KAHLER NORDEN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE SPİNORLAR VE DIRAC OPERATÖRÜ

Şenay KARAPAZAR

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Aralık - 2008

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Şenay Karapazar'ın **"Kahler Norden Manifoldları Üzerinde Spinorlar ve Dirac Operatörü "** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Doktora tezi 27.11.2008 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**: Doç. Dr. NEDİM DEĞİRMENCİ**	....
Üye	**: Prof. Dr. ŞAHİN KOÇAK**	....
Üye	**: Prof. Dr. SADETTİN ERDEM**	....
Üye	**: Prof. Dr. MAHMUT KOÇAK**	....
Üye	**: Doç. Dr. MURAT TANIŞLI**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

KAHLER NORDEN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE SPİNORLAR VE DIRAC OPERATÖRÜ

Şenay KARAPAZAR

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ

2008, 97 sayfa

Bu tez çalışmasında yapı grubu $SO(n,\mathbb{C})$ özel kompleks ortogonal grubu olan $2n-$boyutlu bir M manifoldu için klasik duruma benzer bir spinor teorisinin kurgulanabilirliği araştırılmıştır. İlk olarak $SO(n,\mathbb{C})$ ve $Spin(n,\mathbb{C})$ grupları arasındaki ilişkiye değinilmiş sonrada $Spin(n,\mathbb{C})$ grubunun spinor temsilleri incelenmiştir. Kahler-Norden manifoldlarının ve kompleks Riemann manifoldlarının yapı gruplarının $O(n,\mathbb{C})$ kompleks ortogonal grubu olduğu gözlemlenmiştir. Kahler-Norden manifoldları üzerinde bazı diferensiyel operatörlerin açık ifadeleri verilmiştir. Kahler-Norden manifoldlarının belli bir sınıfı Kahler-Norden spin manifoldları olarak adlandırılmıştır. $Spin(n,\mathbb{C})$ grubunun spinor temsili kullanılarak, bir M Kahler-Norden spin manifoldu üzerinde S spinor demedi inşa edilmiştir. Spinor alanları için alternatif ifadeler irdelenmiştir. M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonunun bir $SO(n,\mathbb{C})-$konneksiyon olduğu gösterilmiş ve bunun yardımıyla S spinor demedi üzerinde bir ∇ kovaryant türev operatörü tanımlanmıştır. Bir vektör alanı ile bir spinor alanının Clifford çarpımı tanımlanmıştır. Daha sonra S spinor demedi üzerinde D Dirac operatörü tanımlanmıştır. Son olarak D Dirac operatörünün, klasik durumdaki Dirac operatörünün sağladığı Schrödinger-Lichnerowicz formülüne benzer bir formülü sağladığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kahler Norden manifoldu, Dirac operatörü, Spinor

ABSTRACT

PhD. Dissertation

DIRAC OPERATOR AND SPİNORS ON KAHLER NORDEN MANIFOLDS

Şenay KARAPAZAR

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ

2008, 97 pages

In this thesis, the constructibility of a spinor theory which is similar to the clasical theory of spinors is investigated on a $2n-$dimensional manifold with structure group $SO(n,\mathbb{C})$. Firstly, it is pointed out a relationship between the groups $SO(n,\mathbb{C})$ and $Spin(n,\mathbb{C})$, then the spinor representation of the group $Spin(n,\mathbb{C})$ is defined. It is observed that the Kahler-Norden and the complex Riemannian manifolds have structure group $O(n,\mathbb{C})$. The explicit expressions of some differential operators on Kahler-Norden manifolds are given. A certain classes of Kahler-Norden manifolds are defined as Kahler-Norden spin manifolds. By using the spinor representation of the group $Spin(n,\mathbb{C})$, the spinor bundle S is constructed on a Kahler-Norden spin manifold. For a spinor field on M some alternative expressions are given. It is proved that the Levi-Civita connection on M is an $SO(n,\mathbb{C})-$connection, then by using this fact a covariant derivative operator on S is defined. The Clifford product of a vector field with a spinor field is defined. On the spinor bundle S the Dirac operator D is defined. Lastly, it is proved that the Dirac operator D satisfies a formula which is similar to the Schrödinger-Lichnerowicz formula in the classical cases.

Keywords: Kahler Norden manifold, Dirac operator, Spinor

TEŞEKKÜR

Araştırma sürecinde katkı ve yardımlarıyla destekler veren Yard. Doç. Dr. Murat LİMONCU'ya,

Bütün eğitim hayatım boyunca bana her türlü maddi-manevi desteği sağlayan, bana güvenen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Şenay KARAPAZAR

Aralık 2008

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$T(V)$	:	Tensör cebri
(V,Q)	:	Kuadratik uzay
$Cl(V,Q)$	:	(V,Q) Kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebri
Cl_n	:	Reel Clifford cebri
$\mathbb{C}l_n$	:	Kompleks Clifford cebri
$Spin(n)$	:	Reel Spin grubu
$Spin^c(n)$	:	Kompleks Spin grubu
$Spin(n,\mathbb{C})$	:	Spin grubu
TM	:	M manifoldu üzerindeki tanjant demedi
T^*M	:	M manifoldu üzerindeki kotanjant demedi
$\chi(M)$	:	M Manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi
$\Gamma(E)$	:	E vektör demedi üzerindeki kesitlerin kümesi
∇	:	Kovaryant türev
$\mathfrak{g}$	:	G Lie grubunun Lie cebri
$O(n,\mathbb{C})$	:	Kompleks ortogonal grup
$SO(n,\mathbb{C})$	:	Özel kompleks ortogonal grup
$P\times_\rho V$	:	Asosye vektör demedi
Hor_pP	:	p noktasında konneksiyona karşılık gelen yatay uzay
Ver_pP	:	p noktasında konneksiyona karşılık gelen dikey uzay
(M,J,g)	:	Kahler Norden manifoldu

1 GİRİŞ

Dirac operatörü kavramı ilk olarak 1928'de P.A.M. Dirac tarafından tanımlanmış ve fizikte genel rölativite teorisinde önemli bir yere sahip olmuştur. Dirac'ın çalışmaları ile, ortogonal grupların evrensel örtü gruplarının temsillerine matematiksel ilginin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bu temsillerin ilk inşası 1913'te E. Cartan sayesinde olmuştur. 1935'te R. Brauer ve H. Weyl, Cartan'ın teorisini tekrar ele almışlar ve genişletmişlerdir [1]. 2 yıl sonra Cartan, Riemann Geometri ve genel rölativite teorisine spinorları katmayı amaçlayan temel bir monograf yazmıştır [2]. Spin manifoldlarının ve Dirac operatörünün geometrisi son yıllarda hem matematikte hem de matematiksel fizikte önemli bir rol oynamıştır.

Spin(n) grubunun spinor temsili, kesitleri spinorlar olarak adlandırılan spinor vektör demedi inşasında önemli bir rol oynar. Spin manifoldları ve spin Dirac operatörü yaygın olarak çalışılmaktadır [3]. Benzer şekilde, Spin$^c(n)$ grubunun spinor temsili yardımıyla Spin$^c(n)$ manifoldları ve Spin^c Dirac operatörü tanımlanmıştır ([3], [4]).

Literatürde kompleks Riemann manifoldları da yaygın olarak çalışılmaktadır ([5], [6]). Kompleks Riemann manifoldları sağladığı belli koşullara göre sınıflara ayrılır. Holomorfik Riemann manifoldları bu manifoldların belli bir sınıfı içerisine girer ve aynı zamanda kompleks manifolddurlar. Bu manifoldlar reel manifoldlar olarak düşünüldüğünde Kahler Norden manifoldu veya anti-Kahlerian manifoldu veya B-metrik ile yaklaşık kompleks manifold gibi isimlendirmeler yapılmıştır ([7], [8], [9]).

Bu tezde Riemann manifoldları üzerinde spin Dirac operatörü ve spin^c Dirac operatörlerinden hareketle Kahler Norden manifoldları üzerinde yeni bir spinor çeşidi tanımlanmıştır. Bu spinorlar kompleks Clifford cebri içindeki $Spin(n, \mathbb{C})$ grubunun spinor temsili yardımıyla yapılmıştır. Bunun için ilk iki bölümde Clifford cebirleri ile ilgili temel tanımlar verilmiş ve ileriki bölümlerde kullanılan bazı matris Lie grupları ve onların Lie cebirleri hesaplanmıştır.

Bölüm 3 ve Bölüm 4 te Spin Grupları ve temsil teorisi açıklanmış, Vektör demetleri ve asli lif demetleri ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Bölüm 6 da Kahler Norden manifoldları, Kompleks Riemann manifoldları ve holomorfik Riemann manifoldları tanımlanmış, Kahler Norden manifoldları ile holomorfik Riemann manifoldları arasındaki geçiş verilmiştir.

Bölüm 7 de Kahler Norden manifoldu üzerinde Spin yapısı ve Kahler Norden Spinor demedi tanımlanmış ve bu manifoldlar üzerinde konneksiyon formu ve kovaryant türev tanımlanmıştır. Ayrıca bazı spinor demetleri üzerine simplektik formların ve simetrik bilineer formların taşınabileceği gösterilmiştir.

Son bölümde, Dirac operatörünün tanımlanmasında önemli olan bir vektör alanı ile bir spinor alanının çarpımı farklı yaklaşımlarla ifade edilmiş ve bundan yararlanarak Kahler Norden manifoldları üzerinde Dirac operatörü tanımlanmıştır. Daha sonra spin ve spin^c Dirac operatörlerinin de sağladığı bir takım özellikler verilmiştir ve spin ve spin^c manifoldları üzerinde tanımlanan Laplace operatörü ve Schrödinger-Lichnerowicz formülüne benzer bir formül Kahler Norden spinor demedi üzerinde de elde edilmiştir.

2 CLIFFORD CEBİRLERİ

Tanım 2.0.1 *(V, Q) bir reel kuadratik uzay, $T(V) = \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \ldots$ V vektör uzayının tensör cebri ve $I(Q)$ da bu cebir içerisinde $\{v \otimes v - Q(v) \cdot 1\}$ formundaki elemanlar tarafından üretilen iki taraflı ideal olsun. Bu durumda*

$$Cl\,(V, Q) = T\,(V)\,/I\,(Q)$$

bölüm cebrine (V, Q) kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebri denir.

$Cl\,(V, Q)$ Clifford cebri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $Cl\,(V, Q)$ birimli ve birleşmeli bir cebirdir. Tensör cebri birimli olduğundan tensör cebrinin biriminin bölüm dönüşümü (doğal izdüşüm)

$$\begin{array}{ccc} T(V) & \xrightarrow{\pi} & T\,(V)\,/I\,(Q) = Cl\,(V, Q) \\ v & \longmapsto & [v] = v + I\,(Q) \end{array}$$

altındaki görüntüsü $Cl\,(V, Q)$ Clifford cebirinin birimidir ($[1] \cdot [\alpha] = [1 \otimes \alpha] = [\alpha]$).

şimdi $Cl\,(V, Q)$ Clifford cebirinin birleşme özelliğini tensör çarpımının birleşme özelliğini kullanarak gösterelim.

$[\alpha]\,, [\beta]\,, [\gamma] \in Cl\,(V, Q)$, ($\alpha, \beta, \gamma \in T\,(V)$) olsun.

$$\begin{aligned} [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma]) &= [\alpha] \cdot ([\beta \otimes \gamma]) \\ &= [\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)] \\ &= [(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma] \\ &= [\alpha \otimes \beta] \cdot [\gamma] \\ &= ([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] \end{aligned}$$

olduğundan $Cl\,(V, Q)$ Clifford cebiri birimli ve birleşmeli bir cebirdir.

2. $V \xrightarrow{j = \pi \circ i} T\,(V)\,/I\,(Q) = Cl\,(V, Q)$ dönüşümü altında V nin görüntüsü, V nin $Cl\,(V, Q)$ içindeki bir kopyasıdır, üstelik her $v \in V$ için $j\,(v)^2 = Q\,(v) \cdot 1$ olur.

Her $v \in V$ için,

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{i} & T(V) & \xrightarrow{\pi} & T(V)/I(Q) = Cl(V,Q) \\ v & \longmapsto & v & \longmapsto & [v] = v + I(Q) \end{array}$$

$j(v) = \pi \circ i(v) = \pi(v) = [v]$ olduğundan

$$j(v)^2 = j(v) \cdot j(v) = [v] \cdot [v] = [v \otimes v]$$

olur. Burada $[v \otimes v] = [t]$ diyecek olursak, $v \otimes v - t \in I(Q)$ olacağından $t = Q(v) \cdot 1$ olmak zorundadır. Bu durumda

$$j(v)^2 = [v \otimes v] = [Q(v) \cdot 1] = Q(v) \cdot [1] = Q(v) \cdot 1$$

elde edilir.

3. $Cl(V,Q)$, 1 ve $j(V) = V$ ler tarafından üretilir. $j : V \to Cl(V,Q)$ lineer dönüşümü birebirdir. $j(V) \subset Cl(V,Q)$ kümesi cebiri çarpımsal olarak üretir.

4. $Cl(V,Q)$ **Clifford cebirinin evrensel özelliği:** A, $\mathbb{R}$ üzerinde birimli ve birleşmeli bir cebir ve $u : V \longrightarrow A$ lineer dönüşümü her $v \in V$ için $u(v)^2 = Q(v) \cdot 1$ koşulunu sağlıyorsa, bu takdirde

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "u"'] & Cl(V,Q) \arrow[d, "\tilde{U}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde (yani; $\tilde{U} \circ j = u$) tek bir

$$\tilde{U} : Cl(V,Q) \longrightarrow A$$

cebir homomorfizmi vardır.

Önerme 2.0.2 *[3] Bir kuadratik formun $Cl(V,Q)$ Clifford cebirinin*

$$\beta : Cl(V,Q) \to Cl(V,Q)$$

bir involusyonu vardır öyle ki,

i. β *bir cebir homomorfizmi ve* $\beta^2 = I$ *dır.*

ii. $Cl^i(Q) = \{x \in Cl(V,Q) \mid \beta(x) = (-1)^i x\}$ $(i = 0, 1)$ *olmak üzere*

$$Cl(V,Q) = Cl^0(Q) \oplus Cl^1(Q)$$

şeklinde yazılabilir.

Önerme 2.0.3 *[3] Her Clifford cebri için* $\gamma : Cl(V,Q) \to Cl(V,Q)$ *anti-involusyonu vardır öyle ki aşağıdaki koşullar sağlanır.*

i. γ *lineerdir.*

ii. $\gamma \circ \gamma = I$ *(*γ *bir involusyon) dır.*

iii. $\forall v \in V \subset Cl(V,Q)$ *için* $\gamma(v) = v$ *dir.*

iv. $x, y \in Cl(V,Q)$ *için* $\gamma(x.y) = \gamma(y).\gamma(x)$ *dir.*

Önerme 2.0.4 *[10] V n-boyutlu bir vektör uzayı olsun. Bu durumda* $Cl(V,Q)$ *vektör uzayının boyutu* 2^n *dir. Yani,* $dim_{\mathbb{R}} Cl(V,Q) = 2^n$ *dir.*

Önerme 2.0.5 *[3]* (V, b) *bilineer form ve* V *nin bir tabanı* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *ise* $i \neq j$ *iken* $b(v_i, v_j) = 0$ *olsun. O zaman* $Cl(V,Q)$ *Clifford cebiri,* $v_1, \ldots, v_n \in V \subset Cl(V,Q)$ *elemanları tarafından üretilir ve* $v_i^2 = Q(v_i).1$, $i \neq j$ *iken* $v_i v_j + v_j v_i = 0$ *eşitlikleri sağlanır.* $Cl(V,Q)$ *vektör uzayının tabanı*

$$1 \text{ ve } v_{i_1} \ldots v_{i_s} \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq n \text{ ve } 1 \leq s \leq n)$$

elemanları tarafından oluşturulur.

2.1 Reel Clifford Cebirleri

Tanım 2.1.1 *$V = \mathbb{R}^n$ reel vektör uzayını ve bu uzay üzerinde tanımlanan $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dejenere olmayan kuadratik form olarak*

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 \ (n = p + q)$$

formunu alalım. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $Q(x)$ kuadratik formuna karşılık gelen Clifford cebrine Reel Clifford cebri denir ve $Cl_{p,q}$ şeklinde gösterilir.

Farklı boyutlardaki Clifford cebirleri arasında indirgeme ilişkisi veren aşağıdaki önermede verilen üç izomorfizm, daha yüksek boyutlardaki Clifford cebirlerinin hesaplanmasında faydalıdır.

Önerme 2.1.2 *[10]*

1. $Cl_{0,n+2} \cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$
2. $Cl_{n+2,0} \cong Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0}$
3. $Cl_{p+1,q+1} \cong Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1}$

Bu izomorfizmler kullanılarak, $Cl_{0,m}$ ve $Cl_{m,0}$ tipindeki Clifford cebirleri arasında

$$Cl_{0,n+8} \cong Cl_{0,n} \otimes Cl_{0,8}$$

$$Cl_{n+8,0} \cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{8,0}$$

şeklinde 8-li indirgeme formülleri elde edilir.

Yukarıdaki önermede ifade edilen izomorfizmler kullanılarak, $Cl_{p,q}$ Clifford cebirleri için aşağıdaki tablo elde edilir.

$p-q(mod\ 8)$	$Cl_{p,q}$
0	$\mathbb{R}\left(2^l\right)$
1	$\mathbb{R}\left(2^l\right)\oplus\mathbb{R}\left(2^l\right)$
2	$\mathbb{R}\left(2^l\right)$
3	$\mathbb{C}\left(2^l\right)$
4	$\mathbb{H}\left(2^{l-1}\right)$
5	$\mathbb{H}\left(2^{l-1}\right)\oplus\mathbb{H}\left(2^{l-1}\right)$
6	$\mathbb{H}\left(2^{l-1}\right)$
7	$\mathbb{C}\left(2^l\right)$

Burada l sayısı $\frac{p+q}{2}$ nin tam kısmıdır.

2.2 Kompleks Clifford Cebirleri

Tanım 2.2.1 $V=\mathbb{C}^n$ *kompleks vektör uzayını ve bu uzay üzerinde tanımlanan* $Q:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ *dejenere olmayan kuadratik form olarak*

$$Q(z)=-z_1^2-z_2^2-\cdots-z_n^2$$

kuadratik formunu gözönüne alalım. $\mathbb{C}^n$ *üzerinde* $Q(z)$ *kuadratik formuna karşılık gelen Clifford cebrine* $\mathbb{C}l_n$ *kompleks Clifford cebri denir.*

Yukarıda ifade edilen $Q(z)$ dejenere olmayan kompleks kuadratik form yerine $Q(z)=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$ kuadratik formu alınırsa bu iki kuadratik forma karşılık gelen Clifford cebirleri çakışır. Bu yüzden bu iki kuadratik formdan herhangi birini gözönüne almak yeterlidir.

Önerme 2.2.2 $\mathbb{C}l_{n+2}\cong\mathbb{C}l_n\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(2)$ *izomorfizmi vardır.*

Kanıt.

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}l_{n+2} &= Cl_{0,n+2}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\\
&= (Cl_{n,0}\otimes_{\mathbb{R}}Cl_{0,2})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\\
&= (Cl_{n,0}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})\otimes_{\mathbb{C}}(Cl_{0,2}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})\\
&= \mathbb{C}l_n\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}l_2\\
&= \mathbb{C}l_n\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(2)
\end{aligned}$$

■

Sonuç 2.2.3

$$g_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{C}l_2 \cong \mathbb{C}(2)$ *cebrinin üreteç elemanları olmak üzere* $\mathbb{C}l_{n+2} \cong \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(2)$ *izomorfizmi taban elemanları üzerinde aşağıdaki şekildedir:*

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{C}l_{n+2} & \cong & \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(2) \\ e_1 & \mapsto & 1 \otimes g_1 \\ e_2 & \mapsto & 1 \otimes g_2 \\ e_j & \mapsto & (ie_{j-2}) \otimes g_1 g_2, (3 \leq j \leq n+2) \end{array}$$

Tanım 2.2.4 *Kompleks n spinorların vektör uzayı,* $n = 2k, 2k+1$ *için*

$$\Delta_n = \mathbb{C}^{2^k}$$

dır. Δ_n *nin elemanlarına kompleks spinorlar denir.*

Önerme 2.2.5 *[3]*

a) $n = 2k$ *ise* $\mathbb{C}l_n \cong End(\Delta_n)$

b) $n = 2k+1$ *ise* $\mathbb{C}l_n \cong End(\Delta_n) \oplus End(\Delta_n)$

Bu önerme yardımıyla kompleks Clifford cebirlerinin izomorfizm tablosu aşağıdaki şekilde verilebilir:

n	$\mathbb{C}l_n$
1	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$
2	$\mathbb{C}(2)$
3	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$
4	$\mathbb{C}(4)$
5	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$
6	$\mathbb{C}(8)$
7	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$
8	$\mathbb{C}(16)$

$n = 2k$ durumunda, $\mathbb{C}l_n$ kompleks Clifford cebrinin κ_n temsili

$$\kappa_n : \mathbb{C}l_n \to End(\Delta_n)$$

yukarıda ifade edilen izomorfizmdir.

$n = 2k + 1$ durumunda, $\mathbb{C}l_n$ kompleks Clifford cebrinin κ_n temsili

$$\kappa_n : \mathbb{C}l_n \to End(\Delta_n) \oplus End(\Delta_n) \stackrel{pr_1}{\to} End(\Delta_n)$$

şeklindeki Önerme(2.2.5(b)) de ifade edilen izomorfizm ile Pr_1 1. izdüşüm dönüşümünün bileşkesidir.

3 BAZI MATRİS GRUPLARI

İleriki bölümlerde bazı matris grupları önemli olmaktadır. Bunun için öncelikle bu matris gruplarını tanıtalım [11, 12] :

Tanım 3.0.1 *$n \times n$ tipinde tüm reel matrislerin cebri $\mathbb{R}(n)$ ile $n \times n$ tipinde tüm kompleks matrislerin cebri $\mathbb{C}(n)$ ile gösterilir. Determinantı sıfırdan farklı olan reel matrislerin grubuna reel genel lineer grup denir ve $GL(n, \mathbb{R})$ ile gösterilir. Determinantı sıfırdan farklı olan kompleks matrislerin grubuna kompleks genel lineer grup denir ve $GL(n, \mathbb{C})$ ile gösterilir. $GL(n, \mathbb{C})$ kompleks lineer grup, $GL(2n, \mathbb{R})$ reel grup içerisinde,*

$$\begin{array}{ccc} GL(n, \mathbb{C}) & \hookrightarrow & GL(2n, \mathbb{R}) \\ A + iB & \mapsto & \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \end{array}$$

şeklinde yatmaktadır.

Tanım 3.0.2 *(V, Q) kuadratik uzay olmak üzere, Q kuadratik formunu koruyan lineer dönüşümlerin kümesi bir grup oluşturur. Bu gruba ortogonal grup denir ve $O(Q)$ ile gösterilir. Yani,*

$$O(Q) = \{T : V \to V \, lineer\ dönüşüm : \forall x \in V \, için\ Q(T(x)) = Q(x)\}$$

olur. Ayrıca Q kuadratik formunu koruyan lineer dönüşümlerin determinantı 1 ise $SO(Q)$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanımda $V = \mathbb{R}^n$ uzayı ve kuadratik form olarak

$$Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

formu alınırsa bu kuadratik formu koruyan $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ye lineer dönüşümlerin kümesinin oluşturduğu grup $O(n)$ ile gösterilir. Ayrıca bu lineer dönüşümlerin determinantı 1 ise $SO(n)$ ile gösterilir. $O(n)$ ve $SO(n)$ grupları,

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^t A = I\}$$
$$SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^t A = I, \det A = 1\}$$

şeklinde de tanımlanır.

Yukarıdaki tanımda $V = \mathbb{C}^n$ uzayı ve kuadratik form olarak

$$Q(z) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$$

formu alınırsa bu kuadratik formu koruyan $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ye lineer dönüşümlerin kümesinin oluşturduğu grup $O(n,\mathbb{C})$ ile gösterilir ve kompleks ortogonal grup olarak adlandırılır. Ayrıca bu lineer dönüşümlerin determinantı 1 ise $SO(n,\mathbb{C})$ ile gösterilir. $O(n,\mathbb{C})$ ve $O(n,\mathbb{C})$ grupları,

$$\begin{aligned} O(n,\mathbb{C}) &= \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : A^t A = I\} \\ SO(n,\mathbb{C}) &= \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : A^t A = I, \det A = 1\} \end{aligned}$$

şeklinde de tanımlanır.

Tanım 3.0.3 (n,n) *tipinde ortogonal grup*

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$O(n,n) = \{A \in GL(2n,\mathbb{R}) | A^t M A = M\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu grup, aynı zamanda $\mathbb{R}^{2n}$ *üzerinde*

$$Q(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 - x_{n+1}^2 - \cdots - {x_{2n}}^2$$

kuadratik formunu koruyan lineer dönüşümlerin kümesinin oluşturduğu gruptur.

Teorem 3.0.4 $O(n,\mathbb{C}) = O(n,n) \cap GL(n,\mathbb{C})$ *dir.*

Kanıt. $X \in O(n,\mathbb{C})$ ise $A, B \in M(n,\mathbb{R})$ olmak üzere $X = A + iB$ şeklinde yazabiliriz. Ayrıca $X^t X = I$ koşulunu da sağlaması gerekir. Bu koşulu kullanarak A ve B nin sağlaması gereken koşulları elde edelim.

$$\begin{aligned} I = X^t X &= (A+iB)^t (A+iB) \\ &= (A^t + iB^t)(A+iB) \\ &= A^t A - B^t B + i(A^t B + B^t A) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$A^tA - B^tB = I$$

$$A^tB + B^tA = 0$$

koşulları elde edilir. Şimdi diğer taraftan reel matrisler olarak düşünürsek, $X = A+iB \in GL(n,\mathbb{C})$ ise $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ matrisi ile değişmeli olan $2n \times 2n$ tipinde matrislerdir. Keyfi $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -B & A \\ -D & C \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eşitliğinden $A = D$ ve $C = -B$ koşulları gelir. O halde

$$\begin{aligned} GL(n,\mathbb{C}) & \hookrightarrow GL(2n,\mathbb{R}) \\ A+iB & \longmapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. $X \in O(n,n)$ ise $X \in GL(2n,\mathbb{R})$ ve $X^tMX = M$ eşitliğini sağlar. $X = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} M = X^tMX &= \begin{pmatrix} A^t & -B^t \\ B^t & A^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^t & B^t \\ B^t & -A^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^tA - B^tB & A^tB + B^tA \\ B^tA + A^tB & B^tB - A^tA \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$A^tA - B^tB = I$$

$$A^tB + B^tA = 0$$

eşitlikleri elde edilir. O halde kompleks olarak yapıldığında elde edilen eşitliklerle, reel olarak yapıldığında elde edilen eşitlikler aynıdır. ■

Tanım 3.0.5 *[11] Reel ve kompleks durumlarda*

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$$

$$SL(n,\mathbb{C}) = \{A \in M(n,\mathbb{C}) : \det A = 1\}$$

şeklinde tanımlanan gruplara özel lineer grup denir.

Tanım 3.0.6 *$V = \mathbb{R}^{2n}$ uzayı ve bilineer form olarak*

$$\varepsilon(x,y) = x_1 y_{n+1} + x_2 y_{n+2} + \cdots + x_n y_{2n} - x_{n+1} y_1 - \cdots - x_{2n} y_n$$

formu alınırsa bu bilineer formu koruyan lineer dönüşümlerin grubu reel simplektik grup olarak adlandırılır ve $Sp(2n,\mathbb{R})$ ile gösterilir. Yani,

$$Sp(2n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(2n,\mathbb{R}) : \forall x,y \in \mathbb{R}^{2n} \textit{ için } \varepsilon(A(x),A(y)) = \varepsilon(x,y)\}$$

dir. Ayrıca $Sp(2n,\mathbb{R})$ reel simplektik grubu,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Sp(2n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(2n,\mathbb{R}) : A^t J A = J\}$$

şeklinde de tanımlanır.

Yukarıdaki tanımda $\mathbb{R}^{2n}$ yerine $V = \mathbb{C}^{2n}$ uzayı ve aynı bilineer form alınırsa karşılık gelen grup kompleks simplektik grup olarak adlandırılır ve $Sp(2n,\mathbb{C})$ ile gösterilir. Yani,

$$Sp(2n,\mathbb{C}) = \{A \in GL(2n,\mathbb{C}) : \forall z,w \in \mathbb{C}^{2n} \text{ için } \varepsilon(A(z),A(w)) = \varepsilon(z,w)\}$$

dir. Ayrıca

$$Sp(2n,\mathbb{C}) = \{A \in GL(2n,\mathbb{C}) : A^t J A = J\}$$

şeklinde de tanımlanır.

Tanım 3.0.7 *$V = \mathbb{C}^n$ uzayı üzerinde,*

$$\varepsilon(z,w) = z_1\overline{w}_1 + \cdots + z_n\overline{w}_n$$

hermityen iç-çarpımı koruyan $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ye lineer dönüşümlerin kümesinin oluşturduğu grup $U(n)$ ile gösterilir ve üniter grup denir. Eğer bu lineer dönüşümlerin determinantı 1 ise $SU(n)$ ile gösterilir ve özel üniter grup denir. Ayrıca A^*, A nın eşleniğinin transpozunu göstermek üzere,

$$U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : A^*A = I\}$$
$$SU(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : A^*A = I, \det A = 1\}$$

şeklinde de tanımlanır.

Not: Yukarıda tanımlanmış olan tüm matris grupları, aynı zamanda Lie gruplarıdır [12].

3.1 $GL(n,\mathbb{R}), O(n,n), GL(n,\mathbb{C})$ ve $O(n,\mathbb{C})$ Gruplarının Lie Cebirleri

$GL(n,\mathbb{R})$ grubunun Lie cebri, $n \times n$ tipindeki tüm reel matrislerin cebridir ve $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ ile gösterilir.

$O(n,n)$ grubunun Lie cebrini bulmak için $O(n,n)$ de $M(t)$ eğrisini alalım öyle ki $M(0) = I$ ve $M'(0) = M$ olsun. $M(t)^tXM(t) = X$ koşulundan

$$(M'(t))^tXM(t) + M(t)^tXM'(t) = 0$$
$$(M'(0))^t\,XM(0) + (M(0))^t\,XM'(0) = 0$$

eşitliğinden $M^tX + XM = 0$ koşulu elde edilir. Bu koşulu sağlayan M'leri bulmaya çalışalım. $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ olsun.

$$\begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} A^t & -C^t \\ B^t & -D^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & -B \\ C & D \end{pmatrix}$$

eşitliğinden $A^t = -A$, $B = C^t$ ve $D^t = -D$ koşulları elde edilir. Dolayısıyla istenilen M matrisi

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & D \end{pmatrix}, A^t = -A, D^t = -D$$

şeklindedir.

$GL(n,\mathbb{C})$ grubunun Lie cebrini bulmak için $GL(n,\mathbb{C})$ de $M(t)$ eğrisini alalım öyle ki $M(0) = I$ ve $M'(0) = M$ olsun. $M(t)J = JM(t)$ koşulundan

$$\begin{aligned} M'(0)J &= JM'(0) \\ MJ &= JM \end{aligned}$$

elde edilir. $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ olsun. Bu koşuldan M nin

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

olması gerektiği elde edilir. $GL(n,\mathbb{C})$ grubunun Lie cebri, $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ ile gösterilir ve

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \{\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in M(2n,\mathbb{R}) | A, B \in M(n,\mathbb{R})\}$$

şeklindedir. Kompleks olarak düşünüldüğünde $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ Lie cebri tüm $n \times n$ tipindeki kompleks matrislerin cebridir.

$O(n,\mathbb{C})$ grubunun Lie cebri için yukarıda hesaplanan $GL(n,\mathbb{C})$ ve $O(n,n)$ gruplarının Lie cebrinden yararlanılır. Bu koşulları birleştirirsek, $D = A$, $B^t = -B$ ve $A^t = -A$ koşullarıyla $O(n,\mathbb{C})$ nin lie cebri, $\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$ şeklinde gösterilir ve

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}, (A^t = -A), (B^t = -B)$$

şeklindedir. Yani,

$$\mathfrak{o}(n,\mathbb{C}) = \{\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in M(2n,\mathbb{R}) | A^t = -A, B^t = -B\}$$

dir.

Kompleks olarak düşünüldüğünde bu matris $A+iB$ matrisine karşılık gelir öyle ki $(A+iB)^t = A^t + iB^t = -A - iB$ koşulu sağlanır. Yani anti-simetrik matrislerin uzayıdır:

$$\mathfrak{o}(n, \mathbb{C}) = \{M \in M(n, \mathbb{C}) | M^t = -M\}$$

4 SPİN GRUPLARI VE SPİNOR TEMSİLLERİ

Tanım 4.0.1 *$Cl(V,Q)$, (V,Q) kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebri olsun. $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} {}^* = \beta \circ \gamma : Cl(V,Q) &\rightarrow Cl(V,Q) \\ v_1 \cdot \ldots \cdot v_r &\mapsto (v_1 \cdot \ldots \cdot v_r)^* = (-1)^r v_r \cdots v_1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $^* = \beta \circ \gamma$ dönüşümüne konjugasyon denir.

Tanım 4.0.2 *Spin grubu*

$$Spin(Q) = \{x \in Cl^0(Q) : x \cdot V \cdot x^* \subset V \text{ ve } x \cdot x^* = 1\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Herhangi bir $x \in Spin(Q)$ elemanı

$$\lambda(x)(v) = x \cdot v \cdot x^*$$

şeklinde tanımlı $\lambda(x) : V \rightarrow V$ endomorfizmini belirler.

Önerme 4.0.3 *[13] V reel veya kompleks vektör uzayı, Q da V üzerinde non-dejenere kuadratik form olsun.*

$$\lambda : Spin(Q) \rightarrow SO(Q)$$

dönüşümü 2:1 örten bir grup homomorfizmidir ve çekirdeği $\{-1, 1\}$ dir.

Tanım 4.0.4 *$V = \mathbb{R}^n$ reel vektör uzayı üzerinde tanımlanan $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ non-dejenere kuadratik form olarak*

$$Q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2$$

formunu alalım. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $Q(x)$ kuadratik formuna karşılık gelen Clifford cebri $Cl_{0,n}$ veya Cl_n ile gösterilir. Bu durumda Spin(Q) gösterimi yerine Spin(n) gösterimi kullanılır.

$Spin(n) \subset Cl_n$ Spin grubu

$$Spin(n) = \{x \in Cl_n^0 | \forall\ v \in \mathbb{R}^n için\ xvx^* \in \mathbb{R}^n, xx^* = 1\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca,

$$Spin(n) = \{v_1 v_2 \cdots v_{2k} | v_i \in \mathbb{R}^n, Q(v_i) = -1\}$$

şeklinde de tanımlanır.

Düşük boyutlarda, aşağıdaki izomorfizmler vardır [3] [4]:

$Spin(2) \cong S^1$
$Spin(3) \cong SU(2) \cong S^3$
$Spin(4) \cong SU(2) \times SU(2)$
$Spin(5) \cong Sp(2)$
$Spin(6) \cong SU(4)$

Tanım 4.0.5 *[4] $\mathbb{C}l_n$ kompleks Clifford cebrinin içindeki Spin grubu $Spin(n, \mathbb{C})$*

$$Spin(n, \mathbb{C}) = \{x \in \mathbb{C}l_n^0 | her\ v \in \mathbb{C}^n\ için\ xvx^* \in \mathbb{C}^n, xx^* = 1\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma denk olan

$$Spin(n, \mathbb{C}) = \{v_1 v_2 \ldots v_{2k} | v_i \in \mathbb{C}^n, Q(v_i) = \pm 1\}$$

eşitliği de kullanılabilir.

$V = \mathbb{C}^n$ ve bu uzay üzerinde daha önce tanımlanan kuadratik form alınırsa Önerme(4.0.3) özel olarak

$$\lambda : Spin(n, \mathbb{C}) \to SO(n, \mathbb{C})$$

$2:1$ örten grup homomorfizmi olur.

Düşük boyutlarda aşağıdaki izomorfizmler vardır [13]:

$Spin(2,\mathbb{C}) \cong GL(1,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$
$Spin(3,\mathbb{C}) \cong SL(2,\mathbb{C})$
$Spin(4,\mathbb{C}) \cong SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$
$Spin(5,\mathbb{C}) \cong Sp(4,\mathbb{C})$
$Spin(6,\mathbb{C}) \cong SL(4,\mathbb{C})$

4.1 $Spin(n,\mathbb{C})$ Grubunun Lie cebri

m_2, $1 \leq i < j \leq n$ olmak üzere $e_i \cdot e_j$ Clifford çarpımı ile lineer olarak gerilen $\mathbb{C}l_n$ Clifford cebrinin bir alt uzayı olsun. $\gamma(t) = x_1(t)x_2(t)\dots x_{2m}(t)$, $spin(n,\mathbb{C})$ de bir yol ve $\gamma(0) = 1$ koşulunu sağlasın. Bu durumda γ yolunun $t = 0$ daki türevi,

$$\frac{d\gamma}{dt}|_{t=0} = \frac{dx_1}{dt}(0)x_2(0)\dots x_{2m}(0) + \dots + x_1(0)x_2(0)\dots \frac{dx_{2m}}{dt}(0)$$

olur. Bu eşitlikteki herbir toplamın m_2 ye ait olduğunu gösterelim. $\gamma(0) = 1$ olduğundan

$$\gamma(0) = x_1(0)x_2(0)\cdots x_{2m}(0) = 1$$

dir. Buradan

$$\frac{dx_1}{dt}(0)x_2(0)\cdots x_{2m}(0) = \frac{dx_1}{dt}(0)x_1(0)^{-1} = -\frac{dx_1}{dt}(0)x_1(0)$$

elde edilir. Ayrıca $x_1(t)x_1(t) = -1$ olduğundan

$$\frac{dx_1}{dt}(0)x_1(0) + x_1(0)\frac{dx_1}{dt}(0) = 0$$

dır. O halde $\frac{dx_1}{dt}(0)$ ve $x_1(0)$, $\mathbb{C}^n$ dik vektörlerdir. Buradan

$$\frac{dx_1}{dt}(0)x_2(0)\cdots x_{2m}(0) \in m_2$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer toplamlarda incelenebilir. Yani,

$$x_1(0)\frac{dx_2}{dt}(0)x_3(0)\cdots x_{2m}(0) = -(x_1(0)\frac{dx_2}{dt}(0)x_1^{-1}(0))(x_1(0)x_2(0)x_1^{-1}(0))$$

olur. Burada $\frac{dx_2}{dt}(0)$ ve $x_2(0)$, $\mathbb{C}^n$ dik vektörler olduğundan $(x_1(0)\frac{dx_2}{dt}(0)x_1^{-1}(0))$ ve $(x_1(0)x_2(0)x_1^{-1}(0))$ vektörleri de birbirine diktir. O halde

$$x_1(0)\frac{dx_2}{dt}(0)x_3(0)\cdots x_{2m}(0) \in m_2$$

dir. Diğer toplamlar içinde benzer şeyler yapıldığında $\frac{d\gamma}{dt}|_{t=0}$ eşitliğindeki herbir toplamın m_2 ye ait olduğu elde edilir. Dolayısıyla $m_2 \subset \mathfrak{spin}(n,\mathbb{C})$ altuzaydır. $\dim(m_2) = \frac{n(n-1)}{2}$ ve $\dim(\mathfrak{spin}(n,\mathbb{C})) = \frac{n(n-1)}{2}$ olduğundan

$$\mathfrak{spin}(n,\mathbb{C}) = m_2 = Lin\{e_ie_j | 1 \leq i < j \leq n\}$$

elde edilir.

$\lambda : Spin(n,\mathbb{C}) \to SO(n,\mathbb{C})$ 2:1 örtü dönüşümünün birimdeki türev dönüşümünü bulalım. $\lambda_* : \mathfrak{spin}(n,\mathbb{C}) \to \mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ dönüşümü izomorfizmdir.

$$\mathfrak{spin}(n,\mathbb{C}) = Lin\{e_ie_j | 1 \leq i < j \leq n\}$$

spin grubunun Lie cebri idi. $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$, tüm anti-simetrik matrislerin uzayıdır. Dolayısıyla ij. girdisi -1, ji. girdisi 1 olan

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & -1 & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & & & & \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

matrisleri $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ Lie cebri için bir tabandır. Şimdi $\lambda_*(e_ie_j) = 2E_{ij}$ olduğunu gösterelim.

$$\gamma(t) = cost + sinte_ie_j = (cos(\frac{t}{2})e_i + sin(\frac{t}{2})e_j)(cos(\frac{t}{2})e_i - sin(\frac{t}{2})e_j)$$

yolu, $\gamma'(0) = e_ie_j$ koşulunu sağlayan $\mathfrak{spin}(n,\mathbb{C})$ de bir eğri olsun ve $k \neq i,j$ kabul edelim.

$$\begin{aligned} \lambda(\gamma(t))e_k &= (cost + sinte_ie_j)e_k(cost - sinte_ie_j) \\ &= (coste_k + sinte_ie_je_k)(cost - sinte_ie_j) \\ &= e_k \end{aligned}$$

olduğundan

$$\lambda(\gamma(t))e_k = e_k$$

eşitliği elde edilir. $k = i$ durumunda,

$$\begin{aligned}
\lambda(\gamma(t))e_i &= (\cos t + \sin t e_i e_j) e_i (\cos t - \sin t e_i e_j) \\
&= (\cos t e_i + \sin t e_i e_j e_i)(\cos t - \sin t e_i e_j) \\
&= (\cos t e_i + \sin t e_j)(\cos t - \sin t e_i e_j) \\
&= \cos 2t e_i + \sin 2t e_j
\end{aligned}$$

eşitliğinden dolayı,

$$\frac{d}{dt}(\lambda(\gamma(t))e_i)|_{t=0} = 2e_j$$

olur. Benzer şekilde $k = j$ olması durumunda

$$\frac{d}{dt}(\lambda(\gamma(t))e_j)|_{t=0} = -2e_i$$

olur. O halde

$$\lambda_*(e_i e_j) = 2E_{ij}$$

türev dönüşümü elde edilir [3].

Önerme 4.1.1 *$z \in \mathfrak{spin}(n, \mathbb{C})$, Lie cebrinin elemanı olmak üzere, her $x \in \mathbb{C}^n$ için*

$$\lambda_* : \mathfrak{spin}(n, \mathbb{C}) \to \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$$

diferansiyeli

$$\lambda_*(z)x = zx - xz$$

eşitliğini sağlar. Özel olarak $z \in \mathfrak{m}_2$ ve $x \in \mathbb{C}^n$ için $zx - xz$ Clifford çarpımı $\mathbb{C}^n$ ye aittir. Yani, $zx - xz \in \mathbb{C}^n$ dir.

Tanım 4.1.2 *Kompleks Spin grubu ise*

$$Spin^c(n) = Spin(n) \times S^1 / \mathbb{Z}_2 = \{[g, e^{i\theta}] : g \in Spin(n), e^{i\theta} \in S^1\}$$

şeklinde tanımlanır.

Kompleks spin grubunu aşağıdaki şekilde de düşünebiliriz:

$$\begin{array}{rcl} Spin(n) \times S^1 & \to & Spin(n).S^1 \\ (g, e^{i\theta}) & \to & g.e^{i\theta} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm örten bir homomorfizmdir ve bu homomorfizmin çekirdeği de $\mathbb{Z}_2 = \{\pm(1,1)\}$ dir. Dolayısıyla,

$$Spin(n) \times S^1/\mathbb{Z}_2 \cong Spin(n) \cdot S^1 = \{g \cdot e^{i\theta} : g \in Spin(n), e^{i\theta} \in S^1\}$$

olur.

Buradaki $\mathrm{Spin}^c(n)$ ve $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C})$ grupları birbirinden farklı gruplardır. $v_1 v_2 \ldots v_{2k} e^{i\theta} \in \mathrm{Spin}^c(n)$ elemanının $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C})$ ye ait olup olmadığına bakalım. $v_1, v_2, \ldots, v_{2k} \in \mathbb{R}^n$ olduğundan $v_1, v_2, \ldots, v_{2k} e^{i\theta} \in \mathbb{C}^n$ dir. $v_1 v_2 \ldots v_{2k} \in \mathrm{Spin}(n)$ olduğundan $Q(v_i) = -1$ koşulunu sağlarlar. Şimdi son terimi inceleyelim.

$$\begin{array}{rcl} (v_{2k} e^{i\theta})(v_{2k} e^{i\theta})^* & = & (v_{2k} e^{i\theta})(-v_{2k} e^{i\theta}) \\ & = & -e^{2i\theta} v_{2k}^2 \\ & = & e^{2i\theta} \end{array}$$

eşitliğinden de görüldüğü gibi $e^{2i\theta} = 1$ olması ancak θ nın π ve 0 olması durumunda gerçekleşir. Yani $\mathrm{Spin}^c(n)$ ve $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C})$ grupları ancak θ nın π ve 0 olması durumunda çakışırlar. Dolayısıyla bu iki grup birbirinden farklı gruplardır.

Bu λ dönüşümü yardımıyla tanımlanan

$$\begin{array}{rcl} \pi : Spin^c(n) & \to & SO(n) \\ \left[g, e^{i\theta}\right] & \to & \lambda(g) \end{array}$$

dönüşümü homomorfizmdir.

$$\begin{array}{rcl} p : Spin^c(n) & \to & SO(n) \times S^1 \\ \left[g, e^{i\theta}\right] & \to & (\lambda(g), e^{i2\theta}) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm örten bir homomorfizmdir ve çekirdeği $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ dir. Yani $Spin^c(n)$, $SO(n) \times S^1$ in 2:1 örtüsüdür. Ancak bu örtü dönüşümü evrensel bir örtü dönüşümü değildir.

$Spin(n) \subset Cl_n \subset \mathbb{C}l_n \xrightarrow{\kappa_n} End(\Delta_n)$ şeklindeki κ_n temsilinin $Spin(n)$ ye kısıtlanmasıyla

$$\kappa_n = \kappa_n|_{Spin(n)} : Spin(n) \to Aut(\Delta_n)$$

şeklinde temsil elde edilir. Bu temsile $Spin(n)$ grubunun spinor temsili denir.

$n = 2k$ durumunda $Spin(n)$ nin spinor temsilinde spinorlar iki alt uzaya kırılır. Bu aşağıdaki şekilde görülebilir: $e_1 \cdot \ldots \cdot e_{2k}$ elemanı Cl_n^0 cebrinin merkezindedir. $Spin(n) \subset Cl_n^0$ olduğundan $e_1 \cdot \ldots \cdot e_{2k}$ elemanı $Spin(n)$ nin tüm elemanları ile değişmelidir. Bu durumda,

$$f = i^k \kappa(e_1 \cdot \ldots \cdot e_{2k}) : \Delta_{2k} \to \Delta_{2k}$$

endomorfizmi, $Spin(n)$ temsilinin bir otomorfizmidir. Yani, her $g \in Spin(n)$ ve $\psi \in \Delta_{2k}$ için

$$f(\kappa(g)\psi) = \kappa(g)(f(\psi))$$

olur. $(e_1 \cdot \ldots \cdot e_{2k})^2 = (-1)^k$ olduğundan f involusyondur, yani $f^2 = Id_{\Delta_n}$ dir. Böylece Δ_{2k} spinor temsili f nin Δ_{2k}^+ ve Δ_{2k}^- altuzaylarına dekompoze olur öyle ki

$$\Delta_{2k} = \Delta_{2k}^+ \oplus \Delta_{2k}^-, \qquad \Delta_{2k}^{\pm} = \{\psi \in \Delta_{2k} : f(\psi) = \pm\psi\}$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca Δ_{2k}^+ ve Δ_{2k}^- alt uzayları $Spin(n)$ invaryanttır. $g \in Spin(n)$ olmak üzere $\kappa^+(g) = \kappa(g)|_{\Delta_{2k}^+}$ ve $\kappa^-(g) = \kappa(g)|_{\Delta_{2k}^-}$ dir. Bu durumda $\kappa^+ : Spin(n) \to Aut(\Delta_{2k}^+)$ ve $\kappa^- : Spin(n) \to Aut(\Delta_{2k}^-)$ şeklinde iki spinor temsili elde edilir.

Önerme 4.1.3

a) $\dim_{\mathbb{C}} \Delta_{2k}^+ = \dim_{\mathbb{C}} \Delta_{2k}^- = 2^{k-1}$

b) $x \in \mathbb{R}^k$ *ve* $\psi^{\pm} \in \Delta_{2k}^{\pm}$ *ise* $x \cdot \psi^{\pm} \in \Delta_{2k}^{\mp}$ *dir. Böylece Clifford çarpımı* $\mathbb{R}^{2k} \otimes_{\mathbb{R}} \Delta_{2k}^{\pm} \to \Delta_{2k}^{\mp}$ *şeklinde homomorfizm indirger.*

Spin(n) nin temsilleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $Spin(n)$ grubunun spinor temsili birebirdir.

ii. $\kappa_{2k}^{+}, \kappa_{2k}^{-}$ ve κ_{2k+1} spinor temsilleri spin(n) grubunun indirgenemez temsilleridir.

Tanım 4.1.4 $\mathbb{C}l_n \overset{\kappa_n}{\to} End(\Delta_n)$ *temsilinin* $Spin(n, \mathbb{C})$ *ye kısıtlamasıyla elde edilen*

$$\kappa_n : Spin(n, \mathbb{C}) \to Aut(\Delta_n)$$

temsile $Spin(n, \mathbb{C})$ *grubunun spinor temsili denir.*

$n = 2k$ durumunda $Spin(n)$ nin spinor temsilinde spinorlar Δ_{2k}^{+} ve Δ_{2k}^{-} şeklinde iki alt uzaya ayrılmaktaydı. Benzer şekilde $n = 2k$ durumunda $Spin(n, \mathbb{C})$ nin spinor temsilinde spinorlar yine Δ_{2k}^{+} ve Δ_{2k}^{-} şeklinde iki alt uzaya kırılır. Ayrıca Δ_{2k}^{+} ve Δ_{2k}^{-} alt uzayları $Spin(n, \mathbb{C})$ invaryanttır. $g \in Spin(n, \mathbb{C})$ olmak üzere $\kappa^{+}(g) = \kappa(g)|_{\Delta_{2k}^{+}}$ ve $\kappa^{-}(g) = \kappa(g)|_{\Delta_{2k}^{-}}$ dir.

Bu durumda $\kappa^{+} : Spin(n, \mathbb{C}) \to Aut(\Delta_{2k}^{+})$ ve $\kappa^{-} : Spin(n, \mathbb{C}) \to Aut(\Delta_{2k}^{-})$ şeklinde iki spinor temsili elde edilir.

$Spin(n, \mathbb{C})$ grubunun $\kappa_{2k}^{+}, \kappa_{2k}^{-}$ ve κ_{2k+1} spinor temsilleri indirgenemezdir.

Önerme 4.1.5 $Spin(3, \mathbb{C})$ *nin spinor temsili simplektiktir, yani* $Spin(3, \mathbb{C})$ *nin spinor temsili*

$$\kappa_3 : Spin(3, \mathbb{C}) \to Sp(2, \mathbb{C})$$

şeklinde bir dönüşümdür.

Kanıt. Kompleks Clifford cebrinin κ_3 temsili aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}l_3 & \overset{\kappa_3}{\to} & End(\mathbb{C}^2) \\
e_1 & \mapsto & \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\
e_2 & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
e_3 & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Bu κ_3 temsilinin $Spin(3,\mathbb{C})$ ye kısıtlanmışı,

$$\begin{aligned}
\kappa_3|_{Spin(3,\mathbb{C})} : Spin(3,\mathbb{C}) &\rightarrow Aut(\mathbb{C}^2) \\
e_1e_2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A \\
e_1e_3 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = B \\
e_2e_3 &\mapsto \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = C
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\det A = \det B = \det C = 1$ dir ve

$$\begin{aligned}
A^tJA &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J \\
B^tJB &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J \\
C^tJC &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J
\end{aligned}$$

olduğundan $A, B, C \in Sp(2,\mathbb{C})$ dir. Ayrıca $\kappa_3(e_i) \in Sp(2,\mathbb{C})$ olduğundan $\kappa_3(e_ie_j) \in Sp(2,\mathbb{C})$ olduğu da görülebilir. Şimdi $\alpha \in Spin(3,\mathbb{C})$ iken $\kappa_3(\alpha) \in Sp(2,\mathbb{C})$ olduğunu görelim. $\alpha \in Spin(3,\mathbb{C})$ ise

$$\alpha = \alpha_0.1 + \alpha_{12}e_1e_2 + \alpha_{13}e_1e_3 + \alpha_{23}e_2e_3$$

şeklinde yazılabilir. $\kappa_3(\alpha) \in Sp(2,\mathbb{C})$ olduğunu göstermek için $\kappa_3(\alpha)$ nın

$$F(z,w) = z_1w_2 - z_2w_1$$

formunu koruduğunu göstermek yeterlidir.

$$\kappa_3(\alpha) = \alpha_0.I + \alpha_{12}\kappa_3(e_1e_2) + \alpha_{13}\kappa_3(e_1e_3) + \alpha_{23}\kappa_3(e_2e_3)$$

ve $\alpha\widetilde{\alpha} = \alpha_0^2 + \alpha_{12}^2 + \cdots + \alpha_{23}^2 = 1$ eşitlikleri aşağıda kullanılırsa

$$\begin{aligned}
F(\kappa_3(\alpha)x, \kappa_3(\alpha)y) &= F(\alpha_0x + \alpha_{12}\kappa_3(e_1e_2)x + \alpha_{13}\kappa_3(e_1e_3)x + \alpha_{23}\kappa_3(e_2e_3)x, \\
&\qquad \alpha_0y + \alpha_{12}\kappa_3(e_1e_2)y + \alpha_{13}\kappa_3(e_1e_3)y + \alpha_{23}\kappa_3(e_2e_3)y) \\
&= (\alpha_0^2 + \alpha_{12}^2 + \cdots + \alpha_{23}^2)F(x,y) \\
&= F(x,y)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde $g \in Spin(3,\mathbb{C})$ ise $\kappa_3(g) \in Sp(2,\mathbb{C})$ olur. Yani κ_3 kompleks Clifford cebrinin $Spin(3,\mathbb{C})$ ye kısıtlanmışı

$$\kappa_3|_{Spin(3,\mathbb{C})} : Spin(3,\mathbb{C}) \to Sp(2,\mathbb{C})$$

şeklinde bir dönüşümdür. ■

Önerme 4.1.6 *$Spin(4,\mathbb{C})$ nin spinor temsili simplektiktir, yani $Spin(4,\mathbb{C})$ nin spinor temsili*

$${\kappa_4}^+ : Spin(4,\mathbb{C}) \to Sp(2,\mathbb{C})$$

şeklinde bir dönüşümdür.

Kanıt. Bunun için $\mathbb{C}l_4$ kompleks Clifford cebrinin $\mathbb{C}l_3$ den gelen temsilinin $Spin(4,\mathbb{C})$ ye kısıtlanmışının $Sp(2,\mathbb{C})$ de değer aldığını görelim. Bu temsil aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}l_4 & \to & End(\mathbb{C}^4) \\
e_1 & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \\
e_2 & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & -C \\ -C & 0 \end{pmatrix} \\
e_3 & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix} \\
e_4 & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & -A \\ -A & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Bu temsil $Spin(4,\mathbb{C})$ ye kısıtlandığında

$$
\begin{array}{rcccc}
\kappa_4^+ : Spin(4,\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}l_4 & \rightarrow & End(\mathbb{C}^4) & \rightarrow & Aut(\mathbb{C}^2) \\
e_1e_2 & \mapsto & \begin{pmatrix} -C & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix} & \mapsto & -C \\
e_1e_3 & \mapsto & \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} & \mapsto & B \\
e_1e_4 & \mapsto & \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} & \mapsto & -A \\
e_2e_3 & \mapsto & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} & \mapsto & A \\
e_2e_4 & \mapsto & \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} & \mapsto & B \\
e_3e_4 & \mapsto & \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} & \mapsto & C \\
e_1e_2e_3e_4 & \mapsto & \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} & \mapsto & I
\end{array}
$$

A, B, C matrislerinin $Sp(2,\mathbb{C})$ de değer aldığını biliyoruz. $\alpha \in Spin(4,\mathbb{C})$ ise

$$\alpha = \alpha_0.1 + \sum_{i<j} \alpha_{ij} e_i e_j + \alpha_{1234} e_1e_2e_3e_4$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda $\alpha\alpha^* = 1$ koşulundan

$$\alpha\alpha^* = {\alpha_0}^2 + \sum_{i<j} {\alpha_{ij}}^2 + {\alpha_{1234}}^2 + (2\alpha_0\alpha_{1234} - 2\alpha_{14}\alpha_{23} + 2\alpha_{13}\alpha_{24} - 2\alpha_{12}\alpha_{34})e_{1234}$$

eşitliğinden

$${\alpha_0}^2 + \sum_{i<j} {\alpha_{ij}}^2 + {\alpha_{1234}}^2 = 1$$

ve

$$2\alpha_0\alpha_{1234} - 2\alpha_{14}\alpha_{23} + 2\alpha_{13}\alpha_{24} - 2\alpha_{12}\alpha_{34} = 0$$

olması gerektiği elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\kappa_4^+(e_{12}) &= -\kappa_4^+(e_{34}) \\
\kappa_4^+(e_{13}) &= \kappa_4^+(e_{24}) \\
\kappa_4^+(e_{14}) &= -\kappa_4^+(e_{23})
\end{aligned}$$

eşitlikleri de kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&F(\kappa_4^+(\alpha)x, \kappa_4^+(\alpha)y) = \\
&F(\alpha_0 x + \textstyle\sum_{i<j} \alpha_{ij}\kappa_4^+(e_ie_j)x + \alpha_{1234}x, \alpha_0 y + \textstyle\sum_{k<l} \alpha_{kl}\kappa_4^+(e_ke_l)y + \alpha_{1234}y) \\
&= \alpha_0^2 F(x,y) + \textstyle\sum_{i<j} \alpha_0\alpha_{kl}F(x, \kappa_4^+(e_ke_l)y) + \alpha_0\alpha_{1234}F(x,y) \\
&\textstyle\sum_{i<j} \alpha_{ij}\alpha_0 F(\kappa_4^+(e_ie_j)x, y) + \textstyle\sum_{i<j,k<l} \alpha_{ij}\alpha_{kl}F(\kappa_4^+(e_ie_j)x, \kappa_4^+(e_ke_l)y) \\
&+ \textstyle\sum_{i<j} \alpha_{ij}\alpha_{1234}F(\kappa_4^+(e_ie_j)x, y) \\
&+\alpha_{1234}\alpha_0 F(x,y) + \textstyle\sum_{k<l} \alpha_{1234}\alpha_{kl}F(x, \kappa_4^+(e_ke_l)y) + \alpha_{1234}^2 F(x,y) \\
&= (\alpha_0^2 + \textstyle\sum_{i<j} \alpha_{ij}^2 + \alpha_{1234}^2 + 2\alpha_0\alpha_{1234} - 2\alpha_{14}\alpha_{23} + 2\alpha_{13}\alpha_{24} - 2\alpha_{12}\alpha_{34})F(x,y) \\
&= F(x,y)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $Spin(4,\mathbb{C})$ nin spinor temsili simplektiktir, yani $Spin(4,\mathbb{C})$ nin spinor temsili ${\kappa_4}^+ : Spin(4,\mathbb{C}) \to Sp(2,\mathbb{C})$ dir. ■

Önerme 4.1.7 *$Spin(5,\mathbb{C})$ nin spinor temsili simplektiktir, yani $Spin(5,\mathbb{C})$ nin spinor temsili*

$$\kappa_5 : Spin(5,\mathbb{C}) \to Sp(4,\mathbb{C})$$

şeklinde bir dönüşümdür.

Kanıt. $\mathbb{C}l_5$ kompleks Clifford cebrinin $\{e_ie_j | i < j\}$ üreteçlerinin görüntülerine bakıldığında $Sp(4,\mathbb{C})$ de değer alır. Daha önceki yapılanlara benzer şekilde keyfi bir $Spin(5,\mathbb{C})$ deki bir elemanın da $Sp(4,\mathbb{C})$ de değer aldığı görülebilir. Dolayısıyla $\mathbb{C}l_5$ temsilinin $Spin(5,\mathbb{C})$ ye kısıtlanmışı $Sp(4,\mathbb{C})$ de değer alır. ■

Önerme 4.1.8 *$Spin(7,\mathbb{C})$ nin spinor temsili ortogonaldir, yani*

$$\kappa_7 : Spin(7,\mathbb{C}) \to SO(8,\mathbb{C})$$

şeklinde bir dönüşümdür.

Kanıt. Bunun için $Cl_{0,7}$ reel Clifford cebrinden faydalanalım. $Cl_{0,7} \cong \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$ olduğunu biliyoruz ve aradaki izomorfizm taban elemanları üzerinde,

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \sigma_1\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$(\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = I, \quad (\sigma_1\sigma_2)^2 = -I\ )$$

olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{lcl}
Cl_{0,7} & \rightarrow & \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8) \\
e_1 & \mapsto & (-\sigma_2 \otimes \sigma_1\sigma_2 \otimes I, -\sigma_2 \otimes \sigma_1\sigma_2 \otimes I) \\
e_2 & \mapsto & (-\sigma_1\sigma_2 \otimes I \otimes I, -\sigma_1\sigma_2 \otimes I \otimes I) \\
e_3 & \mapsto & (-\sigma_1 \otimes \sigma_1\sigma_2 \otimes \sigma_1, -\sigma_1 \otimes \sigma_1\sigma_2 \otimes \sigma_1) \\
e_4 & \mapsto & (-\sigma_1 \otimes \sigma_1\sigma_2 \otimes \sigma_2, -\sigma_1 \otimes \sigma_1\sigma_2 \otimes \sigma_2) \\
e_5 & \mapsto & (\sigma_1 \otimes I \otimes \sigma_1\sigma_2, \sigma_1 \otimes I \otimes \sigma_1\sigma_2) \\
e_6 & \mapsto & (-\sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1\sigma_2, -\sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1\sigma_2) \\
e_7 & \mapsto & (\sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1\sigma_2, \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1\sigma_2)
\end{array}$$

Burada $1 \leq i \leq 7$ olmak üzere $e_i^2 = -1$ idi. Ayrıca yukarıdaki izomorfizm ve π_1 izdüşüm dönüşümü kullanılırsa, aşağıdaki gibi $\mathbb{C}l_7$ nin temsili elde edilir:

$$\mathbb{C}l_7 \cong Cl_{0,7} \otimes \mathbb{C} \rightarrow (\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)) \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8) \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{C}(8)$$

Bu temsil taban elemanları üzerinde,

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{C}l_7 & \xrightarrow{\kappa_7} & \mathbb{C}(8) \\
e_1 & \mapsto & A_1 = -\sigma_2 \otimes \sigma_1\sigma_2 \otimes I \\
e_2 & \mapsto & A_2 = -\sigma_1\sigma_2 \otimes I \otimes I \\
e_3 & \mapsto & A_3 = -\sigma_1 \otimes \sigma_1\sigma_2 \otimes \sigma_1 \\
e_4 & \mapsto & A_4 = -\sigma_1 \otimes \sigma_1\sigma_2 \otimes \sigma_2 \\
e_5 & \mapsto & A_5 = \sigma_1 \otimes I \otimes \sigma_1\sigma_2 \\
e_6 & \mapsto & A_6 = -\sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1\sigma_2 \\
e_7 & \mapsto & A_7 = \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1\sigma_2
\end{array}$$

şeklindedir. Burada $1 \leq i \leq 7$ olmak üzere $A_i^2 = -I$ ve $A_i^t = -A_i$ eşitlikleri vardır. Bu eşitliklerden $(A_iA_j)^t = -A_iA_j$ elde edilir. Kompleks Clifford cebrinin bu κ_7 temsilinin $\text{Spin}(7,\mathbb{C})$ ye kısıtlanmışını da κ_7 ile gösterelim. Şimdi $\alpha \in \text{Spin}(7,\mathbb{C})$ için $\kappa_7(\alpha) \in SO(8,\mathbb{C})$ olduğunu görelim. $\alpha \in \text{Spin}(7,\mathbb{C})$ ise

$$\alpha = \alpha_0.1 + \alpha_{ij}\sum_{i<j} e_ie_j + \alpha_{ijkl}\sum_{i<j<k<l} e_ie_je_ke_l + \cdots + \alpha_{ijklmn}\sum_{i<j<k<l<m<n} e_ie_je_ke_le_me_n$$

şeklinde yazılabilir. O zaman

$$\widetilde{\alpha} = \alpha_0.1 + \alpha_{ij}\sum_{i<j} e_je_i + \alpha_{ijkl}\sum_{i<j<k<l} e_le_ke_je_i + \cdots + \alpha_{ijklmn}\sum_{i<j<k<l<m<n} e_ne_me_le_ke_je_i$$

olur. Spin grubunun tanımından $\alpha\widetilde{\alpha} = 1$ dir. Dolayısıyla

$$\kappa_7(\alpha)\kappa_7(\widetilde{\alpha}) = I \tag{4.1.1}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\kappa_7(\widetilde{\alpha}) &= \alpha_0.I + \alpha_{ij}\sum_{i<j}\kappa_7(e_j)^t\kappa_7(e_i)^t + \alpha_{ijkl}\sum_{i<j<k<l}\kappa_7(e_l)^t\kappa_7(e_k)^t\kappa_7(e_j)^t\kappa_7(e_i)^t + \\
&\quad \cdots + \alpha_{ijklmn}\sum_{i<j<k<l<m<n}\kappa(e_n)^t\kappa_7(e_m)^t\kappa_7(e_l)^t\kappa_7(e_k)^t\kappa_7(e_j)^t\kappa_7(e_i)^t \\
&= \alpha_0.I + \alpha_{ij}\sum_{i<j}(-1)^2\kappa_7(e_j)\kappa_7(e_i) + \alpha_{ijkl}\sum_{i<j<k<l}\kappa_7(e_l)\kappa_7(e_k)\kappa_7(e_j)\kappa_7(e_i) \\
&\quad + \cdots + \alpha_{ijklmn}\sum_{i<j<k<l<m<n}\kappa_7(e_n)\kappa_7(e_m)\kappa_7(e_l)\kappa_7(e_k)\kappa_7(e_j)\kappa_7(e_i) \\
&= \kappa_7(\alpha)^t
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikten ve (4.1.1) eşitliğinden

$$\kappa_7(\alpha)\kappa_7(\alpha)^t = I$$

elde edilir. Dolayısıyla $\kappa_7(\alpha) \in SO(n,\mathbb{C})$ dir. Yani κ_7 temsili

$$Spin(7,\mathbb{C}) \to SO(8,\mathbb{C})$$

şeklinde bir dönüşümdür. ■

Önerme 4.1.9 *$Spin(8,\mathbb{C})$ nin spinor temsili ortogonaldir, yani*

$${\kappa_8}^+ : Spin(8,\mathbb{C}) \to SO(8,\mathbb{C})$$

şeklinde bir dönüşümdür.

Kanıt. Yukarıda

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}l_7 & \stackrel{\kappa_8}{\rightarrow} & \mathbb{C}(8) \\ e_i & \mapsto & A_i \end{array}$$

temsili, $1 \leq i \leq 7$ olmak üzere $A_i^2 = -I$ ve $A_i^t = -A_i$ olacak şekilde tanımlanmıştı. Bu A_i matrisleri yardımıyla $\mathbb{C}l_8$ in temsili aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}l_8 & \stackrel{\kappa_8}{\rightarrow} & End(\mathbb{C}^{16}) \\ e_1 & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \\ e_i & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & A_i \\ A_i & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Bu temsil $Spin(8,\mathbb{C})$ ye kısıtlandığında,

$$Spin(8,\mathbb{C}) \rightarrow End(\mathbb{C}^{16}) \rightarrow End(S^+) \oplus End(S^-) \stackrel{\pi_1}{\rightarrow} End(S^+)$$

şeklinde dönüşüme indirgenir. Bu dönüşümün açık ifadesi ise,

$$\begin{array}{ccccc} \kappa_8^+ : Spin(8,\mathbb{C}) & \rightarrow & End(S^+) \oplus End(S^-) & \rightarrow & End(S^+) \\ e_1 e_i & \mapsto & \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & -A_i \end{pmatrix} & \mapsto & A_i \\ e_i e_j & \mapsto & \begin{pmatrix} A_i A_j & 0 \\ 0 & A_i A_j \end{pmatrix} & \mapsto & A_i A_j \end{array}$$

şeklindedir. Bu şekilde elde edilen temsil için daha öncekilere benzer şekilde $\kappa_8(\alpha)\kappa_8(\alpha)^t = I$ olduğu gösterilebilir. ∎

Benzer şekilde $\kappa_8^- : Spin(8,\mathbb{C}) \rightarrow SO(8,\mathbb{C})$ olduğu elde edilir. Bu durumda,

$$\lambda : Spin(8,\mathbb{C}) \rightarrow SO(8,\mathbb{C})$$

$$\kappa_8^- : Spin(8,\mathbb{C}) \rightarrow SO(8,\mathbb{C})$$

$$\kappa_8^+ : Spin(8,\mathbb{C}) \rightarrow SO(8,\mathbb{C})$$

üç farklı homomorfizmdir. Bunlar arasında adına triality denilen bir ilişki vardır. Ayrıntılar için [13]'e bakınız.

Düşük boyutlarda $Spin(n, \mathbb{C})$ nin spinor temsilinin n nin bazı değerleri için ortogonal veya simplektik olduğu gösterildi. Aşağıdaki teorem belli n değerleri için spinor temsilinin ortogonal veya simplektik olduğunu belirtir.

Teorem 4.1.10 *[13] κ temsili n nin farklı değerleri için aşağıdaki şekilde olur:*

$$\begin{array}{ll} \kappa_{2n+1} : Spin(2n+1, \mathbb{C}) \to SO(2^n, \mathbb{C}) & (n \equiv 0, 3(Mod4)) \\ \kappa_{2n+1} : Spin(2n+1, \mathbb{C}) \to Sp(2^n, \mathbb{C}) & (n \equiv 1, 2(Mod4)) \\ {\kappa_{2n}}^+ : Spin(2n, \mathbb{C}) \to SO(2^{n-1}, \mathbb{C}) & (n \equiv 0(Mod4)) \\ {\kappa_{2n}}^+ : Spin(2n, \mathbb{C}) \to Sp(2^{n-1}, \mathbb{C}) & (n \equiv 2(Mod4)) \end{array}$$

5 VEKTÖR DEMETLERİ VE ASLİ LİF DEMETLERİ

5.1 Vektör Demetleri

Tanım 5.1.1 *E ve M düzgün manifoldlar ve $\pi : E \to M$ örten diferansiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa E manifolduna, M manifoldu üzerinde rankı k olan vektör demedi denir.*

1. *Her $p \in M$ için, $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ kümesi k-boyutlu reel vektör uzayı yapısına sahiptir.*

2. *Her $p \in M$ için, p nin öyle bir U komşuluğu vardır ki $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ dönüşümü diffeomorfizmdir ve aşağıdaki digram değişmelidir:*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "\pi_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$

   Burada π_1 1. izdüşüm dönüşümüdür ve $q \in U$ için Φ nin E_q ya kısıtlanmışı, $E_q \to \mathbb{R}^k$ lineer izomorfizmdir.

(U, Φ) çiftine vektör demedi kartı denir.

Önerme 5.1.2 *[14] M, düzgün n boyutlu manifold ve TM tanjant demedi olsun. TM, M üzerinde rankı n olan düzgün vektör demedidir.*

Önerme 5.1.3 *[14] $\pi : E \to M$ düzgün vektör demedi ve $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere E nin iki düzgün lokal trivilizasyonları $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ ve $\Phi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{R}^k$ olsun. Bu durumda $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$ düzgün dönüşümü vardır öyle ki $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$ bileşke dönüşümü $\Phi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1}(p, v) = (p, g_{\alpha\beta}(p)(v))$ şeklinde tanımlanır.*

Yukarıdaki önermede tanımlanan $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$ düzgün dönüşümü, Φ_α ve Φ_β yerel trivilizasyonları arasındaki geçiş fonksiyonu olarak adlandırılır ve $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ olmak üzere

i. $g_{\alpha\alpha}(p) = Id$

ii. $g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p)$

koşullarını sağlar.

Yardımcı Teorem 5.1.4 *[14] (Vektör demedi kurma) M düzgün manifold olsun ve aşağıdakiler verilsin.*

- *Her bir $p \in M$ için E_p k-boyutlu reel vektör uzayı olsun.*
- *A indis kümesi olmak üzere $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, M'nin bir açık örtüsü olsun.*
- *$E = \bigcup\limits_{p \in M} E_p$ ve $\pi : E \to M$ dönüşümü $\pi(E_p) = p$ koşulunu sağlasın.*
- *Her $\alpha \in A$ için $\pi^{-1}(U_\alpha) \subset E$ olmak üzere*

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$$

birebir örten dönüşüm ve

$$\varphi_\alpha \mid_{E_p} : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$$

lineer izomorfizm olsun.

- *$\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ iken*

$$\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k)$$

düzgün dönüşüm öyle ki

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$$

$\left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\right)(p, v) = (p, \tau_{\alpha\beta}(p)\, v)$ *koşulunu sağlasın.*

Bu durumda E tek türlü belirli düzgün manifold yapısına ve M üzerinde k-ranklı düzgün vektör demedi yapısına sahiptir. Burada π izdüşüm dönüşümü, φ_α lar düzgün lokal trivilizasyonlardır.

Teorem 5.1.5 *[14] M düzgün manifold ve $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ M nin açık örtüsü olsun. Her $\alpha, \beta \in I$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere*

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

düzgün dönüşümleri mevcut olsun ve her $\alpha, \beta, \gamma \in I$ için $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ olmak üzere

$$g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda, geçiş fonksiyonları, verilen $g_{\alpha\beta}$ dönüşümlerini verecek şekilde $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ düzgün lokal trivilizasyonları ile rankı k olan $E \to M$ düzgün vektör demedi vardır.

Tanım 5.1.6 *[14] $\pi : E \to M$ ve $\pi' : E' \to M'$ iki vektör demedi olsun. $\widetilde{f} : E \to E'$ ve $f : M \to M'$ düzgün dönüşümleri aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $(\widetilde{f}, f)$ ikilisine vektör demetleri arasındaki demet dönüşümü denir.*

i. $\pi' \circ \widetilde{f} = f \circ \pi$ *dir.*

ii. $\widetilde{f}|_{E_p} : E_p \to E'_{f(p)}$ *lineerdir.*

$\pi : E \to M$ ve $\pi' : E' \to M'$ iki vektör demedi olsun. $\widetilde{f} : E \to E'$ dönüşümü diffeomorfizm ve tersi de demet dönüşümü ise E ve E' vektör demetlerine izomorfiktir denir.

Tanım 5.1.7 *(Lokal ve global kesit) $\pi : E \to M$ düzgün vektör demedi olsun. $\sigma : M \to E$ dönüşümü, her $x \in M$ için $\pi \circ \sigma(x) = x$ koşulunu sağlıyorsa σ ya global kesit denir. Eğer $U \subset M$ açık küme olmak üzere $\sigma : U \to E$ dönüşümü , her $x \in U$ için $\pi \circ \sigma(x) = x$ koşulunu sağlıyorsa σ ya lokal kesit denir.*

$\pi : E \to M$ vektör demedi olsun. E nin kesitlerinin kümesi $\Gamma(E)$ ile gösterilir.

Tanım 5.1.8 *$\pi : E \to M$ düzgün vektör demedi ve $U \subset M$ açık küme olsun. E nin U üzerindeki $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ lokal kesitleri verilsin. Eğer her $p \in U$*

için $\sigma_1(p), \ldots, \sigma_k(p) \in E_p$ vektörleri E_p vektör uzayı üzerinde lineer bağımsız ise $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ kesitlerine U üzerinde lineer bağımsızdır denir. Eğer $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ kesitleri her $p \in U$ için E_p yi geriyorlarsa $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ kesitlerine U üzerinde E yi geriyor denir.

Tanım 5.1.9 *(Lokal ve global çatı) $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ kesitleri, U üzerinde lineer bağımsız ve E yi geriyorlarsa $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ kesitlerine E nin U üzerindeki lokal çatısı denir. $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ kesitleri, M üzerinde lineer bağımsız ve E yi geriyorlarsa $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ kesitlerine E nin M üzerindeki global çatısı denir.*

Önerme 5.1.10 *[14] Düzgün vektör demedinin her düzgün lokal çatısı, bir düzgün lokal trivilizasyondan gelir.*

E, M üzerinde vektör demedi olsun. $U \subset M$ üzerinde $s_1, \ldots, s_k$ lokal çatı olsun. Bu durumda $x \in M$ için

$$s_i(x) \in E_x = Span\{s_1(x), \ldots, s_k(x)\}$$

dir. $p \in \pi^{-1}(U)$ ise $\pi(p) = x$ dir. $p \in E_x$ olduğundan $p = v^1 s_1(x) + \cdots + v^k s_k(x)$ şeklinde yazılır. Bu durumda U üzerinde Φ lokal trivilizasyonu,

$$\begin{aligned} \Phi : \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times \mathbb{R}^k \\ p &\rightarrow (x, v^1, \ldots, v^k) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine Φ, $U \subset M$ üzerinde lokal trivilizasyon olsun. $\{e_1, \ldots, e_k\}$, $\mathbb{R}^k$ nın standart tabanı olmak üzere, $i = 1, \ldots, k$ için $x \in U$ iken

$$s_i(x) = \Phi^{-1}(x, e_i)$$

U üzeride lokal çatılardır.

Tüm vektör demetleri için global çatı her zaman var olmak zorunda değildir. Ancak lokal çatı daima vardır.

Örnek 5.1.11 *Vektör demedi olarak tanjant demedini alınırsa, $\sigma : M \rightarrow TM$ kesitleri vektör alanlarıdır. Vektör demedi olarak kotanjant demedi alınırsa, $\sigma : M \rightarrow TM^*$ kesitleri $1-$formlar olur.*

Tanım 5.1.12 *M n-boyutlu düzgün manifold, $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ alt grup ve TM tanjant demedinin $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ atlasının geçiş fonksiyonları $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ şeklinde G de değer alıyorsa M manifoldu G yapısına sahiptir denir.*

Bir M manifoldunun G-yapısına sahip olması, o manifoldun geometrisiyle doğrudan ilişkilidir. Bunların bazılarını aşağıdaki şekilde listeleyebiliriz:

i. $GL(n, \mathbb{R})^+$ determinantı pozitif olan matrislerin grubu olmak üzere, $GL(n, \mathbb{R})^+ \subset GL(n, \mathbb{R})$ grubunda değer alıyorsa M manifolduna yönlendirilebilirdir denir. Tersine M yönlendirilebilir manifold ise M nin öyle bir kartlaması vardır ki TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $GL(n, \mathbb{R})^+$ da değer alır.

ii. Geçiş fonksiyonları $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$ ortogonal grubunda değer alıyorsa M manifoldu g Riemann metriği ile donatılabilir. Tersine M Riemann manifoldu ise M nin öyle bir kartlaması vardır ki TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $O(n)$ de değer alır.

iii. Geçiş fonksiyonları $SO(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$ grubunda değer alıyorsa M manifoldu g Riemann metriği ile donatılabilir ve yönledirilebilir manifolddur. Tersine M yönlendirilebilir Riemann manifoldu ise M nin öyle bir kartlaması vardır ki TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $SO(n)$ de değer alır.

iv. $n = p + q$ olmak üzere geçiş fonksiyonları $O(p, q) \subset GL(n, \mathbb{R})$ grubunda değer alıyorsa M manifoldu (p, q)-tipinde g yarı-Riemann metriği ile donatılabilir. Tersine M, (p, q)-tipinde g yarı-Riemann metriği ile donatılabiliyorsa M nin öyle bir kartlaması vardır ki TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $O(p, q)$ da değer alır.

v. $n = p + q$ olmak üzere geçiş fonksiyonları $SO(p, q) \subset GL(n, \mathbb{R})$ grubunda değer alıyorsa M manifoldu (p, q)-tipinde g yarı-Riemann metriği ile donatılabilir ve M manifoldu yönlendirilebilirdir. Tersine M, (p, q)-tipinde

g yarı-Riemann metriği ile donatılabiliyorsa ve yönlendirilebilirse, M nin öyle bir kartlaması vardır ki TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $SO(p,q)$ da değer alır.

vi. $n = 2m$ olmak üzere geçiş fonksiyonları $GL(m,\mathbb{C})$ grubunda değer alıyorsa M manifoldu J yaklaşık kompleks yapıya sahiptir. Burada J, $J^2 = -Id$ koşulunu sağlayan $J : TM \to TM$ şeklinde $(1,1)$ tipinde bir tensördür. Tersine M, J yaklaşık kompleks yapıya sahip ise M nin öyle bir kartlaması vardır ki TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $GL(m,\mathbb{C})$ grubunda değer alır [15].

vii. $n = 2m$ olmak üzere geçiş fonksiyonları $U(m) \subset GL(m,\mathbb{C})$ grubunda değer alıyorsa M manifoldu kompleks manifolddur ve g hermityen metriği ile donatılabilir. Tersine M, g hermityen metriği ile donatılabiliyorsa, M nin öyle bir kartlaması vardır ki TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $U(m)$ de değer alır [15].

viii. $n = 2m$ olmak üzere geçiş fonksiyonları $O(m,\mathbb{C}) = O(m,m) \cap GL(m,\mathbb{C})$ grubunda değer alıyorsa M manifoldu J yaklaşık kompleks yapısına sahiptir ve (m,m)-tipinde g yarı-Riemann metriği ile donatılabilir. Ayrıca g metriği ile J yaklaşık kompleks yapısı arasında her $X, Y \in \Gamma(TM)$ olmak üzere $g(JX, JY) = -g(X,Y)$ ilişkisi vardır. Tersine M, J yaklaşık kompleks yapıya sahip ve (m,m) tipinde g yarı-Riemann metriğine sahip ve aralarında $g(JX, JY) = -g(X,Y)$ ilişkisi var ise M nin öyle bir kartlaması vardır ki TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $O(m,\mathbb{C})$ grubunda değer alır [5].

5.2 Kovaryant Türev

Tanım 5.2.1 *$\pi : E \to M$ vektör demedi ve $\Gamma(E)$, E nin düzgün kesitlerin uzayı olsun.*

$$\begin{aligned} \nabla : \quad \chi(M) \times \Gamma(E) &\to \Gamma(E) \\ (X, \sigma) &\mapsto \nabla_X \sigma \end{aligned}$$

bilineer dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa ∇ ya E de bir konneksiyon denir.

a) $\nabla_X \sigma$, *X de $C^\infty(M)$ -lineerdir. Yani $f, g \in C^\infty(M)$ ve $X_1, X_2 \in \chi(M)$ iken*

$$\nabla_{fX_1+gX_2}\sigma = f\nabla_{X_1}\sigma + g\nabla_{X_2}\sigma$$

eşitliği sağlanır.

b) ∇, *çarpım kuralını sağlar. Yani $f \in C^\infty(M)$ iken*

$$\nabla_X(f\sigma) = f\nabla_X\sigma + (Xf)\sigma$$

dır. $\nabla_X\sigma$, *X yönünde σ nın kovaryant türevi olarak adlandırılır.*

Aslında kovaryant türev $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ şeklinde

$$\nabla(f\sigma) = f\nabla\sigma + df \otimes \sigma$$

koşulunu sağlayan bir lineer dönüşüm olarak da düşünülebilir.

$U \subset M$ açık kümesi üzerinde yerel çatı $s_1, s_2, ..., s_k$ olsun. O zaman $X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X s_j = \sum_{i=1}^{k} w_{ij}(X)s_i$$

şeklinde yazılabilir. Burada $w_{ij}(X) \in C^\infty(U)$ dur. Ayrıca $w_{ij}(fX) = fw_{ij}(X)$ olduğundan w_{ij} ler U üzerinde 1-formlardır. k^2 tane 1-form vardır. $w_U = (w_{ij})$ ye U üzerinde ∇ nın konneksiyon formu veya konneksiyon potensiyelleri denir ve w_U, U üzerinde $\mathfrak{gl}(k, \mathbb{R})$ değerli 1-formdur.

Teorem 5.2.2 *[16] M yarı Riemann manifold olsun. Bu durumda TM üzerinde tek türlü belirli ∇ konneksiyonu vardır öyle ki aşağıdaki koşullar sağlanır:*

a) $\nabla_X Y$, X de $C^\infty(M)$ -lineerdir. Yani $f \in C^\infty(M)$ ve $X_1, X_2 \in \chi(M)$ iken

$$\nabla_{fX_1+X_2}Y = f\nabla_{X_1}\sigma + \nabla_{X_2}\sigma$$

eşitliği sağlanır.

b) ∇, çarpım kuralını sağlar. Yani $f \in C^{\infty}(M)$ iken

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf) Y$$

c) ∇ konneksiyonunun burulması sıfırdır. Yani, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

dir.

d) ∇ konneksiyonu, metrik uyumluluk koşulunu sağlar. Yani, $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

dir.

Bu ∇ konneksiyonuna Levi-Civita konneksiyonu denir.

Tanım 5.2.3 *∇, $\pi : E \to M$ vektör demedinde konneksiyon olsun. $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere,*

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

şeklinde tanımlanan R dönüşümüne konneksiyonun eğriliği denir.

$U \subset M$ açık kümesi üzerinde lokal çatı $s_1, s_2, ..., s_k$ olsun. O zaman $X, Y \in \chi(M)$ için

$$R(X, Y)s_j = \sum_{i=1}^{k} \Omega_{ij}(X, Y)s_i$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\Omega_{ij}(X, Y) \in C^{\infty}(U)$ dur ve

$$\Omega_{ij}(Y, X) = -\Omega_{ij}(X, Y)$$

ve

$$\Omega_{ij}(fX, gY) = fg\Omega_{ij}(X, Y)$$

koşullarını sağladığından herbir Ω_{ij} ler U üzerinde $\mathbb{R}$-değerli $2-$formlardır. $\Omega = (\Omega_{ij})$, U üzerinde $\mathfrak{gl}(k, \mathbb{R})$ değerli 2-formdur. Bu forma eğrilik formu denir.

Teorem 5.2.4 *Vektör demedinde $w = (w_{ij})$ konneksiyon formu ve $\Omega = (\Omega_{ij})$ eğrilik formu arasında*

$$dw = -\frac{1}{2} w \wedge w + \Omega$$

ilişkisi vardır. Bileşenleri arasında

$$dw_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{k} w_{ir} \wedge w_{rj} + \Omega_{ij}$$

eşitliği vardır.

Önerme 5.2.5 *[17] ∇, $\pi : E \to M$ vektör demedinde konneksiyon olsun. U_α ve U_β, M nin açık alt kümeleri, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ve*

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$
$$\varphi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{R}^n$$

lokal trivilizasyonlar olmak üzere $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n, \mathbb{R})$ geçiş fonksiyonları olsun. U_α ya karşılık gelen konneksiyon formunu w_α, eğrilik formunu Ω_α, U_β ya karşılık gelen konneksiyon formunu w_β, eğrilik formunu Ω_β şeklinde belirtelim. Bu durumda $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ üzerinde w_α ve w_β arasında

$$w_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} w_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta} \tag{5.2.1}$$

eşitliği vardır. Ω_α ve Ω_β arasında

$$\Omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} \Omega_\alpha g_{\alpha\beta}$$

eşitliği vardır.

Tanım 5.2.6 *[18] TM tanjant demedi, ∇, TM üzerinde konneksiyon ve yapı grubu G olsun. TM nin konneksiyon potensiyelleri $\mathfrak{g} = Lie(G)$ G nin Lie cebrinde değer alıyorsa ∇ konneksiyonuna G-konneksiyon denir.*

5.3 Asli Lif Demetleri

Tanım 5.3.1 *[19] P ve M düzgün manifold ve G Lie grubu olsun. $\mathcal{P} : P \to M$ düzgün örten dönüşüm ve G nin P üzerindeki etkisi*

$$\sigma : P \times G \to P$$

$\sigma(p, g) = p.g$ ile tanımlı düzgün dönüşüm olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlansın.

1. *σ, $\mathcal{P}$ nin liflerini korur, yani $\forall p \in P$ ve $g \in G$ için*

   $$\mathcal{P}(p.g) = \mathcal{P}(p)$$

   dir.

2. *(Yerel triviallik özelliği) Her $x_0 \in M$ için x_0'ı içeren bir V açık komşuluğu vardır ve $\Psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \to V \times G$ dönüşümü $\Psi(p) = (\mathcal{P}(p), \psi(p))$ ile tanımlı diffeomorfizmdir. Burada*

   $$\psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \to G$$

   dönüşümü $\forall p \in \mathcal{P}^{-1}(V)$ ve $g \in G$ için

   $$\psi(p.g) = \psi(p).g$$

   eşitliğini sağlar.

Bu durumda P ye yapı grubu G olan asli lif demedi denir ve (P, M, G) şeklinde gösterilir.

Teorem 5.3.2 *[19] M düzgün manifold, G bir Lie grubu ve $\{U_i\}_{i \in I}$ M'nin açık örtüsü olsun. Her $i, j \in I$ için $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ olmak üzere $g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ düzgün dönüşümleri var ve bu dönüşümler $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ iken her $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ için*

$$g_{ij}(x)g_{jk}(x) = g_{ik}(x)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda M üzerinde (denklik dışında) tek türlü belirli G-asli lif demedi inşa edilebilir. Burada U_i ler trivilizasyon komşulukları ve g_{ij} ler trivilizasyon komşuluklarına karşılık gelen geçiş fonksiyonlarıdır.

Yukarıdaki teorem kullanılarak bir M manifoldu üzerinde pek çok asli lif demedi inşa edilebilir:

i. Herhangi bir M manifoldu üzerinde TM nin geçiş fonksiyonları $GL(n,\mathbb{R})$ de değer alır. Dolayısıyla $GL(n,\mathbb{R})$ asli lif demedi inşa edilebilir ve $P_{GL(n,\mathbb{R})}$ ile gösterilir.

ii. M yönlendirilebilir manifold ise M nin öyle bir kartlaması vardır ki TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $GL(n,\mathbb{R})^+$ da değer alır. Dolayısıyla bu geçiş fonksiyonları yardımıyla $GL(n,\mathbb{R})^+$-asli lif demedi inşa edilebilir. Bu demet $P_{GL(n,\mathbb{R})^+}$ ile gösterilir.

iii. M Riemann manifoldu ise M nin öyle bir kartlaması vardır ki TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $O(n)$ de değer alır. Bu yüzden bu geçiş fonksiyonları yardımıyla $O(n)$-asli lif demedi inşa edilebilir. Bu demet $P_{O(n)}$ ile gösterilir.

iv. M yönlendirilebilir Riemann manifoldu ise M nin öyle bir kartlaması vardır ki TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $SO(n)$ de değer alır. Bu geçiş fonksiyonları yardımıyla $SO(n)$-asli lif demedi inşa edilebilir. Bu demet $P_{SO(n)}$ ile gösterilir.

v. M, (p,q)-tipinde g yarı-Riemann metriği ile donatılabiliyorsa M nin öyle bir kartlaması vardır ki TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $O(p,q)$ da değer alır. O halde bu geçiş fonksiyonları ile $O(p,q)$-asli lif demedi inşa edilebilir. Bu demet $P_{O(p,q)}$ ile gösterilir.

vi. M, (p,q)-tipinde g yarı-Riemann metriği ile donatılabiliyorsa ve yönlendirilebilirse, M nin öyle bir kartlaması vardır ki TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $SO(p,q)$ da değer alır. Böylece bu geçiş fonksiyonları ile $SO(p,q)$-asli lif demedi inşa edilebilir. Bu demet $P_{SO(p,q)}$ ile gösterilir.

vii. M, J yaklaşık kompleks yapıya sahip ise M nin öyle bir kartlaması vardır ki TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $GL(n,\mathbb{C})$ grubunda değer alır. Bu geçiş fonksiyonları ile $GL(n,\mathbb{C})$-asli lif demedi kurulabilir. Bu demet $P_{GL(n,\mathbb{C})}$ ile gösterilir.

viii. M, g hermityen metriği ile donatılabiliyorsa, M nin öyle bir kartlaması vardır ki TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $U(n)$ de değer alır. O halde bu geçiş fonksiyonları kullanılarak $U(n)$-asli lif demedi inşa edilebilir. Bu demet $P_{U(n)}$ ile gösterilir.

ix. M, J yaklaşık kompleks yapıya sahip ve (n,n) tipinde g yarı-Riemann metriğine sahip ve aralarında $g(JX,JY) = -g(X,Y)$ ilişkisi var ise M nin öyle bir kartlaması vardır ki TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $O(n,\mathbb{C})$ grubunda değer alır. Bu demet $P_{O(n,\mathbb{C})}$ ile gösterilir. Bu geçiş fonksiyonları ile $O(n,\mathbb{C})$-asli lif demedi inşa edilebilir. Özel olarak TM tanjant demedinin geçiş fonksiyonları $SO(n,\mathbb{C})$ grubunda değer alıyorsa, bu geçiş fonksiyonları ile $SO(n,\mathbb{C})$-asli lif demedi kurulabilir. Bu demet $P_{SO(n,\mathbb{C})}$ ile gösterilir.

Tanım 5.3.3 *P_1, M_1 üzerinde $G-$asli lif demedi ve P_2, M_2 üzerinde $G-$asli lif demedi olsun. $p \in P_1$ için*

$$\widetilde{f}(p \cdot g) = \widetilde{f}(p) \cdot g$$

koşulunu sağlayan $\widetilde{f} : P_1 \to P_2$ düzgün dönüşüme asli lif demetleri arasındaki demet dönüşümü denir. $\widetilde{f}$ dönüşümü, $f : M_1 \to M_2$ dönüşümünü belirler. P_1 ve P_2, aynı M manifoldu üzerinde $G-$asli lif demetleri için $\widetilde{f} : P_1 \to P_2$ demet dönüşümü $f = Id$ olacak şekilde varsa P_1 ve P_2 demetlerine denktirler denir.

Tanım 5.3.4 *M, $n-$boyutlu düzgün manifold olsun. $x \in M$ noktasındaki çatı $e = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in T_xM$ sıralı tabanıdır. Böyle bir çatı, $i = 1, \ldots, n$ için e_i ler $\mathbb{R}^n$ nin standart tabanı olmak üzere*

$$\begin{aligned} \widetilde{e} : \mathbb{R}^n &\to T_xM \\ e_i &\mapsto b_i \end{aligned}$$

lineer izomorfizmi belirler. Bu durumda çatı

$$e = (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (\widetilde{e}(e_1), \widetilde{e}(e_2), \ldots, \widetilde{e}(e_n))$$

olur. $\mathcal{F}(M)_x = \{x \in M$ *noktasındaki tüm çatıların kümesi*$\}$ *olmak üzere*

$$\mathcal{F}(M) = \bigsqcup_{x \in M} \mathcal{F}(M)_x$$

ye M *nin çatı demedi denir.* $GL(n, \mathbb{R})$ *grubunun* $\mathcal{F}(M)$ *üzerine etkisi,*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}(M) \times GL(n, \mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{F}(M) \\ ((b_1, b_2, \ldots, b_n), [A_{ij}]) & \mapsto & (\sum\limits_{i=1}^{n} biA_{i1}, \ldots, \sum\limits_{i=1}^{n} biA_{in}) \end{array}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki çatıya göre $\mathcal{F}(M)$ *çatı demedinin yapı grubu* $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ *de değer alabilir. Bu durumda bu çatı demedi* $\mathcal{F}_G(M)$ *ile gösterilir.*

M manifoldunun yapı grubu G ise $\mathcal{F}_G(M)$ çatı demedi ve P_G asli lif demedi inşa edilebilir. Bu durumuda $\mathcal{F}_G(M)$ demedi, P_G demedine izomorftur [18].

i. Herhangi bir M manifoldu ise $P_{GL(n,\mathbb{R})} \cong \mathcal{F}_{GL(n,\mathbb{R})}(M)$ dir.

ii. M yönlendirilebilir manifold ise $P_{GL(n,\mathbb{R})^+} \cong \mathcal{F}_{GL(n,\mathbb{R}^+}(M)$ dır.

iii. M Riemann manifoldu ise $P_{O(n)} \cong \mathcal{F}_{O(n)}(M)$ dir.

iv. M yönlendirilebilir Riemann manifoldu ise $P_{SO(n)} \cong \mathcal{F}_{SO(n)}(M)$ dir.

v. M, (p, q)-tipinde g yarı-Riemann metriği ile donatılabiliyorsa $P_{O(p,q)} \cong \mathcal{F}_{O(p,q)}(M)$ dir.

vi. M, (p, q)-tipinde g yarı-Riemann metriği ile donatılabiliyorsa ve yönlendirilebilirse, $P_{SO(p,q)} \cong \mathcal{F}_{SO(p,q)}(M)$ dir.

vii. M, J yaklaşık kompleks yapıya sahip ise $P_{GL(n,\mathbb{C})} \cong \mathcal{F}_{GL(n,\mathbb{C})}(M)$ dir.

viii. M, g hermityen metriği ile donatılabiliyorsa, $P_{U(n)} \cong \mathcal{F}_{U(n)}(M)$ dir.

ix. M, J yaklaşık kompleks yapıya sahip ve (n,n) tipinde g yarı-Riemann metriğine sahip ve aralarında $g(JX,JY) = -g(X,Y)$ ilişkisi var ise $P_{O(n,\mathbb{C})} \cong \mathcal{F}_{O(n,\mathbb{C})}(M)$ dir. Özel olarak TM nin geçiş fonksiyonları $SO(n,\mathbb{C})$ grubunda değer alıyorsa, $P_{SO(n,\mathbb{C})} \cong \mathcal{F}_{SO(n,\mathbb{C})}(M)$ dir.

Tanım 5.3.5 *[19] P, M üzerinde G-asli lif demedi olsun. $U \subset M$ için $s : U \to P$ düzgün fonksiyonu her $x \in U$ için $\mathcal{P} \circ s = Id_U$ koşulunu sağlıyorsa s dönüşümüne P asli lif demedinin bir kesiti denir.*

$\Phi : \mathcal{P}^{-1}(U) \to U \times G$, P, G-asli lif demedi üzerinde trivilizasyon ise U üzerinde $s_U(x) = \Phi^{-1}(x,e)$ ile $s_U : U \to P$ bir lokal kesit tanımlanabilir. Bu durumda s_U kesitine Φ lokal trivilizasyonuna karşılık gelen kesit denir.

Tersine $s_U : U \to P$ dönüşümü P, G-asli lif demedinin bir lokal kesiti ise, bu kesit P nin bir lokal trivilizasyonunu belirler. s_U kesitinin belirlediği $\Phi : U \times G \to \mathcal{P}^{-1}(U)$ trivilizasyonu, $\Phi(x,g) = s(x)g$ şeklinde tanımlanır.

Asli lif demedinin tanımında ifade edilen $\sigma : P \times G \to P$ dönüşümü her $p \in P$ için $\sigma_p : G \to P$, $\sigma_p(g) = pg$ şeklinde bir dönüşüm belirler.

Tanım 5.3.6 *[19] $\mathfrak{g}$, G lie grubunun Lie cebri olmak üzere $A \in \mathfrak{g}$ için $\sigma(A)(p) = (\sigma_p)_{*id}(A)$ ile tanımlanan $\sigma(A)$ vektör alanı, $A^\sharp$ ile gösterilir ve P üzerindeki A tarafından belirlenen temel vektör alanı olarak adlandırılır.*

Tanım 5.3.7 *[19] P, M üzerinde düzgün G-asli lif demedi ve $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebri olsun. ω, P üzerinde düzgün $\mathfrak{g}$-değerli 1-formu aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa, ω ya P üzerinde $\mathfrak{g}$-değerli konneksiyon 1-formu denir.*

1. $\forall g \in G$ *için*

$$(\sigma_g)^* w = ad_{g^{-1}} \circ \omega$$

yani $\forall g \in G, p \in P$ *ve* $v \in T_{pg^{-1}}(P)$ *için*

$$\omega_p((\sigma_g)_{*pg^{-1}}(v)) = g^{-1}\omega_{pg^{-1}}(v)g$$

dir.

2. $\forall A \in \mathfrak{g}$ *için*

$$\omega(A^\sharp) = A$$

yani $\forall A \in \mathfrak{g}$ *ve* $p \in P$ *için*

$$\omega_p(A^\sharp(p)) = A$$

dır.

Teorem 5.3.8 *[19] G, matris Lie grubu, $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebri ve (P, M, G), M üzerinde $G-$asli lif demedi olsun. $\bigcup_{j\in J} V_j = M$ olmak üzere $\{(V_j, \Psi_j)\}_{j\in J}$ asli lif demedinin lokal trivilizasyonları olsun. Her $j \in J$ için $\mathcal{A}_j$ ler V_j üzerinde $\mathfrak{g}$-değerli 1-formlar ve $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ iken $V_i \cap V_j$ üzerinde, $g_{ij} : V_j \cap V_i \to G$ geçiş fonksiyonları, $\theta_{ij} = g_{ij}{}^*\theta$ yani G nin θ Cartan 1-formunun g_{ij} ile geri çekilmişi olmak üzere;*

$$\mathcal{A}_j = ad_{g_{ij}} \circ \mathcal{A}_i + \theta_{ij}$$

eşitliği sağlansın. Bu durumda P üzerinde tek bir ω konneksiyon formu vardır, öyle ki her $j \in J$ için $s_j : V_j \to \mathcal{P}^{-1}(V_j)$, (V_j, Ψ_j) trivilizasyonuna karşılık gelen kanonikal kesitler olmak üzere $\mathcal{A}_j = s_j^*\omega$ dir.

Not: M manifoldu üzerindeki TM tanjant demedinin yapı grubu $GL(n, \mathbb{R})$ dir ve $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ TM nin demet atlas örtüsü ve ∇, TM üzerinde konneksiyon olmak üzere $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ iken ∇ nın konneksiyon formları arasında Önerme(5.2.5) de ifade edilen (5.2.1) eşitliği sağlanır. $GL(n, \mathbb{R})$ nin Cartan $1-$formunun g_{ij} geçiş fonksiyonları yardımıyla geri çekilmişi θ_{ij},

$$\theta_{ij} = g_{ij}^{-1} dg_{ij}$$

eşitliğini sağlar. Dolayısıyla TM tanjant demedi üzerindeki ∇ konneksiyonunun konneksiyon formları, $P_{GL(n,\mathbb{R})}$ asli lif demedi üzerinde bir ω konneksiyon $1-$ formu belirler.

P_G asli lif demedi olsun ve P_G üzerinde ω konneksiyon $1-$formu verilsin. Her $p \in P_G$ için ω ile belirli T_pP_G nin yatay alt uzayı,

$$Hor_p(P_G) = \{v \in T_pP_G : \omega_p(v) = 0\}$$

şeklinde tanımlanır. T_pP_G nin dikey alt uzayı ise,

$$Ver_p(P_G) = \{\alpha'(0) : \alpha : I \to P_G \text{ bir eğri}, \alpha(0) = p, \mathcal{P}(\alpha(t)) = \mathcal{P}(p)\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda

$$T_pP_G = Hor_p(P_G) \oplus Ver_p(P_G)$$

dir.

5.4 Asosye Vektör Demetleri

Tanım 5.4.1 *(Asosye vektör demedi) P, M manifoldu üzerinde G-asli lif demedi olsun. $\rho : G \times V \to V$, G grubunun V vektör uzayı üzerine etkisi olsun. $P \times V/G$ bölüm uzayı aşağıdaki denklik bağıntısı ile tanımlanır:*

$$(p, v) \sim (p.g, \rho(g^{-1})(v))$$

Bu durumda

$$\mathcal{P}_G : P \times V/G \to M$$

diferansiyellenebilir ve örten dönüşümdür ve $P \times V/G$ ye M üzerinde ρ ile belirli $\mathcal{P} : P \to M$ asli lif demedine karşılık gelen vektör demedi denir. Bazen $P \times_\rho V$ şeklinde de gösterilir.

Örnek 5.4.2 *M yönlendirilmiş Riemannian manifoldu üzerindeki $P_{SO(n)}$ asli lif demedi gözönüne alınırsa $\rho_n : SO(n) \to Aut(\mathbb{R}^n)$ standart temsil yardımıyla elde edilen $P_{SO(n)} \times_{\rho_n} \mathbb{R}^n$ asosye vektör demedi, TM tanjant demedine izomorftur. Benzer şekilde M manifoldu üzerindeki $P_{SO(n,\mathbb{C})}$ asli lif demedi alınırsa $\rho_n : SO(n, \mathbb{C}) \to Aut(\mathbb{C}^n)$ standart temsil yardımıyla elde edilen asosye vektör demedi TM tanjant demedine izomorftur.*

Tanım 5.4.3 *$\rho : G \to Aut(V)$, G grubunun V vektör uzayı üzerinde bir temsili ve P nin G grubu üzerinde etkisi verilsin. $\phi : P \to V$ dönüşümü her $p \in P$ ve $g \in G$ için*

$$\phi(pg) = \rho(g^{-1})\phi(p)$$

koşulunu sağlıyorsa ϕ dönüşümüne G-equivaryant dönüşüm denir.

$P \times_\rho V$ asosye vektör demedinin kesitleri ile $P \to V$ equivaryant dönüşümler arasında aşağıdaki ilişki vardır.

Yardımcı Teorem 5.4.4 (P, M, G) *asli lif demedi ve* ρ *dönüşümü* G *Lie grubunun* V *vektör uzayı üzerine sol etkisi olmak üzere,* $P \times_\rho V$ *asosye vektör demedi olsun. Bu durumda* $P \times_\rho V$ *asosye vektör demedinin kesitleri ile* $P \to V$ *şeklindeki G-equivaryant düzgün dönüşümler arasında bire-bir eşleme vardır.*

Kanıt. $P \times_\rho V$ asosye vektör demedinin kesitlerinin G-equivaryant smooth dönüşümünü belirlediğini görelim. $U \subseteq M$ açık küme olmak üzere $s : U \to P \times_\rho V$ asosye vektör demedinin kesiti olsun. $p \in \mathcal{P}^{-1}(U)$ olsun. O zaman $\mathcal{P}(p) = x$ olmak üzere $s(x) = [p, v]$ dir. Şimdi

$$\begin{array}{rccl} \phi_s : & \mathcal{P}^{-1}(U) & \to & V \\ & p & \mapsto & \phi_s(p) = v \end{array}$$

olacak şekilde $\phi_s : \mathcal{P}^{-1}(U) \to V$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu tanımladığımız dönüşümün G-equivariant dönüşüm olduğunu gösterelim. $p \in \mathcal{P}^{-1}(U), g \in G$ için $\mathcal{P}(pg) = \mathcal{P}(p) = x$ olduğundan

$$s(x) = [p, \phi_s(p)] = [pg, \phi_s(pg)]$$

asosye vektör demedi arasındaki denklikten dolayı

$$\phi_s(pg) = \rho(g^{-1})\phi_s(p)$$

olması gerektiği elde edilir. O halde bu tanımladığımız ϕ_s dönüşümü G-equivariant dönüşümdür. Şimdi de $\phi : \mathcal{P}^{-1}(U) \to V$, G-equivariant dönüşüm olsun. Yani her $p \in \mathcal{P}^{-1}(U)$ ve $g \in G$ için

$$\phi(ug) = \rho(g^{-1})\phi(g)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda $s_\phi : U \to P \times_\rho V$ kesitini tanımlayalım. $x \in U, p \in \mathcal{P}^{-1}(x)$ iken

$$\begin{array}{rccl} s_\phi & U & \to & P \times_\rho V \\ & x & \mapsto & s_\phi(x) = [p, \phi(p)] \end{array}$$

şeklinde tanımlanan s_ϕ nin seçilen $p \in \mathcal{P}^{-1}(x)$ noktasından bağımsız olduğunu gösterelim. $p' \in \mathcal{P}^{-1}(x)$ alınırsa öyle bir $g \in G$ vardır ki $p' = pg$ dir.

$$s_\phi(x) = [p', \phi(p')] = [pg, \phi(pg)] = [pg, \rho(g^{-1})\phi(p)] = [p, \phi(p)]$$

olduğundan s_ϕ iyi tanımlıdır, yani p nin seçiminden bağımsızdır. Bu tanımlanan s_ϕ dönüşümünün kesit olduğu da gösterilebilir. ■

5.5 Asosye Vektör Demedi Üzerinde Mutlak Diferansiyel ve Kovaryant Türev

Bir asosye vektör demedi üzerinde farklı yöntemlerle kovaryant türev operatörü tanımlanmaktadır. Öncelikle [3] ve [19] da verilen yaklaşım ele alınmaktadır.

(P, X, G), G-asli lif demedi ve $\rho : G \to Aut(V)$, G nin V üzerindeki etkisi verilsin ($V = \mathbb{R}^k$ veya $\mathbb{C}^k$) ve ω, P_G asli lif demedi üzerinde konneksiyon formu olsun. Bu durumda Lie cebri elemanının, V elemanı üzerine etkisi aşağıdaki şekilde tanımlanır: her $A \in \mathfrak{g}$ ve $v \in V$ olmak üzere,

$$A \cdot v = \frac{d}{dt}(exp(tA) \cdot v)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\rho(exp(tA))(v)|_{t=0}$$

ile tanımlanan $\mathfrak{g}$ Lie cebri üzerindeki V nin etkisidir.

Dikkat edilirse, $\rho_{*Id} : \mathfrak{g} \to End(V)$, ρ nun birimdeki türev dönüşümü olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}(\rho(exp(tA))(v)|_{t=0} = \rho_{*Id}(A)(v)$$

dir.

G matris Lie grubu ise bu çarpma aslında matrislerin çarpımına denk gelir. G nin bu etkisi yardımıyla $E = P \times_\rho V$ asosye vektör demedi elde edilir. Bu vektör demedinin kesitlerinin $P \to V$ şeklindeki equivaryant dönüşümler olarak düşünülebileceği gösterilmişti. $\psi : P \to V$ equivaryant dönüşüm ve ω, $\mathfrak{g}$-değerli konneksiyon $1-$formu ise $\omega \cdot \psi$, V değerli 1-formu, $p \in P$ ve $v \in T_pP$ için

$$(\omega \cdot \psi)_p(v) = \omega_p(v) \cdot \psi(p)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.5.1 *$\psi : P \to V$ equivaryant dönüşüm olsun. $p \in P$ ve $v \in T_pP$ için v^h, v nin horizontal kısmı olmak üzere*

$$(d^\omega \psi)_p(v) = (d\psi)_p(v^h)$$

şeklinde tanımlanan d^ω dönüşümüne ψ nin mutlak diferansiyeli veya dış kovaryant türevi denir.

Bir ψ equivaryant dönüşümün mutlak diferansiyelinin tanımdan hareketle hesaplanması zordur. Bu iş için aşağıdaki teorem oldukça kullanışlıdır.

Teorem 5.5.2 *$\psi : P \to V$ equivaryant dönüşüm ve ω, P üzerinde konneksiyon $1-$formu olmak üzere*

$$d^\omega \psi = d\psi + \omega \cdot \psi \tag{5.5.1}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. Bu eşitliği göstermek için $p \in P$ ve $v \in T_pP$ için

$$(d\psi)_p(v^h) = (d\psi)_p(v) + \omega_p(v) \cdot \psi(p) \tag{5.5.2}$$

eşitliğini göstermek yeterlidir. Her iki taraf v ye göre lineer ve

$$T_pP = Hor_pP \oplus Ver_pP$$

olduğundan v nin dikey ve yatay kısımları üzerinde eşitliğin geçerli olduğunu göstermek yeterlidir.

i. v yatay uzayda olsun. Yani $v = v^h$ olsun. O zaman, $\omega_p(v^h) = 0$ olduğundan eşitlik sağlanır.

ii. v dikey uzayda olsun. Yani $v = v^v$ olsun. O zaman $v^h = 0$ olcağından eşitliğin sol tarafı 0 dır. Ayrıca bazı $A \in \mathfrak{g}$ için $v = A^\sharp(p)$ dir.

$$(d\psi)_p(v) = (d\psi)_p(A^\sharp(p)) = A^\sharp(\psi)(p)$$

ve

$$\omega_p(v) = \omega_p(A^\sharp(p)) = A$$

olduğundan eşitliğin sağlanması için

$$A^\sharp(\psi)(p) = -A \cdot \psi(p)$$

eşitliğinin gösterilmesi yeterlidir. Şimdi $A^\sharp(\psi)(p)$ yi hesaplayalım. Bunun için

$$\beta(t) = p\exp(tA)$$

eğrisi alınırsa $\beta(0) = p$ ve $\beta'(0) = A^\sharp(p)$ olur. Bu durumda

$$A^\sharp(\psi)(p) = A^\sharp(p)(\psi) = \beta'(0)(\psi) = (\psi \circ \beta)'(0)$$

olur.

$$(\psi \circ \beta)(t) = \psi(\beta(t)) = \psi(p\exp(tA)) = \exp(-tA)\psi(p) = -\exp(tA)\psi(p)$$

eşitliğinden $(\psi \circ \beta)'(0) = -A \cdot \psi(p)$ elde edilir.

O halde (5.5.1) eşitliği gösterilmiş olur. ■

$d^\omega\psi$ kovaryant türevini koordinatlarda yazmak için demedin yerel kesiti veya trivilizasyonu seçilmelidir. $U_\alpha \subset X$ olmak üzere $s_\alpha : U_\alpha \to \mathcal{P}^{-1}(U_\alpha)$ kesitini alalım. O zaman (5.5.1) ifadesi koordinatlarda

$$s_\alpha{}^*(d^\omega\psi) = s_\alpha{}^*(d\psi + \omega\cdot\psi) = s_\alpha{}^*(d\psi) + s_\alpha{}^*(\omega\cdot\psi) = d(\psi \circ s_\alpha) + (s_\alpha{}^*\omega)\cdot(\psi \circ s_\alpha) \tag{5.5.3}$$

şeklindedir. U_α üzerindeki $s_\alpha{}^*\omega$ ayar potensiyelleri $\mathcal{A}_\alpha$ ile gösterilirse,

$$s_\alpha{}^*(d^\omega\psi) = d(\psi \circ s_\alpha) + \mathcal{A}_\alpha \cdot (\psi \circ s_\alpha) \tag{5.5.4}$$

şeklinde yazılır.

Şimdi $E = P \times_\rho V$ asosye vektör demedi üzerinde ω yardımıyla bir ∇ kovaryant türev operatörü tanımlamak istiyoruz.

$X \in \Gamma(TM)$ ve $\psi \in \Gamma(E)$ olmak üzere

$$\nabla_X\psi = d^\omega\psi(X^*)$$

eşitliği ile verilen ∇ dönüşümü bir konneksiyondur [3]. Burada X^*, X vektör alanının yatay kaldırılmışıdır.

Tanım 5.5.3 *Yukarıda verilen ∇ konneksiyonuna $E = P \times_\rho V$ üzerinde ω tarafından belirlenen konneksiyon denir.*

(İleriki bölümlerde spinor demedi üzerinde bu yaklaşımla konneksiyon tanımlanacaktır.)

Bu E üzerindeki ∇ nın lokal koordinatlardaki ifadesi, aşağıdaki şekilde olur: $U_\alpha \subset M$, $s_\alpha : U_\alpha \to P$ ve X, U_α üzerinde bir vektör alanı olmak üzere

$$\nabla_X \psi = d\psi_\alpha(X) + \mathcal{A}_\alpha(X) \cdot \psi_\alpha$$

olur. Burada $\psi_\alpha = \psi \circ s_\alpha : U_\alpha \to V$ ve $\mathcal{A}_\alpha(X) \cdot \psi_\alpha = \rho_{*Id}(\mathcal{A}_\alpha(X))(\psi_\alpha)$ dir. Daha açık olarak yazılırsa,

$$\nabla_X \psi = d\psi_\alpha(X) + \rho_{*Id}(\mathcal{A}_\alpha(X))(\psi_\alpha) \tag{5.5.5}$$

olur.

$E = P \times_\rho V$ üzerindeki ∇ kovaryant türevi [21] de aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır. $\psi \in \Gamma(S), X \in \Gamma(TM)$ olmak üzere $\nabla_X \psi$ denklik sınıfları yardımıyla

$$\nabla_X \psi = [s_\alpha, d\psi_\alpha(X) + \mathcal{A}_\alpha(X) \cdot \psi_\alpha] \tag{5.5.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $U_\alpha \subset M$, $s_\alpha : U_\alpha \to P$ lokal kesittir.

Bu tanımlamanın seçilen kesitten bağımsız olduğu ispatlanabilir.

6 KAHLER NORDEN MANİFOLDLARI

6.1 Kahler Norden manifoldu ve Kompleks Riemann Manifoldu

M manifoldunun yapı grubu $GL(n,\mathbb{C})$ ise M manifolduna yaklaşık kompleks manifold denir. Bu durumda M manifoldu J yaklaşık kompleks yapısı ile donatılabilir. Burada J, $J^2 = -Id$ koşulunu sağlayan $J : TM \to TM$ şeklinde bir demet dönüşümüdür.

Tanım 6.1.1 *M, $2n$-boyutlu J yaklaşık kompleks yapı ile diferansillenebilir manifold ve (n,n) tipinde g metriği ile yarı-Riemann manifoldu olsun ve ∇, M manifoldu üzerinde g metriğine karşılık gelen Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere, her $X, Y \in \chi(M)$ için*

$$\begin{aligned} &g(JX, JY) = -g(X,Y) \\ &\nabla J = 0 \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda (M, J, g) manifolduna Kahler-Norden manifoldu denir.

Literatürde bu tür manifoldlar Anti-Kahlerian manifoldları, Norden metrik ile Kahler manifoldları şeklinde çalışılmaktadır([8, 10, 22–24]).

Bir Kahler Norden manifoldunun yapı grubu $O(n,\mathbb{C})$ dir. Başka bir deyişle (M, J, g) Kahler Norden manifoldu ise TM tanjant demedinin öyle triviliza-syon komşulukları vardır ki $U \subset M$ üzerinde $\{X_1, \ldots, X_n, JX_1, \ldots, JX_n\}$ tipinde ortonormal çatı vardır öyle ki $g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$, $g(X_i, JX_j) = 0$ koşulları sağlanır.

Teorem 6.1.2 *(M, J, g) Kahler-Norden manifoldu olsun. M manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu $O(n,\mathbb{C})$-konneksiyonudur.*

Kanıt. $\{X_1, X_2, \ldots, X_n, JX_1, JX_2, \ldots, JX_n\}$ ortonormal çatı alanı olsun. $X \in \chi(M)$ keyfi vektör alanı olmak üzere

$$\nabla_X X_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}(X) X_i + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{w}_{ij}(X) JX_i$$

şeklinde yazılabilir. $\nabla J = 0$ olduğundan $\nabla_X JX_j = J(\nabla_X X_j)$ olur. O zaman,

$$\nabla_X JX_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}(X) JX_i - \sum_{i=1}^{n} \widetilde{w}_{ij}(X) X_i$$

olacağından konneksiyon formunun matrisi,

$$\begin{pmatrix} w_{11}(X) & \cdots & w_{1n}(X) & -\widetilde{w}_{11}(X) & \cdots & -\widetilde{w}_{1n}(X) \\ \vdots & & \vdots & & & \\ w_{n1}(X) & & w_{nn}(X) & -\widetilde{w}_{n1}(X) & & -\widetilde{w}_{nn}(X) \\ \widetilde{w}_{11}(X) & \cdots & \widetilde{w}_{1n}(X) & w_{11}(X) & & w_{1n}(X) \\ \vdots & & & & & \\ \widetilde{w}_{n1}(X) & \cdots & \widetilde{w}_{nn}(X) & w_{n1}(X) & \cdots & w_{nn}(X) \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Burada

$$A = \begin{pmatrix} w_{11}(X) & \cdots & w_{1n}(X) \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n1}(X) & & w_{nn}(X) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -\widetilde{w}_{11}(X) & \cdots & -\widetilde{w}_{1n}(X) \\ \vdots & & \vdots \\ -\widetilde{w}_{n1}(X) & \cdots & -\widetilde{w}_{nn}(X) \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa konneksiyon formunun matrisi

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R})$$

şeklindedir. Buradan $A + iB \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ elde edilir. Metrik uyumluluk koşulundan,

$$\begin{aligned} 0 = Xg(X_i, X_j) &= g(\nabla_X X_i, X_j) + g(X_i, \nabla_X X_j) \\ &= g(\textstyle\sum_{k=1}^{n} w_{ki}(X) X_k + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{w}_{ki}(X) JX_k, X_j) + \\ &\quad g(X_i, \textstyle\sum_{k=1}^{n} w_{kj}(X) X_k + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{w}_{kj}(X) JX_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} w_{ki}(X) g(X_k, X_j) + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{w}_{ki}(X) g(JX_k, X_j) + \\ &\quad \textstyle\sum_{k=1}^{n} w_{kj}(X) g(X_i, X_k) + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{w}_{kj}(X) g(X_i, JX_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} w_{ki}(X) \delta_{kj} + \sum_{k=1}^{n} w_{kj}(X) \delta_{ki} \\ &= w_{ji}(X) + w_{ij}(X) \end{aligned}$$

eşitliklerinden $w_{ij} = -w_{ji}$ elde edilir. O halde A matrisi anti-simetriktir ($A^t = -A$). Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
0 = Xg(X_i, JX_j) &= g(\nabla_X X_i, JX_j) + g(X_i, \nabla_X JX_j) \\
&= g(\textstyle\sum_{k=1}^n w_{ki}(X)X_k + \sum_{k=1}^n \widetilde{w}_{ki}(X)JX_k, JX_j) + \\
&\quad g(X_i, \textstyle\sum_{k=1}^n w_{kj}(X)X_k + \sum_{k=1}^n \widetilde{w}_{kj}(X)JX_k) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^n w_{ki}(X)g(X_k, JX_j) + \sum_{k=1}^n \widetilde{w}_{ki}(X)g(JX_k, JX_j) + \\
&\quad \textstyle\sum_{k=1}^n w_{kj}(X)g(X_i, X_k) + \sum_{k=1}^n \widetilde{w}_{kj}(X)g(X_i, JX_k) \\
&= -\textstyle\sum_{k=1}^n \widetilde{w}_{ki}(X)\delta_{kj} - \sum_{k=1}^n \widetilde{w}_{kj}(X)\delta_{ki} \\
&= -\widetilde{w}_{ji}(X) - \widetilde{w}_{ij}(X)
\end{aligned}$$

eşitliğinden $\widetilde{w}_{ij} = -\widetilde{w}_{ji}$ olduğu yani B matrisinin anti-simetrik olduğu elde edilir ($B^t = -B$). O halde konneksiyon formu

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R})$$

şeklindedir. Bunu da kompleks olarak düşünülürse $A + iB \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ dir.

$$(A + iB)^t = A^t + iB^t = -A - iB$$

olduğundan konneksiyon formu anti-simetriktir. Yani konneksiyon formu $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ de düşünüldüğünde, anti-simetriktir.

■

M, $n-$boyutlu kompleks manifold olsun. M kompleks manifold ise 2n-boyutlu reel manifolddur ve kompleks yapıdan gelen J yaklaşık kompleks yapısı vardır. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayını T_pM, tanjant uzayının kompleksleştirilmişini $T_p^{\mathbb{C}}M$ ile gösterelim. $T_p^{\mathbb{C}}M$ kompleks tanjant uzayı iki alt uzaya parçalanabilir: $J : T^{\mathbb{C}}M \to T^{\mathbb{C}}M$ ve $J^2 = -1$ olduğundan J dönüşümünün özdeğerleri i ve $-i$ dir. i özdeğerine karşılık gelen özuzay $T_p^{(1,0)}M$, $-i$ özdeğerine karşılık gelen özuzay $T_p^{(0,1)}M$ ile gösterilirse,

$$T_p^{\mathbb{C}}M = T_p^{(1,0)}M \oplus T_p^{(0,1)}M$$

şeklinde yazılabilir.

$\chi^{\mathbb{C}}(M)$ ile kompleks vektör alanlarını , $\chi^{(1,0)}(M)$ ile (1,0) tipinde kompleks vektör alanlarını ve $\chi^{(0,1)}(M)$ ile $(0,1)-$tipinde kompleks vektör alanlarını gösterelim.

Tanım 6.1.3 *[5] M kompleks manifold olsun. M üzerinde kompleks Riemann metrik* $(0,2)$ *tipinde bir G tensör alanıdır öyleki M nin her noktasında non-dejeneredir ve*

$$\begin{aligned} &G(\overline{Z_1},\overline{Z_2}) = \overline{G(Z_1,Z_2)} && Z_1,Z_2 \in \chi^{\mathbb{C}}(M) \\ &G(Z_1,Z_2) = 0 && Z_1 \in \chi^{1,0}(M), Z_2 \in \chi^{0,1}(M) \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

koşullarını sağlar.

Burada $Z_1 \in \chi^{(1,0)}(M), Z_2 \in \chi^{(0,1)}(M)$ için $G(Z_1,Z_2) = 0$ koşulu $Z_1, Z_2 \in \chi^{\mathbb{C}}(M)$ için

$$G(JZ_1, JZ_2) = -G(Z_1,Z_2)$$

koşuluna denktir. Böylece bir kompleks Riemann metrik $\chi^{(1,0)}(M)$ deki değerleri ile tek türlü belirlidir.

Tanım 6.1.4 *G, M kompleks manifoldu üzerinde kompleks Riemann metrik ise* (M,G) *çiftine kompleks Riemann manifold denir.*

Kompleks Riemann manifoldları ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için [5] bakınız.

(M,G) kompleks Riemann manifoldu verildiğinde, M manifoldu üzerindeki G kompleks Riemann metriği, (n,n) tipinde g yarı-Riemann metriğini belirler. Böylece her n boyutlu (M,G) kompleks Riemann manifoldu, J yaklaşık kompleks yapısı ve $(n,n)-$tipinde olan, $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$g(JX,JY) = -g(X,Y)$$

koşulunu sağlayan $2n-$boyutlu reel (M,J,g) manifoldu olarak düşünülebilir. Yani (M,J,g) üçlüsü, aslında (M,G) kompleks Riemann manifoldunun reelleştirilmişidir.

Tanım 6.1.5 *[5] (M, G) kompleks Riemann manifoldu olsun. G kompleks Riemann metriğine karşılık gelen Levi-Civita konneksiyonu ∇ olmak üzere $\nabla J = 0$ ise (M, G) kompleks Riemann manifolduna holomorfik Riemann manifoldu denir.*

Önerme 6.1.6 *[7] (M, J, g) nin Kahler-Norden Manifoldu olması için gerek ve yeter koşul (M, G) nin Holomorfik Riemann Manifoldu olmasıdır.*

Kanıt. (M, J, g) Kahler-Norden Manifoldu ise (6.1.1) koşulları geçerlidir. Ayrıca $\nabla J = 0$ koşulundan dolayı M manifoldu holomorfik Riemann manifoldudur. $X \in \chi(M)$ ise $\widehat{X} = \frac{1}{2}(X - iJX) \in \chi^{(1,0)}(M)$ dir. Eğer $Z \in \chi^{(1,0)}(M)$ ise öyle bir $X \in \chi(M)$ vektör alanı vardır ki $Z = \frac{1}{2}(X - iJX)$dir. Çünkü $Z \in \chi^{(1,0)}(M)$ ise $JZ = iZ$ dir.

$$
\begin{aligned}
J(X + iY) &= i(X + iY) \\
JX + iJY &= iX - Y
\end{aligned}
$$

olduğundan $JX = -Y$ ve $JY = X$ eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla $Z = X - iJX$ olur. M kompleks manifoldu üzerinde

$$
G(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \frac{1}{2}(g(X, Y) - ig(X, JY))
$$

şeklinde tanımlanan G metriği, (6.1.2) koşullarını da sağlar.

Tersine (M, G) holomorfik Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M kompleks manifold olduğundan J yaklaşık kompleks yapısına sahiptir. M üzerindeki g metriğini

$$
g(X, Y) := 2Re(G(\widehat{X}, \widehat{Y}))
$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda g metriği, (6.1.1) deki 1. koşulu sağlar. M holomorfik Riemann manifoldu olduğundan $\nabla J = 0$ dır. Dolayısıyla bu tanımlanan g metriği, Kahler Norden metriğidir. ∎

6.2 Kahler Norden Manifoldları Üzerinde Bazı Diferansiyel Operatörler

(M, J, g) Kahler Norden manifoldu ve ∇, M üzerinde bir konneksiyon olsun. Bu durumda, $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

ile tanımlanan $(1,3)$ tipindeki tensör alanına ∇ nın eğriliği denir.

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

ile tanımlanan $(1,2)$ tipindeki tensör alanına burulma denir. Eğrilik tensörü ile burulma tensörü arasında aşağıdaki ilişki vardır:

Yardımcı Teorem 6.2.1 *[21] $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için*

$$\begin{aligned} &R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = \\ &(\nabla_X T)(Y,Z) + (\nabla_Y T)(Z,X) + (\nabla_Z T)(X,Y) \\ &+T(T(X,Y),Z) + T(T(Y,Z),X) + T(T(Z,X),Y) \end{aligned}$$

eşitliği vardır.

∇ konneksiyonu, burulmasız konneksiyon ise R Bianchi eşitliğini sağlar. Yani,

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

eşitliği sağlanır.

Önerme 6.2.2 *M üzerindeki ∇ Levi-Civita konneksiyonu için, $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \chi(M)$ olmak üzere,*

$$g(R(X_1,X_2)X_3,X_4) = -g(R(X_2,X_1)X_3,X_4)$$

$$g(R(X_1,X_2)X_3,X_4) = -g(R(X_1,X_2)X_4,X_3)$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt. Önce birinci eşitliği gösterelim. Eğrilik tensörünün sağladığı

$$R(X_1, X_2) = -R(X_2, X_1)$$

eşitliğinden dolayı birinci eşitlik görülür. İkinci eşitlik için g yarı-Riemann metriği olduğundan Levi-Civita konneksiyonunun metrik uyumluluk koşulundan

$$g(R(X_1, X_2)X_3, X_4) = -g(R(X_1, X_2)X_4, X_3)$$

eşitliğinin geçerli olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla ikinci eşitlikte sağlanmış olur. ■

Önerme 6.2.3 (M, J, g) *Kahler Norden manifoldu ve* ∇*, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda,* $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \chi(M)$ *olmak üzere,*

$$g(R(X_1, X_2)JX_3, JX_4) = -g(R(X_1, X_2)X_3, X_4)$$

$$g(R(X_1, X_2)JX_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)JX_4, X_3)$$

eşitlikleri vardır.

Kanıt. $\nabla J = 0$ olduğundan $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X, Y) \circ J = J \circ R(X, Y)$$

eşitliği geçerlidir.

$$\begin{aligned} g(R(X_1, X_2)JX_3, JX_4) &= g(J(R(X_1, X_2)X_3), JX_4) \\ &= -g(R(X_1, X_2)X_3, X_4) \end{aligned}$$

Önceki önermenin (2) kısmından dolayı

$$g(R(X_1, X_2)JX_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, JX_4) = -g(R(X_1, X_2)JX_4, X_3)$$

eşitlikleri geçerlidir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Önerme 6.2.4 (M, J, g) *Kahler Norden manifoldu ve* ∇*, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda,* $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \chi(M)$ *olmak üzere,* $\nabla_{JX} Y = J \nabla_X Y$ *eşitliği sağlanıyorsa,*

$$\begin{aligned} g(R(JX_1, X_2)X_3, X_4) &= g(R(X_1, JX_2)X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)JX_3, X_4) \\ &= g(R(X_1, X_2)X_3, JX_4) \end{aligned}$$

eşitliği vardır.

Kanıt. $\nabla_{JX}Y = J\nabla_X Y$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
[JX,Y] &= \nabla_{JX}Y - \nabla_Y JX \\
&= J\nabla_X Y - J\nabla_Y X \\
&= J(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= J[X,Y]
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
[X,JY] &= \nabla_X JY - \nabla_J YX \\
&= J\nabla_X Y - J\nabla_Y X \\
&= J(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= J[X,Y]
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Ayrıca $R(X,Y)JZ = JR(X,Y)Z$ olduğunu biliyoruz. Yukarıda elde edilen eşitlikler de kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
R(JX,Y)Z &= \nabla_{JX}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_J XZ - \nabla_{[JX,Y]}Z \\
&= J\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y J\nabla_X Z - \nabla_{J[X,Y]}Z \\
&= J\nabla_X\nabla_Y Z - J\nabla_Y\nabla_X Z - J\nabla_{[X,Y]}Z \\
&= J(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) \\
&= J(R(X,Y)Z)
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $R(X,JY)Z = J(R(X,Y)Z)$ eşitliği de görülebilir. Bu eşitliklerden,

$$\begin{aligned}
g(R(JX_1,X_2)X_3,X_4) &= g(JR(X_1,X_2)X_3,X_4) \\
&= g(R(X_1,X_2)X_3,JX_4)
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
g(R(X_1,JX_2)X_3,X_4) &= g(JR(X_1,X_2)X_3,X_4) \\
&= g(R(X_1,X_2)X_3,JX_4)
\end{aligned}$$

olur. Daha önceden $g(R(X_1,X_2)JX_3,X_4) = g(R(X_1,X_2)X_3,JX_4)$ olduğunu biliyoruz. O halde tüm istenilen eşitlikler gösterilmiş olur. ■

Tanım 6.2.5 *$f \in C^{\infty}(M)$ olmak üzere, df, 1-formuna metrik olarak denk olan, yani, her $X \in \chi(M)$ için*

$$g(grad\ f, X) = df(X) = Xf$$

eşitliğini sağlayan (grad f) vektör alanına f fonksiyonunun gradyenti denir.

Teorem 6.2.6 *(M, J, g) Kahler Norden manifoldu olsun. $\{e_1, \ldots, e_n, f_1 = Je_1, \ldots, f_n = Je_n\}$ çatı alanı için f fonksiyonunun gradyentinin lokal ifadesi,*

$$grad\ f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i - f_i(f)f_i \tag{6.2.1}$$

şeklindedir.

Tanım 6.2.7 *$X \in \Gamma(TM)$ için*

$$div(X) = tr(\nabla X)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme diverjans dönüşümü denir.

$\{e_1, \ldots, e_n, f_1 = Je_1, \ldots, f_n = Je_n\}$ çatısı kullanılarak diverjans dönüşümünün lokal ifadesi aşağıdaki şekilde olur.

Yardımcı Teorem 6.2.8 *$X \in \Gamma(TM)$ için*

$$div(X) = \sum_{j=1}^{n} (g(e_j, \nabla_{e_j} X) - g(f_j, \nabla_{f_j} X)) \tag{6.2.2}$$

şeklindedir.

Kanıt.

$$\begin{aligned} div(X) &= \sum_{j=1}^{n} (\nabla X)(e_j^*, e_j) + (\nabla X)(f_j^*, f_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\nabla_{e_j} X)(e_j^*) + (\nabla_{f_j} X)(f_j^*) \\ &= \sum_{j=1}^{n} g(e_j, \nabla_{e_j} X) - g(f_j, \nabla_{f_j} X) \end{aligned}$$

■

Tanım 6.2.9 *$X, Y \in \Gamma(TM)$ için,*

$$Ric(X,Y) = tr(Z \mapsto R(Z,X)Y)$$

şeklinde tanımlanan M üzerindeki $(0,2)-$tipindeki tensör alanına Ricci tensörü denir.

Şimdi $\{e_1, \ldots, e_n, f_1 = Je_1, \ldots, f_n = Je_n\}$ çatısını kullanarak Ricci tensörünün açık ifadesi aşağıdaki gibidir.

Yardımcı Teorem 6.2.10 *$X, Y \in \Gamma(TM)$ için,*

$$Ric(X,Y) = \sum_{j=1}^{n}(g(R(e_j,X)Y,e_j) - g(R(f_j,X)Y,f_j)) \tag{6.2.3}$$

şeklindedir.

Kanıt.

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_{j=1}^{n}(e_j^* R(e_j,X)Y + f_j^* R(f_j,X)Y) \\ &= \sum_{j=1}^{n} g(R(e_j,X)Y,e_j) - g(R(f_j,X)Y,f_j) \end{aligned}$$

olur. ■

Ayrıca Ricci eğriliği $(1,1)$ tipinde simetrik tensör olarak da düşünülebilir. Yani,

$$g(Ric(X),Y) = Ric(X,Y)$$

eşitliğini sağlayan $Ric : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ şeklinde bir dönüşüm olarak da tanımlanır. Bu durumda Ricci eğriliğinin lokal ifadesi,

$$Ric(X) = \sum_{j=1}^{n}(R(X,e_j)e_j - R(X,f_j)f_j) \tag{6.2.4}$$

şeklindedir.

Tanım 6.2.11 *M manifoldunun R skalar eğriliği, simetrik $(1,1)$ tipinde tensör olan Ricci eğriliğinin izi olarak tanımlanır. Yani, $R = tr(Ric)$ dir.*

Önerme 6.2.12 *$\{e_1, \ldots, e_n, f_1 = Je_1, \ldots, f_n = Je_n\}$ çatı alanı olmak üzere,*

$$R = \sum_{j=1}^{n} (Ric(e_j, e_j) - Ric(f_j, f_j)) \tag{6.2.5}$$

şeklindedir.

Kanıt.

$$\begin{aligned} R &= tr(Ric) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (e_j^*(Ric(e_j)) + f_j^*(Ric(f_j))) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (g(Ric(e_j), e_j) - g(Ric(f_j), f_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (Ric(e_j, e_j) - Ric(f_j, f_j)) \end{aligned}$$

■

R skalar eğriliğinin, eğrilik tensörü ve g yarı-Riemann metriği cinsinden ifadesini elde edelim: Önerme (6.2.12) ve (6.2.3) eşitliğinden dolayı,

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^{n} (Ric(e_i, e_i) - Ric(f_i, f_i)) \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} g(R(e_i, e_k)e_k, e_i) - g(R(f_i, e_k)e_k, f_i) \\ &\quad -g(R(e_i, f_k)f_k, e_i) + g(R(f_i, f_k)f_k, f_i) \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

olur.

7 KAHLER NORDEN SPİN MANİFOLDU

7.1 Spin Manifoldları

Tanım 7.1.1 *M, n boyutlu yönlendirilebilir Riemann manifold olsun. Bu durumda TM tanjant demedinin $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ demet kartları vardır. Bu kartlara karşılık gelen geçiş fonksiyonları $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ iken $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to SO(n)$ şeklindeki düzgün fonksiyonlardır. Buna ilaveten $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ iken*

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Spin(n)$$

düzgün fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde mevcut olsun.

i.

$$\begin{tikzcd} & Spin(n) \arrow[d, "\lambda"', "2:1"] \\ U_\alpha \cap U_\beta \arrow[ur, "\widetilde{g}_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "g_{\alpha\beta}"'] & SO(n) \end{tikzcd}$$

diagramı değişmelidir yani $\lambda \circ \widetilde{g}_{\alpha\beta}$ dir.

ii. $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ iken her $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ için $\widetilde{g}_{\alpha\beta}(x) \circ \widetilde{g}_{\beta\gamma}(x) = \widetilde{g}_{\alpha\gamma}(x)$ dir.

Bu durumda M ye spin manifoldu denir. (Bazen M manifoldu spin yapısına sahiptir denir.)

M spin manifoldu ise asli lif demedi kurma teoremini (Teorem 5.3.2) kullanarak M üzerinde 2 tane asli lif demedi inşa edilebilir.

* Eğer $g_{\alpha\beta}$ fonksiyonları kullanılırsa daha önce işaret edildiği üzere bu demet $P_{SO(n)}$ dir.
* Eğer $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ fonksiyonları kullanılırsa $P_{Spin(n)}$ asli lif demedi inşa edilebilir.
* Bu iki demet arasında $\Lambda : P_{Spin(n)} \to P_{SO(n)}$ $2:1$ demet dönüşümü vardır. Bu dönüşüm lokal diffeomorfizmdir.

Bir M manifoldu üzerindeki spinor demedi $\kappa_n : Spin(n) \to Aut(\Delta_n)$ spinor temsili olmak üzere $S = P_{Spin(n)} \times_{\kappa_n} \Delta_n$ şeklindeki asosye vektör demedi olarak tanımlanır. Bu S nin kesitlerine de M üzerinde spinor alanları denir.

S üzerinde diferansiyel geometri yapılırken aşağıdaki adımlar izlenir:

* M üzerinde ∇^g Levi-Civita konneksiyonu yardımıyla S üzerinde ∇ konneksiyonu elde edilir.

* M üzerindeki bir vektör alanı ile bir spinor alanının Clifford çarpımı tanımlanır.

* S üzerinde D Dirac operatörü tanımlanır.

Spin^c manifoldları da spin manifoldlarına benzer şekilde tanımlanır [3].

Dikkat edilirse spin manifoldu tanımlanmasında $\lambda : Spin(n) \to SO(n)$ $2:1$ dönüşümü önemli rol oynamaktadır. Hatırlanacağı üzere Bölüm 4 te $\lambda : Spin(n, \mathbb{C}) \to SO(n, \mathbb{C})$ dönüşümü $2:1$ grup homomorfizmiydi. Bizim amacımız bu homomorfizmi kullanarak yukarıdaki duruma benzer bir yapı tanımlamaktır. (Yukarıdaki duruma klasik durum diyeceğiz.)

7.2 Kahler Norden Spin Manifoldu

Tanım 7.2.1 (M, J, g) *Kahler Norden manifoldu olsun. TM tanjant demedinin öyle bir $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ demet atlası olsun ki $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ iken karşılık gelen geçiş fonksiyonları $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to SO(n, \mathbb{C})$ şeklindeki düzgün fonksiyonlar olsun. Ayrıca $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ iken*

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Spin(n, \mathbb{C})$$

düzgün fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde mevcut olsun.

i.

$$\begin{tikzcd} & Spin(n,\mathbb{C}) \arrow[d, "\lambda"', "2:1"] \\ U_\alpha \cap U_\beta \arrow[ur, "\widetilde{g}_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "g_{\alpha\beta}"'] & SO(n,\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

diagramı değişmelidir yani $\lambda \circ \widetilde{g}_{\alpha\beta}$ dir.

ii. $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ *iken her* $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ *için* $\widetilde{g}_{\alpha\beta}(x) \circ \widetilde{g}_{\beta\gamma}(x) = \widetilde{g}_{\alpha\gamma}(x)$ *dir.*

Bu durumda M ye Kahler Norden spin manifoldu denir.

M Kahler Norden spin manifoldu ise asli lif demedi kurma teoremini(Teorem 5.3.2) kullanarak M üzerinde 2 tane asli lif demedi inşa edilebilir.

* Eğer $g_{\alpha\beta}$ fonksiyonları kullanılırsa daha önce işaret edildiği üzere bu demet $P_{SO(n,\mathbb{C})}$ dir.

* Eğer $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ fonksiyonları kullanılırsa $P_{Spin(n,\mathbb{C})}$ asli lif demedi inşa edilebilir.

* Bu iki demet arasında $\Lambda : P_{Spin(n,\mathbb{C})} \to P_{SO(n,\mathbb{C})}$ 2 : 1 demet dönüşümü vardır. Bu dönüşüm lokal diffeomorfizmdir.

Bir M Kahler Norden manifoldu üzerindeki spinor demedi $\kappa_n : Spin(n,\mathbb{C}) \to Aut(\Delta_n)$ spinor temsili olmak üzere $S = P_{Spin(n,\mathbb{C})} \times_{\kappa_n} \Delta_n$ şeklindeki asosye vektör demedi olarak tanımlanır. Bu S nin kesitlerine de M üzerinde spinor alanları denir.

Klasik durum için yukarıda sıralanan üç adım Kahler Norden spin manifoldları için gerçekleştirilecektir.

7.3 $P_{Spin(n,\mathbb{C})}$ Üzerinde Konneksiyon 1-formu

(M, J, g) Kahler Norden spin manifoldu ise M üzerindeki ∇^g Levi-Civita konneksiyonu Teorem (6.1.2) den $O(n,\mathbb{C})$ konneksiyondur. Yani ∇^g nin konneksiyon formları $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})(= \mathfrak{o}(n,\mathbb{C}))$ de değer alır. ∇^g nin U_α üzerindeki konneksiyon formları ω_α ise bu formlar yardımıyla $P_{SO(n,\mathbb{C})}$ üzerinde bir ω konneksiyon $1-$ formu tanımlanmıştı. Bu ω yardımıyla $P_{Spin(n,\mathbb{C})}$ üzerinde $\mathfrak{spin}(n,\mathbb{C})$ değerli bir $\widetilde{\omega}$ konnkesiyon $1-$ formu tanımlanabilir.

$$\begin{array}{ccc} TP_{Spin(n,\mathbb{C})} & \xrightarrow{\widetilde{\omega}} & \mathfrak{spin}(n,\mathbb{C}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Lambda_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \lambda_*} \\ TP_{SO(n,\mathbb{C})} & \xrightarrow[\omega]{} & \mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) \end{array}$$

$p \in P_{Spin}(n,\mathbb{C})$, $v \in T_pP_{Spin(n,\mathbb{C})}$ için

$$\widetilde{\omega}_p(v) = \lambda_*^{-1} \circ \omega_{\Lambda(p)} \circ \Lambda_{*p}(v)$$

şeklinde tanımlanır [3, 21].

Teorem 7.3.1 $P_{SO(n,\mathbb{C})}$ *asli lif demedinin* ∇^g *ye karşılık gelen* ω *nın ayar potensiyelleri*

$$\mathcal{A}_\alpha(W) = \sum_{i<j}(w_{ij}(W) - i\widetilde{w}_{ij}(W))E_{ij} \tag{7.3.1}$$

dir.

Kanıt. $U_\alpha \subset M$ olmak üzere TM tanjant demedinin $\mathcal{A}_\alpha$ konneksiyon formu aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$\{X_1, X_2, \ldots, X_n, JX_1, JX_2, \ldots, JX_n\}$ ortonormal çatı alanı olsun. $W \in \Gamma(TU_\alpha)$ olsun. Bu durumda $W = W^aX_a + \widetilde{W^a}JX_a$ yazılabilir.

$$\begin{aligned} \nabla_W X_j &= \textstyle\sum_{a=1}^n W^a\nabla_{X_a}X_j + \widetilde{W^a}\nabla_{JX_a}X_j \\ &= \textstyle\sum_{a=1}^n W^a(\Gamma^i_{aj}X_i + \widetilde{\Gamma}^i_{aj}JX_i) + \widetilde{W}^a(\gamma^i_{aj}X_i + \widetilde{\gamma}^i_{aj}JX_i) \\ &= \textstyle\sum_{a=1}^n (W^a\Gamma^i_{aj} + \widetilde{W}^a\gamma^i_{aj})X_i + (W^a\widetilde{\Gamma}^i_{aj} + \widetilde{W}^a\widetilde{\gamma}^i_{aj})JX_i \end{aligned}$$

Burada

$$w_{ij}(W) = \sum_{a=1}^n W^a\Gamma^i_{aj} + \widetilde{W}^a\gamma^i_{aj}$$

$$\widetilde{w}_{ij}(W) = \sum_{a=1}^n W^a\widetilde{\Gamma}^i_{aj} + \widetilde{W}^a\widetilde{\gamma}^i_{aj}$$

denilirse konneksiyon formu $\mathcal{A}_\alpha = (w_{ij} - i\widetilde{w}_{ij})E_{ij}$ şeklinde yazılabilir. E_{ij} ler $O(n,\mathbb{C})$ nin tabanı olmak üzere

$$\mathcal{A}_\alpha(W) = \sum_{i<j}(w_{ij}(W) - i\widetilde{w}_{ij}(W))E_{ij}$$

şeklinde konneksiyon formu yazılabilir. $\mathcal{A}_\alpha$ lar TM tanjant demedi üzerinde konneksiyon formudur. Bunlar aynı zamanda da çatı demedi üzerindeki konneksiyon formlarıdır. w_{ij} ve $\widetilde{w}_{ij}$ konneksiyon formları g metriği yardımıyla aşağıdaki şekilde de ifade edebilebilir:

$$\begin{aligned} w_{ij}(X) &= g(\nabla_X e_j, e_i) \\ \widetilde{w}_{ij}(X) &= -g(\nabla_X e_j, f_i) \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

■

Teorem 7.3.2 *$P_{Spin(n,\mathbb{C})}$ asli lif demedi üzerindeki $\widetilde{\omega}$ konneksiyon $1-$ formunun ayar potensiyelleri*

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha = \lambda_*^{-1} \circ \mathcal{A}_\alpha \tag{7.3.3}$$

dir.

Kanıt. $s_\alpha : U_\alpha \to P_{SO(n,\mathbb{C})}$ $P_{SO(n,\mathbb{C})}$ asli lif demedinin kesiti olmak üzere, $\overline{s}_\alpha : U_\alpha \to P_{SO(n,\mathbb{C})}$ s_α kesitinin $P_{Spin(n,\mathbb{C})}$ ye bir kaldırılmışı olsun. $\widetilde{\omega}$ nın ayar potensiyellerinin hesaplanması için $\overline{s}_\alpha^*\widetilde{\omega}$ hesaplanmalıdır.

$$\begin{tikzcd} & TP_{Spin(n,\mathbb{C})} \arrow[r, "\widetilde{\omega}"] \arrow[d, "\Lambda_*"] & \mathfrak{spin}(n,\mathbb{C}) \arrow[d, "\lambda_*"] \\ TU \arrow[ur, "\overline{s}_{\alpha *}"] \arrow[r, "s_{\alpha *}"'] & TP_{SO(n,\mathbb{C})} \arrow[r, "\omega"'] & \mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

Yukarıdaki diagramın değişmeliliğinden

$$\overline{s}_\alpha^*\widetilde{\omega} = \lambda_*^{-1} \circ \omega \circ s_\alpha \tag{7.3.4}$$

olur. $\omega \circ s_\alpha = \mathcal{A}_\alpha$ olduğundan $\overline{s}_\alpha^*\widetilde{\omega} = \widetilde{\mathcal{A}}_\alpha$ denilirse

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha = \lambda_*^{-1} \circ \mathcal{A}_\alpha \tag{7.3.5}$$

elde edilir. O halde W, U_α üzerinde vektör alanı olmak üzere $P_{SO(n,\mathbb{C})}$ nin $\mathcal{A}_\alpha$ konneksiyon $1-$formları,

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha(W) = (\lambda_*)^{-1}(\mathcal{A}_\alpha)(W)$$

ile $P_{Spin(n,\mathbb{C})}$ asli lif demedi üzerine taşınabilir.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha(W) &= (\lambda_*)^{-1}(\mathcal{A}_\alpha(W)) \\
&= (\lambda_*)^{-1}(\textstyle\sum_{i<j}(w_{ij}(W) - i\widetilde{w}_{ij}(W))E_{ij}) \\
&= \textstyle\sum_{i<j}(w_{ij}(W) - i\widetilde{w}_{ij}(W))(\lambda_*)^{-1}(E_{ij}) \\
&= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i<j}(w_{ij}(W) - i\widetilde{w}_{ij}(W))e_i e_j
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha$ lar $P_{Spin(n,\mathbb{C})}$ asli lif demedi üzerindeki $\widetilde{\omega}$ konneksiyon formlarıdır. ■

7.4 Kahler Norden Spinor Demedi üzerinde Kovaryant Türev

Bölüm 5.4 te herhangi bir asosye vektör demedi üzerinde asli lif demedi üzerindeki bir konneksiyon 1−formundan hareketle kovaryant türev elde edilmişti. Buna göre $P_{Spin(n,\mathbb{C})}$ asli lif demedi üzerindeki $\widetilde{w}$ konneksiyon 1−formu yardımyla S spinor demedi üzerinde ∇ kovaryant türevi tanımlanabilir. Yani

$X \in \Gamma(TM)$ ve $\psi \in \Gamma(S)$ olmak üzere

$$\nabla_X \psi = d^{\widetilde{\omega}}\psi(X^*)$$

dir. Burada X^*, X in yatay kaldırılmışıdır.

S üzerindeki ∇ kovaryant türevinin lokal ifadesi de (5.5.5) den

$$\nabla_X \psi = d\psi_\alpha(X) + \kappa_{*Id}(\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha(X))(\psi_\alpha) \tag{7.4.1}$$

olur. Burada $\overline{\mathcal{A}}_\alpha = \kappa_{*Id} \circ \widetilde{\mathcal{A}}_\alpha$ denilirse,

$$\nabla_X \psi = d\psi_\alpha(X) + \overline{\mathcal{A}}_\alpha(X)(\psi_\alpha) \tag{7.4.2}$$

olur.

(7.4.2) eşitliğinin daha açık bir ifadesini elde etmek için önce

$$\kappa : Spin(n,\mathbb{C}) \to Aut(\Delta_n)$$

dönüşümünün birimdeki türev dönüşümünü hesaplayalım. $\alpha : [0, 2\pi] \to Spin(n, \mathbb{C})$ eğrisi $t \in [0, 2\pi]$ olmak üzere $\alpha(t) = \cos t + \sin t e_i e_j$ olsun. Bu durumda $\alpha(0) = 1$ ve $\alpha'(0) = e_i e_j$ dir. O halde;

$$\begin{aligned}
\kappa_{*Id}(e_i e_j) &= \kappa_*(\alpha'(0)) = \frac{d}{dt}(\kappa \circ \alpha(t))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\kappa(\cos t.1 + \sin t e_i e_j))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\cos t.I + \sin t \kappa(e_i e_j))|_{t=0} \\
&= -\sin t.I + \cos t \kappa(e_i e_j)|_{t=0} \\
&= \kappa(e_i e_j)
\end{aligned}$$

olduğundan κ temsilinin birimdeki türev dönüşümü kendisidir. Bu kullanılarak spinor demedi üzerindeki konneksiyon formu bulunabilir.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{A}}_\alpha(W) &= (\kappa_{*Id})(\widetilde{\mathcal{A}_\alpha}(W)) \\
&= (\kappa_{*Id})\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i<j}(w_{ij}(W) - i\widetilde{w}_{ij}(W))e_i e_j \\
&= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i<j}(w_{ij}(W) - i\widetilde{w}_{ij}(W))\kappa_{*1}(e_i e_j) \\
&= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i<j}(w_{ij}(W) - i\widetilde{w}_{ij}(W))\kappa(e_i e_j)
\end{aligned}$$

O halde bulunan $\overline{\mathcal{A}}_\alpha$ konneksiyon formları, S spinor demedi üzerindeki konneksiyon formlarıdır. Bunların $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ ve $v \in T_x(U_\alpha \cap U_\beta)$ olmak üzere

$$(\overline{\mathcal{A}}_\alpha(x))(v) = g_{\beta\alpha}(x)^{-1} \circ (\overline{\mathcal{A}}_\beta(x))(v) \circ g_{\beta\alpha}(x) + g_{\beta\alpha}(x)^{-1} \circ (dg_{\beta\alpha})(x)(v) \quad (7.4.3)$$

uyumluluk koşulunu sağladığı doğrulanabilir.

Tersine M üzerinde yukarıdaki uyumluluk koşulunu sağlayan $\overline{\mathcal{A}}_\alpha$ formlarının bir ailesi verilirse bunlar S üzerinde bir kovaryant türev belirler [20].

ψ_α ile $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ atlasına göre lokal spinor alanını göstersin. O zaman,

$$\nabla_W \psi = (d\psi_\alpha)(W) + \overline{\mathcal{A}}_\alpha(W)(\psi_\alpha)$$

kovaryant türev operatörüdür. Böylece

$$\begin{aligned}
\nabla_W \psi &= (d\psi_\alpha)(W) + \overline{\mathcal{A}}_\alpha(W)(\psi_\alpha) \\
&= (d\psi_\alpha)(W) + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i<j}(w_{ij}(W) - i\widetilde{w}_{ij}(W))\kappa(e_i e_j)(\psi_\alpha) \\
&= (d\psi_\alpha)(W) + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i<j}(w_{ij}(W) - i\widetilde{w}_{ij}(W))\kappa(e_i)\kappa(e_j)(\psi_\alpha) \\
&= (d\psi_\alpha)(W) + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i<j}(w_{ij}(W) - i\widetilde{w}_{ij}(W))e_i e_j \cdot \psi_\alpha
\end{aligned}$$

şeklinde S üzerinde kovaryant türevin lokal ifadesi açık olarak yazılmış olur.

Kahler Norden Spinor demedi üzerinde kovaryant türevi denklik sınıfları üzerinde aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$U_\alpha \subset M$ olmak üzere

$$s_\alpha : U_\alpha \to P_{SO(n,\mathbb{C})}$$

$P_{SO(n,\mathbb{C})}$ nin lokal kesiti ve $\overline{s}_\alpha : U \to P_{Spin(n,\mathbb{C})}$ s_α nin $P_{Spin(n,\mathbb{C})}$ ye bir kaldırılmışı olsun. Bu durumda spinor alanı, $\psi_{s_\alpha} = \psi \circ \overline{s}_\alpha$ olmak üzere,

$$\psi = [\overline{s}_\alpha, \psi_{s_\alpha}]$$

idi. Bu dönüşümleri diagram üzerinde gösterelim.

$$\begin{tikzcd}
 & TP_{Spin(n,\mathbb{C})} \arrow[r, "\widetilde{\omega}"] \arrow[d, "\Lambda_*"] & \mathfrak{spin}(n,\mathbb{C}) \arrow[d, "\lambda_*"] \\
TU \arrow[ur, "\overline{s}_{\alpha *}"] \arrow[r, "s_{\alpha *}"'] & TP_{SO(n,\mathbb{C})} \arrow[r, "\omega"'] & \mathfrak{so}(n,\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

O zaman denklik sınıfları üzerinde kovaryant türevin tanımı, $X \in \Gamma(TM)$ ve $\psi \in \Gamma(S)$ olmak üzere

$$\nabla_X \psi = [\overline{s}_\alpha, X(\psi_{s_\alpha}) + \kappa_*(\overline{s}_\alpha{}^* \widetilde{w}(X))\psi_{s_\alpha}] \tag{7.4.4}$$

şeklinde olur. Ayrıca

$$\nabla_X \psi = [\overline{s}_\alpha, X(\psi_{s_\alpha}) + \overline{s}_\alpha{}^* \widetilde{w}(X) \cdot \psi_{s_\alpha}]$$

şeklinde de ifade edilebilir. Başka bir gösterimle,

$$\nabla_X \psi = [\overline{s}_\alpha, X(\psi_{s_\alpha}) + \overline{\mathcal{A}}_\alpha(X) \cdot \psi_{s_\alpha}]$$

olur.

7.5 Spinor Demedi Üzerinde Simetrik Bilineer ve Simplektik Formlar

(M, g, J) 6−boyutlu Kahler Norden spin manifoldu olsun. Kompleks Clifford cebrinin temsilinin kısıtlanmasıyla elde edilen

$$Spin(3, \mathbb{C}) \to Sp(2, \mathbb{C})$$

temsili yardımıyla M üzerinde S spinor demedi oluşturulmuştu. Bu durumda F_0, $\mathbb{C}^2$ üzerindeki standart simplektik form olmak üzere,

$$F([p,\psi],[p,\varphi]) = F_0(\psi,\varphi) \tag{7.5.1}$$

eşitliği ile S üzerinde F simplektik formu tanımlanır. O halde S spinor demedi F simplektik formu ile donatılmış olur.

Teorem 7.5.1 *$X \in \Gamma(TM)$, $\varphi,\psi \in \Gamma(S)$ ve F simplektik form olmak üzere,*

$$XF(\varphi,\psi) = F(\nabla_X\varphi,\psi) + F(\varphi,\nabla_X\psi)$$

eşitliği sağlanır. Yani, ∇ konneksiyonu F simplektik formu ile uyumludur.

Kanıt.

$$\begin{aligned}
&F(\nabla_X\varphi,\psi) + F(\varphi,\nabla_X\psi)\\
&= F(d\varphi(X) + \frac{1}{2}\sum_{i<j}(\omega_{ij}(X) - i\widetilde{w}_{ij}(X))\kappa(e_ie_j)\varphi,\psi)\\
&+F(\varphi, d\psi(X) + \frac{1}{2}\sum_{i<j}(\omega_{ij}(X) - i\widetilde{w}_{ij}(X))\kappa(e_ie_j)\psi))\\
&= F(d\varphi(X),\psi) + \frac{1}{2}\sum_{i<j}(\omega_{ij}(X) - i\widetilde{w}_{ij}(X))F(\kappa(e_ie_j)\varphi,\psi)\\
&+F(\varphi, d\psi(X)) + \frac{1}{2}\sum_{i<j}(\omega_{ij}(X) - i\widetilde{w}_{ij}(X))F(\varphi,\kappa(e_ie_j)\psi))\\
&= F(d\varphi(X),\psi) + F(\varphi, d\psi(X))\\
&= XF(\varphi,\psi)
\end{aligned}$$

■

(M,g,J) 6−boyutlu Kahler Norden spin manifoldunun spinorları arasında aşağıdaki ilişki vardır.

Teorem 7.5.2 *F simplektik formu ve φ,ψ,ϕ spinorları için*

$$F(\varphi,\psi)\phi + F(\phi,\varphi)\psi + F(\psi,\phi)\varphi = 0$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. e, f simplektik tabanı vardır öyle ki $F(e,e) = F(f,f) = 0$, $F(e,f) = 1$,$F(f,e) = -1$ koşulları sağlanır. Spinorlar $\mathbb{C}^2$ değerli olduğundan

$$\varphi = \varphi_1 e + \varphi_2 f$$
$$\psi = \psi_1 e + \psi_2 f$$
$$\phi = \phi_1 e + \phi_2 f$$

şeklinde yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
&F(\varphi,\psi)\phi + F(\phi,\varphi)\psi + F(\psi,\phi)\varphi = (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)(\phi_1,\phi_2) \\
&+(\phi_1\varphi_2 - \phi_2\varphi_1)(\psi_1,\psi_2) + (\psi_1\phi_2 - \phi_2\psi_1)(\varphi_1,\varphi_2) \\
&= \varphi_1\psi_2\phi_1 - \varphi_2\psi_1\phi_1 + \varphi_2\psi_1\phi_1 - \varphi_1\psi_1\phi_2 + \varphi_1\psi_1\phi_2 - \varphi_1\psi_2\phi_1 \\
&+\varphi_1\psi_2\phi_2 - \varphi_2\psi_1\phi_2 + \varphi_2\psi_2\phi_1 - \varphi_1\psi_2\phi_2 + \varphi_2\psi_1\phi_2 - \varphi_2\psi_2\phi_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Bu durum farklı n değerleri için elde edilen

$$\begin{aligned}
&Spin(2n+1,\mathbb{C}) \to Sp(2^n,\mathbb{C}) \quad (n \equiv 1, 2(Mod4)) \\
&Spin(2n,\mathbb{C}) \to Sp(2^{n-1},\mathbb{C}) \qquad (n \equiv 2(Mod4))
\end{aligned}$$

temsiller kullanılarak elde edilecek S spinor demedi de simplektik form ile donatılabilir. Özel duruma benzer şekilde, (7.5.1) eşitliğindeki gibi tanımlanır.

(M, g, J) $14-$boyutlu Kahler Norden spin manifoldu olsun. κ temsilinin kısıtlanmışı yardımıyla $Spin(7,\mathbb{C}) \to SO(8,\mathbb{C})$ temsili yardımıyla M üzerinde S spinor demedi oluşturuldu. Bu durumda b_0, $\mathbb{C}^8$ üzerindeki standart simetrik bilineer form olmak üzere,

$$b([p,\psi],[p,\varphi]) = b_0(\psi,\varphi) \tag{7.5.2}$$

eşitliği ile S üzerinde simetrik bilineer form tanımlanır. Dolayısıyla S spinor demedi, b simetrik bilineer formu ile donatılmış olur.

Teorem 7.5.3 *$X \in \Gamma(TM)$, $\varphi, \psi \in \Gamma(S)$ ve b simetrik bilineer form olmak üzere,*

$$Xb(\varphi,\psi) = b(\nabla_X\varphi,\psi) + b(\varphi,\nabla_X\psi)$$

eşitliği sağlanır. Yani, ∇ konneksiyonu b simetrik bilineer formu ile uyumludur.

Kanıt.

$$
\begin{aligned}
& b(\nabla_X\varphi,\psi)+b(\varphi,\nabla_X\psi)= \\
& = b(d\varphi(X)+\frac{1}{2}\sum_{i<j}(\omega_{ij}(X)-i\widetilde{w}_{ij}(X))\kappa(e_ie_j)\varphi,\psi) \\
& +b(\varphi,d\psi(X)+\frac{1}{2}\sum_{i<j}(\omega_{ij}(X)-i\widetilde{w}_{ij}(X))\kappa(e_ie_j)\psi)) \\
& = b(d\varphi(X),\psi)+\frac{1}{2}\sum_{i<j}(\omega_{ij}(X)-i\widetilde{w}_{ij}(X))b(\kappa(e_ie_j)\varphi,\psi) \\
& +b(\varphi,d\psi(X))+\frac{1}{2}\sum_{i<j}(\omega_{ij}(X)-i\widetilde{w}_{ij}(X))b(\varphi,\kappa(e_ie_j)\psi)) \\
& = b(d\varphi(X),\psi)+b(\varphi,d\psi(X)) \\
& = Xb(\varphi,\psi)
\end{aligned}
$$

■

Bu durum farklı n değerleri için elde edilen

$$
\begin{aligned}
& Spin(2n+1,\mathbb{C})\rightarrow SO(2^n,\mathbb{C}) \quad (n\equiv 0,3(Mod\ 4)) \\
& Spin(2n,\mathbb{C})\rightarrow SO(2^{n-1},\mathbb{C}) \quad\quad (n\equiv 0(Mod\ 4))
\end{aligned}
$$

temsiller kullanılarak elde edilecek S spinor demedi de simetrik bilineer form ile donatılabilir. Özel duruma benzer şekilde, (7.5.2) eşitliğindeki gibi tanımlanır.

8 KAHLER NORDEN SPIN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE DIRAC OPERATÖRÜ

8.1 Bir Vektör Alanı ile bir Spinor Alanının Çarpımı

Bir vektör alanı ile bir spinor alanının çarpımı farklı şekillerde tanımlanmaktadır. Bunların herbiri farklı durumlarda kullanılmaktadır.

1. Bir vektör alanı ile spinor alanının Cliffordun çarpımını denklik sınıfları üzerinde şu şekilde de tanımlanabilir ve ispatlarda kolaylık sağlayacağı bazen bu tanım kullanılmıştır: Clifford çarpımı,

$$\mu_0 : \mathbb{R}^{2n} \otimes S \to S$$

demetler üzerinde

$$\mu : TM \otimes S \to S$$

Clifford çarpımına genişletmek istiyoruz. Bunun için

$$\rho : Spin(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{\lambda} SO(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{\rho_{st}} Aut(\mathbb{R}^{2n})$$

temsil olmak üzere, $TM = P_{Spin(n,\mathbb{C})} \times_\rho \mathbb{R}^{2n}$ olduğundan tanjant vektörlerini denklik sınıfları şeklinde de düşünebiliriz.

$$\begin{aligned} \mu : TM \times S &\rightarrow S \\ ([p, v], [p, \psi]) &\mapsto [p, v \cdot \psi)] \end{aligned}$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Şimdi bunu gösterelim:

Teorem 8.1.1 *$v \in \mathbb{C}^n$ ve $\psi \in \Delta_n$ olmak üzere,*

$$\kappa(g)(x \cdot \psi) = (\lambda(g)x) \cdot (\kappa(g)\psi)$$

dir.

Kanıt.

$$\begin{aligned}\kappa(g)(x\cdot\psi) &= \kappa(g)\kappa_n(x)(\psi)=\kappa(g)\kappa_n(x)\kappa(g^{-1})\kappa(g)(\psi)\\ &= \kappa_n(gxg^{-1})\kappa(g)\psi=\kappa_n(\lambda(g)x)(\kappa(g)\psi)\\ &= (\lambda(g)x)\cdot(\kappa(g)\psi)\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}\mu : TM\times S &\to S\\ ([p,v],[p,\psi]) &\mapsto [p,v\cdot\psi)]\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm iyi tanımlıdır. Çünkü $g\in Spin(n,\mathbb{C})$ olmak üzere, $[p,v]=[pg,\rho(g^{-1})v]$ ve $[p,\psi]=[pg,\kappa(g^{-1})\psi]$ olduğundan yukarıdaki teoremden dolayı,

$$\begin{aligned}\mu([pg,\rho(g^{-1})v],[pg,\kappa(g^{-1})\psi]) &= [pg,\rho(g^{-1})v\cdot\kappa(g^{-1})\psi]\\ &= [pg,\kappa(g^{-1})(v\cdot\psi)]\\ &= [p,v\cdot\psi]\end{aligned}$$

olur. Ayrıca μ dönüşümü bilineer olduğundan

$$\begin{aligned}\mu : TM\otimes S &\to S\\ ([p,v]\otimes[p,\psi]) &\mapsto [p,\mu_0(v\otimes\psi)]\end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşüme genişletilebilir. Buradaki noktasal tanımı, $\mu(X\otimes\psi)$ spinoru her $x\in M$ için $X\in\Gamma(TM)$, $\psi\in\Gamma(S)$ iken

$$\mu(X\otimes\psi)(x)=X_x\cdot\psi_x$$

eşitliği ile vektör alanı ile spinor alanının çarpımına taşınabilir.

Bu çarpımı aşağıdaki şekilde ifade etmek de mümkündür:

$U_\alpha\subset M$ olmak üzere

$$s_\alpha : U_\alpha\to P_{SO(n,\mathbb{C})}$$

$P_{SO(n,\mathbb{C})}$ nin yerel kesiti ve $\overline{s}_\alpha : U_\alpha\to P_{Spin(n,\mathbb{C})}$ s_α nın $P_{Spin(n,\mathbb{C})}$ ye bir kaldırılmışı olsun.

$$\begin{tikzcd} & P_{Spin(n,\mathbb{C})} \arrow[d, "\Lambda"] \\ U_\alpha \arrow[ur, "\overline{s}_\alpha"] \arrow[r, "s_\alpha"'] & P_{SO(n,\mathbb{C})} \end{tikzcd}$$

Diagramın değişmeliliğinden

$$\Lambda \circ \overline{s_\alpha} = s_\alpha$$

dir. $\psi \in \Gamma(S)$ ise ψ, $\psi : P_{Spin(n,\mathbb{C})} \to \Delta_n$ şeklinde equivaryant dönüşüm olarak düşünülebilir.

$$\psi_{s_\alpha} = \psi \circ \overline{s}_\alpha$$

dır. O halde spinorlar

$$\psi = [\overline{s}_\alpha, \psi_{s_\alpha}]$$

şeklinde düşünülebilir. $X \in \Gamma(TM)$ vektör alanını da $X_{s_\alpha} : U_\alpha \to \mathbb{R}^{2n}$ olmak üzere $X = [\overline{s}_\alpha, X_{s_\alpha}]$ şeklinde düşünülürse vektör alanı ile spinorun çarpması $p \in U_\alpha$ olmak üzere

$$(X \cdot \psi)(p) = [\overline{s}_\alpha(p), X_{s_\alpha}(p)][\overline{s}_\alpha(p), \psi_{s_\alpha}(p)] = [\overline{s}_\alpha(p), X_{s_\alpha}(p) \cdot \psi_{s_\alpha}(p)]$$

şeklinde tanımlanır.

2. Bir vektör alanı ile spinor alanının Clifford çarpımını [3] de verilen yaklaşımdan hareketle şu şekilde tanımlanabilir:

$$\rho : Spin(n,\mathbb{C}) \to SO(n,\mathbb{C}) \to Aut(\mathbb{R}^{2n})$$

temsili yardımıyla elde edilen asosye vektör demedi TM tanjant demedine izomorftur. Yani

$$TM = P_{Spin(n,\mathbb{C})}(M) \times_\rho \mathbb{R}^{2n}$$

dir. O halde herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ vektör alanı

$$P_{Spin(n,\mathbb{C})}(M) \to \mathbb{R}^{2n}$$

şeklinde equivaryant dönüşüm olarak düşünülebilir. Ayrıca, $\kappa : Spin(n,\mathbb{C}) \to Aut(\Delta_n)$ temsili yardımıyla elde edilen asosye vektör demedi yani spinor demedi

$$S = P_{Spin(n,\mathbb{C})}(M) \times_\kappa \Delta_n$$

dir. O halde bu spinor demedinin $\psi \in \Gamma(S)$ kesitleri $\psi : P_{Spin(n,\mathbb{C})} \to \Delta_n$ şeklinde equivaryant dönüşüm olarak düşünülebilir. Bu durumda $X \cdot \psi$ Clifford çarpımı,

$$(X \cdot \psi)(p) = X(p) \cdot \psi(p)$$

eşitliğini sağlayan $X \cdot \psi : P_{Spin(n,\mathbb{C})} \to \Delta_n$ dönüşümü ile tanımlanır. Bu $X \cdot \psi$ dönüşümü equivaryant olduğundan bir spinor alanıdır.

8.2 Clifford Demedi

Klasik Spin durumunda bir vektör alanı ile spinor elemanını çarpma operasyonu Clifford Demedi yaklaşımıyla da tanımlanır.

$\mathbb{C}^n$ üzerindeki her ortogonal dönüşüm, $\mathbb{C}l_n$ Clifford cebri üzerinde bir cebir otomorfizması indirger. Burada ρ_n, $SO(n,\mathbb{C})$ nin $\mathbb{C}^n$ üzerindeki standart temsili olmak üzere,

$$cl(\rho_n) : SO(n,\mathbb{C}) \to Aut(\mathbb{C}l_n)$$

şeklinde $SO(n,\mathbb{C})$ nin $\mathbb{C}l_n$ üzerinde bir temsili vardır.

Tanım 8.2.1 *TM, Kahler Norden spin manifoldu üzerinde tanjant demedi ise Clifford demedi*

$$Cl(TM) = P_{SO(n,\mathbb{C})} \times_{cl(\rho_n)} \mathbb{C}l_n$$

şeklinde tanımlanır.

Clifford demedi aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir.

Tanım 8.2.2 *TM, Kahler Norden spin manifoldu üzerinde tanjant demedi ise Clifford demedi*

$$Cl(TM) = \bigcup_{x \in M} \mathbb{C}l(T_xM, Q_x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, T_xM kompleks vektör uzayı, Q_x, Kahler Norden manifoldu üzerindeki g metriğinin $x \in M$ noktasında karşılık gelen kuadratik form olduğundan (T_xM, Q_x) kuadratik uzaydır. Dolayısıyla $\mathbb{C}l(T_xM, Q_x)$, (T_xM, Q_x) kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebridir.

$Spin(n,\mathbb{C})$ nin $\mathbb{C}l_n$ üzerindeki adjoint temsili;

$$\begin{array}{rccl} Ad: & Spin(n,\mathbb{C}) & \rightarrow & Aut(\mathbb{C}l_n) \\ & g & \mapsto & Ad_g(\psi) = g\psi g^{-1} \end{array}$$

yardımıyla elde edilen

$$\begin{tikzcd} & SO(n,\mathbb{C}) \arrow[d, "cl(\rho_n)"] \\ Spin(n,\mathbb{C}) \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[r, "Ad"'] & Aut(\mathbb{C}l_n) \end{tikzcd}$$

diagramı değişmelidir. Dolayısıyla bu Ad temsiliyle

$$Cl(TM) = P_{spin(n,\mathbb{C})} \times_{Ad} \mathbb{C}l_n$$

şeklinde asosye demedi oluşturabiliriz. Bu elde edilen asosye demedi Clifford demedine izomorftur. Bu tanımlanan Clifford demedi ile daha önce tanımlanan Clifford demedi izomorftur. Çünkü bunlar aynı geçiş fonksiyonlarını belirlerler.

Teorem 8.2.3 *S, Kahler Norden Spinor demedi olsun. Bu durumda S, $Cl(TM)$ demedi üzerinde modüldür.*

Kanıt.

$$\begin{tikzcd} P_{Spin(n,\mathbb{C})} \times \mathbb{C}l_n \times \Delta_n \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\rho_g"] & P_{spin(n,\mathbb{C})} \times \Delta_n \arrow[d, "\rho_g"] \\ P_{Spin(n,\mathbb{C})} \times \mathbb{C}l_n \times \Delta_n \arrow[r, "\kappa"'] & P_{spin(n,\mathbb{C})} \times \Delta_n \end{tikzcd}$$

değişmeli diagramını açık olarak yazarsak,

$$\begin{tikzcd} (p,\psi,m) \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\rho_g"] & (p,\psi m) \arrow[d, "\rho_g"] \\ (pg^{-1}, g\psi g^{-1}, gm) \arrow[r, "\kappa"'] & (pg^{-1}, g\psi m) \end{tikzcd}$$

şeklinde olur. Değişmeli olduğu görülebilir. Bu diagramın değişmeliliği,

$$\begin{array}{rccc} \mu: & Cl(TM) \times S & \rightarrow & S \\ & ([p,\psi],[p,m]) & \mapsto & [p,\psi m] \end{array}$$

dönüşümünü indirger. Bu dönüşümün iyi tanımlı olduğu yine değişmeli diagramdan görülebilir. ■

Yukarıdaki teorem yardımıyla $Cl(TM)$ Clifford demedinin elemanlarıyla S spinor demedinin elemanları çarpılmış olur.

S üzerindeki kovaryant türevin aşağıdaki özelliği vardır.

Önerme 8.2.4 *$X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\psi \in \Gamma(S)$ için*

$$\nabla_X(Y \cdot \psi) = \nabla_X Y \cdot \psi + Y \cdot \nabla_X \psi$$

eşitliği vardır.

Kanıt. $s_\alpha : U_\alpha \to S$ bir çatı olsun. $Y_{s_\alpha} : U_\alpha \to \mathbb{R}^{2n}$ düzgün dönüşüm olmak üzere Y vektör alanı $Y = [\overline{s}_\alpha, Y_{s_\alpha}]$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$\nabla_X Y = [\overline{s}_\alpha, X(Y_{s_\alpha}) + {s_\alpha}^*\widetilde{\omega}(X)Y_{s_\alpha}]$$

ve

$$Y \cdot \psi = [\overline{s}_\alpha, Y_{s_\alpha} \cdot \psi_{s_\alpha}]$$

olur. Böylece denklem (7.4.4) den

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= [\overline{s}_\alpha, X(Y_{s_\alpha}) \cdot \psi_{s_\alpha} + ({s_\alpha}^*\widetilde{\omega}(X)Y_{s_\alpha}) \cdot \psi_{s_\alpha})] \\
Y \cdot \nabla_X \psi &= [\overline{s}_\alpha, Y_{s_\alpha} \cdot X(\psi_{s_\alpha}) + Y_{s_\alpha} \cdot (\overline{s_\alpha}^*\widetilde{w}(X) \cdot \psi_{s_\alpha})] \\
\nabla_X(Y \cdot \psi) &= [\overline{s}_\alpha, X(Y_{s_\alpha} \cdot \psi_{s_\alpha}) + ({\overline{s}_\alpha}^*\widetilde{w}(X) \cdot Y_{s_\alpha} \cdot \psi_{s_\alpha})]
\end{aligned}$$

Ayrıca

$$X(Y_s \cdot \psi_s) = X(Y_s) \cdot \psi_s + Y_s \cdot X(\psi_s)$$

eşitliği vardır. Ayrıca, Önerme (4.1.1)'ten dolayı $e \in \mathfrak{spin}(n, \mathbb{C})$ ve $v \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere,

$$\kappa(e) \circ \kappa(v) - \kappa(v) \circ \kappa(e) = \kappa(\lambda_*(e)v)$$

eşitliği geçerli idi. Bu eşitlikte $e = {\overline{s}_\alpha}^*\widetilde{w}(X)$ ve $v = Y_{s_\alpha}$ alınırsa,

$${\overline{s}_\alpha}^*\widetilde{w}(X) \cdot Y_{s_\alpha} \cdot \psi_{s_\alpha} = ({s_\alpha}^*\omega(X)Y_{s_\alpha}) \cdot \psi_{s_\alpha} + Y_{s_\alpha} \cdot {\overline{s}_\alpha}^*\widetilde{w}(X) \cdot \psi_{s_\alpha}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
&\nabla_X(Y \cdot \psi) = \\
&= [\overline{s}_\alpha, X(Y_{s_\alpha} \cdot \psi_{s_\alpha}) + (\overline{s}_\alpha{}^* \widetilde{w}(X) \cdot Y_{s_\alpha} \cdot \psi_{s_\alpha})] \\
&= [\overline{s}_\alpha, X(Y_{s_\alpha}) \cdot \psi_{s_\alpha} + Y_{s_\alpha} \cdot X(\psi_{s_\alpha}) + (s_\alpha{}^* \omega(X) Y_{s_\alpha}) \cdot \psi_{s_\alpha} + Y_{s_\alpha} \cdot \overline{s}_\alpha{}^* \widetilde{w}(X) \cdot \psi_{s_\alpha}] \\
&= [\overline{s}_\alpha, X(Y_{s_\alpha}) \cdot \psi_{s_\alpha} + (s_\alpha{}^* \omega(X) Y_{s_\alpha}) \cdot \psi_{s_\alpha}] \\
&+ [\overline{s}_\alpha, Y_{s_\alpha} \cdot X(\psi_{s_\alpha}) + Y_{s_\alpha} \cdot \overline{s}_\alpha{}^* \widetilde{w}(X) \cdot \psi_{s_\alpha}] \\
&= \nabla_X Y \cdot \psi + Y \cdot \nabla_X \psi
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilmiş olur. ■

8.3 Kahler-Norden Spin Manifoldu Üzerinde Dirac Operatörü

M manifoldu üzerinde J yaklaşık kompleks yapısı ve g, (n,n)-tipinde yarı-Riemann metriği olması durumunda, M nin geçiş fonksiyonları $SO(n,\mathbb{C})$ de değer almaktadır. g yarı-Riemann metriğinden dolayı M üzerinde tek türlü belirli bir karakteristik ∇ konneksiyonu vardır. Bu konneksiyonun, konneksiyon formlarının $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ Lie cebrinde değer aldığı gösterildi. M nin geçiş fonksiyonları $SO(n,\mathbb{C})$ den $Spin(n,\mathbb{C})$ ye kaldırılabilmesi durumunda kovaryant türev hesaplandı ve S Kahler Norden Spinor demedi inşa edildi. M nin ∇ karakteristik konneksiyonu yardımıyla S spinor demedi üzerinde konneksiyon formu tanımlandı ve kovaryant türev elde edildi. Bu kovaryant türev yardımıyla Dirac operatörü tanımlanabilir:

Tanım 8.3.1 (M,J,g) *Kahler-Norden manifoldu üzerindeki Dirac operatörü*

$$D=\mu\circ\nabla:\Gamma(S)\xrightarrow{\nabla}\Gamma(T^*M\otimes S)\overset{g}{\cong}\Gamma(TM\otimes S)\xrightarrow{\mu}\Gamma(S)$$

şeklindeki bileşke işlemi ile tanımlanır. Burada T^*M ve TM arasındaki geçiş g metriği ile yapılır.

M manifoldu üzerinde $e=\{e_1,e_2,...,e_n,f_1=J(e_1),...,f_n=J(e_n)\}$ yerel ortonormal çatı verildiğinde Dirac operatörünün tanımını kullanarak aşağıdaki şekilde yerel ifadesi elde edilebilir:

$$\begin{array}{rlcll} D: & \Gamma(S) & \to & \Gamma(T^*M\otimes S) & \overset{g}{\cong} \\ & \psi & \mapsto & \sum_{i=1}^n(e_i^*\otimes\nabla_{e_i}\psi-f_i^*\otimes\nabla_{f_i}\psi) & \mapsto \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \Gamma(TM\otimes S) & \to & \Gamma(S) \\ \sum_{i=1}^n(e_i\otimes\nabla_{e_i}\psi-f_i\otimes\nabla_{f_i}\psi) & \mapsto & \sum_{i=1}^n(e_i\cdot\nabla_{e_i}\psi-f_i\cdot\nabla_{f_i}\psi) \end{array}$$

Yani Dirac operatörünün çatı yardımıyla tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$D\psi=\sum_{i=1}^n(e_i\cdot\nabla_{e_i}\psi-f_i\cdot\nabla_{f_i}\psi)$$

Örnek 8.3.2 *$M = \mathbb{R}^4$ olmak üzere bu manifold üzerinde $\{e_1, e_2, Je_1, Je_2\}$ ortonormal çatı ise*

$$\begin{aligned}
\nabla_X e_1 &= -w_{12}(X)e_2 - \widetilde{w}_{12}(X)Je_2 \\
\nabla_X e_2 &= w_{12}(X)e_1 + \widetilde{w}_{12}(X)Je_1 \\
\nabla_X Je_1 &= \widetilde{w}_{12}(X)e_2 - w_{12}(X)Je_2 \\
\nabla_X Je_2 &= -\widetilde{w}_{12}(X)e_1 + w_{12}(X)Je_1 \\
\mathcal{A}_\alpha(X) &= (w_{12}(X) - i\widetilde{w}_{12}(X))E_{12}
\end{aligned}$$

, $\mathfrak{so}(2,\mathbb{C})$ değerli 1-form olur. Buradan $\mathfrak{spin}(n)$-değerli 1-forma geçilebilir.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha(X) &= (\lambda_*)^{-1}(\mathcal{A}_\alpha(X) \\
&= \tfrac{1}{2}(w_{12}(X) - i\widetilde{w}_{12}(X))e_1e_2
\end{aligned}$$

$\kappa : Spin(2,\mathbb{C}) \to Aut(\mathbb{C}^2)$ temsili yardımıyla Spinor demedi üzerinde konneksiyon $1-$formları elde edilir.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{A}}_\alpha(X) &= (\kappa_*)(\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha(X) \\
&= \tfrac{1}{2}(w_{12}(X) - i\widetilde{w}_{12}(X))\kappa_*(e_1e_2) \\
&= \tfrac{1}{2}(w_{12}(X) - i\widetilde{w}_{12}(X))\kappa(e_1e_2) \\
&= \tfrac{1}{2}(w_{12}(X) - i\widetilde{w}_{12}(X))\kappa(e_1)\kappa(e_2) \\
&= \tfrac{1}{2}(w_{12}(X) - i\widetilde{w}_{12}(X)) \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{2}(w_{12}(X) - i\widetilde{w}_{12}(X)) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

O halde Spinor demedi üzerindeki konneksiyon $1-$formlarını elde edilmiş olur.

Bunun yardımıyla Spinorların kovaryant türevi alınabilir:

$$\begin{aligned}
\nabla_X\psi &= d\psi(X) + \overline{\mathcal{A}}_\alpha(X)\psi \\
&= \tfrac{1}{2}(w_{12}(X) - i\widetilde{w}_{12}(X)) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d\psi_1(X) \\ d\psi_2(X) \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}(w_{12}(X) - i\widetilde{w}_{12}(X)) \begin{pmatrix} -\psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d\psi_1(X) - \frac{1}{2}(w_{12}(X) - i\widetilde{w}_{12}(X))\psi_2 \\ d\psi_2(X) + \frac{1}{2}(w_{12}(X) - i\widetilde{w}_{12}(X))\psi_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiş olur. Spinorlar üzerindeki Dirac operatörü tanımlanmıştı. Bu tanım kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
D\psi &= e_1 \cdot \nabla_{e_1}\psi + e_2 \cdot \nabla_{e_2}\psi - Je_1 \cdot \nabla_{Je_1}\psi - Je_2 \cdot \nabla_{Je_2}\psi \\
&= \kappa(e_1)(\nabla_{e_1}\psi) + \kappa(e_2)(\nabla_{e_2}\psi) - \kappa(Je_1)(\nabla_{Je_1}\psi) - \kappa(Je_2)(\nabla_{Je_2}\psi) \\
&= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\psi_1(e_1) - \frac{1}{2}(w_{12}(e_1) - i\widetilde{w}_{12}(e_1))\psi_2 \\ d\psi_2(e_1) + \frac{1}{2}(w_{12}(e_1) - i\widetilde{w}_{12}(e_1))\psi_1 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\psi_1(e_2) - \frac{1}{2}(w_{12}(e_2) - i\widetilde{w}_{12}(e_2))\psi_2 \\ d\psi_2(e_2) + \frac{1}{2}(w_{12}(e_2) - i\widetilde{w}_{12}(e_2))\psi_1 \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\psi_1(Je_1) - \frac{1}{2}(w_{12}(Je_1) - i\widetilde{w}_{12}(Je_1))\psi_2 \\ d\psi_2(Je_1) + \frac{1}{2}(w_{12}(Je_1) - i\widetilde{w}_{12}(Je_1))\psi_1 \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\psi_1(Je_2) - \frac{1}{2}(w_{12}(Je_2) - i\widetilde{w}_{12}(Je_2))\psi_2 \\ d\psi_2(Je_2) + \frac{1}{2}(w_{12}(Je_2) - i\widetilde{w}_{12}(Je_2))\psi_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i(d\psi_1(e_1) - \frac{1}{2}(w_{12}(e_1) - i\widetilde{w}_{12}(e_1))\psi_2) \\ -i(d\psi_2(e_1) + \frac{1}{2}(w_{12}(e_1) - i\widetilde{w}_{12}(e_1))\psi_1) \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} i(d\psi_2(e_2) + \frac{1}{2}(w_{12}(e_2) - i\widetilde{w}_{12}(e_2))\psi_1) \\ i(d\psi_1(e_2) - \frac{1}{2}(w_{12}(e_2) - i\widetilde{w}_{12}(e_2))\psi_2) \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} -d\psi_1(Je_1) + \frac{1}{2}(w_{12}(Je_1) - i\widetilde{w}_{12}(Je_1))\psi_2 \\ d\psi_2(Je_1) + \frac{1}{2}(w_{12}(Je_1) - i\widetilde{w}_{12}(Je_1))\psi_1 \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} -d\psi_2(Je_2) - \frac{1}{2}(w_{12}(Je_2) - i\widetilde{w}_{12}(Je_2))\psi_1 \\ d\psi_1(Je_2) - \frac{1}{2}(w_{12}(Je_2) - i\widetilde{w}_{12}(Je_2))\psi_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olduğundan $\mathbb{R}^4$ üzerinde Dirac operatörü tanımlanmış olur.

Teorem 8.3.3 $D(f.\psi) = (gradf.\psi) + fD\psi$

Kanıt.

$$\begin{aligned}
D(f.\psi) &= \sum_{i=1}^{n}(e_i.\nabla_{e_i}(f.\psi) - f_i.\nabla_{f_i}(f.\psi)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(e_i.(e_i(f)\psi + f\nabla_{e_i}\psi) - f_i.(f_i(f)\psi + f\nabla_{f_i}\psi)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(e_i(f)e_i.\psi + fe_i.\nabla_{e_i}\psi - f_i(f)f_i.\psi - ff_i.\nabla_{f_i}\psi) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(e_i(f)e_i - f_i(f)f_i).\psi + f\sum_{i=1}^{n}(e_i.\nabla_{e_i}\psi - f_i.\nabla_{f_i}\psi) \\
&= (gradf).\psi + fD\psi
\end{aligned}$$

■

Teorem 8.3.4 *$X \in \Gamma(TM)$ ve $\psi \in S$ olmak üzere,*

$$D(X.\psi) = -X.D\psi + 2\nabla_X\psi + \sum_{i=1}^{n}(e_i.\nabla_{e_i}X - f_i.\nabla_{f_i}X)\psi$$

eşitliği vardır.

Kanıt.

$$\begin{aligned}
D(X\psi) &= \sum_{i=1}^{n}(e_i.\nabla_{e_i}(X.\psi) - f_i.\nabla_{f_i}(X.\psi)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}e_i.(\nabla_{e_i}X.\psi + X.\nabla_{e_i}\psi) - f_i.(\nabla_{f_i}X.\psi + X.\nabla_{f_i}\psi) \\
&= \sum_{i=1}^{n}e_i.\nabla_{e_i}X.\psi + e_i.X.\nabla_{e_i}\psi - f_i.\nabla_{f_i}X.\psi - f_i.X.\nabla_{f_i}\psi \\
&= \sum_{i=1}^{n}(e_i.\nabla_{e_i}X - f_i.\nabla_{f_i}X).\psi + e_i.X.\nabla_{e_i}\psi - f_i.X.\nabla_{f_i}\psi \\
&= \sum_{i=1}^{n}(e_i.\nabla_{e_i}X - f_i.\nabla_{f_i}X).\psi + (-X.e_i + 2g(e_i, X))\nabla_{e_i}\psi \\
&\quad -(-X.f_i + 2g(f_i, X)).\nabla_{f_i}\psi \\
&= \sum_{i=1}^{n}(e_i.\nabla_{e_i}X - f_i.\nabla_{f_i}X).\psi - X.e_i.\nabla_{e_i}\psi + 2g(e_i, X)\nabla_{e_i}\psi + \\
&\quad +X.f_i.\nabla_{f_i}\psi - 2g(f_i, X).\nabla_{f_i}\psi \\
&= \sum_{i=1}^{n}(e_i.\nabla_{e_i}X - f_i.\nabla_{f_i}X).\psi - X.(e_i.\nabla_{e_i}\psi - f_i.\nabla_{f_i}\psi) \\
&\quad +2g(e_i, X)\nabla_{e_i}\psi - 2g(f_i, X).\nabla_{f_i}\psi \\
&= \sum_{i=1}^{n}(e_i.\nabla_{e_i}X - f_i.\nabla_{f_i}X).\psi - X.D\psi + 2\nabla_X\psi
\end{aligned}$$

■

Tanım 8.3.5 *$\psi \in \Gamma(S)$ spinor alanı ise spinorlar üzerinde Laplasyen operatörü,*

$$\Delta\psi = -\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\psi - \nabla_{f_i}\nabla_{f_i}\psi + div(e_i)\nabla_{e_i}\psi - div(f_i)\nabla_{f_i}\psi) \qquad (8.3.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Klasik durumdaki spinorlar üzerindeki Dirac operatörünün sağladığı Schröndinger-Lichnerowicz formülünün (bazı kaynaklarda Weitzenböck formülü olarak adlandırılır) bir benzeri, bizim kurgulamış olduğumuz spinorlar içinde geçerlidir.

Teorem 8.3.6 *R, (M, J, g) Kahler Norden manifoldunun skalar eğrilik tensörü ve Δ spinorlar üzerindeki Laplace operatörü olmak üzere,*

$$D^2\psi = \Delta\psi + \frac{R}{4}\psi$$

eşitliği vardır.

Kanıt.

$$\begin{aligned}
D^2\psi &= D(D\psi) = \sum_{i=1}^{n} e_i.\nabla_{e_i}(D\psi) - f_i.\nabla_{f_i}(D\psi) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} e_i.\nabla_{e_i}(e_j.\nabla_{e_j}\psi - f_j.\nabla_{f_j}\psi) - f_i.\nabla_{f_i}(e_j.\nabla_{e_j}\psi - f_j.\nabla_{f_j}\psi) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} e_i.(\nabla_{e_i}(e_j.\nabla_{e_j}\psi) - \nabla_{e_i}(f_j.\nabla_{f_j}\psi) - f_i.(\nabla_{f_i}(e_j.\nabla_{e_j}\psi) - \nabla_{f_i}(f_j.\nabla_{f_j}\psi) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} e_i.(\nabla_{e_i}e_j.\nabla_{e_j}\psi + e_j\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\psi) - e_i.(\nabla_{e_i}f_j.\nabla_{f_j}\psi + f_j\nabla_{e_i}\nabla_{f_j}\psi) \\
&\quad -f_i.(\nabla_{f_i}e_j.\nabla_{e_j}\psi + e_j\nabla_{f_i}\nabla_{e_j}\psi) + f_i.(\nabla_{f_i}f_j.\nabla_{f_j}\psi + f_j\nabla_{f_i}\nabla_{f_j}\psi) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} e_i.\nabla_{e_i}e_j.\nabla_{e_j}\psi + e_ie_j\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\psi - e_i.\nabla_{e_i}f_j.\nabla_{f_j}\psi - e_if_j\nabla_{e_i}\nabla_{f_j}\psi \\
&\quad -f_i.\nabla_{f_i}e_j.\nabla_{e_j}\psi - f_ie_j.\nabla_{f_i}\nabla_{e_j}\psi + f_i.\nabla_{f_i}f_j.\nabla_{f_j}\psi + f_if_j\nabla_{f_i}\nabla_{f_j}\psi
\end{aligned}$$

Bu eşitliği göstermek için öncelikle, aşağıdaki işlemler yapılmalıdır:

$$\sum_{i,j=1}^{n} e_i.\nabla_{e_i} e_j.\nabla_{e_j}\psi - e_i.\nabla_{e_i} f_j.\nabla_{f_j}\psi - f_i.\nabla_{f_i} e_j.\nabla_{e_j}\psi + f_i.\nabla_{f_i} f_j.\nabla_{f_j}\psi =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} e_i.(\sum_{k=1}^{n} g(\nabla_{e_i} e_j, e_k)e_k - g(\nabla_{e_i} e_j, f_k)f_k).\nabla_{e_j}\psi$$

$$-e_i.(\sum_{k=1}^{n} g(\nabla_{e_i} f_j, e_k)e_k - g(\nabla_{e_i} f_j, f_k)f_k).\nabla_{f_j}\psi$$

$$-f_i.(\sum_{k=1}^{n} g(\nabla_{f_i} e_j, e_k)e_k - g(\nabla_{f_i} e_j, f_k)f_k).\nabla_{e_j}\psi$$

$$+f_i.(\sum_{k=1}^{n} g(\nabla_{f_i} f_j, e_k)e_k - g(\nabla_{f_i} f_j, f_k)f_k).\nabla_{f_j}\psi$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} (g(\nabla_{e_i} e_j, e_k)e_i e_k - g(\nabla_{e_i} e_j, f_k)e_i f_k - g(\nabla_{f_i} e_j, e_k)f_i e_k$$

$$+g(\nabla_{f_i} e_j, f_k)f_i f_k)\nabla_{e_j}\psi + (-g(\nabla_{e_i} f_j, e_k)e_i e_k$$

$$+g(\nabla_{e_i} f_j, f_k)e_i f_k + g(\nabla_{f_i} f_j, e_k)f_i e_k - g(\nabla_{f_i} f_j, f_k)f_i f_k)\nabla_{f_j}\psi$$

$$= \sum_{i=k,j=1}^{n} (-g(\nabla_{e_i} e_j, e_i) + g(\nabla_{f_i} e_j, f_i))\nabla_{e_j}\psi + (g(\nabla_{e_j} f_j, e_i)$$

$$-g(\nabla_{f_i} f_j, f_i))\nabla_{f_j}\psi + (-g(\nabla_{e_i} e_j, f_i) + g(\nabla_{f_i} e_j, e_i))e_i f_i \nabla_{e_j}\psi$$

$$+(g(\nabla_{e_i} f_j, f_i) - g(\nabla_{f_i} f_j, e_i))e_i f_i \nabla_{e_j}\psi + \sum_{j=1,i<j}^{n} g(e_j, [e_k, e_i])e_i e_k \nabla_{e_j}\psi$$

$$-g(e_j, [f_k, e_i])e_i f_k \nabla_{e_j}\psi - g(e_j, [e_k, f_i])f_i e_k \nabla_{e_j}\psi - g(f_j, [e_k, e_i])e_i e_k \nabla_{f_j}\psi$$

$$+g(f_j, [f_k, e_i])e_i f_k \nabla_{e_j}\psi + g(f_j, [e_k, f_i])f_i e_k \nabla_{f_j}\psi - g(f_j, [f_k, f_i])f_i f_k \nabla_{f_j}\psi$$

$$+g(e_j, [f_k, f_i])f_i f_k \nabla_{f_j}\psi$$

$$= \sum_{j=1,i<k}^{n} e_i e_k \nabla_{[e_k,e_i]}\psi - e_i f_k \nabla_{[f_k,e_i]}\psi - f_i e_k \nabla_{[e_k,f_i]}\psi + f_i f_k \nabla_{[f_k,f_i]}\psi$$

$$-div(e_j)\nabla_{e_j}\psi + div(f_j)\nabla_{f_j}\psi - e_i f_i \nabla_{[e_i,f_i]}\psi$$

Birinci kısımdan yukarıdaki sonuç elde edilir. Şimdi de ikinci kısmı bulalım:

$$\sum_{i,j=1}^{n} e_i e_j.\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\psi - e_i f_j.\nabla_{e_i}\nabla_{f_j}\psi - f_i e_j.\nabla_{f_i}\nabla_{e_j}\psi + f_i f_j.\nabla_{f_i}\nabla_{f_j}\psi$$

$$= \sum_{i=j=1}^{n} -\nabla_{e_i}\nabla_{i_j}\psi - e_i f_i.\nabla_{e_i}\nabla_{f_i}\psi - f_i e_i.\nabla_{f_i}\nabla_{e_i}\psi + \nabla_{f_i}\nabla_{f_i}\psi$$

$$+\sum_{i<j}^{n} e_i e_j.(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\psi - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\psi - \nabla_{[e_i,e_j]}\psi) + e_i e_j \nabla_{[e_i,e_j]}\psi$$

$$-e_i f_j.(\nabla_{e_i}\nabla_{f_j}\psi - \nabla_{f_j}\nabla_{e_i}\psi - \nabla_{[e_i,f_j]}\psi) - e_i f_j \nabla_{[e_i,f_j]}\psi$$

$$-f_i e_j.(\nabla_{f_i}\nabla_{e_j}\psi - \nabla_{e_j}\nabla_{f_i}\psi - \nabla_{[f_i,e_j]}\psi) - f_i e_j \nabla_{[f_i,e_j]}\psi$$

$$+f_i f_j.(\nabla_{f_i}\nabla_{f_j}\psi - \nabla_{f_j}\nabla_{f_i}\psi - \nabla_{[f_i,f_j]}\psi) + f_i f_j \nabla_{[f_i,f_j]}\psi$$

Birinci ve ikinci kısmın hesaplanması sonucu aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} - div(e_j)\nabla_{e_j}\psi + div(f_j)\nabla_{f_j}\psi - \nabla_{e_j}\nabla_{e_j}\psi + \nabla_{f_j}\nabla_{f_j}\psi \\
&+\sum_{i=1}^{n} - e_i f_i.\nabla_{e_i}\nabla_{f_i}\psi - f_i e_i.\nabla_{f_i}\nabla_{e_i}\psi \\
&+\sum_{i<j}^{n} e_i e_j R(e_i, e_j)\psi - e_i f_j R(e_i, f_j)\psi - f_i e_j R(f_i, e_j)\psi + f_i f_j R(f_i, f_j)\psi \\
= \;& \Delta\psi + \sum_{i=1}^{n} e_i f_i R(f_i, e_i)\psi + \sum_{i<j} e_i e_j R(e_i, e_j)\psi - e_i f_j R(e_i, f_j)\psi - f_i e_j R(f_i, e_j)\psi \\
&+f_i f_j R(f_i, f_j)\psi \\
= \;& \Delta\psi + \frac{1}{2}\sum_{i,j=}^{n} e_i e_j R(e_i, e_j)\psi - e_i f_j R(e_i, f_j)\psi - f_i e_j R(f_i, e_j)\psi + f_i f_j R(f_i, f_j)\psi
\end{aligned}$$

O halde

$$D^2\psi = \Delta\psi + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} e_i e_j R(e_i, e_j)\psi - e_i f_j R(e_i, f_j)\psi - f_i e_j R(f_i, e_j)\psi + f_i f_j R(f_i, f_j)\psi \tag{8.3.2}$$

eşitliği elde edilir.

$$R(X, Y)e_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij}(X, Y)e_j + \widetilde{R}_{ij}(X, Y)f_j$$

eşitliğinden dolayı

$$\begin{aligned}
g(R(X, Y)e_i, e_j) &= R_{ij}(X, Y) \\
g(R(X, Y)e_i, f_j) &= -\widetilde{R}_{ij}(X, Y)
\end{aligned} \tag{8.3.3}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
R(X, Y)e_i &= \sum_{j=1}^{n} g(R(X, Y)e_i, e_j)e_j - g(R(X, Y)e_i, f_j)f_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} (g(R(X, Y)e_i, e_j) - ig(R(X, Y)e_i, f_j))e_j
\end{aligned} \tag{8.3.4}$$

elde edilir. $\Omega_{ij} = g(R(X, Y)e_i, e_j) - ig(R(X, Y)e_i, f_j) \in \mathbb{C}$ denirse ve $X = \sum_{k=1}^{2n} X^k e_k, Y = \sum_{l=1}^{2n} Y^l e_l$ eşitliklerini yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Omega_{ij} &= g(R(X, Y)e_i, e_j) - ig(R(X, Y)e_i, f_j) \\
&= \sum_{k,l=1}^{2n} R_{klij} - iR_{kli(n+j)} X^k Y^l \\
&= \sum_{k,l=1}^{2n} R_{klij} - iR_{kli(n+j)} e^k(X) e^l(Y) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{2n} R_{klij} - iR_{kli(n+j)} (e^k \wedge e^l)(X, Y)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\Omega^{\widetilde{\omega}} = \frac{1}{4}\sum_{i<j}(\sum_{k,l=1}^{2n} R_{klij} - iR_{kli(n+j)}e^k \wedge e^l)e_ie_j$$

elde edilir.

$$\nabla\nabla\psi = \frac{1}{4}\sum_{i<j}(\sum_{k,l=1}^{2n} R_{klij} - iR_{kli(n+j)}e^k \wedge e^l)e_ie_j.\psi$$

Şimdi de $4\sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha.(\nabla\nabla\psi)(X, e_\alpha)$ ifadesinin eşitini bulmaya çalışalım.

$$\begin{aligned}
4\sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha.(\nabla\nabla\psi)(X, e_\alpha) &= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i<j}\sum_{k,l=1}^{2n}(R_{klij} - iR_{kli(n+j)})e^k \wedge e^l(X, e_\alpha)e_\alpha e_ie_j.\psi \\
&= \sum_{l=\alpha=1}^{n}\sum_{i<j}\sum_{k=1}^{2n}(R_{k\alpha ij} - iR_{k\alpha i(n+j)})e^k(X)e_\alpha e_ie_j.\psi \\
&\quad - \sum_{k=\alpha=1}^{n}\sum_{i<j}\sum_{l=1}^{2n}(R_{\alpha lij} - iR_{\alpha li(n+j)})e^l(X)e_\alpha e_ie_j.\psi \\
&= 2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i<j}\sum_{k=1}^{2n}(R_{k\alpha ij} - iR_{k\alpha i(n+j)})e^k(X)e_\alpha e_ie_j.\psi \\
&= -2\sum_{i=\alpha=1}^{n}\sum_{i<j}\sum_{k=1}^{2n}(R_{kiij} - iR_{kii(n+j)})e^k(X)e_j.\psi \\
&\quad +2\sum_{j=\alpha=1}^{n}\sum_{i<j}\sum_{k=1}^{2n}(R_{kjij} - iR_{kji(n+j)})e^k(X)e_\alpha e_ie_j.\psi \\
&\quad +2\sum_{\alpha\neq i,j}^{n}\sum_{k=1}^{2n}(R_{k\alpha ij} - iR_{k\alpha i(n+j)})e^k(X)e_\alpha e_ie_j.\psi \\
&= -2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2n}(R_{kiij} - iR_{kii(n+j)})e^k(X)e_j.\psi \\
&\quad +2\sum_{\alpha\neq i,j}^{n}\sum_{k=1}^{2n}(R_{k\alpha ij} - iR_{k\alpha i(n+j)})e^k(X)e_\alpha e_ie_j.\psi
\end{aligned}$$

$\sum_{\alpha\neq i,j}^{n}\sum_{k=1}^{2n}(R_{k\alpha ij} - iR_{k\alpha i(n+j)})e^k(X)e_\alpha e_ie_j = 0$ olduğundan,

$$4\sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha.(\nabla\nabla\psi)(X, e_\alpha) = -2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2n}(R_{kiij} - iR_{kii(n+j)})e^k(X)e_j.\psi \quad (8.3.5)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi de $4\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha.(\nabla\nabla\psi)(X, f_\alpha)$ ifadesinin eşitini bulmaya çalışalım.

$$4\sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha.(\nabla\nabla\psi)(X,e_\alpha) =$$
$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i<j}\sum_{k,l=1}^{2n}(R_{klij}-iR_{kli(n+j)})(e^k\wedge e^l)(X,e_\alpha)f_\alpha e_i e_j.\psi$$
$$=\sum_{l=\alpha=1}^{n}\sum_{i<j}\sum_{l=n+\alpha,k=1}^{2n}(R_{k(n+\alpha)ij}-iR_{k(n+\alpha)i(n+j)})e^k(X)f_\alpha e_i e_j.\psi$$
$$-\sum_{k=\alpha=1}^{n}\sum_{i<j}\sum_{k=n+\alpha,l=1}^{2n}(R_{(n+\alpha)lij}-iR_{(n+\alpha)li(n+j)})e^l(X)f_\alpha e_i e_j.\psi$$
$$=2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i<j}\sum_{k=1}^{2n}(R_{k(n+\alpha)ij}-iR_{k(n+\alpha)i(n+j)})e^k(X)ie_\alpha e_i e_j.\psi$$
$$=-2\sum_{i=\alpha=1}^{n}\sum_{i<j}\sum_{k=1}^{2n}(R_{k(n+i)ij}-iR_{k(n+i)i(n+j)})e^k(X)ie_j.\psi$$
$$+2\sum_{j=\alpha=1}^{n}\sum_{i<j}\sum_{k=1}^{2n}(R_{k(n+j)ij}-iR_{k(n+j)i(n+j)})e^k(X)ie_i.\psi$$
$$+2\sum_{\alpha\neq i,j}^{n}\sum_{k=1}^{2n}(R_{k\alpha ij}-iR_{k\alpha i(n+j)})e^k(X)e_\alpha e_i e_j.\psi$$
$$=-2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2n}(R_{k(n+i)ij}-iR_{k(n+i)i(n+j)})e^k(X)f_j.\psi$$
$$+2\sum_{\alpha\neq i,j}^{n}\sum_{k=1}^{2n}(R_{k\alpha ij}-iR_{k\alpha i(n+j)})e^k(X)f_\alpha e_i e_j.\psi$$

$\sum\limits_{\alpha\neq i,j}^{n}\sum\limits_{k=1}^{2n}(R_{k\alpha ij}-iR_{k\alpha i(n+j)})e^k(X)f_\alpha e_i e_j=0$ olduğundan,

$$4\sum_{\alpha=1}^{n}e_\alpha.(\nabla\nabla\psi)(X,e_\alpha)=-2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2n}(R_{k(n+i)ij}-iR_{k(n+i)i(n+j)})e^k(X)f_j.\psi \tag{8.3.6}$$

eşitliği elde edilir. (8.3.5) eşitliğinde $X=\sum\limits_{l=1}^{n}X^l e_l+\widetilde{X}^l f_l$ yazılırsa;

$$-2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2n}((R_{kiij}-iR_{kii(n+j)})X^k+(R_{(n+k)iij}-iR_{(n+k)ii(n+j)})\widetilde{X}^k)e_j$$
$$=-2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2n}((g(R(e_k,e_i)e_i,e_j)-ig(R(e_k,e_i)e_i,f_j))X^k$$
$$+(g(R(f_k,e_i)e_i,e_j)-ig(R(f_k,e_i)e_i,f_j))\widetilde{X}^k)e_j$$
$$=-2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2n}((g(R(X,e_i)e_i,e_j)-ig(R(X,e_i)e_i,f_j))e_j$$
$$=-2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2n}((g(R(X,e_i)e_i,e_j)e_j-g(R(X,e_i)e_i,f_j))f_j$$

eşitliği elde edilir.

Yine benzer şekilde (8.3.6) eşitliğinde $X = \sum_{l=1}^{n} X^l e_l + \widetilde{X}^l f_l$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&-2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2n}((R_{k(n+i)ij} - iR_{k(n+i)i(n+j)})X^k + (R_{(n+k)(n+i)ij} \\
&-iR_{(n+k)(n+i)i(n+j)})\widetilde{X}^k)f_j \\
&= -2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2n}((g(R(e_k, f_i)e_i, e_j) - ig(R(e_k, f_i)e_i, f_j))X^k \\
&+(g(R(f_k, f_i)e_i, e_j) - ig(R(f_k, f_i)e_i, f_j))\widetilde{X}^k)f_j \\
&= -2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2n}((g(R(X, f_i)e_i, e_j) - ig(R(X, f_i)e_i, f_j))f_j \\
&= -2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2n}((g(R(X, f_i)e_i, e_j)f_j + g(R(X, f_i)e_i, f_j))e_j
\end{aligned}$$

(8.3.5) eşitliğinden (8.3.6) eşitliği çıkarılırsa ve bu eşitliklerin yukarıda bulunan son ifadeleri de kullanılırsa,

$$\sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha \cdot (\nabla\nabla\psi)(X, e_\alpha) - f_\alpha \cdot (\nabla\nabla\psi)(X, f_\alpha) = -\frac{1}{2}Ric(X) \tag{8.3.7}$$

eşitliği elde edilir. Diğer bir ifadeyle,

$$\sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha \cdot R(X, e_\alpha) - f_\alpha \cdot R(X, f_\alpha) = -\frac{1}{2}Ric(X) \tag{8.3.8}$$

eşitliği bulunmuş olur.

R skalar eğrilik olmak üzere,

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i Ric(e_i) - f_i Ric(f_i) = \frac{R}{2} \tag{8.3.9}$$

olduğunu gösterelim. $R(e_i, e_j)e_k = \sum_{l=1}^{n} X^l e_l + \widetilde{X}^l f_l$ eşitliğinde $X^l = g(R(e_i, e_j)e_k, e_l)$ ve $\widetilde{X}^l = -g(R(e_i, e_j)e_k, f_l)$ dir. Dolayısıyla,

$$R(e_i, e_j)e_k = \sum_{l=1}^{n} g(R(e_i, e_j)e_k, e_l)e_l - g(R(e_i, e_j)e_k, f_l)f_l \tag{8.3.10}$$

eşitliği vardır. (6.2.6) eşitliğinden dolayı

$$\begin{aligned}
Ric(e_i) &= \sum_{l,k=1}^{n} g(R(e_i,e_k)e_k,e_l)e_l - g(R(e_i,e_k)e_k,f_l)f_l \\
& \quad -g(R(e_i,f_k)f_k,e_l)e_l + g(R(e_i,f_k)f_k,f_l)f_l \\
Ric(f_i) &= \sum_{l,k=1}^{n} g(R(f_i,e_k)e_k,e_l)e_l - g(R(f_i,e_k)e_k,f_l)f_l \\
&= -g(R(f_i,f_k)f_k,e_l)e_l + g(R(f_i,f_k)f_k,f_l)f_l
\end{aligned} \tag{8.3.11}$$

olur. Bunlar kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} e_i Ric(e_i) - f_i Ric(f_i) = \sum_{i,k,l=1}^{n} g(R(e_i,e_k)e_k,e_l)e_ie_l - g(R(e_i,e_k)e_k,f_l)e_if_l \\
&-g(R(e_i,f_k)f_k,e_l)e_ie_l + g(R(e_i,f_k)f_k,f_l)e_if_l - g(R(f_i,e_k)e_k,e_l)f_ie_l \\
&+g(R(f_i,e_k)e_k,f_l)f_if_l + g(R(f_i,f_k)f_k,e_l)f_ie_l - g(R(f_i,f_k)f_k,f_l)f_if_l \\
&= \sum_{i,k,l=1}^{n} g(R(e_i,e_k)e_k,e_l)e_ie_l - g(R(e_i,e_k)e_k,f_l)e_if_l \\
&-g(R(e_i,f_k)f_k,e_l)e_ie_l + g(R(e_i,f_k)f_k,f_l)e_if_l + g(R(f_i,e_k)e_k,e_l)e_lf_i \\
&+g(R(f_i,e_k)e_k,f_l)f_if_l + g(R(f_l,f_k)f_k,e_i)e_if_l - g(R(f_i,f_k)f_k,f_l)f_if_l \\
&= \sum_{i,k,l=1}^{n} [g(R(e_i,e_k)e_k,e_l) - g(R(e_i,f_k)f_k,e_l) - g(R(f_i,e_k)e_k,f_l) \\
&+g(R(f_i,f_k)f_k,f_l)]e_ie_l + [-g(R(e_i,e_k)e_k,f_l) + g(R(e_i,f_k)f_k,f_l) \\
&+g(R(f_l,e_k)e_k,e_i) - g(R(f_l,f_k)f_k,e_i)]ie_ie_l
\end{aligned}$$

Burada $i \neq l$ olması durumunda birbirini götürüyor, ancak $i = l$ olması durumunda,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} e_i Ric(e_i) - f_i Ric(f_i) = \sum_{i,k=1}^{n} - [g(R(e_i,e_k)e_k,e_i) - g(R(e_i,f_k)f_k,e_i) \\
&-g(R(f_i,e_k)e_k,f_i) + g(R(f_i,f_k)f_k,f_i)] - i[-g(R(e_i,e_k)e_k,f_i) \\
&+g(R(f_i,e_k)e_k,e_i) - g(R(f_i,f_k)f_k,e_i) + g(R(e_i,f_k)f_k,f_i)] = -R
\end{aligned}$$

olacağından,

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i Ric(e_i) - f_i Ric(f_i) = \frac{R}{2} \tag{8.3.12}$$

eşitliği bulunur.(8.3.8) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} e_j R(e_i, e_j) - f_j R(e_i, f_j) &= -\frac{1}{2} Ric(e_i) \\ \sum_{j=1}^{n} e_j R(f_i, e_j) - f_j R(f_i, f_j) &= -\frac{1}{2} Ric(f_i)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikten birincisini e_i ile ikincisini f_i ile çarpalım. Bu durumda, (8.3.12) eşitliğinden

$$\sum_{j=1}^{n} e_i e_j R(e_i, e_j) - e_i f_j R(e_i, f_j) - f_i e_j R(f_i, e_j) + f_i f_j R(f_i, f_j) = \frac{R}{2} \quad (8.3.13)$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak, (8.3.2) eşitliğinden dolayı

$$D^2\psi = \Delta\psi + \frac{R}{4}\psi$$

elde edilir. ■

9 TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Klasik spinor teorisindeki spinor demedi, spinorların kovaryant türevi, vektör alanları ile spinorların çarpımı ve Dirac operatörü gibi kavramların herbirinin benzerleri Kahler Norden spin manifoldu olarak adlandırılmış olan manifoldlar için de elde edilmiştir. Klasik durumda geçerli olan bazı formüllerin de bu manifoldlar için de geçerli olduğu gösterilmiştir.

Klasik durumdaki Killing spinor, Paralel spinor, Harmonik spinor gibi özel tipteki spinorlar alttaki manifold hakkında bilgi içerirler. Kahler Norden spin manifoldları üzerinde tanımlamış olduğumuz spinorlar içinde benzer tipteki spinorların incelenmesi ve manifoldun yapısıyla ilintilendirilmesi açık bir sorudur. Klasik durumda spinorların Lie türevleri tanımlıdır. Kahler Norden spin manifoldu üzerindeki spinorlar için de Lie türevinin varlığı bir araştırma problemidir.

Tanımlanmış olan D Dirac operatörünün eliptiklik özelliği, self-adjointliği açık problem olarak kalmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Brauer, R., Weyl, H., "Spinors in n-dimensions", *Amer. J. Math.* **57**, 425-449, 1935.

[2] Cartan, E., "Theory of Spinors", Hermann, Paris, 1937.

[3] Friedrich, T., *Dirac Operators in Riemannian Geometry,* 2000.

[4] Lawson, H. B., Michelsohn, M. L., *Spin Geometry,* Princeton Univ., 1989.

[5] Ganhev, G. and Ivanov, S., "Connections and Curvatures on Complex Riemannian Manifold", *Internal I.C.T.P.-Trieste*, 1991.

[6] Teofilova, M., "Complex Connections on Complex Manifolds With Norden Metric", *Contemporary Aspects of Complex Analysis, Diferential Geometry and Mathematical Physics, World Sci. Publ.*, Singapore, 326-335, 2005.

[7] Sluka, K., "On the Curvature of Kahler-Norden manifolds", *Journal of Geom. and Phy.* **54**, 131-145, 2005.

[8] Borowiec, A., Francaviglia, M. and Volovich, I., "Anti-Kahlerian Manifolds", *Diff. Geom. Appl.*, **12**, 281-289, 2000.

[9] Mekerov, D., Manev, M., Gribachev, K., "Quasi-Kahler Manifolds with a pair of Norden Metrics", *Results in Mathematics*, **49**(1-2) 161-170, 2006.

[10] Karapazar Ş., *Reel Clifford Cebirlerinin temsilleri*, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2004.

[11] Harvey, F.R., *Spinors and Calibrations*, Academic Press, 1990.

[12] Baker, A., *Matrix Groups*, Springer-Verlag, 2002.

[13] Fulton, W, Harris, J., *Representation theory: A first Course*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[14] Lee, J.M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag, 2003.

[15] Kobayashi, S., Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, **II**, 1969.

[16] O'neill, B., *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, 1983.

[17] Morita, S., *Geometry of Differential forms*, AMS, 2001.

[18] Salamon, D., *Spin Geometry and Seiberg-Witten Invariants*, 1996.

[19] Naber, G., *Topology, Geometry, and Gauge Fields*, Springer-Verlag, 1997.

[20] Limoncu, M., *Newton-Levy-Leblond Denklemleri*, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2005.

[21] Habermann, K., Habermann, L., *Introduction to Symplectic Dirac Operators*, Springer-Verlag, 2006.

[22] Olszak, K., "On the Bochner Conformal Curvature of Kahler-Norden manifolds", *Central European Science Journals*, **3**(2), 309-317, 2005.

[23] Kim, J., Do, K., "4-dimensional Anti-Kahler Manifolds and Weyl Curvature", *Czechoslovak Math. Journal*, **56**(131), 267-271, 2006.

[24] Salimov, A., Iscan, M., "On Kahler-Norden manifolds", *Proceedings Mathematical Sciences*, 2008.