepsilon B_X \right)$$

dolayısıyla

$$\bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{\substack{\|z-x\|<\frac{1}{n} \\ 0<\lambda<\frac{1}{n} \\ z\in S}} \left(\frac{S-z}{\lambda} + \frac{1}{m}B_X \right) \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{\substack{\|z-x\|<\delta \\ 0<\lambda<\delta \\ z\in S}} \left(\frac{S-z}{\lambda} + \varepsilon B_X \right) \tag{4.1.7}$$

olur. O halde (4.1.5) ve (4.1.7) kapsamlarından istenilen eşitlik elde edilir.

□

4.2 Clarke Konilerin Özellikleri

Önerme 4.2.1. *X gerçel normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ ve $x \in cl(S)$ verilsin. $C(S,x)$ konvekstir.*

Kanıt. $C(S,x)$ bir koni olduğundan konveksliğini göstermek için $d^1, d^2 \in C(S,x)$ için $d^1 + d^2 \in C(S,x)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$x_n \to x$, $h_n \to 0^+$ olan keyfi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ve keyfi $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri seçilsin. $d^1 \in C(S,x)$ olduğundan $d_n^1 \to d^1$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n + h_n d_n^1 \in S$$

olan $\exists\ \left(d_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi vardır.

$\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_{1,n} := x_n + h_n d_n^1$ olarak tanımlansın. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_{1,n} \in S$ ve $x_{1,n} \to x$ olduğu açıktır. $d^2 \in C(S,x)$ olduğundan $d_n^2 \to d^2$ ve

$$\begin{aligned} x_{1,n} + h_n d_n^2 &= x_n + h_n d_n^1 + h_n d_n^2 \\ &= x_n + h_n(d_n^1 + d_n^2) \in S \end{aligned}$$

olan $(d_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi vardır. O halde $x_n \to x$, $h_n \to 0^+$ olan $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ve $\forall\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri için $d_n = d_n^1 + d_n^2 \to d^1 + d^2$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_n + h_n d_n \in S$ olan $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(d_n^1 + d_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi bulunduğundan $d^1 + d^2 \in C(S,x)$ olur. O halde $C(S,x)$ konvekstir. $\square$

Clarke koniler Contingent konilerin sağlamış olduğu bir çok kümesel işlemleri sağlamazlar.

X gerçel normlu uzay, $S \neq \emptyset,\ L \neq \emptyset,\ S, L \subseteq X$ altkümeleri ve $x \in cl(S)$ verildiğinde $S \subseteq L$ iken

$$C(S,x) \subseteq C(L,x)$$

olmak zorunda değildir.

Örnek 4.2.2. *$S = \{(x,-x) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$, $L = \{(x,|x|) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ kümeleri ve $(0,0) \in cl(S)$ verilsin.*

$d \leq 0$ olmak üzere $(d,-d) \in S$ verilsin. $(d_n,-d_n) \to (d,-d)$ olan $((d_n,-d_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ dizisi alınırsa $(x_n,x_n') \to (0,0)$ ve $h_n \to 0^+$ olan $\forall\ ((x_n,x_n'))_{n\in\mathbb{N}} = ((x_n,-x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}(x_n,-x_n) + h_n(d_n,-d_n) &= (x_n + h_n d_n, -x_n - h_n d_n)\\ &= (x_n + h_n d_n, -(x_n + h_n d_n)) \in S\end{aligned}$$

olduğundan $(d,-d) \in C(S,(0,0))$ olur. O halde

$$S \subseteq C(S,(0,0))$$

olur.

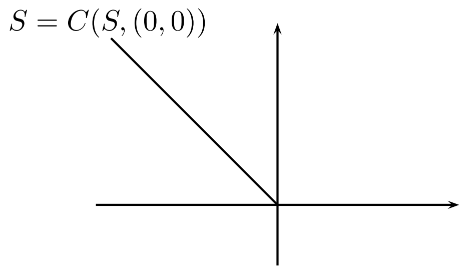
$\mathbb{R}^2 \backslash S$ kümesine ait elemanların Clarke koniye ait olmadığı açıktır. O halde

$$C(S,(0,0)) = S$$

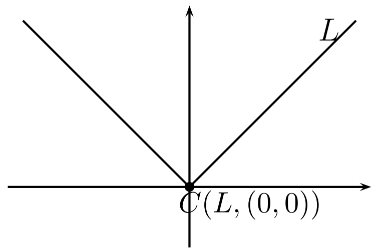
olur.

$C(L,(0,0)) = \{(0,0)\}$ olduğu açıktır.

$S \subseteq L$ olduğu halde $C(S,(0,0)) \nsubseteq C(L,(0,0))$ olur.



Şekil 4.10: $S = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$ kümesi ve $(0,0)$ noktasındaki Clarke konisi



Şekil 4.11: $L = \{(x, |x|) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ kümesi ve $(0,0)$ noktasındaki Clarke konisi

X gerçel normlu uzay, $S_1, S_2 \neq \emptyset$ $S_1, S_2 \subseteq X$ kümeleri ve $x \in S_1 \cap S_2$ verildiğinde

$$C(S_1 \cap S_2, x) \subseteq C(S_1, x) \cap C(S_2, x)$$

olmak zorunda değildir.

Örnek 4.2.3. *$X = \mathbb{R}^2$, $S_1 = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -x) : x \leq 0\}$ ve $S_2 = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ kümeleri verilsin.*

$$S_1 \cap S_2 = S_2\text{'dir.}$$

O halde

$$C(S_1 \cap S_2, (0,0)) = C(S_2, (0,0)) = S_2$$

$$C(S_1, (0,0)) = \{(0,0)\}$$

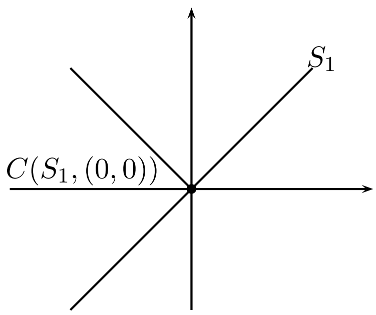
olur. Fakat

$$\begin{aligned} C(S_1,(0,0)) \cap C(S_2,(0,0)) &= \{(0,0)\} \cap S_2 \\ &= \{(0,0)\} \end{aligned}$$

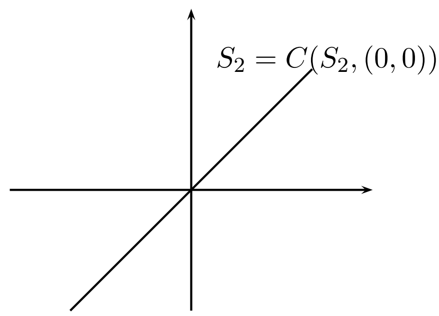
olduğundan

$$C(S_1 \cap S_2,(0,0)) \nsubseteq C(S_1,(0,0)) \cap C(S_2,(0,0))$$

olur.



Şekil 4.12: $S_1 = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,-x) : x \leq 0\}$ kümesi ve $(0,0)$ noktasındaki Clarke konisi



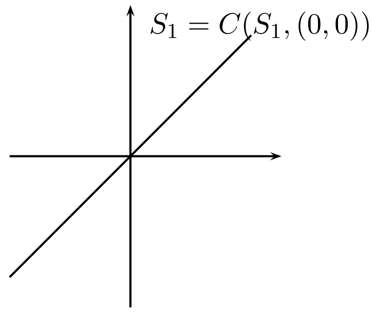
Şekil 4.13: $S_2 = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesi ve $(0,0)$ noktasındaki Clarke konisi

X gerçel normlu uzay, $S_1, S_2 \neq \emptyset$ $S_1, S_2 \subseteq X$ kümeleri ve $x \in S_1 \cup S_2$ verildiğinde

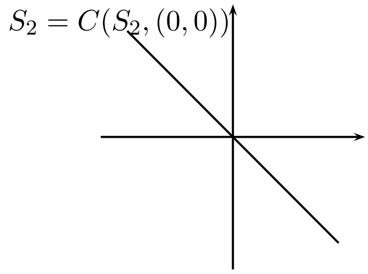
$$C(S_1 \cup S_2, x) = C(S_1, x) \cup C(S_2, x)$$

olmak zorunda değildir.

Örnek 4.2.4. $X = \mathbb{R}$, $S_1 = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$ *kümeleri verilsin.*



Şekil 4.14: $S_1 = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesi ve $(0,0)$ noktasındaki Clarke konisi



Şekil 4.15: $S_2 = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesi ve $(0,0)$ noktasındaki Clarke konisi

$$S_1 \cup S_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\right\}$$

olduğundan

$$C(S_1 \cup S_2, (0,0)) = \{(0,0)\}$$

elde edilir.

$$C(S_1,(0,0)) = S_1, \; C(S_2,(0,0)) = S_2$$

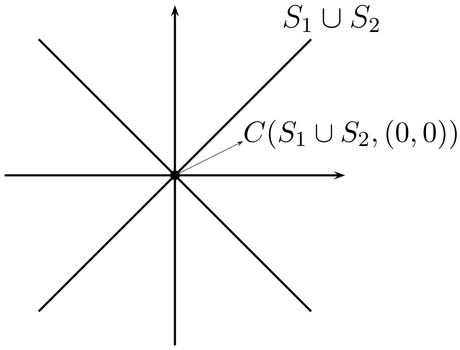
ve

$$C(S_1,(0,0)) \cup C(S_2,(0,0)) = S_1 \cup S_2$$

olur. O halde

$$C(S_1,(0,0)) \cup C(S_2,(0,0)) \neq C(S_1 \cup S_2,(0,0))$$

elde edilir.



Şekil 4.16: $S_1 \cup S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$ kümesi ve $(0, 0)$ noktasındaki Clarke konisi

Önerme 4.2.5. *X_1, X_2 gerçel normlu uzaylar $S_i \subseteq X_i$, $x_i \in cl(S_i)$ $(i = 1, 2)$ verilsin. Bu durumda*

$$C(S_1 \times S_2, (x_1, x_2)) = C(S_1, x_1) \times C(S_2, x_2)$$

olur.

Kanıt. $(d_1, d_2) \in C(S_1 \times S_2, (x_1, x_2))$ verilsin. Clarke koninin tanımından $(x_1^n, x_2^n) \to (x_1, x_2)$, $h_n \to 0^+$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $(x_1^n, x_2^n) + h_n(d_1^n, d_1^n) \in S_1 \times S_2$ olan $\forall\, ((x_1^n, x_2^n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_1 \times S_2$ ve $\forall\, (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri için $(d_1^n, d_2^n) \to (d_1, d_2)$ olan $\exists\, ((d_1^n, d_2^n))_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Bu durumda seçilen diziler ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$x_1^n + h_n d_1^n \in S_1 \text{ ve } x_2^n + h_n d_2^n \in S_2$$

olur. Buradan

$$d_1 \in C(S_1, x_1) \text{ ve } d_2 \in C(S_2, x_2)$$

dolayısıyla

$$(d_1, d_2) \in C(S_1, x_1) \times C(S_2, x_2)$$

elde edilir. O halde

$$C(S_1 \times S_2, (x_1, x_2)) \subseteq C(S_1, x_1) \times C(S_2, x_2) \tag{4.2.1}$$

elde edilir.

Ters kapsam da yukarıdaki kanıtta tersine gidilerek gösterilir. □

5 RADIAL KONİLER

5.1 Tanım ve Denk İfadeler

Tanım 5.1.1. *[14]*

a. *X gerçel normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ ve $x \in cl(S)$ verilsin.*
$d_n \to d$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n d_n \in S$ olan $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ve $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri varsa d vektörüne, S kümesinin x noktasındaki Radial teğeti denir.

b. *S kümesinin x'deki Radial teğetlerinin oluşturduğu kümeye S'nin x noktasındaki Radial konisi denir ve $R(S,x)$ ile gösterilir.*

Önerme 5.1.2. *X gerçel normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ ve $x \in cl(S)$ verilsin. Bu durumda*

$$R(S,x) = cl(\bigcup_{t>0} t(S-x)) = cl(cone(S-x))$$

olur.

Kanıt. Kanıt için ilk önce

$$R(S,x) = cl(\bigcup_{t>0} t(S-x))$$

daha sonra

$$cl(\bigcup_{t>0} t(S-x)) = cl(\text{cone}(S-x))$$

olduğu gösterilecektir. $d \in cl(\bigcup_{t>0} t(S-x))$ verilsin. Bu durumda kapanış tanımı gereği $d_n \to d$ olan $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \bigcup_{t>0} t(S-x)$ dizisi vardır. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $d_n \in \bigcup_{t>0} t(S-x)$ olduğundan $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $d_n \in t_n(S-x)$ olacak şekilde $\exists\ t_n > 0$ vardır. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$t_n = \frac{1}{h_n}$$

olarak alınırsa $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $h_n > 0$ ve

$$d_n \in \frac{1}{h_n}(S - x)$$

olduğundan

$$x + h_n d_n \in S$$

olur. Sonuç olarak $d_n \to d$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$x + h_n d_n \in S$$

olan $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$, $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ bulunabildiğinden $d \in R(S, x)$ dolayısıyla

$$cl(\bigcup_{t>0} t(S - x)) \subseteq R(S, x) \tag{5.1.1}$$

olur.

$d \in R(S, x)$ verilsin. Bu durumda $d_n \to d$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$x + h_n d_n \in S \tag{5.1.2}$$

olan $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$, $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizileri vardır. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için (5.1.2) gereği

$$d_n \in \frac{S - x}{h_n} \subseteq \bigcup_{t>0} t(S - x)$$

olur. O halde $d \in cl(\bigcup_{t>0} t(S - x))$ dolayısıyla

$$R(S, x) \subseteq cl(\bigcup_{t>0} t(S - x)) \tag{5.1.3}$$

olur. (5.1.1) ve (5.1.3) kapsamları kullanılarak

$$R(S, x) = cl(\bigcup_{t>0} t(S - x))$$

elde edilir.

$d \in \text{cone}(S - x) = \{y \in X : \exists\ s \in S \text{ ve } \exists\ \lambda > 0 \text{ için } y = \lambda(s - x)\}$ olsun. Bu durumda $\exists\ s \in S$ ve $\exists\ \lambda > 0$ için $d = \lambda(s - x)$ olur. Buradan $\exists\ \lambda > 0$ için

$$d = \lambda(s - x) \in \lambda(S - x) \subseteq \bigcup_{t>0} t(S - x)$$

olduğundan

$$\text{cone}(S-x) \subseteq \bigcup_{t>0} t(S-x) \tag{5.1.4}$$

olduğu görülür. Kanıt aynı şekilde tersine yapılırsa

$$\bigcup_{t>0} t(S-x) \subseteq \text{cone}(S-x) \tag{5.1.5}$$

olduğu görülür. (5.1.4) ve (5.1.5) kapsamlarından

$$\bigcup_{t>0} t(S-x) = \text{cone}(S-x)$$

elde edilir. Dolayısıyla

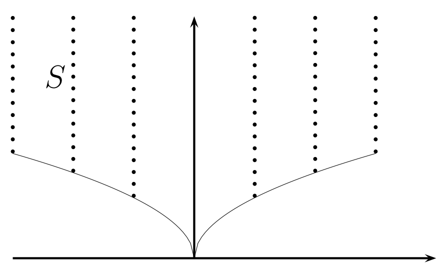
$$cl(\text{cone}(S-x)) = cl(\bigcup_{t>0} t(S-x))$$

olur. □

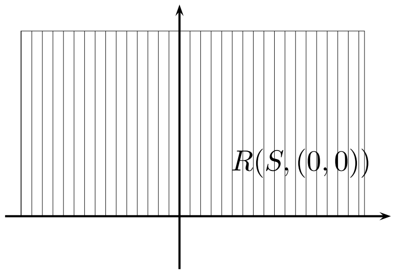
Örnek 5.1.3. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{|x|},\ x \in \mathbb{R}\}$ *kümesinin* $(x_1, x_2) = (0,0)$ *noktasındaki Radial konisi*

$$R(S,(0,0)) = cl(cone(S-(0,0))) = cl(cone(S)) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\}$$

olur.



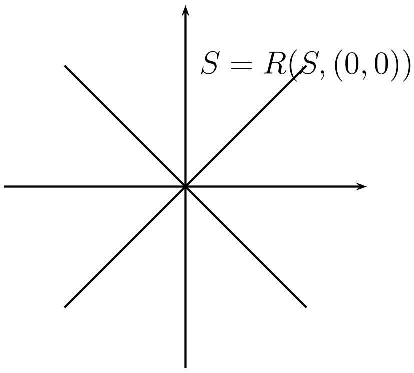
Şekil 5.17: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{|x|},\ x \in \mathbb{R}\}$ kümesi



Şekil 5.18: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{|x|},\ x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin $(0,0)$ noktasındaki Radial konisi

Örnek 5.1.4. *$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| = |y|\}$ kümesi verilsin.*

$$R(S,(0,0)) = cl(cone(S-(0,0))) = cl(cone(S)) = S \ \textit{olur.}$$

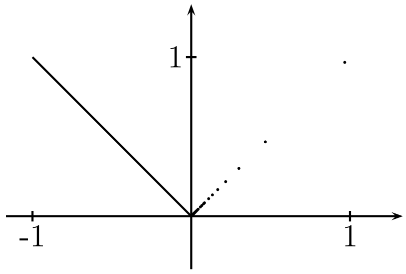


Şekil 5.19: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| = |y|\}$ kümesi ve $(0,0)$ noktasındaki Radial konisi

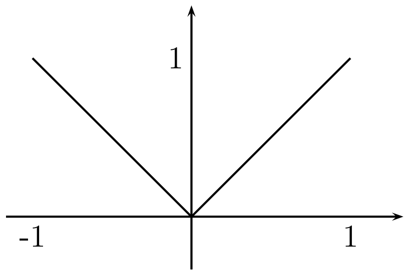
Örnek 5.1.5. *$S = \{(x,-x) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\} \cup \{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin $(0,0) \in S$ noktasındaki Radial konisi*

$$R(S,(0,0)) = cl(cone(S-(0,0))) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\right\}$$

olur.



Şekil 5.20: $S = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\} \cup \{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi



Şekil 5.21: $S = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\} \cup \{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin $(0, 0)$ noktasındaki Radial konisi

5.2 Radial Konilerin Özellikleri

Önerme 5.2.1. *$X,\ X_1,\ X_2$ gerçel normlu uzay olmak üzere*

a) $\emptyset \neq S \subseteq L \subseteq X$ *ve* $x \in cl(S)$ *ise* $R(S, x) \subseteq R(L, x)$

b) $\emptyset \neq S_i \subset X$, $(i = 1, 2)$ *ve* $x \in cl(S_i)$ *ise*

$$R(S_1 \cup S_2, x) = R(S_1, x) \cup R(S_2, x)$$

c) $\emptyset \neq S_i \subset X$, $(i = 1, 2)$ *ve* $x \in cl(S_1 \cap S_2)$ *ise*

$$R(S_1 \cap S_2, x) \subseteq R(S_1, x) \cap R(S_2, x)$$

d) $\emptyset \neq S_i \subset X_i$ *konveks kümeler,* $(i = 1, 2)$ *ve* $x_i \in cl(S_i)$ *ise*

$$R(S_1 \times S_2, (x_1, x_2)) = R(S_1, x_1) \times R(S_2, x_2)$$

e) $\emptyset \neq S_i \subset X_i$, $(i = 1, 2)$ *ve* $x_i \in cl(S_i)$ *ise*

$$R(S_1 + S_2, x_1 + x_2) \subseteq R(S_1, x_1) + R(S_2, x_2)$$

Kanıt. **a)** $x \in cl(S)$ verilsin. $S \subseteq L$ olduğundan $cl(S) \subseteq cl(L)$ olur. Dolayısıyla $x \in cl(L)$ elde edilir.

$d \in R(S,x)$ alınsın. Bu durumda $d_n \to d$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n d_n \in S$ olacak şekilde $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizileri vardır. $S \subseteq L$ olduğundan aynı diziler ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n u_n \in L$ olur. Dolayısıyla $d \in R(L,x)$ elde edilir.

b) $x \in cl(S_i)$ verilsin. $d \notin R(S_1,x) \cup R(S_2,x)$ alınsın. Bu durumda Önerme 5.1.2 gereği

$$d \notin cl(\bigcup_{t>0}) \ t(S_1 - x) \cup cl(\bigcup_{t>0} t(S_2 - x))$$

dolayısıyla

$$d \notin cl(\bigcup_{t>0}) \ t(S_1 - x) \text{ ve } d \notin cl(\bigcup_{t>0} t(S_2 - x))$$

olur. O halde

$$d \notin \bigcup_{t>0} t(S_1 - x)$$

ve

$$d \notin \bigcup_{t>0} t(S_2 - x)$$

olur. Buradan $\forall\ t > 0$ için

$$d \notin t(S_1 - x) \text{ ve } d \notin t(S_2 - x)$$

olduğundan

$$\frac{d}{t} + x \notin S_1 \text{ ve } \frac{d}{t} + x \notin S_2$$

olur. O halde

$$\frac{d}{t} + x \notin S_1 \cup S_2$$

elde edilir. Kümesel işlemler yapılırsa $\forall\ t > 0$ için

$$d \notin t((S_1 \cup S_2) - x)$$

dolayısıyla

$$d \notin \bigcup_{t>0} t((S_1 \cup S_2) - x)$$

olur. Buradan

$$R(S_1,x)\cup R(S_2,x)\supseteq \bigcup_{t>0} t((S_1\cup S_2)-x)$$

elde edilir. Kapsamda her iki taraftan kapanış alınırsa Radial koninin kapalı olmasından

$$cl(\bigcup_{t>0} t((S_1\cup S_2)-x) = R(S_1\cup S_2,x)) \subseteq R(S_1,x)\cup R(S_1,x) \quad (5.2.1)$$

olur.

Tersine $d\in R(S_1,x)\cup R(S_2,x)$ alınsın. $S_1\subseteq S_1\cup S_2$ ve $S_2\subseteq S_1\cup S_2$ olduğundan (a) özelliğinden

$$R(S_1,x)\subseteq R(S_1\cup S_2,x)$$

ve

$$R(S_2,x)\subseteq R(S_1\cup S_2,x)$$

, dolayısıyla $d\in R(S_1\cup S_2,x)$ olur. Buradan

$$R(S_1,x)\cup R(S_2,x)\subseteq R(S_1\cup S_2,x) \quad (5.2.2)$$

elde edilir.

Böylece (5.2.1) ve (5.2.2)'den

$$R(S_1\cup S_2,x)=R(S_1,x)\cup R(S_2,x)$$

olur.

c) $x\in cl(S_1\cap S_2)$ verilsin. $cl(S_1\cap S_2)\subseteq cl(S_1)\cap cl(S_2)$ olduğundan $x\in cl(S_1)\cap cl(S_2)$ dir.

$d\in R(S_1\cap S_2,x)$ verilsin. $S_1\cap S_2\subseteq S_1$, $S_1\cap S_2\subseteq S_2$ olduğundan ve (a) özelliğinden

$$R(S_1\cap S_2,x)\subseteq R(S_1,x)$$

ve

$$R(S_1 \cap S_2, x) \subseteq R(S_2, x)$$

olur. Buradan

$$R(S_1 \cap S_2, x) \subseteq R(S_1, x) \cap R(S_2, x)$$

elde edilir.

d) $x_i \in cl(S_i)$, $i = 1, 2$ verilsin. Bu durumda $(x_1, x_2) \in cl(S_1 \times S_2)$ olur.

$(d_1, d_2) \in R(S_1 \times S_2, (x_1, x_2))$ alınsın. Bu durumda $(d_1^n, d_2^n) \to (d_1, d_2)$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $(x_1, x_2) + h_n(d_1^n, d_2^n) \in S_1 \times S_2$ olan $(d_1^n, d_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \times X$ ve $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri vardır. O halde bu diziler ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x_1 + h_n d_1^n \in S_1$ ve $x_2 + h_n d_2^n \in S_2$ olur. $d_1^n \to d_1$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x_1 + h_n d_1^n \in S_1$ olan $(d_1^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_1$ ve $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri bulunduğundan

$$d_1 \in R(S_1, x_1) \tag{5.2.3}$$

olur.

Aynı şekilde $d_2^n \to d_2$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x_2 + h_n d_2^n \in S_2$ olan $(d_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_2$ ve $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri bulunduğundan

$$d_2 \in R(S_2, x_2) \text{ olur.} \tag{5.2.4}$$

O halde (5.2.3) ve (5.2.4)'den

$$(d_1, d_2) \in R(S_1, x_1) \times R(S_2, x_2)$$

olur.

Böylece

$$R(S_1 \times S_2, (x_1, x_2)) \subseteq R(S_1, x_1) \times R(S_2, x_2) \tag{5.2.5}$$

elde edilir.

$(d^1, d^2) \in R(S_1, x_1) \times R(S_2, x_2)$ olsun. Bu durumda $d^1 \in R(S_1, x_1)$ ve $d_2 \in R(S_2, x_2)$ olur.

$d_1 \in R(S_1, x_1)$ olduğundan Radial koninin tanımından $d_n^1 \to d^1$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_1 + h_n^1 d_n^1 \in S_1$ olan $\exists\ (d_n^1)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X_1$ ve $\exists\ (h_n^1)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri vardır. $d^2 \in R(S_2, x_2)$ olduğundan $d_n^2 \to d^2$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_2 + h_n^2 d_n^2 \in S_2$ olan $\exists\ (d_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X_2$ ve $\exists\ (h_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri vardır. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$h_n = \min\{h_n^1, h_n^2\}$$

olarak alınırsa S_1 ve S_2 kümeleri konveks olduğundan $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_1 + h_n d_n^1 \in S_1$ ve $x_2 + h_n d_n^2 \in S_2$ yani $(x_1 + h_n d_n^1, x_2 + h_n d_n^2) \in S_1 \times S_2$ olur. O halde $(d_n^1, d_n^2) \to (d^1, d^2)$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $(x_1 + h_n d_n^1, x_2 + h_n d_n^2) \in S_1 \times S_2$ olan $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\exists\ ((d_n^1, d_n^2))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X_1 \times X_2$ dizileri bulunabildiğinden

$$(d_1, d_2) \in R(S_1 \times S_2, (x_1, x_2))$$

elde edilir. O halde

$$R(S_1, x_1) \times R(S_2, x_2) \subseteq R(S_1 \times S_2, (x_1, x_2)) \tag{5.2.6}$$

olur.

(5.2.5) ve (5.2.6) kapsamlarından

$$R(S_1 \times S_2, (x_1, x_2)) = R(S_1, x_1) \times R(S_2, x_2)$$

olur.

e) $d^1 + d^2 \notin R(S_1, x_1) + R(S_2, x_2)$ olsun. Bu durumda $d^1 \notin R(S_1, x_1)$ veya $d^2 \notin R(S_2, x_2)$ olur. Buradan $d_n^1 \to d^1$ olan $\forall\ (d_n^1)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ve $\forall\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri için $\exists\ n_1 \in \mathbb{N}$

$$x_1 + h_{n_1} d_{n_1}^1 \notin S_1 \tag{5.2.7}$$

olacak şekilde vardır veya $d_n^2 \to d^2$ olan $\forall\ (d_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ve $\forall\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri için $\exists\ n_2 \in \mathbb{N}$

$$x_2 + h_{n_2} d_{n_2}^2 \notin S_2 \tag{5.2.8}$$

olacak şekilde vardır. (5.2.7) ve (5.2.8) kullanılarak

$$x_1 + x_2 + h_{n_1}(d^1_{n_1} + d^2_{n_2}) \notin S_1 + S_2$$

elde edilir. Bu ise $d_1 + d_2 \notin R(S_1 + S_2, x_1 + x_2)$ olması demektir. O halde

$$R(S_1 + S_2, x_1 + x_2) \subseteq R(S_1, x_1) + R(S_2, x_2) \tag{5.2.9}$$

olur.

□

Önerme 5.2.2. *X, Y normlu uzaylar, $A \in B(X, Y)$ sürekli, doğrusal dönüşüm, $\emptyset \neq S \subseteq X$ kümesi, $x \in cl(S)$ verilsin. Bu durumda*

$$cl(A(R(S, x))) = R(A(S), A(x))$$

olur.

Kanıt. $u \in A(R(S, x))$ verilsin. Bu durumda $A(y) = u$ olan $\exists\ y \in R(S, x)$ vardır. $y \in R(S, x)$ olduğundan $y_n \to y$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$x + h_n y_n \in S$$

olan $\exists\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ve $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri vardır. O halde koşulu sağlayan diziler ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için A lineer dönüşüm olduğundan

$$\begin{aligned} A(x + h_n y_n) &\in A(S) \\ A(x) + h_n(y_n) &\in A(S) \end{aligned}$$

olur. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$d_n = A(y_n)$$

olarak alınırsa A doğrusal dönüşümü sürekli olduğundan $A(y_n) = u_n \to A(u)$ olur. Sonuç olarak $u_n \to A(u)$ v e$\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$A(x) + h_n u_n \in A(S)$$

olan $\exists\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ ve $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ bulunabildiğinden

$$A(u) \in R(A(S), A(x))$$

olur. Dolayısıyla

$$A(R(S,x)) \subseteq R(A(S),A(x))$$

ve Radial koni kapalı olduğundan

$$cl(A(R(S,x))) \subseteq R(A(S),A(x)) \tag{5.2.10}$$

elde edilir.

Önerme 5.1.2 gereği

$$R(S,x) = cl(\bigcup_{t>0} t(S-x))$$

olduğu biliniyor.

$$S - x \subseteq \bigcup_{t>0} t(S-x) \subseteq cl(\bigcup_{t>0} t(S-x)) = R(S,x)$$

olduğundan

$$S \subseteq \{x\} + R(S,x)$$

dolayısıyla A doğrusal dönüşüm olduğundan

$$A(S) \subseteq A(x) + A(R(S,x)) \tag{5.2.11}$$

ele edilir.

$d \in R(A(S),A(x))$ verilsin. Koninin tanımından $d_n \to d$ ve

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \text{ için } A(x) + h_n d_n \in A(S) \tag{5.2.12}$$

olan $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ ve $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri vardır.

(5.2.12) ve (5.2.11) kapsamları kullanılarak $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$A(x) + h_n d_n \in A(S) \subseteq A(x) + A(R(S,x))$$

olur. Buradan $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $d_n \in A(R(S,x))$ olduğundan $d \in cl(A(R(S,x)))$ elde edilir. O halde

$$R(A(S),A(x)) \subseteq cl(A(R(S,x))) \tag{5.2.13}$$

olur.

(5.2.10) ve (5.2.13) kapsamlarından

$$cl(A(R(S,x))) = R(A(S), A(x))$$

elde edilir. $\square$

5.3 Konilerin Karşılaştırılması

Önerme 5.3.1. *X gerçel normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ ve $x \in S$ verilsin. Bu durumda*

$$C(S,x) \subseteq T(S,x) \subseteq R(S,x)$$

olur.

Kanıt. $d \in C(S,x)$ verilsin. Bu durumda $x_n \to x$, $h_n \to 0^+$ olan $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ ve $\forall\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri için $d_n \to d$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_n + h_n d_n \in S$ o lan $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi vardır. Özel olarak $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x)_{n\in\mathbb{N}}$ olarak seçilirse $h_n \to 0^+$ olan $\forall\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizisi ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n + h_n d_n = x + h_n d_n \in S$$

olur. O halde $h_n \to 0^+$, $d_n \to d$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n d_n \in S$ olan $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizileri bulunabildiğinden $d \in T(S,x)$ olur. Buradan

$$C(S,x) \subseteq T(S,x) \tag{5.3.1}$$

olur. $d \in T(S,x)$ verilsin. Bu durumda $h_n \to 0^+$, $d_n \to d$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n d_n \in S$ olan $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizileri vardır. O halde Radial koninin tanımından $d_n \to d$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n d_n \in S$ olan $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizileri bulunabildiğinden $d \in R(S,x)$ yani

$$T(S,x) \subseteq R(S,x) \tag{5.3.2}$$

olur.

O halde (5.3.1) ve (5.3.2) kapsamlarından

$$C(S,x) \subseteq T(S,x) \subseteq R(S,x)$$

olur. $\square$

Önerme 5.3.2. *X gerçel normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ konveks kümesi ve $x \in cl(S)$ verilsin. Bu durumda*

$$C(S,x) = T(S,x) = R(S,x)$$

olur.

Kanıt.

$$C(S,x) \subseteq T(S,x) \subseteq R(S,x)$$

olduğundan eşitliği göstermek için $R(S,x) \subseteq C(S,x)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $d \in \bigcup\limits_{t>0} t(S-x)$ verilsin. Bu durumda $d = h(y-x)$ olan $\exists\ h > 0$ ve $\exists\ y \in S$ vardır. $x \in cl(S)$ olarak seçildiğinden $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in S$ ve $x_n \to x$ olan $\exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ dizisi vardır. $x_n \to x$ ve $h_n \to 0^+$ olan $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$d_n = h(y - x_n)$$

olarak tanımlansın. $d_n \to d$ olur. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n + h_n d_n = x_n + h_n h(y - x_n) = x_n(1 - hh_n) + hh_n y$$

olur. S konveks olduğundan $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n d_n \in S$ elde edilir. Sonuç olarak $x_n \to x$, $h_n \to 0^+$ olan $\forall\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ dizileri için $d_n \to d$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_n + h_n d_n \in S$ olan $\exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi bulunabildiğinden $d \in C(S,x)$ olur. O halde

$$\bigcup_{t>0} t(S-x) \subseteq C(S,x)$$

dolayısıyla $C(S,x)$ kapalı bir koni olduğundan

$$cl(\bigcup_{t>0} t(S-x)) = R(S,x) \subseteq C(S,x)$$

elde edilir. $\square$

Tanım 5.3.3. *X normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ ve $x \in S$ verilsin. $\forall\ y \in S$ ve $\forall\ \lambda \in [0,1]$ için*

$$x + \lambda(y - x) \in S$$

oluyorsa S kümesine x'in bir komşuluğunda starshaped denir.

Önerme 5.3.4. *X normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ ve $x \in S$ verilsin. S kümesi x noktasının bir komşuluğunda starshaped ise*

$$R(S,x) = T(S,x)$$

olur.

Kanıt.

$$T(S,x) \subseteq R(S,x)$$

olduğu Önerme 5.3.1'de gösterildiğinden eşitlik için

$$R(S,x) \subseteq T(S,x)$$

kapsamının gösterilmesi yeterlidir.

$\forall\ d \in S - x$ verilsin. Bu durumda $d = y - x$ olan $\exists\ y \in S$ vardır. S kümesi x noktasının bir komşuluğunda strashaped olduğundan $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$x + \frac{1}{n}(y - x) \in S$$

olur. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ dizisi $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n := x + \frac{1}{n}(y - x)$$

olarak tanımlansın. $x_n \to x$ olduğu açıktır.

$$\lim_{n\to\infty} n(x_n - x) = y - x$$

olduğundan

$$d = y - x \in T(S,x)$$

yani

$$S - x \subseteq T(S,x)$$

olur. $T(S,x)$ kapalı bir koni olduğundan

$$R(S,x) = cl(cone(S-x)) \subseteq T(S,x)$$

elde edilir.

$\square$

Önerme 5.3.5. *X gerçel normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ ve $x \in cl(S)$ verilsin. Bu durumda*

$$C(S,x) + T(S,x) \subseteq T(S,x)$$

olur.

Kanıt. $d \in C(S,x) + T(S,x)$ olsun. Bu durumda $d = d^1 + d^2$ olan $\exists\ d^1 \in C(S,x)$ ve $\exists\ d^2 \in T(S,x)$ vardır. $d^2 \in T(S,x)$ olduğundan $h_n \to 0^+$, $d_n^2 \to d^2$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n d_n^2 \in S$ olan $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\left(d_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizileri vardır.

$\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n := x + h_n d_n^2$$

olarak tanımlansın. $d_n^1 \to d^1$, $x_n \to x$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in S$ olur. $d^1 \in C(S,x)$ olduğundan $x_n \to x$ ve $h_n \to 0^+$ olan $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ ve $\forall\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizileri için $d_n^1 \to d^1$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_n + h_n d_n^1 \in S$ olan $(d_n^1)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi vardır. Özel olarak yukarıda seçilen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri için de koşulları sağlayan $(d_n^1)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi vardır. O halde seçilen diziler ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} x_n + h_n d_n^1 &= x + h_n d_n^2 + h_n d_n^1 \\ &= x + h_n(d_n^1 + d_n^2) \in S \end{aligned}$$

olur.

Sonuç olarak $h_n \to 0^+$, $d_n = d_n^1 + d_n^2 \to d^1 + d^2 = d$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n d_n \in S$ olan $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\exists\ \left(d_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizileri bulunabildiğinden $d = d^1 + d^2 \in T(S,x)$ olur. Dolayısıyla

$$C(S,x) + T(S,x) \subseteq T(S,x)$$

elde edilir. $\square$

Önerme 5.3.6. *X normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ konveks küme ve*

$$D(S,y) = conv(S \cup \{y\}) = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} (y + \lambda(S - y))$$

olmak üzere $z \in D(S,y) \setminus S$ ise $\exists\ k_z > 0$ için

$$k_z(S - y) \subseteq S - z$$

olur. Dolayısıyla $S - y \subseteq \bigcup_{\lambda > 0} \lambda(S - z)$ olur.

Kanıt. $z \in D(S,y) \setminus S$ verilsin. Bu durumda $\exists\ k_z \in (0,1]$ ve $\exists\ v_z \in S$ vardır öyle ki

$$z = k_z y + (1 - k_z)v_z$$

olur. $\forall\ s \in S$ için

$$\begin{aligned} z + k_z s &= k_z y + (1 - k_z)v_z + k_z s \\ z + k_z s - k_z y &= k_z s + (1 - k_z)v_z \end{aligned}$$

olur. $s,\ v_z \in S$ ve S konveks olduğundan $z + k_z s - k_z y = k_z s + (1 - k_z)v_z \in S$ elde edilir. Buradan $\forall\ s \in S$ için

$$\begin{aligned} & k_z(s - y) && \in && S - z \\ \Longrightarrow\ & k_z(S - y) && \subseteq && S - z \\ \Longrightarrow\ & S - y && \subseteq && \frac{S - z}{k_z} \end{aligned}$$

$\frac{1}{k_z} = \lambda$ olarak alınırsa

$$S - y \subseteq \bigcup_{0 < \lambda} \lambda(S - z)$$

olur. □

Teorem 5.3.7. *[5] X Banach uzayı, $\emptyset \neq S \subseteq X$ kapalı, $\emptyset \neq D \subseteq X$ sınırlı, kapalı, konveks ve $d(S,D) > 0$ olsun. Bu durumda verilen $s_0 \in S$ için*

$$S \cap conv(\{s\} \cup D) = \{s\}$$

olan $\exists\ s \in S \cap conv(\{s_0\} \cup D)$ elemanı vardır.

Önerme 5.3.8. *X gerçel normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ kapalı küme, $x \in cl(S)$ verilsin. $v \in X \setminus C(S,x)$ ise $\forall\ U \in \mathcal{N}(x)$ için $\exists\ V \in \mathcal{N}(v)$ konveks kümesi, $\exists\ \lambda > 0$ sayısı ve $\exists\ z,\ y \in U \cap S$ elemanları $z \notin y+\lambda V$ ve $D(y+\lambda V, z) \cap S = \{z\}$ olacak şekilde vardır.*

Kanıt. $v \in X \setminus C(S,x)$ verilsin. O halde Önerme 4.1.2'den $\exists\ V \in \mathcal{N}(v)$ kümesi $\forall\ U \in \mathcal{N}(x)$ ve $\forall\ t > 0$ için $\exists\ y \in U \cap S$ ve $\exists\ \lambda \in (0,t)$ öyle ki $(y+\lambda V) \cap S = \emptyset$ olur.

V kümesi yeterince küçük bir r sayısı için $V = B(v,r)$ olarak yazılabilir. Verilen $U' \in \mathcal{N}(x)$ için $B(x, 2\delta) \subseteq U'$ olacak şekilde $\exists\ \delta > 0$ sayısı vardır.

$U = B(x,\delta)$, $t = (\|v\| + r)^{-1}\delta$, $w \in D(y+\lambda V, y)$ ve $\lambda \in (0,t)$ olsun.

$$w = \theta(y + \lambda u) + (1-\theta)y$$

olacak şekilde $\exists\ \theta \in [0,1]$ ve $\exists\ u \in V$ vardır.

$$\begin{aligned}
\|x - w\| &= \|x - \theta(y+\lambda u) - (1-\theta)y\| \\
&= \|x - \theta y - \theta\lambda u - y + \theta y\| \\
&= \|x - y - \theta\lambda u\| \\
&\leq \|x - y\| + \theta\lambda\|u\| \\
&\leq \|x - y\| + \lambda(\|u - v\| + \|v\|) \\
&\leq \delta + \lambda(r + \|v\|) \\
&\leq \delta + t(r + \|v\|) \\
&= \delta + (\|v\| + r)^{-1}\delta(r + \|v\|) \\
&= 2\delta
\end{aligned}$$

olduğundan

$$w \in U' \tag{5.3.3}$$

elde edilir. $y+\lambda V$ kapalı, sınırlı, konveks bir kümedir. O halde Teorem (5.3.7) gereği $\exists\ z \in D(y+\lambda V, y)$ elemanı $D(y+\lambda V, z) \cap S = \{z\}$ ve $z \notin y+\lambda V$ olacak şekilde vardır. (5.3.3)'den $z \in U' \cap S$ elde edilir. O halde $y \in U \cap S \subseteq U' \cap S$ olduğundan $y \in U' \cap S$ dir. $\square$

Teorem 5.3.9. *X gerçel normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ kapalı küme $x \in S$ olsun. Bu durumda*

$$\liminf_{z \xrightarrow{S} x} T(S,z) \subseteq C(S,x)$$

olur.

Kanıt. $v \notin C(S,x)$ iken $v \notin \liminf_{z \xrightarrow{S} x} T(S,z)$ olduğu gösterilirse istenilen kapsamın gerçeklendiği görülmüş olur. Önerme 5.3.8 gereği $\exists\, V \in \mathcal{N}(v)$ konveks kümesi $\forall\, U \in \mathcal{N}(x)$ verildiğinde $\exists\, z, y \in U \cap S$ ve $\exists\, \lambda > 0$ için $z \in D(y+\lambda V, y)$, $z \notin y + \lambda V$ ve $D(y+\lambda V, z) \cap S = \{z\}$ olacak şekilde vardır. O halde

$$\begin{aligned} k(y+\lambda V - y) &\subseteq y + \lambda V - z \\ \lambda V &\subseteq \frac{1}{k}\,(y+\lambda V - z) \\ \frac{1}{\lambda}\,\lambda V &\subseteq \frac{1}{k\lambda}\,(y+\lambda V - z) \end{aligned}$$

olur. $0 \leq \mu \leq k\lambda$ alınırsa

$$\mu V \subseteq \frac{\mu}{k\lambda}(y+\lambda V - z) \tag{5.3.4}$$

olur. $\dfrac{\mu}{k\lambda} = \gamma$ alınırsa $0 < \gamma \leq 1$ elde edilir. Kapsam (5.3.4) gereği

$$\bigcup_{0 \leq \mu \leq k\lambda} \mu V \;\subseteq\; \bigcup_{0<\gamma\leq 1} \gamma(y+\lambda V - z)$$

$$\text{ve} \quad z + \bigcup_{0<\gamma\leq 1} \gamma(y+\lambda V - z) \;\subseteq\; D(y+\lambda V, z) \setminus \{z\}$$

olur.

O halde

$$(D(y+\lambda V, z) \setminus \{z\}) \cap S = \emptyset$$

olduğundan

$$(z + \bigcup_{0 \leq \mu \leq k\lambda} \mu V) \cap S = \emptyset$$

olur. O halde $\forall\ 0 \leq \mu \leq k\lambda$ için

$$(z + \mu V) \cap S = \emptyset$$

elde edilir. Böylece $\forall\ \mu \in (0, k\lambda)$ için

$$(z + \mu V) \cap S = \emptyset$$

olan $\exists\ V \in \mathcal{N}(v)$, $\exists\ k > 0$ ve $\exists\ \lambda > 0$ bulunmuş olur. Bu ise $v \notin T(S,z)$ olması demektir. Bu durum $\forall\ U \in \mathcal{N}(x)$ ve $\forall\ z \in U \cap S$ için sağlandığından ve T(S,z) kapalı koni olduğundan

$$\lim_{z \to x} d(v, T(S,z)) \neq 0$$

olur. Buradan

$$v \notin \liminf_{z \xrightarrow{S} x} T(S,z)$$

olur. Böylece

$$\liminf_{z \xrightarrow{S} x} T(S,z) \subseteq C(S,x) \tag{5.3.5}$$

elde edilir. □

Sonuç 5.3.10. *X gerçel normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ kapalı kümesi verilsin. $u : S \to X$ sürekli fonksiyonu verilsin. Bu durumda*

$$\forall\ x \in S \text{ için } u(x) \in T(S,x) \iff \forall\ x \in S \text{ için } u(x) \in C(S,x)$$

olur.

Kanıt.

($\Longleftarrow$) Konilerin tanımından $C(S,x) \subseteq T(S,x)$ olduğu açıktır. O halde $\forall\ u(x) \in C(S,x)$ için $u(x) \in T(S,x)$ elde edilir.

($\Longrightarrow$) $\forall\ x \in S$ için $u(x) \in T(S,x)$ olsun. u sürekli fonksiyon olduğundan

$$\lim_{z \xrightarrow{S} x} u(z) = u(x)$$

olur.

$$u(z) \in T(S, z)$$

olduğundan

$$u(x) \in \liminf_{z \xrightarrow{S} x} T(S, z)$$

olur. Teorem 5.3.9 gereği

$$u(x) \in \liminf_{z \xrightarrow{S} x} T(S, z) \subseteq C(S, x)$$

elde edilir. □

Teorem 5.3.11. *X sonlu boyutlu vektör uzayı, $S \subseteq X$ kapalı küme olsun. Bu durumda $\forall\ x \in S$ için*

$$\liminf_{z \xrightarrow{S} x} T(S, z) = C(S, x)$$

olur.

Kanıt. Verilen koşullar altında

$$\liminf_{z \xrightarrow{S} x} T(S, z) \subseteq C(S, x)$$

olduğu Teorem 5.3.9'da gösterildi. O halde eşitliğin gösterilmesi için

$$C(S, x) \subseteq \liminf_{z \xrightarrow{S} x} T(S, z)$$

kapsamının gösterilmesi yeterlidir.

$v \in C(S, x)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{\substack{x_n \xrightarrow{S} x \\ h \to 0^+}} \frac{d(x_n + hv, S)}{h} = 0$$

olur. O halde limit tanımı gereği $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists\ \beta > 0$ ve $\exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ h \in (0, \beta]$ ve $\forall\ n \geq N$ için

$$d(x_n + hv, S) \leq h\varepsilon$$

olur. Bu durumda $\forall\ h \in (0, \beta]$ ve $\forall\ n \geq N$ için

$$\left\| y_n^h - x_n - hv \right\| \leq h\varepsilon$$

olan $\exists\ y_n^h \in S$ vardır. $\forall\ h \in (0, \beta]$ ve $\forall\ n \geq N$ için

$$v_n^h := \frac{y_n^h - x_n}{h}$$

olarak tanımlasın. Bu durumda

$$\left\| v_n^h - v \right\| \leq \varepsilon$$

olur. X sonlu boyutlu olduğundan $v + \varepsilon \overline{B}_X$ kompakt bir kümedir. $\forall\ h \in (0, \beta]$ ve $\forall\ n \geq N$ için $v_n^h \in v + \varepsilon \overline{B}_X$ olduğundan $(v_n^h)_{h>0}$ ağı $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için bu kompakt küme içinde yığılma noktasına sahiptir. Bu yığılma noktaları $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $v_n \in v + \varepsilon \overline{B}_X$ olsun. Bu durumda $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$v_n \in T(S, x_n)$$

olur. O halde $x_n \to x$ olan $\forall\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S$ dizisi için $v_n \to v$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $v_n \in T(S, x_n)$ olan $\exists\ (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bulunduğundan

$$v \in \liminf_{y \xrightarrow{S} x} T(S, y)$$

olur. Buradan

$$C(S, x) \subseteq \liminf_{y \xrightarrow{S} x} T(S, y)$$

elde edilir.

$\square$

Kümelerin konveks olması durumunda tüm koniler birbirine eşit olduklarından Contingent konilerdeki konveks durumların incelendiği tüm özellikler Radial ve Clarke koniler için de geçerlidir.

6 KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN TÜREVİ

6.1 Contingent Türev

Tanım 6.1.1. *[1,2,4-7,9,10,13,16]* $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ *gerçel normlu uzaylar,* $F : X \rightrightarrows Y$ *küme değerli dönüşüm olsun.* $(\bar{x}, \bar{y}) \in gr(F)$ *verilsin.*

$$gr(D_C F(\bar{x}, \bar{y})) = T(gr(F), (\bar{x}, \bar{y}))$$

eşitliğini sağlayan

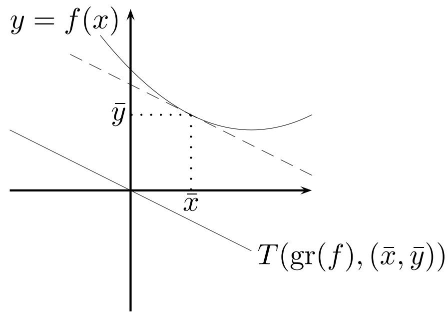
$$D_C F(\bar{x}, \bar{y}) : X \rightrightarrows Y$$

küme değerli dönüşümüne F'in $(\bar{x}, \bar{y})$ *noktasındaki Contingent türevi denir.*

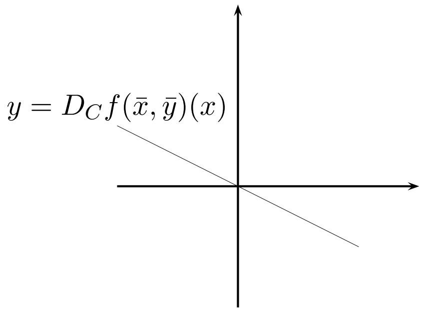
F küme değerli dönüşümü yerine $\bar{x}$ noktasında Frechet türevlenebilen ve $f'(\bar{x})$ türevi örten olan tek değerli f dönüşümü alınırsa Lyusternic teoreminden

$$\begin{aligned} T(\mathrm{gr}(f), (\bar{x}, f(\bar{x}))) &= T(\{(x,y) \in X \times Y : f(x) - y = 0\}, (\bar{x}, f(\bar{x}))) \\ &= \{(x,y) \in X \times Y : f'(\bar{x})(x) - y = 0\} \\ &= \mathrm{gr}(f'(\bar{x})) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki Frechet türevi ve $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ noktasındaki Contingent türevi birbirine eşittir.



Şekil 6.22: f fonksiyonu ve $\mathrm{gr}(f)$'in $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasındaki Contingent konisi



Şekil 6.23: f fonksiyonunun $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasındaki Contingent türevi

Önerme 6.1.2. *$(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ gerçel normlu uzaylar $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşüm ve $(x, y) \in gr(F)$ olsun. Bu durumda*

$$D_C F^{-1}(y, x) = D_C F(x, y)^{-1}$$

olur.

Kanıt. $\forall\ v \in Y$ için $\forall\ u \in D_C F^{-1}(y, x)(v)$ verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(v, u) \in \mathrm{gr}(D_C F^{-1}(y, x)) \quad &\Longleftrightarrow \quad (v, u) \in T(\mathrm{gr}(F^{-1}), (y, x)) \\
&\Longleftrightarrow \quad h_n \to 0^+,\ (v_n, u_n) \to (v, u) \text{ ve } \forall\ n \in \mathbb{N} \text{ için} \\
&\qquad\ (y, x) + h_n(v_n, u_n) \in \mathrm{gr}(F^{-1}) \text{ olacak şekilde} \\
&\qquad\ \exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+ \text{ ve } ((v_n, u_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y \times X \\
&\qquad\ \text{dizileri vardır.} \\
&\Longleftrightarrow \quad (y + h_n v_n, x + h_n u_n) \in \mathrm{gr}(F^{-1}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \text{ için } x + h_n u_n \in F^{-1}(y + h_n v_n) \\
&\Longleftrightarrow \quad y + h_n v_n \in F(x + h_n u_n) \\
&\Longleftrightarrow \quad (u, v) \in T(\mathrm{gr}(F), (x, y)) \\
&\Longleftrightarrow \quad v \in D_C F(x, y)(u) \\
&\Longleftrightarrow \quad u \in D_C F(x, y)^{-1}(v)
\end{aligned}$$

□

Tanım 6.1.3. *[4, 5] $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ normlu uzaylar $f : X \to Y$ fonksiyonu ve $K \subseteq X$ verilsin. f fonksiyonunun K kümesine kısıtlanmış fonksiyonu* *ile bir küme değerli dönüşüm şu şekilde tanımlanabilir:* $\forall\ x \in X$ *için*

$$F(x) = f\mid_K(x) = \begin{cases} \{f(x)\} & , \quad x \in K \\ \emptyset & , \quad x \notin K \end{cases}$$

Önerme 6.1.4. *$(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ normlu uzaylar $f : X \to Y$ fonksiyonu ve $K \subseteq X$ verilsin. f fonksiyonu $x \in K$ noktasının bir komşuluğunda diferansiyellenebilir ise*

$$D_C f|_K(x) = D_C f|_K(x, f(x)) = f'(x)|_{T(K,x)}$$

olur.

Kanıt. $\forall\ u \in X$ için

$$D_C f|_K(x, f(x))(u) = f'(x)|_{T(K,x)}(u)$$

olduğu gösterilmelidir.

$u \notin K$ ise aşikardır.

$u \in K$ olsun. $v \in D_C f|_K(x, f(x))(u)$ alınırsa

$$(u, v) \in \mathrm{gr}(D_C f|_K(x, f(x))) = T(\mathrm{gr}(f|_K), (x, f(x)))$$

olur. Contingent koni tanımından $h_n \to 0^+$, $(u_n, v_n) \to (u, v)$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $(x, f(x)) + h_n(u_n, v_n) \in \mathrm{gr}(f|_K)$ olacak şekilde $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $((u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \times Y$ dizileri vardır. Bu durumda seçilen diziler ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n u_n \in K$ ise

$$f(x) + h_n v_n \in f|_K(x + h_n u_n) = f(x + h_n u_n)$$

olur. Dolayısıyla $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n u_n \in K$ iken

$$v_n = \frac{f(x + h_n u_n) - f(x)}{h_n}$$

elde edilir. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n u_n \in K$ olduğunda $u \in T(K, x)$ olur. Her iki taraftan limit alınırsa

$$v = \lim_{n\to\infty} v_n = f'(x)(u)$$

olur ki bu da

$$v \in f'(x)|_{T(K,x)}(u)$$

olması demektir. O halde

$$D_C f|_K(x, f(x))(u) \subseteq f'(x)|_{T(K,x)}(u) \tag{6.1.1}$$

elde edilir. İspat ters yönde ilerletilirse $\forall\ u \in X$ için

$$f'(x)|_{T(K,x)}(u) \subseteq D_C f|_K(x, f(x))(u) \tag{6.1.2}$$

elde edilir. O halde (6.1.1) ve (6.1.2)'den $\forall\ u \in X$ için

$$f'(x)|_{T(K,x)}(u) = D_C f|_K(x, f(x))(u)$$

olur. Buradan

$$f'(x)|_{T(K,x)} = D_C f|_K(x, f(x))$$

elde edilir. □

Önerme 6.1.5. *$(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ normlu uzaylar, $\Omega \subseteq X$ açık küme olmak üzere $f : \Omega \to Y$ fonksiyonu ve $M : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü verilsin. $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü $\forall\ x \in X$ için*

$$F(x) := f(x) - M(x)$$

olarak tanımlansın.

f fonksiyonu $\forall\ x \in \Omega \cap dom(M)$ için Ferchet diferansiyellenebilirse $\forall\ y \in F(x)$ ve $\forall\ u \in X$ için

$$D_C F(x, y)(u) = f'(x)(u) - D_C M(x, f(x) - y)(u)$$

olur.

Kanıt. $\forall\ v \in D_C F(x, y)(u)$ verilsin. Bu durumda

$$(u, v) \in \mathrm{gr}(D_C F(x, y)) = T(\mathrm{gr}(F), (x, y))$$

olur. Contingent koninin tanımından

$h_n \to 0^+$, $(u_n, v_n) \to (u, v)$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $(x, y) + h_n(u_n, v_n) \in \mathrm{gr}(F)$ olacak şekilde $\exists\, (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $((u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \times Y$ dizileri vardır. O halde bu diziler ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$y + h_n v_n \in F(x + h_n u_n) = f(x + h_n u_n) - M(x + h_n u_n) \tag{6.1.3}$$

olur. f Frechet diferansiyellenebilir olduğundan

$$f(x + h_n u_n) = f(x) + h_n(f'(x)(u) + \varepsilon(h_n))$$

ve $h_n \to 0$ iken $\varepsilon(h_n) \to 0$ olacak şekilde $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

$f(x + h_n u_n)$ değeri (6.1.3)'de yerine yazılırsa

$$y + h_n v_n \in f(x) + h_n(f'(x)(u) + \varepsilon(h_n)) - M(x + h_n u_n)$$

olur. Buradan

$$f(x) - y - h_n v_n + h_n(f'(x)(u) + \varepsilon(h_n)) \in M(x + h_n u_n)$$

olduğundan

$$f(x) - y + h_n(f'(x)(u) - v_n + \varepsilon(h_n)) \in M(x + h_n u_n)$$

elde edilir. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$\omega_n := f'(x)(u) - v_n + \varepsilon(h_n)$$

olarak alınırsa $\omega_n \to f'(x)(u) - v$ olduğu açıktır. $h_n \to 0^+$ ve $\omega_n \to f'(x)(u) - v$ olan $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$, $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$f(x) - y + h_n \omega_n \in M(x + h_n u_n)$$

olduğundan

$$(x + h_n u_n, f(x) - y + h_n \omega_n) \in \mathrm{gr}(M)$$

olur. O halde

$$(u, f'(x)(u) - v) \in T(\mathrm{gr}(M), (x, f(x) - y)) = \mathrm{gr}(D_C M(x, f(x) - y))$$

elde edilir. Buradan

$$f'(x)(u) - v \in D_C M(x, f(x) - y)$$

dolayısıyla $v \in f'(x)(u) - D_C M(x, f(x) - y)(u)$ elde edilir. O halde

$$D_C F(x,y)(u) \subseteq f'(x)(u) - D_C M(x, f(x) - y)(u) \tag{6.1.4}$$

olur.

$\forall\ v \in f'(x)(u) - D_C M(x, f(x) - y)(u)$ verilsin. Bu durumda

$$(u, f'(x)(u) - v) \in \mathrm{gr}(D_C M(x, f(x) - y)) = T(\mathrm{gr}(M), (x, f(x) - y))$$

olur. Contingent koninin tanımından $h_n \to 0^+$, $(u_n, \omega_n) \to (u, f'(x)(u) - v)$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $(x, f(x) - y) + h_n(u_n, \omega_n) \in \mathrm{gr}(M)$ olacak şekilde $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $((u_n, \omega_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \times Y$ dizileri vardır. O halde bu diziler ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$f(x) - y + h_n\omega_n \in M(x + h_n u_n) \tag{6.1.5}$$

olur. f Frechet diferansiyellenebilir olduğundan

$$f(x + h_n u_n) = f(x) + h_n(f'(x)(u) + \varepsilon(h_n)) \tag{6.1.6}$$

ve $h_n \to 0$ iken $\varepsilon(h_n) \to 0$ olacak şekilde $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

$\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon(h_n) \to 0$ olmak üzere

$$v_n := f'(x)(u) + \varepsilon(h_n) - \omega_n$$

olarak tanımlayalım. $v_n \to v$ olduğu açıktır. Tanımda ω_n çekilirse

$$\omega_n = f'(x)(u) + \varepsilon(h_n) - v_n$$

olur. ω_n, (6.1.5)'de yerine yazılır ve (6.1.6) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& f(x) - y + h_n(f'(x)(u) + \varepsilon(h_n) - v_n) \in M(x + h_n u_n) \\
\Longrightarrow\ & f(x) - y + f(x + h_n u_n) - f(x) - h_n v_n \in M(x + h_n u_n) \\
\Longrightarrow\ & y + h_n v_n \in f(x + h_n u_n) - M(x + h_n u_n) = F(x + h_n u_n) \\
\Longrightarrow\ & (x + h_n u_n, y + h_n v_n) \in \mathrm{gr}(F) \\
\Longrightarrow\ & (u, v) \in T(\mathrm{gr}(F), (x, y)) = \mathrm{gr}(D_C F(x, y)) \\
\Longrightarrow\ & v \in D_C F(x, y)(u)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$f'(x)(u) - D_C M(x, f(x) - y)(u) \subseteq D_C F(x, y)(u) \tag{6.1.7}$$

elde edilir. (6.1.4) ve (6.1.7) kullanılarak istenilen eşitlik elde edilir. $\square$

Tanım 6.1.6. *[4, 5] X normlu uzay, $\emptyset \neq S \subseteq X$ ve $x \in cl(S)$ verilsin.*

$$\begin{aligned} A(S,x) = \{d \in X : \ & h_n \to 0^+ \text{ olan } \forall\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+ \text{ dizisi için } d_n \to d \text{ ve} \\ & \forall\ n \in \mathbb{N} \text{ için } x + h_n d_n \in S \text{ olan } \exists\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \\ & \text{dizisi vardır.}\} \end{aligned}$$

kümesi Nagumo konisi olarak adlandırılır.

Eğer $T(S,x) = A(S,x)$ ise S kümesine x noktasında derivable denir.

Tanım 6.1.7. *[4] X, Y normlu uzaylar, $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü verilsin. $\forall\ x_1,\ x_2 \in U$ için*

$$F(x_1) \subseteq F(x_2) + l\,\|x_1 - x_2\|\,\overline{B}_Y$$

olan x'in bir $U \subseteq dom(F)$ komşuluğu ve $\exists\ l > 0$ varsa F küme değerli dönüşümüne x noktasında yerel Lipschitz ya da U kümesi üzerinde l-Lipschitz denir.

Önerme 6.1.8. $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ *normlu uzaylar, $\Omega \subseteq X$ açık küme olmak üzere $f : \Omega \to Y$ fonksiyonu ve $M : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü, $L \subseteq X$ kümesi verilsin. $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü $\forall\ x \in X$ için*

$$F(x) := \begin{cases} f(x) - M(x) & , \quad x \in L \\ \emptyset & , \quad x \notin L \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

f fonksiyonu $x \in \Omega \cap dom(F)$ noktasında Frechet diferansiyellenebilir ise $\forall\ y \in F(x)$ ve $\forall\ u \in X$ için

$$D_C F(x,y)(u) \subseteq \begin{cases} f'(x)(u) - D_C M(x, f(x) - y)(u) & , \quad u \in T(L,x) \\ \emptyset & , \quad u \notin T(L,x) \end{cases}$$

olur.

Eşitlik ise L'nin x noktasında derivable ve M dönüşümünün x noktasının bir komşuluğunda Lipschitz olması durumunda gerçekleşir.

Kanıt. $\forall\, v \in D_C F(x,y)(u)$ verilsin. Bu durumda

$$(u,v) \in \mathrm{gr}(D_C F(x,y)) = T(\mathrm{gr}(F),(x,y))$$

olur. O halde $h_n \to 0^+,\ (u_n,v_n) \to (u,v)$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$(x,y) + h_n(u_n,v_n) \in \mathrm{gr}(F)$$

olacak şekilde $\exists\, (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $((u_n,v_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \times Y$ dizileri vardır.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n u_n \in L$ ise

$$y + h_n v_n \in F(x + h_n u_n) = f(x + h_n u_n) - M(x + h_n u_n) \tag{6.1.8}$$

olur. Aynı zamanda $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n u_n \in L$ ise $u \in T(L,x)$ olur.

f Frechet diferansiyellenebilir olduğundan

$$f(x + h_n u_n) = f(x) + h_n(f'(x)(u) + \varepsilon(h_n))$$

ve $h_n \to 0$ iken $\varepsilon(h_n) \to 0$ olacak şekilde ε fonksiyonu vardır. $f(x + h_n u_n)$'i (6.1.8)'de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & y + h_n v_n \in f(x) + h_n(f'(x)(u) + \varepsilon(h_n)) - M(x + h_n u_n) \\ \Longrightarrow\ & f(x) - y + h_n(f'(x)(u) + \varepsilon(h_n) - v_n) \in M(x + h_n u_n) \end{aligned}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$\omega_n := f'(x)(u) + \varepsilon(h_n) - v_n$$

olarak alınırsa $\omega_n \to f'(x)(u) - v$ olduğu açıktır. Seçilen diziler ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} f(x) - y + h_n\omega_n &\in M(x + h_n u_n) \\ \Longrightarrow\ (x + h_n u_n, f(x) - y + h_n\omega_n) &\in \mathrm{gr}(M) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
(u,v) &\in T(\mathrm{gr}(M),(x,f(x)-y)) = \mathrm{gr}(D_C M(x,f(x)-y)) \\
\Longrightarrow\ f'(x)(u)-v &\in D_C M(x,f(x)-y)(u) \\
\Longrightarrow\ v &\in f'(x)(u) - D_C M(x,f(x)-y)(u)
\end{aligned}$$

olur. O halde $u \in T(L,x)$ iken

$$D_C F(x,y)(u) \subseteq f'(x)(u) - D_C M(x,f(x)-y)(u) \tag{6.1.9}$$

elde edilir.

Tersine L, x noktasında derivable ve M, x'in bir komşuluğunda Lipschitz olsun. $\forall\ u \in T(L,x)$ ve $\forall\ v \in f'(x)(u) - D_C M(x,f(x)-y)(u)$ verilsin. Bu durumda

$$f'(x)(u) - v \in D_C M(x,f(x)-y)(u)$$

olduğundan

$$(u, f'(x)(u)-v) \in \mathrm{gr}(D_C M(x,f(x)-y)) = T(\mathrm{gr}(M),(x,f(x)-y))$$

elde edilir. L derivable olduğundan $T(L,x) = A(L,x)$ ve $u \in T(L,x)$ olduğundan $\lambda_n \to 0^+$ olan $\forall\ (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizisi için $u_n \to u$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + \lambda_n u_n \in L$ olacak şekilde $\exists\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi vardır.

$(u, f'(x)(u)-v) \in T(\mathrm{gr}(M),(x,f(x)-y))$ olduğundan $h_n \to 0^+$, $\bar{u}_n \to u$, $\omega_n \to f'(x)(u)-v$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$(x + h_n\bar{u}_n, f(x) - y + h_n\omega_n) \in \mathrm{gr}(M)$$

olan $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ ve $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizleri vardır.

M, x noktasında Lipschitz olduğundan $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$f(x) - y + h_n\bar{\omega}_n \in M(x + h_n u_n) \tag{6.1.10}$$

ve $\bar{\omega}_n \to f'(x)(u) - v$ olacak şekilde $\exists\ (\bar{\omega}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ dizisi vardır.

f Frechet diferansiyellenebilir olduğundan

$$f(x + h_n u_n) = f(x) + h_n(f'(x)(u) + \varepsilon(h_n))$$

ve $h_n \to 0$ iken $\varepsilon(h_n) \to 0$ olacak şekilde ε fonksiyonu vardır. Bu ε fonksiyonu kullanılarak

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \text{ için } v_n = f'(x)(u) + \varepsilon(h_n) - \bar{\omega}_n \tag{6.1.11}$$

dizisi tanımlansın. $v_n \to v$ olduğu açıktır.

(6.1.10) ve (6.1.11) eşitliği kullanılarak $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$f(x) - y + h_n(f'(x)(u) + \varepsilon(h_n) - v_n) \in M(x + h_n u_n)$$

olur. Buradan

$$y + h_n v_n \in f(x + h_n u_n) - M(x + h_n u_n)$$

dolayısıyla

$$(u, v) \in \mathrm{gr}(D_C F(x, y))$$

elde edilir. O halde

$$v \in D_C F(x, y)(u)$$

olduğundan

$$f'(x)(u) - D_C M(x, f(x) - y)(u) \subseteq D_C F(x, y)(u) \tag{6.1.12}$$

olur.

(6.1.9) ve (6.1.12) kapsamlarından istenilen eşitlik elde edilir. □

Önerme 6.1.9. $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ *normlu uzaylar,* $F : X \rightrightarrows Y$ *küme değerli dönüşüm ve* $(x, y) \in gr(F)$ *olsun. Bu durumda*

a)

$$v \in D_C F(x, y)(u) \iff \liminf_{\substack{h \to 0^+ \\ u' \to u}} d\left(v, \frac{F(x + hu') - y}{h}\right) = 0$$

b) $x \in int(dom(F))$ *ve* F *x'in bir komşuluğunda Lipschitz ise*

$$v \in D_C F(x, y)(u) \iff \liminf_{h \to 0^+} d\left(v, \frac{F(x + hu) - y}{h}\right) = 0$$

c) Y *sonlu boyutlu ve* l, F *küme değerli dönüşümünün* x *noktasındaki Lipschitz sabiti ise* $dom(D_C F(x, y)) = X$ *ve* $D_C F(x, y)$, $l-$*Lipschitz olur.*

Kanıt. **a)**

($\Longrightarrow$) $v \in D_C F(x,y)(u)$ verilsin. Bu durumda

$$(u,v) \in \mathrm{gr}(D_C F(x,y)) = T(\mathrm{gr}(F),(x,y))$$

olur. Bu durumda Önerme 2.1.13 gereği $\forall\ \varepsilon > 0$ ve $\forall\ \delta > 0$ için $\exists\ \lambda \in (0,\delta)$ öyle ki $\|u_\varepsilon\|_X < \varepsilon$ ve $\|v_\varepsilon\|_Y < \varepsilon$ olan $u_\varepsilon \in X$ ve $v_\varepsilon \in Y$ için

$$(x + \lambda(u+u_\varepsilon), y + \lambda(v+v_\varepsilon)) \in \mathrm{gr}(F)$$

olur. Buradan

$$y + \lambda(v+v_\varepsilon) \in F(x+\lambda(u+u_\varepsilon))$$

$$\Longrightarrow \quad v + v_\varepsilon \in \frac{F(x) + \lambda(u+u_\varepsilon - y)}{\lambda}$$

$$\Longrightarrow \quad d\left(v, \frac{F(x+\lambda(\overbrace{u+u_\varepsilon}^{u'})) - y}{\lambda}\right) < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \sup_{\delta>0} \inf_{\substack{0<\lambda<\delta \\ \|u'-u\|<\varepsilon}} d\left(v, \frac{F(x+\lambda u') - y}{\lambda}\right) < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \liminf_{\substack{\lambda \to 0 \\ u' \to u}} d\left(v, \frac{F(x+\lambda u') - y}{\lambda})\right) = 0$$

($\Longleftarrow$) Kanıt aynı şekilde tersine de ilerletilebilir.

b)

($\Longrightarrow$) $v \in D_C F(x,y)(u)$ olsun. $\forall\ u' \in X$ ve verilen $u \in X$ için h sayısı yeterince küçük seçilerek $x + hu$ ve $x + hu'$ vektörleri F fonksiyonunun Lipschitz olduğu x'in komşuluğunun içine düşürülebilir. Lipschitz sabiti

l olarak alınırsa Lipschitz olma tanımından

$$F(x+hu) \subseteq F(x+hu') + lh \|u-u'\| \overline{B}_Y$$

olur. Buradan

$$\frac{F(x+hu)-y}{h} \subseteq \frac{F(x+hu')-y}{h} + l \|u-u'\| \overline{B}_Y$$

olur. O halde

$$d(v, \frac{F(x+hu)-y}{h}) \leq d(v, \frac{F(x+hu')-y}{h}) + l \|u-u'\|$$

olduğundan ve önermedeki a şıkkı kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{\substack{h \to 0^+ \\ u' \to u}} d(v, \frac{F(x+hu)-y}{h}) \\ &\leq \liminf_{\substack{h \to 0^+ \\ u' \to u}} d(v, \frac{F(x+hu')-y}{h}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\liminf_{\substack{h \to 0^+ \\ u' \to u}} d(v, \frac{F(x+hu)-y}{h}) = \liminf_{h \to 0^+} d(v, \frac{F(x+hu)-y}{h}) = 0$$

olur.

($\Longleftarrow$) $\liminf_{h \to 0^+} d(v, \frac{F(x+hu)-y}{h}) = 0$ olsun. $\forall\ u' \in X$ ve verilen $u \in X$ için h sayısı yeterince küçük seçilerek $x+hu$ ve $x+hu'$ vektörleri F fonksiyonunun Lipschitz olduğu x'in komşuluğunun içine düşürülebilir. Lipschitz sabiti l olarak alınırsa Lipschitz olma tanımından

$$F(x+hu') \subseteq F(x+hu) + lh \|u-u'\| \overline{B}_Y$$

olur. Buradan

$$\frac{F(x+hu')-y}{h} \subseteq \frac{F(x+hu)-y}{h} + l \|u-u'\| \overline{B}_Y$$

olur. O halde

$$d(v, \frac{F(x+hu')-y}{h}) \leq d(v, \frac{F(x+hu)-y}{h}) + l\,\|u-u'\|$$

olduğundan ve kabulden

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{\substack{h\to 0^+\\ u'\to u}} d(v, \frac{F(x+hu')-y}{h}) \\ &\leq \liminf_{\substack{h\to 0^+\\ u'\to u}} d(v, \frac{F(x+hu)-y}{h}) \\ &= \liminf_{h\to 0^+} d(v, \frac{F(x+hu)-y}{h}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\liminf_{\substack{h\to 0^+\\ u'\to u}} d(v, \frac{F(x+hu')-y}{h}) = 0$$

olur. Önermenin a şıkkından

$$v \in D_C F(x,y)(u)$$

elde edilir.

c)

$$\mathrm{dom}(D_C F(x,y)) \subseteq X \tag{6.1.13}$$

olduğu açıktır. Bu nedenle $\mathrm{dom}(D_C F(x,y)) = X$ olduğunu göstermek için $X \subseteq \mathrm{dom}(D_C F(x,y))$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$u \in X$ verilsin. h sayısı yeterince küçük seçilerek $x+hu$ vektörü x'in Lipschitz olduğu komşuluğuna düşürülebilir. O halde

$$F(x) \subseteq F(x+hu) + lh\,\|u\|\,\overline{B}_Y$$

olur. $y \in F(x)$ alındığında yukarıdaki kapsamdan

$$y \in F(x+hu) + lh \|u\| \overline{B}_Y$$

elde edilir. Bu durumda yeterince küçük $\forall\ h > 0$ için $y = y_h + hv_h$ olacak şekilde $\exists\ y_h \in F(x+hu)$ ve $\exists\ v_h \in l \|u\| \overline{B}_Y$ vardır. Buradan

$$v_h = \frac{-y + y_h}{h} \in l \|u\| \overline{B}_Y$$

ve $l \|u\| \overline{B}_Y$ kompakt olduğundan v_h ağının $l \|u\| \overline{B}_Y$ kümesinde bir yığılma noktası vardır. Bu nokta v olsun. Yukarıdaki durum yeterince küçük $\forall\ h > 0$ için sağlandığından $h_n \to 0$ olan $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizisinin tüm terimleri için de sağlanır. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$v_{h_n} = \frac{-y + y_{h_n}}{h_n}$$

olarak tanımlansın. v, $(v_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin de bir yığılma noktasıdır. Bu durumda $(v_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin v'ye yakınsayan bir alt dizisi vardır. Genelliği bozmandan bu alt dizi $(v_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ olsun. Bu durumda $(v_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin tanımlanışından $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$y + h_n v_{h_n} \in F(x + h_n u)$$

olur. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $u_n = u$ olan $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sabit dizisi alınırsa $h_n \to 0$, $(u_n, v_{h_n}) \to (u, v)$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$(x, y) + h_n(u_n, v_{h_n}) \in \mathrm{gr}(F)$$

olduğundan

$$(u, v) \in T(\mathrm{gr}(F), (x, y)) = \mathrm{gr}(D_C F(x, y))$$

olur. Buradan $v \in D_C F(x, y)(u)$ dolayısıyla $u \in \mathrm{dom}(D_C F(x, y))$ elde edilir. Bu nedenle

$$X \subseteq \mathrm{dom}(D_C F(x, y))$$

olur. Sonuç olarak

$$X = \operatorname{dom}(D_C F(x,y))$$

elde edilir.

Y sonlu boyutlu ve l, F küme değerli dönüşümünün Lipschitz sabiti olsun. u_1, $u_2 \in X$ olsun. Bir $v_1 \in D_C F(x,y)(u_1)$ seçilsin. Bu durumda $(u_1, v_1) \in \operatorname{gr}(D_C F(x,y)) = T(\operatorname{gr}(F),(x,y))$ olur. O halde $v_{1,n} \to v_1$, $h_n \to 0^+$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$(x,y) + h_n(u_n, v_{1,n}) \in \operatorname{gr}(F)$$

olan $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $\exists\ (v_{1,n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ dizileri vardır. O halde bu diziler ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$y + h_n v_{1,n} \in F(x + h_n u_1)$$

olur.

$z_n \in F(x + h_n u_2)$ olsun. yeterince büyük n doğal sayıları için $x + h_n u_1$ ve $x + h_n u_2$, F küme değerli dönüşümünün Lipschitz olduğu x noktasının komşuluğu içine düşer. O halde yeterince büyük n doğal sayısı için,

$$\|z_n - y - h_n v_{1,n}\| \leq l\,\|h_n\|\,\|u_1 - u_2\| \tag{6.1.14}$$

olur. O halde $\left(\dfrac{z_n - y}{h_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi sınırlı olur. Dolayısıyla bu dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu yakınsak alt dizi genelliği bozmadan

$$\left(\frac{z_n - y}{h_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

olarak verilsin ve dizinin yakınsadığı nokta v_2 olsun. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{z_n - y}{h_n} = v_{2,n}$$

olarak alınırsa $v_{2,n} \to v_2$ olur. Ayrıca $h_n \to 0^+$ ve $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin seçilişinden $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$z_n = y + h_n v_{2,n} \in F(x + h_n u_2)$$

olduğundan $(u_2, v_2) \in= T(\text{gr}(F), (x, y)) = \text{gr}(D_C F(x, y))$ olur. Buradan $v_2 \in D_C F(x, y)(u_2)$ elde edilir. (6.1.14) eşitsizliğinden

$$\|v_1 - v_2\| \leq l \, \|u_1 - u_2\|$$

olur.

Sonuç olarak verilen $u_1,\ u_2 \in X$ ve $v_1 \in D_C F(x, y)(u_1)$ için

$$\|v_1 - v_2\| \leq l \, \|u_1 - u_2\|$$

olan $\exists\ v_2 \in D_C F(x, y)(u_2)$ bulunabildiğinden $D_C F(x, y)$ küme değerli dönüşümü l-Lipschtizdir.

□

6.2 Contingent Türevin Tanım Kümesi

Önerme 6.2.1. *$(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ normlu uzaylar $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşüm $(x, y) \in gr(F)$ olsun. Bu durumda*

$$cl(dom(D_C F(x, y))) \subseteq T(dom(F), x)$$

olur. Ek olarak F küme değerli dönüşümü $(x, y) \in gr(F)$ noktasında pseudo-konveks ise

$$cl(dom(D_C F(x, y))) = T(dom(F), x)$$

olur.

Kanıt. $\forall\ u \in \text{dom}(D_C F(x, y))$ verilsin. Bu durumda $v \in D_C F(x, y)(u)$ olacak şekilde $\exists\ v \in Y$ vardır. O halde $(u, v) \in \text{gr}(D_C F(x, y)) = T(\text{gr}(F), (x, y))$ olur. Contingent koninin tanımından $h_n \to 0^+$, $(u_n, v_n) \to (u, v)$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$(x, y) + h_n(u_n, v_n) \in \text{gr}(F)$$

olacak şekilde $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\exists\ ((u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \times Y$ dizileri vardır. Bu durumda $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$y + h_n v_n \in F(x + h_n u_n)$$

olduğundan

$$x + h_n u_n \in \text{dom}(F)$$

olur. Dolayısıyla

$$u \in T(\text{dom}(F), x)$$

elde edilir. O halde

$$\text{dom}(D_C F(x, y)) \subseteq T(\text{dom}(F), x)$$

ve Contingent koni kapalı olduğundan

$$cl(\text{dom}(D_C F(x, y))) \subseteq T(\text{dom}(F), x) \tag{6.2.1}$$

olur.

F, $(x, y) \in \text{gr}(F)$ noktasında pseudo-konveks olsun.

$$\pi_X : X \to Y$$

projeksiyon fonksiyonu olmak üzere

$$\text{dom}(F) = \pi_X(\text{gr}(F))$$

olduğu açıktır. Önerme 2.2.5 kullanılarak

$$\begin{aligned} cl(\text{dom}(D_C F(x, y))) &= cl(\pi_X(\text{gr}(D_C F(x, y)))) \\ &= cl(\pi_X(T(\text{gr}(F), (x, y)))) \\ &= T(\pi_X(\text{gr}(F)), \pi_X((x, y))) \\ &= T(\text{dom}(F), x) \end{aligned}$$

elde edilir. □

6.3 Contingent Türevin Çekirdeği

Tanım 6.3.1. *[4] $(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ normlu uzaylar $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşüm $(x, y) \in gr(F)$ olsun.*

$$Ker(D_C F(x, y)) := D_C F(x, y)^{-1}(0)$$

kümesine Contingent türevin çekirdeği denir.

Tanım 6.3.2. *[4] $X,\ Y$ normlu uzaylar, $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü ve $x \in X,\ y \in F(x)$ verilsin. $\forall\ x_1, x_2 \in U$ için*

$$F(x_1) \cap V \subseteq F(x_2) + l \, \|x_1 - x_2\| \, \overline{B}_Y$$

olan x'in bir $U \subseteq dom(F)$ komşuluğu, y'nin bir V komşuluğu ve $\exists\ l > 0$ sayısı bulunabiliyorsa F küme değerli dönüşümüne $(x, y) \in gr(F)$ noktasının komşuluğunda pseudo-Lipschitz denir.

Önerme 6.3.3. *$(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ normlu uzaylar $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşüm $(x, y) \in gr(F)$ olsun. Bu durumda*

$$T(F^{-1}(y), x) \subseteq Ker(D_C F(x, y))$$

olur. Ek olarak F^{-1}, (y, x) noktasının bir komşuluğunda pseudo-Lipschitz ise

$$T(F^{-1}(y), x) = Ker(D_C F(x, y))$$

olur.

Kanıt. $\forall\, z \in T(F^{-1}(y), x)$ alınsın. Bu durumda Contingent koninin tanımından $h_n \to 0^+$, $z_n \to z$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x + h_n z_n \in F^{-1}$ olan $\exists\ (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\exists\ (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ dizileri vardır. Buradan seçilen diziler ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $(x + h_n z_n, y) \in \mathrm{gr}(F)$ olur.

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \text{ için } u_n = 0$$

dizisini tanımlarsak

$$(x + h_n z_n, y + h_n u_n) \in \mathrm{gr}(F)$$

olur. Dolayısıyla

$$(z, 0) \in T(\mathrm{gr}(F), (x, y)) = \mathrm{gr}(D_C F(x, y))$$

buradan

$$z \in D_C F(x, y)^{-1}(0)$$

elde edilir. O halde

$$T(F^{-1}(y), x) \subseteq D_C F(x,y)^{-1}(0) = \mathrm{Ker}(D_C F(x,y)) \tag{6.3.1}$$

olur.

F^{-1}, (y, x) noktasının bir komşuluğunda pseudo-Lipschitz olsun. $\forall\ z \in \mathrm{Ker}(D_C F(x,y)) = D_C F(x,y)^{-1}(0)$ alınsın. Bu durumda

$$(z, 0) \in \mathrm{gr}(D_C F(x,y)) = T(\mathrm{gr}(F), (x,y))$$

olur. O halde $h_n \to 0^+$, $(z_n, u_n) \to (z, 0)$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$(x + h_n z_n, y + h_n u_n) \in \mathrm{gr}(F)$$

olan $\exists\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R^n$ ve $((z_n, u_n))_{nin\mathbb{N}} \subseteq X \times Y$ dizileri vardır. Buradan $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$y + h_n u_n \in F(x + h_n z_n)$$

olur.

F^{-1}, (y, x) noktasında pseudo-Lipschitz olduğundan $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $\exists\ l > 0$ ve $\exists\ x_n{}' \in F^{-1}(y)$ öyle ki

$$\|x_n{}' - x - h_n z_n\| \leq l\,\|y - y - h_n u_n\| = l h_n\,\|u_n\| \tag{6.3.2}$$

olur. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $(z_n{}')_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi

$$z_n{}' = \frac{x_n{}' - x}{h_n}$$

olarak tanımlansın. Buradan $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$x + h_n z_n{}' = x_n{}' \in F^{-1}(y)$$

olur. (6.3.2) eşitsizliği kullanılarak $z_n{}' \to z$ elde edilir. O halde

$$z \in T(F^{-1}(y), x)$$

dolayısıyla

$$\mathrm{Ker}(D_C F(x,y)) = D_C F(x,y)^{-1}(0) \subseteq T(F^{-1}(y), x) \tag{6.3.3}$$

olur.

(6.3.1) ve (6.3.3) kapsamlarından istenilen eşitlik elde edilir. □

6.4 Contingent Epitürev

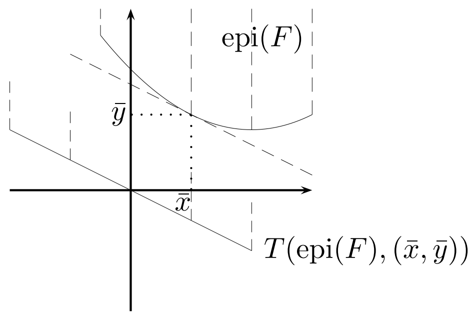
Tanım 6.4.1. *[1,2,4,11-13,15,16]* $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ *gerçel normlu uzaylar Y uzayı $C \subseteq Y$ konveks konisiyle sıralı, $\emptyset \neq S \subseteq X$, $F : S \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü ve $(\bar{x}, \bar{y}) \in gr(F)$ verilsin.*

$$epi(DF(\bar{x}, \bar{y})) = T(epiF, (\bar{x}, \bar{y}))$$

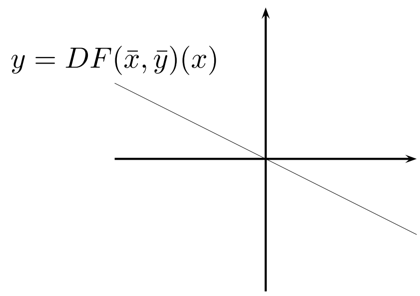
koşulunu sağlayan

$$DF(\bar{x}, \bar{y}) : X \to Y$$

tek değerli dönüşümüne F'in $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasındaki Contingent epitürevi denir.



Şekil 6.24: F küme değerli dönüşümünün epigrafı ve epigrafının $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasındaki Contingent konisi

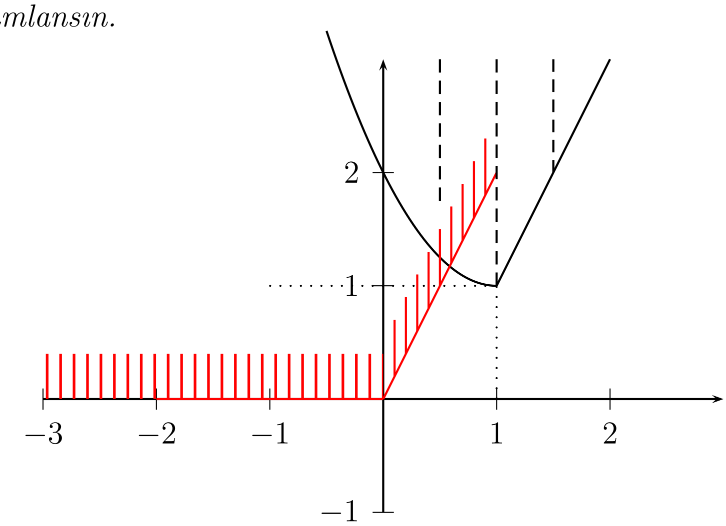


Şekil 6.25: F küme değerli dönüşümünün $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasındaki Contingent epitürevi

Örnek 6.4.2. $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *küme değerli dönüşümü*

$$F(x) = \begin{cases} [(x-1)^2 + 1, +\infty) & , \quad x \leq 1 \\ [2x - 1, +\infty) & , \quad x > 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın.



$$D_C F(1,1)(x) = \begin{cases} [0, +\infty) & , \quad x \leq 0 \\ [2x, +\infty) & , \quad x > 0 \end{cases}$$

olur.

$$DF(1,1)(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 2x & , \quad x > 0 \end{cases}$$

elde edilir.

Önerme 6.4.3. $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ *gerçel normlu uzaylar* Y *uzayı* $C \subseteq Y$ *konveks konisiyle sıralı,* $\emptyset \neq S \subseteq X$, $\bar{x} \in S$, $F : S \rightrightarrows Y$ *küme değerli dönüşümü* $f,\ g : S \to Y$ *olmak üzere*

$$F(x) := \{y \in Y : f(x) \leq_C y \leq_C g(x)\}$$

olarak tanımlansın. Eğer $DF(\bar{x}, f(\bar{x}))$ *var ise*

$$DF(\bar{x}, f(\bar{x})) = Df(\bar{x}, f(\bar{x}))$$

olur.

Kanıt. F fonksiyonunun tanımlanışından

$$\begin{aligned}\text{epi}(F) &= \{(x,y) \in X \times Y : f(x) \leq_C y,\ x \in S\} \\ &= \text{epi}(f)\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\text{epi}(DF(\bar{x}, f(\bar{x}))) &= T(\text{epi}(F), (\bar{x}, f(\bar{x}))) \\ &= \text{epi}(Df(\bar{x}, f(\bar{x})))\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$DF(\bar{x}, f(\bar{x})) = Df(\bar{x}, f(\bar{x}))$$

olur. □

6.5 Contingent Epitürev Özellikleri

Önerme 6.5.1. *[2, 3, 24] X, Y gerçel doğrusal uzaylar, Y uzayı $C_Y \subseteq Y$ konveks konisiyle sıralı,*

$$f : X \to Y$$

fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul epi(f)'in konveks olmasıdır.

Tanım 6.5.2. *[2] X, Y gerçel, doğrusal topolojik uzay, Y uzayı $C_Y \subseteq Y$ konveks konisiyle sıralı olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonu ve $\bar{x} \in X$ verilsin. $B(X, Y)$, X uzayından Y uzayına sürekli, doğrusal dönüşümlerin uzayı olmak üzere*

$$\partial f(\bar{x}) := \{T \in B(X,Y) : \forall\ h \in X \ \textit{için}\ f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - T(h) \in C_Y,\ \}$$

kümesine f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki subdiferansiyeli, $T \in B(X, Y)$ dönüşümüne de f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki subgradienti denir.

Teorem 6.5.3. *$(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ gerçel normlu uzaylar, Y uzayı $C \subseteq Y$ konveks konisiyle sıralı, $\emptyset \neq S \subseteq X$, $F : S \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü ve $(\bar{x}, \bar{y}) \in gr(F)$ verilsin. $Y = \mathbb{R}$ ve $f, g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları*

$$epi(g) \subseteq T(epi(F), (\bar{x}, \bar{y})) \subseteq epi(f)$$

koşulunu sağlasınlar. Bu durumda $\forall\ x \in X$ *için*

$$DF(\bar{x},\bar{y})(x) = \min\{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in T(epi(F),(\bar{x},\bar{y}))\} \tag{6.5.1}$$

olur.

Kanıt. $DF(\bar{x},\bar{y}) : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ fonksiyoneli $\forall\ x \in X$ için

$$DF(\bar{x},\bar{y})(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in T(\text{epi}(F),(\bar{x},\bar{y}))\}$$

olarak tanımlansın.

epi$(g) \subseteq T(\text{epi}(F),(\bar{x},\bar{y}))$ olduğundan $\forall\, x \in X$ için $(x,y) \in T(\text{epi}(F),(\bar{x},\bar{y}))$ olacak şekilde $\exists\ y \in \mathbb{R}$ vardır. O halde $DF(\bar{x},\bar{y})$, X üzerinde iyi tanımlı bir fonksiyondur. $\forall\ x \in X$ verilsin. $DF(\bar{x},\bar{y})$ fonksiyonelinin tanımlanışından $y_n \to DF(\bar{x},\bar{y})(x)$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $(x,y_n) \in T(\text{epi}(F),(\bar{x},\bar{y}))$ olacak şekilde $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ dizisi vardır. $T(\text{epi}(F),(\bar{x},\bar{y}))$ kapalı bir koni olduğundan

$$(x, DF(\bar{x},\bar{y})(x)) \in T(\text{epi}(F),(\bar{x},\bar{y}))$$

olur. $T(\text{epi}(F),(\bar{x},\bar{y})) \subseteq \text{epi}(f)$ olarak verildiğinden $(x, DF(\bar{x},\bar{y})(x)) \in \text{epi}(f)$, dolayısıyla $-\infty < f(x) \leq DF(\bar{x},\bar{y})(x)$ olur. O halde (6.5.1) sağlanmış olur. Yani

$$DF(\bar{x},\bar{y})(x) = \min\{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in T(\text{epi}(F),(\bar{x},\bar{y}))\}$$

elde edilir. $T(\text{epi}(F),(\bar{x},\bar{y})) = \text{epi}(DF(\bar{x},\bar{y}))$ olduğu açıktır. □

Sonuç 6.5.4. $(X,\|.\|_X)$, $(Y,\|.\|_Y)$ *gerçel normlu uzaylar* Y *uzayı* $C \subseteq Y$ *konveks konisiyle sıralı,* $\emptyset \neq S \subseteq X$, $F : S \rightrightarrows Y$ *küme değerli dönüşümü ve* $(\bar{x},\bar{y}) \in gr(F)$ *verilsin.* $Y = \mathbb{R}$, $S = X$ *ve* $F : X \to \mathbb{R}$ *tek değerli* $\bar{x}$ *noktasında sürekli, konveks fonksiyon olsun. Bu durumda* $\forall\ x \in X$ *için*

$$DF(\bar{x},\bar{y})(x) = \min\{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in T(epi(F),(\bar{x},\bar{y}))\} \tag{6.5.2}$$

olur.

Kanıt. F fonksiyonu $\bar{x}$ noktasında sürekli ve konveks olduğundan Önerme 6.5.1 gereği epi(F) konvekstir. Dolayısıyla $T(\text{epi}(F), (\bar{x}, \bar{y}))$ konisi de konvekstir. O halde Önerme 3.3.1 gereği

$$\text{epi}(F) \subseteq T(\text{epi}(F), (\bar{x}, \bar{y})) + \{(\bar{x}, \bar{y})\}$$

olur. $l \in \partial F(\bar{x})$ olmak üzere $\forall\ x \in X$ için

$$f(x) = l(x - \bar{x}) + \bar{y}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda

$$\text{epi}(F) \subseteq T(\text{epi}(F), (\bar{x}, \bar{y})) + \{(\bar{x}, \bar{y})\} \subseteq \text{epi}(f)$$

olur. Teorem 6.5.3 gereği

$$DF(\bar{x}, \bar{y})(x) = \min \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in T(\text{epi}(F), (\bar{x}, \bar{y}))\}$$

elde edilir. □

Teorem 6.5.5. *$(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ gerçel normlu uzaylar Y uzayı $C \subseteq Y$ konveks konisiyle sıralı, $\emptyset \neq S \subseteq X$, $F : S \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü ve $(\bar{x}, \bar{y}) \in gr(F)$ verilsin. Eğer $DF(\bar{x}, \bar{y})$ varsa tektir.*

Kanıt. $\bar{D}F(\bar{x}, \bar{y}) \neq DF(\bar{x}, \bar{y})$ iki Contingent epitürev olsunlar. Bu durumda $\exists\ x \in S$ için

$$\bar{D}F(\bar{x}, \bar{y})(x) \neq DF(\bar{x}, \bar{y})(x)$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} \text{epi}(\bar{D}F(\bar{x}, \bar{y})) &\neq \text{epi}(DF(\bar{x}, \bar{y})) \\ &= T(\text{epi}(F), (\bar{x}, \bar{y})) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu ise $\bar{D}F(\bar{x}, \bar{y})$ fonksiyonunun Contingent epitürev olmasıyla çelişir. O halde Contingent epitürevi varsa tektir. □

$(\bar{x}, \bar{y}) \in int(\text{epi}(F))$ olursa $T(\text{epi}(F), (\bar{x}, \bar{y})) = X \times Y$ olur. Dolayısıyla $DF(\bar{x}, \bar{y})$'nin varlığından söz edilemez.

Teorem 6.5.6. *$(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ gerçel normlu uzaylar Y uzayı $C \subseteq Y$ konveks konisiyle sıralı, $\emptyset \neq S \subseteq X$, $F : S \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü ve $(\bar{x}, \bar{y}) \in gr(F)$ verilsin. Buna ek olarak $S = X$, C kapalı ve F küme değerli dönüşümü C-konveks olsun. Eğer $D_C F(\bar{x}, \bar{y})$ ve $DF(\bar{x}, \bar{y})$ var ise*

$$epi(D_C F(\bar{x}, \bar{y})) \subseteq epi(DF(\bar{x}, \bar{y}))$$

olur.

Kanıt. Contingent epitürev tanımından

$$\begin{aligned}
\mathrm{epi}(DF(\bar{x}, \bar{y})) &= T(\mathrm{epi}(F), (\bar{x}, \bar{y})) \\
&= cl(\mathrm{cone}(\mathrm{epi}(F) - \{(\bar{x}, \bar{y})\})) \\
&= cl(\mathrm{cone}(\mathrm{gr}F - \{(\bar{x}, \bar{y})\} + \{0_X\} \times C)) \\
&\supseteq cl(\mathrm{cone}(\mathrm{gr}(F) - \{(\bar{x}, \bar{y})\})) + cl(\{0_X\} \times C) \\
&= cl(\mathrm{cone}(\mathrm{gr}(F) - \{(\bar{x}, \bar{y})\})) + (\{0_X\} \times C) \\
&\supseteq T(\mathrm{gr}(F), (\bar{x}, \bar{y})) + (\{0_X\} \times C) \\
&= \mathrm{gr}(D_C F(\bar{x}, \bar{y})) + (\{0_X\} \times C) \\
&= \mathrm{epi}(D_C F(\bar{x}, \bar{y}))
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Tanım 6.5.7. *[2] X gerçel lineer uzay, Y, $C \subseteq Y$ konveks konisiyle sıralı gerçel lineer uzay olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonu*

a. $\forall\ \alpha \geq 0$ *ve* $\forall\ x \in X$ *için* $f(\alpha x) = \alpha f(x)$*(Pozitif homojenlik)*

b. $\forall\ x_1, x_2 \in X$ *için* $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$ *(alt toplamsallık)*

özelliklerini sağlıyorsa f fonksiyonuna sublineerdir denir.

Teorem 6.5.8. *$(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ gerçel normlu uzaylar Y uzayı $C \subseteq Y$ konveks konisiyle sıralı, $\emptyset \neq S \subseteq X$, $F : S \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü ve $(\bar{x}, \bar{y}) \in gr(F)$ verilsin. Buna ek olarak C pointed, S konveks, F, C-konveks olsun. Bu durumda Contingent epitürev varsa sublineerdir.*

Kanıt. F, C-konveks olduğundan epi(F) konveks kümedir. Dolayısıyla $T(\text{epi}(F), (\bar{x}, \bar{y})) = \text{epi}(DF(\bar{x}, \bar{y}))$ konveks kümedir. $\forall\ x \in X$ için $(x, DF(\bar{x}, \bar{y})(x)) \in \text{epi}(DF(\bar{x}, \bar{y}))$ ve epi$(DF(\bar{x}, \bar{y}))$ koni olduğundan $\forall\ \alpha > 0$ için de

$$(\alpha x, \alpha DF(\bar{x}, \bar{y})(x)) \in \text{epi}(DF(\bar{x}, \bar{y}))$$

olur. Buradan

$$\alpha DF(\bar{x}, \bar{y})(x) \in \{DF(\bar{x}, \bar{y})(\alpha x)\} + C \tag{6.5.3}$$

$$\alpha x, DF(\bar{x}, \bar{y})(\alpha x)) \in \text{epi}(DF(\bar{x}, \bar{y}))$$

olduğundan

$$(x, \frac{1}{\alpha} DF(\bar{x}, \bar{y})(\alpha x)) \in \text{epi}(DF(\bar{x}, \bar{y}))$$

buradan

$$\frac{1}{\alpha} DF(\bar{x}, \bar{y})(\alpha x) \in \{DF(\bar{x}, \bar{y})(x)\} + C$$

olur. O halde

$$\alpha DF(\bar{x}, \bar{y})(x) \in \{DF(\bar{x}, \bar{y})(\alpha x)\} - C \tag{6.5.4}$$

(6.5.3), (6.5.4)'den ve C pointed olduğundan

$$\alpha DF(\bar{x}, \bar{y})(x) = DF(\bar{x}, \bar{y})(\alpha x)$$

elde edilir.

$\alpha = 2$ ve $x = 0_X$alınırsa (6.5.3) gereği

$$2DF(\bar{x}, \bar{y})(0_X) \in \{DF(\bar{x}, \bar{y})(0_X)\} + C$$

olur. Buradan

$$DF(\bar{x}, \bar{y})(0_X) \in C \tag{6.5.5}$$

elde edilir.

Aynı şekilde (6.5.4) gereği

$$DF(\bar{x}, \bar{y})(0_X) \in -C \tag{6.5.6}$$

elde edilir. (6.5.5), (6.5.6) ve C pointed olduğundan

$$DF(\bar{x},\bar{y})(0_X) = 0$$

elde edilir. O halde $\forall\ x \in X$ ve $\forall\ \alpha \geq 0$ için

$$DF(\bar{x},\bar{y})(\alpha x) = \alpha DF(\bar{x},\bar{y})(x)$$

olur.

$\forall\ x_1,\ x_2 \in X$ alındığında

$$\begin{aligned}(x_1, DF(\bar{x},\bar{y})(x_1)) &\in \operatorname{epi}(DF(\bar{x},\bar{y}))\\ (x_2, DF(\bar{x},\bar{y})(x_2)) &\in \operatorname{epi}(DF(\bar{x},\bar{y}))\end{aligned}$$

ve $\operatorname{epi}(DF(\bar{x},\bar{y}))$ konveks olduğundan

$$(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}DF(\bar{x},\bar{y})(x_1) + \frac{1}{2}DF(\bar{x},\bar{y})(x_2)) \in \operatorname{epi}(DF(\bar{x},\bar{y}))$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\ \tfrac{1}{2}(DF(\bar{x},\bar{y})(x_1) + DF(\bar{x},\bar{y})(x_2)) &\in \left\{DF(\bar{x},\bar{y})(\tfrac{1}{2}(x_1+x_2))\right\} + C\\ \Longrightarrow\ \tfrac{1}{2}(DF(\bar{x},\bar{y})(x_1) + DF(\bar{x},\bar{y})(x_2)) &\in \left\{\tfrac{1}{2}DF(\bar{x},\bar{y})(x_1+x_2)\right\} + C\\ \Longrightarrow\ (DF(\bar{x},\bar{y})(x_1) + DF(\bar{x},\bar{y})(x_2) &\in \{DF(\bar{x},\bar{y})(x_1+x_2)\} + C\end{aligned}$$

olduğundan $DF(\bar{x},\bar{y})$ alttoplamsaldır. □

6.6 Gerçel Değerli Fonksiyonların Contingent Epitürevleri

Tanım 6.6.1. *[3, 24] $X,\ Y$ gerçel normlu uzaylar $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve x_0, X kümesinin bir yığılma noktası olsun. Verilen $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\|x - x_0\| < \delta$ olan $\forall\ x$ için*

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists\ \delta > 0$ bulunabiliyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında alttan yarı süreklidir denir.

Önerme 6.6.2. *[3, 24]* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *fonksiyonunun* $\mathbb{R}^n$*'de alttan yarı sürekli olması için gerek ve yeter koşul epi*(f)*'in* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *üzerinde kapalı olmasıdır.*

Teorem 6.6.3. $(X, \|.\|_X)$ *gerçel normlu uzay,* $F : X \to \mathbb{R}$ *tek değerli fonksiyon,* $\bar{x} \in X$ *verilsin. Eğer* $DF(\bar{x}, \bar{y})$ *var ise alttan yarı süreklidir.*

Kanıt. Contingent koni kapalıdır. Dolayısıyla epi$(DF(\bar{x}, F(\bar{x})))$ kapalıdır. O halde Önerme 6.6.2 gereği $DF(\bar{x}, F(\bar{x}))$ alttan yarı süreklidir. □

Önerme 6.6.4. *[1]* $(X, \|.\|_X)$ *gerçel normlu uzay,* $f : X \to \mathbb{R}$ *sürekli, konveks fonksiyonel olsun. Bu durumda* $\forall\ x, h \in X$ *için*

$$f'(x)(h) = \max\{l(h) : l \in \partial f(x)\}$$

olur.

Teorem 6.6.5. $(X, \|.\|_X)$ *gerçel normlu uzay,* $F : X \to \mathbb{R}$ *tek değerli fonksiyon,* $\bar{x} \in X$ *verilsin.* F*,* $\bar{x}$ *noktasında sürekli ve konveks ise* $\forall\ h \in X$ *için* $F'(\bar{x})(h)$ F *fonksiyonunun* $\bar{x}$ *noktasında* h *yönündeki yönlü türevi olmak üzere*

$$DF(\bar{x}, f(\bar{x}))(h) = F'(\bar{x})(h)$$

olur.

Kanıt. F, $\bar{x}$ noktasında sürekli ve konveks olduğundan Sonuç 6.5.4 gereği $DF(\bar{x}, F(\bar{x}))$ vardır.

$$\partial F(\bar{x}) = \{l \in X^* : F(\bar{x} + h) - F(\bar{x}) \geq_C l(h),\ \forall\ h \in X\}\text{'dir.}$$

$l \in \partial F(\bar{x})$ olmak üzere özel olarak $h = x - \bar{x}$ alınırsa

$$l(x - \bar{x}) \leq F(\bar{x} + x - \bar{x}) - F(\bar{x})$$

olur. Dolayısıyla $\forall\ x \in X$ için

$$l(x - \bar{x}) + F(\bar{x}) \leq F(x)$$

elde edilir.O halde

$$\text{epi}(F) \subseteq \text{epi}(\{F(\bar{x}) + l(x-\bar{x}) : x \in X\}) \tag{6.6.1}$$

olur. (6.6.1) kapsamı kullanılarak

$$\begin{aligned} \text{epi}(DF(\bar{x}, F(\bar{x}))) &= T(\text{epi}(F), (\bar{x}, F(\bar{x}))) \\ &\subseteq T(\text{epi}(\{F(\bar{x}) + l(x-\bar{x}) : x \in X\}), (\bar{x}, F(\bar{x}))) \\ &= \text{epi}\,\{l(h) : h \in X\} \end{aligned}$$

olur. Yani $\forall\ h \in X$ için Önerme 6.6.4 kullanılarak

$$\begin{aligned} l(h) &\leq DF(\bar{x}, F(\bar{x}))(h) \\ \max_{l \in \partial F(\bar{x})} l(h) = F'(\bar{x})(h) &\leq DF(\bar{x}, F(\bar{x}))(h) \end{aligned} \tag{6.6.2}$$

elde edilir.

Ters eşitsizlik gösterilsin.

$$\begin{aligned} T &:= \{(\bar{x} + \lambda h, F(\bar{x}) + DF(\bar{x}, F(\bar{x}))(\lambda h)) : \lambda \leq 0\} \\ &= \{(\bar{x} + \lambda h, F(\bar{x}) + \lambda DF(\bar{x}, F(\bar{x}))(h)) : \lambda \geq 0\} \end{aligned}$$

kümesi tanımlansın.

F fonksiyonu $\bar{x}$ noktasında sürekli olduğundan $int(\text{epi}(F)) \neq \emptyset$ olur. $T \cap int(\text{epi}(F)) = \emptyset$ olduğu açıktır. Bu durumda Eidelheit ayırma teoreminden $\forall\ (x, \alpha) \in \text{epi}(F)$ ve $\forall\ \lambda \geq 0$ için $(\bar{l}, \beta) \neq (0_X, 0)$ ve

$$\bar{l}(x) + \beta\alpha \leq \gamma \leq \bar{l}(\bar{x} + \lambda h) + \beta(F(\bar{x}) + \lambda DF(\bar{x}, F(\bar{x}))(h)) \tag{6.6.3}$$

olan X üzerinde sürekli bir $\bar{l}$ doğrusal dönüşümü ve $\exists\ \gamma,\ \beta \in \mathbb{R}$ vardır. (6.6.3) eşitsizliğinde $x = \bar{x}$ ve $\lambda = 0$ alınırsa

$$\bar{l}(\bar{x}) + \beta\alpha \leq l(\bar{x}) + \beta F(\bar{x})$$

buradan

$$\beta\alpha \leq \beta F(\bar{x}) \Longrightarrow \beta(\alpha - F(\bar{x})) \leq 0$$

olur. $x = \bar{x}$ ve $(x, \alpha) \in \text{epi}(F)$ alındığından $\alpha \geq F(\bar{x})$ olacağından $\beta \leq 0$ olur.

$\beta \neq 0$ olmalıdır. Çünkü (6.6.3) eşitsizliğinde $\beta = 0$ ve $\lambda = 0$ alınırsa $\forall\ x \in X$ için

$$\bar{l}(x) \leq \bar{l}(\bar{x}) \Longrightarrow \bar{l}(x - \bar{x}) \leq 0$$

olur. Bu ise $\bar{l} = 0$ olması demektir ki bu durum $(\bar{l}, \beta) \neq (0, 0)$ olmasıyla çelişir. O halde $\beta < 0$ olmalıdır.

(6.6.3) eşitsizliğinde $\lambda = 0$ ve $\alpha = F(x)$ alınırsa

$$\begin{array}{rrcl} & \bar{l}(x) + \beta F(x) & \leq & \bar{l}(\bar{x}) + \beta F(\bar{x}) \\ \Longrightarrow & \bar{l}(x - \bar{x}) & \leq & \beta(F(\bar{x}) - F(x)) \\ \Longrightarrow & \dfrac{1}{\beta}\bar{l}(x - \bar{x}) & \geq & F(\bar{x}) - F(x) \\ \Longrightarrow & -\dfrac{1}{\beta}\bar{l}(x - \bar{x}) & \leq & F(x) - F(\bar{x}) \end{array}$$

olur. O halde $-\dfrac{1}{\beta}\ \bar{l} \in \partial F(\bar{x})$ elde edilir.

(6.6.3) eşitsizliğinde $x = \bar{x},\ \alpha = F(\bar{x})$ ve $\lambda = 1$ alınırsa

$$\bar{l}(x) + \beta F(\bar{x}) \leq \bar{l}(\bar{x} + h) + \beta(F(\bar{x}) + DF(\bar{x}, F(\bar{x}))(h))$$

olur. Buradan

$$DF(\bar{x}, F(\bar{x}))(h) \leq -\frac{1}{\beta}\ \bar{l}(h) \tag{6.6.4}$$

elde edilir. Önerme 6.6.4, (6.6.2) ve (6.6.4) eşitsizliği kullanılarak

$$DF(\bar{x}, F(\bar{x}))(h) = \max_{l \in \partial F(\bar{x})} l(h) = F'(\bar{x})(h)$$

elde edilir. □

Örnek 6.6.6. $(X, \|.\|_X)$ *gerçel normlu uzay,* $F : X \rightrightarrows \mathbb{R}$ *küme değerli dönüşümü* $\forall\ x \in X$ *için*

$$F(x) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq \|x\|\}$$

ve $f : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $\forall\ x \in X$ *için* $f(x) = \|x\|$ *olarak tanımlansın. Bu durumda*

$$gr(F) = epi(f)$$

olur. Teorem 6.6.5'de $\forall\ \bar{x} \in X \setminus \{0_X\}$ *için* $\bar{y} = F(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$ *seçilirse* $\forall\ h \in X$ *için*

$$\begin{aligned} DF(\bar{x},\bar{y})(h) &= DF(\bar{x},\|\bar{x}\|)(h) \\ &= Df(\bar{x},f(\bar{x}))(h) \\ &= f'(\bar{x})(h) \\ &= \max\{l(h) : l \in \partial f(\bar{x})\} \\ &= \max\{l(h) : l \in X^*,\ l(\bar{x}) = \|\bar{x}\|\ \ ve\ \ \|l\|_{X^*} = 1\} \end{aligned}$$

olur.

Sonuç 6.6.7. $(X, \|.\|_X)$ *gerçel normlu uzay,* $\forall\ \bar{x} \in X$ *verilsin.* $f, g : X \to \mathbb{R}$, f $\bar{x}$ *noktasında konveks ve sürekli olsun.* $F : X \rightrightarrows \mathbb{R}$ *küme değerli dönüşümü* $\forall\ x \in X$ *için*

$$F(x) := \{y \in \mathbb{R} : f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $DF(\bar{x}, f(\bar{x}))$ *vardır ve* f*'in* $\bar{x}$*'deki yönlü türevine eşittir.*

Kanıt. $\mathrm{epi}(F) = \mathrm{epi}(f)$ olduğu açıktır. f konveks olduğundan $\mathrm{epi}(f)$ konvekstir. O halde Önerme 3.3.1 kullanılarak

$$\mathrm{epi}(f) = \mathrm{epi}(F) \subseteq T(\mathrm{epi}(F), (\bar{x}, f(\bar{x}))) + \{(\bar{x}, f(\bar{x}))\}$$

olur. f $\bar{x}$ noktasında sürekli ve konveks olduğundan

$$T(\mathrm{epi}(F)), (\bar{x}, f(\bar{x})) + \{(\bar{x}, f(\bar{x}))\} \subseteq \mathrm{epi}(h)$$

ve

$$h(x) = l(x - \bar{x}) + f(\bar{x})$$

olacak şekilde $\exists\ l \in \partial f(\bar{x})$ vardır. O halde Önerme 6.4.3 gereği $DF(\bar{x}, f(\bar{x}))$ vardır ve

$$DF(\bar{x}, f(\bar{x})) = Df(\bar{x}, f(\bar{x}))$$

olur. f, $\bar{x}$ noktasında konveks ve sürekli olduğundan Teorem 6.6.5'den dolayı

$$Df(\bar{x}, f(\bar{x})) = f'(\bar{x})$$

olur. $\square$

KAYNAKLAR

[1] Jahn, J., *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization*, Springer Verlag, Berlin, 1994.

[2] Jahn, J., *Vector Optimization: Theory, Applications and Extensions*, Springer Verlag, Berlin, 2004.

[3] Urruty, J.B.H ve Lemarechal, C., *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer Verlag, Berlin, 2001.

[4] Aubin, J.P ve Frankowska, H., *Set-Valued Analysis*, Birkhauser, Boston, 1990.

[5] Hu, S. ve Papageoergiou, N.S, *Handbook of Multivalued Analysis Volume I: Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997.

[6] Aubin, J.P ve Ekeland, I., *Applied Nonlinear Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1984.

[7] Aubin, J.P. ve Cellina, A. , *Differential Inclusions*, Springer Verlag, Berlin, 1984.

[8] Rockafellar, R.T ve Wets, R.G.B., *Variational Analysis*, Springer Verlag, Berlin, 1998.

[9] Aubin, J.P., *Optima and Equilibria*, Springer Verlag, Berlin, 1998.

[10] Luc, D., *Theory of Vector Optimization*, Springer Verlag, Berlin, 1989.

[11] Jahn, J. ve Rauh, R., *Contingent Epiderivatives and Set-Valued Optimization*, Mathematical Methods of Research, **46**, 193-211, 1997.

[12] Jahn, J. ve Khan, A., *Generalized Contingent Epiderivatives in Set-Valued Optimization: Optimality Conditions*, Numerical Functional Analysis and Optimization, **23**, 807-831, 2002.

[13] Chen, G.Y. ve Jahn, J., *Optimality Conditions for Set Valued Optimization Problems*, Mathematical Methods of Operations Research, **48**, 187-200, 1998.

[14] Bazan, F.F, *Optimality Conditions in Nonconvex Set-Valued Optimization*, Mathematical Methods of Operations Research, **48**, 187-200, 1998.

[15] Baier, J. ve Jahn, J., *On Subdifferentials of Set Valued Maps*, Journal of Optimization Theory and Applications, **100**, 233-240, 1999.

[16] Jahn, J. ve Kahn, A., *Derivative Rules for Contingent Epiderivatives*, Optimization, **52**, 113-125, 2003.

[17] Aubin, J.P., *Applied Functional Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 2000.

[18] Luenberger, D.G., *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley and Sons, New York, 1969.

[19] Kontorovich, L.V. ve Akilov G.P, *Functional Analysis*, Pergamon Press Ltd. and "Nauka" Publishers, 1982.

[20] Heuser, H.G, *Functional Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1982.

[21] Erdem, M. ve Kılıç, S.A, *Fonksiyonel Analize Giriş*, Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara.

[22] Krantz, S.G, *Handbook of Complex Variables*, MA. Birkhauser, Boston, 1999.

[23] Zeidler, E., *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics*, Springer Verlag, New York, 1995.

[24] Ekeland, I. ve Temam, R., *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1976.