$\mathbb{R}^{2n}$'DE 2−KALİBRASYONLAR

Yunus ÖZDEMİR

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz - 2008

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Yunus ÖZDEMİR'in " $\mathbb{R}^{2n}$**'de** 2$-$**kalibrasyonlar** " başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki Doktora tezi 14.07.2008 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**: Prof. Dr. ŞAHİN KOÇAK**	....
Üye	**: Prof. Dr. MEHMET ÜREYEN**	....
Üye	**: Prof. Dr. YÜKSEL ERGUN**	....
Üye	**: Prof. Dr. AYŞE HÜMEYRA BİLGE**	....
Üye	**: Prof. Dr. TEKİN DERELİ**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

$\mathbb{R}^{2n}$'DE 2−KALİBRASYONLAR

Yunus ÖZDEMİR

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Şahin KOÇAK

2008, 74 sayfa

Kalibrasyon kavramı 1982'de Harvey ve Lawson tarafından tanımlanmış ve minimal alt manifoldlar ile 7 ve 8 boyutlardaki özel holonomi konularında önemli bir araç konumuna gelmiştir. Kalibre edilmiş alt manifoldlar homolojik olarak hacmi minimize eden alt manifoldların doğal örneklerini verirken, 7 ve 8 boyutlardaki asosyatif, ko-asosyatif ve Cayley kalibrasyonları zengin bir geometriye sahiptirler.

2−formların kendine dualliği kavramı 4 boyuttaki klasik Yang-Mills teorisinin merkezi bir kavramıdır ve bu kavramın yüksek çift boyutlara, esas itibariyle birbirlerine denk olan çeşitli genelleştirmeleri verilmiştir ve bu genelleştirmeler yüksek boyutlu alan teorilerinde bir rol oynamaktadırlar.

Kalibrasyon ve kendine duallik kavramları bugüne kadar büyük ölçüde birbirlerinden bağlantısız olarak kullanılmaktadırlar. Bu çalışmada, 2−kalibrasyon ve kuvvetli kendine dual 2−form kavramları arasındaki ilişki araştırılmıştır. Kalibrasyon kavramının uygun şekilde modifiye edilmesi durumunda bu iki kavramın esas itibariyle örtüştüğü gösterilmiştir. Ayrıca, normlu trialite kavramından esinlenerek normlu dualite kavramı tanımlanmış ve anti-simetrik normlu dualite kavramının modifiye edilmiş 2−kalibrasyon kavramıyla örtüştüğü gösterilmiştir.

Kalibrasyon teorisinde, çoğu önemli ve ilginç örnekler Öklidyen uzaylardaki bazı sabit katsayılı formlarla verilmektedir ve bunlar modifiye edilmiş koşulu da sağlamaktadırlar. Çalışmamızda $\mathbb{R}^{2n}$'de modifiye edilmiş 2−kalibrasyon alanlarının (dolayısıyla bunlara karşılık gelen kuvvetli kendine dual 2−form alanlarının) sabit katsayılı olması gerektiği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kalibrasyon, Kendine Duallik, Normlu Dualite

ABSTRACT

PhD. Dissertation

2−CALIBRATIONS ON $\mathbb{R}^{2n}$

Yunus ÖZDEMİR

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Prof.Dr. Şahin KOÇAK

2008, 74 pages

The notion of calibration was defined by Harvey and Lawson in 1982 and since then this notion proved to be important in the fields of minimal submanifolds and special holonomy in dimension 7 and 8. Calibrated submanifolds are natural examples of homologically volume minimizing submanifolds and in dimensions 7 and 8 the associative, coassociative and Cayley calibrations possess a rich geometry.

The notion of the self duality of 2-forms is a central notion in classical Yang-Mills theory in dimension 4 and there are several generalizations of this notion to higher even dimensions which are essentially equivalent and which play a role in higher dimensional gauge theories.

This two notions, calibrations and self duality were rather unrelated yet. In this work, the relationship between the notions of 2−calibrations and strong self-duality of 2−forms is investigated. It is shown that if the notion of calibration is suitably modified, then the two notions essentially coincide. Moreover, inspired by the notion of normed triality, a notion of normed duality is defined and it is shown that an anti-symmetric normed duality coincides with the notion of modified 2−calibration.

In the theory of calibrations, most of the important and interesting examples are given by forms on Euclidean spaces with constant coefficients and these are shown to satisfy also our modified condition. We proved that on $\mathbb{R}^{2n}$ any modified calibration 2−field (and as a consequence the corresponding strong self-dual 2−form field) has necessarily constant coefficients.

Keywords: Calibration, Self Duality, Normed Duality

TEŞEKKÜR

Araştırma sürecindeki katkılarından dolayı Sayın Prof.Dr. Ayşe Hümeyra BİLGE'ye teşekkür ederim.

Araştırma sürecinde bana katkı ve yardımlarıyla önemli destekler veren hocam Sayın Doç.Dr. Nedim DEĞİRMENCİ'ye ve Araş.Gör. Derya ÇELİK'e teşekkür ederim.

Doktora tez çalışmasının uzun bir süreç olması nedeniyle, bu anlamlı yolda benden sevgi, sabır ve emeklerini esirgemeyen değerli eşim Rahime ÖZDEMİR'e ve kızım Azra ÖZDEMİR'e teşekkür ederim.

Yunus ÖZDEMİR

Temmuz 2008

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\Lambda^k V$	:	V vektör uzayının k-dış çarpımı
$\Lambda^k (V)^*$	:	V vektör uzayı üzerindeki k-formların uzayı
$\Omega^k(\mathbb{R}^m)$	:	$\mathbb{R}^m$ üzerindeki k-form alanlarının uzayı
$\Omega^k(M)$	:	M manifoldu üzerindeki k-form alanlarının uzayı
$T_x M$	:	M manifoldunun x noktasındaki tanjant uzayı
$*\varphi$	:	φ formunun Hodge duali
$Pf(A)$	:	A matrisinin Pfaffian polinomu
A^t	:	A matrisinin transpozu

1 KENDİNE DUALLİK

$\mathbb{R}^{2n}$'de verilen bir φ formunun kendine dualliği, özellikle $2-$formların kendine dualliği matematik ve fizikte önemli bir yere sahiptir. Mesela $\mathbb{R}^{2n}$'de verilen bir φ formunun kendine dualliği, Seiberg-Witten teorisinin genelleştirilmesinde ve Yang-Mills denklemlerinin çözümünde önemli bir rol oynamaktadır. $\mathbb{R}^4$'deki $2-$formların kendine dualliği ayrıca ayar teorisinde önemli bir yere sahiptir.

Formların kendine dualliği için çeşitli tanımlar mevcuttur. Kendine duallik deyince ilk akla gelen, $\mathbb{R}^{2n}$'de verilen bir $n-$formun Hodge anlamında kendine dualliğidir.

1.1 Hodge Operatörü Ve $\mathbb{R}^4$'de $2-$Formların Kendine Dualliği

V, n boyutlu yönlendirilmiş bir iç çarpım uzayı olsun. V üzerindeki iç çarpım yardımıyla $\Lambda^p V$ üzerinde bir iç çarpım $u, v \in \Lambda^p V$ $p-$vektörler olmak üzere

$$\langle u, v\rangle = \langle u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_p, v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_p\rangle = \det(\langle u_i, v_i\rangle)$$

ifadesinin bilineer genişletilmesiyle tanımlanabilir. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, V vektör uzayının pozitif yönlendirilmiş birimdikey bir tabanı olsun. Bu durumda

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\}$$

kümesi de $\Lambda^p V$'nin birimdikey bir tabanı olur. Benzer şekilde $\Lambda^p(V)^* \cong \Lambda^p V^*$ da bir iç çarpım uzayıdır ve dx_i, e_i elemanına karşılık gelen $dx_i(e_j) = \delta_{ij}$ şeklinde tanımlı V^* dual uzayının elemanı olmak üzere,

$$\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\}$$

kümesi de $\Lambda^p V^*$ vektör uzayının birimdikey bir tabanı olur.

Verilen bir $p-$formuna bir $(n-p)-$formu karşılık getiren Hodge operatörü, $\Lambda^p V^*$ vektör uzayında bir lineer dönüşüm olarak tabanlar üzerinde şu şekilde tanımlanır: $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ hacim formunu göstermek üzere herhangi bir $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ taban elemanını $j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-p}$ olmak üzere

$$\left(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}\right) \wedge \left(\pm dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{n-p}}\right) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

olacak şekildeki $\pm dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{n-p}}$ elemanına resmeder. Örneğin

$$*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n) = 1 \quad \text{ve} \quad *\,1 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

yazılabilir.

Taban elemanları üzerinde yukarıdaki gibi tanımladıktan sonra, vektör uzayına lineer genişleterek tüm vektör uzayı üzerinde bir lineer dönüşüm elde etmiş oluruz. Bir φ formuna Hodge operatörü uygulanarak elde edilen form $*\varphi$ ile gösterilir ve bu forma φ formunun **Hodge duali** denir.

$$\begin{array}{cccc} * \ : & \Lambda^p V^* & \longrightarrow & \Lambda^{n-p} V^* \\ & \varphi & \longmapsto & *\varphi \end{array}$$

$\mathbb{R}^{2n}$'de, bir φ $n-$formu verilsin. $*\varphi = \varphi$ ise φ'ye Hodge anlamında **kendine dual** form, $*\varphi = -\varphi$ ise φ'ye **tersine dual** form denir. Tanımdan da açıktır ki $\mathbb{R}^{2n}$'de yanlızca bir $n-$formun Hodge anlamında kendine dualliğinden bahsedilebilir.

Şimdi $\mathbb{R}^4$'de bir $2-$formun ne zaman kendine dual veya tersine dual olduğuna bakalım.

$\mathbb{R}^4$ vektör uzayını standart taban vektörlerinin yönlendirmesiyle alalım. $\mathbb{R}^4$'de bir $2-$form

$$\varphi = a\ dx_1 \wedge dx_2 + b\ dx_1 \wedge dx_3 + c\ dx_1 \wedge dx_4 + d\ dx_2 \wedge dx_3 + e\ dx_2 \wedge dx_4 + f\ dx_3 \wedge dx_4$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan Hodge operatörünün lineer olmasını da kullanarak

$$\begin{aligned} *\varphi &= a*(dx_1\wedge dx_2)+b*(dx_1\wedge dx_3)+c*(dx_1\wedge dx_4) \\ &\quad +d*(dx_2\wedge dx_3)+e*(dx_2\wedge dx_4)+f*(dx_3\wedge dx_4) \\ &= a\ dx_3\wedge dx_4-b\ dx_2\wedge dx_4+c\ dx_2\wedge dx_3 \\ &\quad +d\ dx_1\wedge dx_4-e\ dx_1\wedge dx_3+f\ dx_1\wedge dx_2 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $*\varphi=\varphi$ olması için

$$a=f, c=d, b=-e$$

eşitliklerinin sağlanması gerek ve yeter koşuldur. Bu durumda $\mathbb{R}^4$'de bir φ $2-$formunun kendine dual olabilmesi için

$$\begin{aligned} \varphi &= a\ (dx_1\wedge dx_2+dx_3\wedge dx_4) \\ &\quad +b\ (dx_1\wedge dx_3-dx_2\wedge dx_4) \\ &\quad +c\ (dx_1\wedge dx_4+dx_2\wedge dx_3) \end{aligned}$$

şeklinde olması gerekir. Benzer işlemlerle $\mathbb{R}^4$'de bir φ $2-$formunun tersine dual olabilmesi için

$$\begin{aligned} \varphi &= a\ (dx_1\wedge dx_2-dx_3\wedge dx_4) \\ &\quad +b\ (dx_1\wedge dx_3+dx_2\wedge dx_4) \\ &\quad +c\ (dx_1\wedge dx_4-dx_2\wedge dx_3) \end{aligned}$$

şeklinde olması gerektiği görülebilir. Ayrıca, $\mathbb{R}^4$'deki kendine dual formların

$$\{dx_1\wedge dx_2+dx_3\wedge dx_4, dx_1\wedge dx_3-dx_2\wedge dx_4, dx_1\wedge dx_4+dx_2\wedge dx_3\}$$

kümesi tarafından gerildiği gözlemlenmektedir. Yani kendine dual formlar 3 boyutlu bir alt uzaydır. Yine tersine dual formların da 3 boyutlu bir alt uzay olduğu görülmektedir.

1.2 $\mathbb{R}^{2n}$'de $2-$Formların Kendine Dualliği

$\mathbb{R}^{m}$'deki $2-$formlar için bir formun Hodge anlamında kendine dual olması $m = 4$ durumu dışında anlamlı değildir. Farklı derecelerdeki formların birbirine eşitliği söz konusu olamayacağından, Hodge anlamındaki kendine duallik sadece $\mathbb{R}^{2n}$'deki $n-$formlar için kendine duallik tanımı olarak alınabilir. Fakat $2-$formların daha üst boyutlardaki kendine dualliği de önemli olduğundan, $\mathbb{R}^{2n}$'deki $2-$formların kendine dualliği için farklı tanımlar kullanılmıştır.

1977'de Trautman [1] $\mathbb{R}^{2n}$'deki φ $2-$formunun kendine dualliğini, φ^{n-1} formu φ'nin kendisiyle $n-1$ kez dış çarpımını göstermek üzere, $\varphi^{n-1} = \alpha\,(*\varphi)\,,$ $\alpha \in \mathbb{R}$ olması şeklinde kullanmıştır.

1984'de Grossmann tarafından yapılan bir çalışmada [2], $\mathbb{R}^{8}$'deki bir φ $2-$formunun kendine dualliği, $\mathbb{R}^{8}$'deki $\varphi \wedge \varphi$ $4-$formunun Hodge anlamında kendine dual olmasıyla tanımlanmıştır.

1983'de Corrigan ve ark. [3] da genelleştirilmiş bir kendine duallik tanımı vermişlerdir.

Daha sonra Bilge ve ark. [4] tarafından $\mathbb{R}^{2n}$'deki bir φ $2-$formunun "kuvvetli kendine dualliği" tanımı verilmiş ve Özdemir ve Bilge [5] tarafından bu farklı tanımların eşdeğerliği gösterilmiştir.

$\mathbb{R}^{2n}$'de bir φ $2-$formu ve $\mathbb{R}^{2n}$'nin birimdikey bir tabanı verildiğinde, bu φ formunun bu tabana göre bileşenleri kullanılarak oluşturulan matris anti-simetriktir. Elde edilen anti-simetrik matrisin özdeğerleri $\pm i\lambda_k, k = 1, 2, ..., n$ şeklindedir. $\mathbb{R}^{4}$'deki bir $2-$formun Hodge anlamında kendine veya tersine dual olabilmesi için, ilgili özdeğerlerin normca birbirine eşit olması gerektiği görülebilir.

Tanım 1.1 (Kuvvetli Kendine (Tersine) Duallik) *φ, $\mathbb{R}^{2n}$'de bir $2-$form ve $\pm i\lambda_k, k = 1, 2, ..., n$ φ'nin herhangi bir birimdikey tabana göre elde edilen anti-simetrik matrisinin özdeğerleri olsun. Eğer $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \cdots = |\lambda_n| \neq 0$ ise φ'ye kuvvetli kendine (ya da tersine) dual form denir [4].*

Bu tanıma göre φ formunun kendine dual mi yoksa tersine dual mi olduğunu belirlemek için, φ^n $2n-$formuna bakılır. Eğer bu $2n-$form, hacim formunun pozitif katıysa kuvvetli kendine dual, negatif katıysa kuvvetli tersine dual form adını alır.

φ formunun kuvvetli kendine (veya tersine) dual olması, bir birimdikey tabana göre matrisinin karesinin birim matrisin bir negatif katı olmasına denktir. Yani φ formunun matrisini

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a^{12} & a^{13} & \cdots & a^{1\ 2n} \\ -a^{12} & 0 & a^{23} & \cdots & a^{2\ 2n} \\ -a^{13} & -a^{23} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a^{2n-1\ 2n} \\ -a^{1\ 2n} & -a^{2\ 2n} & \cdots & -a^{2n-1\ 2n} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterecek olursak, φ'nin kuvvetli kendine dual olması ile $A^2 = -\alpha^2 I$ $(0 \neq \alpha \in \mathbb{R})$ olması denk koşullardır.

$\mathbb{R}^{2n}$'deki kuvvetli kendine dual formlar bir alt uzay oluştururlar ve S_{2n} ile gösterilir. Bu durumda

$$S_{2n} = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^t = -A \text{ ve } A^2 = -\alpha^2 I, 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde yazılabilir. S_{2n} alt uzayı lineer olmadığından, maksimal lineer alt uzayları araştırılmış ve bu lineer alt uzayların boyutlarının $\mathbb{R}^{2n}$'nin Radon-Hurwitz sayısı olduğu gösterilmiştir [6].

2 KALİBRASYONLAR

Harvey ve Lawson [7] tarafından 1982 yılında ortaya konulan kalibrasyon teorisi, Bryant [8] ve Joyce'un [9] G_2 ve $Spin(7)$ manifoldları üzerindeki çalışmaları ile önem kazanmıştır. Hacmi minimize eden yüzeylerle olan yakın ilişkisi nedeniyle de son dönemlerde kalibrasyon teorisinde önemli çalışmalar yapılmıştır.

$\mathbb{R}^m$ vektör uzayını üzerindeki standart iç çarpım ile düşünelim ve $\mathbb{R}^m$ üzerindeki $p-$formların kümesini $\Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*$ ile gösterelim. $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$, $\mathbb{R}^m$'nin standart taban vektörleri ve $\{dx_1, dx_2, ..., dx_m\}$ de sırasıyla bu vektörlere karşılık gelen $(\mathbb{R}^m)^*$ dual uzayının elemanları olsun. Bir $\varphi \in \Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*$ formunun kalibrasyon olması şu şekilde tanımlanabilir.

Tanım 2.1 (Noktasal Kalibrasyon) $\varphi \in \Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*$ *$p-$formuna aşağıdaki koşulları sağlıyor ise bir $p-$kalibrasyon denir.*

1. *Her birimdikey $\{u_1, u_2, ..., u_p\} \in \mathbb{R}^m$ kümesi için $|\varphi(u_1, u_2, ..., u_p)| \leq 1$ olsun.*

2. *En az bir $\{u_1, u_2, ..., u_p\} \in \mathbb{R}^m$ birimdikey vektör kümesi için $|\varphi(u_1, u_2, ..., u_p)| = 1$ olsun.*

$\varphi \in \Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*$ bir kalibrasyon olsun. $p = 1$ durumununda $\varphi \in \Lambda^1(\mathbb{R}^m)^* = (\mathbb{R}^m)^*$ olmak üzere

$$\varphi = a_1dx_1 + a_2dx_2 + \cdots + a_mdx_m$$

şeklinde ifade edilen $1-$formun kalibrasyon olması için $a_1^2 + \cdots + a_m^2 = 1$ olması gerekir. Bir kalibrasyonun Hodge dualinin de yine bir kalibrasyon olduğu görülebilir ve $\mathbb{R}^m$'de verilen bir $(m-1)$-formun kalibrasyon olması için yine katsayılarının kareleri toplamının 1 olması gerekir. $p = 2$ durumunda, bir $\varphi \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})^*$ anti-simetrik bilineer dönüşümüne karşılık gelen $A = (\varphi(e_i, e_j))$

anti-simetrik matrisinin özdeğerleri φ'nin kalibrasyon olup olmadığını belirlemektedir. A matrisinin özdeğerleri $\pm i\lambda_k, k = 1, 2, ..., n$ olmak üzere φ'nin

$$\varphi = \lambda_1 dy_1 \wedge dy_2 + \lambda_2 dy_3 \wedge dy_4 + \cdots + \lambda_n dy_{2n-1} \wedge dy_{2n}$$

şeklinde ifade edilebileceği bir $\{f_1, f_2, ..., f_{2n}\}$ birimdikey tabanının varlığı bilinmektedir (burada $\{dy_1, dy_2, ..., dy_{2n}\}$, $\{f_1, f_2, ..., f_{2n}\}$'nin dual tabanıdır). Bu durumda φ 2-formunun kalibrasyon olması için

$$max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, ..., |\lambda_n|\} = 1$$

olması gerek ve yeter koşul olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu maksimumun 1 den farklı olması durumunda φ bir kalibrasyon olamaz. Yani $p = 2$ durumunda $\mathbb{R}^{2n}$'de bir 2-formun (dolayısıyla Hodge duali olan bir $(2n-2)$ formun) kalibrasyon olup olmadığına özdeğerler yardımıyla hemen karar verilebilmektedir. Fakat $2 < p < 2n-2$ için bir $p-$formun kalibrasyon olup olmadığını kontrol etmek ya da belli bir boyuttaki tüm kalibrasyonları sınıflandırmak kolay değildir. Bununla ilgili özellikle $\mathbb{R}^6$ ve $\mathbb{R}^8$ üzerinde Harvey ve ark. [10] ve Dadok ve Harvey [11] tarafından önemli çalışmalar yapılmıştır.

Örnek 2.2 *$\varphi, \phi, \psi \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$ formları*

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2}\, dx_1 \wedge dx_2 + \frac{1}{2}\, dx_3 \wedge dx_4 \\ \phi &= \frac{1}{2}\, dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 \\ \psi &= \frac{1}{2}\, dx_1 \wedge dx_2 + 2\, dx_3 \wedge dx_4 \end{aligned}$$

şeklinde verilmiş olsun. ϕ'nin $\mathbb{R}^4$ üzerinde bir kalibrasyon olmasına karşın φ ve ψ birer kalibrasyon değildir.

$\mathbb{R}^m$ vektör uzayı üzerinde tanımladığımız gibi herhangi bir iç çarpım uzayı üzerinde de verilen bir formun kalibrasyon olması benzer bir biçimde tanımlanır. Şimdi bir Riemann manifoldu üzerindeki bir form alanının kalibrasyon olmasını tanımlamaya çalışalım. M manifoldu üzerindeki düzgün $p-$formların kümesini $\Omega^p(M)$ ile gösterelim. Bu durumda bir $\varphi \in \Omega^p(M)$ formu her $x \in M$ noktasına $\varphi_x \in \Lambda^p(T_xM)^*$ $p-$formunu karşılık getirir.

Tanım 2.3 *$\varphi \in \Omega^p(M)$ $p-$form alanı verilsin. Aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise φ'ye bir $p-$kalibrasyon denir.*

1. *$d\varphi = 0$ olsun.*

2. *Her $x \in M$ noktasında, her $\{u_1, u_2, ..., u_p\} \in T_xM$ birimdikey vektör kümesi için $|\varphi_x(u_1, u_2, ..., u_p)| \leq 1$ olsun.*

3. *En az bir $x_0 \in M$ noktası için $|\varphi_{x_0}(u_1, u_2, ..., u_p)| = 1$ olacak şekilde en az bir $\{u_1, u_2, ..., u_p\} \in T_{x_0}M$ birimdikey vektör kümesi var olsun.*

$M = \mathbb{R}^m$ alalım. $\mathbb{R}^m$'nin teğet uzayları yine $\mathbb{R}^m$'nin bir kopyası olacağından $\mathbb{R}^m$ üzerindeki bir $p-$form alanının kalibrasyon olmasını şu şekilde tanımlayabiliriz.

Tanım 2.4 *$\varphi \in \Omega^p(\mathbb{R}^m)$ $p-$form alanı verilsin. Aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise φ'ye bir $p-$kalibrasyon denir.*

1. *$d\varphi = 0$ olsun.*

2. *Her $x \in \mathbb{R}^m$ noktasında, her $\{u_1, u_2, ..., u_p\} \in \mathbb{R}^m$ birimdikey vektör kümesi için $|\varphi_x(u_1, u_2, ..., u_p)| \leq 1$ olsun.*

3. *En az bir $x_0 \in \mathbb{R}^m$ noktası için $|\varphi_{x_0}(u_1, u_2, ..., u_p)| = 1$ olacak şekilde en az bir $\{u_1, u_2, ..., u_p\} \in \mathbb{R}^m$ birimdikey vektör kümesi var olsun.*

Eğer $\varphi \in \Omega^p(\mathbb{R}^m)$ sabit katsayılı ise φ kapalıdır. Şu halde φ'nin kalibrasyon olması için Tanım 2.1'de verilen koşulları sağlaması gerekir. Yani $\varphi \in \Omega^p(\mathbb{R}^m)$ formu eğer sabit katsayılı ise kalibrasyon olması için $\mathbb{R}^m$'deki her birimdikey p vektörde 1 ile üstten sınırlı olması ve bu 1 değerini en az bir p vektörde alması gerek ve yeter koşuldur.

Örnek 2.5 *$\varphi, \omega, \phi, \psi \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ formları*

$$\begin{aligned}
\varphi &= x_1\, dx_1 \wedge dx_2 + (x_3 + x_4)\, dx_3 \wedge dx_4 \\
\omega &= \frac{1}{2}\, dx_1 \wedge dx_2 + \frac{1}{2} \sin x_3\, dx_3 \wedge dx_4 \\
\phi &= dx_1 \wedge dx_2 + \frac{1}{2} dx_3 \wedge dx_4 \\
\psi &= (\cos x_2 - \frac{1}{2})\, dx_1 \wedge dx_2 + \frac{1}{2}\, dx_3 \wedge dx_4
\end{aligned}$$

şeklinde verilmiş olsun. ϕ ve ψ birer kalibrasyondur. Fakat kapalı olan φ ve ω formları kalibrasyon değildir.

$\varphi, \mathbb{R}^m$'de bir $p-$kalibrasyon ve M, $\mathbb{R}^m$'nin yönlendirilmiş p boyutlu bir alt manifoldu olsun. Eğer her $x \in M$ ve her $\{u_1, u_2, ..., u_p\} \in T_xM$ yönlendirmeye uygun sıralı birimdikey vektör kümesi için $\varphi(u_1, u_2, ..., u_p) = 1$ ise, yani φ'nin M üzerine kısıtlanmışı M üzerindeki hacim formuna eşit ise M alt manifolduna φ ile **kalibre edilmiş alt manifold** ya da kısaca φ-alt manifold denir.

$\mathbb{R}^m$'nin kompakt, kenarlı, yönlendirilmiş p boyutlu M alt manifoldu verilsin. Eğer $\partial M = \partial N$ olacak şekildeki herhangi bir N kompakt ve yönlendirilmiş alt manifoldu için $Vol(M) \leq Vol(N)$ oluyorsa M'ye **hacmi minimize eden alt manifold** denir. Bir başka ifadeyle, M manifoldu eğer hacmi minimize eden bir alt manifold ise kenarı ∂M olan manifoldlar içinde en küçük hacime sahip manifolddur. Eğer M kompakt değilse, M'nin tüm p boyutlu, kompakt, kenarlı alt manifoldları bu özelliği sağlıyorsa M'ye hacmi minimize eder denir.

$\mathbb{R}^m$'nin kalibre edilmiş alt manifoldları ile hacmi minimize eden alt manifoldları arasında çok yakın bir ilişki mevcuttur.

Teorem 2.6 *$\varphi, \mathbb{R}^m$'de bir $p-$kalibrasyon ve M, $\mathbb{R}^m$'nin kapalı yönlendirilmiş p boyutlu kenarlı bir alt manifoldu olsun. Eğer M altmanifoldu φ ile kalibre edilmiş ise, M hacmi minimize eden bir alt manifolddur [12, Teorem 7.5].*

Kanıt. N, $\partial N = \partial M$ olacak şekilde başka bir yönlendirilmiş alt manifold olsun. M, kalibre edilmiş altmanifold ve φ bir kalibrasyon olduğundan

$$\begin{aligned} Vol(M) &= \int_M d_{Vol} = \int_M \varphi \\ Vol(N) &= \int_N d_{Vol} \geq \int_N \varphi \end{aligned}$$

şeklindedir.

Ayrıca φ kapalı bir form olduğundan tamdır. Bu nedenle $d\phi = \varphi$ olacak şekilde bir ϕ $p-1$ formu vardır. Bu durumda Stokes' teoremini de kullanarak

$$\int_{M-N} \varphi = \int_{M-N} d\phi = \int_{\partial(M-N)} \phi = 0$$

bulunur. O halde

$$\int_M \varphi - \int_N \varphi = \int_{M-N} \varphi = 0 \Longrightarrow \int_M \varphi = \int_N \varphi$$

şeklindedir. Buradan da $Vol(M) \leq Vol(N)$ elde edilir. O halde M hacmi minimize eden alt manifolddur. ■

Herhangi bir manifold üzerindeki bir $p-$form kapalı ise tam olmak zorunda değildir. Bu nedenle Teorem 2.6 $\mathbb{R}^m$ yerine herhangi bir Riemann manifoldu alındığında geçerli değildir. (X, g) bir Riemann manifoldu ve M p boyutlu kompakt, yönlendirilmiş kenarlı bir alt manifold olsun. $\partial M = \partial N$ ve $[M - N] = 0$ (yani $M - N$, $p+1$ boyutlu bir gerçel A zincirinin sınırı) olacak şekildeki herhangi bir N kompakt ve yönlendirilmiş alt manifoldu için $Vol(M) \leq Vol(N)$ oluyorsa M'ye **(homolojik olarak) hacmi minimize eden** alt manifold denir.

Teorem 2.7 *φ, X'de bir $p-$kalibrasyon ve M, X'in kompakt yönlendirilmiş p boyutlu kenarlı bir alt manifoldu olsun. Eğer M bir φ-alt manifold ise M homolojik olarak hacmi minimize eden bir alt manifolddur [13, Önerme 10.10].*

Kanıt. N, $M-N$ bir A zincirinin sınırı olacak şekilde verilmiş olsun. M kalibre edilmiş altmanifold ve φ X üzerinde bir kalibrasyon olduğundan

$$\begin{aligned} Vol(M) &= \int_M d_{Vol} = \int_M \varphi \\ Vol(N) &= \int_N d_{Vol} \geq \int_N \varphi \end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca $d\varphi = 0$ olduğundan

$$\int_M \varphi - \int_N \varphi = \int_{M-N} \varphi = \int_{\partial A} \varphi = \int_A d\varphi = 0$$

olarak bulunur. O halde $Vol(M) \leq Vol(N)$ dir. Yani M homolojik olarak hacmi minimize eden bir alt manifolddur. ■

Bu temel teorem sayesinde kalibrasyonlar hacmi minimize eden yüzeyler elde etmek için çok güçlü bir araç olmuştur. Bununla ilgili $\mathbb{R}^m$'de çeşitli çalışmalar yapılmıştır [11- 14, 17]. Özellikle Morgan'ın kalibre edilmiş alt manifoldlarla ilgili farklı bir yaklaşım geliştirdiği çalışması [18] bu konuda önemli bir çalışmadır.

Kalibrasyon teorisinde yapılan çalışmalar genel olarak $\mathbb{R}^m$'deki sabit katsayılı formları kapsamaktadır.

Örnek 2.8 *$\{e_1, e_2, ..., e_7\}$, $\mathbb{R}^7$'nin standart taban vektörleri ve $\{dx_1, dx_2, ..., dx_7\}$ de sırasıyla bu vektörlere karşılık gelen $(\mathbb{R}^7)^*$ dual uzayının elemanları olsun. $dx_{ij\cdots k} = dx_i \wedge dx_j \wedge \cdots \wedge dx_k$ olmak üzere*

$$\varphi = dx_{123} + dx_{145} - dx_{167} + dx_{246} + dx_{257} + dx_{347} - dx_{356}$$

şeklinde verilen 3-form [7, Teorem IV.1.4]'den dolayı bir kalibrasyondur ve $\mathbb{R}^7$'deki asosyatif kalibrasyon olarak bilinir. φ'nin kalibre ettiği alt manifoldlara da asosyatif alt manifoldlar denir. Teorem 2.6'dan tüm bu asosyatif alt manifoldların hacmi minimize eden alt manifoldlar olduğu söylenebilir. Ayrıca φ'nin Hodge duali olan ve

$$*\varphi = dx_{4567} + dx_{2367} - dx_{2345} + dx_{1357} + dx_{1346} + dx_{1256} - dx_{1247}$$

4-*formu da bir kalibrasyondur ve* $\mathbb{R}^7$*'deki ko-asosyatif kalibrasyon olarak bilinir.* $*\varphi$*'nin kalibre ettiği alt manifoldlara da ko-asosyatif alt manifoldlar denir. Yine Teorem 2.6'dan* $\mathbb{R}^7$*'deki ko-asosyatif alt manifoldlar da hacmi minimize eden alt manifoldlardır.*

Örnek 2.9 $\{e_1, e_2, ..., e_8\}$, $\mathbb{R}^8$*'in standart taban vektörleri ve* $\{dx_1, dx_2, ..., dx_8\}$ *de sırasıyla bu vektörlere karşılık gelen* $(\mathbb{R}^8)^*$ *dual uzayının elemanları olsun.* $dx_{ij\cdots k} = dx_i \wedge dx_j \wedge \cdots \wedge dx_k$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}\Phi &= dx_{1234} + dx_{1256} + dx_{1278} + dx_{1357} - dx_{1368} - dx_{1458} - dx_{1467} \\ &\quad + dx_{5678} + dx_{3478} + dx_{3456} + dx_{2468} - dx_{2457} - dx_{2367} - dx_{2358}\end{aligned}$$

şeklinde verilen 4*-form [7, Teorem IV.1.24]'den dolayı bir kalibrasyondur ve Cayley kalibrasyonu olarak bilinir.* Φ*'nin kalibre ettiği alt manifoldlara Cayley alt manifoldlar denir ve Teorem 2.6'dan dolayı Cayley alt manifoldları hacmi minimize eden alt manifoldlardır.*

Örnek 2.10 *Standart* $\mathbb{C}-$*hermitsel iç çarpımıyla donatılmış olan* $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ *manifoldunu düşünelim.* $\{z_k = x_k + iy_k, k = 1, 2, ..., n\}$ $\mathbb{C}^n$*'nin birimdikey bir tabanı ve* dz_k *ilgili dual elemanlar olmak üzere*

$$\begin{aligned}w &= \frac{i}{2} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + \cdots + \frac{i}{2} dz_n \wedge d\bar{z}_n \\ &= dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + \cdots + dx_n \wedge dy_n\end{aligned}$$

şeklinde verilen w $2-$*formu Kähler form olarak adlandırılır ve bir kalibrasyondur. Dahası, (* $2p < 2n$ *olmak üzere)* $\frac{1}{p!} w^p$ *formu da Wirtinger eşitsizliğinin bir sonucu olarak [12, Teorem 7.10]'dan bir* $2p-$*kalibrasyondur.* $\frac{1}{p!} w^p$ *kalibrasyonu ve Teorem 2.6 yardımıyla* $\mathbb{C}^n$*'nin her kompleks alt manifoldunun hacmi minimize eden bir alt manifold olduğu söylenebilir.*

Örnek 2.11 *Yine standart* $\mathbb{C}-$*hermitsel iç çarpımıyla donatılmış* $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$

manifoldunu düşünelim. $dz = dz_1 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_n$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} \phi &= Re(dz) \\ &= \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \\ &= Re[(dx_1 + idy_1) \wedge \cdots \wedge (dx_n + idy_n)] \end{aligned}$$

olarak verilen ϕ $n-$*formu [12, Teorem 7.26]'dan bir kalibrasyondur ve bu kalibrasyon yardımıyla* $\mathbb{C}^n$*'nin her bir özel Lagrangian alt manifoldunun hacmi minimize eden alt manifold olduğu söylenebilir.*

Örnek 2.12 $u_1, u_2, ..., u_p$ *birim imajiner kuaterniyonlar olmak üzere*

$$\phi_u = Re[(dx_1 + u_1 dx_{p+1}) \wedge \cdots \wedge (dx_p + u_p dx_{2p})]$$

olarak tanımlanan ϕ $p-$*formu [12, Önerme 7.146]'dan* $\mathbb{R}^{2p}$*'de bir kalibrasyondur ve Nance kalibrasyonları olarak bilinmektedir.*

3 NORMLU DUALİTE

Baez'in oktonyonlar üzerinde yaptığı çalışmasında [19] trialite kavramı ile bölüm cebri kavramları incelenmiş ve bir vektör uzayı üzerinde verilen trialitenin aynı vektör uzayı üzerinde bir bölüm cebri belirlediği ve tersine bir bölüm cebrinin bir trialite belirlediği gösterilmiştir. Normlu bölüm cebirlerine ulaşmak için de normlu trialite kavramı kullanılmış ve benzer biçimde bir normlu trialitenin bir normlu bölüm cebri verdiği ve tersine bir normlu bölüm cebrinin de ilgili vektör uzayı üzerinde bir normlu trialite belirlediği sonucuna ulaşılmıştır. Bu çalışmadaki normlu trialite kavramından hareketle, kalibrasyonlar ve kendine dual formlarla ilintili gördüğümüz normlu dualite kavramını tanımlayalım.

3.1 Normlu Dualite Tanımı Ve Ortogonal Matrisler

V_1, V_2, V_3 birer iç çarpım uzayları olsunlar. Önce dualite, trialite ve normlu trialite tanımlarını verelim.

Tanım 3.1.1 $b : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}$ *dejenere olmayan bir bilineer dönüşüme dualite denir.*

Tanım 3.1.2 $t : V_1 \times V_2 \times V_3 \to \mathbb{R}$ *multilineer dönüşümüne, herhangi iki bileşeni sıfırdan farklı seçildiğinde belirlediği dönüşüm sıfırdan farklı ise bir trialite denir.*

Tanım 3.1.3 $t : V_1 \times V_2 \times V_3 \to \mathbb{R}$ *multilineer dönüşümüne aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir normlu trialite denir.*

- $\forall\, (v_1, v_2, v_3) \in V_1 \times V_2 \times V_3$ *için* $|t(v_1, v_2, v_3)| \leq \|v_1\|\,\|v_2\|\,\|v_3\|$ *olsun.*
- *Herhangi iki bileşen sabitlendiğinde* $|t(v_1, v_2, v_3)| = \|v_1\|\,\|v_2\|\,\|v_3\|$ *olacak şekilde diğer bileşen var olsun.*

Bu durumda normlu dualite tanımımızı şu şekilde almak uygun olacaktır. Bu aşamadan sonra amacımıza uygun olarak $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^m$ (üzerindeki standart iç çarpım ile) alalım.

Tanım 3.1.4 (Normlu Dualite) *$b : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümüne aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir normlu dualite denir.*

1. $\forall\,(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ *için* $|b(u, v)| \leq \|u\| \, \|v\|$.

2. $\forall u \in \mathbb{R}^m$ *için* $\exists v \in \mathbb{R}^m$ *öyle ki* $|b(u, v)| = \|u\| \, \|v\|$.

3. $\forall v \in \mathbb{R}^m$ *için* $\exists u \in \mathbb{R}^m$ *öyle ki* $|b(u, v)| = \|u\| \, \|v\|$.

Verdiğimiz bu tanım aşağıdaki tanıma denktir.

Tanım 3.1.5 (Normlu Dualite - 1) *$b : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümüne aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir normlu dualite denir.*

1.* $\forall\,(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ *ve* $\|u\| = \|v\| = 1$ *için* $|b(u, v)| \leq 1$.

2.* $\forall u \in \mathbb{R}^m$ *ve* $\|u\| = 1$ *için* $\exists v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$ *öyle ki* $|b(u, v)| = 1$.

3.* $\forall v \in \mathbb{R}^m$ *ve* $\|v\| = 1$ *için* $\exists u \in \mathbb{R}^m$, $\|u\| = 1$ *öyle ki* $|b(u, v)| = 1$.

Şimdi normlu dualite için 2 farklı tanım daha vereceğiz. Bu tartışmanın sonunda normlu dualite tanımını, denk ama en basit şekliyle vermek istiyoruz.

Tanım 3.1.6 (Normlu Dualite - 2) *$b : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümüne aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir normlu dualite denir.*

1.* $\forall\,(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ *ve* $\|u\| = \|v\| = 1$ *için* $|b(u, v)| \leq 1$.

2.* $\forall u \in \mathbb{R}^m$ *ve* $\|u\| = 1$ *için* $\exists v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$ *öyle ki* $|b(u, v)| = 1$.

Tanım 3.1.7 (Normlu Dualite - 3) $b : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *bilineer dönüşümüne aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir normlu dualite denir.*

1.* $\forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ *ve* $\|u\| = \|v\| = 1$ *için* $|b(u,v)| \leq 1$.

3.* $\forall v \in \mathbb{R}^m$ *ve* $\|v\| = 1$ *için* $\exists u \in \mathbb{R}^m$, $\|u\| = 1$ *öyle ki* $|b(u,v)| = 1$.

Bir b bilineer dönüşümünün birimdikey bir tabana göre matrisini B ile gösterelim. Bu noktada, bir B matrisinin ortogonal olması için gerek ve yeter koşulun

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \text{ ve } \|x\| = 1 \text{ için } \|Bx\| = 1$$

olduğunu vurgulayalım.

Verdiğimiz üç normlu dualite tanımı da b bilineer dönüşümünün nondejenere olduğunu söyler (b simetrik olmak zorunda olmadığından b bilineer dönüşümünün nondejenere olması için gerek ve yeter koşul soldan ve sağdan nondejenere olmasıdır. Fakat soldan ve sağdan nondejenere olmanın da birbirini gerektirdiğine işaret edelim). Yukarıdaki tanımların denk olduğunu görmeden önce aşağıdaki önermeyi ispat etmeye çalışalım.

Bundan da önce, şu hatırlatmaları yapmış olalım. $\mathbb{R}^m$'nin bir birimdikey $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ tabanı verilsin ve bu tabana göre b bilineer dönüşümünün matrisi B olsun. $u, v \in \mathbb{R}^m$ ve

$$\begin{aligned} u &= u_1e_1 + u_2e_2 + \cdots + u_me_m \\ v &= v_1e_1 + v_2e_2 + \cdots + v_me_m \end{aligned}$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
b(u,v) &= b(u_1e_1+u_2e_2+\cdots+u_me_m, v_1e_1+v_2e_2+\cdots+v_me_m) \\
&= \sum_{i,j} u_iv_jb(e_i,e_j) \\
&= \sum_{i,j} u_iv_jb_{ij} \\
&= \sum_{i,j} u_ib_{ij}v_j \\
&= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b_{(m-1)m} \\ b_{m1} & \cdots & b_{m(m-1)} & b_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \\
&= u^tBv
\end{aligned}
$$

şeklinde ifade edilebilir. Bunun yanında, seçtiğimiz taban birimdikey olduğundan $u^tBv = \langle u, Bv\rangle$ eşitliği sağlanır.

Bu noktadan itibaren, $\mathbb{R}^m$'nin herhangi bir birimdikey tabanında çalıştığımızı kabul edelim.

Önerme 3.1.8 *$b : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümü normlu dualitedir (3. tanıma göre) $\Longleftrightarrow$ B bir ortogonal matristir.*

Kanıt. $\Longrightarrow$ b normlu dualite olsun. $(u,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ için

$$|b(u,v)| = \left|u^tBv\right| = |\langle u, Bv\rangle|$$

dir. v, $\|v\| = 1$ ve $\|Bv\| \neq 0$ olan herhangi bir vektör olmak üzere $u = \dfrac{Bv}{\|Bv\|}$ alırsak u birim vektör olur ve

$$
\begin{aligned}
|b(u,v)| &= \left|u^tBv\right| \\
&= |\langle u, Bv\rangle| \\
&= \left|\left\langle \frac{Bv}{\|Bv\|}, Bv \right\rangle\right| \\
&= \frac{1}{\|Bv\|}\,\|Bv\|^2 \\
&= \|Bv\|
\end{aligned}
$$

olur. Normlu dualite olmanın birinci koşulundan da yararlanırsak u ve v birim vektör olduklarından $|b(u,v)| = \|Bv\| \leq 1$ olmak zorundadır. Yani her v birim vektörü için $\|Bv\| \leq 1$ olmalıdır.

Ayrıca her v için en az bir u birim vektörü var ki $|b(u,v)| = 1$ dir. Yani

$$1 = |b(u,v)| = |\langle u, Bv\rangle| \leq \|u\| \, \|Bv\| = \|Bv\|$$

olduğundan her v birim vektörü için $\|Bv\| \geq 1$ olur. Bu durumda her $v \in \mathbb{R}^m$ ve $\|v\| = 1$ için $\|Bv\| = 1$ elde edilmiş olur ki bu da B matrisinin ortogonal olduğunu gösterir.

$\Longleftarrow$ B ortogonal olsun. Yani her $v \in \mathbb{R}^m$ ve $\|v\| = 1$ için $\|Bv\| = 1$ olsun. b bir normlu dualite mi?

Öncelikle $|b(u,v)| = |\langle u, Bv\rangle| \leq \|u\| \, \|Bv\| = 1.1 = 1$ olduğundan ilk koşul açık. Bir keyfi v birim vektörü alalım. Bu durumda Bv vektörü de birim vektördür. $u = Bv$ alırsak u birim vektör olur ve

$$|b(u,v)| = |\langle u, Bv\rangle| = |\langle Bv, Bv\rangle| = |\langle v, v\rangle| = 1$$

olarak elde edilir. Yani bu durumda b bir normlu dualitedir. ■

Şimdi de verdiğimiz önermeyi normlu dualitenin 2. tanımı için kontrol edelim.

Önerme 3.1.9 *$b : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümü normlu dualitedir (2. tanıma göre) $\Longleftrightarrow$ B bir ortogonal matristir.*

Kanıt. $\Longrightarrow$ b normlu dualite olsun. $(u,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ için

$$|b(u,v)| = \left|u^t Bv\right| = |\langle u, Bv\rangle| = \left|\left\langle B^t u, v\right\rangle\right|$$

dir. u, $\|u\| = 1$ ve $\|B^t u\| \neq 0$ olan herhangi bir vektör olmak üzere $v = \dfrac{B^t u}{\|B^t u\|}$ alırsak v birim vektör olur ve

$$
\begin{aligned}
|b(u,v)| &= \left|u^t B v\right| \\
&= \left|\left\langle B^t u, v\right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle B^t u, \frac{B^t u}{\|B^t u\|}\right\rangle\right| \\
&= \frac{1}{\|B^t u\|}\left\|B^t u\right\|^2 \\
&= \left\|B^t u\right\|
\end{aligned}
$$

olur. Normlu dualite olmanın birinci koşulundan da yararlanırsak u ve v birim vektör olduklarından $|b(u,v)| = \|B^t u\| \leq 1$ olmak zorundadır. Yani her u birim vektörü için $\|B^t u\| \leq 1$ olmalıdır.

Ayrıca her u için en az bir v birim vektörü var ki $|b(u,v)| = 1$ idi. Yani

$$1 = |b(u,v)| = |\langle u, Bv\rangle| = \left|\left\langle B^t u, v\right\rangle\right| \leq \left\|B^t u\right\| \|v\| = \left\|B^t u\right\|$$

olduğundan her v birim vektörü için $\|B^t u\| \geq 1$ olur. Bu durumda her $u \in \mathbb{R}^m$ ve $\|u\| = 1$ için $\|B^t u\| = 1$ elde edilmiş olur ki bu da B^t matrisinin ortogonal olduğunu gösterir.

Öte yandan B^t ortogonal olduğundan tersi transpozuna eşittir. Yani

$$(B^t)^{-1} = B^{t^t} \Longrightarrow (B^t)^{-1} = B$$

dir. B^t ortogonal olduğundan $(B^t)^{-1}$ de ortogonaldir. Bu durumda $(B^t)^{-1} = B$ olduğundan B nin ortogonal olduğunu söyleyebiliriz.

$\Longleftarrow$ B ortogonal olsun. Yani her $u \in \mathbb{R}^m$ ve $\|u\| = 1$ için $\|Bu\| = 1$ olsun. b bir normlu dualite mi?

Öncelikle $|b(u,v)| = |\langle u, Bv\rangle| \leq \|u\| \|Bv\| = 1.1 = 1$ olduğundan ilk koşul açık. $u \in \mathbb{R}^m$ ve $\|u\| = 1$ alalım. B ortogonal olduğundan tersi vardır, o halde $v = B^{-1}u$ vektörü vardır. B ortogonal olduğundan B^{-1} de ortogonal olacağından $B^{-1}u$ vektörü birim vektördür. Bu durumda $u \in \mathbb{R}^m$ ve $\|u\| = 1$ için $B^{-1}u$ birim vektör olmak üzere

$$|b(u,v)| = |\langle u, Bv\rangle| = \left|\left\langle u, BB^{-1}u\right\rangle\right| = |\langle u, u\rangle| = 1$$

olarak elde edilir Yani her u birim vektörü için $v = B^{-1}u$ birim vektörü vardır ki $|b(u,v)| = 1$ olur. Yani 2^* koşulu da sağlanmış olur.

Bu durumda b bilineer dönüşümünün normlu dualite olması için gerek ve yeter koşul B matrisinin ortogonal olmasıdır. ∎

Açıktır ki normlu dualitenin birinci tanımındaki üç koşul, son iki tanımdaki koşullardan oluştuğundan, b bilineer dönüşümü 1. tanıma göre normlu dualite iken de önerme doğruluğunu koruyacaktır. Yani verdiğimiz önerme normlu dualitenin 1. tanımı için de geçerlidir. Buradan bu üç tanımın denk tanımlar olduğu sonucuna varırız. Yolumuza bu üç tanımın da denk olduğunu hatırlayarak, normlu dualitenin 2. tanımını alarak devam edeceğiz.

Tanım 3.1.10 (Normlu Dualite) $b : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *bilineer dönüşümüne aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir normlu dualite denir.*

i. $\forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ *ve* $\|u\| = \|v\| = 1$ *için* $|b(u,v)| \leq 1$.

ii. $\forall u \in \mathbb{R}^m$ *ve* $\|u\| = 1$ *için* $\exists v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$ *öyle ki* $|b(u,v)| = 1$.

Sonuç 3.1.11 $b : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *bilineer dönüşümünün normlu dualite olması için gerek ve yeter koşul birimdikey bir tabana göre matrisinin ortogonal olmasıdır.*

Bu noktada, bir ortogonal matrisin özdeğerlerinin normunun 1 olması gerektiğini hatırlatalım. O halde, b bir normlu dualite ise, birimdikey bir tabana göre matrisinin özdeğerlerinin normunun 1 olması gerekmektedir.

3.2 Simetrik Ve Anti-simetrik Normlu Dualiteler

$\mathbb{R}^m$ üzerinde bir b simetrik bilineer dönüşümü verildiğinde, öyle bir birimdikey $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ tabanı vardır ki, b nin bu tabana göre matrisi, $i = 1, 2, ..., m$ için b_i özdeğerleri göstermek üzere

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_m \end{pmatrix}$$

şeklindedir. b simetrik bilineer dönüşümü eğer normlu dualite ise Sonuç 3.1.11'den B matrisi ortogonaldir. Bu durumda da $i = 1, 2, ..., m$ için $|b_i| = 1$ olması gerektiği elde edilmiş olur.

Sonuç 3.2.1 *Özdeğerleri b_i $(i = 1, 2, ..., m)$ olan bir b simetrik bilineer dönüşümünün normlu dualite olması için gerek ve yeter koşul $|b_i| = 1$ $(i = 1, 2, ..., m)$ olmasıdır.*

b anti-simetrik bilineer dönüşüm olsun. Öncelikle $\mathbb{R}^{2n+1}$'de anti-simetrik ortogonal matris bulunamayacağından $m = 2n$ olmalıdır. b anti-simetrik bilineer bir dönüşüm olduğu için, birimdikey bir tabana göre karşılık getirdiğimiz matrisi, A diyelim, anti-simetriktir ve bu nedenle öyle bir $\{f_1, f_2, ..., f_{2n}\}$ birimdikey tabanı vardır ki bu tabana göre matrisi, $k = 1, 2, ..., n$ için $\pm i\lambda_k$ özdeğerleri göstermek üzere

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix}_{2n \times 2n}$$

şeklindedir. b anti-simetrik bilineer dönüşümü eğer normlu dualite ise Sonuç 3.1.11'den B matrisi ortogonaldir. Bu durumda da $k = 1, 2, ..., n$ için $|\lambda_k| = 1$ olması gerektiği elde edilmiş olur.

Sonuç 3.2.2 *Özdeğerleri $\pm i\lambda_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ olan bir b anti-simetrik bilineer dönüşümünün normlu dualite olması için gerek ve yeter koşul $k = 1, 2, ..., n$ için $|\lambda_k| = 1$ olmasıdır.*

Buna göre, eğer bir b bilineer dönüşüm simetrik veya anti-simetrik ise özdeğerleri yardımıyla normlu dualite olup olmadığına karar verebiliriz. Acaba keyfi bir b bilineer dönüşümü için ne söyleyebiliriz? Akla ilk gelen soru, bir b bilineer dönüşümü normlu dualite ise simetrik veya anti-simetrik olmak zorunda mıdır?

Örnek 3.2.3 *$\mathbb{R}^3$'de standart tabana göre matrisi*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olan bilineer dönüşüm simetrik veya anti-simetrik değildir. Fakat matrisi ortogonal olduğundan bir normlu dualitedir.

$b : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bilineer formu verilsin. Bu durumda

$$\begin{array}{rccc} b^+ : & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \longmapsto & \frac{1}{2}\left[b(u, v) + b(v, u)\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} b^- : & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \longmapsto & \frac{1}{2}\left[b(u, v) - b(v, u)\right] \end{array}$$

bilineer dönüşümleri sırasıyla simetrik ve anti-simetrik dönüşümler olup her $u, v \in \mathbb{R}^m$ için

$$b(u, v) = b^+(u, v) + b^-(u, v)$$

olarak yazılabilir. Acaba b bilineer dönüşümünün normlu dualite olması ile, b^+ ve b^- bilineer dönüşümlerinin normlu dualite olması arasında nasıl bir ilişki vardır?

i) b^+ ve b^- normlu dualite

ii) b^- normlu dualite, b^+ normlu dualite değil

iii) b^- normlu dualite değil, b^+ normlu dualite

iv) b^+ ve b^- normlu dualite değil

durumları söz konusu olabilir. Bu 4 durum için de ayrı ayrı b bilineer dönüşümünün normlu dualite olup olmadığını inceleyelim.

i) b^+ ve b^- normlu dualite ise

Bu durumda b normlu dualite olamaz. Varsayalım b normlu dualite olsun. Herhangi bir x birim vektörü için $\exists y_0 \neq 0$ vektörü vardır ki

$$b^+(x, y_0) = \frac{1}{2}(b(x, y_0) + b(y_0, x)) = \|x\| \, \|y_0\| = \|y_0\|$$

dir. Bu x için b^- normlu dualite olduğundan $\exists y_1 \neq 0$ vektörü vardır ki

$$b^-(x, y_1) = \frac{1}{2}(b(x, y_1) - b(y_1, x)) = \|x\| \, \|y_1\| = \|y_1\|$$

dir. Elde edilen iki eşitliği taraf tarafa toplarsak

$$b(x, y_0 + y_1) + b(y_0 - y_1, x) = 2(\|y_0\| + \|y_1\|)$$

elde edilir. b normlu dualite olduğundan

$$b(x, y_0 + y_1) \leq \|x\| \, \|y_0 + y_1\| = \|y_0 + y_1\|$$

$$b(y_0 - y_1, x) \leq \|y_0 - y_1\| \, \|x\| = \|y_0 - y_1\|$$

şeklindedir. Buradan

$$2(\|y_0\| + \|y_1\|) \leq (\|y_0 + y_1\| + \|y_0 - y_1\|)$$

elde edilir. Öte yandan üçgen eşitsizliğinden

$$\|y_0 + y_1\| \leq \|y_0\| + \|y_1\| \ , \ \|y_0 - y_1\| \leq \|y_0\| + \|y_1\|$$

olduğundan

$$2(\|y_0\| + \|y_1\|) \geq (\|y_0 + y_1\| + \|y_0 - y_1\|)$$

şeklindedir. O halde bu y_0 ve y_1 için

$$2(\|y_0\| + \|y_1\|) = (\|y_0 + y_1\| + \|y_0 - y_1\|)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Bu da sadece

$$\|y_0 + y_1\| = \|y_0\| + \|y_1\| = \|y_0 - y_1\|$$

durumunda sağlanabilir. Ama bu son iki eşitlik aynı anda sağlanamaz. Çünkü $\|y_0 + y_1\| = \|y_0\| + \|y_1\|$ ise $y_1 = \lambda y_0$ olmalıdır. Bu durumda

$$\|y_0 + y_1\| = \|y_0 + \lambda y_0\| = (1 + \lambda)\|y_0\| = (1 - \lambda)\|y_0\| = \|y_0 - y_1\|$$

den $\lambda = 0$, bu durumda $y_1 = 0$ bulunur ki bu da aradığımız çelişkidir. Dualiteden varlığını bildiğimiz y_1 sıfırdan farklı bir vektör idi. O halde sırasıyla simetrik ve anti-simetrik iki normlu dualitenin toplamı normlu dualite olamaz.

Örnek 3.2.4 $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$b(x, y) = (x_1y_1 + x_2y_2) + (x_1y_2 - x_2y_1)$$

bilineer dönüşümünü düşünelim. Sonuç 3.2.1 ve Sonuç 3.2.2 nedeniyle $b^- = (x_1y_2 - x_2y_1)$ *ve* $b^+ = (x_1y_1 + x_2y_2)$ *bilineer dönüşümleri birer normlu dualitedir. Fakat* $b = b^+ + b^-$ *bilineer dönüşümü bir normlu dualite değildir. Çünkü* $x = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *ve* $y = (0, 1)$ *birim vektörleri için* $b(x, y) = \frac{2}{\sqrt{2}} > 1$ *dir. Normlu dualite olmanın ilk koşulu sağlanmaz.*

ii) b^- **normlu dualite ama** $b^+ \neq 0$ **normlu dualite değil ise**

Bu durumda da b normlu dualite olamaz. Varsayalım b normlu dualite olsun. b^- normlu dualite olduğundan bu durum tek boyutta söz konusu değildir. O halde $m = 2n$ olsun. b^- nin matrisi B^- olmak üzere, B^- anti-simetrik olduğundan öyle bir birimdikey $\{f_1, f_2, ..., f_{2n}\}$ tabanı vardır ki bu tabana göre B^- nin ifadesi

$$B^- = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

şeklindedir. b^- normlu dualite olduğundan $k = 1, 2, ..., n$ için $|\lambda_k| = 1$ olmalıdır. Ayrıca b^+ simetrik bilineer dönüşüm olduğundan, yine bu tabana göre matrisi

$$B^+ = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1\ 2n} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2\ 2n} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & b_{2n-1\ 2n} \\ b_{1\ 2n} & b_{2\ 2n} & \cdots & b_{2n-1\ 2n} & b_{2n\ 2n} \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

şeklindedir.

Öncelikle $|b^-(f_1, f_2)| = |\lambda_1| = 1$ olduğundan $b^+(f_1, f_2) = b^+(f_2, f_1) = 0$ dır. Bunu hemen görebiliriz. b normlu dualite olduğundan

$$|b(f_1, f_2)| = \left|b^+(f_1, f_2) + b^-(f_1, f_2)\right| \leq 1$$

olmalıdır. $b^-(f_1, f_2) = 1$ olsun. Eğer $b^+(f_1, f_2) > 0$ ise bu bir çelişki olur. Eğer $b^+(f_1, f_2) < 0$ ise bu durumda da $b^+(f_2, f_1) < 0$ olur ve bu da $b^-(f_2, f_1) = -1$ olduğundan

$$|b(f_2, f_1)| = \left|b^+(f_2, f_1) + b^-(f_2, f_1)\right| \leq 1$$

oluşu ile çelişir. O halde $b^+(f_1, f_2) = b^+(f_2, f_1) = b_{12} = 0$ dır. Benzer biçimde $b_{34} = b_{56} = \cdots = b_{2n-1\ 2n} = 0$ olarak bulunur.

Ayrıca, eğer b normlu dualite ise, karşılık getirdiğimiz B matrisi ortogonal matris olmak zorundadır. Bu durumda her x birim vektörü için $\|Bx\| = 1$

olmak zorundadır. $x = (1, 0, 0, ..., 0)$ alalım. Bu durumda $|\lambda_1| = 1$ olduğunu da kullanarak

$$\|Bx\| = \sqrt{b_{11}^2 + (b_{12} \pm 1)^2 + b_{13}^2 + b_{14}^2 + \cdots + b_{1\ 2n}^2} = 1$$

elde edilir. $b_{12} = 0$ olduğundan

$$b_{11}^2 + 1 + b_{13}^2 + b_{14}^2 + \cdots + b_{1\ 2n}^2 = 1$$

olmalıdır ki buradan $b_{11} = b_{13} = b_{14} = \cdots = b_{1\ 2n} = 0$ elde edilir. Benzer biçimde $x = (0, 1, 0, 0, ..., 0)$ vektörünü aldığımızda $b_{34} = 0$ olduğunu da kullanarak $b_{22} = b_{23} = b_{24} = \cdots = b_{2\ 2n} = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam edilir ve en son $x = (0, 0, 0, ..., 0, 1)$ vektörü kullanılırsa $b_{2n\ 2n} = 0$ bulunur. O halde b^- normlu dualite iken b nin normlu dualite olması için $b^+ = 0$ olmalıdır. Bu da en baştaki seçimimizle çelişir. O halde bu durumda da b normlu dualite olamaz.

Örnek 3.2.5 $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$b(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_1 + x_2y_2) + (x_1y_2 - x_2y_1)$$

bilineer dönüşümünü düşünelim. Sonuç 3.2.1 ve Sonuç 3.2.2 nedeniyle $b^- = (x_1y_2 - x_2y_1)$ *ve* $b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_1 + x_2y_2)$ *şeklindedir ve* b^- *normlu dualite iken* b^+ *normlu dualite değildir. Ve* $b = b^+ + b^-$ *bilineer dönüşümü de bir normlu dualite değildir. Çünkü* $x = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *ve* $y = (0, 1)$ *birim vektörleri için* $b(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} > 1$ *dir. Normlu dualite olmanın ilk koşulu sağlanmaz.*

iii) $b^- \neq 0$ **normlu dualite değil ama** b^+ **normlu dualite ise**

Bu durumda da yine b normlu dualite olamaz. Varsayalım b normlu dualite olsun. b^+ simetrik bilineer dönüşüm olduğundan öyle bir birimdikey $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ tabanı vardır ki bu tabana göre B^+ nın ifadesi

$$B^+ = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_m \end{pmatrix}_{m \times m}$$

şeklindedir. b^+ normlu dualite olduğundan $i = 1, 2, ..., m$ için $|c_i| = 1$ olmalıdır. Ayrıca b^- anti-simetrik bilineer dönüşüm olduğundan, yine bu tabana göre matrisi

$$B^- = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1m} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2m} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & b_{m-1,m} \\ -b_{1m} & -b_{2m} & \cdots & -b_{m-1,m} & 0 \end{pmatrix}_{m \times m}$$

şeklindedir. Burada da bir önceki durumda vurguladığımız gibi eğer b normlu dualite ise her x birim vektörü için $\|Bx\| = 1$ olmak zorundadır. $x = (1, 0, 0, ..., 0)$ alalım. Bu durumda

$$\|Bx\| = \sqrt{c_1^2 + b_{12}{}^2 + b_{13}^2 + b_{14}^2 + \cdots + b_{1m}^2} = 1$$

olmalıdır. $c_1^2 = 1$ olduğundan

$$1 + b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{14}^2 + \cdots + b_{1m}^2 = 1$$

olmalıdır ki buradan $b_{12} = b_{13} = b_{14} = \cdots = b_{1m} = 0$ elde edilir. Benzer biçimde $x = (0, 1, 0, 0, ..., 0)$ vektörünü aldığımızda $c_2^2 = 1$ olduğunu da kullanarak $b_{23} = b_{24} = \cdots = b_{2m} = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam edilir ise B^- nin tüm bileşenleri 0 olarak bulunur. O halde b^+ normlu dualite iken b nin normlu dualite olması için $b^- = 0$ olmalıdır. Bu da en baştaki seçimimizle çelişir. O halde bu durumda da b bilineer dönüşümü normlu dualite olamaz.

Örnek 3.2.6 $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$b(x, y) = (x_1y_1 + x_2y_2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

bilineer dönüşümünü düşünelim. Sonuç 3.2.1 ve Sonuç 3.2.2 nedeniyle $b^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 - x_2y_1)$ *ve* $b^+ = (x_1y_1 + x_2y_2)$ *şeklindedir ve* b^+ *normlu dualite iken* b^- *normlu dualite değildir. Ve* $b = b^+ + b^-$ *bilineer dönüşümü de bir normlu dualite değildir. Çünkü* $x = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *ve* $y = (0, 1)$ *birim vektörleri için* $b(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} > 1$ *dir. Normlu dualite olmanın ilk koşulu sağlanmaz.*

iv) $b^+ \neq 0$ ve $b^- \neq 0$ normlu dualite değil ise

$b = b^+ + b^-$ olmak üzere, b^+ ve b^- normlu dualite değil iken b bilineer dönüşümü normlu dualite olabilir. Bir örnek verelim.

Örnek 3.2.7 $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$b(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_1 + x_2y_2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

şeklinde verilen bilineer dönüşüm bir normlu dualitedir. Fakat

$$b^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 - x_2y_1) \text{ ve } b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_1 + x_2y_2)$$

bilineer dönüşümleri birer normlu dualite değillerdir.

Peki b bilineer dönüşümü b^+ ve b^- normlu dualite değil iken ne zaman bir normlu dualitedir? Bu soruya $n = 2$ durumunda cevap verelim.

$b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $b = b^+ + b^-$ olsun. Matrisleri sırasıyla B^+ ve B^- olan $b^+ \neq 0$ ve $b^- \neq 0$ dönüşümleri normlu dualite olmasın. Bu durumda b normlu dualitedir ancak ve ancak $b^2 + \lambda^2 = 1$ olmak üzere

$$B^+ = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad , \quad B^- = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

formundadır. b'nin matrisinin simetrik veya anti-simetrik olmayan ortogonal bir matris olması gerekliliğinden sonuca hemen ulaşabiliriz.

İstenilen boyutta normlu dualite örnekleri elde etmek için, bir ortogonal matrisin Jordan formu kullanılabilir.

4 KUVVETLİ KALİBRASYONLAR

Bu tez kapsamındaki en önemli hedef, tamamen birbirinden bağımsız tanımlanan kalibrasyonlar ile kendine dual formlar arasındaki ilişkiyi belirlemektir. Bunun için klasik kalibrasyon kavramının ilave koşullarla zenginleştirilmesi gerektiği görülmüştür.

$\{e_1, e_2, ..., e_m\}$, $\mathbb{R}^m$'nin standart taban vektörleri ve $\{dx_1, dx_2, ..., dx_m\}$ de sırasıyla bu vektörlere karşılık gelen dual uzayın elemanları olsun. Farklı bir taban vurgulanmadıkça bu tabanlarla çalışılacaktır.

4.1 $\mathbb{R}^{2n}$'de Kuvvetli $p-$Kalibrasyonlar

Klasik kalibrasyon tanımının 2. şartını değiştirip, daha kuvvetli koşullar içermesi nedeniyle adına kuvvetli kalibrasyon diyeceğimiz tanımı yapalım.

Tanım 4.1.1 (Noktasal Kuvvetli Kalibrasyon) *$\varphi \in \Lambda^p (\mathbb{R}^m)^*$ $p-$formuna aşağıdaki koşulları sağlıyor ise bir **kuvvetli** $p-$**kalibrasyon** denir.*

1. *Her birimdikey $\{u_1, u_2, ..., u_p\} \in \mathbb{R}^m$ kümesi için $|\varphi(u_1, u_2, ..., u_p)| \leq 1$ olsun.*

2. *Her $\{u_1, u_2, ..., u_{p-1}\}$ birimdikey $p-1$ vektöre karşılık, bu vektörlere dik öyle bir u_p birim vektörü var olsun ki $|\varphi(u_1, u_2, ..., u_{p-1}, u_p)| = 1$ olsun.*

Bir kuvvetli kalibrasyonun aynı zamanda bir kalibrasyon olduğu tanımdan açıktır, ama tersi genelde doğru değildir. Sadece $p = 1$ durumunda, $\varphi \in \Lambda^1 (\mathbb{R}^m)^*$ 1-formunun kalibrasyon olması ile kuvvetli kalibrasyon olması denktir. Fakat $p > 1$ için bu denkliğin korunmadığına bir örnek verelim:

Örnek 4.1.2 $\varphi = dx_1 \wedge dx_2 + \dfrac{1}{2}\, dx_3 \wedge dx_4$ *2−formu bir kalibrasyondur. Ama bir kuvvetli 2−kalibrasyon değildir. Çünkü* $|\varphi(x,y)| = 1$ *olacak şekilde* $x = (0,0,1,0)$ *vektörüne dik hiçbir* y *birim vektörü yoktur.*

Şimdi de literatürdeki önemli bir kalibrasyonun kuvvetli bir kalibrasyon olduğunu gösterelim.

Örnek 4.1.3 $\mathbb{R}^7$*'de temel* $3-$*form olarak bilinen*

$$\begin{aligned}\phi &= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - dx_1 \wedge dx_6 \wedge dx_7 + dx_2 \wedge dx_5 \wedge dx_7 - dx_3 \wedge dx_5 \wedge dx_6 \\ &\quad + dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_5 + dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_6 + dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_7\end{aligned}$$

$3-$ *formu bir kuvvetli kalibrasyondur.* $Im(\mathbb{O}) \cong \mathbb{R}^7$ *olmak üzere* $\phi \in \Lambda^3(Im(\mathbb{O}))^*$ $3-$*formu* yz*,* y *ile* z *imajiner oktonyonlarının Cayley-Dickson çarpımını göstermek üzere*

$$\phi(x,y,z) = \langle x, yz\rangle$$

şeklinde yazılabilir. Verilen $x,y,z \in Im(\mathbb{O})$ *birim vektörleri için*

$$|\phi(x,y,z)| = |\langle x, yz\rangle| \leq \|x\|\|yz\| = \|x\|\|y\|\|z\| = 1$$

olduğundan kuvvetli kalibrasyon olmanın ilk koşulu sağlanır. Şimdi de ikinci koşulu kontrol edelim. $y,z \in Im(\mathbb{O})$ *birimdikey vektörleri verilsin. Bu durumda* $x = yz$ *alırsak,* (y,z) *birimdikey bir çift olduğundan* $x \in Im(\mathbb{O})$ *olur. Bu durumda* $\|y\| = \|z\| = 1$ *olduğundan* $\|x\| = \|yz\| = 1$ *dir. Ayrıca*

$$\langle yz, y\rangle = \|y\|^2\langle z, 1\rangle = 0 \quad ve \quad \langle yz, z\rangle = \langle y, 1\rangle\|z\|^2 = 0$$

olduğundan $x = yz$ *vektörü* y *ve* z *vektörlerine diktir. Bu durumda*

$$\phi(x,y,z) = \langle yz, yz\rangle = 1$$

olarak elde edilir. Yani, verilen herhangi bir birimdikey (y,z) *çiftine karşılık, bunlara dik olan* $x = yz$ *birim vektörü* $\phi(x,y,z) = 1$ *koşulunu sağlar. Yani* ϕ *bir kuvvetli* $3-$*kalibrasyondur.*

Bu çalışmada daha çok çift boyuttaki 2−formlarla ilgilenildiğinden $p = 2$ durumuna ağırlık verilip, $\mathbb{R}^{2n}$'deki kuvvetli 2−kalibrasyonlar belirlenmeye çalışılacaktır. φ, $\mathbb{R}^{2n}$ bir 2-form olsun. Standart tabana göre matrisine A diyelim.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a^{12} & a^{13} & \cdots & a^{1\ 2n} \\ -a^{12} & 0 & a^{23} & \cdots & a^{2\ 2n} \\ -a^{13} & -a^{23} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a^{2n-1\ 2n} \\ -a^{1\ 2n} & -a^{2\ 2n} & \cdots & -a^{2n-1\ 2n} & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

şeklinde alalım. A matrisinin özdeğerleri $k = 1, 2, ..., n$ için $\pm i\lambda_k$ olmak üzere, φ'nin

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

şeklinde ifade edilebileceği bir $\{f_1, f_2, ..., f_{2n}\}$ birimdikey tabanının varlığı bilinmektedir. Bu durumda $\{f_1, f_2, ..., f_{2n}\}$ tabanının dual tabanı $\{dy_1, dy_2, ..., dy_{2n}\}$'ye göre φ 2-formu

$$\varphi = \lambda_1 dy_1 \wedge dy_2 + \lambda_2 dy_3 \wedge dy_4 + \cdots + \lambda_n dy_{2n-1} \wedge dy_{2n}$$

şeklinde ifade edilebilir. φ 2-formunun klasik anlamda kalibrasyon olması için $max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, ..., |\lambda_n|\} = 1$ olması gerek ve yeter koşuldur. Acaba φ'nin kuvvetli kalibrasyon olması durumunda özdeğerlerin normlarıyla verilen koşul nasıl değişecek?

İlk aşikar olmayan durum olarak $\mathbb{R}^4$'deki kuvvetli 2−kalibrasyonları irdeleyelim.

4.1.1 $\mathbb{R}^4$'deki kuvvetli $2-$kalibrasyonlar

$\mathbb{R}^4$'te bir $2-$form $a^{12}, a^{13}, a^{14}, a^{23}, a^{24}, a^{34} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\varphi = a^{12}dx_1\wedge dx_2+a^{13}dx_1\wedge dx_3+a^{14}dx_1\wedge dx_4+a^{23}dx_2\wedge dx_3+a^{24}dx_2\wedge dx_4+a^{34}dx_3\wedge dx_4$$

şeklinde yazılabilir. φ'nin $\mathbb{R}^4$'ün standart tabanına göre karşılık gelen anti-simetrik matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a^{12} & a^{13} & a^{14} \\ -a^{12} & 0 & a^{23} & a^{24} \\ -a^{13} & -a^{23} & 0 & a^{34} \\ -a^{14} & -a^{24} & -a^{34} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ için

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= a^{12}\left(dx_1 \wedge dx_2\right)(x, y) + a^{13}\left(dx_1 \wedge dx_3\right)(x, y) + a^{14}\left(dx_1 \wedge dx_4\right)(x, y) \\ &\quad +a^{23}\left(dx_2 \wedge dx_3\right)(x, y) + a^{24}\left(dx_2 \wedge dx_4\right)(x, y) + a^{34}\left(dx_3 \wedge dx_4\right)(x, y) \\ &= a^{12}(x_1y_2 - x_2y_1) + a^{13}(x_1y_3 - x_3y_1) + a^{14}(x_1y_4 - x_4y_1) \\ &\quad +a^{23}(x_2y_3 - x_3y_2) + a^{24}(x_2y_4 - x_4y_2) + a^{34}(x_3y_4 - x_4y_3) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. O halde φ'nin bir kuvvetli kalibrasyon olması için

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^4 &= 1 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^4 &= 1 \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 &= 0 \end{aligned}$$

olmak üzere, öncelikle

$$\begin{aligned} &a^{12}(x_1y_2 - x_2y_1) + a^{13}(x_1y_3 - x_3y_1) + a^{14}(x_1y_4 - x_4y_1) + \\ &\quad a^{23}(x_2y_3 - x_3y_2) + a^{24}(x_2y_4 - x_4y_2) + a^{34}(x_3y_4 - x_4y_3) \leq 1 \end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekir. φ'nin bir kuvvetli kalibrasyon olması için sağlanması gereken bu ilk koşulun bile kontrolü kolay değildir. Bu durumda, daha az parametre kullanacağımız yani φ'yi daha basit ifade edebileceğimiz bir tabanda çalışalım. A matrisinin özdeğerleri $\pm i\lambda_k$ $(k=1,2)$ olmak üzere A matrisinin

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edebileceği bir $\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ birimdikey tabanının varlığı bilinmektedir. Bu özdeğerler, iA hermitsel matrisinin reel özdeğerleridir. Şimdi iA matrisinin özdeğerlerini bulalım.

$$iA=\begin{pmatrix} 0 & ia^{12} & ia^{13} & ia^{14} \\ -ia^{12} & 0 & ia^{23} & ia^{24} \\ -ia^{13} & -ia^{23} & 0 & ia^{34} \\ -ia^{14} & -ia^{24} & -ia^{34} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve bu matrisin özdeğerleri

$$\begin{aligned} K &= (a^{12})^2+(a^{13})^2+(a^{14})^2+(a^{23})^2+(a^{24})^2+(a^{34})^2 \\ L &= (a^{12}+a^{34})^2+(a^{14}+a^{23})^2+(a^{13}-a^{24})^2 \\ M &= (a^{12}-a^{34})^2+(a^{14}-a^{23})^2+(a^{13}+a^{24})^2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{K+\sqrt{L\cdot M}} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{K-\sqrt{L\cdot M}} \end{aligned}$$

olmak üzere $\{\lambda_1,-\lambda_1,\lambda_2,-\lambda_2\}$ şeklindedir. Bu durumda $\{dy_1,dy_2,dy_3,dy_4\}$, $\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ tabanının dual tabanını göstermek üzere φ 2-formu $\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ tabanına göre

$$\varphi=\lambda_1 dy_1\wedge dy_2+\lambda_2 dy_3\wedge dy_4$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi φ'nin kuvvetli kalibrasyon olma koşullarını sağlayıp sağlamadığını λ_k $(k=1,2)$'nın durumlarına göre inceleyelim. Bu arada $\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ birimdikey tabanında çalıştığımızı unutmayalım.

- $|\lambda_1| > 1$ veya $|\lambda_2| > 1$ olsun. Bu durumda sırasıyla f_1, f_2 ve f_3, f_4 birimdikey vektörleri için

$$\begin{aligned}
\varphi(f_1, f_2) &= \lambda_1(1.1 - 0.0) + \lambda_2(0.0 - 0.0) = \lambda_1 > 1 \\
\varphi(f_3, f_4) &= \lambda_1(0.0 - 0.0) + \lambda_2(1.1 - 0.0) = \lambda_2 > 1
\end{aligned}$$

olduğundan φ bir kalibrasyon olamaz. Kalibrasyon olmanın ilk koşulu sağlanmadı. Yani $|\lambda_k|\,(k = 1, 2)$ değerlerinden herhangi biri 1 den büyük olamaz. Zaten bu durumda φ'nin klasik anlamda kalibrasyon olması bile mümkün değildir.

- $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ olsun. $\max\{\lambda_1, \lambda_2\} = \lambda$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= \lambda_1(x_1y_2 - x_2y_1) + \lambda_2(x_3y_4 - x_4y_3) \\
&= \langle(\lambda_1x_1, -\lambda_1x_2, \lambda_2x_3, -\lambda_2x_4), (y_2, y_1, y_4, y_3)\rangle \\
&\leq \sqrt{\lambda_1^2(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_2^2\,(x_3^2 + x_4^2)}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} \\
&\leq \lambda\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} \\
&< 1
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $\varphi(x, y) = 1$ eşitliğini sağlayacak hiçbir birimdikey vektör çifti yoktur. Yani kuvvetli kalibrasyon olmanın ikinci koşulu sağlanmaz. Bu durumda da φ'nin klasik kalibrasyon bile olamayacağı açıktır.

- $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| = 1$ olsun.

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= \lambda_1(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_3y_4 - x_4y_3) \\
&= \langle(\lambda_1x_1, -\lambda_1x_2, x_3, -x_4), (y_2, y_1, y_4, y_3)\rangle \\
&\leq \sqrt{\lambda_1^2(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 + x_4^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

olur. Ancak kuvvetli kalibrasyon olmanın ikinci koşulu gereği $x = f_1$ vektörüne karşılık öyle bir $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ vektörü var olmalı ki bu vektörler birimdikey ve $\varphi(f_1, y) = 1$ olmalıdır. Ama bu mümkün değildir. Çünkü bu vektörler için $\|y\| = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\varphi((1,0,0,0),y) &\leq \sqrt{\lambda_1^2(x_1^2+x_2^2)+x_3^2+x_4^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2} \\
&= |\lambda_1|\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2} \\
&< 1
\end{aligned}$$

dir.

- $|\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ olsun. Bir önceki duruma benzer biçimde φ'nin kuvvetli kalibrasyon olamayacağı görülür.

- $|\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| = 1$ olsun. $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \lambda_1(x_1y_2 - x_2y_1) + \lambda_2(x_3y_4 - x_4y_3) \\
&\leq \langle(\lambda_1x_1, -\lambda_1x_2, x_3, -x_4), (y_2, y_1, y_4, y_3)\rangle \\
&\leq \sqrt{\lambda_1^2(x_1^2+x_2^2)+\lambda_2^2(x_3^2+x_4^2)}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2} \\
&= \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

dir. Şimdi kuvvetli kalibrasyon olmanın ikinci şartının sağlanıp sağlanmadığını inceleyellim.

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ birim vektörü verilsin.

i-) $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 1$ olsun.

Bu durumda $y = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$ vektörünü düşünelim. Açıktır ki

$$\begin{aligned}
\|y\| &= x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 1 \\
\langle x, y\rangle &= -x_1x_2 + x_2x_1 - x_3x_4 + x_3x_4 = 0
\end{aligned}$$

dır ve

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_3y_4 - x_4y_3) \\
&= x_1x_1 - x_2(-x_2) + x_3x_3 - x_4(-x_4) \\
&= x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 1
\end{aligned}$$

dir. O halde bu durumda, $\|x\| = 1$ özelliğindeki her $x \in \mathbb{R}^4$ vektörüne karşılık en az bir tane $y \in \mathbb{R}^4$ vektörü vardır ki $\|y\| = 1, \langle x, y \rangle = 0$ ve $\varphi(x, y) = 1$ dir.

ii-) $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = -1$ olsun.

Bu durumda $y = (-x_2, x_1, x_4, -x_3)$ vektörünü düşünelim. Açıktır ki

$$
\begin{aligned}
\|y\| &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \\
\langle x, y \rangle &= -x_1x_2 + x_2x_1 + x_3x_4 - x_4x_3 = 0
\end{aligned}
$$

dır ve

$$
\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= (x_1y_2 - x_2y_1) - (x_3y_4 - x_4y_3) \\
&= x_1x_1 - x_2(-x_2) - x_3(-x_3) + x_4x_4 \\
&= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1
\end{aligned}
$$

dir.

iii-) $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = 1$ olsun.

Bu durumda $y = (x_2, -x_1, -x_4, x_3)$ vektörünü düşünelim. Açıktır ki

$$
\begin{aligned}
\|y\| &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \\
\langle x, y \rangle &= x_1x_2 - x_2x_1 - x_3x_4 + x_4x_3 = 0
\end{aligned}
$$

dır ve

$$
\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= -(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_3y_4 - x_4y_3) \\
&= -x_1(-x_1) + x_2x_2 + x_3x_3 - x_4(-x_4) \\
&= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1
\end{aligned}
$$

dir.

iv-) $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = -1$ olsun.

Bu durumda $y = (x_2, -x_1, x_4, -x_3)$ vektörünü düşünelim. Açıktır ki

$$
\begin{aligned}
\|y\| &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \\
\langle x, y \rangle &= x_1x_2 - x_2x_1 + x_3x_4 - x_3x_4 = 0
\end{aligned}
$$

dır ve

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= -(x_1y_2 - x_2y_1) - (x_3y_4 - x_4y_3)\\ &= (-x_1)(-x_1) + x_2x_2 - x_3(-x_3) + x_4x_4\\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\end{aligned}$$

dir. Yani bu son durumda da kuvvetli kalibrasyon olmanın son özelliği sağlanır.

O halde $|\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| = 1$ durumunda φ bir kuvvetli kalibrasyondur. Yani φ'nin kuvvetli kalibrasyon olması için gerek ve yeter şart, birimdikey bir tabana göre matrisinin kompleks özdeğerlerinin $(\pm i\lambda_1, \pm i\lambda_2)$ normunun 1 olmasıdır. Buradan

$$\begin{aligned}K &= (a^{12})^2 + (a^{13})^2 + (a^{14})^2 + (a^{23})^2 + (a^{24})^2 + (a^{34})^2\\ L &= (a^{12} + a^{34})^2 + (a^{14} + a^{23})^2 + (a^{13} - a^{24})^2\\ M &= (a^{12} - a^{34})^2 + (a^{14} - a^{23})^2 + (a^{13} + a^{24})^2\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 &= \frac{1}{2}(K + \sqrt{L \cdot M}) = 1\\ \lambda_2^2 &= \frac{1}{2}(K - \sqrt{L \cdot M}) = 1\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. O halde φ'nin bir kuvvetli kalibrasyon olması için

$$K = 2,\ L \cdot M = 0$$

koşullarının sağlanması gerekir. Bu koşulları yerine koyduğumuzda

$$\begin{aligned}(a^{12})^2 + (a^{13})^2 + (a^{14})^2 + (a^{23})^2 + (a^{24})^2 + (a^{34})^2 &= 2\\ (a^{12} + a^{34})^2 + (a^{14} + a^{23})^2 + (a^{13} - a^{24})^2 &= 0\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}(a^{12})^2 + (a^{13})^2 + (a^{14})^2 + (a^{23})^2 + (a^{24})^2 + (a^{34})^2 &= 2\\ (a^{12} - a^{34})^2 + (a^{14} - a^{23})^2 + (a^{13} + a^{24})^2 &= 0\end{aligned}$$

olması gerektiği görülür. Buradan $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ standart tabanına göre

$$\varphi = a^{12}dx_1\wedge dx_2+a^{13}dx_1\wedge dx_3+a^{14}dx_1\wedge dx_4+a^{23}dx_2\wedge dx_3+a^{24}dx_2\wedge dx_4+a^{34}dx_3\wedge dx_4$$

şeklinde ifade edilen φ'nin bir kuvvetli $2-$kalibrasyon olması için gerek ve yeter koşulun

$$(a^{12})^2 + (a^{13})^2 + (a^{14})^2 = 1 \text{ ve } a^{12} = -a^{34}, a^{14} = -a^{23}, a^{13} = a^{24}$$

veya

$$(a^{12})^2 + (a^{13})^2 + (a^{14})^2 = 1 \text{ ve } a^{12} = a^{34}, a^{14} = a^{23}, a^{13} = -a^{24}$$

eşitliklerinin sağlanması olduğu sonucuna varılır. Bu durumda φ bir kuvvetli $2-$kalibrasyon ise $(a^{12})^2 + (a^{13})^2 + (a^{14})^2 = 1$ olmak üzere

$$\varphi = a^{12}\ (dx_1\wedge dx_2-dx_3\wedge dx_4)+a^{13}\ (dx_1\wedge dx_3+dx_2\wedge dx_4)+a^{14}\ (dx_1\wedge dx_4-dx_2\wedge dx_3)$$

veya

$$\varphi = a^{12}\ (dx_1\wedge dx_2+dx_3\wedge dx_4)+a^{13}\ (dx_1\wedge dx_3-dx_2\wedge dx_4)+a^{14}\ (dx_1\wedge dx_4+dx_2\wedge dx_3)$$

formundadır.

Örnek 4.1.1 $\varphi = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ *bir kuvvetli* $2-$*kalibrasyondur.*

Dikkat edilirse, $\mathbb{R}^4$'deki bir φ $2-$formu eğer bir kuvvetli $2-$kalibrasyon ise $*\varphi = \varphi$ veya $*\varphi = -\varphi$ dir. Yani φ eğer kuvvetli $2-$kalibrasyon ise Hodge anlamında kendine dual ya da tersine dual bir $2-$ formdur. $\mathbb{R}^4$'de

$$\varphi = a^{12}dx_1\wedge dx_2+a^{13}dx_1\wedge dx_3+a^{14}dx_1\wedge dx_4+a^{23}dx_2\wedge dx_3+a^{24}dx_2\wedge dx_4+a^{34}dx_3\wedge dx_4$$

şeklinde ifade edilen bir $2-$formun kendine dual veya tersine dual olması için sırasıyla $a^{12} = a^{34}, a^{14} = a^{23}, a^{13} = -a^{24}$ veya $a^{12} = -a^{34}, a^{14} = -a^{23}, a^{13} = a^{24}$ eşitliklerinin sağlanması gerektiği Bölüm 1'de görülmüştü. Bu durumda $\mathbb{R}^4$'de verilen bir kendine dual ya da tersine dual $2-$ form da ya kuvvetli bir $2-$kalibrasyondur ya da bir sabit katıdır. Acaba bu durum üst boyutlarda da geçerliliğini devam ettirmekte midir? Daha önce de vurgulandığı üzere $n > 4$ için $\mathbb{R}^m$'deki bir $2-$ formun Hodge anlamında kendine dualliğinden bahsetmek anlamsızdır. Ama genel durumda $\mathbb{R}^m$'de verilen bir $2-$form için tanımlanan kuvvetli kendine dual ve kuvvetli tersine dual kavramlarıyla kuvvetli $2-$kalibrasyonlar arasında benzer bir ilişkiyi sorgulamak anlamlı olacaktır.

Uyarı 4.1.2 *Tek boyutlarda kuvvetli $2-$kalibrasyon yoktur. Detayı Alt Bölüm 4.3'de tartışılacaktır. Bu nedenle, bu adımdan sonra çift boyutlu Öklidyen uzayda incelemelerimize devam edelim.*

4.1.2 $\mathbb{R}^{2n}$'deki kuvvetli $2-$kalibrasyonlar

φ, $\mathbb{R}^{2n}$ bir 2-form olsun. φ'nin kuvvetli $2-$kalibrasyon olması için hangi koşulları sağlaması gerektiği $\mathbb{R}^4$'teki argümana benzer bir yol izleyerek görülebilir.

Teorem 4.1.1 *φ, $\mathbb{R}^{2n}$'de bir $2-$form ve $\pm i\lambda_k, k = 1, 2, ..., n$ bu formun herhangi bir birimdikey tabana göre elde edilen anti-simetrik matrisinin özdeğerleri olsun. φ formunun kuvvetli $2-$kalibrasyon olması için gerek ve yeter koşul $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \cdots = |\lambda_n| = 1$ olmasıdır.*

Kanıt. $\mathbb{R}^{2n}$'de bir φ 2-formu verilsin. Standart tabana göre matrisine A diyelim.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a^{12} & a^{13} & \cdots & a^{1\ 2n} \\ -a^{12} & 0 & a^{23} & \cdots & a^{2\ 2n} \\ -a^{13} & -a^{23} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a^{2n-1\ 2n} \\ -a^{1\ 2n} & -a^{2\ 2n} & \cdots & -a^{2n-1\ 2n} & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

şeklinde alalım. φ'yi belirleyen A matrisinin özdeğerleri $k = 1, 2, ..., n$ için $\pm i\lambda_k$ şeklindedir. Bu durumda A matrisinin

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

şeklinde ifade edilebileceği bir $\{f_1, f_2, ..., f_{2n}\}$ birimdikey tabanının varlığı bilinmektedir. $\{dy_1, dy_2, ..., dy_{2n}\}$, $\{f_1, f_2, ..., f_{2n}\}$ tabanının dual tabanını göstermek üzere $\{f_1, f_2, ..., f_{2n}\}$ tabanına göre φ 2-formu

$$\varphi = \lambda_1 dy_1 \wedge dy_2 + \lambda_2 dy_3 \wedge dy_4 + \cdots + \lambda_n dy_{2n-1} \wedge dy_{2n}$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi φ'nin λ_k $(k = 1, 2, ..., n)$ 'nın durumlarına göre kuvvetli $2-$kalibrasyon koşullarını sağlayıp sağlamadığını inceleyelim.

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{2n} x_k f_k = (x_1, x_2, , ..., x_{2n}) \\ y &= \sum_{k=1}^{2n} y_k f_k = (y_1, y_2, , ..., y_{2n}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|x\| &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n}^2 = 1 \\ \|y\| &= y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{2n}^2 = 1 \\ \langle x, y \rangle &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{2n} y_{2n} = 0 \end{aligned}$$

olsun.

- En az bir k için $|\lambda_k| > 1$ olsun. Bu durumda f_{2k-1}, f_{2k} birimdikey vektörleri için

$$\varphi(f_{2k-1}, f_{2k}) = 0 + \cdots + \lambda_k(1.1 - 0.0) + \cdots + 0 = \lambda_k > 1$$

olduğundan φ bir kalibrasyon olamaz. Kalibrasyon olmanın ilk koşulu sağlanmadı. Yani $|\lambda_k|$ $(k = 1, 2, ..., n)$ değerlerinden herhangi biri 1 den büyük olamaz. Bu durumda φ'nin klasik anlamda bile kalibrasyon olamayacağı açıktır.

- Her k için $|\lambda_k| < 1$ olsun. $\max\limits_{k=1,2...,n} \{\lambda_k\} = \lambda$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \lambda_1(x_1y_2 - x_2y_1) + \cdots + \lambda_n(x_{2n-1}y_{2n} - x_{2n}y_{2n-1}) \\
&= \langle(\lambda_1x_1, -\lambda_1x_2, , ..., \lambda_nx_{2n-1}, -\lambda_nx_n), (y_2, y_1, ..., y_{2n}, y_{2n-1})\rangle \\
&= \sqrt{\lambda_1^2(x_1^2 + x_2^2) + \cdots + \lambda_n^2\left(x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2\right)}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{2n}^2} \\
&\leq \lambda\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n}^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{2n}^2} \\
&< 1
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $\varphi(x,y) = 1$ eşitliğini sağlayacak hiçbir birimdikey vektör çifti yoktur. Yani kalibrasyon olmanın ikinci koşulu sağlanmaz.

- $k = 1, 2, ..., p$ için $|\lambda_k| < 1$ ve $k = p+1, p+2, ..., n$ için $|\lambda_k| = 1$ olsun.

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \lambda_1(x_1y_2 - x_2y_1) + \cdots + \lambda_p(x_{2p-1}y_{2p} - x_{2p}y_{2p-1}) \\
&\quad +(x_{2p+1}y_{2p+2} - x_{2p+2}y_{2p+1}) + \cdots + (x_{2n}y_{2n-1} - x_{2n-1}y_{2n}) \\
&= \langle(\lambda_1x_1, -\lambda_1x_2, ..., \lambda_px_{2p-1}, -\lambda_px_{2p}, x_{2p+1}, -x_{2p+2}, ..., x_{2n-1}, -x_{2n}), \\
&\quad (y_2, y_1, ..., y_{2n}, y_{2n-1})\rangle \\
&\leq \sqrt{\lambda_1^2(x_1^2 + x_2^2) + \cdots + \lambda_p^2\left(x_{2p-1}^2 + x_{2p}^2\right) + x_{2p+1}^2 + \cdots + x_{2n}^2}\ . \\
&\quad \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{2n}^2} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

olur. Ancak kalibrasyon olmanın ikinci koşulu gereği f_1 vektörüne karşılık öyle bir $y = (y_1, y_2, ..., y_{2n})$ vektörü var olmalı ki bu vektörler birimdikey ve $\varphi(x,y) = 1$ olmalıdır. Ama bu mümkün değilidir. Çünkü bu vektörler için $\|y\| = 1$ olduğundan

$$\varphi((1,0,...,0),y) \leq |\lambda_1|\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{2n}^2} < 1$$

dir.

- Her k için $|\lambda_k| = 1$ olsun. $\forall k$ için $\lambda_k^2 = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \lambda_1(x_1y_2 - x_2y_1) + \cdots + \lambda_n(x_{2n-1}y_{2n} - x_{2n}y_{2n-1}) \\
&= \langle (\lambda_1 x_1, -\lambda_1 x_2, ..., \lambda_n x_{2n-1}, -\lambda_n x_n), (y_2, y_1, ..., y_{2n}, y_{2n-1}) \rangle \\
&\leq \sqrt{\lambda_1^2 (x_1^2 + x_2^2) + \cdots + \lambda_n^2 \left(x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2\right)} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{2n}^2} \\
&= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n}^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{2n}^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

dir. Şimdi kalibrasyon olmanın ikinci şartının sağlanıp sağlanmadığını araştıralım. $k = 1, 2, ..., p$ için $\lambda_k = 1$ ve $k = p+1, p+2, ..., n$ için $\lambda_k = -1$ olsun. $x = (x_1, x_2, , ..., x_{2n})$ ve $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n}^2 = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_3y_4 - x_4y_3) + \cdots + (x_{2p-1}y_{2p} - x_{2p}y_{2p-1}) \\
&\quad -(x_{2p+1}y_{2p+2} - x_{2p+2}y_{2p+1}) - \cdots - (x_{2n}y_{2n-1} - x_{2n-1}y_{2n})
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu durumda

$$y = (-x_2, x_1, ..., -x_{2p}, x_{2p-1}, x_{2p+2}, -x_{2p+1}, ..., x_{2n}, -x_{2n-1})$$

şeklinde alırsak

$$\begin{aligned}
\|y\| &= (-x_2)^2 + x_1^2 + (-x_4)^2 + x_3^2 + \cdots + x_{2n}^2 + (-x_{2n-1})^2 \\
&= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n}^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

ve

$$\langle x, y \rangle = x_1(-x_2) + x_2x_1 + \cdots + x_{2n-1}x_{2n} + x_{2n}(-x_{2n-1}) = 0$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= x_1x_1 - x_2(-x_2) + x_3x_3 - x_4(-x_4) + \cdots + x_{2p-1}x_{2p-1} \\
&\quad -x_{2p}(-x_{2p}) + \cdots - x_{2n-1}(-x_{2n-1}) + x_{2n}x_{2n} \\
&= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n}^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Yani bu durumda kuvvetli kalibrasyon olmanın ikinci koşulu da sağlanmış olur.

O halde $k = 1, 2, ..., n$ için $|\lambda_k| = 1$ durumunda φ bir kuvvetli kalibrasyondur. ■

Örnek 4.1.2 $\varphi = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n} \in \Lambda^2 \left(\mathbb{R}^{2n}\right)^*$ *bir kuvvetli* 2*-kalibrasyondur.*

4.2 Kuvvetli Kendine Dual 2-Formlar Ve Kuvvetli 2-Kalibrasyonlar

$\varphi \in \Lambda^2 \left(\mathbb{R}^{2n}\right)^*$ formu verilsin. φ bir kuvvetli $2-$kalibrasyon ve φ'nin birimdikey bir tabandaki matrisi A olsun. Ayrıca A anti-simetrik matrisinin özdeğerleri $\pm i\lambda_k, k = 1, 2, ..., n$ olsun. Teorem 4.1.1'den

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \cdots = |\lambda_n| = 1$$

dir. Alt Bölüm 1.2'de verilen kuvvetli kendine duallik tanımından, tüm özdeğerlerin normları birbirine eşit olduğundan φ kuvvetli kendine veya tersine dual bir $2-$formdur.

Tersine φ bir kuvvetli kendine dual veya kuvvetli tersine dual bir $2-$form olsun. φ'nin birimdikey bir tabandaki matrisi A olsun. A matrisinin $\pm i\lambda_k, k = 1, 2, ..., n$ özdeğerleri

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \cdots = |\lambda_n|$$

koşulunu sağlar. Bu durumda, $\lambda := |\lambda_1|$ olmak üzere $\frac{1}{\lambda}\varphi$ formunun aynı tabana göre matrisi $\frac{1}{\lambda}A$ dır. Ve $\frac{1}{\lambda}A$ matrisinin özdeğerlerinin normu 1 olacaktır. Yani $\frac{1}{\lambda}\varphi$ formu bir kuvvetli $2-$kalibrasyon olur. Yani bir kuvvetli kendine dual veya tersine dual formu bir özdeğerinin normuna bölerek her zaman bir kuvvetli 2-kalibrasyon elde etmiş oluruz. Eğer özdeğerlerinin normu 1 olan kuvvetli kendine dual formları baz alırsak, kuvvetli $2-$kalibrasyonlarla kendine dual $2-$formlara aynı objeler gözü ile bakabiliriz.

4.3 Normlu Dualite Ve Kuvvetli 2-Kalibrasyonlar

Bölüm 3'de tanımladığımız normlu dualite kavramıyla kuvvetli $2-$kalibrasyonlar arasında bire-bir bir ilişki mevcuttur. Açıktır ki anti-simetrik bir normlu dualite dejenere olmayan bir $2-$form belirler. Bu $2-$formun normlu dualite olması ile kuvvetli $2-$kalibrasyon olması tamamen örtüşür:

Önerme 4.3.1 $b : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *anti-simetrik bilineer dönüşümünün normlu dualite olması için gerek ve yeter koşul kuvvetli* $2-$*kalibrasyon olmasıdır.*

Kanıt. $\Longrightarrow$: $b \in \Lambda^2 (\mathbb{R}^m)^*$ $2-$formu bir normlu dualite olsun.

Kuvvetli $2-$kalibrasyon olmanın ilk şartına bakalım. b normlu dualite olduğun- dan her $u, v \in \mathbb{R}^m$ vektör çifti için

$$|b(u, v)| \leq 1$$

dir. Bu durumda her $u, v \in \mathbb{R}^m$ birimdikey çifti için de

$$|b(u, v)| \leq 1$$

olur. Yani kuvvetli $2-$kalibrasyon olmanın ilk şartı sağlanır. Kuvvetli $2-$kalibrasyon olmanın ikinci koşuluna bakalım. Bir $u \in \mathbb{R}^m$ birim vektörü verilsin. Acaba u vektörüne dik bir $v \in \mathbb{R}^m$ birim vektörü var mı ki $b(u,v) = 1$ olsun? Normlu dualite olmanın ikinci koşulu gereği u vektörüne karşılık bir v vektörü vardır ki

$$b(u,v) = 1$$

elde edilir. Acaba bu v vektörü u vektörüne dik olmak zorunda mı? Varsayalım dik olmasın. Bu durumda,

$$w = v - \langle u, v\rangle\, u$$

vektörü u vektörüne diktir. $b(u,v) = 1$ olduğundan da $b(u,w) = 1$ elde edilir. Ayrıca w vektörünün normu

$$\|w\| = \sqrt{1 - \langle u, v\rangle^2} < 1$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} b\left(u, \frac{w}{\|w\|}\right) &= \frac{1}{\|w\|} b\,(u,w) \\ &= \frac{1}{\|w\|} \\ &> 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Ama b normlu dualite olduğundan

$$b\left(u, \frac{w}{\|w\|}\right) \leq \|u\| \left\| \frac{w}{\|w\|} \right\| = 1$$

olması gerekirdi. Yani çelişkiye ulaştık. O halde $b(u,v) = 1$ koşulunu sağlayan v vektörü u vektörüne dik olmak zorundadır.

Sonuç olarak $b \in \Lambda^2 (\mathbb{R}^m)^*$ $2-$formu $\mathbb{R}^m$'de bir normlu dualite ise bir kuvvetli $2-$kalibrasyondur.

$\Longleftarrow$: Şimdi tersine bakalım. $b \in \Lambda^2 (\mathbb{R}^m)^*$ $2-$formu $\mathbb{R}^m$'de bir kuvvetli kalibrasyon olsun. Acaba b bir normlu dualite midir? Önce normlu dualite olmanın ilk şartını kontrol edelim. Acaba herhangi $u, v \in \mathbb{R}^m$ birim vektörleri için $|b(u,v)| \leq 1$ midir? b bir kuvvetli $2-$kalibrasyon olduğundan birimdikey u ve v vektörleri için $|b(u,v)| \leq 1$dir. Yani u ve v vektörleri birbirine dik ise sorun yok. u vektörünü sabitleyip v vektörüne odaklanalım. Varsayalım v vektörü u vektörüne dik olmasın. Bu durumda biraz önceki yönteme benzer şekilde

$$w = v - \langle u, v \rangle u$$

vektörü u vektörüne diktir. b kuvvetli $2-$kalibrasyon olduğundan

$$\left| b\left(u, \frac{w}{\|w\|}\right) \right| \leq 1$$

dir. Bu durumda

$$\frac{1}{\|w\|} |b(u,w)| \leq 1 \Longrightarrow |b(u,w)| \leq \|w\|$$

elde edilir. $b(u,u) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} |b(u,w)| &= |b(u, v - \langle u,v \rangle u)| \\ &= |b(u,v) - \langle u,v \rangle b(u,u)| \\ &= |b(u,v)| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $|b(u,v)| \leq \|w\|$ ve $\|w\| = \sqrt{1 - \langle u,v \rangle^2} < 1$ olduğundan istenilen elde edilmiş olur.

Ayrıca normlu dualite olmanın 2. koşulu, kuvvetli kalibrasyon olmanın 2. koşulundan hemen sağlanır. O halde $b \in \Lambda^2 (\mathbb{R}^m)^*$ $2-$formu $\mathbb{R}^m$'de bir kuvvetli $2-$kalibrasyon ise bir normlu dualitedir. ■

Bölüm 3'de gösterdiğimiz üzere, bir b bilineer dönüşümünün normlu dualite olması için gerek ve yeter koşulun birimdikey bir tabana göre matrisinin ortogonal olmasıdır. Bu durumda kuvvetli $2-$kalibrasyonların farklı bir karakterizasyonunu normlu dualite kavramı yardımıyla elde etmiş olduk.

Sonuç 4.3.2 $\varphi \in \Lambda^2 (\mathbb{R}^m)^*$ *formunun kuvvetli* $2-$*kalibrasyon olması için gerek ve yeter koşul birimdikey bir tabana göre matrisinin ortogonal olmasıdır.*

Kanıt. *Sonuç 3.1.11 ve Sonuç 4.3.1 yardımıyla hemen görülür.* ■

Sonuç 4.3.3 $\varphi \in \Lambda^2 \left(\mathbb{R}^{2n+1}\right)^*$ *formu bir kuvvetli* $2-$*kalibrasyon olamaz.*

Kanıt. $\varphi \in \Lambda^2 \left(\mathbb{R}^{2n+1}\right)^*$ formunun bir birimdikey tabana göre matrisi A olsun. A matrisi $(2n+1) \times (2n+1)$ boyutunda bir matristir. Sonuç 4.3.2'den A matrisinin anti-simetrik ortogonal bir matris olduğunu biliyoruz. Lakin tek boyutda anti-simetrik ortogonal bir matris bulunamayacağından, bu şekilde bir φ formu var olamaz. ■

Bu tartışmanın sonunda, var olan kendine duallik kavramı ile tamamen bu kavramdan bağımsız olarak tanımlanan kalibrasyon kavramı arasındaki ilişki, kalibrasyon tanımını ilave bir takım koşullar ile biraz zenginleştirerek ortaya konulmuştur. Yani kuvvetli kalibrasyon dediğimiz, kalibrasyonların önemli bir alt kümesini oluşturan formlar ile özdeğerlerinin normu 1 olan kuvvetli kendine dual formların çakıştığını gördük.

Benzer şekilde, normlu dualiteler de, kuvvetli $2-$kalibrasyonla aynı şey demek olduklarından, özdeğer normu 1 olan kuvvetli kendine dual $2-$formlarla örtüşmektedir. Bu ilişkiler ağını aşağıdaki şema ile gösterebiliriz.

Kuvvetli $2-$Kalibrasyonlar

Anti-simetrik Normlu Dualite

(özdeğer normu 1 olan)
Kuvvetli Kendine Dual $2-$Formlar

Böylece her biri farklı bir kökene sahip üç ayrı kavramın esas itibariyle örtüştüğünü görmüş oluyoruz. Bu olgu da, ikisi bu çalışmada tanımlanmış olan bu kavramların doğallığına bir işaret olarak değerlendirilebilir.

4.4 Kuvvetli $2-$Kalibrasyonlar Ve Pfaffian Polinomu

$\varphi \in \Lambda^2 \left(\mathbb{R}^{2n}\right)^*$ formu

$$\varphi = \sum_{1 \le i < j \le 2n} a^{ij}\ dx_i \wedge dx_j$$

şeklinde verilsin. φ bir kuvvetli 2-kalibrasyon ve φ'nin birimdikey bir tabana göre matrisi $A = (a^{ij})$ olsun. Sonuç 4.3.2'de belirtildiği üzere A matrisi ortogonal ve anti-simetriktir. Yani $A^{-1} = A^t = -A$ şeklindedir. Ayrıca A ortogonal ve anti-simetrik olduğundan $\det A = 1$ dir. Bu durumda, M_{ij} i. satır j. sütunu silinmiş A matrisi ve $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ ilgili bileşenin kofaktörünü göstermek üzere her $1 \le i < j \le 2n$ için

$$-a^{ij} = \frac{1}{\det A} A_{ji} = A_{ji} = (-1)^{i+j} \det(M_{ji})$$

olacağından

$$a^{ij} = -A_{ji} = (-1)^{i+j-1} \det(M_{ji})$$

şeklinde elde edilir.

A anti-simetrik olduğundan, determinantı bir tam karedir [21]. Karesi A matrisinin determinantına eşit olan ve aşağıda tanımlayacağımız ifadeye A matrisinin Pfaffian polinomu denir ve $Pf(A)$ ile gösterilir. S_K bir K kümesi üzerindeki tüm permutasyonların kümesi ve $K = \{1, 2, 3, ..., 2n\}$ olsun.

$$\Pi = \{(i_1 \ \ j_1 \ \ i_2 \ \ j_2 \ \ \cdots \ \ i_n \ \ j_n) \in S_K \mid i_1 < \cdots < i_n \text{ ve } p = 1, ..., n \text{ için } i_p < j_p\}$$

ve $\alpha \in \Pi$ için $A_\alpha = sgn(\alpha) a^{i_1 j_1} a^{i_2 j_2} \cdots a^{i_n j_n}$ olmak üzere, A matrisinin Pfaffian polinomu

$$Pf(A) = \sum_{\alpha \in \Pi} A_\alpha$$

şeklinde tanımlanabilir.

Ayrıca bir $A = (a^{ij})$ anti-simetrik matrisi için, $M_{ij,ij}$, hem i. ve j. satırları hem de i. ve j. sütünları silinmiş A matrisini göstermek üzere

$$\begin{aligned} i &< j \Rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}) = (-1)^{i+j-1} Pf(M_{ij,ij}) Pf(A) \\ i &> j \Rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}) = (-1)^{i+j} Pf(M_{ij,ij}) Pf(A) \end{aligned}$$

şeklindedir [22]. A matrisi anti-simetrik olduğundan $M_{ij,ij}$ matrisi de anti-simetriktir. Bu nedenle $M_{ij,ij}$ matrisinin Pfaffian polinomundan bahsedebiliriz. Bu durumda, $1 \leq i < j \leq 2n$ için a^{ij} katsayıları arasındaki ilişki

$$a^{ij} = -A_{ji} = -(-1)^{i+j} Pf(M_{ji,ji}) Pf(A)$$

olduğundan

$$a^{ij} \;=\; (-1)^{i+j-1} Pf(M_{ij,ij}) Pf(A) \tag{4.4.1}$$

şeklinde verilebilir.

A anti-simetrik ve ortogonal olduğundan $\det A = 1$ dir. Bu durumda $Pf(A) = \pm 1$ olabilir. Bir kuvvetli 2-kalibrasyon verildiği zaman katsayılarının (4.4.1) eşitliğini sağlaması gerekmektedir. Daha önce katsayı ilişkileri belirlenmiş olması nedeniyle $\mathbb{R}^4$'teki bir kuvvetli 2-kalibrasyonun katsayılarının bu özellikte olup olmadığını kontrol edelim.

Örnek 4.4.1 *$\mathbb{R}^4$'te bir 2−form $a^{12}, a^{13}, a^{14}, a^{23}, a^{24}, a^{34} \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$\varphi = a^{12} dx_1 \wedge dx_2 + a^{13} dx_1 \wedge dx_3 + a^{14} dx_1 \wedge dx_4 + a^{23} dx_2 \wedge dx_3 + a^{24} dx_2 \wedge dx_4 + a^{34} dx_3 \wedge dx_4$$

şeklinde yazılabilir. φ'nin $\mathbb{R}^4$'ün standart tabanına göre karşılık gelen anti-simetrik matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a^{12} & a^{13} & a^{14} \\ -a^{12} & 0 & a^{23} & a^{24} \\ -a^{13} & -a^{23} & 0 & a^{34} \\ -a^{14} & -a^{24} & -a^{34} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. A matrisinin Pfaffian polinomu

$$Pf(A) = Pf \begin{pmatrix} 0 & a^{12} & a^{13} & a^{14} \\ -a^{12} & 0 & a^{23} & a^{24} \\ -a^{13} & -a^{23} & 0 & a^{34} \\ -a^{14} & -a^{24} & -a^{34} & 0 \end{pmatrix} = a^{12}a^{34} - a^{13}a^{24} + a^{14}a^{23}$$

şeklindedir. φ bir kuvvetli 2-kalibrasyon ise A matrisi anti-simetrik ve ortogonaldir. Bu durumda $det(A) = (a^{12}a^{34} - a^{13}a^{24} + a^{14}a^{23})^2 = 1$ dir. O halde

$a^{12}a^{34} - a^{13}a^{24} + a^{14}a^{23} = \pm 1$ olabilir. Eğer $a^{12}a^{34} - a^{13}a^{24} + a^{14}a^{23} = 1$ ise $Pf(A) = a^{12}a^{34} - a^{13}a^{24} + a^{14}a^{23} = 1$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
a^{12} &= (-1)^{1+2-1} Pf \begin{pmatrix} 0 & a^{34} \\ -a^{34} & 0 \end{pmatrix} = a^{34} \\
a^{13} &= (-1)^{1+3-1} Pf \begin{pmatrix} 0 & a^{24} \\ -a^{24} & 0 \end{pmatrix} = -a^{24} \\
a^{14} &= (-1)^{1+4-1} Pf \begin{pmatrix} 0 & a^{23} \\ -a^{23} & 0 \end{pmatrix} = a^{23}
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Eğer $a^{12}a^{34} - a^{13}a^{24} + a^{14}a^{23} = -1$ ise $Pf(A) = -1$ olur. Bu durumda da

$$\begin{aligned}
a^{12} &= (-1)^{1+2-1} Pf \begin{pmatrix} 0 & a^{34} \\ -a^{34} & 0 \end{pmatrix} (-1) = -a^{34} \\
a^{13} &= (-1)^{1+3-1} Pf \begin{pmatrix} 0 & a^{24} \\ -a^{24} & 0 \end{pmatrix} (-1) = a^{24} \\
a^{14} &= (-1)^{1+4-1} Pf \begin{pmatrix} 0 & a^{23} \\ -a^{23} & 0 \end{pmatrix} (-1) = -a^{23}
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Gerçekten de Alt Bölüm 4.1.1'de gösterildiği üzere, φ bir kuvvetli 2-kalibrasyon ise bu eşitlik sistemlerinden biri var olmalıdır.

Genel olarak, $\mathbb{R}^{2n}$'de bir 2-form verildiği zaman, bu $2-$form eğer kuvvetli 2-kalibrasyon ise katsayılarının (4.4.1) eşitliğini sağlaması gerekmektedir.

5 KUVVETLİ KALİBRASYON ALANLARI

Bu bölüme kadar $\mathbb{R}^m$ vektör uzayı üzerindeki bir formun kuvvetli kalibrasyon olması ile ilgilenildi. Klasik kalibrasyon kavramı genel olarak bir Riemann manifoldu üzerinde tanımlanır. Bu bölümün hedefi doğrultusunda $\mathbb{R}^m$ manifoldu üzerinde verilen bir form alanının kuvvetli kalibrasyon alanı olmasını tanımlayalım.

Tanım 5.1 (Kuvvetli Kalibrasyon Alanı) *$\varphi \in \Omega^p(\mathbb{R}^m)$ olsun. $d\varphi = 0$ ve her $x \in \mathbb{R}^m$ için φ_x bir kuvvetli $p-$kalibrasyon ise φ'ye kuvvetli $p-$kalibrasyon alanı denir.*

Bu tanım doğrultusunda $\mathbb{R}^m$'deki kuvvetli 1 ve 2-kalibrasyon alanları belirlenmeye çalışılmıştır. Bu incelemeler sonucunda, kuvvetli 2-kalibrasyonlarla yakın ilişkisi bulunan kuvvetli kendine dual $2-$formlar ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

5.1 $\mathbb{R}^m$'de Kuvvetli $1-$Kalibrasyon Alanları

$\varphi \in \Omega^1(\mathbb{R}^m)$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}^m$ ve $a^i \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ için $a^i = a^i(x_1, x_2, ..., x_m)$ olmak üzere $\varphi_x = \sum\limits_{1\leq i\leq m} a^i \, dx_i$ şeklinde ifade edilebilir. Motivasyon amacıyla önce $m = 2$ alalım. $\varphi \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ bir kuvvetli 1-kalibrasyon alanı olsun. Bu durumda öncelikle $d\varphi = 0$ olmalıdır. O halde φ bir tam formdur. Yani bir $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ 0-formunun dış türevi olarak $\varphi = dg$ şeklinde ifade edilebilir. Bu nedenle

$$\varphi = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2$$

şeklindedir. Ayrıca φ'nin her $x \in \mathbb{R}^2$ noktasında bir kalibrasyon olması gerekliliğinden dolayı, Bölüm 2'de gösterildiği üzere

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2 = 1$$

olmalıdır. Bu koşul bize g fonksiyonunun gradient vektörünün her noktada sabit uzunlukta olduğunu söyler. $\mathbb{R}^m$'de tanımlı bir fonksiyonun gradient vektörünün uzunluğu her noktada sabit ise bu fonksiyon afin fonksiyon olmalıdır [23]. Bu nedenle de $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = a \text{ ve } \frac{\partial g}{\partial x_2} = b$$

şeklindedir. Yani $a^2 + b^2 = 1$ olmak üzere $\varphi = a\ dx_1 + b\ dx_2$ şeklinde sabit katsayılı bir form alanıdır.

Benzer argümanla $\mathbb{R}^m$'de $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ olmak üzere

$$\varphi = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_m} dx_m$$

şeklinde ifade edilen φ kuvvetli 1-kalibrasyon alanının tüm $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ katsayı fonksiyonlarının

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial g}{\partial x_m}\right)^2 = 1$$

olduğundan sabit olması gerektiği görülür.

5.2 $\mathbb{R}^{2n}$'de Kuvvetli $2-$Kalibrasyon Alanları

$\mathbb{R}^m$'deki 1-formlarla ilgili önceki bölümde yapılan çalışma sonucunda akla ilk olarak bu durumun 2-formlar için de geçerli olup olmadığı sorusu gelmektedir. Yani bir 2-form alanı eğer kuvvetli 2-kalibrasyon alanı ise sabit katsayılı olmak zorunda mıdır? Kuvvetli 2-kalibrasyonların kendine dual 2-formlarla olan yakın ilişkisi nedeniyle bu soru önem kazanmaktadır.

$\varphi \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$ olsun. $x \in \mathbb{R}^{2n}$ ve $a^{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ için $a^{ij} = a^{ij}(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ olmak üzere $\varphi_x = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq 2n} a^{ij}\ dx_i \wedge dx_j$ olsun. Acaba φ bir kuvvetli 2-kalibrasyon alanı ise a^{ij} katsayıları sabit olmak zorunda mıdır?

Motivasyon amacıyla önce $2n = 4$ alıp, $\mathbb{R}^4$'teki bir kuvvetli 2-kalibrasyon alanının sabit katsayılı olup olmadığını araştıralım.

Not: Bu bölümdeki araştırmamızda "$\mathbb{R}^m$*'deki bir harmonik fonksiyon sınırlı ise sabittir*" gerçeği son derece önemlidir [24, Teorem 2.1]. Katsayı fonksiyonları kalibrasyon olmanın doğal bir sonucu olarak sınırlı fonksiyonlardır. Katsayı fonksiyonları sınırlı fonksiyonlar olduklarından sabit olmaları gerektiğini harmonik olduklarını göstererek kanıtlamak istiyoruz. Bu nedenle bu noktadan itibaren temel soru bu katsayı fonksiyonlarının harmonik olup olmadığıdır.

5.2.1 $\mathbb{R}^4$'de ve $\mathbb{R}^6$'da kuvvetli $2-$kalibrasyon alanları

$\mathbb{R}^4$'de bir $2-$form alanı, $a^{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^4), 1 \leq i < j \leq 4$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi &= a^{12}\, dx_1 \wedge dx_2 + a^{13}\, dx_1 \wedge dx_3 + a^{14}\, dx_1 \wedge dx_4 \\ &\quad + a^{23}\, dx_2 \wedge dx_3 + a^{24}\, dx_2 \wedge dx_4 + a^{34}\, dx_3 \wedge dx_4 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Alt Bölüm 4.1.1'de gösterildiği üzere φ'nin bir kuvvetli kalibrasyon olabilmesi için

$$\begin{aligned} \left(a^{12}\right)^2 + \left(a^{13}\right)^2 + \left(a^{14}\right)^2 &= 1,\ a^{12} = a^{34}, a^{13} = -a^{24}, a^{14} = a^{23} \\ \left(a^{12}\right)^2 + \left(a^{13}\right)^2 + \left(a^{14}\right)^2 &= 1,\ a^{12} = -a^{34}, a^{13} = a^{24}, a^{14} = -a^{23} \end{aligned}$$

koşullarından birinin sağlanması gerekir. Bu koşullardan birini seçelim,

$$a^{12} = a^{34}, a^{13} = -a^{24}, a^{14} = a^{23} \tag{5.2.2}$$

olsun. φ kuvvetli 2-kalibrasyon ise öncelikle sağlanması gereken koşul $d\varphi = 0$ olduğudur. Bu koşul, $a_k^{ij} = \dfrac{\partial}{\partial x_k}(a^{ij})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a_4^{13} - a_3^{14} + a_1^{34} &= 0 \\ a_4^{23} - a_3^{24} + a_2^{34} &= 0 \\ a_3^{12} - a_2^{13} + a_1^{23} &= 0 \\ a_4^{12} - a_2^{14} + a_1^{24} &= 0 \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

eşitliklerini verir. (5.2.2) koşulu (5.2.3) sisteminde yerine yazılırsa ve sırasıyla $\dfrac{\partial}{\partial i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial_1}\left(a_4^{13} - a_3^{14} + a_1^{12}\right) &= a_{14}^{13} - a_{13}^{14} + a_{11}^{12} = 0 \\
\tfrac{\partial}{\partial_2}\left(a_4^{14} + a_3^{13} + a_2^{12}\right) &= a_{24}^{14} + a_{23}^{13} + a_{22}^{12} = 0 \\
\tfrac{\partial}{\partial_3}\left(a_3^{12} - a_2^{13} + a_1^{14}\right) &= a_{33}^{12} - a_{32}^{13} + a_{31}^{14} = 0 \\
\tfrac{\partial}{\partial_4}\left(a_4^{12} - a_2^{14} - a_1^{13}\right) &= a_{44}^{12} - a_{42}^{14} - a_{41}^{13} = 0
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Elde edilen bu denklemler taraf tarafa toplanırsa ve $a^{ij} \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^4\right)$ nedeniyle $a_{rs}^{ij} = a_{sr}^{ij}$ olduğu kullanılırsa

$$0 = a_{11}^{12} + a_{22}^{12} + a_{33}^{12} + a_{44}^{12} = \Delta a^{12}$$

elde edilir. Benzer işlemler uygulanarak

$$\Delta a^{13} = \Delta a^{14} = \Delta a^{23} = \Delta a^{24} = \Delta a^{34} = 0$$

olduğu görülür. Yani a^{12}, a^{13}, a^{14}, a^{23}, a^{24} ve a^{34} katsayı fonksiyonları harmonik olmak zorundadır. Katsayı fonksiyonları harmonik ve sınırlı olduğundan sabit fonksiyonlardır.

O halde $\mathbb{R}^4$'de bir $2-$form alanı eğer kuvvetli 2-kalibrasyon alanı ise sabit katsayılı olmak zorundadır.

Genel duruma daha fazla hakim olabilmek için $2n = 6$ durumunu da inceleyelim.

$\varphi \in \Omega^2(\mathbb{R}^6)$ bir kuvvetli 2-kalibrasyon alanı olsun. $1 \leq i < j \leq 6$ için $a^{ij} \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^6\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\varphi = {} & a^{12}\, dx_1 \wedge dx_2 + a^{13}\, dx_1 \wedge dx_3 + a^{14}\, dx_1 \wedge dx_4 + a^{15}\, dx_1 \wedge dx_5 + a^{16}\, dx_1 \wedge dx_6 \\
& + a^{23}\, dx_2 \wedge dx_3 + a^{24}\, dx_2 \wedge dx_4 + a^{25}\, dx_2 \wedge dx_5 + a^{26}\, dx_2 \wedge dx_6 + a^{34}\, dx_3 \wedge dx_4 \\
& + a^{35}\, dx_3 \wedge dx_5 + a^{36}\, dx_3 \wedge dx_6 + a^{45}\, dx_4 \wedge dx_5 + a^{46}\, dx_4 \wedge dx_6 + a^{56}\, dx_5 \wedge dx_6
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. φ'nin matrisini yine A ile gösterelim. A matrisi anti-simetrik ve ortogonal olduğundan $\det A = 1$ dir. Bu durumda $Pf(A) = \pm 1$ olabilir. Fakat bir $x \in \mathbb{R}^6$ noktasında $Pf(A) = 1$ ise, a^{ij} fonksiyonlarının sürekliliğinden ve $\mathbb{R}^6$'nın bağlantılı oluşundan her noktada $Pf(A) = 1$ olmalıdır. Benzer durum $Pf(A) = -1$ durumu için de geçerli olacaktır. Bu noktada bir tercih yapıp yolumuza $Pf(A) = 1$ alarak devam edelim.

Bu durumda (4.4.1) eşitliği $1 \leq i < j \leq 6$ olmak üzere

$$a^{ij} = (-1)^{i+j-1} Pf(M_{ij,ij})$$

şeklinde verilebilir. O halde katsayı fonksiyonları arasındaki ilişki bu boyutta açık olarak

$$\begin{aligned}
a^{12} &= a^{56}a^{34} + a^{45}a^{36} - a^{35}a^{46} && (5.2.4)\\
a^{13} &= -a^{56}a^{24} - a^{45}a^{26} + a^{25}a^{46} && (5.2.5)\\
a^{14} &= a^{56}a^{23} + a^{35}a^{26} - a^{25}a^{36} && (5.2.6)\\
a^{15} &= -a^{23}a^{46} + a^{24}a^{36} - a^{34}a^{26} && (5.2.7)\\
a^{16} &= a^{23}a^{45} - a^{35}a^{24} + a^{34}a^{25} && (5.2.8)\\
a^{23} &= a^{56}a^{14} + a^{45}a^{16} - a^{46}a^{15} && (5.2.9)\\
a^{24} &= -a^{56}a^{13} + a^{36}a^{15} - a^{35}a^{16} && (5.2.10)\\
a^{25} &= a^{46}a^{13} - a^{36}a^{14} + a^{34}a^{16} && (5.2.11)\\
a^{26} &= -a^{45}a^{13} - a^{34}a^{15} + a^{35}a^{14} && (5.2.12)\\
a^{34} &= a^{56}a^{12} - a^{26}a^{15} + a^{25}a^{16}\\
a^{35} &= -a^{46}a^{12} + a^{26}a^{14} - a^{24}a^{15}\\
a^{45} &= a^{36}a^{12} + a^{23}a^{16} - a^{26}a^{13}\\
a^{46} &= -a^{35}a^{12} - a^{23}a^{15} + a^{25}a^{13}\\
a^{56} &= a^{34}a^{12} - a^{24}a^{13} + a^{23}a^{14}
\end{aligned}$$

şeklinde var olmalıdır. Bu özel durumda da yine amaç katsayı fonksiyonlarının harmonik olduğunu görmektir. Katsayı fonksiyonlarının sınırlı olduğu, hatta 1 ile sınırlı olduğu her noktada φ bir kuvvetli kalibrasyon belirleyeceğinden açıktır. Katsayı fonksiyonlarının harmonik olduğunu gösterildiğinde, sınırlı olduklarından sabit oldukları da görülmüş olacaktır.

φ bir kuvvetli 2-kalibrasyon alanı ise $d\varphi = 0$ olmalıdır. Bu koşuldan $a_k^{ij} = \dfrac{\partial}{\partial x_k}(a^{ij})$ olmak üzere

$$
\begin{array}{llll}
* & a_3^{12} - a_2^{13} + a_1^{23} = 0 & & a_4^{23} - a_3^{24} + a_2^{34} = 0 \\
* & a_4^{12} - a_2^{14} + a_1^{24} = 0 & & a_5^{23} - a_3^{25} + a_2^{35} = 0 \\
* & a_5^{12} - a_2^{15} + a_1^{25} = 0 & & a_6^{23} - a_3^{26} + a_2^{36} = 0 \\
* & a_6^{12} - a_2^{16} + a_1^{26} = 0 & & a_5^{24} - a_4^{25} + a_2^{45} = 0 \\
& a_4^{13} - a_3^{14} + a_1^{34} = 0 & & a_6^{24} - a_4^{26} + a_2^{46} = 0 \\
& a_5^{13} - a_3^{15} + a_1^{35} = 0 & & a_6^{25} - a_5^{26} + a_2^{56} = 0 \\
& a_6^{13} - a_3^{16} + a_1^{36} = 0 & & a_5^{34} - a_4^{35} + a_3^{45} = 0 \\
& a_5^{14} - a_4^{15} + a_1^{45} = 0 & & a_6^{34} - a_4^{36} + a_3^{46} = 0 \\
& a_6^{14} - a_4^{16} + a_1^{46} = 0 & & a_6^{35} - a_5^{36} + a_3^{56} = 0 \\
& a_6^{15} - a_5^{16} + a_1^{56} = 0 & & a_6^{45} - a_5^{46} + a_4^{56} = 0
\end{array} \tag{5.2.13}
$$

eşitlikleri elde edilir. a^{12} katsayı fonksiyonunun harmonik olduğunu görmeye çalışalım. Bu hedef doğrultusunda $d\varphi = 0$ koşulundan elde ettiğimiz denklemlerden " * " ile işaretlenmiş olan ilk dördünü alalım. Bu denklemlerden

$$
\begin{array}{c}
a_3^{12} = a_2^{13} - a_1^{23} \\
a_4^{12} = a_2^{14} - a_1^{24} \\
a_5^{12} = a_2^{15} - a_1^{25} \\
a_6^{12} = a_2^{16} - a_1^{26}
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c}
a_{33}^{12} = a_{32}^{13} - a_{31}^{23} \\
a_{44}^{12} = a_{42}^{14} - a_{41}^{24} \\
a_{55}^{12} = a_{52}^{15} - a_{51}^{25} \\
a_{66}^{12} = a_{62}^{16} - a_{61}^{26}
\end{array}
$$

elde edilir. O halde a^{12} katsayı fonksiyonunun Laplasyanı

$$
\begin{aligned}
\Delta a^{12} &= a_{11}^{12} + a_{22}^{12} + a_{33}^{12} + a_{44}^{12} + a_{55}^{12} + a_{66}^{12} \\
&= a_{11}^{12} + a_{22}^{12} + (a_{32}^{13} - a_{31}^{23}) + (a_{42}^{14} - a_{41}^{24}) + (a_{52}^{15} - a_{51}^{25}) + (a_{62}^{16} - a_{61}^{26}) \\
&= \left(a_{11}^{12} - a_{13}^{23} - a_{14}^{24} - a_{15}^{25} - a_{16}^{26}\right) + \left(a_{22}^{12} + a_{23}^{13} + a_{24}^{14} + a_{25}^{15} + a_{26}^{16}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial_1}\left(a_1^{12} - a_3^{23} - a_4^{24} - a_5^{25} - a_6^{26}\right) + \frac{\partial}{\partial_2}\left(a_2^{12} + a_3^{13} + a_4^{14} + a_5^{15} + a_6^{16}\right)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. (5.2.4),(5.2.9),(5.2.10),(5.2.11) ve (5.2.12) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
a_1^{12} &= a_1^{34}a^{56} + a^{34}a_1^{56} + a_1^{36}a^{45} + a^{36}a_1^{45} - a_1^{35}a^{46} - a^{35}a_1^{46} \\
a_3^{23} &= a_3^{14}a^{56} + a^{14}a_3^{56} + a_3^{16}a^{45} + a^{16}a_3^{45} - a_3^{15}a^{46} - a^{15}a_3^{46} \\
a_4^{24} &= -a_4^{13}a^{56} - a^{13}a_4^{56} - a_4^{16}a^{35} - a^{16}a_4^{35} + a_4^{15}a^{36} + a^{15}a_4^{36} \\
a_5^{25} &= a_5^{16}a^{34} + a^{16}a_5^{34} - a_5^{14}a^{36} - a^{14}a_5^{36} + a_5^{13}a^{46} + a^{13}a_5^{46} \\
a_6^{26} &= a_6^{14}a^{35} + a^{14}a_6^{35} - a_6^{15}a^{34} - a^{15}a_6^{34} - a_6^{13}a^{45} - a^{13}a_6^{45}
\end{aligned}$$

olduğu bilinmektedir. İlgili terimler yerine yazılırsa ve (5.2.13) eşitlikleri kullanılırsa $a_1^{12} - a_3^{23} - a_4^{24} - a_5^{25} - a_6^{26}$ terimi

$$\begin{aligned}
&= a_1^{34}a^{56} + a^{34}a_1^{56} + a_1^{36}a^{45} + a^{36}a_1^{45} - a_1^{35}a^{46} - a^{35}a_1^{46} \\
&\quad - \left(a_3^{14}a^{56} + a^{14}a_3^{56} + a_3^{16}a^{45} + a^{16}a_3^{45} - a_3^{15}a^{46} - a^{15}a_3^{46}\right) \\
&\quad - \left(-a_4^{13}a^{56} - a^{13}a_4^{56} - a_4^{16}a^{35} - a^{16}a_4^{35} + a_4^{15}a^{36} + a^{15}a_4^{36}\right) \\
&\quad - \left(a_5^{16}a^{34} + a^{16}a_5^{34} - a_5^{14}a^{36} - a^{14}a_5^{36} + a_5^{13}a^{46} + a^{13}a_5^{46}\right) \\
&\quad - \left(a_6^{14}a^{35} + a^{14}a_6^{35} - a_6^{15}a^{34} - a^{15}a_6^{34} - a_6^{13}a^{45} - a^{13}a_6^{45}\right) \\
&= a^{56}\left(a_1^{34} - a_3^{14} + a_4^{13}\right) + a^{34}\left(a_1^{56} - a_5^{16} + a_6^{15}\right) \\
&\quad + a^{45}\left(a_1^{36} - a_3^{16} + a_6^{13}\right) + a^{36}\left(a_1^{45} - a_4^{15} + a_5^{14}\right) \\
&\quad - a^{46}\left(a_1^{35} - a_3^{15} + a_5^{13}\right) - a^{35}\left(a_1^{46} - a_4^{16} + a_6^{14}\right) \\
&\quad - a^{14}\left(a_3^{56} - a_5^{36} + a_6^{35}\right) + a^{15}\left(a_3^{46} - a_4^{36} + a_6^{34}\right) \\
&\quad + a^{13}\left(a_4^{56} - a_5^{46} + a_6^{45}\right) - a^{16}\left(a_3^{45} - a_4^{35} + a_5^{34}\right) \\
&= a^{56}(0) + a^{34}(0) + a^{45}(0) + a^{36}(0) - a^{46}(0) - a^{35}(0) \\
&\quad - a^{14}(0) + a^{15}(0) + a^{13}(0) - a^{16}(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aynı yöntemle diğer terimin de sıfır olduğu görülebilir.

(5.2.4),(5.2.5),(5.2.6),(5.2.7) ve (5.2.8) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
a_2^{12} &= a_2^{56}a^{34} + a^{56}a_2^{34} + a_2^{45}a^{36} + a^{45}a_2^{36} - a_2^{35}a^{46} - a^{35}a_2^{46} \\
a_3^{13} &= -a_3^{56}a^{24} - a^{56}a_3^{24} - a_3^{45}a^{26} - a^{45}a_3^{26} + a_3^{25}a^{46} + a^{25}a_3^{46} \\
a_4^{14} &= a_4^{56}a^{23} + a^{56}a_4^{23} + a_4^{35}a^{26} + a^{35}a_4^{26} - a_4^{25}a^{36} - a^{25}a_4^{36} \\
a_5^{15} &= -a_5^{23}a^{46} - a^{23}a_5^{46} + a_5^{24}a^{36} + a^{24}a_5^{36} - a_5^{34}a^{26} - a^{34}a_5^{26} \\
a_6^{16} &= a_6^{23}a^{45} + a^{23}a_6^{45} - a_6^{35}a^{24} - a^{35}a_6^{24} + a_6^{34}a^{25} + a^{34}a_6^{25}
\end{aligned}$$

olduğu bilinmektedir. İlgili terimler yerine yazılırsa ve (5.2.13) eşitlikleri kullanılırsa $a_2^{12} + a_3^{13} + a_4^{14} + a_5^{15} + a_6^{16}$ terimi

$$\begin{aligned}
&= a_2^{56}a^{34} + a^{56}a_2^{34} + a_2^{45}a^{36} + a^{45}a_2^{36} - a_2^{35}a^{46} - a^{35}a_2^{46} \\
&\quad -a_3^{56}a^{24} - a^{56}a_3^{24} - a_3^{45}a^{26} - a^{45}a_3^{26} + a_3^{25}a^{46} + a^{25}a_3^{46} \\
&\quad +a_4^{56}a^{23} + a^{56}a_4^{23} + a_4^{35}a^{26} + a^{35}a_4^{26} - a_4^{25}a^{36} - a^{25}a_4^{36} \\
&\quad -a_5^{23}a^{46} - a^{23}a_5^{46} + a_5^{24}a^{36} + a^{24}a_5^{36} - a_5^{34}a^{26} - a^{34}a_5^{26} \\
&\quad +a_6^{23}a^{45} + a^{23}a_6^{45} - a_6^{35}a^{24} - a^{35}a_6^{24} + a_6^{34}a^{25} + a^{34}a_6^{25} \\
&= a^{34}(a_2^{56} - a_5^{26} + a_6^{25}) + a^{56}(a_2^{34} - a_3^{24} + a_4^{23}) \\
&\quad +a^{36}(a_2^{45} - a_4^{25} + a_5^{24}) + a^{45}(a_2^{36} - a_3^{26} + a_6^{23}) \\
&\quad -a^{46}(a_2^{35} - a_3^{25} + a_5^{23}) - a^{35}(a_2^{46} - a_4^{26} + a_6^{24}) \\
&\quad -a^{24}(a_3^{56} - a_5^{36} + a_6^{35}) - a^{26}(a_3^{45} - a_4^{35} + a_5^{34}) \\
&\quad +a^{25}(a_3^{46} - a_4^{36} + a_6^{34}) + a^{23}(a_4^{56} - a_5^{46} + a_6^{45}) \\
&= a^{34}(0) + a^{56}(0) + a^{36}(0) + a^{45}(0) - a^{46}0) - a^{35}(0) \\
&\quad -a^{24}(0) - a^{26}(0) + a^{25}(0) + a^{23}(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
\Delta a^{12} &= \frac{\partial}{\partial_1}\left(a_1^{12} - a_3^{23} - a_4^{24} - a_5^{25} - a_6^{26}\right) + \frac{\partial}{\partial_2}\left(a_2^{12} + a_3^{13} + a_4^{14} + a_5^{15} + a_6^{16}\right) \\
&= 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak elde edilmiş olur. Yani a^{12} katsayı fonksiyonu harmonik, dolayısıyla sabit fonksiyon olmak zorundadır. Diğer katsayı fonksiyonlarının da benzer argümanla harmonik olması gerektiği görülebilir.

O halde $\mathbb{R}^6$'da bir $2-$form alanı eğer kuvvetli 2-kalibrasyon alanı ise sabit katsayılı olmak zorundadır.

5.2.2 $\mathbb{R}^{2n}$'de kuvvetli $2-$kalibrasyon alanları

Düşük boyuttaki bu gözlemlerden sonra genel durum hakkında daha iyi fikir sahibi olabilmek için $\mathbb{R}^8$'deki bir $2-$form alanı için de benzer argümanla yine katsayı fonksiyonlarının harmonik olup olmadığı araştırılmıştır. Bu boyutta da katsayı fonksiyonlarının harmonik olması gerektiği dolayısıyla sabit olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Şimdi genel durum için aşağıdaki teoremi veriyoruz.

Teorem 5.2.1 *φ, $\mathbb{R}^{2n}$'de bir kuvvetli $2-$kalibrasyon alanı olsun. Bu durumda φ sabit katsayılıdır.*

Kanıt. $\varphi \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$ bir kuvvetli 2-kalibrasyon alanı olsun. Her $x \in \mathbb{R}^{2n}$ ve $a^{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ için

$$\varphi_x = \sum_{1\le i<j\le 2n} a^{ij}(x_1, x_2, ..., x_{2n})dx_i \wedge dx_j$$

şeklinde alalım. φ_x'in $\mathbb{R}^{2n}$'nin birimdikey bir tabanına göre matrisi, $a^{ij} = a^{ij}(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a^{12} & a^{13} & \cdots & a^{1\,2n} \\ -a^{12} & 0 & a^{23} & \cdots & a^{2\,2n} \\ -a^{13} & -a^{23} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a^{2n-1\,2n} \\ -a^{1\,2n} & -a^{2\,2n} & \cdots & -a^{2n-1\,2n} & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

şeklinde olsun.

a^{ij} katsayı fonksiyonlarımız, φ her noktada bir kuvvetli $2-$kalibrasyon belirlediğinden 1 ile üstten -1 ile alttan sınırlı fonksiyonlardır. $\mathbb{R}^m$'de sınırlı ve harmonik bir fonksiyon sabit olduğundan katsayı fonksiyonlarımızın harmonik fonksiyonlar olduğunu göstermek yeterlidir.

A matrisi anti-simetrik ve ortogonal olduğundan $\det A = 1$ dir. Bu durumda $Pf(A) = \pm 1$ olabilir. Fakat bir $x \in \mathbb{R}^{2n}$ noktasında $Pf(A) = 1$ ise, a^{ij} fonksiyonlarının sürekliliğinden ve $\mathbb{R}^{2n}$'nin bağlantılı oluşundan her noktada $Pf(A) = 1$ olmalıdır. Yani form alanımız bir kuvvetli 2-kalibrasyon alanı ise, ya her $x \in \mathbb{R}^{2n}$ noktasında $Pf(A) = 1$ dir ya da her $x \in \mathbb{R}^{2n}$ noktasında $Pf(A) = -1$ dir. Bu noktada bir tercih yapıp yolumuza $Pf(A) = 1$ alarak devam edelim. Diğer durumdaki kuvvetli $2-$kalibrasyon alanları içinde benzer işlemlerle sonuca ulaşılabilir. Bu durumda katsayı fonksiyonlarımız arasındaki ilişkiyi (4.4.1) eşitliği yardımıyla

$$a^{ij} = (-1)^{i+j-1} Pf(M_{ij,ij}) \tag{5.2.14}$$

şeklinde verebiliriz.

Bu noktadan itibaren a^{12} katsayısına odaklanıp, bu katsayı fonksiyonunun harmonik olduğunu görmeye çalışalım. Bu hedef doğrultusunda, $2 \leq i, j, k \leq 2n$, $i < j$ ve $i \neq k \neq j$ olmak üzere $Pf(M_{1k,1k})$ ve $Pf(M_{1kij,1kij})$ ifadelerine daha yakından bakalım. $K^{1k} = \{1, 2, ..., 2n-1, 2n\} - \{1, k\}$ olmak üzere

$$\Pi^{1k} = \{(i_1\ j_1\ \cdots\ i_{n-1}\ j_{n-1}) \in S_{K^{1k}} \mid i_1 < \cdots < i_{n-1}, p = 1, ..., n-1 \text{ için } i_p < j_p\}$$

ve $\alpha^{1k} \in \Pi^{1k}$ için $A_{\alpha^{1k}} = sgn\left(\alpha^{1k}\right) a^{i_1 j_1} a^{i_2 j_2} \cdots a^{i_{n-1} j_{n-1}}$ olsun. Bu durumda

$$Pf(M_{1k,1k}) = \sum_{\alpha^{1k} \in \Pi^{1k}} A_{\alpha^{1k}}$$

şeklinde verilebilir. Benzer olarak $K^{1kij} = \{1, 2, ..., 2n-1, 2n\} - \{1, k, i, j\}$, $i < j$ ve $i \neq k \neq j$ olmak üzere

$$\Pi^{1kij} = \{(i_1\ j_1\ \cdots\ i_{n-2}\ j_{n-2}) \in S_{K^{1kij}} \mid i_1 < \cdots < i_{n-2}, p = 1, ..., n-2 \text{ için } i_p < j_p\}$$

ve $\alpha^{1kij} \in \Pi^{1kij}$ için $A_{\alpha^{1kij}} = sgn\left(\alpha^{1kij}\right) a^{i_1 j_1} a^{i_2 j_2} \cdots a^{i_{n-2} j_{n-2}}$ olsun. Bu durumda

$$Pf(M_{1kij,1kij}) = \sum_{\alpha^{1kij} \in \Pi^{1kij}} A_{\alpha^{1kij}}$$

şeklinde verilebilir.

Yardımcı Teorem 5.2.2 $\alpha^{1k} \in \Pi^{1k}$ *permutasyonu*

$$\alpha^{1k} = (i_1 \ j_1 \ \cdots \ i_{p-1} \ j_{p-1} \ i_p \ j_p \ i_{p+1} \ j_{p+1} \ \cdots \ i_{n-1} \ j_{n-1})$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu durumda

$$\alpha^{1ki_pj_p} = (i_1 \ j_1 \ \cdots \ i_{p-1} \ j_{p-1} \ i_{p+1} \ j_{p+1} \ \cdots \ i_{n-1} \ j_{n-1}) \in \Pi^{1ki_pj_p}$$

olmak üzere

$$sgn\left(\alpha^{1k}\right) = (-1)^{i_p+j_p-1} \ sgn\left[(i_p-k)(j_p-k)\right] \ sgn\left(\alpha^{1ki_pj_p}\right)$$

şeklindedir.

Kanıt. $\alpha^{1k} \in \Pi^{1k}$ permutasyonu

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & * & * & \cdots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & \cdots & i_p & j_p & \cdots & i_{n-1} & j_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde verilsin. α^{1k} permutasyonunun işaretiyle

$$\tilde{\alpha}^{1k} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ i_p & j_p & i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \cdots & i_{n-1} & j_{n-1} \end{pmatrix}$$

permutasyonunun işareti i_p ve j_p aynı sayıda terim atlatıldığından aynıdır. j_p elemanını j_p. yere götürdüğümüzde elde edilen permutasyon

$$\tilde{\alpha}^{1k}_{j_p} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & j_p & \cdots & 2n-1 & 2n \\ i_p & i_1 & j_1 & \cdots & j_p & \cdots & i_{n-1} & j_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde olsun. Eğer j_p k değerinden küçükse j_p elemanını ilgili yere götürmek için $j_p - 3$ kez atlatmak gerekecektir. Ama j_p eğer k değerinden büyükse bu durumda k permutasyonumuzun bir terimi olmadığından 1 terim eksik atlanacak yani $j_p - 2$ kez atlanacaktır. Bu durumda da işaret değişecektir. Bunu kontrol etmek için sgn fonksiyonu kullanılabilir. Bu durumda

$$sgn\left(\alpha^{1k}\right) = sgn\left(\tilde{\alpha}^{1k}\right) = (-1)^{j_p-3} sgn(k - j_p) sgn(\tilde{\alpha}^{1k}_{j_p})$$

olur. $\tilde{\alpha}^{1k}_{j_p}$ permutasyonunda i_p elemanını i_p. yere götürdüğümüzde elde edilen permutasyon da

$$\tilde{\alpha}^{1k}_{j_p i_p} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & i_p & \cdots & j_p & \cdots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & \cdots & i_p & \cdots & j_p & \cdots & i_{n-1} & j_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde olsun. Bu durumda benzer şekilde

$$sgn(\tilde{\alpha}^{1k}_{j_p}) = (-1)^{i_p-2} sgn(k - i_p)\ sgn(\tilde{\alpha}^{1k}_{j_p i_p})$$

olacağından

$$\begin{aligned} sgn\left(\alpha^{1k}\right) &= (-1)^{j_p-3} sgn(k - j_p)\ sgn(\tilde{\alpha}^{1k}_{j_p}) \\ &= (-1)^{j_p-3} sgn(k - j_p)(-1)^{i_p-2} sgn(k - i_p)\ sgn(\tilde{\alpha}^{1k}_{j_p i_p}) \\ &= (-1)^{i_p+j_p-1} sgn[(i_p - k)(j_p - k)]\ sgn(\tilde{\alpha}^{1k}_{j_p i_p}) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca açıktır ki $sgn(\tilde{\alpha}^{1k}_{j_p i_p}) = sgn(\alpha^{1k i_p j_p})$ şeklindedir. O halde

$$sgn\left(\alpha^{1k}\right) = (-1)^{i_p+j_p-1}\ sgn\left[(i_p - k)(j_p - k)\right]\ sgn\left(\alpha^{1k i_p j_p}\right)$$

elde edilmiş olur. ■

$\dfrac{\partial}{\partial_k}$ ile k. kısmi türev operatörünü gösterelim. Yalınlık için $a^{ij}_k = \dfrac{\partial}{\partial_k} a^{ij}$ olarak kullanalım.

Yardımcı Teorem 5.2.3 *$2 \leq k \leq 2n$ olmak üzere, bir k tam sayısı için*

$$\frac{\partial}{\partial_k} Pf(M_{1k,1k}) = \sum_{2 \leq i < j \leq 2n} (-1)^{i+j-1} sgn\left[(i - k)(j - k)\right] a^{ij}_k Pf(M_{1kij,1kij}) \qquad (5.2.15)$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. $Pf(M_{1k,1k})$'nın açık ifadesi yardımıyla

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial k}Pf(M_{1k,1k}) &= \frac{\partial}{\partial k}\sum_{\alpha^{1k}\in\Pi^{1k}} A_{\alpha^{1k}} \\
&= \sum_{\alpha^{1k}\in\Pi^{1k}} \frac{\partial}{\partial_k} A_{\alpha^{1k}} \\
&= \sum_{\alpha^{1k}\in\Pi^{1k}} \frac{\partial}{\partial_k}\left(sgn\left(\alpha^{1k}\right) a^{i_1 j_1} a^{i_2 j_2}\cdots a^{i_{n-1} j_{n-1}}\right) \\
&= \sum_{\alpha^{1k}\in\Pi^{1k}} sgn\left(\alpha^{1k}\right) \frac{\partial}{\partial_k}\left(a^{i_1 j_1} a^{i_2 j_2}\cdots a^{i_{n-1} j_{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. r ve s, 1 ve k dan farklı olan ve $r < s$ şeklinde seçilmiş sabitler olsun. $\alpha^{1k} = (i_1\ j_1\ \cdots\ i_p = r\ j_p = s\ \cdots\ i_{n-1}\ j_{n-1}) \in \Pi^{1k}$ permutasyonunun belirlediği $A_{\alpha^{1k}} = sgn\left(\alpha^{1k}\right) a^{i_1 j_1}\cdots a^{rs}\cdots a^{i_{n-1} j_{n-1}}$ terimini düşünelim.

$\dfrac{\partial}{\partial k}Pf(M_{1k,1k})$ ifadesinde $\dfrac{\partial}{\partial_k}a^{rs}$ teriminin bir çarpan olduğu terimlerin toplamını T^{rs} ile gösterelim. T^{rs} toplamına $A_{\alpha^{1k}}$'nın k. kısmi türevinden gelecek olan katkı, Yardımcı Teorem 5.2.2 yardımıyla

$$(-1)^{r+s-1}\ sgn\left[(r-k)(s-k)\right]\ sgn\left(\alpha^{1krs}\right)\frac{\partial}{\partial_k}a^{rs} \prod_{q\in\{1,2,3,\ldots,n-1\}-\{p\}} a^{i_q j_q} \qquad (5.2.16)$$

şeklinde yazılabilir. $\Pi^{1k}_{p,rs}$, bir $p \in \{1,2,3,...,n-1\}$ için $i_p = r$ ve $j_p = s$ olacak şekildeki Π^{1k}'nın permutasyonlarının kümesini göstersin. $\Pi^{1k}_{p,rs}$ üzerinden (5.2.16) teriminin toplamı alınırsa T^{rs} terimi elde edilmiş olur. O halde

$$\begin{aligned}
T^{rs} &= \sum_{\alpha^{1k}\in\Pi^{1k}_{p,rs}}\left(sgn\left(\alpha^{1k}\right)\ \frac{\partial}{\partial_k}a^{rs}\prod_{q\in\{1,2,3,\ldots,n-1\}-\{p\}} a^{i_q j_q}\right) \\
&= \sum_{\alpha^{1k}\in\Pi^{1k}_{p,rs}}\left((-1)^{r+s-1}\ sgn\left[(r-k)(s-k)\right]\ sgn\left(\alpha^{1krs}\right)\ \frac{\partial}{\partial_k}a^{rs}\prod_{q\in\{1,2,3,\ldots,n-1\}-\{p\}} a^{i_q j_q}\right) \\
&= (-1)^{r+s-1}\ sgn\left[(r-k)(s-k)\right]\ \frac{\partial}{\partial_k}a^{rs}\left(\sum_{\alpha^{1k}\in\Pi^{1k}_{p,rs}} sgn\left(\alpha^{1krs}\right)\prod_{q\in\{1,2,3,\ldots,n-1\}-\{p\}} a^{i_q j_q}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$\alpha^{1krs} \in \Pi^{1krs}$ permutasyonu

$$\alpha^{1krs} = (i_1\ j_1\ i_2\ j_2\ \cdots\ i_{n-2}\ j_{n-2})$$

olarak verildiğinde, $i_p < r < i_{p+1}$ ise

$$\alpha^{1k} = \left(i_1\ j_1\ \cdots\ i_q\ j_q\ r\ s\ i_{q+1}\ j_{q+1}\ \cdots\ i_{n-2}\ j_{n-2}\right) \in \Pi^{1k}_{p,rs}$$

dir. $\alpha^{1k} \in \Pi^{1k}_{p,rs}$

$$\alpha^{1k} = \left(i_1\ j_1\ \cdots\ i_{p_\alpha -1}\ j_{p_\alpha -1}\ i_{p_\alpha} = r\ j_{p_\alpha} = s\ i_{p_\alpha +1}\ j_{p_\alpha +1}\ \cdots\ i_{n-1}\ j_{n-1}\right)$$

olarak verildiğinde

$$\alpha^{1krs} = \left(i_1\ j_1\ \cdots\ i_{p_\alpha -1}\ j_{p_\alpha -1}\ i_{p_\alpha +1}\ j_{p_\alpha +1}\ \cdots\ i_{n-1}\ j_{n-1}\right)$$

dir. Yani $\Pi^{1k}_{p,rs}$'nin terimleriyle Π^{1krs}'nin terimleri arasında doğal bir bire-bir eşleme vardır. Ayrıca $\alpha^{1k} \in \Pi^{1k}_{p,rs}$ olmak üzere

$$\prod_{q\in\{1,2,3,\ldots,n-1\}-\{p\}} a^{i_q j_q}$$

çarpımında a^{rs} terimi çarpan olarak bulunmadığından

$$\sum_{\alpha^{1k}\in\Pi^{1k}_{p,rs}} \left(sgn\left(\alpha^{1krs}\right) \prod_{q\in\{1,2,3,\ldots,n-1\}-\{p\}} a^{i_q j_q} \right) = \sum_{\alpha^{1krs}\in\Pi^{1krs}} \left(sgn\left(\alpha^{1krs}\right) \prod_{q\in\{1,2,3,\ldots,n-2\}} a^{i_q j_q} \right)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda T^{rs} terimi

$$\begin{aligned}
T^{rs} &= (-1)^{r+s-1}\ sgn\left[(r-k)(s-k)\right]\ \frac{\partial}{\partial_k} a^{rs} \left(\sum_{\alpha^{1k}\in\Pi^{1k}_{p,rs}} sgn\left(\alpha^{1krs}\right) \prod_{q\in\{1,2,3,\ldots,n-1\}-\{p\}} a^{i_q j_q} \right) \\
&= (-1)^{r+s-1}\ sgn\left[(r-k)(s-k)\right]\ \frac{\partial}{\partial_k} a^{rs} \left(\sum_{\alpha^{1krs}\in\Pi^{1krs}} sgn\left(\alpha^{1krs}\right) \prod_{q\in\{1,2,3,\ldots,n-2\}} a^{i_q j_q} \right) \\
&= (-1)^{r+s-1}\ sgn\left[(r-k)(s-k)\right]\ \frac{\partial}{\partial_k} a^{rs} \left(\sum_{\alpha^{1krs}\in\Pi^{1krs}} A_{\alpha^{1krs}} \right) \\
&= (-1)^{r+s-1}\ sgn\left[(r-k)(s-k)\right]\ \frac{\partial}{\partial_k} a^{rs}\ Pf(M_{1krs,1krs})
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Tüm bu şekildeki (r,s) çiftlerini düşündüğümüzde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial k} Pf(M_{1k,1k}) &= \sum_{\alpha^{1k}\in\Pi^{1k}} sgn\left(\alpha^{1k}\right) \frac{\partial}{\partial_k}\left(a^{i_1 j_1} a^{i_2 j_2} \cdots a^{i_{n-1} j_{n-1}}\right) \\
&= \sum_{2\leq r<s\leq 2n} T^{rs} \\
&= \sum_{2\leq r<s\leq 2n} (-1)^{r+s-1}\ sgn\left[(r-k)(s-k)\right]\ a^{rs}_k\ Pf(M_{1krs,1krs})
\end{aligned}$$

olarak elde edilir ki, bu da istenilen eşitliktir. ■

φ formu kapalı bir form olması gerektiğinden $d\varphi = 0$ olmalıdır. Bu koşul bize

$$a_k^{ij} - a_j^{ik} + a_i^{jk} = 0 \ (1 \leq i < j < k \leq 2n) \tag{5.2.17}$$

eşitliklerini verir. a^{12} katsayı fonksiyonunun Laplasyanını elde etmek için şu yolu izleyelim. (5.2.17) denklem sisteminde $i = 1$ ve $j = 2$ alınırsa, $3 \leq k \leq 2n$ için

$$\begin{array}{lcl} a_3^{12} - a_2^{13} + a_1^{23} = 0 & \Longrightarrow & a_3^{12} = a_2^{13} - a_1^{23} \\ a_4^{12} - a_2^{14} + a_1^{24} = 0 & \Longrightarrow & a_4^{12} = a_2^{14} - a_1^{24} \\ a_5^{12} - a_2^{15} + a_1^{25} = 0 & \Longrightarrow & a_5^{12} = a_2^{15} - a_1^{25} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2n}^{12} - a_2^{1\,2n} + a_1^{2\,2n} = 0 & \Longrightarrow & a_{2n}^{12} = a_2^{1\,2n} - a_1^{2\,2n} \end{array}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklere sırasıyla her $3 \leq k \leq 2n$ tamsayısı için $\dfrac{\partial}{\partial_k}$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} a_{33}^{12} &= a_{32}^{13} - a_{31}^{23} \\ a_{44}^{12} &= a_{42}^{14} - a_{41}^{24} \\ a_{55}^{12} &= a_{52}^{15} - a_{51}^{25} \\ &\vdots \\ a_{2n\,2n}^{12} &= a_{2n\,2}^{1\,2n} - a_{2n\,1}^{2\,2n} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan a^{12} katsayı fonksiyonunun Laplasyanı

$$\begin{aligned} \Delta a^{12} &= a_{11}^{12} + a_{22}^{12} + a_{33}^{12} + a_{44}^{12} + \cdots + a_{2n\,2n}^{12} \\ &= a_{11}^{12} + a_{22}^{12} + \left(a_{32}^{13} - a_{31}^{23}\right) + \left(a_{42}^{14} - a_{41}^{24}\right) + \cdots + \left(a_{2n\,2}^{1\,2n} - a_{2n\,1}^{2\,2n}\right) \\ &= \left(a_{11}^{12} - a_{31}^{23} - a_{41}^{24} - \cdots - a_{2n\,1}^{2\,2n}\right) + \left(a_{22}^{12} + a_{32}^{13} + a_{42}^{14} + \cdots + a_{2n\,2}^{1\,2n}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial_2}\left(a_2^{12} + a_3^{13} + a_4^{14} + \cdots + a_{2n}^{1\,2n}\right) - \frac{\partial}{\partial_1}\left(-a_1^{12} + a_3^{23} + a_4^{24} + \cdots + a_{2n}^{2\,2n}\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (5.2.15) eşitliğini kullanarak $T = (a_2^{12} + a_3^{13} + a_4^{14} + \cdots + a_{2n}^{1\,2n})$ toplamını

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=2}^{2n} a_k^{1k} \\ &= \sum_{k=2}^{2n} \frac{\partial}{\partial k} \left[(-1)^{1+k-1} Pf(M_{1k,1k})\right] \\ &= \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k \left[\sum_{1 \le i < j \le 2n} (-1)^{i+j-1} sgn\left[(i-k)(j-k)\right] \ a_k^{ij} \ Pf(M_{1kij,1kij}) \right] \\ &= \sum_{k=2}^{2n} \left[\sum_{2 \le i < j \le 2n} (-1)^k (-1)^{i+j-1} sgn\left[(i-k)(j-k)\right] \ a_k^{ij} \ Pf(M_{1kij,1kij}) \right] \end{aligned}$$

şeklinde elde ederiz. Bu toplam

$$sgn\left[(i-k)(j-k)\right] = \begin{cases} 1 & ; \quad k < i < j \text{ veya } i < j < k \\ 0 & ; \quad k = i \text{ veya } k = j \\ -1 & ; \quad i < k < j \end{cases}$$

olduğu da dikkate alınıp yazılırsa

$$\begin{aligned} T &= \sum_{2 \le k < i < j \le 2n} (-1)^{k+i+j-1} \ a_k^{ij} \ Pf(M_{1kij,1kij}) \\ &\quad + \sum_{2 \le i < k < j \le 2n} (-1)^{k+i+j} \ a_k^{ij} \ Pf(M_{1kij,1kij}) \\ &\quad + \sum_{2 \le i < j < k \le 2n} (-1)^{k+i+j-1} \ a_k^{ij} \ Pf(M_{1kij,1kij}) \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadedeki üç toplam uygun biçimde değişken değiştirilip düzenlenirse ve

$$Pf(M_{1kij,1kij}) = Pf(M_{1ijk,1ijk}) = Pf(M_{1jik,1jik})$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} T &= \sum_{2 \le i < j < k \le 2n} (-1)^{k+i+j-1} \ a_i^{jk} \ Pf(M_{1ijk,1ijk}) \\ &\quad + \sum_{2 \le i < j < k \le 2n} (-1)^{k+i+j} \ a_j^{ik} \ Pf(M_{1jik,1jik}) \\ &\quad + \sum_{2 \le i < j < k \le 2n} (-1)^{k+i+j-1} \ a_k^{ij} \ Pf(M_{1kij,1kij}) \\ &= \sum_{2 \le i < j < k \le 2n} (-1)^{k+i+j-1} \left(a_k^{ij} - a_j^{ik} + a_i^{jk} \right) \ Pf(M_{1ijk,1ijk}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $2 \leq i < j < k \leq 2n$ için $\left(a_k^{ij} - a_j^{ik} + a_i^{jk}\right) = 0$ olduğu (5.2.17) denklem sisteminden yani $d\varphi = 0$ olduğundan açıktır. Şu halde

$$a_2^{12} + a_3^{13} + a_4^{14} + \cdots + a_{2n}^{1\ 2n} = 0$$

olarak bulunur.

Benzer yöntemle

$$a_1^{21} + a_3^{23} + a_4^{24} + \cdots + a_{2n}^{2\ 2n}$$

teriminin de sıfır olduğu görülebilir. Bunun için tekrar yukarıdaki işlemleri uygun indislerle yapmak yeterlidir. Fakat uygun taban değişimiyle de bu terimin 0 olması gerektiğini söyleyebiliriz. Eğer $\{e_1, e_2, e_3, e_4, ..., e_{2n}\}$ tabanımızı değiştirip $\{e_2, e_1, e_3, e_4, ..., e_{2n}\}$ tabanıyla çalışırsak, bu durumda bu tabana göre matrisimiz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a^{12} & a^{23} & a^{24} & \cdots & a^{2\ 2n-1} & a^{2\ 2n} \\ a^{12} & 0 & a^{13} & a^{14} & \cdots & a^{1\ 2n-1} & a^{1\ 2n} \\ -a^{23} & -a^{13} & 0 & a^{34} & \cdots & a^{3\ 2n-1} & a^{3\ 2n} \\ -a^{24} & -a^{14} & -a^{34} & 0 & \cdots & a^{4\ 2n-1} & a^{4\ 2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a^{2\ 2n-1} & -a^{1\ 2n-1} & -a^{3\ 2n-1} & -a^{4\ 2n-1} & \cdots & 0 & a^{2n-1\ 2n} \\ -a^{2\ 2n} & -a^{1\ 2n} & -a^{3\ 2n} & -a^{4\ 2n} & \cdots & -a^{2n-1\ 2n} & 0 \end{pmatrix}_{2n \times 2n}$$

şeklinde olur. B anti-simetrik ortogonal bir matristir. A matrisine göre yapılan işlemler yeni tabandaki matris olan B için tekrar edilirse, yeni tabana göre yönlü türevlerimiz $\dfrac{\partial}{\partial_{\hat{\imath}}}$ olmak üzere

$$-a_{\hat{2}}^{12} + a_{\hat{3}}^{23} + a_{\hat{4}}^{24} + \cdots + a_{2\hat{n}}^{2\ 2n} = 0$$

elde edilir. Ayrıca $a_1^{12} = a_{\hat{2}}^{12}$ ve $k \neq 1, 2$ için $a_k^{12} = a_{\hat{k}}^{12}$ olacağından

$$\begin{aligned} a_1^{12} - a_3^{23} - a_4^{24} - \cdots - a_{2n}^{2\ 2n} &= -\left(-a_1^{12} + a_3^{23} + a_4^{24} + \cdots + a_{2n}^{2\ 2n}\right) \\ &= -\left(-a_{\hat{2}}^{12} + a_{\hat{3}}^{23} + a_{\hat{4}}^{24} + \cdots + a_{2\hat{n}}^{2\ 2n}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}\Delta a^{12} &= \frac{\partial}{\partial_2}\left(a_2^{12}+a_3^{13}+a_4^{14}+\cdots+a_{2n}^{1\,2n}\right)-\frac{\partial}{\partial_1}\left(-a_1^{12}+a_3^{23}+a_4^{24}+\cdots+a_{2n}^{2\,2n}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial_2}0-\frac{\partial}{\partial_1}0\\ &= 0\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Yani a^{12} katsayısı harmoniktir. a^{12} harmonik fonksiyonu sınırlı olduğundan sabit olmak zorundadır. Uygun taban değişimi ile $1 \leq r < s \leq 2n$ için herhangi bir a^{rs} katsayısı a^{12} katsayısının pozisyonuna getirilebilir. Daha açık olarak, $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_{2n}\}$ birimdikey bir taban ise, e_1 ile e_r ve e_2 ile e_s taban elemanlarının yerlerini değiştirerek elde edilen

$$\{f_1 = e_r, f_2 = e_s, f_3 = e_3, ..., f_{2n} = e_{2n}\}$$

kümesi de birimdikey bir tabandır ve $\varphi(f_1, f_2) = a^{rs}$ dir. Bu birimdikey tabanda benzer işlemler tekrarlandığında a^{rs} katsayısının harmonik dolayısıyla sabit olduğu görülür.

Bu durumda φ eğer $\mathbb{R}^{2n}$'de bir kuvvetli 2-kalibrasyon alanı ise sabit katsayılı olmak zorundadır. ■

Sonuç olarak, $\mathbb{R}^{2n}$ manifoldu üzerinde verilmiş bir 2-form alanı eğer bir kuvvetli $2-$kalibrasyon alanı ise sabit katsayılı olmak zorundadır.

Verilen formun kapalı olması da önemlidir. Kapalı olmayan ama her noktaya bir kuvvetli 2-kalibrasyon karşılık getiren sabit katsayılı olmayan form alanları mevcuttur.

Örnek 5.2.4 $\mathbb{R}^4$ *üzerinde*

$$\varphi = sinx_1\ dx_1 \wedge dx_2 + cosx_1\ dx_1 \wedge dx_3 - cosx_1\ dx_2 \wedge dx_4 + sinx_1\ dx_3 \wedge dx_4$$

olarak verilen 2*-form alanı için* $d\varphi \neq 0$ *dır. Fakat her* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ *noktasında bir kuvvetli* 2*-kalibrasyon belirler. Ama katsayı fonksiyonlarımız sabit fonksiyonlar değildir.*

5.3 $\mathbb{R}^{2n}$'de Kuvvetli Kendine Dual $2-$Form Alanları

Tanım 5.3.5 *$\varphi \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$ form alanı verilsin. Her $x \in \mathbb{R}^{2n}$ için φ_x kuvvetli kendine dual bir $2-$form ise, φ'ye kuvvetli kendine dual $2-$form alanı denir.*

Sonuç 5.3.6 *$\varphi \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$ kuvvetli kendine dual bir $2-$form alanı olsun. Eğer her $x \in \mathbb{R}^{2n}$ noktasında φ_x $2-$formu aynı özdeğer normuna sahipse ve $d\varphi = 0$ ise, φ $2-$form alanı sabit katsayılıdır.*

Kanıt. Sabit özdeğer normunu λ ile gösterirsek, $\Psi = \dfrac{1}{\lambda}\varphi$ form alanı bir kuvvetli $2-$kalibrasyon alanı olup, Teorem 5.2.1 nedeniyle Ψ, dolayısıyla φ sabit katsayılıdır. ■

Bu durumda "Sonuç 5.3.6 herhangi bir kuvvetli kendine dual ve kapalı $2-$form alanı için de doğru olur mu?" sorusu gündeme gelmektedir. Teorem 5.2.1'in bir sonucu olarak bunu hemen söylemek elbetde mümkün değil, çünkü özdeğer normları sabit olmayabilir. Ama $2n = 4$ boyutunda Sonuç 5.3.6 gene de, en azından özdeğer normlarının sınırlı bir fonksiyon olması durumunda geçerliliğini korumaktadır.

Önerme 5.3.7 *$\varphi \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ özdeğerlerinin normları sınırlı olan, kapalı bir kuvvetli kendine dual $2-$form alanı ise sabit katsayılı olmak zorundadır.*

Kanıt. $a^{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^4), 1 \leq i < j \leq 4$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi &= a^{12}\, dx_1 \wedge dx_2 + a^{13}\, dx_1 \wedge dx_3 + a^{14}\, dx_1 \wedge dx_4 \\ &\quad + a^{23}\, dx_2 \wedge dx_3 + a^{24}\, dx_2 \wedge dx_4 + a^{34}\, dx_3 \wedge dx_4 \end{aligned}$$

bir kendine dual $2-$form alanı olsun. Alt Bölüm 1.1'de gösterildiği üzere $x \in \mathbb{R}^4$ için φ_x'in bir kendine dual $2-$form olabilmesi için

$$a^{12} = a^{34}, a^{13} = -a^{24}, a^{14} = a^{23} \tag{5.3.18}$$

olmalıdır. $d\varphi = 0$ olduğundan $a_k^{ij} = \dfrac{\partial}{\partial x_k}(a^{ij})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
a_4^{13} - a_3^{14} + a_1^{34} &= 0 \\
a_4^{23} - a_3^{24} + a_2^{34} &= 0 \\
a_3^{12} - a_2^{13} + a_1^{23} &= 0 \\
a_4^{12} - a_2^{14} + a_1^{24} &= 0 \qquad (5.3.19)
\end{aligned}$$

şeklindedir. (5.3.18) koşulu (5.3.19) sisteminde yerine yazılırsa ve sırasıyla $\dfrac{\partial}{\partial i}$ kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial}{\partial_1}\left(a_4^{13} - a_3^{14} + a_1^{12}\right) = a_{14}^{13} - a_{13}^{14} + a_{11}^{12} = 0 \\
&\tfrac{\partial}{\partial_2}\left(a_4^{14} + a_3^{13} + a_2^{12}\right) = a_{24}^{14} + a_{23}^{13} + a_{22}^{12} = 0 \\
&\tfrac{\partial}{\partial_3}\left(a_3^{12} - a_2^{13} + a_1^{14}\right) = a_{33}^{12} - a_{32}^{13} + a_{31}^{14} = 0 \\
&\tfrac{\partial}{\partial_4}\left(a_4^{12} - a_2^{14} - a_1^{13}\right) = a_{44}^{12} - a_{42}^{14} - a_{41}^{13} = 0
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Elde edilen bu denklemler taraf tarafa toplanırsa

$$\Delta a^{12} = a_{11}^{12} + a_{22}^{12} + a_{33}^{12} + a_{44}^{12} = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\Delta a^{13} = \Delta a^{14} = \Delta a^{23} = \Delta a^{24} = \Delta a^{34} = 0$$

olduğu görülür. O halde katsayı fonksiyonları harmonik olmak zorundadır. Özdeğer normları sınırlı olduğundan, katsayı fonksiyonları da sınırlı olmak zorundadır. Bu durumda da katsayı fonksiyonları harmonik ve sınırlı olacağından sabit fonksiyonlardır. ■

$n > 2$ için, kapalı bir kuvvetli kendine dual $\varphi \in \Omega^2\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$ form alanının sabit katsayılı olup olmadığı açık bir sorudur.

6 SONUÇ

Sonuç olarak, kalibrasyon kavramı bir takım ilave koşullarla zenginleştirilerek $2-$formların kendine (veya tersine) dualliği konusunda yeni bir formülasyon ve araştırma aracı haline gelmiştir. Kuvvetli $2-$kalibrasyonlar ile özdeğer normu 1 olan kendine dual $2-$formların bire-bir çakıştığı gösterilmiş ve $\mathbb{R}^{2n}$'de kuvvetli $2-$kalibrasyon alanlarının sabit katsayılı olması gerektiği ispatlanmıştır. Bunun bir sonucu olarak da bazı kendine dual $2-$form alanlarının (her noktada aynı norma sahip form alanlarının) da sabit katsayılı olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] Trautman, A., " Solution of the Maxwell and Young-Mills equations associated with Hopf fiberings ", *Int. J. Theor. Phys.*, **16**, 561-565, 1977.

[2] Grossmann, B., Kephart, T.W. ve Stasheff, J.D., " Solutions to Young-Mills field equations in eight dimensions and the last Hopf map", *Comm. Math. Phys.*, **96**, 431-437, 1984.

[3] Corrigan E., Devchand C., Fairlie D. and Nuyts J., " First order equations for gauge fields in spaces of dimensions greater than four", *Nucl. Phys. B.*, **214**, 452-464,1983.

[4] Bilge, A.H., Dereli, T. ve Koçak, Ş. " Self-Dual Young-Mills fields in eight dimensions ", *Lett.Math. Phys.*, **36** (3), 301-309, 1996.

[5] Özdemir, F. ve Bilge, A.H., " Self-duality in dimensions $2n > 4$: equivalence of various definitions and the derivation of the octonionic instanton solution ", *ARI*, **51** (4), 247-253, 1999.

[6] Bilge, A.H., Dereli, T. ve Koçak, Ş., " The geometry of self-dual two-forms", *J. Math. Phys.*, **38** (8), 4804-4814, 1997.

[7] Harvey, R. ve Lawson, H.B., " Calibrated Geometries ", *Acta Math.*, **148**, 47-157, 1982.

[8] Bryant, R.L., " Metrics with exceptional holonomy ", *Anals of Math.*, **126**, 525-576, 1986.

[9] Joyce, D.D., *Compact Manifolds with special holonomy*, Oxford University Press, 2000.

[10] Harvey, R., Dadok, J. ve Morgan, F., " Calibrations on $\mathbb{R}^8$ ", *Trans. AMS*, **307**, 1-40, 1988.

[11] Dadok, J. ve Harvey, R., “ Calibrations on $\mathbb{R}^6$ ”, *Duke Math. J.*, **50** (4), 1231-1243, 1983.

[12] Harvey, R., *Spinors and Calibrations*, Academic Press, New York, 1990.

[13] Lawson, H.B. ve Michelson, M.L., *Spin Geometry*, Princeton University Press, New Jersey, 1989.

[14] Harvey, R. ve Morgan, F., “ The faces of the Grassmannian of three-planes in $\mathbb{R}^7$ ”, *Invent. Math.*, **83**, 191–228, 1986.

[15] Harvey, R. ve Morgan, F., “ The comass ball in $\Lambda^3\mathbb{R}^6$ ”, *Indiana U. Math J.*, **35**, 45-156, 1986.

[16] Morgan, F., “ The exterior algebra $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ and area minimization ”, *Lin. Alg. and its Appl.*, **66**, 1-28, 1985.

[17] Morgan, F., “ Calibrations and the size of Grassmann faces ”, *Aequationes Math.*, **43**, 1-13, 1992.

[18] Morgan, F., “ Area-minimizing surfaces, faces of Grassmannians, and calibrations ”, *Amer. Math. Monthly*, **95**, 813-822, 1988.

[19] Baez, J.C., “ The octonions ”, *Bull. Am. Math. Soc.*, **39**, 145-205, 2002.

[20] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, New York, 1993.

[21] Parameswaran, S. “ Skew-Symmetric Determinants ”, *AMM*, **61** (2), 116, 1954.

[22] Ishikawa, M. ve M. Wakayama, “ Minor Summation Formulas of Pfaffians, Survey and A New Identity ”, *Adv. Stud. Pure Math.*, **28**, 133-142, 2000.

[23] Sakai, T., “ On Riemannian Manifolds Admitting A Function Whose Gradient Is Of Constant Norm ”, *Kodai Math.*, **19**, 39-51, 1996.

[24] Axler, S., Bourdon, P. ve Ramey, W., *Harmonic Function Theory*, Springer, 2001.