MİNKOWSKİ UZAYI ÜZERİNDE SPİNÖRLER

İlhan KORKMAZ
Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı
Eylül – 2009

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

İlhan Korkmaz'nin **"Minkowski Uzayı Üzerinde Spinörler"** başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 23 Eylül 2009 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	**:**	**Doç. Dr. NEDİM DEĞİRMENCİ**	....
Üye	**:**	**Doç. Dr. MURAT TANIŞLI**	....
Üye	**:**	**Yard. Doç. Dr. MURAT LİMONCU**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve ....sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MİNKOWSKİ UZAYI ÜZERİNDE SPİNÖRLER

İlhan KORKMAZ

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: **Doç. Dr. Nedim Değirmenci**
2009, 105 sayfa

Bu çalışmada öncelikle Lorentz metriği ile donatılmış iç çarpım uzaylarının ve $\mathcal{M}$ Minkowski uzayının özellikleri incelenmiştir. $\mathcal{L}$ Lorentz grubunun elemanlarının yapısı irdelenmiş ve Lorentz grubunun bazı altgrubları elde edilmiştir. $SL(2,\mathbb{C})$ kompleks özel lineer grubundan $\mathcal{L}$ Lorentz grubuna giden 2 ye 1 ve örten bir grup homomorfizmi açık olarak yazılmıştır. $\mathcal{M}$ Minkowski uzayı üzerindeki (r,s)-tipinden tensörlerin uzayı tanımlanmış ve bu uzay için taban verilmiştir. Bir tensörün bu tabana göre bileşenleri tanımlanmış, sonrada bir tensörün farklı iki tabana göre yazılan tensör bileşenleri arasındaki dönüşüm kuralı elde edilmiştir. $\mathcal{B}$ Spin uzayı, spin çatısı, $\mathcal{B}^*$ dual spin uzayı $\bar{\mathcal{B}}$ eşlenik spin uzayı ve $\bar{\mathcal{B}}^*$ eşlenik dual uzayları tanımlanmıştır. Bu uzayların keyfi sayıdaki kartezyen çarpımından $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismine giden katlı lineer dönüşümler spinörler olarak gözönüne alınmıştır. Tensörlerde olduğu gibi, bir spinörün spin çatısına göre bileşenleri tanımlanmış ve sonrada herhangi iki spin çatısına göre bir spinörün bileşenleri arasındaki dönüşüm kuralları elde edilmiştir. Infeld-Van der Waerden sembolleri kullanılarak $\mathcal{M}$ üzerindeki tensörler ile $\mathcal{B}$ üzerindeki bazı özel tipteki spinörler arasında bire bir eşlemeler verilmiştir. Son olarak da bu eşleme ilişkilerinin birkaç özel durumda açık ifadeleri yazılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Minkowski uzayı, Lorentz grubu, spin dönüşümleri, world-tensör, spin uzayı, spinör.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

SPINORS ON MİNKOWSKİ SPACE

İlhan KORKMAZ

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: **Assoc. Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ**
2009, 105 pages

In this work firstly some properties of the spaces which are endowed with Lorentzian metric and the Minkowski space $\mathcal{M}$ are investigated.

The structure of the elements of the Lorentz group $\mathcal{L}$ is studied and some subgroubs of $\mathcal{L}$ is obtained. A 2-1, onto group homomorphism from the special complex linear group $SL(2, C)$ to Lorentz group $\mathcal{L}$ is written explicitly. The space of tensors of type (r,s) over the Minkowski space $\mathcal{M}$ is defined and a basis given for this space. The components of a tensor with respect to this basis are defined, then a transformation rule is obtained between the components of a tensor with respect to two different basis. The spin space $\mathcal{B}$, the dual spin space $\mathcal{B}^*$, the conjugate spin space $\bar{\mathcal{B}}$ and the conjugate dual space $\bar{\mathcal{B}}^*$ are defined. Spinors are considered as multilinear maps from the arbitrary number of cartesian product of these spin spaces to the the set of complex numbers $\mathbb{C}$. As in the tensors the components of a spinor with respect to a spin frame are defined, then transformation rules are obtained between the spinor components which are associated to two different spin frame. By using the Infeld-Van der Waerden symbols, some one to one correspondences are given from the space of tensors on $\mathcal{M}$ to some special kinds of spinors on $\mathcal{B}$. Lastly these correspondences are written explicitly in some special cases.

Keywords: Minkowski space, Lorentz group, spin transformations, tensors, spin space, spinors.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen sayın İsmail Çuvalcı ve sayın Mehmet Ergen'e, desteklerinden dolayı en içten teşekkürlerimi sunarım.

İlhan KORKMAZ
EYLÜL 2009

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISLTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{M}$	:	Minkowski uzayı
$g(v,w) = v \cdot w$	:	v ve w vektörlerinin iç çarpımı
$W^{\perp}$	:	W nun orthogonal tümleyeni
$\eta_{ab} = \eta^{ab}$	:	η nın girdileri
$\wedge = [\wedge^a{}_b]$	:	bir ortogonal dönüşümün matrisi
$\left[\wedge_a{}^b\right]$	:	$[\wedge^a{}_b]$ matrisinin tersi
$\mathcal{L}_{GH}$	:	Genel homojen Lorentz grubu
$\mathcal{L}$	:	Lorentz grubu
$\mathcal{R}$	:	$\mathcal{L}$ nin rotasyon alt grubu
$L(\theta)$	:	Hiperbolik Lorentz grubu
$A^{CT} = A^*$	:	A nın eşlenik transpozu
$\mathbb{C}^{2\times 2} = \mathbb{C}(2)$	:	2×2 lik kompleks matrisler kümesi
σ_a	:	Pauli spin matrisleri
$SL(2,\mathbb{C})$	:	kompleks özel lineer grup
$\wedge_A$	:	A nın spinör dönüşümü altındaki görüntüsü
SU_2	:	Üniter matrisler kümesi
$L_{ab} = L(e_a, e_b)$	:	L bilineer formunun bileşenleri
$\mathcal{M}^*$	:	$\mathcal{M}$ vektör uzayının duali
$\{e^a\}$	:	$\mathcal{M}^*$ ın $\{e_a\}$ ya dual olan tabanı
$\otimes$	:	tensör (ya da outer) çarpımı
$\mathcal{T}_s^r$	:	$\mathcal{M}$ üzerindeki world tensörlerin vektör uzayı
$L^{a_1 \ldots a_r}{}_{b_1 \ldots b_s}$	:	$L \in \mathcal{T}_s^r$ elemanının bileşenleri
$\mathcal{M}^{**} = (\mathcal{M}^*)^*$	:	$\mathcal{M}$ nin ikinci duali
$Spin$	:	Spinör dönüşümü
$A, B, C, \ldots$	:	$1, 0$ değerlerini alan spinör indisleri
$\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \ldots$	:	$\dot{1}, \dot{0}$ değerlerini alan eşlenik spinör indisleri
$G = \left[G_A{}^B\right]$	:	$SL(2,\mathbb{C})$ nin elemanı
$\bar{G} = \left[\bar{G}_{\dot{X}}{}^{\dot{Y}}\right]$	:	G nin eşleniği
$\mathcal{B}$	:	Spin uzayı
f	:	$\mathcal{B}$ üzerinde skew-simetrik "iç çarpım"
$\left\{s^A\right\}, \left\{\hat{s}^A\right\}, \ldots$	:	spin çatıları
$\mathcal{B}^*$	:	dual spin uzayı
$\mathcal{G} = [\mathcal{G}^A{}_B]$	:	$\left[G_A{}^B\right]$ nin tersinin transpozu
$\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \times \{1\}$	:	$\mathcal{B}$ nın "eşleniği" (eşlenik spin uzayı)
$\left\{\bar{s}^{\dot{X}}\right\}, \left\{\bar{\hat{s}}^{\dot{X}}\right\}, \ldots$	:	eşlenik spin çatıları

$\bar{\mathcal{G}} = \left[\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}\right]$	:	$\mathcal{G} = \left[\mathcal{G}^{A}{}_{B}\right]$ nin eşleniği
$\bar{\mathcal{B}}^{*}$	:	eşlenik dual spin uzayı
$\left\{\bar{s}_{\dot{X}}\right\}, \left\{\bar{\hat{s}}_{\dot{X}}\right\}, ...$	:	eşlenik dual spin çatıları
$\begin{pmatrix} r & : & s \\ m & : & n \end{pmatrix}$	:	bir spinörün valansı
$\xi^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_s}{}_{B_1...B_m\dot{Y}_1...\dot{Y}_n}$	:	spinörün bileşenleri
$\mathcal{B}^{rs}_{mn}$	:	$\begin{pmatrix} r & : & s \\ m & : & n \end{pmatrix}$ valansında spinörlerin vektör uzayı
$C_{kl}(\xi), C_{\dot{k}\dot{l}}(\xi), ...$	:	ξ nin kontraksiyonları
$\sigma_a^{A\dot{X}}, \sigma^a_{A\dot{X}}$	:	İnfeld-van der Waerden sembolleri
$V^{A\dot{X}}$	:	$v \in \mathcal{M}$ world vektörünün spinör denginin bileşenleri
$V_{A\dot{X}}$	:	$v^{*} \in \mathcal{M}^{*}$ world ko-vektörünün spinör denginin bileşenleri
$F_{A\dot{X}B\dot{Y}}$	:	F bilineer dönüşümünün spinör denginin bileşenleri
ϕ_{AB}	:	$F_{A\dot{X}B\dot{Y}}$ bileşenleri ile belli spinörün belirlediği simetrik spinör

1 GİRİŞ

Spinorlar, tıpkı tensörler gibi matematikte [1, 2] ve fizikte özellikle görecelilik teorisinde [3 − 5] pek çok uygulaması olan objelerdir. Ancak fizikçilerin kullandığı spinorlar ile matematikçilerin kullandığı spinorlar farklıdır. Matematikçiler açısından spinorlar vektörel objelerdir multilineerlik özellikleri yoktur. Fizikçiler açısından spinorler $\mathcal{B} = \mathbb{C}^2$ uzayı üzerinde tanımlı $\mathbb{C}$ değerli katlı lineer dönüşümlerdir. Bu özellikleri bakımından tensörlere benzerler. Bu çalışmada spinorler multilineer objeler olarak ele alınacaktır, herhangi bir fiziksel uygulamasına değinilmeyip sadece cebirsel olarak incelenecektir.

Şimdi bazı temel tanımlar verilecektir. [6, 7] kaynakları, bu bölüm ile ilgili daha ayrıntılı bilgiye ulaşılabilecek kaynaklardan iki tanesi olarak verilebilir.

Tanım 1.1 *V n-boyutlu ($n \geq 1$) reel vektör uzayı olsun. $g : V \times V \to \mathbb{R}$ dönüşümü verilsin. Eğer g dönüşümü $\forall v_1, v_2, w_1, w_2, v, w \in V$ ve $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ için*

$$\begin{aligned} g(a_1v_1 + a_2v_2, w) &= a_1g(v_1, w) + a_2g(v_2, w) \\ g(v, a_1w_1 + a_2w_2) &= a_1g(v, w_1) + a_2g(v, w_2) \end{aligned}$$

*şartlarını sağlarsa g ye V üzerinde bir **bilineer form** denir.*

Tanım 1.2 *Eğer her $\forall v, w \in V$ için*

$$g(w, v) = g(v, w)$$

*sağlanıyorsa g ye **simetrik** bilineer form denir.*

Tanım 1.3 *Eğer $\forall w \in V$ için*

$$g(v, w) = 0, \quad iken \quad v = 0 \quad ise$$

*g ye **nondejenere** bilineer form denir.*

Tanım 1.4 *g bir nondejenere simetrik bilineer form ise g ye* ***iç çarpım*** *adı verilir. (v,w) nun g altında görüntüsü $g(v,w)$ genellikle $g(v,w) := v \cdot w$ olarak gösterilir. Standart örnek $\mathbb{R}^n$ de bilinen iç çarpımdır;*

$v = (v^1, ..., v^n), w = (w^1, ..., w^n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$g(v,w) = v \cdot w = v^1 w^1 + ... + v^n w^n$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 1.5 *g bir iç çarpım olmak üzere $\forall v \in V,\ v \neq 0$ için $g(v,v) > 0$ [$g(v,v) < 0$] ise g ye* ***pozitif [negatif] tanımlı*** *denir. Pozitif yada negatif tanımlı olmayan iç çarpımlara* ***tanımsızdır*** *denir.*

Örnek 1.1 *$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dönüşümü*

$$g_1(v,w) = v^1 w^1 + ... + v^{n-1} w^{n-1} - v^n w^n$$

olrak tanımlansın. g tanımsız bir iç çarpımdır. g nin bilineer ve simetrik oluşu açıktır. g nondejenere mi? $\forall w \in \mathbb{R}^n$ için

$$g(v,w) = 0$$

olsun. Bu durumda $w = e_i \in \mathbb{R}^n$ ($i = 1, ..., n$) için

$$g(v,e_i) = 0$$

olur. Ayrıca

$$g(v,e_i) = \begin{cases} v^i, & i = 1, ..., n-1 \\ -v^i, & i = n \end{cases}$$

olduğundan $v = 0$ elde edilir. Bundan dolayı g nondejeneredir.

$v = (2,0,...,0,2), w = (1,0,...,0,2), z = (2,0,...,0) \in \mathbb{R}^n$ için;

$$\begin{aligned} g(v,v) &= 0 \\ g(w,w) &= -3 < 0 \\ g(z,z) &= 4 > 0 \end{aligned}$$

örnekleri gereğince g tanımsız bir iç çarpımdır.

Tanım 1.6 *V üzerinde bir g iç çarpımı için $v, w \in V$ için $g(v, w) = 0$ oluyorsa v ve w vektörlerine g-**ortogonal** ya da **ortogonal** vektör denir.*

W, V nin bir alt uzayı olmak üzere W nun **ortagonal tümleyeni**, $W^{\perp}$ ile gösterilir ve

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid g(v, w) = 0, \quad \forall w \in W\}$$

olarak tanımlanır.

Yardımcı Teorem 1.1 *$W^{\perp}$ kümesi V nin alt uzayıdır.*

İspat. $v_1, v_2 \in W^{\perp}$, $w \in W$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $v_1 + v_2 \overset{?}{\in} W^{\perp}$ ve $av_1 \overset{?}{\in} W^{\perp}$;

$v_1, v_2 \in W^{\perp}$ ve $w \in W$ olduğundan $g(v_1, w) = g(v_2, w) = 0$ olup, g nin bilineerliği kullanılarak:

$$g(v_1 + v_2, w) = g(v_1, w) + g(v_2, w) = 0 + 0 = 0, \qquad \forall w \in W$$

elde edilir. Buradan $v_1 + v_2 \in W^{\perp}$ olur. Benzer şekilde

$$g(av_1, w) = ag(v_1, w) = 0, \qquad \forall w \in W$$

olduğundan $av_1 \in W^{\perp}$ elde edilir. ■

Tanım 1.7 *V vektör uzayı g, V üzerinde bir iç çarpım olsun.*

$$\begin{aligned} Q &: V \to \mathbb{R}, \\ Q(v) &= g(v, v) = v \cdot v, \qquad \forall v \in V \end{aligned}$$

*olarak tanımlanan Q dönüşümüne g nin belirlediği **kuadratik form** denir.*

Teorem 1.1 *V n-boyutlu reel vektör uzayı, $g : V \times V \to \mathbb{R}$ dönüşümü bir nondejenere simetrik bilineer form olsun. Bu durumda V için $\{e_1, ..., e_n\}$ tabanı vardır öyleki $i, j \in \{1, ..., n\}$*

$$\begin{array}{rclcc} i & \neq & j & \textit{iken} & g(e_i, e_j) = 0 \\ i & = & 1, ..., n & \textit{iken} & Q(e_i) = \mp 1 \end{array}$$

dir. Dahası $Q(e_i) = -1$ olan e_i vektörlerinin sayısı her ortanormal taban için aynıdır.

İspat. Gözlemlenecek olursa;

g nondejenere olduğundan, $g(v, w) \neq 0$ olacak şekilde bir (v, w) vektör çifti vardır. Buradan $Q(u) \neq 0$ olacak şekilde bir $u \in V$ vardır. Gerçekten;

$Q(v)$ veya $Q(w)$ sıfırdan farklı ise istenilen sağlanır. Öte yandan

$$Q(v) = Q(w) = 0$$

ise

$$\begin{aligned} Q(v + w) &= Q(v) + 2g(v, w) + Q(w) \\ &= 2g(v, w) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $u = v + w$ alınırsa $Q(u) \neq 0$ olur. Tümevarım yönteminden;

$n = 1$ ise $Q(u) \neq 0$ olacak şekilde $u \in V$ seçip

$$e_1 = (|Q(u)|)^{-1/2} u$$

tanımlanırsa, $Q(e_1) = \mp 1$ olup, $\{e_1\}$ istenilen tabandır.

$n > 1$ olsun ve boyutu n den küçük olan her vektör uzayı üzerindeki her iç çarpım için istenilen şekilde bir taban olduğu kabul edelsin. V nin boyutu n olsun. Yine $Q(u) \neq 0$ olacak şekilde $u \in V$ vektörü seçilsin.

$$e_n = (|Q(u)|)^{-1/2} u$$

olarak tanımlanırsa, $Q(e_n) = \mp 1$ olur.

Şimdi $span\{e_n\}$ alt uzayı için W, V içinde $span\{e_n\}$ alt uzayının ortogonal tümleyeni olsun. Lemma dan W, V nin bir alt uzayıdır ve $e_n \notin W$ olduğundan $\dim W < n$ dir. g nin $W \times W$ üzerine kısıtlanmışı da bir iç çarpımdır. Böylece tümevarım hipotezi gereği $m = \dim W$ olmak üzere, W nın bir $\{e_1, ..., e_m\}$ tabanı vardır öyleki

$$\begin{aligned} i &\neq j & \text{iken} \qquad & g(e_i, e_j) = 0 \\ i &= 1, ..., m & \text{iken} \qquad & Q(e_i) = \mp 1 \end{aligned}$$

dir. Görülür ki, $m = n - 1$ dir ve $\{e_1, ..., e_m, e_n\}$, V için bir tabandır. Gerçekten;

$e_1, ..., e_m, e_n$ vektörleri lineer bağımsızdır. $a_1, ..., a_m, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$a_1 e_1 + ... + a_m e_m + a_n e_n = 0$$

olsun. $i = 1, 2, ..., m-1, m, n$ olmak üzere g nin bilineerliğinden;

$$\mp a_i = g(a_1 e_1 + ... + a_m e_m + a_n e_n, e_i) = 0$$

elde edilir. $\forall i$ için $a_i = 0$ olduğundan $e_1, ..., e_m, e_n$ vektörleri lineer bağımsızdır.

$m + 1 \leq n$ olduğundan $span\{e_1, ..., e_m, e_n\} = V$ olduğu gösterilirse istenilene ulaşılır. Bu nedenle $v \in V$ olmak üzere;

$$w = v - (Q(e_n) g(v, e_n))\, e_n$$

vektörü tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} g(w, e_n) &= g(v - (Q(e_n) g(v, e_n))\, e_n, e_n) \\ &= g(v, e_n) - (Q(e_n) g(v, e_n))\, g(e_n, e_n) \\ &= g(v, e_n) - (Q(e_n))^2\, g(v, e_n) \\ &= g(v, e_n) - (\mp 1)^2\, g(v, e_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $w \in W$ dır. Bundan dolayı

$$w = w^1 e_1 + ... + w^m e_m$$

yazılabilir.

$$w = v - (Q(e_n) g(v, e_n))\, e_n$$

eşitliğinde w yerine yazılırsa

$$v = w^1 e_1 + ... + w^m e_m + (Q(e_n) g(v, e_n))\, e_n$$

elde edilir. Böylece $span\{e_1, ..., e_m, e_n\} = V$ olur.

$Q(e_i) = -1$ olacak şekilde e_i vektörlerinin sayısı r olmak üzere; bu r sayısının her ortanormal taban için aynı olduğunu göstermek için şöyle bir yöntem izlensin:

Eğer $r = 0$ ise sonuç açıktır. Çünkü her $v \in V$ için $Q(v) \geq 0$ olup, g pozitif tanımlı olur.

Eğer $r > 0$ ise V nin, üzerinde g nin negatif tanımlı olduğu alt uzayları olacaktır ve g nin negatif tanımlı olduğu maksimal boyutlu alt uzayları olacaktır. Gösterilecektir ki, r sayısı bu şekildeki bir maksimal boyutlu alt uzay olan W nın boyutudur ve tabandan bağımsızdır.Taban elemanları yazılırsa;

$\{e_1, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_n\}$, $i = 1, ..., r$ için $Q(e_i) = -1$, $i = r+1, ..., n$ için $Q(e_i) = +1$ olmak üzere, $\mathcal{X} = span\{e_1, ..., e_r\}$, V nin alt uzayıdır. Bu durumda g, $\mathcal{X}$ üzerinde negatif tanımlı ve $\dim \mathcal{X} = r$ olduğundan

$$\dim \mathcal{X} = r \leq \dim W" \tag{1.1}$$

bulunur.

$r \geq \dim W$ olduğunu göstermek için $T : W \longrightarrow \mathcal{X}$ dönüşümü,

$w = \sum\limits_{i=1}^{n} w^i e_i \in W$ için

$$Tw = \sum_{i=1}^{r} w^i e_i$$

olarak tanımlansın. T nin lineer olduğu açıktır.

$w,\ Tw=0$ olacak şekilde bir vektör olsun. Bu durumda $\forall i=1,...,r$ için $w^i=0$, buradan

$$\begin{aligned} Q(w) &= g\left(\sum_{i=r+1}^{n} w^i e_i, \sum_{j=r+1}^{n} w^j e_j\right) \\ &= \sum_{i,j=r+1}^{n} g(e_i,e_j) w^i w^j \\ &= \sum_{i=r+1}^{n} g(e_i,e_i)\left(w^i\right)^2 \\ &= \sum_{i=r+1}^{n} \left(w^i\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

bulunur. Fakat g, W üzerinde negatif tanımlı idi, bu durumda bu eşitsizliğin gerçeklenmesi için $i=r+1,....,n$ için $w^i=0$ olması gerekir, yani $w=0$ olmalıdır. Bundan dolayı $\ker T=\{0\}$ dır. Bu yüzden T, W dan $\mathcal{X}$ in bir alt kümesine izomofizmdir. Sonuç olarak

$$\dim W \leq \dim \mathcal{X} = r \tag{1.2}$$

olur. (1.1) ve (1.2) den sonuç elde edilir. ■

Tanım 1.8 *g için $Q(e_i)=-1$ olacak şekilde e_i lerin sayısı r ye g nin **indeksi** (**signature**) adı verilir. Genelde taban elemanlarının son r tanesi alınır. Yani;*

$\{e_1,....,e_{n-r},e_{n-r+1},...,e_n\}$ tabanı için $i=1,2,...,n-r$ için $Q(e_i)=+1$ ve $i=n-r+1,...,n$ için $Q(e_i)=-1$ olup,

$v=v^ie_i$ ve $w=w^ie_i$ olmak üzere,

$$g(v,w)=v^1w^1+...+v^{n-r}w^{n-r}-v^{n-r+1}w^{n-r+1}-...-v^nw^n$$

elde edilir.

2 MİNKOWSKİ UZAYI ve LORENTZ GRUBU

Bu bölümün ilk alt bölümünde, bir indefinite iç çarpım olan Lorentz iç çarpımı ve bu iç çarpımla birlikte Minkowski uzayı tanımlanacaktır. Ardından Minkowski uzayı üzerinde ortogonal dönüşümler ve bu ortogonal dönüşümlerin oluşturduğu matris grubu olan genel homojen Lorentz dönüşümleri verilecektir. İkinci alt bölümde ise bu grubun alt grupları belirlenecektir. Bu alt gruplardan, en azından bu tezin kapsamı içinde en önemlisi olan, Lorentz grubu, onun iki alt grubu olan rotasyon alt grubu ve hiperbolik alt grubu tanımlanıp, bir Lorentz dönüşümünün iki rotasyon ve bir hiperbolik Lorentz dönüşümü yardımıyla ifade edilebileceğini söyleyen bir teorem verilecektir. Üçüncü alt bölümde Lorentz grubu ve $SL(2,\mathbb{C})$ arasındaki ilişki incelenecek ve bu iki grup arasında $2-1$ bir örten homomorfizm tanımlanacaktır. Son alt bölümde ise Minkowski uzayı üzerinde tensörler bahsi kısaca özetlenecektir.

2.1 Minkowski Uzayı

Tanım 2.1 *$V=\mathbb{R}^4$ ve $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}=\{e_a\}\,,\mathbb{R}^4$ ün bir ortanormal tabanı olsun. $\mathbb{R}^4$ üzerinde, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}^4$ elemanları için $x=x^a e_a,\ y=y^b e_b$ olmak üzere;*

$$g:\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$$

$$g\left(x,y\right)=x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3-x^4y^4$$

*olarak tanımlı indeksi bir olan iç çarpıma **Lorentz iç çarpımı** denir. Ayrıca $\left(\mathbb{R}^4,g\right)$ bilineer uzayına **Minkowski Uzayı** adı verilir ve $\mathcal{M}$ ile gösterilir.*

g nin verilen $\{e_a\}$ ortanormal tabana göre matrisi $\eta=[\eta_{ab}]=\left[\eta^{ab}\right],\ a,b=1,2,3,4$ ile gösterilmek üzere $g\left(e_a,e_b\right)=\eta_{ab}=\eta^{ab}$ olup,

$$\eta=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca g bir indefinite iç çarpımdır.

Tanım 2.2 *$L : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ bir lineer dönüşüm olsun. $\forall\, x, y \in \mathcal{M}$ için $g(Lx, Ly) = g(x, y)$ eşitliği sağlanıyorsa L ye $\mathcal{M}$ nin bir $g-$**ortogonal** ya da sadece **ortogonal dönüşümü** denir.*

Yardımcı Teorem 2.1 *$\mathcal{M}$ üzerindeki iççarpım nondejenere olduğundan verilen bir ortogonal dönüşüm $1-1$ dir. Dolayısıyla bir izomorfizmdir.*

Teorem 2.1 *$L : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.*

a) L bir ortogonal dönüşümdür.

b) L, $\mathcal{M}$ nin kuadratik formunu korur. Yani

$$Q(Lx) = Q(x), \quad \forall x \in \mathcal{M}$$

c) L, $\mathcal{M}$ nin bir ortonormal tabanını, $\mathcal{M}$ nin bir ortanormal tabanına dönüştürür. Yani;

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\mathcal{M}$ nin bir ortanormal tabanı ise

$$\{\hat{e}_1 = Le_1, \hat{e}_2 = Le_2, \hat{e}_3 = Le_3, \hat{e}_4 = Le_4\}$$

kümesi de $\mathcal{M}$ nin bir ortanormal tabanıdır.

İspat. (**a**) $\Rightarrow$ (**b**)

L ortagonal bir dönüşüm olsun. Bu durumda

$$g(Lx, Ly) = g(x, y), \qquad \forall x, y \in \mathcal{M}$$

sağlanır. $\forall x \in \mathcal{M}$ için

$$Q(x) = g(x, x) = g(Lx, Lx) = Q(Lx)$$

elde edilir.

$(\mathbf{b}) \Rightarrow (\mathbf{a})$

$\forall x \in \mathcal{M}$ için

$$Q(x) = Q(Lx)$$

olsun.

$$\begin{aligned} g(Lx, Ly) &= \frac{1}{2}\left(Q(Lx + Ly) - Q(Lx) - Q(Ly)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(Q(L\left(x + y\right)) - Q(Lx) - Q(Ly)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\right) \\ &= g(x, y) \end{aligned}$$

elde edilir.

$(\mathbf{a}) \Rightarrow (\mathbf{c})$

L, ortogonal bir dönüşüm, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\mathcal{M}$ nin bir ortonormal tabanı olsun. $\{Le_1, Le_2, Le_3, Le_4\}$, kümesi $\mathcal{M}$ nin bir ortonormal tabanı mıdır?

$g(Le_i, Le_j) = g(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ \pm 1 & , \quad i = j \end{cases}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ olduğundan $\{Le_i\}_{i=1,2,3,4}$ kümesi ortonormal bir kümedir. $\{Le_1, Le_2, Le_3, Le_4\}$ lineer bağımsız mı?

$a_1 Le_1 + a_2 Le_2 + a_3 Le_3 + a_4 Le_4 = 0$ olsun. L, lineer dönüşümü ortagonal dönüşüm olduğundan izomorfizmdir. Böylece $L\left(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4\right) = 0$, ise $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 = 0$ olur. $\{e_i\}_{i=1,2,3,4}$ kümesi lineer bağımsız olduğundan $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ dır. $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ olduğundan $\{Le_i\}_{i=1,2,3,4}$ kümesi lineer bağımsızdır. Sonuç olarak, $\{Le_i\}_{i=1,2,3,4}$ kümesi ortanormal bir tabandır.

$(\mathbf{c}) \Rightarrow (\mathbf{a})$

$x = x^i e_i,\ y = y^i e_i$

$$\begin{aligned} g(Lx, Ly) &= g(L\left(x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^4 e_4\right), L\left(y^1 e_1 + y^2 e_2 + y^3 e_3 + y^4 e_4\right)) \\ &= g(x^1 Le_1 + x^2 Le_2 + x^3 Le_3 + x^4 Le_4, y^1 Le_1 + y^2 Le_2 + y^3 Le_3 + y^4 Le_4 \\ &= x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 - x^4 y^4 \\ &= g(x, y) \end{aligned}$$

elde edilir. L, ortogonal bir dönüşümdür. ■

$L : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ nin bir ortogonal dönüşümü ve $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\mathcal{M}$ nin bir ortonormal tabanı olsun. Son lemmadan $\{\hat{e}_1 = Le_1, \hat{e}_2 = Le_2, \hat{e}_3 = Le_3, \hat{e}_4 = Le_4\}$ kümesi de $\mathcal{M}$ nin bir ortonormal tabanıdır. Her bir e_u, $\hat{e}_a$ lar cinsinden yazılabilir:

$\wedge_u^a$ ler sabitler olmak üzere,

$$\begin{aligned} e_u &= \wedge^1{}_u \hat{e}_1 + \wedge^2{}_u \hat{e}_2 + \wedge^3{}_u \hat{e}_3 + \wedge^4{}_u \hat{e}_4, \quad u = 1, 2, 3, 4 \\ &= \wedge^a{}_u \hat{e}_a, \quad u = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

olur. Ortonormallik durumları göz önünde bulundurulursa

$$g(e_c, e_d) = \eta_{cd}, \quad c, d = 1, 2, 3, 4$$

olup

$$\wedge^1{}_c \wedge^1{}_d + \wedge^2{}_c \wedge^2{}_d + \wedge^3{}_c \wedge^3{}_d - \wedge^4{}_c \wedge^4{}_d = \eta_{cd}$$

yazılabilir ya da toplam ifadesiyle

$$\wedge^a{}_c \wedge^a{}_d \, \eta_{ab} = \eta_{cd}, \quad c, d = 1, 2, 3, 4 \tag{2.1}$$

elde edilir.

(2.1) eşitliğine denk olarak

$$\wedge^a{}_c \wedge^a{}_d \, \eta^{cd} = \eta^{ab}, \quad a, b = 1, 2, 3, 4 \tag{2.2}$$

verilebilir.

$\wedge = [\wedge^a{}_b]_{a,b=1,2,3,4}$ matrisi, L orthogonal dönüşümü ve $\{e_a\}$ orthonormal tabanı ile ilişkili matris olsun ve açık ifadeyle

$$\wedge = \begin{bmatrix} \wedge^1{}_1 & \wedge^1{}_2 & \wedge^1{}_3 & \wedge^1{}_4 \\ \wedge^2{}_1 & \wedge^2{}_2 & \wedge^2{}_3 & \wedge^2{}_4 \\ \wedge^3{}_1 & \wedge^3{}_2 & \wedge^3{}_3 & \wedge^3{}_4 \\ \wedge^4{}_1 & \wedge^4{}_2 & \wedge^4{}_3 & \wedge^4{}_4 \end{bmatrix}$$

olarak yazılsın. Dikkat edilirse $\wedge$ matrisi L^{-1} in $\{\hat{e}_a\}$ tabanına göre matrisidir. Ayrıca (2.1) eşitliği $\wedge$ matrisinin sütunlarının ikişer ikişer ortogonal birim vektörler olduğunu söyler. (2.2) eşitliği ise bunu $\wedge$ matrisinin satırları için söyler.

$\wedge$ matrisi koordinat dönüşüm matrisi olarakda düşünülebilir. Yani; $x \in \mathcal{M}$ verilsin. x vektörü, $\{e_a\}$ tabanına ve $\{\hat{e}_a\} = \{Le_a\}$ tabanına göre sırasıyla

$$\begin{aligned} x &= x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^4 e_4 = x^b e_b \\ x &= \hat{x}^1 \hat{e}_1 + \hat{x}^2 \hat{e}_2 + \hat{x}^3 \hat{e}_3 + \hat{x}^4 \hat{e}_4 = \hat{x}^a \hat{e}_a \end{aligned}$$

olarak yazılsın. Bu durumda $e_u = \wedge^a{}_u \hat{e}_a$ göz önüne alınarak ilk eşitlikte e_a lar yerine yazılırsa

$$x = x^b e_b = x^b \wedge^a{}_b \hat{e}_a$$

$$x^b \wedge^a{}_b \hat{e}_a = \hat{x}^a \hat{e}_a$$

buradan

$$\hat{x}^a = \wedge^a{}_b x^b, \quad a = 1, 2, 3, 4 \tag{2.3}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.2 [8] *(2.1) ve (2.2) eşitlikleri*

$$\wedge^T \eta \wedge = \eta \tag{2.4}$$

eşitliğine denktir.

Tanım 2.3 *$\wedge^T\eta\wedge = \eta$ olacak şekildeki matrislere $\mathcal{M}$ üzerinde* ***ortogonal matrisler*** *adı verilir. $\wedge^T\eta\wedge = \eta$ eşitliği sağdan $\wedge^{-1}$ ile soldan η ile çarpılırsa*

$$\wedge^{-1} = \eta\wedge^T\eta$$

olur ki; $\wedge^{-1}$matrisinin girdileri $\wedge_a^b$ile gösterilirse, $\wedge^{-1}$matrisi açık formda,

$$\wedge^{-1} = \begin{bmatrix} \wedge_1^1 & \wedge_2^1 & \wedge_3^1 & \wedge_4^1 \\ \wedge_1^2 & \wedge_2^2 & \wedge_3^2 & \wedge_4^2 \\ \wedge_1^3 & \wedge_2^3 & \wedge_3^3 & \wedge_4^3 \\ \wedge_1^4 & \wedge_2^4 & \wedge_3^4 & \wedge_4^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \wedge^1{}_1 & \wedge^2{}_1 & \wedge^3{}_1 & -\wedge^4{}_1 \\ \wedge^1{}_2 & \wedge^2{}_2 & \wedge^3{}_2 & -\wedge^4{}_2 \\ \wedge^1{}_3 & \wedge^2{}_3 & \wedge^3{}_3 & -\wedge^4{}_3 \\ -\wedge^1{}_4 & -\wedge^2{}_4 & -\wedge^4{}_3 & \wedge^4{}_4 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.3 *$\mathcal{M}$ üzerinde ortogonal matislerin kümesi, matris çarpımı altında bir grup oluşturur. Bu gruba* ***genel (homojen) Lorentz grubu*** *adı verilir ve $\mathcal{L}_{GH}$ ile gösterilir.*

$$\mathcal{L}_{GH} = \left\{\wedge \in \mathbb{R}(4) : \quad \wedge^T\eta\wedge = \eta\right\}$$

İspat. $A, B \in \mathcal{L}_{GH}$ olsun.

i) $I^T\eta I = \eta$ olduğu açıktır. $I \in \mathcal{L}_{GH}$ olur.

ii) $A \in \mathcal{L}_{GH}$ ise $A^{-1} \in \mathcal{L}_{GH}$ mıdır? $A^T\eta A = \eta$ ise $A^{-1} = \eta A^T\eta$ dır.

$(A^{-1})^T\eta A^{-1} = (\eta A^T\eta)^T\eta(\eta A^T\eta) = \eta A\eta\eta\eta A^T\eta = \eta AI\eta A^T\eta = \eta A\eta A^T\eta = \eta AA^{-1} = \eta$ elde edilir. Bu durumda $A^{-1} \in \mathcal{L}_{GH}$ olur.

iii) $A, B \in \mathcal{L}_{GH}$ ise $AB \in \mathcal{L}_{GH}$ mıdır?

$(AB)^T\eta(AB) = B^TA^T\eta AB = B^T\eta B = \eta$ olduğundan $AB \in \mathcal{L}_{GH}$ dır.

$\mathcal{L}_{GH}$ bir gruptur. ■

2.2 Lorentz Grubu

$\wedge \in \mathcal{L}_{GH}$ verilsin.

$$\wedge^1{}_c\wedge^1{}_d + \wedge^2{}_c\wedge^2{}_d + \wedge^3{}_c\wedge^3{}_d - \wedge^4{}_c\wedge^4{}_d = \eta_{cd}, \quad c, d = 1, 2, 3, 4$$

eşitliğinde $c = d = 4$ için

$$(\wedge^4{}_4)^2 = 1 + (\wedge^1{}_4)^2 + (\wedge^2{}_4)^2 + (\wedge^3{}_4)^2$$

elde edilir. Buradan $(\wedge^4{}_4)^2 \geq 1$ olup $\wedge^4{}_4 \geq 1$ yada $\wedge^4{}_4 \leq -1$ bulunur.

Tanım 2.4 $\wedge \in \mathcal{L}_{GH}$ *için*

i) $\wedge^4{}_4 \geq 1$ *ise* $\wedge$ *ya* ***orthochronous***

ii) $\wedge^4{}_4 \leq -1$ *ise* $\wedge$ *ya* ***nonorthochronous***

Lorentz dönüşümü *denir.*

Tanım 2.5 $v \in \mathcal{M}$ *verilsin. Eğer*

$Q(v) = 0$ *ise* v *ye* ***null vektör,***

$Q(v) > 0$ *ise* v *ye* ***uzayımsı vektör,***

$Q(v) < 0$ *ise* v *ye* ***zamanımsı vektör,***

adı verilir.

Teorem 2.2 [8] $\wedge = [\wedge^a{}_b]_{a,b=1,2,3,4} \in \mathcal{L}_{GH}$ *ve* $\{e_a\}_{a=1,2,3,4}$, $\mathcal{M}$ *nin bir ortonormal tabanı olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktirler.*

a) $\wedge$, orthochronous dur.

b) $\wedge$, bütün sıfırdan farklı null vektörlerinin zaman yönünü korur. Yani

$v = v^a e_a$ sıfırdan farklı bir null vektör ise v^4 ve $\hat{v}^4 = \wedge^4{}_b v^b$ sayıları aynı işaretlidir.

c) $\wedge$, bütün timelike vektörlerin zaman yönlerini korur.

$\wedge \in \mathcal{L}_{GH}$ verilsin. $\wedge^T \eta \wedge = \eta$ eşitliğinin her iki yanından determinant alınırsa

$$\begin{aligned}
\det(\wedge^T \eta \wedge) &= \det(\eta) \\
\det(\wedge^T)\det(\eta)\det(\wedge) &= \det(\eta) \\
\det(\wedge^T)\det(\wedge) &= 1, \qquad (\det(\eta) = -1) \\
(\det \wedge)^2 &= 1, \qquad \big(\det(\wedge^T) = \det(\wedge)\big)
\end{aligned}$$

buradan $\det(\wedge) = 1$ veya $\det(\wedge) = -1$ bulunur.[8]

Tanım 2.6 $\wedge \in \mathcal{L}_{GH}$ *olsun. Eğer,*

i) $\det(\wedge) = 1$ *ise* $\wedge$ *ya* ***has***

ii) $\det(\wedge) = -1$ *ise* $\wedge$ *ya* ***has olmayan***

Lorentz dönüşümü denir.

Teorem 2.3 [9] $\mathcal{L}_{GH}$, *matris grubu 4 bağlantılı bileşene sahiptir.*

$\wedge \in \mathcal{L}_{GH}$, $\wedge = [\wedge^a{}_b]_{a,b=1,2,3,4}$ *olmak üzere bu bileşenler;*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_+^{\uparrow} &= \left\{\wedge \in \mathcal{L}_{GH} : \det \wedge = 1, \wedge^4{}_4 \geq 1\right\} \\
\mathcal{L}_-^{\uparrow} &= \left\{\wedge \in \mathcal{L}_{GH} : \det \wedge = -1, \wedge^4{}_4 \geq 1\right\} \\
\mathcal{L}_+^{\downarrow} &= \left\{\wedge \in \mathcal{L}_{GH} : \det \wedge = 1, \wedge^4{}_4 \leq -1\right\} \\
\mathcal{L}_-^{\downarrow} &= \left\{\wedge \in \mathcal{L}_{GH} : \det \wedge = -1, \wedge^4{}_4 \leq -1\right\}
\end{aligned}
$$

olarak tanımılıdır.

Yardımcı Teorem 2.4

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_+^{\uparrow} &= \mathcal{L} = \{\wedge \in \mathcal{L}_{GH} : \wedge, \quad \textit{proper, orthochronous}\} \\
&= \left\{\wedge \in \mathcal{L}_{GH} : \det(\wedge) = 1, \ \wedge^4{}_4 \geq 1\right\}
\end{aligned}
$$

ile tanımlı $\mathcal{L}$ *kümesi* $\mathcal{L}_{GH}$ *ın bir alt grubudur.* $\mathcal{L}$ *nin elemanlarına* ***Lorentz dönüşümü*** *denir.*

Bu tezde $\mathcal{L}_{GH}$ ın $\mathcal{L}$ alt grubu ve onun alt grupları kullanılacaktır.

Tanım 2.7

$$
\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{c} R = [R^a{}_b] \in \mathcal{L} : \quad \left[R^i{}_j\right]_{i,j=1,2,3} \quad \textit{için} \quad \left[R^i{}_j\right]^T = \left[R^i{}_j\right]^{-1}, \\ R^i{}_4 = R^4{}_i = 0 \quad \textit{ve} \quad R^4{}_4 = 1 \end{array} \right\}
$$

ile tanımlı $\mathcal{R}$ *kümesi* $\mathcal{L}$ *nin bir alt grubudur. Bir* $R \in \mathcal{R}$ *dönüşümü konum koordinat eksenlerinin zaman koordinatı etrafında bir dönmesine karşılık gelir.*

$\mathcal{R}$ *ye* $\mathcal{L}$ *nin* ***rotasyon alt grubu*** *adı verilir ve bir* $R \in \mathcal{R}$ *ye* $\mathcal{L}$ *de bir* ***rotasyon*** *denir.*

Yardımcı Teorem 2.5 $\wedge = [\wedge^a{}_b]_{a,b=1,2,3,4} \in \mathcal{L}$ *verilsin. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.*

a) $\wedge$, bir rotasyondur.

b) $\wedge^1{}_4 = \wedge^2{}_4 = \wedge^3{}_4 = 0$

c) $\wedge^4{}_1 = \wedge^4{}_2 = \wedge^4{}_3 = 0$

d) $\wedge^4{}_4 = 1.$

İspat.

$$\wedge^a{}_c \wedge^b{}_d \, \eta_{ab} = \eta_{cd}, \quad c, d = 1, 2, 3, 4$$

eşitliğinde $c = d = 4$ için

$$\wedge^a{}_4 \wedge^b{}_4 \, \eta_{ab} = \eta_{44} = -1$$

$$(\wedge^1{}_4)^2 + (\wedge^2{}_4)^2 + (\wedge^3{}_4)^2 - (\wedge^4{}_4)^2 = -1 \tag{2.5}$$

olup,

$$\wedge^a{}_c \wedge^b{}_d \, \eta^{cd} = \eta^{ab}, \quad a, b = 1, 2, 3, 4$$

eşitliğinde $a = b = 4$ için

$$\wedge^4{}_c \wedge^4{}_d \, \eta^{cd} = \eta^{44} = -1$$

$$(\wedge^4{}_1)^2 + (\wedge^4{}_2)^2 + (\wedge^4{}_3)^2 - (\wedge^4{}_4)^2 = -1 \tag{2.6}$$

elde edilir. (2.1),(2.2) eşitlikleri ve $\wedge$ nın orthochronous oluşundan (**b**), (**c**) ve (**d**) birbirine denktir. Ayrıca $\mathcal{L}$ deki bir rotasyon tanımından (**a**), (**b**), (**c**) ve (**d**) yi sağlar. Bu durumda $\wedge$ (**b**), (**c**) ve (d) yi sağlasın. $\wedge$ bir rotasyon mu?

$\wedge \in \mathcal{L}$ olduğundan $\det \wedge = 1$ dir.

$$1 = \det \wedge = \wedge^4{}_4 . \det \left[\wedge^i{}_j\right]_{i,j=1,2,3,4} \;\; ise \;\; \det \left[\wedge^i{}_j\right]_{i,j=1,2,3,4} = 1$$

olur. $\wedge$ bir rotasyondur. ■

Yardımcı Teorem 2.6 [8] $\theta \in \mathbb{R}$ *olmak üzere*

$$L(\theta)=\begin{bmatrix} \cosh\theta & 0 & 0 & -\sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & 0 & \cosh\theta \end{bmatrix}$$

olarak tanımlı $L(\theta) \in \mathcal{L}$ *dir.* $\mathcal{L}_\theta = \{L(\theta) : \theta \in \mathbb{R}\}$ *olarak tanımlı* $\mathcal{L}_\theta$ *kümesi* $\mathcal{L}$ *nin bir alt grubudur. Bu gruba* $\mathcal{L}$ *nin* ***hiperbolik alt grubu*** *denir.*

Teorem 2.4 $\wedge = [\wedge^a{}_b]_{a,b=1,2,3,4} \in \mathcal{L}$ *verilsin. Bu durumda bir* $\theta \in \mathbb{R}$ *sayısı ve* R_1, R_2 *gibi iki rotasyon vardır öyle ki;*

$$\wedge = R_1 L(\theta) R_2$$

dir.

İspat. Önce kabul edelim ki; $\wedge^1{}_4 = \wedge^2{}_4 = \wedge^3{}_4 = 0$ olsun. Yardımcı teorem (2.5) den $\wedge$ nın kendisi bir rotasyondur. Böylece $R_1 = \wedge$, $\theta = 0$ ve $R_2 = I_{4\times4}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \wedge &= R_1 L(\theta) R_2 \\ \wedge &= \wedge L(0) I \\ \wedge &= \wedge \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

Şimdi en az bir $i \in \{1,2,3\}$ için $\wedge^i{}_4 \neq 0$ olsun. Yani $\left(\wedge^1{}_4, \wedge^2{}_4, \wedge^3{}_4\right) \in \mathbb{R}^3$ vektörünü sıfırdan farklı kabul edelim. Bu vektör büyüklüğüne bölünürse;

$$\alpha_i = \frac{\wedge^i{}_4}{\sqrt{(\wedge^1{}_4)^2 + (\wedge^2{}_4)^2 + (\wedge^3{}_4)^2}}, \quad i = 1,2,3$$

olmak üzere

$$\overrightarrow{u_1} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

birim vektörü elde edilir.

$\overrightarrow{u_2} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ve $\overrightarrow{u_3} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ vektörleri, $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ ün bir ortanormal tabanı olacal şekilde seçilsin. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

matrisi ortagonal matristir. Tabanın uygun bir sıralanışı ile bu matrisin determinantı 1 kabul edilebilir. Bundan dolayı

$$R_1' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi $\mathcal{R}$ nin bir elemanıdır. $R_1' \in \mathcal{R}$ ise $R_1' \in \mathcal{L}$ ve $\mathcal{L}$ grup olduğundan $R_1'\wedge \in \mathcal{L}$ dir.

$$\begin{aligned}
R_1'\wedge &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \wedge^1{}_1 & \wedge^1{}_2 & \wedge^1{}_3 & \wedge^1{}_4 \\ \wedge^2{}_1 & \wedge^2{}_2 & \wedge^2{}_3 & \wedge^2{}_4 \\ \wedge^3{}_1 & \wedge^3{}_2 & \wedge^3{}_3 & \wedge^3{}_4 \\ \wedge^4{}_1 & \wedge^4{}_2 & \wedge^4{}_3 & \wedge^4{}_4 \end{bmatrix} \\
R_1'\wedge &= \begin{bmatrix} \alpha_a\wedge^a{}_1 & \alpha_a\wedge^a{}_2 & \alpha_a\wedge^a{}_3 & \alpha_a\wedge^a{}_4 \\ \beta_a\wedge^a{}_1 & \beta_a\wedge^a{}_2 & \beta_a\wedge^a{}_3 & \beta_a\wedge^a{}_4 \\ \gamma_a\wedge^a{}_1 & \gamma_a\wedge^a{}_2 & \gamma_a\wedge^a{}_3 & \gamma_a\wedge^a{}_4 \\ \wedge^4{}_1 & \wedge^4{}_2 & \wedge^4{}_3 & \wedge^4{}_4 \end{bmatrix} \\
R_1'\wedge &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olmak üzere $a_{41} = \wedge^4{}_1$, $a_{42} = \wedge^4{}_2$, $a_{43} = \wedge^4{}_3$, $a_{44} = \wedge^4{}_4$ olup,

$\overrightarrow{u_1}$ ve $\overrightarrow{u_2}$ dik vektörle olduğundan

$$\begin{aligned}
0 &= g(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \\
&= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 \\
&= \frac{\wedge^1{}_4\beta_1 + \wedge^2{}_4\beta_2 + \wedge^3{}_4\beta_3}{\sqrt{(\wedge^1{}_4)^2 + (\wedge^2{}_4)^2 + (\wedge^3{}_4)^2}}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\wedge^1{}_4\beta_1 + \wedge^2{}_4\beta_2 + \wedge^3{}_4\beta_3 = 0$$

olur. Buradan $a_{24} = \wedge^a{}_4\beta_a = 0$ elde edilir. Benzer hesaplamayla $\overrightarrow{u_1}$ ve $\overrightarrow{u_3}$ dik vektörler olduğundan $a_{34} = 0$ elde edilebilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
a_{14} &= \alpha_1 \wedge^1{}_4 + \alpha_2 \wedge^2{}_4 + \alpha_3 \wedge^3{}_4 + \alpha_4 \wedge^4{}_4 \\
&= \frac{(\wedge^1{}_4)^2 + (\wedge^2{}_4)^2 + (\wedge^3{}_4)^2}{\sqrt{(\wedge^1{}_4)^2 + (\wedge^2{}_4)^2 + (\wedge^3{}_4)^2}} \\
&= \left((\wedge^1{}_4)^2 + (\wedge^2{}_4)^2 + (\wedge^3{}_4)^2\right)^{1/2} \quad \left(\left(\wedge^1{}_4, \wedge^2{}_4, \wedge^3{}_4\right) \neq \overline{0}\right) \\
&> 0
\end{aligned}$$

olduğu gözlemlenir.

Şimdi $\overrightarrow{v_2} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ ve $\overrightarrow{v_3} = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ vektörleri tanımlanırsa, $R_1' \wedge \in \mathcal{L}$ olduğundan $\overrightarrow{v_2}$ ve $\overrightarrow{v_3}$ vektörleri birbirine dik birim vektörlerdir.

$\overrightarrow{v_1} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörünü $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ ortanormal bir tabanı olacak şekilde seçilsin R_1' de olduğu gibi

$$R_2' = \begin{bmatrix} c_1 & a_{21} & a_{31} & 0 \\ c_2 & a_{22} & a_{32} & 0 \\ c_3 & a_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matriside bir rotasyondur. ($R_2' \in \mathcal{R}$)

$R_1' \wedge \in \mathcal{L}$ ve $R_2' \in \mathcal{R}$ olduğundan $B = R_1' \wedge R_2' \in \mathcal{L}$ dir. Burada matris çarpımları yapılıp, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ ve $\overrightarrow{v_3}$ vektörlerinin birbirine dik olduğu ve ayrıca $B \in \mathcal{L}$, yani B nin sütunları ve satırlarının birbirine dik olduğu göz önüne alınırsa, gözlemlenir ki;

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_{41} & 0 & 0 & \wedge^4{}_4 \end{bmatrix}$$

olur ve burada

$$\begin{aligned}
b_{11} &= a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 \\
b_{41} &= \wedge^4{}_1 c_1 + \wedge^4{}_2 c_2 + \wedge^4{}_3 c_3
\end{aligned}$$

ile bellidir.

$B \in \mathcal{L}$ olduğundan, satır ve sütunlar birbirine dik olup;

$$\begin{aligned} b_{11}a_{14} - b_{41}\wedge^4{}_4 &= 0 \\ b_{11}^2 - b_{41}^2 &= 1 \\ a_{14}^2 - \left(\wedge^4{}_4\right)^2 &= -1 \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Gözlem: b_{11} ve b_{41} sıfırdan farklıdır.

$$b_{11}^2 - b_{41}^2 = 1 \Rightarrow b_{11}^2 = 1 + b_{41}^2 \Rightarrow b_{11}^2 > 1 \Rightarrow b_{11} \neq 0$$

$$a_{14}^2 - \left(\wedge^4{}_4\right)^2 = -1 \Rightarrow \left(\wedge^4{}_4\right)^2 = a_{14}^2 + 1 \Rightarrow \left(\wedge^4{}_4\right)^2 > 1, \quad (\ a_{14} > 0)$$

$$b_{11}a_{14} - b_{41}\wedge^4{}_4 = 0 \Rightarrow b_{11}a_{14} = b_{41}\wedge^4{}_4$$

$b_{11} \neq 0$, $a_{14} \neq 0$ ve $\wedge^4{}_4 \neq 0$ olduğundan $b_{11}a_{14} = b_{41}\wedge^4{}_4 \neq 0$ buradan $b_{41} \neq 0$ olur.

$b_{11}a_{14} = b_{41}\wedge^4{}_4$ eşitliğinden $k = \dfrac{\wedge^4{}_4}{b_{11}} = \dfrac{a_{14}}{b_{41}}$ yazılabilir. Yani $\wedge^4{}_4 = kb_{11}$, $a_{14} = kb_{41}$ yazılır. $a_{14}^2 - \left(\wedge^4{}_4\right)^2 = -1$ denkleminde bu eşitlikler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} k^2b_{41}^2 - k^2b_{11}^2 &= -1 \\ k^2\left(b_{11}^2 - b_{41}^2\right) &= 1, \qquad \left(b_{11}^2 - b_{41}^2 = 1\right) \\ k^2 &= 1 \\ k &= \pm 1 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} \det B &= b_{11}\wedge^4{}_4 - b_{41}a_{14} \\ &= kb_{11}^2 - kb_{41}^2 \\ &= k(b_{11}^2 - b_{41}^2) \\ &= k \end{aligned}$$

$B \in \mathcal{L}$ olduğundan $\det B = 1$ olup, buradan $k = 1$ elde edilir. $k = 1$ olduğundan $a_{14} = b_{41}$ bulunur.

$a_{14}^2 - \left(\wedge^4{}_4\right)^2 = -1$ eşitliğinden $(\wedge^4{}_4 + a_{14})^{-1} = (\wedge^4{}_4 - a_{14})$ elde edilir. Her iki tarafın ln i alınırsa $-\ln(\wedge^4{}_4 + a_{14}) = \ln(\wedge^4{}_4 - a_{14})$ olup, $\theta = -\ln(\wedge^4{}_4 + a_{14}) = \ln(\wedge^4{}_4 - a_{14})$ olarak tanımlanırsa, $e^{-\theta} = \wedge^4{}_4 + a_{14}$, $e^{\theta} = \wedge^4{}_4 - a_{14}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \cosh\theta &= \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} = \wedge^4{}_4 \\ \sinh\theta &= \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} = -a_{14} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve böylece

$$B = \begin{bmatrix} \cosh\theta & 0 & 0 & -\sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & 0 & \cosh\theta \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$B = L(\theta) = R_1' \wedge R_2'$ olduğundan $R_1 = (R_1')^{-1}$ ve $R_2 = (R_2')^{-1}$ olmak üzere

$$\wedge = R_1 L(\theta) R_2$$

olur. ■

2.3 Spin Dönüşümleri ve Lorentz Grubu

Bu bölümde, determinantı "1" olan 2×2 'lik kompleks matrisler olan $SL(2,\mathbb{C})$ grubundan lorentz grubu $\mathcal{L}$ üzerine $2-1$ bir homomorfizm verilecektir.

Tanım 2.8 $\mathbb{C}^{2\times2} = \mathbb{C}(2) = \left\{A = [a_{ij}]_{i,j=1,2} : a_{ij} \in \mathbb{C}\right\}$ *, kümesi* 2×2 *'lik kompleks matrisleri göstermek üzere,*

$SL(2,\mathbb{C}) := \left\{A \in \mathbb{C}^{2\times2} : \det A = 1\right\}$, olarak tanımlı $SL(2,\mathbb{C})$ kümesine **özel lineer grup** adı verilir.

Tanım 2.9 *$A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ matrisi verilsin.*

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

iken

$$A^* = A^{CT} = [\bar{a}_{ji}] = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmak üzere, $A^* = A$ oluyorsa A ya ***hermityen matris*** *denir. Bütün hermityen matrislerin kümesi $\mathcal{H}_2$ ile gösterilip*

$$\mathcal{H}_2 := \left\{ H \in \mathbb{C}^{2\times 2} : H^* = H \right\}$$

olarak tanımlanır.

$\mathcal{H}_2$, reel vektör uzayıdır ve **pauli spin matrisleri** denilen

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisleri, $\sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ birim matrisi ile birlikte $\mathcal{H}_2$ nin bir tabanını oluşturur. Böylece her $H \in \mathcal{H}_2$ için, $x^a \in \mathbb{R}$, $a = 1, 2, 3, 4$ olamak üzere

$$H = x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3 + x^4\sigma_4$$

olarak yazılabilir. Düzenlenirse H, matrisi

$$H = \begin{bmatrix} x^3 + x^4 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -x^3 + x^4 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

formunda ifade edilir.

$SL(2, \mathbb{C})$ nin elemanlarına genellikle **spin dönüşümleri** adı verilir.

Yardımcı Teorem 2.7 *$A \in SL(2, \mathbb{C})$ verilsin. Her $H \in \mathcal{H}_2$ matrisi için,*

$$\begin{aligned} M_A \quad &: \quad \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2 \\ H \quad &\longrightarrow \quad M_A(H) = AHA^* \end{aligned}$$

olarak tanımlı M_A dönüşümü için

$$\det(M_A(H)) = \det H$$

dir.

İspat. M_A dönüşümü iyi tanımlıdır. $H \in \mathcal{H}_2$ matrisi için, $M_A(H) \in \mathcal{H}_2$ dir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
(M_A(H))^* &= (AHA^*)^* \\
&= \overline{\left(AH\bar{A}^T\right)}^T \\
&= \left(\bar{A}\bar{H}A^T\right)^T \\
&= \left(A^T\right)^T(\bar{H})^T(\bar{A})^T \\
&= AH\bar{A}^T \\
&= M_A(H)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $A \in SL(2,\mathbb{C})$ olduğundan, $\det A = 1$ ve $\det \bar{A}^T$ =1 olup

$$\begin{aligned}
\det\left(M_A(H)\right) &= \det(AH\bar{A}^T) \\
&= \det A \det H \det \bar{A}^T \\
&= \det H
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Dikkat edilirse $M_A(H) \in \mathcal{H}_2$ olduğundan, $\hat{x}^a \in \mathbb{R}$, $a = 1,2,3,4$ reel sayıları vardır öyleki;

$$M_A(H) = \begin{bmatrix} \hat{x}^3 + \hat{x}^4 & \hat{x}^1 + i\hat{x}^2 \\ \hat{x}^1 - i\hat{x}^2 & -\hat{x}^3 + \hat{x}^4 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

olarak ifade edilebilir. Buradan, $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ ve $\hat{x} = (\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, \hat{x}^4)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\det(M_A(H)) &= \det H \\
\begin{vmatrix} \hat{x}^3 + \hat{x}^4 & \hat{x}^1 + i\hat{x}^2 \\ \hat{x}^1 - i\hat{x}^2 & -\hat{x}^3 + \hat{x}^4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x^3 + x^4 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -x^3 + x^4 \end{vmatrix} \\
(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 + (\hat{x}^3)^2 - (\hat{x}^4)^2 &= (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 \\
Q(\hat{x}) &= Q(x) \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

elde edilir

$\mathcal{M}$ ile $\mathcal{H}_2$ arasında $1-1$, örten bir eşleme şu şekilde verilebilir.

$$\begin{aligned}\varphi &: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{H}_2\\ x &= (x^1, x^2, x^3, x^4) \longmapsto H = \begin{bmatrix} x^3+x^4 & x^1+ix^2 \\ x^1-ix^2 & -x^3+x^4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

olarak tanımlı φ dönüşümü açıktır ki $1-1$, örtendir. $\varphi^{-1} : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{M}$, $H \in \mathcal{H}_2$ hermityen matrisi için

$$H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ile gösterilmek üzere;

$$H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3+x^4 & x^1+ix^2 \\ x^1-ix^2 & -x^3+x^4 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilebileceğinden, iki matris eşitliğinden;

$$\begin{aligned} x^3+x^4 &= a \\ -x^3+x^4 &= d \\ x^1+ix^2 &= b \\ x^1-ix^2 &= c \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu eşitliklerden,

$$x^4 = \frac{a+d}{2},\ x^3 = \frac{a-d}{2},\ x^2 = i\frac{c-b}{2},\ x^1 = \frac{b+c}{2}$$

bulunur. Böylece, φ^{-1} dönüşümü,

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} &: \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{M}\\ H &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto (x^1, x^2, x^3, x^4) = (\frac{b+c}{2},\ i\frac{c-b}{2},\ \frac{a-d}{2}, \frac{a+d}{2})\end{aligned}$$

olrak tanımlıdır.

φ, φ^{-1} ve M_A dönüşümleri düşünüldüğünde;

$$\begin{aligned} L_A &= \varphi^{-1} \circ M_A \circ \varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \\ x &= (x^1, x^2, x^3, x^4) \longmapsto \hat{x} = (\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, \hat{x}^4) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan L_A dönüşümü için, $(*)$ eşitliği düşünülürse;

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q(\hat{x}) \\ &= Q\left(\left[\varphi^{-1} \circ M_A \circ \varphi\right](x)\right) \\ &= Q(L_A(x)) \end{aligned}$$

yani,

$$Q(x) = Q(L_A(x))$$

olur ki, **Teorem 2.1** e göre L_A bir ortogonal dönüşümdür, dolayısıyla L_A nın matrisi bir genel homojen Lorentz döünüşümüdür. Yani; L_A nın matrisi $\wedge_A$ile gösterilmek üzere, $\wedge_A \in \mathcal{L}_{GH}$ dır.

Yardımcı Teorem 2.8 $\wedge_A \in \mathcal{L}$ *dir.*

İspat. Önce $\wedge_A$ açık olarak elde edilecektir. $\{e_a\}_{a=1,2,3,4}$, $\mathcal{M}$ nin bir ortonormal tabanı olsun. $\varphi(e_i) = \sigma_i$ olduğu açıktır. Şimdi,

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{H}_2 & \xrightarrow{M_A} & \mathcal{H}_2 & \\ \varphi & \uparrow & & \downarrow & \varphi^{-1} \\ & \mathcal{M} & \xrightarrow[L_A]{} & \mathcal{M} & \end{array}$$

olmak üzere $L_A(e_i)$ ler hesaplanacaktır.

$$e_i \longmapsto L_A(e_i) = (\varphi^{-1} \circ M_A \circ \varphi)(e_i) = \varphi^{-1}\left[M_A(\varphi(e_i))\right] = \varphi^{-1}\left(M_A(\sigma_i)\right)$$

olup

$$L_A(e_i) = \varphi^{-1}\left(M_A(\sigma_i)\right)$$

elde edilir.

A matrisi, $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ile gösterilmek üzere,

$$\begin{aligned} M_A(\sigma_1) &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\beta} & \bar{\delta} \\ \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} & \alpha\bar{\delta} + \beta\bar{\gamma} \\ \gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\alpha} & \gamma\bar{\delta} + \delta\bar{\gamma} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olup, $M_A(\sigma_1) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ile gösterilmek üzere,

$$\begin{aligned} L_A(e_1) &= \varphi^{-1}\left(M_A(\sigma_1)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\begin{bmatrix} a = \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} & b = \alpha\bar{\delta} + \beta\bar{\gamma} \\ c = \gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\alpha} & d = \gamma\bar{\delta} + \delta\bar{\gamma} \end{bmatrix} \right) \\ &= (\frac{b+c}{2},\ i\frac{c-b}{2},\ \frac{a-d}{2}, \frac{a+d}{2}) \\ &= (\frac{1}{2}(\alpha\bar{\delta} + \beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\alpha}), \frac{i}{2}(\gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\alpha} - \alpha\bar{\delta} - \beta\bar{\gamma}), \\ &\quad \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} - \gamma\bar{\delta} - \delta\bar{\gamma}), \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} + \gamma\bar{\delta} + \delta\bar{\gamma})) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} L_A(e_1) &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\delta} + \beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\alpha})e_1 + \frac{i}{2}(\gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\alpha} - \alpha\bar{\delta} - \beta\bar{\gamma})e_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} - \gamma\bar{\delta} - \delta\bar{\gamma})e_3 + \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} + \gamma\bar{\delta} + \delta\bar{\gamma})e_4 \end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned} {\wedge^1}_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\delta} + \beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\alpha}) \\ {\wedge^2}_1 &= \frac{i}{2}(\gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\alpha} - \alpha\bar{\delta} - \beta\bar{\gamma}) \\ {\wedge^3}_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} - \gamma\bar{\delta} - \delta\bar{\gamma}) \\ {\wedge^4}_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} + \gamma\bar{\delta} + \delta\bar{\gamma}) \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$L_A(e_1) = {\wedge^1}_1 e_1 + {\wedge^2}_1 e_2 + {\wedge^3}_1 e_3 + {\wedge^4}_1 e_4$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
M_A(\sigma_2) &= \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha} & \bar{\gamma}\\ \bar{\beta} & \bar{\delta}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i\bar{\beta} & i\bar{\delta}\\ -i\bar{\alpha} & -i\bar{\gamma}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}i(\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha}) & i(\alpha\bar{\delta}-\beta\bar{\gamma})\\ i(\gamma\bar{\beta}-\delta\bar{\alpha}) & i(\gamma\bar{\delta}-\delta\bar{\gamma})\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olup, $M_A(\sigma_2)=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ile gösterilmek üzere,

$$\begin{aligned}
L_A(e_2) &= \varphi^{-1}\left(M_A(\sigma_2)\right)\\
&= \varphi^{-1}\left(\begin{bmatrix}a=i(\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha}) & b=i(\alpha\bar{\delta}-\beta\bar{\gamma})\\ c=i(\gamma\bar{\beta}-\delta\bar{\alpha}) & d=i(\gamma\bar{\delta}-\delta\bar{\gamma})\end{bmatrix}\right)\\
&= (\frac{b+c}{2},\ i\frac{c-b}{2},\ \frac{a-d}{2}, \frac{a+d}{2})\\
&= (\frac{i}{2}(\alpha\bar{\delta}-\beta\bar{\gamma}+\gamma\bar{\beta}-\delta\bar{\alpha}), \frac{i^2}{2}(\gamma\bar{\beta}-\delta\bar{\alpha}-\alpha\bar{\delta}+\beta\bar{\gamma}),\\
&\quad \frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha}-\gamma\bar{\delta}+\delta\bar{\gamma}), \frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha}+\gamma\bar{\delta}-\delta\bar{\gamma}))\\
&= (\frac{i}{2}(\alpha\bar{\delta}-\beta\bar{\gamma}+\gamma\bar{\beta}-\delta\bar{\alpha}), \frac{1}{2}(-\gamma\bar{\beta}+\delta\bar{\alpha}+\alpha\bar{\delta}-\beta\bar{\gamma}),\\
&\quad \frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha}-\gamma\bar{\delta}+\delta\bar{\gamma}), \frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha}+\gamma\bar{\delta}-\delta\bar{\gamma}))
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
L_A(e_2) &= \frac{i}{2}(\alpha\bar{\delta}-\beta\bar{\gamma}+\gamma\bar{\beta}-\delta\bar{\alpha})e_1+\frac{1}{2}(-\gamma\bar{\beta}+\delta\bar{\alpha}+\alpha\bar{\delta}-\beta\bar{\gamma})e_2\\
&\quad +\frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha}-\gamma\bar{\delta}+\delta\bar{\gamma})e_3+\frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha}+\gamma\bar{\delta}-\delta\bar{\gamma})e_4
\end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
{\wedge^1}_2 &= \frac{i}{2}(\alpha\bar{\delta}-\beta\bar{\gamma}+\gamma\bar{\beta}-\delta\bar{\alpha})\\
{\wedge^2}_2 &= \frac{1}{2}(-\gamma\bar{\beta}+\delta\bar{\alpha}+\alpha\bar{\delta}-\beta\bar{\gamma})\\
{\wedge^3}_2 &= \frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha}-\gamma\bar{\delta}+\delta\bar{\gamma})\\
{\wedge^4}_2 &= \frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha}+\gamma\bar{\delta}-\delta\bar{\gamma})
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$L_A(e_2)={\wedge^1}_2e_1+{\wedge^2}_2e_2+{\wedge^3}_2e_3+{\wedge^4}_2e_4$$

bulunur.

$$\begin{aligned} M_A(\sigma_3) &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ -\bar{\beta} & -\bar{\delta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} & \alpha\bar{\gamma} - \beta\bar{\delta} \\ \gamma\bar{\alpha} - \delta\bar{\beta} & \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olup, $M_A(\sigma_3) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ile gösterilmek üzere,

$$\begin{aligned} L_A(e_3) &= \varphi^{-1}\left(M_A(\sigma_3)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\begin{bmatrix} a = \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} & b = \alpha\bar{\gamma} - \beta\bar{\delta} \\ c = \gamma\bar{\alpha} - \delta\bar{\beta} & d = \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta} \end{bmatrix}\right) \\ &= (\frac{b+c}{2},\ i\frac{c-b}{2},\ \frac{a-d}{2}, \frac{a+d}{2}) \\ &= (\frac{1}{2}(\alpha\bar{\gamma} - \beta\bar{\delta} + \gamma\bar{\alpha} - \delta\bar{\beta}), \frac{i}{2}(\gamma\bar{\alpha} - \delta\bar{\beta} - \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta}), \\ &\quad \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta}), \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta})) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} L_A(e_3) &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\gamma} - \beta\bar{\delta} + \gamma\bar{\alpha} - \delta\bar{\beta})e_1 + \frac{i}{2}(\gamma\bar{\alpha} - \delta\bar{\beta} - \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta})e_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta})e_3 + \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta})e_4 \end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned} {\wedge^1}_3 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\gamma} - \beta\bar{\delta} + \gamma\bar{\alpha} - \delta\bar{\beta}) \\ {\wedge^2}_3 &= \frac{i}{2}(\gamma\bar{\alpha} - \delta\bar{\beta} - \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta}) \\ {\wedge^3}_3 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta}) \\ {\wedge^4}_3 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta}) \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$L_A(e_3) = {\wedge^1}_3 e_1 + {\wedge^2}_3 e_2 + {\wedge^3}_3 e_3 + {\wedge^4}_3 e_4$$

bulunur.

$$\begin{aligned} M_A(\sigma_4) &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} & \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} \\ \gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} & \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olup, $M_A(\sigma_4) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ile gösterilmek üzere,

$$\begin{aligned} L_A(e_4) &= \varphi^{-1}\left(M_A(\sigma_4)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\begin{bmatrix} a = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} & b = \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} \\ c = \gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} & d = \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} \end{bmatrix}\right) \\ &= (\frac{b+c}{2},\ i\frac{c-b}{2},\ \frac{a-d}{2}, \frac{a+d}{2}) \\ &= (\frac{1}{2}(\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} + \gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta}), \frac{i}{2}(\gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} - \alpha\bar{\gamma} - \beta\bar{\delta}), \\ &\quad \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta}), \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta})) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} L_A(e_4) &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} + \gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta})e_1 + \frac{i}{2}(\gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} - \alpha\bar{\gamma} - \beta\bar{\delta})e_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta})e_3 + \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta})e_4 \end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned} \wedge^1{}_4 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} + \gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta}) \\ \wedge^2{}_4 &= \frac{i}{2}(\gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} - \alpha\bar{\gamma} - \beta\bar{\delta}) \\ \wedge^3{}_4 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta}) \\ \wedge^4{}_4 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta}) \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$L_A(e_4) = \wedge^1{}_4 e_1 + \wedge^2{}_4 e_2 + \wedge^3{}_4 e_3 + \wedge^4{}_4 e_4$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
L_A(e_1) &= \wedge^1{}_1 e_1 + \wedge^2{}_1 e_2 + \wedge^3{}_1 e_3 + \wedge^4{}_1 e_4 \\
L_A(e_2) &= \wedge^1{}_2 e_1 + \wedge^2{}_2 e_2 + \wedge^3{}_2 e_3 + \wedge^4{}_2 e_4 \\
L_A(e_3) &= \wedge^1{}_3 e_1 + \wedge^2{}_3 e_2 + \wedge^3{}_3 e_3 + \wedge^4{}_3 e_4 \\
L_A(e_4) &= \wedge^1{}_4 e_1 + \wedge^2{}_4 e_2 + \wedge^3{}_4 e_3 + \wedge^4{}_4 e_4
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\wedge^1{}_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\delta} + \beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\alpha}) \quad \wedge^1{}_2 = \frac{i}{2}(\alpha\bar{\delta} - \beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\beta} - \delta\bar{\alpha}) \\
\wedge^2{}_1 &= \frac{i}{2}(\gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\alpha} - \alpha\bar{\delta} - \beta\bar{\gamma}) \quad \wedge^2{}_2 = \frac{1}{2}(-\gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\alpha} + \alpha\bar{\delta} - \beta\bar{\gamma}) \\
\wedge^3{}_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} - \gamma\bar{\delta} - \delta\bar{\gamma}) \quad \wedge^3{}_2 = \frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha} - \gamma\bar{\delta} + \delta\bar{\gamma}) \\
\wedge^4{}_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} + \gamma\bar{\delta} + \delta\bar{\gamma}) \quad \wedge^4{}_2 = \frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha} + \gamma\bar{\delta} - \delta\bar{\gamma})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\wedge^1{}_3 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\gamma} - \beta\bar{\delta} + \gamma\bar{\alpha} - \delta\bar{\beta}) \quad \wedge^1{}_4 = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} + \gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta}) \\
\wedge^2{}_3 &= \frac{i}{2}(\gamma\bar{\alpha} - \delta\bar{\beta} - \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta}) \quad \wedge^2{}_4 = \frac{i}{2}(\gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} - \alpha\bar{\gamma} - \beta\bar{\delta}) \\
\wedge^3{}_3 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta}) \quad \wedge^3{}_4 = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta}) \\
\wedge^4{}_3 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta}) \quad \wedge^4{}_4 = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta})
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\wedge_A = \begin{bmatrix} \wedge^1{}_1 & \wedge^1{}_2 & \wedge^1{}_3 & \wedge^1{}_4 \\ \wedge^2{}_1 & \wedge^2{}_2 & \wedge^2{}_3 & \wedge^2{}_4 \\ \wedge^3{}_1 & \wedge^3{}_2 & \wedge^3{}_3 & \wedge^3{}_4 \\ \wedge^4{}_1 & \wedge^4{}_2 & \wedge^4{}_3 & \wedge^4{}_4 \end{bmatrix}
$$

dir. $\wedge_A \in \mathcal{L}$ dir. Gerçekten;

$\wedge_A$ nın (4.4) girdisi $\wedge^4{}_4 = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta})$ düşünülürse,

$\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 > 0$, $\beta\bar{\beta} = |\beta|^2 > 0$, $\gamma\bar{\gamma} = |\gamma|^2 > 0$, $\delta\bar{\delta} = |\delta|^2 > 0$ olduğundan, $\wedge^4{}_4 > 0$ dır.

Yani $\wedge_A$, bir ortochronous genel homogenous lorentz dönüşümüdür.

$\wedge_A$ matrisi proper mı?

$\wedge_A$ matrisi

$$\wedge_A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -i\alpha & -i\beta & i\gamma & i\delta \\ -\gamma & -\delta & \alpha & \beta \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\bar{\delta} & \frac{i}{2}\bar{\delta} & \frac{1}{2}\bar{\gamma} & \frac{1}{2}\bar{\gamma} \\ \frac{1}{2}\bar{\gamma} & -\frac{i}{2}\bar{\gamma} & -\frac{1}{2}\bar{\delta} & \frac{1}{2}\bar{\delta} \\ \frac{1}{2}\bar{\beta} & \frac{i}{2}\bar{\beta} & \frac{1}{2}\bar{\alpha} & \frac{1}{2}\bar{\alpha} \\ \frac{1}{2}\bar{\alpha} & \frac{i}{2}\bar{\alpha} & -\frac{1}{2}\bar{\beta} & \frac{1}{2}\bar{\beta} \end{bmatrix}$$

olarak iki matrisin çarpımı olarak ifade edilebilir. Bu durumda,

$$\det \wedge_A = \det \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -i\alpha & -i\beta & i\gamma & i\delta \\ -\gamma & -\delta & \alpha & \beta \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\bar{\delta} & \frac{i}{2}\bar{\delta} & \frac{1}{2}\bar{\gamma} & \frac{1}{2}\bar{\gamma} \\ \frac{1}{2}\bar{\gamma} & -\frac{i}{2}\bar{\gamma} & -\frac{1}{2}\bar{\delta} & \frac{1}{2}\bar{\delta} \\ \frac{1}{2}\bar{\beta} & \frac{i}{2}\bar{\beta} & \frac{1}{2}\bar{\alpha} & \frac{1}{2}\bar{\alpha} \\ \frac{1}{2}\bar{\alpha} & \frac{i}{2}\bar{\alpha} & -\frac{1}{2}\bar{\beta} & \frac{1}{2}\bar{\beta} \end{bmatrix}$$

olup, gerekli işlemler yapılırsa;

$$\det \wedge_A = 1$$

elde edilir. Yani $\wedge_A$, proper'dır. $\wedge_A$, proper ve ortochronous olduğundan $\wedge_A \in \mathcal{L}$ dir. ■

Tanım 2.10 *Her $A \in SL(2,\mathbb{C})$ matrisi için,*

$$\begin{aligned} spin \quad &: \quad SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L} \\ A \quad &\longmapsto \quad \wedge_A \end{aligned}$$

*olarak tanımlanan dönüşüme **spinor dönüşümü** adı verilir.*

Şimdi spinor dönüşümünün $2-1$, örten bir grup homomorfizmi olduğunu söyleyen bir teorem vermeden önce, teoremin kanıtında gereken bir kaç yardımcı teorem verilecektir.

Yardımcı Teorem 2.9 *Verilen $\theta \in \mathbb{R}$ için, 2×2 'lik matris $A(\theta)$;*

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh\frac{\theta}{2} & -\sinh\frac{\theta}{2} \\ -\sinh\frac{\theta}{2} & \cosh\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmak üzere, $A(\theta) \in SL(2,\mathbb{C})$ dir ve $A(\theta)$ nın spinor dönüşümü altındaki görüntüsü $\wedge_{A(\theta)}$,

$$\wedge_{A(\theta)} = L(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh\theta & 0 & 0 & -\sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & 0 & \cosh\theta \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

İspat. $\det A(\theta) = \begin{vmatrix} \cosh\frac{\theta}{2} & -\sinh\frac{\theta}{2} \\ -\sinh\frac{\theta}{2} & \cosh\frac{\theta}{2} \end{vmatrix} = \cosh^2\frac{\theta}{2} - \sinh^2\frac{\theta}{2} = 1$ olduundan, $A(\theta) \in SL(2,\mathbb{C})$ dir.

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh\frac{\theta}{2} & -\sinh\frac{\theta}{2} \\ -\sinh\frac{\theta}{2} & \cosh\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

ve

$$\wedge_{A(\theta)} = \left[\wedge^i{}_j\right]_{i,j=1,2,3,4}$$

ile gösterilmek üzere

$$\wedge^1{}_1 = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\delta} + \beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\alpha})$$

olduğu biliniyor. Buradan,

$$\begin{aligned}
\wedge^1{}_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\delta} + \beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\alpha}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cosh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2} + \cosh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2} + \sinh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2} + \sinh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}2\left(\cosh^2\frac{\theta}{2} + \sinh^2\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \cosh\theta \\
\wedge^1{}_1 &= \cosh\theta
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\wedge^2{}_1 = \frac{i}{2}(\gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\alpha} - \alpha\bar{\delta} - \beta\bar{\gamma})$$

olduğu biliniyor. Buradan,

$$\begin{aligned}
\wedge^2{}_1 &= \frac{i}{2}(\gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\alpha} - \alpha\bar{\delta} - \beta\bar{\gamma}) \\
&= \frac{i}{2}\left(-\cosh^2\frac{\theta}{2} + \sinh^2\frac{\theta}{2} - \sinh^2\frac{\theta}{2} + \cosh^2\frac{\theta}{2}\right) \\
\wedge^2{}_1 &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\wedge^3{}_1 = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} - \gamma\bar{\delta} - \delta\bar{\gamma}))$$

olduğu biliniyor. Buradan,

$$\begin{aligned}
\wedge^3{}_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} - \gamma\bar{\delta} - \delta\bar{\gamma}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2} - \cosh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2} + \cosh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2} - \cosh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\right) \\
\wedge^3{}_1 &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\wedge^4{}_1 = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} + \gamma\bar{\delta} + \delta\bar{\gamma})$$

olduğu biliniyor. Buradan,

$$\begin{aligned}
\wedge^4{}_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} + \gamma\bar{\delta} + \delta\bar{\gamma}) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2} - \sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2} - \sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2} - \sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}(-4)\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2} \\
&= -\sinh\theta \\
\wedge^4{}_1 &= -\sinh\theta
\end{aligned}$$

elde edilir. $\wedge_{A(\theta)} = \left[\wedge^i{}_j\right]_{i,j=1,2,3,4}$ matrisinin diğer girdileri benzer şekilde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ların eşitleri yerine koyularak;

$$\begin{aligned}
\wedge^1{}_2 &= 0, \wedge^2{}_2 = 1, \wedge^3{}_2 = 0, \wedge^4{}_2 = 0 \\
\wedge^1{}_3 &= 0, \wedge^2{}_3 = 0, \wedge^3{}_3 = 1, \wedge^4{}_3 = 0 \\
\wedge^1{}_4 &= -\sinh\theta, \wedge^2{}_4 = 0, \wedge^3{}_4 = 0, \wedge^4{}_4 = \cosh\theta
\end{aligned}$$

olarak bulunurlar. Girdiler yerine koyularak $\wedge_{A(\theta)} = \left[\wedge^i{}_j\right]_{i,j=1,2,3,4}$ matrisi,

$$\wedge_{A(\theta)} = \begin{bmatrix} \cosh\theta & 0 & 0 & -\sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & 0 & \cosh\theta \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir ki, hatırlanırsa bu matris verilen $\theta \in \mathbb{R}$ sayısı için $L(\theta)$ matrisine eşittir. Yani;

$$\wedge_{A(\theta)} = L(\theta)$$

dir. ■

Tanım 2.11 *$A \in SL(2,\mathbb{C})$ matrisi verilsin.Eğer $A^{-1} = A^*$ ise A matrisine* ***üniter*** *matris adı verilir. Yani $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ile gösterilmek üzere,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} & \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} \\ \bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta & \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

dir. Üniter matrislerin kümesi SU_2 ile gösterilip;

$$SU_2 = \left\{A \in SL(2,\mathbb{C}) : A^{-1} = A^*\right\}$$

olarak tanımlanır.

Yardımcı Teorem 2.10 *SU_2, $SL(2,\mathbb{C})$ nin bir alt grubudur.*

İspat. $A, B \in SU_2$ keyfi matrisleri verilsin. Bu durumda $A^{-1} = A^*$ ve $B^{-1} = B^*$ dir. Bu durumda

$A^{-1} \in SU_2$ mi?

$A^{-1} = A^*$ eşitliğinden, $A = (A^{-1})^*$ elde edilir. Yani $A^{-1} \in SU_2$ dir.

$AB \in SL(2,\mathbb{C})$ mi?

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^*A^* = (AB)^* \Longrightarrow (AB)^{-1} = (AB)^* \Longrightarrow AB \in SL(2,\mathbb{C})$ dir.

SU$_2$, $SL(2,\mathbb{C})$ nin bir alt grubudur ■

$A \in SU_2$ ise $\wedge_A$ nın (4.4) girdisi ${\wedge^4}_4$, (2.9) 'eşitliğinden $\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1$ ve $\gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} = 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} {\wedge^4}_4 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta}) \\ &= \frac{1}{2}(1+1) \\ {\wedge^4}_4 &= 1 \end{aligned}$$

bulunur ki, yardımcı teorem (2.5) e göre $\wedge_A$, $\mathcal{L}$ de bir rotasyondur. Bu durumda $\wedge_A \in \mathcal{R}$ dir. Yani spinor dönüşümü, SU_2 kümesini $\mathcal{R}$ nin içine taşır.

görülecek ki, aslında spinor dönüşümü, SU_2 kümesini $\mathcal{R}$ nin üzerine taşır.

Yardımcı Teorem 2.11 [10] $SO(3) = \left\{A \in GL(3,\mathbb{R}) : AA^T = I,\ \det A = 1\right\}$ *olmak üzere*

*$\forall\ A \in SO_3$ matrisi, adına "**Euler açıları**" denilen ϕ_1, θ, ϕ_2 gibi üç parametreye bağlı olarak*

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi_2\cos\phi_1 - \cos\theta\sin\phi_1\sin\phi_2 & -\cos\phi_2\sin\phi_1 - \cos\theta\cos\phi_1\sin\phi_2 & \sin\phi_2\sin\theta \\ \sin\phi_2\cos\phi_1 + \cos\theta\sin\phi_1\cos\phi_2 & -\sin\phi_2\sin\phi_1 + \cos\theta\cos\phi\cos\phi_2 & -\cos\phi_2\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi_1 & \sin\theta\cos\phi_1 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Formunda ifade edilebilir.

Yardımcı Teorem 2.12 [8, 10]

$$A' = \begin{bmatrix} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i}{2}(\phi_1+\phi_2)} & \left(i\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{-\frac{i}{2}(\phi_1-\phi_2)} \\ \left(i\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i}{2}(\phi_1-\phi_2)} & \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{-\frac{i}{2}(\phi_1+\phi_2)} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlı matris, SU_2 nin bir elemanıdır ve

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi_2\cos\phi_1 - \cos\theta\sin\phi_1\sin\phi_2 & -\cos\phi_2\sin\phi_1 - \cos\theta\cos\phi_1\sin\phi_2 & \sin\phi_2\sin\theta \\ \sin\phi_2\cos\phi_1 + \cos\theta\sin\phi_1\cos\phi_2 & -\sin\phi_2\sin\phi_1 + \cos\theta\cos\phi\cos\phi_2 & -\cos\phi_2\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi_1 & \sin\theta\cos\phi_1 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

olmak üzere; A' matrisinin spinör dönüşümü altındaki görüntüsü,

$$\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & A & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

formundadır.

Teorem 2.5 *$spin : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}$ dönüşümü, bir $2-1$, örten* ***grup homomorfizmi*** *dir.*

İspat. Önce bir grup homomorfizmi olduğu ve $2-1$ olduğu gösterilecektir. Ardından örten olduğu gösterilecektir.

$A, B \in SL(2,\mathbb{C})$ matrisleri verilsin.

$spin(A) = \wedge_A$, $spin(B) = \wedge_B$ olmak üzere $spin(AB) = \wedge_{AB} = \wedge_A\wedge_B = spin(A)spin(B)$ mi?

Her $H \in \mathcal{H}_2$ için,

$$\begin{aligned} M_{AB}(H) &= (AB)H(AB)^* \\ &= ABHB^*A^* \\ &= A(BHB^*)A^* \\ &= M_A(BHB^*) \\ &= M_A\left(M_B(H)\right) \\ &= \left(M_A \circ M_B\right)(H) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$M_{AB} = M_A \circ M_B$$

sonucuna varılır ki, son eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned} L_A \circ L_B &= \left(\varphi^{-1} \circ M_A \circ \varphi\right) \circ \left(\varphi^{-1} \circ M_B \circ \varphi\right) \\ &= \varphi^{-1} \circ M_A \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ M_B \circ \varphi \\ &= \varphi^{-1} \circ (M_A \circ M_B) \circ \varphi \\ &= \varphi^{-1} \circ M_{AB} \circ \varphi \\ &= L_{AB} \end{aligned}$$

bulunur, düzenlenirse

$$L_A \circ L_B = L_{AB}$$

elde edilir. Son eşitlik, dönüşümlerin matris gösterimleriyle ifade edilirse,

$$\wedge_{AB} = \wedge_A \wedge_B$$

elde edilir. Bundan dolayı spinor dönüşümü matris çarpımını korur. Yani $SL(2, \mathbb{C})$ den $\mathcal{L}$ ye bir grup homomorfizmidir.

$A, B \in SL(2, \mathbb{C})$ matrisleri verilsin.

$\wedge_A = \wedge_B$ ise $A = \pm B$ dir. Gerçekten;

$\wedge_A = \wedge_B$ olsun.

$SL(2,\mathbb{C})$ grup olduğundan $AB^{-1} \in SL(2,\mathbb{C})$ dir. Spinor dönüşümü homomorfizm olduğundan,

$$\begin{aligned} \wedge_{AB^{-1}} &= \wedge_A \wedge_{B^{-1}} = \wedge_A(\wedge_B)^{-1} = \wedge_A(\wedge_A)^{-1} = I_{4\times 4} \\ &\Longrightarrow \wedge_{AB^{-1}} = I_{4\times 4} \end{aligned}$$

elde edilir. $AB^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ile gösterilmek üzere, $\wedge_{AB^{-1}} = I_{4\times 4}$ eşitliğinde,

(3.3) ve (4.3) girdilerinin karşlılıklı eşitliğinden sırasıyla,

$$\begin{aligned} (\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta}) &= 2 \\ (\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta}) &= 0 \end{aligned}$$

olup, iki eşitliğin toplamı ve farkından sırsıyla,

$$\begin{aligned} \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} &= 1 \qquad (*)_1 \\ \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta} &= -1 \qquad (*)_2 \end{aligned}$$

elde edilir.

(1.4) ve (2.4) girdilerinin karşlılıklı eşitliğinden sırasıyla,

$$\begin{aligned} (\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} + \gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta}) &= 0 \\ (\gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} - \alpha\bar{\gamma} - \beta\bar{\delta}) &= 0 \end{aligned}$$

olup, iki eşitliğin toplamı ve farkından sırsıyla,

$$\begin{aligned} \gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} &= 0 \qquad (*)_3 \\ \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} &= 0 \qquad (*)_4 \end{aligned}$$

elde edilir.

(3.4) ve (4.4) girdilerinin karşlılıklı eşitliğinden sırasıyla,

$$\begin{aligned} (\alpha\bar{\alpha} - \gamma\bar{\gamma} + \beta\bar{\beta} - \delta\bar{\delta}) &= 0 \\ (\alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma} + \beta\bar{\beta} + \delta\bar{\delta}) &= 2 \end{aligned}$$

olup, iki eşitliğin toplamı ve farkından sırsıyla,

$$\begin{aligned} \alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta} &= 1 \qquad (*)_5 \\ \gamma\bar{\gamma}+\delta\bar{\delta} &= 1 \qquad (*)_6 \end{aligned}$$

elde edilir.

(1.1) ve (2.1) girdilerinin karşlılıklı eşitliğinden sırasıyla,

$$\begin{aligned} (\alpha\bar{\delta}+\beta\bar{\gamma}+\gamma\bar{\beta}+\delta\bar{\alpha}) &= 2 \\ (\gamma\bar{\beta}+\delta\bar{\alpha}-\alpha\bar{\delta}-\beta\bar{\gamma}) &= 0 \end{aligned}$$

olup, iki eşitliğin toplamı ve farkından sırsıyla,

$$\begin{aligned} \gamma\bar{\beta}+\delta\bar{\alpha} &= 1 \qquad (*)_7 \\ \alpha\bar{\delta}+\beta\bar{\gamma} &= 1 \qquad (*)_8 \end{aligned}$$

elde edilir.

$(*)_2$ ve $(*)_6$ dan,

$$\begin{aligned} \gamma\bar{\gamma} &= 0 \text{ ve } \delta\bar{\delta}=1 \\ &\Longrightarrow \gamma=0 \end{aligned}$$

$(*)_1$ ve $(*)_5$ den,

$$\begin{aligned} \beta\bar{\beta} &= 0 \text{ ve } \alpha\bar{\alpha}=1 \\ &\Longrightarrow \beta=0 \end{aligned}$$

bulunur. $\gamma=0, \beta=0$ değerleri $(*)_8$ eşitliğinde yerine koyulursa,

$$\alpha\bar{\delta}=1$$

olur. Ayrıca $\det(AB^{-1})=1$ oldoğundan $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, olup yine $\gamma=0, \beta=0$ olduğundan,

$$\alpha\delta=1$$

bulunur. $\alpha = x + iy, \delta = a + ib$ ile gösterilmek üzere

$$\alpha\bar{\delta} = 1 \Longrightarrow (xa + yb) + i(ya - xb) = 1 \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} xa + yb &= 1 \\ ya - xb &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\alpha\delta = 1 \Longrightarrow (xa - yb) + i(ya + xb) = 1 \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} xa - yb &= 1 \\ ya + xb &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilip, eşitlikler çözülürse,

$$y = 0 \text{ ve } b = 0$$

bulunur. $\alpha\bar{\alpha} = 1$ ve $\delta\bar{\delta} = 1$ bulunmuştu,

$$\begin{aligned} \alpha\bar{\alpha} &= 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1 \\ \delta\bar{\delta} &= 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow \delta = \pm 1 \end{aligned}$$

bulunur. $\gamma = 0, \beta = 0, \alpha = \pm 1, \delta = \pm 1$ bulunduğundan,

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

yani

$$AB^{-1} = \pm I_{4\times 4}$$

olur.

$$AB^{-1} = \pm I_{4\times 4} \Longrightarrow A = \pm B$$

olduğu açıktır. Spinor dönüşümü $2 - 1$ dir. Yani *spin* : $SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}$ dönüşümü, bir $2 - 1$ **grup homomorfizmi** dir.

spin : $SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}$ dönüşümü örtendir gerçekten; **Teorem 2.4** ten verilen her $\wedge \in \mathcal{L}$ lorentz dönüşümü için bir $\theta \in \mathbb{R}$ sayısı ve R_1, R_2 gibi iki rotasyon vardır öyle ki;

$$\wedge = R_1 L(\theta) R_2$$

dir. Ayrıca **Yardımcı Teorem 2.12** den spinor dönüşümü altında görüntüler sırasıyla R_1, R_2 olan $A_1^{'}$ ve $A_2^{'} \in \delta U_2 \subset SL(2,\mathbb{C})$ üniter matrisleri vardır. Dahası, **Yardımcı Teorem 2.9** den verilen $L(\theta)$ için $\wedge_{A(\theta)} = L(\theta)$ olacak şekilde bir $A(\theta) \in SL(2,\mathbb{C})$ matrisi vardır. $SL(2,\mathbb{C})$ grup olduğundan, $A_1^{'} A(\theta) A_2^{'} \in SL(2,\mathbb{C})$ dir ve spinor dönüşümü homomorfizm olduğundan,

$$\begin{aligned} \wedge_{A_1^{'} A(\theta) A_2^{'}} &= \wedge_{A_1^{'}} \wedge_{A(\theta)} \wedge_{A_2^{'}} = R_1 L(\theta) R_2 = \wedge \\ &\Longrightarrow \wedge_{A_1^{'} A(\theta) A_2^{'}} = \wedge \end{aligned}$$

elde edilir. Yani verilen her $\wedge \in \mathcal{L}$ lorentz dönüşümü için bir $A_1^{'} A(\theta) A_2^{'} \in SL(2,\mathbb{C})$ elemanı vardır. *spin* : $SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}$ dönüşümü örtendir. ■

2.4 Minkowski Uzayı Üzerinde Tensörler

$v \in \mathcal{M}$ verilsin $\{e_a\}$ ve $\{\hat{e}_a\}$, $\mathcal{M}$ nin iki uygun tabanı olsun. Ayrıca $v = v^a e_a = \hat{v}^a \hat{e}_a$ olmak üzere $[\Lambda^a{}_b]$ matrisi,$\{e_a\}$ ve $\{\hat{e}_a\}$ tabanları arasındaki ilişkiyi veren Lorentz dönüşümü olsun. Yani; $e_b = \Lambda^a{}_b \hat{e}_a$ olsun. Bu durumda dönüşüm kuralına göre

$$\hat{v}^a = \Lambda^a{}_b \, v^b, \qquad a = 1,2,3,4 \tag{2.11}$$

olduğu biliniyor.

Şimdi $\mathcal{M}$ üzerinde birkaç lineer ve multilineer dönüşüm örnekleri incelenip, bu dönüşümlerin farklı iki uygun tabana göre bileşenleri arasındaki dönüşüm formülleri verilecektir.

Örnek 2.1 *$L : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, bir lineer dönüşüm olsun. $[L^a{}_b]$ ve $\left[\hat{L}^a{}_b\right]$ matrisleri sırasıyla L'nin $\{e_a\}$ ve $\{\hat{e}_a\}$ uygun tabanlarına göre matrisleri olsun. Bu durumda taban değişim* *formülüne göre,* $\Lambda^{-1} = \left[\Lambda_a{}^b\right]$ *olmak üzere*

$$\left[\hat{L}^a{}_b\right] = \left[\Lambda^a{}_b\right]\left[L^a{}_b\right]\left[\Lambda_a{}^b\right]$$

eşitliği geçerlidir. Eşitlik matris formunda

$$\begin{bmatrix} \hat{L}^1{}_1 & \hat{L}^1{}_2 & \hat{L}^1{}_3 & \hat{L}^1{}_4 \\ \hat{L}^2{}_1 & \hat{L}^2{}_2 & \hat{L}^2{}_3 & \hat{L}^2{}_4 \\ \hat{L}^3{}_1 & \hat{L}^3{}_2 & \hat{L}^3{}_3 & \hat{L}^3{}_4 \\ \hat{L}^4{}_1 & \hat{L}^4{}_2 & \hat{L}^4{}_3 & \hat{L}^4{}_4 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 & \Lambda^1{}_4 \\ \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 & \Lambda^2{}_4 \\ \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 & \Lambda^3{}_4 \\ \Lambda^4{}_1 & \Lambda^4{}_2 & \Lambda^4{}_3 & \Lambda^4{}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^1{}_1 & L^1{}_2 & L^1{}_3 & L^1{}_4 \\ L^2{}_1 & L^2{}_2 & L^2{}_3 & L^2{}_4 \\ L^3{}_1 & L^3{}_2 & L^3{}_3 & L^3{}_4 \\ L^4{}_1 & L^4{}_2 & L^4{}_3 & L^4{}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda^1{}_1 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^3{}_1 & -\Lambda^4{}_1 \\ \Lambda^1{}_2 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^3{}_2 & -\Lambda^4{}_2 \\ \Lambda^1{}_3 & \Lambda^2{}_3 & \Lambda^3{}_3 & -\Lambda^4{}_3 \\ -\Lambda^1{}_4 & -\Lambda^2{}_4 & -\Lambda^3{}_4 & \Lambda^4{}_4 \end{bmatrix}$$

olarak yazılır.

$\Lambda\left[L^a{}_b\right]\Lambda^{-1}$ matrisi göz önüne alınmak üzere $\left[L^a{}_b\right]\Lambda^{-1}$ çarpımının (i, b) girdisi

$$L^i{}_1\Lambda_b{}^1 + L^i{}_2\Lambda_b{}^2 + L^i{}_3\Lambda_b{}^3 + L^i{}_4\Lambda_b{}^4 = L^i{}_\beta\Lambda_b{}^\beta$$

elde edilir. $\left[L^a{}_b\right]\Lambda^{-1}$ matrisinin b. sütunu $\begin{pmatrix} L^1{}_\beta\Lambda_b{}^\beta \\ L^2{}_\beta\Lambda_b{}^\beta \\ L^3{}_\beta\Lambda_b{}^\beta \\ L^4{}_\beta\Lambda_b{}^\beta \end{pmatrix}$ olup Λ matrisinin a. satırı ile çarpılırsa;

$$\begin{bmatrix} \Lambda^a{}_1 & \Lambda^a{}_2 & \Lambda^a{}_3 & \Lambda^a{}_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L^1{}_\beta\Lambda_b{}^\beta \\ L^2{}_\beta\Lambda_b{}^\beta \\ L^3{}_\beta\Lambda_b{}^\beta \\ L^4{}_\beta\Lambda_b{}^\beta \end{pmatrix} = \Lambda^a{}_1 L^1{}_\beta\Lambda_b{}^\beta + ... + \Lambda^a{}_4 L^4{}_\beta\Lambda_b{}^\beta = \Lambda^a{}_\alpha L^\alpha{}_\beta\Lambda_b{}^\beta$$

buradan

$$\hat{L}^a{}_b = \Lambda^a{}_\alpha L^\alpha{}_\beta\Lambda_b{}^\beta, \quad a, b = 1, 2, 3, 4 \tag{2.12}$$

elde edilir.

Örnek 2.2 $L : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ *lineer dönüşümü verildiğinde;* L *ye* $\forall u, v \in \mathcal{M}$ *için*

$$\tilde{L} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(u,v) \longrightarrow \tilde{L}(u,v) = g(u, Lv)$$

olarak tanımlı $\tilde{L}$ bilineer formu karşılık getirilebilir. $\tilde{L}$ nin $\{e_a\}$ tabanına göre bileşenleri,

$$L_{ab} = \tilde{L}(e_a, e_b)$$

ve $\{\hat{e}_a\}$ tabanına göre bileşenleri

$$\hat{L}_{ab} = \tilde{L}(\hat{e}_a, \hat{e}_b)$$

ile gösterilmek üzere; bileşenler arasında

$$\hat{L}_{ab} = {\Lambda_a}^{\alpha}{\Lambda_b}^{\beta} L_{\alpha\beta}$$

eşitliği geçerlidir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
e_u &= {\Lambda^1}_u \hat{e}_1 + {\Lambda^2}_u \hat{e}_2 + {\Lambda^3}_u \hat{e}_3 + {\Lambda^4}_u \hat{e}_4 = {\Lambda^a}_u \hat{e}_a, \quad u = 1,2,3,4 \\
\hat{e}_u &= {\Lambda_u}^1 e_1 + {\Lambda_u}^2 e_2 + {\Lambda_u}^3 e_3 + {\Lambda_u}^4 e_4 = {\Lambda_u}^a e_a, \quad u = 1,2,3,4 \\
\hat{x}^a &= {\Lambda^a}_b x^b, \quad a = 1,2,3,4 \qquad , x^b = {\Lambda_b}^a \ \hat{x}^a, \quad b = 1,2,3,4
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\hat{L}_{ab} &= L(\hat{e}_a, \hat{e}_b) \\
&= g(\hat{e}_a, L\hat{e}_b) \\
&= g\left(\hat{e}_a, L\left({\Lambda_b}^{\beta} e_\beta\right)\right) \\
&= g\left(\hat{e}_a, {\Lambda_b}^{\beta} L e_\beta\right) \\
&= {\Lambda_b}^{\beta} \left({\Lambda_a}^{\alpha} e^{\alpha}, L e_\beta\right) \\
&= {\Lambda_b}^{\beta} {\Lambda_a}^{\alpha} g(e_a, L e_b) \\
&= {\Lambda_b}^{\beta} {\Lambda_a}^{\alpha} \tilde{L}(e_\alpha, e_\beta) \\
&= {\Lambda_b}^{\beta} {\Lambda_a}^{\alpha} L_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

olur. Yani,

$$\hat{L}_{ab} = {\Lambda_b}^{\beta} {\Lambda_a}^{\alpha} L_{\alpha\beta} \qquad , \quad a,b = 1,2,3,4 \tag{2.13}$$

elde edilir.

Örnek 2.3 *$g : \mathcal{M}\times\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ Lorentz iç çarpımı içinde aynı dönüşüm kuralı geçerlidir. Yani,*

$$\hat{g}_{ab} = {\Lambda_b}^{\beta}{\Lambda_a}^{\alpha} g_{\alpha\beta} \quad , \quad a,b = 1,2,3,4$$

dir.

Şimdi (2.10) eşitliği göz önüne alınırsa; v vektörünün iki uygun tabana göre bileşenleri v^a ve $\hat{v}^a$ lar birer kolon vektörünün bileşenleri olarak yazılırsa (2.10) eşitliği, matris çarpımı olarak

$$\begin{bmatrix} \hat{v}^1 \\ \hat{v}^2 \\ \hat{v}^3 \\ \hat{v}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {\Lambda^1}_1 & {\Lambda^1}_2 & {\Lambda^1}_3 & {\Lambda^1}_4 \\ {\Lambda^2}_1 & {\Lambda^2}_2 & {\Lambda^2}_3 & {\Lambda^2}_4 \\ {\Lambda^3}_1 & {\Lambda^3}_2 & {\Lambda^3}_3 & {\Lambda^3}_4 \\ {\Lambda^4}_1 & {\Lambda^4}_2 & {\Lambda^4}_3 & {\Lambda^4}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ v^4 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Benzer olarak (2.11) ve (2.12) eşitlikleride ifade edilebilirler. ${L^a}_b$ ve ${\hat{L}^a}_b$ ler ; kolon matrisi olarak yazılırsa $\left[{\Lambda^a}_\alpha {\Lambda_b}^\beta\right]$, 16×16'lık bir matris olup (2.11);

$$\begin{bmatrix} {\hat{L}^1}_1 \\ {\hat{L}^1}_2 \\ . \\ . \\ {\hat{L}^4}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {\Lambda^1}_1{\Lambda_1}^1 & {\Lambda^1}_1{\Lambda_1}^2 & . \ . & {\Lambda^1}_4{\Lambda_1}^4 \\ {\Lambda^1}_1{\Lambda_2}^1 & {\Lambda^1}_1{\Lambda_2}^2 & . \ . & {\Lambda^1}_4{\Lambda_2}^4 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ {\Lambda^4}_1{\Lambda_4}^1 & {\Lambda^4}_1{\Lambda_4}^2 & . \ . & {\Lambda^4}_4{\Lambda_4}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {L^1}_1 \\ {L^1}_2 \\ . \\ . \\ {L^4}_4 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir. Yine (2.12) eşitliği

$$\begin{bmatrix} \hat{L}_{11} \\ \hat{L}_{12} \\ . \\ . \\ \hat{L}_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {\Lambda_1}^1{\Lambda_1}^1 & {\Lambda_1}^1{\Lambda_1}^2 & . \ . & {\Lambda_4}^1{\Lambda_1}^4 \\ {\Lambda_1}^1{\Lambda_2}^1 & {\Lambda_1}^1{\Lambda_2}^2 & . \ . & {\Lambda_4}^1{\Lambda_2}^4 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ {\Lambda_1}^4{\Lambda_4}^1 & {\Lambda_1}^4{\Lambda_4}^2 & . \ . & {\Lambda_4}^4{\Lambda_4}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{12} \\ . \\ . \\ L_{44} \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir.

Tanım 2.12 *$\mathcal{M}^* = \{f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R} \ : f \ , \text{lineer}\}$ olarak tanımlı $\mathcal{M}^*$ kümesine $\mathcal{M}$ nin dual uzayı denir. $\mathcal{M}^*$ ın elemanlarına ise* ***kovektör*** *ler adı verilir.*

Açıktır ki $\mathcal{M}^*$ bir reel vektör uzayıdır.

Tanım 2.13 $\{e_a\}$, $\mathcal{M}$ *nin bir uygun tabanı olsun. Bu durumda;*$\{e_a\}$ *nın,* $\mathcal{M}^*$ *için dual tabanı* $\{e^a\}$ *ile gösterilip,*

$$e^a(e_b) = \delta^a_b, \qquad a, b = 1, 2, 3, 4$$

ile tanımlıdır.

Yardımcı Teorem 2.13 $\{e_a\}$ *ve* $\{\hat{e}_a\}$ *iki uygun taban,* $\{e^a\}$ *ve* $\{\hat{e}^a\}$ *kümeleri onların dual tabanları olsunlar.* $\Lambda \in \mathcal{L}$ *matrisi,* $e_\alpha = \Lambda^a{}_\alpha \hat{e}_a$ *ve* $\hat{e}_a = \Lambda_a{}^\alpha e_\alpha$ *olacak şekildeki matris olmak üzere;*

$$\hat{e}^a = \Lambda^a{}_\alpha e^\alpha, \qquad a = 1, 2, 3, 4 \tag{2.14}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Eşitliği göstermek için eşitliğin iki yanına $\hat{e}_b$ yedirilecektir. Bu durumda sol taraf $\hat{e}^a(\hat{e}_b) = \delta^a_b$ olduğu biliniyor. Eşitliğin sağ tarafı ise yine,

$$\Lambda^a{}_\alpha e^\alpha(\hat{e}_b) = \Lambda^a{}_\alpha e^\alpha(\Lambda_b{}^\beta e_\beta) = \Lambda^a{}_\alpha \Lambda_b{}^\beta e^\alpha(e_\beta) = \Lambda^a{}_\alpha \Lambda_b{}^\beta \delta^\alpha_\beta = \Lambda^a{}_\alpha \Lambda_b{}^\alpha = \delta^a_b$$

bulunur ki burdan $\hat{e}^a = \Lambda^a{}_\alpha e^\alpha$ elde edilir. ■

Tanım 2.14 $v \in \mathcal{M}$ *verilsin. Her* $u \in \mathcal{M}$ *için*

$$v^*(u) = g(v, u)$$

ile tanımlı $v^* \in \mathcal{M}^*$ *elemanına* v *nin metrik duali adı verilir.*

Yardımcı Teorem 2.14 $\{e_a\}$ *ve* $\{\hat{e}_a\}$ *iki uygun taban,* $\{e^a\}$ *ve* $\{\hat{e}^a\}$ *kümeleri onların dual tabanları olsunlar.* $v = v^a e_a = \hat{v}^a \hat{e}_a$, $v^* = v_a e^a = \hat{v}_a \hat{e}^a$ *olmak üzere*

$$v_a = \eta_{a\alpha} v^\alpha$$

dir. Ayrıca v^* ın bu iki dual tabana göre bileşenleri arasında

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \Lambda^a{}_\alpha \hat{v}_a \\ \hat{v}_a &= \Lambda_a{}^\alpha v_\alpha \end{aligned}$$

dönüşüm kuralları geçerlidir.

İspat. $v_a = v^*(e_a) = g(v, e_a) = g(v^\alpha e_\alpha, e_a) = v^\alpha g(e_\alpha, e_a) = \eta_{a\alpha} v^\alpha \Rightarrow v_a = \eta_{a\alpha} v^\alpha$ elde edilir. $\hat{e}^a = \Lambda^a{}_\alpha e^\alpha$ eşitliği kullanılarak İkinci eşitlik,

$v_a e^a = v^* = \hat{v}_a \hat{e}^a = \hat{v}_a(\Lambda^a{}_\alpha e^\alpha) = (\Lambda^a{}_\alpha \hat{v}_a) e^\alpha$ olup buradan

$$v_\alpha = \Lambda^a{}_\alpha \hat{v}_a$$

elde edilir. Son eşitliğin iki yanı $\Lambda_a{}^\alpha$ ile çarpılırsa, $\Lambda^a{}_\alpha$ ve $\Lambda_a{}^\alpha$ lar birbirlerinin ters matrislerinin girdileri olduğundan,

$$\begin{aligned} \Lambda_a{}^\alpha v_\alpha &= \Lambda_a{}^\alpha \Lambda^a{}_\alpha \hat{v}_a \\ \Lambda_a{}^\alpha v_\alpha &= \delta^a_a \hat{v}_a \\ \hat{v}_a &= \Lambda_a{}^\alpha v_\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Tanım 2.15 *$\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}^*$ kümeleri üzerinde, $r \geq 0, s \geq 0$ olmak üzere*

$$T : \underbrace{\mathcal{M}^* \times ... \times \mathcal{M}^*}_{r\ tane} \times \underbrace{\mathcal{M} \times .... \times \mathcal{M}}_{s\ tane} \longrightarrow \mathbb{R}$$

*olarak verilen T multilineer fonksiyoneline, (r, s) **tipinde bir tensor** adı verilir. $\mathcal{M}$ üzerindeki tensorlerin oluşturduğu küme $\mathcal{T}^r_s$ ile gösterilip,*

$$\mathcal{T}^r_s = \left\{ T : \underbrace{\mathcal{M}^* \times ... \times \mathcal{M}^*}_{r\ tane} \times \underbrace{\mathcal{M} \times .... \times \mathcal{M}}_{s\ tane} \longrightarrow \mathbb{R} : T,\ multilineer \right\}$$

*olarak ifade edilir. $\mathcal{T}^r_s$ nin elemanlarına, **kontravaryant rankı** r **kovaryant rankı** s **olan world-tensorler** de denilir.*

Açıktır ki $\mathcal{T}^r_s$ kümesi noktasal toplam ve skalerle çarpım işlemlerine göre bir reel vektör uzayıdır.

Tanım 2.16 *$u_1, ..., u_r \in \mathcal{M}$ ve $f_1, ..., f_s \in \mathcal{M}^*$ verilsin. Bu durumda; her $g_1, ..., g_r \in \mathcal{M}^*$ ve her $v_1, ..., v_s \in \mathcal{M}$ için,*

$$\begin{aligned} & u_1 \otimes ... \otimes \ u_r \otimes f_1 \otimes ... \otimes \ f_s \left(g_1, ..., g_r, v_1, ..., v_s\right) \\ = \ & g_1(u_1)...g_r(u_r).f_1(v_1)...f_s(v_s) \end{aligned}$$

olarak tanımlı

$$u_1 \otimes ... \otimes \ u_r \otimes f_1 \otimes ... \otimes \ f_s : \mathcal{M}^* \underset{r\ tane}{\times ... \times} \mathcal{M}^* \times \mathcal{M} \underset{s\ tane}{\times .... \times} \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümümüne $u_1, ..., u_r \in \mathcal{M}$ ve $f_1, ..., f_s \in \mathcal{M}^*$ elemanlarının ***tensor çarpımı*** *denir.*

f_i ve g_i ler lineer olduklarından hemen söylenilebilir ki $u_1 \otimes ... \otimes \ u_r \otimes f_1 \otimes ... \otimes \ f_s$ dönüşümü multilineerdir. Yani $u_1 \otimes ... \otimes \ u_r \otimes f_1 \otimes ... \otimes \ f_s \in \mathcal{T}^r_s$ dir.

Teorem 2.6 *$\{e_a\}$, $\mathcal{M}$ nin bir uygun tabanı ve $\{e^a\}$, onun duali olsun. Bu durumda; $a_1, ...a_r = 1, 2, 3, 4$ ve $b_1, ..., b_s = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere,*

$$e_{a_1} \otimes ... \otimes e_{a_r} \otimes e^{b_1} \otimes ... \otimes e^{b_s}$$

kümesi $\mathcal{T}^r_s$kümesi için bir tabandır. Ayrıca, $T \in \mathcal{T}^r_s$ verildiğinde, T nin bu tabana göre bileşenleri

$$T\left(e^{a_1}, ..., e^{a_r}, e_{b_1}, ..., e_{b_s}\right) = T^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s}$$

ile gösterilmek üzere T,

$$\begin{aligned} T \ &= \ T\left(e^{a_1}, ..., e^{a_r}, e_{b_1}, ..., e_{b_s}\right) e_{a_1} \otimes ... \otimes e_{a_r} \otimes e^{b_1} \otimes ... \otimes e^{b_s} \\ &= \ T^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s} e_{a_1} \otimes ... \otimes e_{a_r} \otimes e^{b_1} \otimes ... \otimes e^{b_s} \qquad (2.15) \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

Teorem 2.7 *$\{e_a\}$ ve $\{\hat{e}_a\}$ iki uygun taban, $\{e^a\}$ ve $\{\hat{e}^a\}$ kümeleri onların dual tabanları olsunlar. $\Lambda \in \mathcal{L}$ matrisi, $\hat{e}_a = \Lambda_a{}^\alpha e_\alpha$ ve $\hat{e}^a = \Lambda^a{}_\alpha e^\alpha$ olacak şekildeki matris olsun. Ayrıca,T nin ikinci tabana göre bileşenleri*

$$T\left(\hat{e}^{a_1}, ..., \hat{e}^{a_r}, \hat{e}_{b_1}, ..., \hat{e}_{b_s}\right) = \hat{T}^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s}$$

ile gösterilsin. Bu durumda verilen bir $T \in \mathcal{T}_s^r$ world-tensörünün bu iki tabana göre bileşenleri arasında,

$$\hat{T}^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s} = \Lambda^{a_1}{}_{\alpha_1}...\Lambda^{a_r}{}_{\alpha_r}\Lambda_{b_1}{}^{\beta_1}...\Lambda_{b_s}{}^{\beta_s}T^{\alpha_1...\alpha_r}{}_{\beta_1...\beta_s} \tag{2.16}$$

dönüşüm kuralı geçerlidir.

İspat. $\hat{e}_a = \Lambda_a{}^\alpha e_\alpha$ ve $\hat{e}^a = \Lambda^a{}_\alpha e^\alpha$ eşitlikleri ve T nin multilineerliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\hat{T}^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s} &= T\left(\hat{e}^{a_1}, ..., \hat{e}^{a_r}, \hat{e}_{b_1}, ..., \hat{e}_{b_s}\right) \\
&= T\left(\Lambda^{a_1}{}_{\alpha_1}e^{\alpha_1}, ..., \Lambda^{a_r}{}_{\alpha_r}e^{\alpha_r}, \Lambda_{b_1}{}^{\beta_1}e_{\beta_1}, ..., \Lambda_{b_s}{}^{\beta_s}e_{\beta_s}\right) \\
&= \Lambda^{a_1}{}_{\alpha_1}...\Lambda^{a_r}{}_{\alpha_r}\Lambda_{b_1}{}^{\beta_1}...\Lambda_{b_s}{}^{\beta_s}T\left(e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_r}, e_{\beta_1}, ..., e_{\beta_s}\right) \\
&= \Lambda^{a_1}{}_{\alpha_1}...\Lambda^{a_r}{}_{\alpha_r}\Lambda_{b_1}{}^{\beta_1}...\Lambda_{b_s}{}^{\beta_s}T^{\alpha_1...\alpha_r}{}_{\beta_1...\beta_s}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. ■

Dikkat edilirse $\mathcal{T}_s^r$ nin tabanı 4^{r+s} tane elemandan oluşur ve bir $T \in \mathcal{T}_s^r$ world-tensörü 4^{r+s} tane bileşene sahiptir. Yani T nin bileşenleri 4^{r+s} tane girdiye sahip bir kolon vektörü olarak düşünülebilir. Ayrıca girdileri $\Lambda^{a_1}{}_{\alpha_1}...\Lambda^{a_r}{}_{\alpha_r}\Lambda_{b_1}{}^{\beta_1}...\Lambda_{b_s}{}^{\beta_s}$ lerden oluşan $\left[\Lambda^{a_1}{}_{\alpha_1}...\Lambda^{a_r}{}_{\alpha_r}\Lambda_{b_1}{}^{\beta_1}...\Lambda_{b_s}{}^{\beta_s}\right]$ matrisi $4^{r+s} \times 4^{r+s}$ lik bir matristir. Bu durum göz önüne alınarak (3.1.6) dönüşüm kuralı, matris formunda,

$$\left[\hat{T}^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s}\right] = \left[\Lambda^{a_1}{}_{\alpha_1}...\Lambda^{a_r}{}_{\alpha_r}\Lambda_{b_1}{}^{\beta_1}...\Lambda_{b_s}{}^{\beta_s}\right]\left[T^{\alpha_1...\alpha_r}{}_{\beta_1...\beta_s}\right] \tag{2.17}$$

olarak ifade edilebilir.

Örnek 2.4 *$T \in \mathcal{T}^0_2$ olsun. $\{e^a \otimes e^b : a,b = 1,2,3,4\}$ ve$\{\hat{e}^a \otimes \hat{e}^b : a,b = 1,2,3,4\}$ $\mathcal{T}^0_2$ nin iki tabanı olmak üzere;*

$$T = T(e_a, e_b)e^a \otimes e^b = T_{ab}e^a \otimes e^b$$

ve

$$T = T(\hat{e}_a, \hat{e}_b)\hat{e}^a \otimes \hat{e}^b = \hat{T}_{ab}\hat{e}^a \otimes \hat{e}^b$$

olup, farklı iki tabana göre bilşenler arasında,

$$\begin{aligned}\hat{T}_{ab} &= T(\hat{e}_a, \hat{e}_b) \\ &= T(\Lambda_a{}^{\alpha} e_{\alpha}, \Lambda_b{}^{\beta} e_{\beta}) \\ &= \Lambda_a{}^{\alpha}\Lambda_b{}^{\beta} T(e_{\alpha}, e_{\beta}) \\ &= \Lambda_a{}^{\alpha}\Lambda_b{}^{\beta} T_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\hat{T}_{ab} = \Lambda_a{}^{\alpha}\Lambda_b{}^{\beta} T_{\alpha\beta} \tag{2.18}$$

dönüşüm kuralı geçerlidir.

Örnek 2.5 *$T \in \mathcal{T}^1_1$ olsun. $\{e_a \otimes e^b : a,b = 1,2,3,4\}$ ve$\{\hat{e}_a \otimes \hat{e}^b : a,b = 1,2,3,4\}$ $\mathcal{T}^1_1$ nin iki tabanı olmak üzere;*

$$T = T(e^a, e_b)e_a \otimes e^b = T^a{}_b e_a \otimes e^b$$

ve

$$T = T(\hat{e}^a, \hat{e}_b)\hat{e}_a \otimes \hat{e}^b = \hat{T}^a{}_b \hat{e}_a \otimes \hat{e}^b$$

olup, farklı iki tabana göre bilşenler arasında,

$$\begin{aligned}\hat{T}^a{}_b &= T(\hat{e}^a, \hat{e}_b) \\ &= T(\Lambda^a{}_{\alpha} e^{\alpha}, \Lambda_b{}^{\beta} e_{\beta}) \\ &= \Lambda^a{}_{\alpha}\Lambda_b{}^{\beta} T(e^{\alpha}, e_{\beta}) \\ &= \Lambda^a{}_{\alpha}\Lambda_b{}^{\beta} T^{\alpha}{}_{\beta}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\hat{T}^a{}_b = \Lambda^a{}_\alpha \Lambda_b{}^\beta T^\alpha{}_\beta \tag{2.19}$$

dönüşüm kuralı geçerlidir.

3 SPİNÖRLER

3.1 Spin Uzayı

Tanım 3.1 *$\mathcal{B}$, kompleks sayılar üzerinde bir vektör uzayı, $f : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ bir dönüşüm olsun. Eğer,*

(1) $f(\phi, \psi) \neq 0$ olacak şekilde $\phi, \psi \in \mathcal{B}$ elemanları vardır.

(2) Her $\phi, \psi \in$ß için $f(\phi, \psi) = -f(\phi, \psi)$ dir.

(3) Her $\phi, \psi, \xi \in$ß ve $a, b \in \mathbb{C}$ için,

$$f(a\phi + b\psi, \xi) = af(\phi, \xi) + bf(\psi, \xi)$$

dir.

(4) Her $\phi, \psi, \xi \in \mathcal{B}$ için,

$$f(\phi, \psi)\xi + f(\xi, \phi)\psi + f(\psi, \xi)\phi = 0$$

dir.

Koşulları sağlanıyorsa $\mathcal{B}$ ya "**spin uzayı**" denir. $\mathcal{B}$ nın bir elemanına ise bir "**spin vektörü**" adı verilir.

Örnek 3.1 $\mathbb{C}^2 = \left\{ \phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{bmatrix} : \phi_A \in \mathbb{C},\ A = 1, 0 \right\}$ *kümesi üzerinde,*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (\phi, \psi) \quad &\longmapsto \quad f(\phi, \psi) = \phi_1\psi_0 - \phi_0\psi_1 \end{aligned}$$

olarak tanımlanan f dönüşümüyle birlikte $\mathbb{C}^2$, bir spin uzayıdır.

Teorem 3.1 *$\mathcal{B}$, bir spin uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.*

a) Her $\phi \in \mathcal{B}$ için $f(\phi, \phi) = 0$ dır.

b) f, bir bilineer dönüşümdür.

c) $f(\phi,\psi) \neq 0$ olacak şekilde herhangi iki $\phi,\psi \in \mathcal{B}$ elemanları $\mathcal{B}$ için bir taban oluştururlar. Yani dim $\mathcal{B} = 2$ dir.

d) $\mathcal{B}$ nın $f(s^1,s^0) = -f(s^0,s^1) = 1$ koşulunu sağlayan $\{s^1,s^0\}$ gibi bir tabanı vardır. Böyle bir tabana $\mathcal{B}$ için bir "**spin çatısı**" adı verilir.

e) $\{s^1,s^0\}$, $\mathcal{B}$ için bir spin çatısı ve $\phi \in \mathcal{B}$ için $\phi = \phi_1 s^1 + \phi_0 s^0 = \phi_A s^A$ ise

$$\phi_1 = f(\phi,s^0) \text{ ve } \phi_0 = -f(\phi,s^1)$$

dir.

f) $\{s^1,s^0\}$, ß için bir spin çatısı ve $\phi = \phi_A s^A$, $\psi = \psi_A s^A \in \mathcal{B}$ spin vektörleri verilsin. Bu durumda;

$$f(\phi,\psi) = \begin{vmatrix} \phi_1 & \psi_1 \\ \phi_0 & \psi_0 \end{vmatrix} = \phi_1\psi_0 - \phi_0\psi_1$$

eşitliği geçerlidir.

g) $\phi,\psi \in \mathcal{B}$ spin vektörleri lineer bağımsızdır $\iff$ $f(\phi,\psi) \neq 0$ dır.

h) $\{s^1,s^0\}$ ve $\{\hat{s}^1,\hat{s}^0\}$ gibi iki spin çatısı verilsin. s^1 ve s^0 , $\{\hat{s}^1,\hat{s}^0\}$ cinsinden $s^1 = {G_1}^1\hat{s}^1 + {G_0}^1\hat{s}^0 = {G_A}^1\hat{s}^A$ ve $s^0 = {G_1}^0\hat{s}^1 + {G_0}^0\hat{s}^0 = {G_A}^0\hat{s}^A$ olarak yazılsın, yani;

$$s^B = {G_A}^B\hat{s}^A \quad , B = 1,0 \tag{3.1}$$

olsun. Bu durumda;

$$G = \left[{G_A}^B\right] = \begin{bmatrix} {G_1}^1 & {G_1}^0 \\ {G_0}^1 & {G_0}^0 \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$$

dir.

i) $\{s^1,s^0\}$ ve $\{\hat{s}^1,\hat{s}^0\}$, iki spin çatısı olsun ve $\phi \in \mathcal{B}$ verilsin. $\phi = \phi_A s^A = \hat{\phi}_A\hat{s}^A$ ve $s^B = {G_A}^B\hat{s}^A$, $B = 1,0$ olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {G_1}^1 & {G_1}^0 \\ {G_0}^1 & {G_0}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{bmatrix}$$

dır. Yani;

$$\hat{\phi}_A = {G_A}^B\phi_B \quad , A = 1,0 \tag{3.2}$$

dır.

j) $Sp(2,\mathbb{C}) = \{G : f(Gz, Gw) = f(z,w), \quad z,w \in \mathcal{B}\}$ olarak tanımlı küme verilsin. $Sp(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})$ dir.

İspat. a) Spin uzayı tanımının ikinci özelliğinde, $\phi = \psi$ durumu göz önüne alınırsa;

$$f(\phi,\phi) = -f(\phi,\phi)$$

olur, buradan

$$2f(\phi,\phi) = 0 \Longrightarrow f(\phi,\phi) = 0$$

bulunur.

b) Spin uzayı tanımında üçüncü özelliğe ek olarak

Her $\phi,\psi,\xi \in \mathcal{B}$ ve her $a,b \in \mathbb{C}$ için,

$$f(\phi, a\psi + b\xi) = af(\phi,\psi) + bf(\phi,\xi)$$

eşitliği gösterilmelidir. Bu ise anti-simetriklikten açıktır.

c) $\phi,\psi \in \mathcal{B}$ spin vektörleri lineer bağmlı olsun. Bu durumda, $\phi = \lambda\psi$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{C}$ vardır. Buradan *a)* ve *b)* den dolayı

$$f(\phi,\psi) = \ f(\lambda\psi,\psi) = \lambda \ f(\psi,\psi) = 0$$

elde edilir. Bu $f(\phi,\psi) \neq 0$ kabülüyle çelişir. Yani ϕ ve ψ lineer bağımsız iki spin vektörüdür. Ayrıca;

keyfi bir $\xi \in \mathcal{B}$ için tanımın dördüncü özelliğinden

$$f(\phi,\psi)\xi + f(\xi,\phi)\psi + f(\psi,\xi)\phi = 0$$

olup, $f(\phi,\psi) \neq 0$ olduğundan

$$f(\phi,\psi)\xi + f(\xi,\phi)\psi + f(\psi,\xi)\phi = 0$$

$$\xi = -\frac{f(\xi,\phi)}{f(\phi,\psi)}\psi - \frac{f(\psi,\xi)}{f(\phi,\psi)}\phi$$

eşitliği elde edilir. Yani ξ, ϕ ve ψ spin vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılır. Sonuç olarak $\{\phi, \psi\}$ kümesi $\mathcal{B}$ için bir tabandır. Dolayısıyla dim $\mathcal{B} = 2$ dir.

d) $f(\phi,\psi) \neq 0$ olsun. $f(\phi,\psi) > 0$ kabul edilebilir. c) den dolayı $\{\phi,\psi\}$ kümesi ß için bir tabandır. $s^1 = (\, f(\phi,\psi))^{-\frac{1}{2}}\,\phi$, $s^0 = (\, f(\phi,\psi))^{-\frac{1}{2}}\,\psi$ olarak tanımlanırsa, bilineerlikten;

$$f(s^1,s^0) = f\left((\, f(\phi,\psi))^{-\frac{1}{2}}\,\phi, (\, f(\phi,\psi))^{-\frac{1}{2}}\,\psi\right) = (\, f(\phi,\psi))^{-\frac{1}{2}}\,(\, f(\phi,\psi))^{-\frac{1}{2}}\, f(\phi,\psi) = 1$$

elde edilir. Spin uzayı tanımının ikinci şıkkından $f(s^1,s^0) = -f(s^0,s^1) = 1$ bulunur. $f(s^1,s^0) = 1 \neq 0$ olduğundan, $\left\{s^1,s^0\right\}$ $\mathcal{B}$ nın bir tabanıdır.

e) $\{s^1,s^0\}$, $\mathcal{B}$ için bir spin çatısı ve $\phi \in \mathcal{B}$ verilsin. $\phi = \phi_1 s^1 + \phi_0 s^0$ ise

$$\begin{aligned} f(\phi,s^0) &= f(\phi_1 s^1 + \phi_0 s^0, s^0) \\ &= \phi_1 f(s^1,s^0) + \phi_0 f(s^0,s^0) \\ &= \phi_1.1 + \phi_0.0 \\ &= \phi_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$\begin{aligned} f(\phi,s^1) &= f(\phi_1 s^1 + \phi_0 s^0, s^1) \\ &= \phi_1 f(s^1,s^1) + \phi_0 f(s^0,s^1) \\ &= \phi_1.0 + \phi_0.(-1) \\ &= -\phi_0 \end{aligned}$$

elde edilir.

f)

$$
\begin{aligned}
f(\phi,\psi) &= f(\phi_1 s^1+\phi_0 s^0, \psi_1 s^1+\psi_0 s^0)\\
&= \phi_1\psi_1 f(s^1,s^1)+\phi_1\psi_0 f(s^1,s^0)+\phi_0\psi_1 f(s^0,s^1)+\phi_0\psi_0 f(s^0,s^0)\\
&= \phi_1\psi_1.0+\phi_1\psi_0.1+\phi_0\psi_1.(-1)+\phi_0\psi_0.0\\
&= \phi_1\psi_0.-\phi_0\psi_1\\
&= \begin{vmatrix} \phi_1 & \psi_1\\ \phi_0 & \psi_0 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

bulunur.

g)

($\Longleftarrow$) c) den.

($\Longrightarrow$) ϕ ve ψ lineer bağımsız olsun

$f(\phi,\psi)=0$ olsun.

1.durum: $\phi=0$ ya da $\psi=0$ ise ϕ ve ψ lineer bağımlıdır. Çelişki yaratır. Yani $f(\phi,\psi)\neq 0$ dır.

2. durum $\phi\neq 0$ olsun. $\{s^1,s^0\}$, ß için bir spin çatısı olmak üzere $\phi=\phi_A s^A$ ve ψ $=\psi_A s^A$ yazılsın. $\phi_1\neq 0$ olsun. f) den dolayı

$f(\phi,\psi)=0 \Longrightarrow \phi_1\psi_0-\phi_0\psi_1=0 \Longrightarrow \psi_0=\frac{\psi_1}{\phi_1}\phi_0$ olur. Yine açıktır ki $\psi_1=\frac{\psi_1}{\phi_1}\phi_1$ dir. Yani

$$
\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_0\end{bmatrix}=\frac{\psi_1}{\phi_1}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_0\end{bmatrix}
$$

$$
\phi=(\psi_1\backslash\phi_1)\psi
$$

elde edilir ki bu ϕ ve ψ nin lineer bağımlı olduğunu gösterir. Bu durum kabülle çelişir. yani $f(\phi,\psi)\neq 0$ dır.

h) $f(s^1, s^0) = 1$ olduğu biliniyor. Buradan,

$$\begin{aligned}
1 &= f(s^1, s^0) = f({G_1}^1\hat{s}^1 + {G_0}^1\hat{s}^0, {G_1}^0\hat{s}^1 + {G_0}^0\hat{s}^0) \\
&= {G_1}^1{G_1}^0 f(\hat{s}^1, \hat{s}^1) + {G_1}^1{G_0}^0 f(\hat{s}^1, \hat{s}^0) + {G_0}^1{G_1}^0 f(\hat{s}^0, \hat{s}^1) + {G_0}^1{G_0}^0 f(\hat{s}^0, \hat{s}^0) \\
&= {G_1}^1{G_0}^0 - {G_0}^1{G_1}^0 \\
&= \det \begin{bmatrix} {G_1}^1 & {G_1}^0 \\ {G_0}^1 & {G_0}^0 \end{bmatrix} \\
&= \det G
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \det G = 1 \Longrightarrow G \in SL(2, \mathbb{C})$ elde edilir.

i)

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_1\hat{s}^1 + \hat{\phi}_0\hat{s}^0 &= \phi_1 s^1 + \phi_0 s^0 \\
&= \phi_1({G_1}^1\hat{s}^1 + {G_0}^1\hat{s}^0) + \phi_0({G_1}^0\hat{s}^1 + {G_0}^0\hat{s}^0) \\
&= ({G_1}^1\phi_1 + {G_1}^0\phi_0)\hat{s}^1 + ({G_0}^1\phi_1 + {G_0}^0\phi_0)\hat{s}^0
\end{aligned}$$

buradan

$$\hat{\phi}_1\hat{s}^1 + \hat{\phi}_0\hat{s}^0 = ({G_1}^1\phi_1 + {G_1}^0\phi_0)\hat{s}^1 + ({G_0}^1\phi_1 + {G_0}^0\phi_0)\hat{s}^0$$

elde edilip,

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_1 &= {G_1}^1\phi_1 + {G_1}^0\phi_0 \\
\hat{\phi}_0 &= {G_0}^1\phi_1 + {G_0}^0\phi_0
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. İki eşitlik matris gösterimiyle,

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {G_1}^1 & {G_1}^0 \\ {G_0}^1 & {G_0}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilebilir.Yani,

$$\hat{\phi}_A = {G_A}^B\phi_B \qquad , A = 1, 0$$

bulunur.

j) $G=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ olsun. $z=(z_1,z_2)$, $w=(w_1,w_2)\in\mathcal{B}$ olmak üzere $f(Gz,Gw)=f(z,w)$ mi?

$$\begin{aligned} Gz &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} az_1+bz_2 \\ cz_1+dz_2 \end{bmatrix} \\ Gw &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aw_1+bw_2 \\ cw_1+dw_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f(Gz,Gw) &= (az_1+bz_2)(cw_1+dw_2)-(cz_1+dz_2)(aw_1+bw_2) \\ &= \begin{vmatrix} az_1+bz_2 & aw_1+bw_2 \\ cz_1+dz_2 & cw_1+dw_2 \end{vmatrix} \\ &= \left|\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 & w_1 \\ z_2 & w_2 \end{bmatrix}\right| \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} z_1 & w_1 \\ z_2 & w_2 \end{vmatrix} \\ &= \det G\,(z_1w_2-z_2w_1) \\ &= \det G f(z,w) \end{aligned}$$

olur. Burada $G\in SL(2,\mathbb{C})$ olduğundan $\det G=1$ olup

$$f(Gz,Gw)=f(z,w)$$

elde edilir, Yani $G\in Sp(2,\mathbb{C})$ olur. $G\in Sp(2,\mathbb{C})$ olsun. Bu durumda,

$$f(z,w)=f(Gz,Gw)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} z_1 & w_1 \\ z_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

yani

$$z_1w_2-z_2w_1=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}(z_1w_2-z_2w_1)$$

olup $\det G=1$ elde edilir. $G\in SL(2,\mathbb{C})$ dir. Yani $Sp(2,\mathbb{C})$=$SL(2,\mathbb{C})$ eşitliği doğrudur.

■

3.2 Dual Spin Uzayı

Tanım 3.2 *$\mathcal{B}$, spin uzayı olsun. $\mathcal{B}^* := \{h : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C} : h,\ lineer\}$ olarak tanımlı $\mathcal{B}^*$ kümesine, $\mathcal{B}$ nın "**dual spin uzayı**" adı verilir. $\mathcal{B}^*$ ın elemanlarına ise "**spin kovektörleri**" denir.*

$\{s^1, s^0\}$, $\mathcal{B}$ için bir spin çatısı iken

$$s_A(s^B) = \delta_A^B \quad , A, B = 1, 0 \tag{3.3}$$

*ile tanımlı $\{s_1, s_0\}$ kümesi, $\{s^1, s^0\}$ spin çatısına karşılık gelen **dual spin çatısı**'dır ve $\mathcal{B}^*$ ın bir tabanıdır.*

Tanım 3.3 *$\mathcal{B}$, spin uzayı ve $\mathcal{B}^*$, dual spin uzayı olsun. $\phi \in \mathcal{B}$ spin vektörü verilsin.*

$$\phi^*(\psi) = f(\phi, \psi) \quad ,\forall \psi \in \beta$$

ile tanımlı $\phi^* \in \mathcal{B}^*$ spin kovektörüne, $\phi \in \mathcal{B}$ spin vektörünün duali denir.

Yardımcı Teorem 3.1 *Her $h \in \mathcal{B}^*$ spin kovektörüne karşılık, $h = \phi^*$ olacak şekilde en az bir $\phi \in \mathcal{B}$ spin vektörü vardır.*

İspat. *Keyfi $h \in \mathcal{B}^*$ spin kovektörü velsin. Bu durumda $h(s^0), h(s^1) \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\phi \in \mathcal{B}$ spin vektörü, ϕ=$h(s^0)s^1 - h(s^1)s^0$ olarak tanımlansın. Buradan $\phi^* \in \mathcal{B}^*$ spin kovektörü düşünülürse; $\forall \psi \in \mathcal{B}$ için,*

$$\begin{aligned}
\phi^*(\psi) &= f(\phi, \psi) \\
&= f(h(s^0)s^1 - h(s^1)s^0, \psi) \\
&= h(s^0)f(s^1, \psi) - h(s^1)f(s^0, \psi) \\
&= -h(s^0)f(\psi, s^1) + h(s^1)f(\psi, s^0)
\end{aligned}$$

olup, $f(\psi, s^1) = -\psi_0$ ve $f(\psi, s^0) = \psi_1$ olduğundan;

$$\phi^*(\psi) = h(s^1)\psi_1 + h(s^0)\psi_0$$

bulunur. Öte yandan, $\forall \psi \in \mathcal{B}$ için

$$h(\psi) = h(\psi_1 s^1 + \psi_0 s^0) = \psi_1 h(s^1) + \psi_0 h(s^0)$$

olduğundan $h = \phi^*$ elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 3.2 *$\{s^1, s^0\}$ spin çatısı, $\{s_1, s_0\}$ bu spin çatısına karşılık dual spin çatısı olsun. $\phi \in \mathcal{B}$ spin vektörü için; $\phi = \phi_A s^A$ ve duali $\phi^* = \phi^A s_A$ olmak üzere;*

$$\phi^1 = -\phi_0 \text{ ve } \phi^0 = \phi_1$$

dir.

İspat. $s_A(s^B) = \delta_A^B \quad , A, B = 1, 0$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \phi^*(s^1) &= (\phi^A s_A)(s^1) \\ &= \phi^A (s_A(s^1)) \\ &= \phi^A \delta_A^1 \\ &= \phi^1 \end{aligned}$$

olur. Benzer olarak,

$$\begin{aligned} \phi^*(s^0) &= (\phi^A s_A)(s^0) \\ &= \phi^A (s_A(s^0)) \\ &= \phi^A \delta_A^0 \\ &= \phi^0 \end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan; $\phi^*(s^1) = f(\phi, s^1) = -\phi_0$ ve $\phi^*(s^0) = f(\phi, s^0) = \phi_1$ olduğundan;

$$\phi^1 = -\phi_0 \text{ ve } \phi^0 = \phi_1 \tag{3.4}$$

bulunur. ■

Yardımcı Teorem 3.3 *$\{s^1, s^0\}$ ve $\{\hat{s}^1, \hat{s}^0\}$ iki spin çatısı, $\{s_1, s_0\}$ ve $\{\hat{s}_1, \hat{s}_0\}$ bunların dual spin çatıları olsun. Bu durumda; her $\phi \in ß$ için $\phi^* = \phi^A s_A = \hat{\phi}^A \hat{s}_A$ ve $s^B = G_A{}^B \hat{s}^A$, $s_B = \mathcal{G}^A{}_B \hat{s}_A \quad , B = 1, 0$ olmak üzere;*

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}^1 \\ \hat{\phi}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}^1{}_1 & \mathcal{G}^1{}_0 \\ \mathcal{G}^0{}_1 & \mathcal{G}^0{}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^0 \end{bmatrix} ,$$

yani,

$$\hat{\phi}^A = \mathcal{G}^A{}_B \phi^B \qquad , A = 1, 0 \tag{3.5}$$

dir. Dahası,

$$[\mathcal{G}^A{}_B] = \left([G_A{}^B]^{-1} \right)^T$$

dır.

İspat. $\phi^* = \phi^A s_A = \hat{\phi}^A \hat{s}_A$ ve $s_B = \mathcal{G}^A{}_B \hat{s}_A \quad , B = 1, 0$ eşitlikleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^1 \hat{s}_1 + \hat{\phi}^0 \hat{s}_0 &= \phi^1 s_1 + \phi^0 s_0 \\ &= \phi^1 (\mathcal{G}^1{}_1 \hat{s}_1 + \mathcal{G}^0{}_1 \hat{s}_0) + \phi^0 (\mathcal{G}^1{}_0 \hat{s}_1 + \mathcal{G}^0{}_0 \hat{s}_0) \\ &= (\phi^1 \mathcal{G}^1{}_1 + \phi^0 \mathcal{G}^1{}_0) \hat{s}_1 + (\phi^1 \mathcal{G}^0{}_1 + \phi^0 \mathcal{G}^0{}_0) \hat{s}_0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\hat{\phi}^1 \hat{s}_1 + \hat{\phi}^0 \hat{s}_0 = (\phi^1 \mathcal{G}^1{}_1 + \phi^0 \mathcal{G}^1{}_0) \hat{s}_1 + (\phi^1 \mathcal{G}^0{}_1 + \phi^0 \mathcal{G}^0{}_0) \hat{s}_0$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^1 &= (\phi^1 \mathcal{G}^1{}_1 + \phi^0 \mathcal{G}^1{}_0) = \mathcal{G}^1{}_B \phi^B \\ \hat{\phi}^0 &= (\phi^1 \mathcal{G}^0{}_1 + \phi^0 \mathcal{G}^0{}_0) = \mathcal{G}^0{}_B \phi^B \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Son iki eşitlik,

$$\hat{\phi}^A = \mathcal{G}^A{}_B \phi^B \qquad , A = 1, 0$$

olarak ifade edilebilir. Yine eşitlik matris gösterimiyle,

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}^1 \\ \hat{\phi}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}^1{}_1 & \mathcal{G}^1{}_0 \\ \mathcal{G}^0{}_1 & \mathcal{G}^0{}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^0 \end{bmatrix}$$

olarak yazılır.

$$\begin{aligned}\hat{\phi}^1 &= (\phi^1 \mathcal{G}^1{}_1 + \phi^0 \mathcal{G}^1{}_0)\\ \hat{\phi}^0 &= (\phi^1 \mathcal{G}^0{}_1 + \phi^0 \mathcal{G}^0{}_0)\end{aligned}$$

bu iki eşitlikte,

$$\phi^1 = -\phi_0 \ , \ \phi^0 = \phi_1$$

eşitikleri ve şapkalı eşitleri yerine koyulursa;

$$\begin{aligned}-\hat{\phi}_0 &= -\phi_0 \mathcal{G}^1{}_1 + \phi_1 \mathcal{G}^1{}_0\\ \hat{\phi}_1 &= -\phi_0 \mathcal{G}^0{}_1 + \phi_1 \mathcal{G}^0{}_0\end{aligned}$$

olup buradan,

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1 &= \phi_1 \mathcal{G}^0{}_0 - \phi_0 \mathcal{G}^0{}_1\\ \hat{\phi}_0 &= -\phi_1 \mathcal{G}^1{}_0 + \phi_0 \mathcal{G}^1{}_1\end{aligned}$$

elde edilir. Son iki eşitlik matris gösterimiyle,

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}^0{}_0 & -\mathcal{G}^0{}_1 \\ -\mathcal{G}^1{}_0 & \mathcal{G}^1{}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{bmatrix}$$

halini alır. Buradan,

$$\hat{\phi}_A = \left([\mathcal{G}^A{}_B]^{-1} \right)^T \phi_B \qquad , A = 1, 0$$

olur ki (3.2) eşitliği göz önüne alınırsa;

$$\left([\mathcal{G}^A{}_B]^{-1} \right)^T = [G_A{}^B]$$

olur, bu da,

$$[\mathcal{G}^A{}_B] = \left([G_A{}^B]^{-1} \right)^T$$

eşitliğini verir. ■

Yardımcı Teorem 3.4 *$\{s^1, s^0\}$ ve $\{\hat{s}^1, \hat{s}^0\}$ iki spin çatısı, $\{s_1, s_0\}$ ve $\{\hat{s}_1, \hat{s}_0\}$ bunların dual spin çatıları olsun. $s^B = G_A{}^B \hat{s}^A \quad , B = 1, 0$ olmak üzere;*

a)

$$\mathcal{G}^A{}_C G_B{}^C = G_C{}^A \mathcal{G}^C{}_B = \delta^A_B$$

b)

$$\hat{s}^A = \mathcal{G}^A{}_B s^B \quad , A = 1, 0 \tag{3.6}$$

c)

$$s_B = \mathcal{G}^A{}_B \hat{s}_A \quad , B = 1, 0 \tag{3.7}$$

d)

$$\hat{s}_A = G_A{}^B s_B \quad , A = 1, 0 \tag{3.8}$$

dır.

İspat. a) $\mathcal{G}^A{}_C G_B{}^C = \mathcal{G}^A{}_1 G_B{}^1 + \mathcal{G}^A{}_0 G_B{}^0$ olup, $\left[\mathcal{G}^A{}_B\right] = \left(\left[G_A{}^B\right]^{-1}\right)^T$ ve $G \in SL(2, \mathbb{C})$ olduğu göz önünde tutulursa;

$A = 1$, $B = 0$ olsun. Bu durumda,

$\mathcal{G}^A{}_1 = \mathcal{G}^1{}_1 = G_0{}^0$ ve $\mathcal{G}^A{}_0 = \mathcal{G}^1{}_0 = -G_0{}^1$ olup,

$\mathcal{G}^A{}_C G_B{}^C = \mathcal{G}^A{}_1 G_B{}^1 + \mathcal{G}^A{}_0 G_B{}^0 = G_0{}^0 G_0{}^1 - G_0{}^1 G_0{}^0 = 0 \Longrightarrow \mathcal{G}^A{}_C G_B{}^C = 0$ dır.

$A = 0$, $B = 1$ olsun. Bu durumda,

$\mathcal{G}^A{}_1 = \mathcal{G}^0{}_1 = -G_1{}^0$ ve $\mathcal{G}^A{}_0 = \mathcal{G}^0{}_0 = G_1{}^1$ olup,

$\mathcal{G}^A{}_C G_B{}^C = \mathcal{G}^A{}_1 G_B{}^1 + \mathcal{G}^A{}_0 G_B{}^0 = -G_1{}^0 G_1{}^1 + G_1{}^1 G_1{}^0 = 0 \Longrightarrow \mathcal{G}^A{}_C G_B{}^C = 0$ dır.

$A = 1$, $B = 1$ olsun. Bu durumda,

$\mathcal{G}^A{}_C G_B{}^C = \mathcal{G}^A{}_1 G_B{}^1 + \mathcal{G}^A{}_0 G_B{}^0 = G_0{}^0 G_1{}^1 - G_0{}^1 G_1{}^0 = \det G = 1 \Longrightarrow \mathcal{G}^A{}_C G_B{}^C = 1$ dir.

$A = 0$, $B = 0$ olsun. Bu durumda,

$\mathcal{G}^A{}_C G_B{}^C = \mathcal{G}^A{}_1 G_B{}^1 + \mathcal{G}^A{}_0 G_B{}^0 = -G_1{}^0 G_0{}^1 + G_1{}^1 G_0{}^0 = \det G = 1 \Longrightarrow \mathcal{G}^A{}_C G_B{}^C = 1$ dir. Sonuç olarak

$$\mathcal{G}^A{}_C G_B{}^C = G_C{}^A \mathcal{G}^C{}_B = \delta^A_B$$

bulunur.

b) $s^B = G_A{}^B \hat{s}^A$ eşitliğinin iki tarafı $\mathcal{G}^A{}_B$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^A{}_B s^B &= \mathcal{G}^A{}_B G_A{}^B \hat{s}^A \\ \mathcal{G}^A{}_B s^B &= \delta^A_A \hat{s}^A \\ \hat{s}^A &= \mathcal{G}^A{}_B s^B \end{aligned}$$

elde edilir.

c) s^B spin vektörü $s^B = \begin{bmatrix} (s^1)_1 \\ (s^1)_0 \end{bmatrix}$ olmak üzere **Yardımcı Teorem 3.2** den $s^B = \begin{bmatrix} -(s_B)_0 \\ (s_B)_1 \end{bmatrix}$ olup, aynı şekilde $\hat{s}^A = \begin{bmatrix} -(\hat{s}^A)_0 \\ (\hat{s}^A)_1 \end{bmatrix}$ dır. Ayrıca $\left([\mathcal{G}^A{}_B]^{-1}\right)^T = [G_A{}^B]$ eşitiği biliniyor.

$s^B = G_A{}^B \hat{s}^A$ eşitliğinde yukardakiler yerine koyulursa, eşitlik;

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -(s_B)_0 \\ (s_B)_1 \end{bmatrix} &= \left([\mathcal{G}^A{}_B]^{-1}\right)^T \begin{bmatrix} -(\hat{s}^A)_0 \\ (\hat{s}^A)_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -(s_B)_0 \\ (s_B)_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathcal{G}^0{}_0 & -\mathcal{G}^0{}_1 \\ -\mathcal{G}^1{}_0 & \mathcal{G}^1{}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(\hat{s}^A)_0 \\ (\hat{s}^A)_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

halini alır. Bu matris eşitliği,

$$\begin{aligned} (s_B)_1 &= \mathcal{G}^1{}_1(\hat{s}^A)_1 + \mathcal{G}^1{}_0(\hat{s}^A)_0 \\ (s_B)_0 &= \mathcal{G}^0{}_1(\hat{s}^A)_1 + \mathcal{G}^0{}_0(\hat{s}^A)_0 \end{aligned}$$

eşitliklerine denktir ve bu eşitlikler matris gösterimiyle,

$$\begin{bmatrix} (s_B)_1 \\ (s_B)_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}^1{}_1 & \mathcal{G}^1{}_0 \\ \mathcal{G}^0{}_1 & \mathcal{G}^0{}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\hat{s}^A)_1 \\ (\hat{s}^A)_0 \end{bmatrix}$$

halini alır ki buradan,

$$s_B = \mathcal{G}^A{}_B \hat{s}_A \quad , B = 1, 0$$

eşitiği elde edilir.

d) Son eşitliğin iki tarafı ${G_A}^B$ ile çarpılarak,

$$\begin{aligned} {G_A}^B s_B &= {G_A}^B {\mathcal{G}^A}_B \hat{s}_A \\ {G_A}^B s_B &= \delta_B^B \hat{s}_A \\ \hat{s}_A &= {G_A}^B s_B \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 3.5 *$(\mathcal{B}^*)^* := \{k : \mathcal{B}^* \longrightarrow \mathbb{C} : k, lineer\}$ ile tanımlı $(\mathcal{B}^*)^*$ kümesi için $\mathcal{B} \cong (\mathcal{B}^*)^*$ dir.*

İspat. $\phi \in \mathcal{B}$ verilsin. Her h için $\phi^{**}(h) = h(\phi)$ olacak şekilde

$\phi^{**} : \mathcal{B}^* \longrightarrow \mathbb{C}$, dönüşümü tanımlansın.

ϕ^{**} , lineer mi?

$h_1, h_2 \in \mathcal{B}^*$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $\mathcal{B}^*$ vektör uzayı olduğundan $a_1h_1 + a_2h_2 \in \mathcal{B}$ olup;

$$\begin{aligned} \phi^{**}(a_1h_1 + a_2h_2) &= (a_1h_1 + a_2h_2)(\phi) \\ &= a_1h_1(\phi) + a_2h_2(\phi) \\ &= a_1\phi^{**}(h_1) + a_2\phi^{**}(h_2) \end{aligned}$$

elde edilir. ϕ^{**} dönüşümü lineerdir. Yani $\phi^{**} \in (\mathcal{B}^*)^*$ dir.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{B} &\longrightarrow (\mathcal{B}^*)^* \\ \phi &\longmapsto \phi^{**} \end{aligned}$$

ile tanımlı φ döünüşümü bir izomorfizmdir.

$\phi, \psi \in \mathcal{B}$ için

$$\varphi(\phi + \psi) = (\phi + \psi)^{**}$$

olup, her $h \in \mathcal{B}^*$ için,

$$(\phi + \psi)^{**}(h) = h(\phi + \psi) = h(\phi) + h(\psi) = \phi^{**}(h) + \psi^{**}(h)$$

olup buradan

$$(\phi+\psi)^{**} = \phi^{**} + \psi^{**}$$

olur. Böylece

$$\varphi(\phi+\psi) = (\phi+\psi)^{**} = \phi^{**} + \psi^{**} = \varphi(\phi) + \varphi(\psi)$$

elde edilir, yani φ, lineerdir. φ bire-bir mi?

$\phi, \psi \in \mathcal{B}$ verilsin. $\varphi(\phi) = \varphi(\psi)$ olsun.

Her $h \in \mathcal{B}^*$ için

$$\varphi(\phi) = \varphi(\psi) \Longrightarrow \varphi(\phi) - \varphi(\psi) = 0 \Longrightarrow \varphi(\phi - \psi) = 0 \Longrightarrow (\phi - \psi)^{**} = 0$$

$$\Longrightarrow (\phi - \psi)^{**}(h) = 0(h) \Longrightarrow h(\phi - \psi) = 0 \Longrightarrow \phi - \psi = 0 \Longrightarrow \phi = \psi$$

olup, φ bire-bir dir. φ, bire bir bir lineer dönüşüm olduğundan bir izomorfizmdir. ∎

Not : $\mathcal{B} \cong (\mathcal{B}^*)^*$ olduğundan, nasıl ki $\mathcal{B}^*$ ın elemanları $\mathcal{B}$ üzerinde tanımlı lineer fonksiyoneller ise $\mathcal{B}$ nın elemanları da $\mathcal{B}^*$ ın üzerinde tanımlı birer lineer fonksiyoneller olarak düşünülebilirler.

Şimdi $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{B}^*$ üzerinde tanımlı bazı multilineer fonksiyonel örnekleri incelenip ve bu fonksiyonellerin farklı iki spin çatısına göre bileşenleri arasındaki dönüşüm kuralları belirlenecektir.

Örnek 3.2 $\xi : \mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ *, bir bilineer fonksiyonel olsun.* $\{s^1, s^0\}$ *bir spin çatısı ve* $\{s_1, s_0\}$ *dual spin çatısı olmak üzere. Her* $\phi^* = \phi^A s_A$ *,* $\psi^* = \psi^B s_B \in \mathcal{B}^*$ *için*

$$\begin{aligned} \xi(\phi^*, \psi^*) &= \xi(\phi^A s_A, \psi^B s_B) \\ &= \xi(s_A, s_B)\phi^A \psi^B \\ \xi(\phi^*, \psi^*) &= \xi(s_A, s_B)\phi^A \psi^B \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\xi(s_A, s_B) = \xi_{AB}$ *ile gösterilmek üzere eşitlik,*

$$\xi(\phi^*, \psi^*) = \xi_{AB}\phi^A \psi^B$$

halini alır. Burada $\xi_{AB} \in \mathbb{C}$ sayıları, ξ dönüşümünün $\{s^1, s^0\}$ spin çatısına göre bileşenleridir.

$\{\hat{s}^1, \hat{s}^0\}$ başka bir spin çatısı, ve $\{\hat{s}_1, \hat{s}_0\}$ onun duali olsun. ξ dönüşümünün $\{\hat{s}^1, \hat{s}^0\}$ spin çatısına göre bileşenleri $\hat{\xi}_{AB}$ ler olmak üzere, ξ_{AB} ve $\hat{\xi}_{AB}$ arasında,

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}_{AB} &= \xi(\hat{s}_A, \hat{s}_B) \\
&= \xi(G_A{}^C s_C, G_B{}^D s_D) \\
&= G_A{}^C G_B{}^D \xi(s_C, s_D) \\
&= G_A{}^C G_B{}^D \xi_{CD}
\end{aligned}$$

$$\hat{\xi}_{AB} = G_A{}^C G_B{}^D \xi_{CD}$$

dönüşüm kuralı elde edilir ki, indisler düzenlenirse,

$$\hat{\xi}_{A_1 A_2} = G_{A_1}^{B_1} G_{A_2}^{B_2} \xi_{B_1 B_2} \qquad , A_1, A_2 = 1, 0 \tag{3.9}$$

dönüşüm kuralı bulunur.

Örnek 3.3 *$\xi : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}$, bilineer fonksiyoneli verilisin. $\{s^1, s^0\}$ ve$\{\hat{s}^1, \hat{s}^0\}$ iki spin çatısı ve $\{s_1, s_0\}$,$\{\hat{s}_1, \hat{s}_0\}$ bunlara karşılık sırasıyla dual spin çatıları olsunlar ve $\xi(s^A, s^B) = \xi^{AB}$ ve $\xi(\hat{s}^A, \hat{s}^B) = \hat{\xi}^{AB}$ ile gösterilsinler*

$$\xi(\phi, \psi) = \xi(\phi_A s^A, \psi_B s^B) = \xi(s^A, s^B)\phi_A \psi_B = \xi^{AB} \phi_A \psi_B$$

$$\xi(\phi, \psi) = \xi^{AB} \phi_A \psi_B$$

olup, ξ dönüşümünün $\{s^1, s^0\}$ ve $\{\hat{s}^1, \hat{s}^0\}$ spin çatılarına göre bileşenleri $\hat{\xi}^{C_1 C_2}$ ve $\xi^{D_1 D_2}$ arasında,

$$\hat{\xi}^{C_1 C_2} = \mathcal{G}^{C_1}{}_{D_1} \mathcal{G}^{C_2}{}_{D_2} \xi^{D_1 D_2} \qquad , C_1, C_2 = 1, 0 \tag{3.10}$$

dönüşüm kuralı geçerlidir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}^{C_1C_2} &= \xi(\hat{s}^{C_1}, \hat{s}^{C_2}) \\
&= \xi(\mathcal{G}^{C_1}_{\ D_1} s^{D_1}, \mathcal{G}^{C_2}_{\ D_2} s^{D_2}) \\
&= \mathcal{G}^{C_1}_{\ D_1} \mathcal{G}^{C_2}_{\ D_2} \xi(s^{D_1}, s^{D_2}) \\
&= \mathcal{G}^{C_1}_{\ D_1} \mathcal{G}^{C_2}_{\ D_2} \xi^{D_1D_2}
\end{aligned}$$

dir.

Örnek 3.4 *$\xi : \mathcal{B}^* \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}$, bilineer fonksiyoneli verilisin. $\{s^1, s^0\}$ ve$\{\hat{s}^1, \hat{s}^0\}$ iki spin çatısı ve $\{s_1, s_0\}$,$\{\hat{s}_1, \hat{s}_0\}$ bunlara karşılık sırasıyla dual spin çatıları olsunlar ve $\xi(s_A, s^C) = \xi_A^{\ C}$ ve $\xi(\hat{s}_A, \hat{s}^C) = \hat{\xi}_A^{\ C}$ ile gösterilsinler. keyfi $\phi = \phi_C s^C = \hat{\phi}_C \hat{s}^C \in ß$, $\psi^* = \psi^A s_A = \hat{\psi}^A \hat{s}_A \in \mathcal{B}^*$ elemanları için,*

$$\xi(\psi^*, \phi) = \xi(\psi^A s_A, \phi_C s^C) = \xi(s_A, s^C)\psi^A \phi_C = \xi_A^{\ C} \psi^A \phi_C$$

$$\xi(\psi^*, \phi) = \xi_A^{\ C} \psi^A \phi_C$$

olup, $\xi_A^{\ C}$ ve $\hat{\xi}_A^{\ C}$ arasında gerekli indisler düzenlendiğinde

$$\hat{\xi}_{A_1}^{\ C_1} = G_{A_1}^{\ B_1} \mathcal{G}^{C_1}_{\ D_1} \xi_{B_1}^{\ D_1} \qquad , A_1, C_1 = 1, 0 \tag{3.11}$$

dönüşüm kuralı geçerlidir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}_{A_1}^{\ C_1} &= \xi(\hat{s}_{A_1}, \hat{s}^{C_1}) \\
&= \xi(G_{A_1}^{\ B_1} s_{B_1}, \mathcal{G}^{C_1}_{\ D_1} s^{D_1}) \\
&= G_{A_1}^{\ B_1} \mathcal{G}^{C_1}_{\ D_1} \xi(s_{B_1}, s^{D_1}) \\
&= G_{A_1}^{\ B_1} \mathcal{G}^{C_1}_{\ D_1} \xi_{B_1}^{\ D_1}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.3 Eşlenik Spin Uzayı ve Eşlenik Dual Uzayı

Tanım 3.4 *$\mathcal{B}$, bir spin uzayı olsun.*

$$\bar{\mathcal{B}}:=\mathcal{B}\times\{1\}=\{\bar{\phi}=(\phi,1):\phi\in\mathcal{B}\}$$

*olarak tanımlı $\bar{\mathcal{B}}$ kümesine **eşlenik spin uzayı** denir, $\bar{\mathcal{B}}$ nın elemanlarına ise **eşlenik spin vektörleri** adı verilir.*

Not : Eşlenik uzayla ilgili işlemler için indisler yazılırken, A ve B harfleri yerine X ve Y harflerinin noktalı hali kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 3.6 [8] *$\mathcal{B}$ bir spin uzayı, $\bar{\mathcal{B}}$ eşlenik spin uzayı olsun. $\bar{\phi},\bar{\psi},\bar{\zeta}\in\bar{\mathcal{B}}$ ve $c\in\mathbb{C}$ olmak üzere, $\bar{\mathcal{B}}$ kümesi, üzerinde*

$$\begin{aligned}\bar{\phi}+\bar{\psi} &= \overline{\phi+\psi}\\ c\bar{\phi} &= \overline{\bar{c}\phi}\end{aligned}$$

olarak tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle birlikte bir vektör uzayıdır.

Teorem 3.2 *$\varphi:\mathcal{B}\longrightarrow\bar{\mathcal{B}}$, $\phi\longmapsto\bar{\phi}$ olarak tanımlı φ dönüşümü, $1-1$ ve örten bir dönüşümdür. Bu dönüşüme eşlenik (anti) izomorfizm denir.*

İspat. $\phi,\psi\in\mathcal{B}$ verilsin ve $\varphi(\phi)=\varphi(\psi)$ olsun.

$\varphi(\phi)=\varphi(\psi)\Longrightarrow\bar{\phi}=\bar{\psi}\Longrightarrow\bar{\phi}-\bar{\psi}=\bar{0}\Longrightarrow\overline{\phi+(-\psi)}=\bar{0}\Longrightarrow\overline{\phi-\psi}=\bar{0}\Longrightarrow\phi=\psi\Longrightarrow\varphi$, dönüşümü $1-1$ dir.

Keyfi $z\in\bar{\mathcal{B}}$ elemanı verilsin. $\bar{\mathcal{B}}$ nin tanımından bir $\phi\in$ß için $z=(\phi,1)=\bar{\phi}$ dir, φ, dönüşümü örtendir. φ bir izomorfizmdir. Burada φ nin lineer olduğu aşikardır. ■

Sonuç 3.3 $\{s^1,s^0\}$ *$\bar{\mathcal{B}}$ nın bir spin çatısı olsun. bu durumda; $\left\{\varphi(s^1)=\bar{s}^{\dot{1}},\varphi(s^0)=\bar{s}^{\dot{0}}\right\}$ kümesi, $\bar{\mathcal{B}}$ için bir tabandır. (eşlenik spin çatısı)*

Yardımcı Teorem 3.7 *$\{s^1, s^0\}$ ve $\{\hat{s}^1, \hat{s}^0\}$ iki spin çatısı, dolayısıyla $\{\bar{s}^{\dot{1}}, \bar{s}^{\dot{0}}\}$ ve $\{\bar{\hat{s}}^{\dot{1}}, \bar{\hat{s}}^{\dot{0}}\}$, $\bar{\mathcal{B}}$ için iki taban olsun. Bu durumda;*

a)

$$\bar{\hat{s}}^{\dot{X}} = \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}\bar{s}^{\dot{Y}} \qquad , \dot{X} = \dot{1}, \dot{0} \tag{3.12}$$

ve

$$\bar{s}^{\dot{Y}} = G_{\dot{X}}{}^{\dot{Y}}\bar{\hat{s}}^{\dot{X}} \qquad , \dot{Y} = \dot{1}, \dot{0} \tag{3.13}$$

dır.

b) *$\bar{\phi} = \overline{\phi}_{\dot{Y}}\bar{s}^{\dot{Y}} = \overline{\hat{\phi}}_{\dot{X}}\bar{\hat{s}}^{\dot{X}}$ olmak üzere,*

$$\overline{\hat{\phi}}_{\dot{X}} = \bar{G}_{\dot{X}}{}^{\dot{Y}}\overline{\phi}_{\dot{Y}} \qquad , \dot{X} = \dot{1}, \dot{0} \tag{3.14}$$

ve

$$\overline{\phi}_{\dot{Y}} = \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}\overline{\hat{\phi}}_{\dot{X}} \qquad , \dot{Y} = \dot{1}, \dot{0} \tag{3.15}$$

dır.

İspat. a) (3.6) eşitliğinin eşleniği (3.12) eşitliğini, (3.1) eşitliğinin eşleniği (3.13) eştliğini verir.

b) (3.2) eşitliğinin eşleniği (3.14) eşitliğini verir. Ayrıca, $\overline{\phi}_{\dot{Y}}\bar{s}^{\dot{Y}} = \overline{\hat{\phi}}_{\dot{X}}\bar{\hat{s}}^{\dot{X}}$ eşitliğinde, $\bar{\hat{s}}^{\dot{X}}$ yerine (3.12) eşitliğindeki eşiti koyulursa eşitlik,

$$\overline{\phi}_{\dot{Y}}\bar{s}^{\dot{Y}} = \overline{\hat{\phi}}_{\dot{X}}\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}\bar{s}^{\dot{Y}}$$

halini alır ki buradan

$$\overline{\phi}_{\dot{Y}} = \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}\overline{\hat{\phi}}_{\dot{X}}$$

elde edilir. ■

Tanım 3.5 *$\bar{\mathcal{B}}^* := \left\{k : \bar{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathbb{C} : k, lineer\right\}$ kümesine **eşlenik dual uzayı,** bu kümenin elemanlarına da **eşlenik spin kovektörleri** denir. Ayrıca $\left\{\bar{s}^{\dot{X}}\right\}$ ve $\left\{\bar{\hat{s}}^{\dot{X}}\right\}$, $\overline{\beta}$ ın iki tabanı iken, bu tabanların dualleri $\left\{\bar{s}_{\dot{X}}\right\}$ ve $\left\{\bar{\hat{s}}_{\dot{X}}\right\}$ ile gösterilip, $\bar{\mathcal{B}}^*$ ın birer tabanıdırlar.*

Yardımcı Teorem 3.8 [8] $\{\overline{s}_{\dot{X}}\}$ *ve* $\{\overline{\hat{s}}_{\dot{X}}\}$, $\bar{\mathcal{B}}^{*}$ *ın iki tabanı olsun.* $\bar{\mathcal{B}}^{*}$ *ın tabanları arasındaki ilişkiye benzer olarak,*

$$\overline{\hat{s}}_{\dot{X}} = \bar{G}_{\dot{X}}^{\ \dot{Y}} \ \overline{s}_{\dot{Y}} \qquad , \dot{X} = \dot{1}, \dot{0} \tag{3.16}$$

$$\overline{s}_{\dot{Y}} = \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}_{\ \dot{Y}} \overline{\hat{s}}_{\dot{X}} \qquad , \dot{Y} = \dot{1}, \dot{0} \tag{3.17}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Tanım 3.6 *Her* $\phi^{*} = \phi^{B} s_{B} = \hat{\phi}^{A} \hat{s}_{A} \in \mathcal{B}^{*}$ *için* $\bar{\phi}^{*} \in \bar{\mathcal{B}}^{*}$ *elemanı,*

$$\bar{\phi}^{*} = \bar{\phi}^{\dot{Y}} \overline{s}_{\dot{Y}} = \overline{\hat{\phi}}^{\dot{X}} \overline{\hat{s}}_{\dot{X}}$$

ile tanımlanır.

Yardımcı Teorem 3.9

$$\overline{\hat{\phi}}^{\dot{X}} = \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}_{\ \dot{Y}} \bar{\phi}^{\dot{Y}} \qquad , \dot{X} = \dot{1}, \dot{0} \tag{3.18}$$

ve

$$\bar{\phi}^{\dot{Y}} = \bar{G}_{\dot{X}}^{\ \dot{Y}} \overline{\hat{\phi}}^{\dot{X}} \qquad , \dot{Y} = \dot{1}, \dot{0} \tag{3.19}$$

dır.

İspat. $\bar{\phi}^{\dot{Y}} s_{\dot{Y}} = \overline{\hat{\phi}}^{\dot{X}} \hat{s}_{\dot{X}}$ eşitliğinde, $s_{\dot{Y}}$ yerine (3.17) eşitliğindeki eşiti koyulursa eşitlik,

$$\bar{\phi}^{\dot{Y}} \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}_{\ \dot{Y}} \overline{\hat{s}}_{\dot{X}} = \overline{\hat{\phi}}^{\dot{X}} \hat{s}_{\dot{X}}$$

halini alır ki buradan,

$$\overline{\hat{\phi}}^{\dot{X}} = \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}_{\ \dot{Y}} \bar{\phi}^{\dot{Y}}$$

elde edilir. İkinci eşitlik benzer şekilde gösterilebilir. ■

Örnek 3.5 $\xi : \mathcal{B} \times \bar{\mathcal{B}} \times \mathcal{B}^{*} \times \bar{\mathcal{B}}^{*} \longrightarrow \mathbb{C}$, *bilineer fonksiyoneli verilisin.* $\{s^1, s^0\}$ *ve*$\{\hat{s}^1, \hat{s}^0\}$ *iki spin çatısı olsunlar ve* ξ *nın bu spin çatılarına göre bileşenleri sırasıyla* $\xi(s^A, \overline{s}^{\dot{X}}, s_B, \overline{s}_{\dot{Y}}) =$

$\xi^{A\dot{X}}{}_{B\dot{Y}}$ *ve* $\xi(\hat{s}^A, \bar{\hat{s}}^{\dot{X}}, \hat{s}_B, \bar{\hat{s}}_{\dot{Y}}) = \hat{\xi}^{A\dot{X}}{}_{B\dot{Y}}$ *ile gösterilsinler. Keyfi* $\phi = \phi_A s^A \in \mathcal{B}$, $\bar{\psi} = \bar{\psi}_{\dot{X}}$ $\bar{s}^{\dot{X}} \in \bar{\beta}$, $\zeta = \zeta^B s_B \in \mathcal{B}^*$ *ve* $\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}^{\dot{Y}} \bar{s}_{\dot{Y}} \in \bar{\mathcal{B}}^*$ *elemanları için,*

$$\begin{aligned}
\xi(\phi, \bar{\psi}, \zeta, \bar{\upsilon}) &= \xi(\phi_A s^A, \bar{\psi}_{\dot{X}} \bar{s}^{\dot{X}}, \zeta^B s_B, \bar{\upsilon}^{\dot{Y}} \bar{s}_{\dot{Y}}) \\
&= \xi(s^A, \bar{s}^{\dot{X}}, s_B, \bar{s}_{\dot{Y}}) \phi_A \bar{\psi}_{\dot{X}} \zeta^B \bar{\upsilon}^{\dot{Y}} \\
&= \xi^{A\dot{X}}{}_{B\dot{Y}} \phi_A \bar{\psi}_{\dot{X}} \zeta^B \bar{\upsilon}^{\dot{Y}}
\end{aligned}$$

$$\xi(\phi, \bar{\psi}, \zeta, \bar{\upsilon}) = \xi^{A\dot{X}}{}_{B\dot{Y}} \phi_A \bar{\psi}_{\dot{X}} \zeta^B \bar{\upsilon}^{\dot{Y}}$$

olup, $\xi^{A\dot{X}}{}_{B\dot{Y}}$ *ve* $\hat{\xi}^{A\dot{X}}{}_{B\dot{Y}}$ *arasında gerekli indisler düzenlendiğinde*

$$\hat{\xi}^{A\dot{X}}{}_{B\dot{Y}} = \mathcal{G}^A{}_{A_1} \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{X}_1} G_B{}^{B_1} \bar{G}_{\dot{Y}}{}^{\dot{Y}_1} \xi^{A_1\dot{X}_1}{}_{B_1\dot{Y}_1}, \qquad A_1, B_1 = 1, 0 \ , \ \dot{X}_1, \dot{Y}_1 = \dot{1}, \dot{0}$$

dönüşüm kuralı geçerlidir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}^{A\dot{X}}{}_{B\dot{Y}} &= \xi(\hat{s}^A, \bar{\hat{s}}^{\dot{X}}, \hat{s}_B, \bar{\hat{s}}_{\dot{Y}}) \\
&= \xi\left(\mathcal{G}^A{}_{A_1} s^{A_1}, \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{X}_1} \bar{s}^{\dot{X}_1}, G_B{}^{B_1} s_{B_1}, \bar{G}_{\dot{Y}}{}^{\dot{Y}_1} \bar{s}_{\dot{Y}_1}\right) \\
&= \mathcal{G}^A{}_{A_1} \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{X}_1} G_B{}^{B_1} \bar{G}_{\dot{Y}}{}^{\dot{Y}_1} \xi\left(s^{A_1}, \bar{s}^{\dot{X}_1}, s_{B_1}, \bar{s}_{\dot{Y}_1}\right) \\
&= \mathcal{G}^A{}_{A_1} \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{X}_1} G_B{}^{B_1} \bar{G}_{\dot{Y}}{}^{\dot{Y}_1} \xi^{A_1\dot{X}_1}{}_{B_1\dot{Y}_1}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 3.7 *$\mathcal{B}$, bir spin uzayı olsun. $\mathcal{B}$,$\bar{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}^*$ ve $\bar{\mathcal{B}}^*$ kümeleri üzerinde,*

$$\xi : \underbrace{\mathcal{B} \times ... \times \mathcal{B}}_{r \ tane} \times \underbrace{\bar{\mathcal{B}} \times .... \times \bar{\mathcal{B}}}_{s \ tane} \times \underbrace{\mathcal{B}^* \times ... \times \mathcal{B}^*}_{m \ tane} \times \underbrace{\bar{\mathcal{B}}^* \times ... \times \bar{\mathcal{B}}^*}_{n \ tane} \longrightarrow \mathbb{C}$$

olarak verilen ξ multilineer fonksiyoneline, $\begin{pmatrix} r & s \\ m & n \end{pmatrix}$ ***valansında bir spinor*** adı verilir.

Teorem 3.4 [8] $\{s^A\} = \{s^1, s^0\}$, *$\mathcal{B}$ için bir spin çatısı ve* $\{\bar{s}^{\dot{1}}, \bar{s}^{\dot{0}}\}$,$\{s_1, s_0\}$, $\{\bar{s}_{\dot{1}}, \bar{s}_{\dot{0}}\}$ *kümeleri,* $\{s^1, s^0\}$ *spin çatısına bağlı, sırasıyla $\bar{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}^*$ ve $\bar{\mathcal{B}}^*$ ın tabanları olmak üzere; ξ nin $\{s^A\}$ spin çatısına göre bileşenleri,*

$$\xi^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_s}{}_{B_1...B_m\dot{Y}_1...\dot{Y}_n} = \xi(s^{A_1}, ..., s^{A_r}, \bar{s}^{\dot{X}_1}, ...\bar{s}^{\dot{X}_s}, s_{B_1}, ..., s_{B_m}, \bar{s}_{\dot{Y}_1}, ..., \bar{s}_{\dot{Y}_n}) \tag{3.20}$$

$$
\begin{aligned}
A_1 ... A_r, B_1 ... B_m &= 1, 0 \\
\dot{X}_1 ... \dot{X}_s, \dot{Y}_1 ... \dot{Y}_n &= \dot{1}, \dot{0}
\end{aligned}
$$

olup, $\{\hat{s}^1, \hat{s}^0\}$, başka bir spin çatısı olmak üzere, ξ nin iki spin çatısına göre bileşenleri arasında,

$$
\hat{\xi}^{A_1 ... A_r \dot{X}_1 ... \dot{X}_s}{}_{B_1 ... B_m \dot{Y}_1 ... \dot{Y}_n} = \mathcal{G}^{A_1}{}_{C_1} ... \mathcal{G}^{A_r}{}_{C_r} \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_1}{}_{\dot{U}_1} ... \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_s}{}_{\dot{U}_s} G_{B_1}{}^{D_1} ... G_{B_m}{}^{D_m} \bar{G}_{\dot{Y}_1}{}^{\dot{V}_1} ... \bar{G}_{\dot{Y}_n}{}^{\dot{V}_n} \xi^{C_1 ... C_r \dot{U}_1 ... \dot{U}_s}{}_{D_1 ... D_m \dot{V}_1 ... \dot{V}_n} \tag{3.21}
$$

dönüşüm kuralı geçerlidir.

3.4 Spinör Cebri

Tanım 3.8 $\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{10} \\ \epsilon_{01} & \epsilon_{00} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *olarak tanımlı ϵ matrisi ilerdeki hesaplamalar için gerekli bir matris olup,*

$$
\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon^{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{\dot{X}\dot{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}^{\dot{X}\dot{Y}} \end{bmatrix}
$$

olarak farklı şekillerde gösterilir ve her bir gösterim gerekliliğe göre kullanılabilir. Burada gözlemlenir ki $\epsilon^{-1} = -\epsilon$ dir.

Teorem 3.5 $\{s^1, s^0\}$ *bir spin çatısı, ϕ, ψ iki spin vektörü, ϕ^*, ψ^* bu spin vektörlerine karşılık spin kovektörleri ve $\phi = \phi_A s^A$, $\psi = \psi_B s^B$, $\phi^* = \phi^A s_A$, $\psi^* = \psi^B s_B$ olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

a) $f(\phi, \psi) = \epsilon^{AB} \psi_A \phi_B = -\epsilon^{AB} \phi_A \psi_B$

b) $\phi^A = \epsilon^{AB} \phi_B = -\phi_B \epsilon^{BA}$

c) $\phi_A = \phi^B \epsilon_{AB} = -\epsilon_{AB} \phi^B$

d) $\phi^A \psi_A = f(\phi, \psi) = -\phi_A \psi^A$

e) $\epsilon^{AC} \epsilon_{BC} = \delta^A_B = \epsilon^{CA} \epsilon_{CB}$

f) $\left(\epsilon^{CB} \phi_B\right) \epsilon_{CA} = \phi_A$ ve $\epsilon^{AC} \left(\phi^B \epsilon_{BC}\right) = \phi^A$

g) $\epsilon^{AB} \epsilon_{AB} = 2 = \epsilon_{AB} \epsilon^{AB}$

h) $\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \epsilon_{AC}\epsilon_{DB} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC} = 0, \qquad A, B, D, C = 1, 0$

İspat. **a)** $\epsilon^{AB}\psi_A\phi_B = \epsilon^{10}\psi_1\phi_0 + \epsilon^{01}\psi_0\phi_1 = \phi_1\psi_0 - \phi_0\psi_1 = f(\phi,\psi) \Longrightarrow f(\phi,\psi) = \epsilon^{AB}\psi_A\phi_B$

bulunur ayrıca;

$f(\phi,\psi) = \phi_1\psi_0 - \phi_0\psi_1 = -\epsilon^{10}\phi_1\psi_0 - \epsilon^{01}\phi_0\psi_1 = -\epsilon^{AB}\phi_A\psi_B \Longrightarrow f(\phi,\psi) = -\epsilon^{AB}\phi_A\psi_B$ bulunur.

b) $\phi^1 = -\phi_0$ ve $\phi^0 = \phi_1$ olduğu biliniyor, bu eşitlikler kullanılarak;

$\epsilon^{AB}\phi_B = \epsilon^{10}\phi_0 + \epsilon^{01}\phi_1 = -\phi_0 + \phi_1 = \phi^1 + \phi^0 = \phi^A$ ve

$\phi^A = \phi^1 + \phi^0 = -\phi_0 + \phi_1 = -\phi_0\epsilon^{01} - \phi_1\epsilon^{10} = -\left(\phi_0\epsilon^{01} + \phi_1\epsilon^{10}\right) = -\phi_B\epsilon^{BA}$ elde edilir.

c) $\phi_A = \phi_1 + \phi_0 = \phi^0 - \phi^1 = \phi^0\epsilon_{01} + \phi^1\epsilon_{10} = \phi^B\epsilon_{AB}$ ve $\phi_A = \phi_1 + \phi_0 = \phi^0 - \phi^1 = -\epsilon_{10}\phi^0 - \epsilon_{01}\phi^1 = -\epsilon_{AB}\phi^B$ olduğundan eşitlik gösterilmiş olur.

d) **b**) den $\phi^A = \epsilon^{AB}\phi_B$ olduğundan burada, **a**) kullanılırsa;

$\phi^A\psi_A = \epsilon^{AB}\psi_A\phi_B = f(\phi,\psi)$ elde edilir. Ayrıca, $\phi^1 = -\phi_0$ ve $\phi^0 = \phi_1$ olduğundan,

$-\phi_A\psi^A = -\phi_1\psi^1 - \phi_0\psi^0 = -\phi_1(-\psi_0) - \phi_0(\psi_1) = \phi_1\psi_0 - \phi_0\psi_1 = f(\phi,\psi)$ bulunur.

e) $\epsilon^{AC}\epsilon_{BC} = \epsilon^{A1}\epsilon_{B1} + \epsilon^{A0}\epsilon_{B0}$ eşitliğinde sağ taraf,

$A = B = 1$ iken "1" e eşit,

$A = B = 0$ iken "1" a eşit,

$A = 1, B = 0$ iken "0" a eşit,

$A = 0, B = 1$ iken "0" a eşit

olduğundan $\epsilon^{AC}\epsilon_{BC} = \delta^A_B$ dir. Benzer olarak $\epsilon^{CA}\epsilon_{CB} = \delta^A_B$ dir.

f) **b**) ve **c**) den,

$\left(\epsilon^{CB}\phi_B\right)\epsilon_{CA} = \phi^C\epsilon_{CA} = \phi_A$ ve $\epsilon^{AC}\left(\phi^B\epsilon_{BC}\right) = \epsilon^{AC}\phi_C = \phi^A$ elde edilir.

g) $\epsilon^{AB}\epsilon_{AB} = \epsilon^{10}\epsilon_{10} + \epsilon^{01}\epsilon_{01} = (-1)(-1) + (1)(1) = 2 = \epsilon_{10}\epsilon^{10} + \epsilon_{01}\epsilon^{01} = \epsilon_{AB}\epsilon^{AB}$ dir.

h)

$$\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \epsilon_{AC}\epsilon_{DB} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC}$$

ifadesinde öncelikle $A = 1$ olsun.

Bu durumda ifade,

$$\epsilon_{1B}\epsilon_{CD} + \epsilon_{1C}\epsilon_{DB} + \epsilon_{1D}\epsilon_{BC}$$

halini alır ki, eğer $B = 1$ ise $\epsilon_{11} = 0$ olacağından ifade,

$$\epsilon_{1C}\epsilon_{D1} + \epsilon_{1D}\epsilon_{1C}$$

şeklinde olup, $C = 1$ ya da $D = 1$ iken ifade "0" a eşit olur, $C = D = 0$ iken ifade,

$$\epsilon_{10}\epsilon_{01} + \epsilon_{10}\epsilon_{10} = (-1)(1) + (-1)(-1) = 0$$

bulunur, eğer $B = 0$ ise ifade,

$$\epsilon_{10}\epsilon_{CD} + \epsilon_{1C}\epsilon_{D0} + \epsilon_{1D}\epsilon_{0C}$$

olup, $C = D$ iken her bir terim "0" a eşit olup ifade "0" a eşittir, $C = 0$ ve $D = 1$ iken ifade,

$$\epsilon_{10}\epsilon_{01} + \epsilon_{10}\epsilon_{10} + \epsilon_{11}\epsilon_{00} = (-1)(1) + (-1)(-1) + 0 = 0$$

bulunur, yine $C = 1$ ve $D = 0$ iken ifade,

$$\epsilon_{10}\epsilon_{10} + \epsilon_{11}\epsilon_{00} + \epsilon_{10}\epsilon_{01} = (-1)(-1) + 0 + (-1)(1) = 0$$

bulunur. Yani $A = 1$ iken eşitlik doğrudur.

$A = 0$ durumunda da kanıt benzer olarak yapılabilir. ■

Yardımcı Teorem 3.10 ***a)*** *$G = \left[{G_A}^B\right] = \begin{bmatrix} {G_1}^1 & {G_1}^0 \\ {G_0}^1 & {G_0}^0 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ verilsin. Bu durumda;*

$${G_A}^{A_1}{G_B}^{B_1}\epsilon_{A_1B_1} = \epsilon_{AB}, \qquad A, B = 1, 0$$

dir.

b) *$\left[\mathcal{G}^A{}_B\right] = \left(\left[{G_A}^B\right]^{-1}\right)^T$ olmak üzere,*

$$\mathcal{G}^A{}_{A_1}\mathcal{G}^B{}_{B_1}\epsilon^{A_1B_1} = \epsilon^{AB}, \qquad A, B = 1, 0$$

dir.

İspat. a) $G \in SL(2,\mathbb{C})$ olduğundan $\det G = 1$ dir.

$$\begin{aligned}
G_A{}^{A_1} G_B{}^{B_1} \epsilon_{A_1 B_1} &= G_A{}^1 G_B{}^0 \epsilon_{10} + G_A{}^0 G_B{}^1 \epsilon_{01} \\
&= G_A{}^0 G_B{}^1 - G_A{}^1 G_B{}^0 \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} 0, & A = B \text{ ise} \\ \det G, & A = 0, B = 1 \text{ ise} \\ -\det G, & A = 1, B = 0 \text{ ise} \end{array} \right\} \\
&= \epsilon_{AB} \det G \\
&= \epsilon_{AB}
\end{aligned}$$

buulunur

b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^A{}_{A_1} \mathcal{G}^B{}_{B_1} \epsilon^{A_1 B_1} &= \mathcal{G}^A{}_1 \mathcal{G}^B{}_0 \epsilon^{10} + \mathcal{G}^A{}_0 \mathcal{G}^B{}_1 \epsilon^{01} \\
&= \mathcal{G}^A{}_0 \mathcal{G}^B{}_1 - \mathcal{G}^A{}_1 \mathcal{G}^B{}_0 \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} 0, & A = B \text{ ise} \\ \det \left[\mathcal{G}^A{}_B\right], & A = 0, B = 1 \text{ ise} \\ -\det \left[\mathcal{G}^A{}_B\right] & A = 1, B = 0 \text{ ise} \end{array} \right\} \\
&= \epsilon_{AB} \det \left[\mathcal{G}^A{}_B\right] \\
&= \epsilon^{AB}
\end{aligned}$$

buulunur. ■

Not : Spin uzayı tanımındaki $f : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ bilineer formu göz önüne alınsın. Dikkat edilirse f, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir spinordür. Ayrıca $\{s^1, s^0\}$ spin çatısı için,

$$\begin{aligned}
f(s^1, s^0) &= 1 \\
f(s^0, s^1) &= -1 \\
f(s^1, s^1) &= f(s^0, s^0) = 0
\end{aligned}$$

yani,

$$f(s^A, s^B) = -\epsilon^{AB}$$

olup, f nin bileşenleri

$$f^{AB} = -\epsilon^{AB}$$

dir. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir spinorün dönüşüm kuralı,

$$\mathcal{G}^{A}{}_{A_1}\mathcal{G}^{B}{}_{B_1} f^{A_1B_1} = \hat{f}^{AB}, \qquad A, B = 1, 0$$

olduğu bilindiğine göre, $f^{AB} = -\epsilon^{AB}$ eşitliği yerine koyulursa

$$\mathcal{G}^{A}{}_{A_1}\mathcal{G}^{B}{}_{B_1} \epsilon^{A_1B_1} = \epsilon^{AB}, \qquad A, B = 1, 0$$

elde edilir ki bu zaten yukarıdaki lemmanın **b**) şıkkında elde edilmişti. Buradan, $\epsilon = \left[\epsilon^{AB}\right]$ matrisi, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir spinor olarak düşünülebilir, dahası son eşitlikten söylenilebilir ki $\epsilon = \left[\epsilon^{AB}\right]$ spinorünün farklı iki tabana göre bileşenleri aynıdır. Yani, $\epsilon = \left[\epsilon^{AB}\right]$, bir sabit spinor olarak da düşünülebilir. Benzer olarak ϵ_{AB} sayıları, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir spinorün bileşenleridir.

Yardımcı Teorem 3.11 ***a)*** *$G = \left[G_A{}^B\right] = \begin{bmatrix} G_1{}^1 & G_1{}^0 \\ G_0{}^1 & G_0{}^0 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ verilsin. Bu durumda;*

$$\bar{G}_{\dot{X}}{}^{\dot{X}_1}\bar{G}_{\dot{Y}}{}^{\dot{Y}_1}\bar{\epsilon}_{\dot{X}_1\dot{Y}_1} = \bar{\epsilon}_{\dot{X}\dot{Y}}, \qquad \dot{X}, \dot{Y} = \dot{1}, \dot{0}$$

dir.

b) *$\left[\mathcal{G}^A{}_B\right] = \left(\left[G_A{}^B\right]^{-1}\right)^T$ olmak üzere,*

$$\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{X}_1}\bar{\mathcal{G}}^{\dot{Y}}{}_{\dot{Y}_1}\bar{\epsilon}^{\dot{X}_1\dot{Y}_1} = \bar{\epsilon}^{\dot{X}\dot{Y}}, \qquad \dot{X}, \dot{Y} = \dot{1}, \dot{0}$$

dir.

Yine bu lemma'dan $\bar{\epsilon}_{\dot{X}\dot{Y}}$ sayılarının $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ valansında bir spinorün bileşenleri ve $\bar{\epsilon}^{\dot{X}\dot{Y}}$ sayılarının ise $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir spinorün bileşenleri olduğu söylenilebilir.

Tanım 3.9 *$\{s^1, s^0\}$ bir spin çatısı, ϕ, spin vektörü, ϕ^*, bu spin vektörüne karşılık spin kovektörü ve $\phi = \phi_A s^A$, $\phi^* = \phi^A s_A$ olmak üzere; $\phi^A = \epsilon^{AB}\phi_B$ eşitliği, ϕ^* ın* *bileşenlerinin, ϕ nin bileşenlerini soldan ϵ^{AB} ile çarparak elde edilebileceğini söyler. Bu işleme* ***indis kaldırma*** *adı verilir. Aynı şekilde $\phi_A = \phi^B \epsilon_{AB}$ eşitliğinden görüleceği üzere, ϕ_A yı ϕ^B den elde etme işine* ***indis indirme*** *adı verilir.*

$\left(\epsilon^{CB}\phi_B\right)\epsilon_{CA} = \phi_A$ ve $\epsilon^{AC}\left(\phi^B\epsilon_{BC}\right) = \phi^A$ eşitlikleri gösterir ki iki işlemler ard-arda yapılırsa bileşenler orjinal haline döner.

Bu işlemler herhangi bir spinor için de geçerlidir.

Örnek 3.6 *ξ, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir spinor olsun. ξ nin herhangi bir spin çatısına göre bileşenleri $\xi^{AB}{}_C$ şeklindedir. ξ nin başka bir spin çatısına göre bileşenleri $\hat{\xi}^{AB}{}_C$ ile gösterilmek üzere,*

$$\begin{aligned} \xi_A{}^B{}_C &= \xi^{A_1B}{}_C\epsilon_{A_1A} \\ \hat{\xi}_A{}^B{}_C &= \hat{\xi}^{A_1B}{}_C\epsilon_{A_1A} \end{aligned}$$

olarak tanımlı $\xi_A{}^B{}_C$ ve $\hat{\xi}_A{}^B{}_C$ sayıları $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir spinor belirler. Yani, $\xi_A{}^B{}_C$ ve $\hat{\xi}_A{}^B{}_C$ ler arasında,

$$\hat{\xi}_A{}^B{}_C = G_A{}^{A_1}\mathcal{G}^B{}_{B_1}G_C{}^{C_1}\xi_{A_1}{}^{B_1}{}_{C_1}$$

dönüşüm kuralı geçerlidir. Gerçekten; ξ için spinör dönüşüm kuralı ve

$$G_A{}^{A_1}G_B{}^{B_1}\epsilon_{A_1B_1} = \epsilon_{AB}, \qquad A, B = 1, 0$$

eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_A{}^B{}_C &= \hat{\xi}^{A_1B}{}_C\epsilon_{A_1A} \\ &= \left(\mathcal{G}^{A_1}{}_{A_2}\mathcal{G}^B{}_{B_1}G_C{}^{C_1}\xi^{A_2B_1}{}_{C_1}\right)\left(G_{A_1}{}^{A_3}G_A{}^{A_4}\epsilon_{A_3A_4}\right) \\ &= \left(\mathcal{G}^{A_1}{}_{A_2}G_{A_1}{}^{A_3}\right)\left(\mathcal{G}^B{}_{B_1}G_C{}^{C_1}G_A{}^{A_4}\right)\left(\xi^{A_2B_1}{}_{C_1}\epsilon_{A_3A_4}\right) \\ &= \delta^{A_3}_{A_2}\left(\mathcal{G}^B{}_{B_1}G_C{}^{C_1}G_A{}^{A_4}\right)\left(\xi^{A_2B_1}{}_{C_1}\epsilon_{A_3A_4}\right) \\ &= \mathcal{G}^B{}_{B_1}G_C{}^{C_1}G_A{}^{A_4}\left(\xi^{A_3B_1}{}_{C_1}\epsilon_{A_3A_4}\right) \\ &= \mathcal{G}^B{}_{B_1}G_C{}^{C_1}G_A{}^{A_4}\xi_{A_4}{}^{B_1}{}_{C_1} \\ &= G_A{}^{A_4}\mathcal{G}^B{}_{B_1}G_C{}^{C_1}\xi_{A_4}{}^{B_1}{}_{C_1} \end{aligned}$$

olup indisler düzenlenirse;

$$\hat{\xi}_{A}{}^{B}{}_{C} = G_{A}{}^{A_1}\mathcal{G}^{B}{}_{B_1}G_{C}{}^{C_1}\xi_{A_1}{}^{B_1}{}_{C_1}$$

elde edilir.

Örnek 3.7 *ξ, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir spinor ve ξ nin bir spin çatısına göre bileşenleri $\xi^{AB}{}_{C_1}$ olmak üzere,*

$$\xi^{ABC} = \epsilon^{CC_1}\xi^{AB}{}_{C_1}$$

olarak tanımlı ξ^{ABC} sayıları, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir spinorün bileşenleridir.

Yardımcı Teorem 3.12 *ϵ_{AB} ve ϵ^{CD} sabit spinorler olmak üzere,*

$$\epsilon_{AB}\epsilon^{CD} = \delta_A^C\delta_B^D - \delta_A^D\delta_B^C \qquad A, B, C, D = 1, 0$$

eşitliği geçerlidir.

Not : Genel olarak ϵ spinorü ile ilgili bütün bu yapılanlar, ϵ spinorünün noktalı ve eşlenikli indisli hali için de geçerlidir. Örneğin yukarıdaki eşitlik; ϵ spinorünün noktalı ve eşlenikli durumu için,

$$\bar{\epsilon}_{\dot{X}\dot{Y}}\bar{\epsilon}^{\dot{Z}\dot{T}} = \delta_{\dot{X}}^{\dot{Z}}\delta_{\dot{Y}}^{\dot{T}} - \delta_{\dot{X}}^{\dot{T}}\delta_{\dot{Y}}^{\dot{Z}} \qquad \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{T} = \dot{1}, \dot{0}$$

olarak ifade edilir.

Tanım 3.10 $\mathcal{B}_{mn}^{r\,s} = \left\{ \xi : \xi,\ \begin{pmatrix} r & s \\ m & n \end{pmatrix} \text{ valansında bir spinor} \right\}$

olarak tanımlı $\mathcal{B}_{mn}^{rs}$ kümesi multilineer fonksiyonellerin bir kümesi olarak üzerinde, her $\xi, \zeta \in \mathcal{B}_{mn}^{rs}$ elemanları ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ sayısı için;
$\overset{1}{\phi}, ..., \overset{r}{\phi} \in \mathcal{B}$, $\overset{1}{\bar{\psi}}, ..., \overset{s}{\bar{\psi}} \in \bar{\mathcal{B}}$, $\overset{1}{\mu}, ..., \overset{m}{\mu} \in \mathcal{B}^*$, $\overset{1}{\bar{v}}, ..., \overset{n}{\bar{v}} \in \bar{\mathcal{B}}^*$ olmak üzere,

$$(\xi + \zeta)\left(\overset{1}{\phi}, ..., \overset{n}{\bar{v}}\right) = \xi\left(\overset{1}{\phi}, ..., \overset{n}{\bar{v}}\right) + \zeta\left(\overset{1}{\phi}, ..., \overset{n}{\bar{v}}\right)$$

$$(\alpha\xi)\left(\overset{1}{\phi}, ..., \overset{n}{\bar{v}}\right) = \alpha\left(\xi\left(\overset{1}{\phi}, ..., \overset{n}{\bar{v}}\right)\right)$$

olarak tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte bir vektör uzayıdır.

Teorem 3.6 [8] *$\{s^1, s^0\}$, $\mathcal{B}$ için bir spin çatısı ve $\{\bar{s}^{\dot{1}}, \bar{s}^{\dot{0}}\}$,$\{s_1, s_0\}$, $\{\bar{s}_{\dot{1}}, \bar{s}_{\dot{0}}\}$ kümeleri, $\{s^1, s^0\}$ spin çatısına bağlı, sırasıyla $\bar{\mathcal{B}}, \mathcal{B}^*$ ve $\bar{\mathcal{B}}^*$ ın tabanları olsun. Bu durumda ;*

$$\left(s_{A_1} \otimes ... \otimes \bar{s}^{\dot{Y}_n} = s_{A_1} \otimes ... \otimes s_{A_r} \otimes \bar{s}_{\dot{X}_1} \otimes ... \otimes \bar{s}_{\dot{X}_s} \otimes s^{B_1} \otimes ... \otimes s^{B_m} \otimes \bar{s}^{\dot{Y}_1} \otimes ... \otimes \bar{s}^{\dot{Y}_n}\right)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} s_{A_1} \otimes ... \otimes \bar{s}^{\dot{Y}_n} \left(\overset{1}{\phi}, ..., \overset{n}{\bar{v}}\right) &= s_{A_1}\left(\overset{1}{\phi}\right) ... \bar{s}^{\dot{Y}_n}\left(\overset{n}{\bar{v}}\right) \\ &= \overset{1}{\phi}_{A_1} ... \overset{n}{\bar{v}}_{\dot{Y}_n} \end{aligned}$$

ile tanımlı $s_{A_1} \otimes ... \otimes \bar{s}^{\dot{Y}_n} \in \mathcal{B}^{rs}_{mn}$ elemanları, $\mathcal{B}^{rs}_{mn}$ nin bir tabanını oluşturur. Dahası bir $\xi \in \mathcal{B}^{rs}_{mn}$ spinorü bu taban cinsinden,

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(s^{A_1}, ..., s^{A_r}, \bar{s}^{\dot{X}_1}, ... \bar{s}^{\dot{X}_s}, s_{B_1}, ..., s_{B_m}, \bar{s}_{\dot{Y}_1}, ..., \bar{s}_{\dot{Y}_n}) s_{A_1} \otimes ... \otimes \bar{s}^{\dot{Y}_n} \\ &= \xi^{A_1 ... A_r \dot{X}_1 ... \dot{X}_s}{}_{B_1 ... B_m \dot{Y}_1 ... \dot{Y}_n} s_{A_1} \otimes ... \otimes \bar{s}^{\dot{Y}_n}, \qquad A_i, B_j = 1, 0,\ \dot{X}_k, \dot{Y}_l = \dot{1}, \dot{0} \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

Keyfi iki spinorün, verilen bir $\left\{s_{A_1} \otimes ... \otimes \bar{s}^{\dot{Y}_n}\right\}$ tabanına göre bileşenleri göz önüne alınırsa; bileşen bileşen toplama ve bileşenleri skalerlerle çarpma işlemleri sırasıyla,

$$(\xi + \zeta)^{A_1 ... A_r \dot{X}_1 ... \dot{X}_s}{}_{B_1 ... B_m \dot{Y}_1 ... \dot{Y}_n} = \xi^{A_1 ... A_r \dot{X}_1 ... \dot{X}_s}{}_{B_1 ... B_m \dot{Y}_1 ... \dot{Y}_n} + \zeta^{A_1 ... A_r \dot{X}_1 ... \dot{X}_s}{}_{B_1 ... B_m \dot{Y}_1 ... \dot{Y}_n}$$

$$(\alpha\xi)^{A_1 ... A_r \dot{X}_1 ... \dot{X}_s}{}_{B_1 ... B_m \dot{Y}_1 ... \dot{Y}_n} = \alpha\xi^{A_1 ... A_r \dot{X}_1 ... \dot{X}_s}{}_{B_1 ... B_m \dot{Y}_1 ... \dot{Y}_n}$$

olarak tanımlıdır.

Tanım 3.11 *ξ, $\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ m_1 & n_1 \end{pmatrix}$ valansında bir spinor, ζ, $\begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix}$ valansında bir spinor olsun. Bu durumda, $\overset{1}{\phi}, ..., \overset{r_1+r_2}{\phi} \in \mathcal{B}$, $\overset{1}{\bar{\psi}}, ..., \overset{s_1+s_2}{\bar{\psi}} \in \bar{\mathcal{B}}$, $\overset{1}{\mu}, ..., \overset{m_1+m_2}{\mu} \in \mathcal{B}^*$, $\overset{1}{\bar{v}}, ..., \overset{n_1+n_2}{\bar{v}} \in \bar{\mathcal{B}}^*$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} &(\xi \otimes \zeta)\left(\overset{1}{\phi}, ..., \overset{r_1+r_2}{\phi}, \overset{1}{\bar{\psi}}, ..., \overset{s_1+s_2}{\bar{\psi}}, \overset{1}{\mu}, ..., \overset{m_1+m_2}{\mu}, \overset{1}{\bar{v}} ..., \overset{n_1+n_2}{\bar{v}}\right) \\ = \; &\xi\left(\overset{1}{\phi}, ..., \overset{r_1+r_2}{\phi}, \overset{1}{\bar{\psi}}, ..., \overset{s_1+s_2}{\bar{\psi}}, \overset{1}{\mu}, ..., \overset{m_1+m_2}{\mu}, \overset{1}{\bar{v}} ..., \overset{n_1+n_2}{\bar{v}}\right) \\ &\zeta\left(\overset{1}{\phi}, ..., \overset{r_1+r_2}{\phi}, \overset{1}{\bar{\psi}}, ..., \overset{s_1+s_2}{\bar{\psi}}, \overset{1}{\mu}, ..., \overset{m_1+m_2}{\mu}, \overset{1}{\bar{v}} ..., \overset{n_1+n_2}{\bar{v}}\right) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan $\xi \otimes \zeta$ ye ξ ve ζ spinorlerinin ***dış çarpımı*** *adı verilip, $\xi \otimes \zeta$,* $\begin{pmatrix} r_1+r_2 & s_1+s_2 \\ m_1+m_2 & n_1+n_2 \end{pmatrix}$ *valansında bir spinordür. Ayrıca bileşenler cinsinden dış çarpım,*

$$(\xi \otimes \zeta)^{A_1 \dots A_{r_1+r_2} \dot{X}_1 \dots \dot{X}_{s_1+s_2}}{}_{B_1 \dots B_{m_1+m_2} \dot{Y}_1 \dots \dot{Y}_{n_1+n_2}} = \left(\xi^{A_1 \dots A_{r_1} \dot{X}_1 \dots \dot{X}_{s_1}}{}_{B_1 \dots B_{m_1} \dot{Y}_1 \dots \dot{Y}_{n_1}}\right) \left(\zeta^{A_{r_1+1} \dots A_{r_1+r_2} \dot{X}_{s_1+1} \dots \dot{X}_{s_1+s_2}}{}_{B_{m_1+1} \dots B_{m_1+m_2} \dot{Y}_{n_1+1} \dots \dot{Y}_{n_1+n_2}}\right)$$

olarak tanımlıdır.

Gözlemlenebilir ki dış çarpım, birleşme özelliğini sağlar, toplamaya dağılır, fakat değişmeli değildir.

Tanım 3.12 *ξ, $\begin{pmatrix} r & s \\ m & n \end{pmatrix}$ valansında bir spinor, k ve l sayıları $1 \le k \le r, 1 \le l \le m$ olacak şekilde tamsayılar olsun. Ayrıca $\{s^1, s^0\}$ bir spin çatısı olsun. ξ, bu spin çatısına göre*

$$\xi = \xi^{A_1 \dots A_k \dots A_r \dot{X}_1 \dots \dot{X}_s}{}_{B_1 \dots B_l \dots B_m \dot{Y}_1 \dots \dot{Y}_n} s_{A_1} \otimes \dots \otimes \bar{s}^{\dot{Y}_n}$$

olarak yazılmak üzere

$$C_{kl}(\xi) = \xi^{A_1 \dots A \dots A_r \dot{X}_1 \dots \dot{X}_s}{}_{B_1 \dots A \dots B_m \dot{Y}_1 \dots \dot{Y}_n} s_{A_1} \otimes \dots \otimes s_{A_{k-1}} \otimes s_{A_{k+1}} \otimes \dots \otimes s^{B_{l-1}} \otimes s^{B_{l+1}} \otimes \dots \otimes \bar{s}^{\dot{Y}_n}$$

şeklinde tanımlı $C_{kl}(\xi)$ ye ξ spinorünün A_k ***ve*** *B_l* ***indislerinde kontraksiyonu*** *denir.*

Yardımcı Teorem 3.13 *$C_{kl}(\xi)$, $\begin{pmatrix} r-1 & s \\ m-1 & n \end{pmatrix}$ valansında bir spinordür.*

İspat. $\{s^A\}$ ve $\{\hat{s}^A\}$ iki spin çatısı olsun. Bu durumda $C_{kl}(\xi)$ nin verilen tabanlara göre bileşenleri, $\begin{pmatrix} r-1 & s \\ m-1 & n \end{pmatrix}$ valansında bir spinorün dönüşüm kuralını sağladığı gösterilmelidir. ■

Örnek 3.8 *ξ, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir spinor, $k = 1$ ve $l = 1$ olsun. Bu durumda $C_{11}(\xi)$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir spinordür. Yani;*

$$\xi = \xi^{A_1 \dot{X}_1}{}_{B_1} s_{A_1} \otimes \bar{s}_{\dot{X}_1} \otimes s^{B_1}$$

iken,

$$C_{11}(\xi) = \xi^{A\dot{X}_1}{}_{A}\bar{s}_{\dot{X}_1} = \left(\xi^{1\dot{X}_1}{}_{1} + \xi^{0\dot{X}_1}{}_{0}\right)\bar{s}_{\dot{X}_1}$$

dir.

Not : Aynı yolla verilen ξ spinorü için, biri üst biri alt indis olmak üzere $\dot{k}$.inci ve $\dot{l}$.inci noktalı indislerde de kontraksiyon elde edilebilir ve $C_{\dot{k}\dot{l}}(\xi)$ ile gösterilen, $\begin{pmatrix} r & s \\ m & n \end{pmatrix}$ valansında bir spinor elde edilir. Gözlemlenir ki; indis indirme veya kaldırma işlemi, uygun bir ϵ ile outer çarpım ve yine uygun indislerde bir kontraksiyonunun ard arda yapılmasına denktir.

Yardımcı Teorem 3.14 *ξ, $\begin{pmatrix} r & r \\ s & s \end{pmatrix}$ valansında bir spinor olsun. Bir spin çatısına göre bileşenleri,*

$$\bar{\xi}^{\dot{A}_1...\dot{A}_r X_1...X_r}{}_{\dot{B}_1...\dot{B}_s Y_1...Y_s} = \overline{\xi^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s}}$$

şeklinde tanımlı $\bar{\xi}$, $\begin{pmatrix} r & r \\ s & s \end{pmatrix}$ valansında bir spinordür. Bu spinore ξ ***spinorünün eşleniği*** *adı verilir.*

İspat. ξ, $\begin{pmatrix} r & r \\ s & s \end{pmatrix}$ valansında bir spinor olduğundan farklı iki spin çatısına göre bileşenleri arasında,

$$\hat{\xi}^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s} = \mathcal{G}^{A_1}{}_{C_1}...\mathcal{G}^{A_r}{}_{C_r}\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_1}{}_{\dot{U}_1}...\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_r}{}_{\dot{U}_r}G_{B_1}{}^{D_1}...G_{B_s}{}^{D_s}\bar{G}_{\dot{Y}_s}{}^{\dot{V}_s}...\bar{G}_{\dot{Y}_s}{}^{\dot{V}_s}\xi^{C_1...C_r\dot{U}_1...\dot{U}_r}{}_{D_1...D_s\dot{V}_1...\dot{V}_s}$$

dönüşüm kuralı geçerlidir. Eşitlik kompleks sayılardan oluştuğundan, iki tarafın eşleniği alınırsa;

$$\overline{\hat{\xi}^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s}} = \overline{\mathcal{G}^{A_1}{}_{C_1}}...\overline{\mathcal{G}^{A_r}{}_{C_r}}\,\overline{\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_1}{}_{\dot{U}_1}}...\overline{\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_r}{}_{\dot{U}_r}}\,\overline{G_{B_1}{}^{D_1}}...\overline{G_{B_s}{}^{D_s}}\,\overline{\bar{G}_{\dot{Y}_1}{}^{\dot{V}_1}}...\overline{\bar{G}_{\dot{Y}_s}{}^{\dot{V}_s}\xi^{C_1...C_r\dot{U}_1...\dot{U}_r}{}_{D_1...D_s\dot{V}_1...\dot{V}_s}}$$

olup $\bar{\xi}$ nin tanımından

$$\bar{\hat{\xi}}^{\dot{A}_1...\dot{A}_r X_1...X_r}{}_{\dot{B}_1...\dot{B}_s Y_1...Y_s} = \bar{\mathcal{G}}^{\dot{A}_1}{}_{\dot{C}_1}...\bar{\mathcal{G}}^{\dot{A}_r}{}_{\dot{C}_r}\mathcal{G}^{X_1}{}_{U_1}...\mathcal{G}^{X_r}{}_{U_r}\bar{G}_{\dot{B}_1}{}^{\dot{D}_1}...\bar{G}_{\dot{B}_s}{}^{\dot{D}_s}G_{Y_1}{}^{V_1}...G_{Y_s}{}^{V_s}\bar{\xi}^{\dot{C}_1...\dot{C}_r U_1...U_r}{}_{\dot{D}_1...\dot{D}_s V_1...V_s}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik yine $\begin{pmatrix} r & r \\ s & s \end{pmatrix}$ valansında bir spinörün farklı iki tabana göre dönüşüm kuralıdır. ■

Tanım 3.13 *Eğer* $\xi = \bar{\xi}$ *ise* ξ *spinörüne* ***hermityen spinör*** *adı verilir.*

Tanım 3.14 $\begin{pmatrix} r & r \\ s & s \end{pmatrix}$ *valansında bir* ξ *spinörü bir multiliner fonksiyonel olarak dört farklı tipte nesnelere (* $\mathcal{B}$,$\bar{\mathcal{B}}$,$\mathcal{B}^*$,$\bar{\mathcal{B}}^*$ *kümelerinin elemanlarına) etki eder ve "*$r+s+m+n$*" tane değişkeni vardır. Aynı tipte herhangi* p *ve* q *değişkenleri için*

$$\xi\,(..., p, ..., q, ...) = \xi\,(..., q, ..., p, ...)$$

eşitliği geçerli ise ξ *ye bu iki değişkene göre* ***simetrik,***

$$\xi\,(..., p, ..., q, ...) = -\xi\,(..., q, ..., p, ...)$$

ise ξ *ye bu iki değişkene göre* ***skew-simetrik*** *spinör adı verilir.*

Yardımcı Teorem 3.15 ξ *ye bu iki değişkene göre simetrik (skew-simetrik) olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir spin çatısına göre* ξ *nin bileşenlerinde, bu değişkenlere karşılık gelen indisler yer değiştirirken bileşenlerin işareti değişmez (değişir).*

Örnek 3.9 ϕ, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *valansında bir spinör olsun.*

$$\phi \text{ simetriktir} \iff \phi_{AB} = \phi_{BA}, \quad \forall A, B = 1, 0$$

$$\phi \text{ skew-simetriktir} \iff \phi_{AB} = -\phi_{BA}, \quad \forall A, B = 1, 0$$

Tanım 3.15 ξ , $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *valansında bir spinör olsun.* ξ *nin bir spin çatısına göre bileşenleri* ξ_{AB} $(A, B = 1, 0)$ *olmak üzere bileşenleri*

$$\xi_{(AB)} = \frac{1}{2}\,(\xi_{AB} + \xi_{BA})$$

ile tanımlı spinöre ξ *spinörünün* ***simetrizasyonu;***

$$\xi_{[AB]} = \frac{1}{2}\,(\xi_{AB} - \xi_{BA})$$

ile tanımlı spinöre ξ *nin* ***skew-simetrizasyonu*** *denir.*

Not : $r = s = n = 0$, $m = 2$ için de $\mathcal{B}^{0\,0}_{2\,0}$ kümesi, bir vektör uzayı olduğundan, ξ spinörünün simetrizasyonu (skew-simetrizasyonu) yine $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir spinör dür ve simetriktir (skew-simetriktir).

α ve β iki spin vektörü olsun. $\mathcal{B} \cong (\mathcal{B}^*)^*$ olduğundan spin vektörleri $\mathcal{B}^*$ üzerinde bir multilineer fonksiyonel olarak düşünülebilirler. Yani spin vektörlerine $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir spinör gözüyle bakılabilir. Böylece α ve β nın dış çarpımı $\alpha \otimes \beta$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir spinör olur ve bir spin çatısına göre bileşenleri $A, B = 1, 0$ için $\alpha_A \beta_B$ ile gösterilebilir.

Yardımcı Teorem 3.16 *ϕ, $\alpha \otimes \beta$ nın simetrizasyonu, yani ϕ nin bileşenleri, $\phi_{AB} = \alpha_{(A}\beta_{B)}$ ile gösterilmek üzere,*

$$\phi_{AB} = \alpha_{(A}\beta_{B)} = \frac{1}{2}\left(\alpha_A\beta_B + \alpha_B\beta_A\right)$$

olsun. Bu durumda,

a) $\phi^{AB} = \frac{1}{2}\left(\alpha^A\beta^B + \alpha^B\beta^A\right)$

b) $\phi_{AB}\phi^{AB} = -\frac{1}{2}\left(f(\alpha,\beta)\right)^2$

4 SPİNÖRLER ve WORLD-TENSÖRLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİSİ

4.1 Spinörler, World-Vektörler ve World-Kovektörler

Yardımcı Teorem 4.1 [8] $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisleri verilmek üzere;*

$$\begin{aligned} (\sigma_1)^2 &= (\sigma_2)^2 = (\sigma_3)^2 = (\sigma_4)^2 = \sigma_4 \\ \sigma_1\sigma_2 &= -\sigma_2\sigma_1 = -i\sigma_3 \\ \sigma_1\sigma_3 &= -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2 \\ \sigma_2\sigma_3 &= -\sigma_3\sigma_2 = -i\sigma_1 \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir.

$A = 1, 0$, $\dot{X} = \dot{1}, \dot{0}$

$$\sigma_a^{A\dot{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_a, \qquad a = 1,2,3,4$$

olmak üzere,

$$\sigma_a^{A\dot{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_a^{1\dot{1}} & \sigma_a^{1\dot{0}} \\ \sigma_a^{0\dot{1}} & \sigma_a^{0\dot{0}} \end{bmatrix}, \qquad a = 1,2,3,4$$

matrisleri tanımlansın. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \sigma_1^{A\dot{X}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_2^{A\dot{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_3^{A\dot{X}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ \sigma_4^{A\dot{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. Burada $\sigma_a^{A\dot{X}} = \sigma_a^{\dot{X}A}$ olduğu açıktır. Yani noktasız indisler satırı, noktalı indisler sütunu göstermek üzere her bir $\sigma_a^{A\dot{X}}$ matrisi hermityendir.

Teorem 4.1 $\{e_a\}$, $\mathcal{M}$ *nin bir uygun tabanı ve* $\{s^A\}$, $\mathcal{B}$ *nın bir spin çatısı olsun. Verilen her* $v \in \mathcal{M}$ $(v = v^a e_a)$ *vektörüne karşılık bir* $V \in \mathcal{B}_{0\,0}^{1\,1}$ $\left(V = V^{A\dot{X}} s_A \otimes \bar{s}_{\dot{X}}\right)$ *hermityen* *spinorü vardır öyleki V nin $\{s^A\}$ spin çatısına göre bileşenleri,*

$$V^{A\dot{X}} = \sigma_a^{A\dot{X}} v^a, \qquad A = 1, 0 \ \dot{X} = \dot{1}, \dot{0}$$

olarak tanımlıdır.

İspat. $v \in \mathcal{M}$, $\{e_a\}$, $\mathcal{M}$ nin bir uygun tabanı ve $\{s^A\}$, bir spin çatısı olsun. Şimdi bunlardan valansı $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olan bir V spinörü inşaa edilecektir. $v = v^a e_a$ olmak üzere V nin $\{s^A\}$ ya göre bileşenleri $V^{A\dot{X}}$ ile gösterilmek üzere, $V^{A\dot{X}}$ ler,

$$V^{A\dot{X}} = \sigma_a^{A\dot{X}} v^a, \qquad A = 1, 0 \text{ ve } \dot{X} = \dot{1}, \dot{0} \tag{4.1}$$

ile tanımlansın. Buradan,

$$\begin{aligned}
V^{1\dot{1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sigma_1^{1\dot{1}} v^1 + \sigma_2^{1\dot{1}} v^2 + \sigma_3^{1\dot{1}} v^3 + \sigma_4^{1\dot{1}} v^4 \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v^3 + v^4 \right) \\
V^{1\dot{0}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v^1 + i v^2 \right) \\
V^{0\dot{1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v^1 - i v^2 \right) \\
V^{0\dot{0}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-v^3 + v^4 \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\{\hat{s}^A\}$ başka bir spin çatısı olsun. Bu durumda, iki spin çatısı arasında bilinen

$$s^B = G_A{}^B \hat{s}^A, \ \hat{s}^A = \mathcal{G}^A{}_B s^B$$

eşitliklerini sağlayan $\mathcal{G}$ ve $G \in SL(2, \mathbb{C})$ matrisleri $\left([\mathcal{G}^A{}_B] = \left([G_A{}^B]^{-1} \right)^T \right)$ düşünülürse; $\mathcal{G}$ matrisi için, $spin : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}$ dönüşümü göz önüne alındığında, $spin(\mathcal{G}) = \wedge_{\mathcal{G}} = \wedge$ olacak şekilde bir $\wedge \in \mathcal{L}$ lorentz dönüşümü vardır. $\{\hat{e}_a\}$, $\{e_a\}$ uygun tabanına bu $\wedge \in \mathcal{L}$ lorentz dönüşümü ile bağlanan uygun taban olmak üzere, verilen $v \in \mathcal{M}$ vektörü, $v = \hat{v}^a \hat{e}_a$ olarak ifade edilebilir ve iki uygun tabana göre bileşenler arasında,

$$\hat{v}^a = \Lambda^a{}_b \, v^b, \qquad a = 1, 2, 3, 4$$

eşitliği geçerlidir. V nin $\{\hat{s}^A\}$ spin çatısına göre bileşenleri $\hat{V}^{A\dot{X}}$ ler ile gösterilmek üzere,

$$\hat{V}^{A\dot{X}} = \sigma_a^{A\dot{X}}\hat{v}^a, \qquad A = 1, 0 \text{ ve } \dot{X} = \dot{1}, \dot{0}$$

olarak tanımlansın. Farklı iki spin çatısına göre bileşenleri $V^{A\dot{X}}$ ve $\hat{V}^{A\dot{X}}$ olan ve yukarıdaki gibi tanımlanan V, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir hermityen spinordür, Yani $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir spinor için bileşenler arasındaki

$$\hat{V}^{A\dot{X}} = \mathcal{G}^A{}_B \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}} V^{B\dot{Y}} \qquad A = 1, 0 \;\; \dot{X} = \dot{1}, \dot{0}$$

dönüşüm kuralı sağlar. Gerçekten;

Eşitliğin sağ tarafı $\tilde{V}^{A\dot{X}}$ ile gösterilsin. Yani $\tilde{V}^{A\dot{X}} = \mathcal{G}^A{}_B \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}} V^{B\dot{Y}}$ olsun. Son eştlik matris çarpımı olrak yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}^{1\dot{1}} \\ \tilde{V}^{1\dot{0}} \\ \tilde{V}^{0\dot{1}} \\ \tilde{V}^{0\dot{0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}^1{}_1\bar{\mathcal{G}}^{\dot{1}}{}_{\dot{1}} & \mathcal{G}^1{}_1\bar{\mathcal{G}}^{\dot{1}}{}_{\dot{0}} & \mathcal{G}^1{}_0\bar{\mathcal{G}}^{\dot{1}}{}_{\dot{1}} & \mathcal{G}^1{}_0\bar{\mathcal{G}}^{\dot{1}}{}_{\dot{0}} \\ \mathcal{G}^1{}_1\bar{\mathcal{G}}^{\dot{0}}{}_{\dot{1}} & \mathcal{G}^1{}_1\bar{\mathcal{G}}^{\dot{0}}{}_{\dot{0}} & \mathcal{G}^1{}_0\bar{\mathcal{G}}^{\dot{0}}{}_{\dot{1}} & \mathcal{G}^1{}_0\bar{\mathcal{G}}^{\dot{0}}{}_{\dot{0}} \\ \mathcal{G}^0{}_1\bar{\mathcal{G}}^{\dot{1}}{}_{\dot{1}} & \mathcal{G}^0{}_1\bar{\mathcal{G}}^{\dot{1}}{}_{\dot{0}} & \mathcal{G}^0{}_0\bar{\mathcal{G}}^{\dot{1}}{}_{\dot{1}} & \mathcal{G}^0{}_0\bar{\mathcal{G}}^{\dot{1}}{}_{\dot{0}} \\ \mathcal{G}^0{}_1\bar{\mathcal{G}}^{\dot{0}}{}_{\dot{1}} & \mathcal{G}^0{}_1\bar{\mathcal{G}}^{\dot{0}}{}_{\dot{0}} & \mathcal{G}^0{}_0\bar{\mathcal{G}}^{\dot{0}}{}_{\dot{1}} & \mathcal{G}^0{}_0\bar{\mathcal{G}}^{\dot{0}}{}_{\dot{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{1\dot{1}} \\ V^{1\dot{0}} \\ V^{0\dot{1}} \\ V^{0\dot{0}} \end{bmatrix}$$

olup, $\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}^1{}_1 & \mathcal{G}^1{}_0 \\ \mathcal{G}^0{}_1 & \mathcal{G}^0{}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ alınırsa bu matris eştliği,

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}^{1\dot{1}} \\ \tilde{V}^{1\dot{0}} \\ \tilde{V}^{0\dot{1}} \\ \tilde{V}^{0\dot{0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\bar{\alpha} & \alpha\bar{\beta} & \beta\bar{\alpha} & \beta\bar{\beta} \\ \alpha\bar{\gamma} & \alpha\bar{\delta} & \beta\bar{\gamma} & \beta\bar{\delta} \\ \gamma\bar{\alpha} & \gamma\bar{\beta} & \delta\bar{\alpha} & \delta\bar{\beta} \\ \gamma\bar{\gamma} & \gamma\bar{\delta} & \delta\bar{\gamma} & \delta\bar{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{1\dot{1}} \\ V^{1\dot{0}} \\ V^{0\dot{1}} \\ V^{0\dot{0}} \end{bmatrix}$$

halini alır. Buradan,

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{1\dot{1}} &= \alpha\bar{\alpha}V^{1\dot{1}} + \alpha\bar{\beta}V^{1\dot{0}} + \beta\bar{\alpha}V^{0\dot{1}} + \beta\bar{\beta}V^{0\dot{0}} \\ \tilde{V}^{1\dot{0}} &= \alpha\bar{\gamma}V^{1\dot{1}} + \alpha\bar{\delta}V^{1\dot{0}} + \beta\bar{\gamma}V^{0\dot{1}} + \beta\bar{\delta}V^{0\dot{0}} \\ \tilde{V}^{0\dot{1}} &= \gamma\bar{\alpha}V^{1\dot{1}} + \gamma\bar{\beta}V^{1\dot{0}} + \delta\bar{\alpha}V^{0\dot{1}} + \delta\bar{\beta}V^{0\dot{0}} \\ \tilde{V}^{0\dot{0}} &= \gamma\bar{\gamma}V^{1\dot{1}} + \gamma\bar{\delta}V^{1\dot{0}} + \delta\bar{\gamma}V^{0\dot{1}} + \delta\bar{\delta}V^{0\dot{0}} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir, düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\tilde{V}^{1\dot{1}} &= \alpha\left(\bar{\alpha}V^{1\dot{1}}+\bar{\beta}V^{1\dot{0}}\right)+\beta\left(\bar{\alpha}V^{0\dot{1}}+\bar{\beta}V^{0\dot{0}}\right)\\
\tilde{V}^{1\dot{0}} &= \alpha\left(\bar{\gamma}V^{1\dot{1}}+\bar{\delta}V^{1\dot{0}}\right)+\beta\left(\bar{\gamma}V^{0\dot{1}}+\bar{\delta}V^{0\dot{0}}\right)\\
\tilde{V}^{0\dot{1}} &= \gamma\left(\bar{\alpha}V^{1\dot{1}}+\bar{\beta}V^{1\dot{0}}\right)+\delta\left(\bar{\alpha}V^{0\dot{1}}+\bar{\beta}V^{0\dot{0}}\right)\\
\tilde{V}^{0\dot{0}} &= \gamma\left(\bar{\gamma}V^{1\dot{1}}+\bar{\delta}V^{1\dot{0}}\right)+\delta\left(\bar{\gamma}V^{0\dot{1}}+\bar{\delta}V^{0\dot{0}}\right)
\end{aligned}$$

olup, bu eşitlik sistemi,

$$\begin{bmatrix}\tilde{V}^{1\dot{1}} & \tilde{V}^{1\dot{0}}\\ \tilde{V}^{0\dot{1}} & \tilde{V}^{0\dot{0}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\left(\bar{\alpha}V^{1\dot{1}}+\bar{\beta}V^{1\dot{0}}\right)+\beta\left(\bar{\alpha}V^{0\dot{1}}+\bar{\beta}V^{0\dot{0}}\right) & \alpha\left(\bar{\gamma}V^{1\dot{1}}+\bar{\delta}V^{1\dot{0}}\right)+\beta\left(\bar{\gamma}V^{0\dot{1}}+\bar{\delta}V^{0\dot{0}}\right)\\ \gamma\left(\bar{\alpha}V^{1\dot{1}}+\bar{\beta}V^{1\dot{0}}\right)+\delta\left(\bar{\alpha}V^{0\dot{1}}+\bar{\beta}V^{0\dot{0}}\right) & \gamma\left(\bar{\gamma}V^{1\dot{1}}+\bar{\delta}V^{1\dot{0}}\right)+\delta\left(\bar{\gamma}V^{0\dot{1}}+\bar{\delta}V^{0\dot{0}}\right)\end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Son matris eşitliğinin sağ tarafı,

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(\bar{\alpha}V^{1\dot{1}}+\bar{\beta}V^{1\dot{0}}\right) & \left(\bar{\gamma}V^{1\dot{1}}+\bar{\delta}V^{1\dot{0}}\right)\\ \left(\bar{\alpha}V^{0\dot{1}}+\bar{\beta}V^{0\dot{0}}\right) & \left(\bar{\gamma}V^{0\dot{1}}+\bar{\delta}V^{0\dot{0}}\right)\end{bmatrix}$$

gibi iki matrisin çarpımı olarak yazılabilir ve yine bu çarpımdaki ikinci matris,

$$\begin{bmatrix}V^{1\dot{1}} & V^{1\dot{0}}\\ V^{0\dot{1}} & V^{0\dot{0}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha} & \bar{\gamma}\\ \bar{\beta} & \bar{\delta}\end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{bmatrix}\tilde{V}^{1\dot{1}} & \tilde{V}^{1\dot{0}}\\ \tilde{V}^{0\dot{1}} & \tilde{V}^{0\dot{0}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V^{1\dot{1}} & V^{1\dot{0}}\\ V^{0\dot{1}} & V^{0\dot{0}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha} & \bar{\gamma}\\ \bar{\beta} & \bar{\delta}\end{bmatrix}$$

olup, $A=\mathcal{G}=\begin{bmatrix}\mathcal{G}^1{}_1 & \mathcal{G}^1{}_0\\ \mathcal{G}^0{}_1 & \mathcal{G}^0{}_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\in SL(2,\mathbb{C})$ ve $H=\begin{bmatrix}V^{1\dot{1}} & V^{1\dot{0}}\\ V^{0\dot{1}} & V^{0\dot{0}}\end{bmatrix}$ olmak üzere, son matris eşitliği

$$\begin{bmatrix}\tilde{V}^{1\dot{1}} & \tilde{V}^{1\dot{0}}\\ \tilde{V}^{0\dot{1}} & \tilde{V}^{0\dot{0}}\end{bmatrix}=M_A(H)$$

halini alır. Öte yandan;

$$\begin{aligned}
M_A(H) &= \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{v}^3+\hat{v}^4\right) & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{v}^1+i\hat{v}^2\right)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{v}^1-i\hat{v}^2\right) & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\hat{v}^3+\hat{v}^4\right)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\hat{V}^{1\dot{1}} & \hat{V}^{1\dot{0}}\\ \hat{V}^{0\dot{1}} & \hat{V}^{0\dot{0}}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}^{1\dot{1}} \\ \tilde{V}^{1\dot{0}} \\ \tilde{V}^{0\dot{1}} \\ \tilde{V}^{0\dot{0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{V}^{1\dot{1}} \\ \hat{V}^{1\dot{0}} \\ \hat{V}^{0\dot{1}} \\ \hat{V}^{0\dot{0}} \end{bmatrix}$$

yani, $\left[\tilde{V}^{A\dot{X}}\right] = \left[\hat{V}^{A\dot{X}}\right]$ bulunur ki buradan

$$\hat{V}^{A\dot{X}} = \mathcal{G}^A{}_B \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}} V^{B\dot{Y}} \qquad A = 1,0 \ \dot{X} = \dot{1}, \dot{0}$$

dönüşüm kuralı gösterilimiş olur. Yani tanımlanan V, gerçekten $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir spinördür. Ayrıca; $\sigma_a^{A\dot{X}}$ matrisi hermityen ve v^a sayıları reel oluğundan, $\bar{V}^{A\dot{X}} = \overline{V^{\dot{A}X}} = \sigma_a^{\dot{A}X} v^a = \overline{\sigma_a^{\dot{A}X}}\overline{v^a} = \sigma_a^{A\dot{X}} v^a = V^{A\dot{X}}$ olup V, hermityendir. ■

Yardımcı Teorem 4.2 $\mathcal{G} \in SL(2, \mathbb{C})$ *matrisi verilsin.* $\wedge \in \mathcal{L}$ *bu* $\mathcal{G}$ *matrisine karşılık* $spin(\mathcal{G}) = \wedge_{\mathcal{G}} = \wedge$ *olacak şekilde Lorentz dönüşümü olmak üzere;*

a)

$$\Lambda_a{}^b \mathcal{G}^A{}_B \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}} \sigma_b^{B\dot{Y}} = \sigma_a^{A\dot{X}} \qquad a = 1,2,3,4 \ A = 1,0 \ \dot{X} = \dot{1}, \dot{0} \tag{4.2}$$

b)

$$\mathcal{G}^A{}_B \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}} \sigma_a^{B\dot{Y}} = \Lambda^\alpha{}_a \sigma_\alpha^{A\dot{X}} \qquad a = 1,2,3,4 \ A = 1,0 \ \dot{X} = \dot{1}, \dot{0} \tag{4.3}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. a) $\{e_a\}$, $\mathcal{M}$ nin bir uygun tabanı ve $\{s^A\}$, $\mathcal{B}$ nın bir spin çatısı olsun. $v \in \mathcal{M}$ ($v = v^a e_a$) keyfi vektörü verilsin. Bu durumda, v ye karşlık gelen V spinörü için

$$V^{A\dot{X}} = \sigma_a^{A\dot{X}} v^a,$$

eştliğinde A ve $\dot{X}$ sabitlensin. $\{s^A\}$ spin çatısı ile başta verilen $\mathcal{G} \in SL(2, \mathbb{C})$ matrisiyle ilişkisi belli olan spin çatısı $\{\hat{s}^B\}$ ile gösterilmek üzere; V nin, $\{\hat{s}^B\}$ spin çatısına göre bileşenleri,

$$\hat{V}^{A\dot{X}} = \sigma_a^{A\dot{X}} \hat{v}^a$$

olduğu biliniyor. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\sigma_a^{A\dot{X}}\hat{v}^a &= \hat{V}^{A\dot{X}} \\
&= \mathcal{G}^A{}_B\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}V^{B\dot{Y}} \\
&= \mathcal{G}^A{}_B\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}\left(\sigma_b^{B\dot{Y}}v^b\right) \\
&= \mathcal{G}^A{}_B\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}\sigma_b^{B\dot{Y}}\left(\delta_c^b v^c\right) \\
&= \mathcal{G}^A{}_B\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}\sigma_b^{B\dot{Y}}\left(\Lambda_a{}^b\Lambda^a{}_c v^c\right) \\
&= \Lambda_a{}^b\mathcal{G}^A{}_B\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}\sigma_b^{B\dot{Y}}\left(\Lambda^a{}_c v^c\right) \\
&= \Lambda_a{}^b\mathcal{G}^A{}_B\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}\sigma_b^{B\dot{Y}}\hat{v}^a
\end{aligned}$$

buradan

$$\sigma_a^{A\dot{X}}\hat{v}^a = \Lambda_a{}^b\mathcal{G}^A{}_B\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}\sigma_b^{B\dot{Y}}\hat{v}^a$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlikten,

$$\Lambda_a{}^b\mathcal{G}^A{}_B\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}\sigma_b^{B\dot{Y}} = \sigma_a^{A\dot{X}}$$

elde edilir. **b**) ilk eşitlikten elde edilir. ■

Sonuç 4.2 *Gösterilen son iki eşitlik gözlemlenirse,* $\sigma_a^{A\dot{X}}$ *ler bir kovektör ve* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *valansında bir spinorün bileşenleri gibi davranıyorlar.* $\sigma_a^{A\dot{X}}$ *ler böyle düşünüldüğünde; a indisi kaldırılıp, A ve* $\dot{X}$ *indisleri indirilerek,* $\sigma^a_{A\dot{X}}$ *ler,*

$$\sigma^a_{A\dot{X}} = \eta^{ab}\left(\sigma_b^{B\dot{Y}}\epsilon_{BA}\right)\bar{\epsilon}_{\dot{Y}\dot{X}} \qquad a = 1,2,3,4 \ A = 1,0 \ \dot{X} = \dot{1},\dot{0}$$

olarak tanımlanabilir.

Yardımcı Teorem 4.3 $\sigma^a_{A\dot{X}} = \begin{bmatrix} \sigma^a_{1\dot{1}} & \sigma^a_{1\dot{0}} \\ \sigma^a_{0\dot{1}} & \sigma^a_{0\dot{0}} \end{bmatrix}$ *ile gösterilmek üzere;*

$$\begin{aligned} \sigma^1_{A\dot{X}} &= -\sigma_1^{A\dot{X}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \sigma^2_{A\dot{X}} &= \sigma_2^{A\dot{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \\ \sigma^3_{A\dot{X}} &= -\sigma_3^{A\dot{X}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ \sigma^4_{A\dot{X}} &= -\sigma_4^{A\dot{X}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.4}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. $a = 1$ olsun.

$\sigma^1_{A\dot{X}} = \eta^{1b}\left(\sigma_b^{B\dot{Y}}\epsilon_{BA}\right)\bar{\epsilon}_{\dot{Y}\dot{X}}$ olup $b = 1$ için $\eta^{1b} = 1$, $b \neq 1$ için $\eta^{1b} = 0$ olduğundan,

$$\sigma^1_{A\dot{X}} = \eta^{11}\left(\sigma_1^{B\dot{Y}}\epsilon_{BA}\right)\bar{\epsilon}_{\dot{Y}\dot{X}} = \sigma_1^{B\dot{Y}}\epsilon_{BA}\bar{\epsilon}_{\dot{Y}\dot{X}}$$

olur. $[\epsilon_{BA}] = \left[\bar{\epsilon}_{\dot{Y}\dot{X}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{10} \\ \epsilon_{01} & \epsilon_{00} \end{bmatrix}$ olduğu göz önüne alınıp, $A = 1$ durumunda B üzerinden toplam açılırsa;

$$\begin{aligned} \sigma^1_{1\dot{X}} &= \sigma_1^{B\dot{Y}}\epsilon_{B1}\bar{\epsilon}_{\dot{Y}\dot{X}} \\ &= \sigma_1^{1\dot{Y}}\epsilon_{11}\bar{\epsilon}_{\dot{Y}\dot{X}} + \sigma_1^{0\dot{Y}}\epsilon_{01}\bar{\epsilon}_{\dot{Y}\dot{X}} \end{aligned}$$

$$\sigma^1_{1\dot{X}} = \sigma_1^{0\dot{Y}}\bar{\epsilon}_{\dot{Y}\dot{X}}$$

olup şimdi de $\dot{Y}$ üzerinde toplam açılırsa;

$$\sigma^1_{1\dot{X}} = \sigma_1^{0\dot{1}}\bar{\epsilon}_{\dot{1}\dot{X}} + \sigma_1^{0\dot{0}}\bar{\epsilon}_{\dot{0}\dot{X}}$$

olur. Buradan, $\dot{X} = \dot{1}$ için

$$\begin{aligned} \sigma^1_{1\dot{1}} &= \sigma_1^{0\dot{1}}\bar{\epsilon}_{\dot{1}\dot{1}} + \sigma_1^{0\dot{0}}\bar{\epsilon}_{0\dot{1}} = \sigma_1^{0\dot{0}} = 0 \\ &\Rightarrow \sigma^1_{1\dot{1}} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yine $\dot{X} = \dot{0}$ için

$$\begin{aligned}
\sigma^1_{1\dot{0}} &= \sigma^{0\dot{1}}_1 \bar{\epsilon}_{\dot{1}\dot{0}} + \sigma^{0\dot{0}}_1 \bar{\epsilon}_{\dot{0}\dot{0}} = -\sigma^{0\dot{1}}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\Rightarrow \sigma^1_{1\dot{0}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Benzer olarak $A = 0$ için $\sigma^1_{0\dot{1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\sigma^1_{0\dot{0}} = 0$ bulunur. Buradan,

$$\sigma^1_{A\dot{X}} = -\sigma^{A\dot{X}}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Diğer eşitlikler de benzer şekilde bulunabilir. ∎

Tanım 4.1 *$\sigma^{A\dot{X}}_a$ ve $\sigma^a_{A\dot{X}}$ ile gösterilen matrislere **Infeld-Van der Waerden sembolleri** adı verilir.*

Yardımcı Teorem 4.4 *Infeld-Van der Waerden sembolleri için,*

1) $\sigma^{A\dot{X}}_a = \eta_{ab}\bar{\epsilon}^{\dot{X}\dot{Y}}\left(\epsilon^{AB}\sigma^b_{B\dot{Y}}\right)$,

2) $\sigma^{A\dot{X}}_a \sigma^b_{A\dot{X}} = -\delta^a_b$,

3) $\sigma^{A\dot{X}}_a \sigma^a_{B\dot{Y}} = -\delta^A_B \delta^{\dot{X}}_{\dot{Y}}$,

4) $\sigma^{A\dot{X}}_a \sigma^a_{B\dot{Y}} \sigma^{B\dot{Y}}_b = -\ \sigma^{A\dot{X}}_b$

eşitlikleri geçerlidir.

Yardımcı Teorem 4.5 *$\sigma^{A\dot{X}}_a$ matrisler için elde edilen (4.2) ve (4.3) eşitliklerine benzer olarak $\sigma^a_{A\dot{X}}$ matrisleri için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.*

a)

$$\Lambda^a{}_b G_A{}^B \bar{G}_{\dot{X}}{}^{\dot{Y}} \sigma^b_{B\dot{Y}} = \sigma^a_{A\dot{X}} \tag{4.5}$$

b)

$$G_A{}^B \bar{G}_{\dot{X}}{}^{\dot{Y}} \sigma^a_{B\dot{Y}} = \Lambda_\alpha{}^a \sigma^\alpha_{A\dot{X}} \tag{4.6}$$

c)

$$\mathcal{G}^A{}_B \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}} \sigma^a_{A\dot{X}} = \Lambda^a{}_b \sigma^b_{B\dot{Y}} \tag{4.7}$$

Buraya kadar $v \in \mathcal{M}$ vektörü, $\{e_a\}$ uygun tabanı ve $\left\{s^A\right\}$ spin çatısı verildiğinde, $v = v^a e_a$ olmak üzere bileşenleri $V^{A\dot{X}} = \sigma_a^{A\dot{X}} v^a$ olarak tanımlı bir spinör inşaa edildi. şimdi ise $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ valansında bir hermityen spinör verildiğinde bu spinöre karşılık bir world-vektör inşaa edilecektir.

Teorem 4.3 $\left\{s^A\right\}$ *$\mathcal{B}$ nın bir spin çatısı, $\{e_a\}$ $\mathcal{M}$ nin bir uygun tabanı olsun. Bu durumda verilen her $V \in \mathcal{B}^{1\,1}_{0\,0}$ $\left(V = V^{A\dot{X}} s_A \otimes \bar{s}_{\dot{X}}\right)$ hermityen spinorüne karşılık bir $v \in \mathcal{M}$ $(v = v^a e_a)$ world-vektörü vardır öyleki v nin $\{e_a\}$ uygun tabanına göre bileşenleri,*

$$v^a = -V^{A\dot{X}} \sigma^a_{A\dot{X}} \qquad a = 1,2,3,4 \tag{4.8}$$

olarak tanımlıdır.

İspat. Gözlemlenir ki eğer $V^{A\dot{X}}$ ler rastgele bir spinörün bileşenler olsaydı $-V^{A\dot{X}} \sigma^a_{A\dot{X}}$ sayıları genelde kompleks olabilirdi, dolayısıyla bir world-vektörün bileşenleri olamazlardı. Yani verilen V spinörü hermityen olmalıdır.

Yardımcı Teorem 4.6 [8] *Eğer V hermityen ise $-V^{A\dot{X}} \sigma^\alpha_{A\dot{X}}$ sayıları reeldir.*

Şimdi $\{\hat{e}_a\}$ $\mathcal{M}$ nin başka bir uygun tabanı ve olsun. $\wedge \in \mathcal{L}$ lorentz dönüşümü, $\{e_a\}$ ve$\{\hat{e}_a\}$ uygun tabanlarını birbirine bağlayan matris olsun. Bu durumda spinor dönüşümü örten olduğundan, $\wedge$ matrisine karşılık $spin(\pm\mathcal{G}) = \wedge_{\pm\mathcal{G}} = \wedge$ olacak şekilde bir $\mathcal{G} \in SL(2, \mathbb{C})$ matrisi vardır. $\left\{\hat{s}^A\right\}$, $\left\{s^A\right\}$ ya bu $\mathcal{G}$ (ya da -$\mathcal{G}$) matrisi ile ilişkili spin çatısı olsun. Bu durumda V spinörü $\left\{\hat{s}^A\right\}$ spin çatısına göre $V = \hat{V}^{A\dot{X}} \hat{s}_A \otimes \bar{\hat{s}}_{\dot{X}}$ olarak yazılmak üzere bileşenler arasında

$$\hat{V}^{A\dot{X}} = \mathcal{G}^A{}_B \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}} V^{B\dot{Y}}$$

dönüşüm kuralı olduğu biliniyor (burada -$\mathcal{G}$ matrisi de aynı bileşenleri verir). Şimdi, v nin $\{\hat{e}_a\}$ uygun tabanına göre bileşenleri,

$$\hat{v}^a = -\hat{V}^{A\dot{X}} \sigma^a_{A\dot{X}} \qquad a = 1,2,3,4$$

olarak tanımlansın. Bu durumda gösterilecektir ki farklı iki uygun tabana göre bileşenleri yukarıdaki gibi tanımlı v gerçekten bir world-vektörüdür. Yani $v \in \mathcal{M}$ dir. Bunun için v^a ve $\hat{v}^a$ lar arasındaki bilinen,

$$\hat{v}^a = \Lambda^a{}_b v^b$$

dönüşüm kuralı geçerli olmalıdır. gerçekten;

$$\begin{aligned}
\hat{v}^a &= -\mathcal{G}^A{}_B \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}} V^{B\dot{Y}} \sigma^a_{A\dot{X}} \\
&= -\left(\mathcal{G}^A{}_B \bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}B\dot{Y}}_{\dot{Y}} \sigma^a_{A\dot{X}}\right) V^{B\dot{Y}} \\
&= -\left(\Lambda^a{}_b \sigma^b_{B\dot{Y}}\right) V^{B\dot{Y}} \qquad (4.2) \text{ 'den} \\
&= \Lambda^a{}_b \left(-V^{B\dot{Y}} \sigma^b_{B\dot{Y}}\right) \\
&= \Lambda^a{}_b v^b
\end{aligned}$$

olur. Yani $v \in \mathcal{M}$ dir. Böylece teoremin kanıtı tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.4 $\{e_a\}$ *$\mathcal{M}$ nin bir uygun tabanı,* $\{e^a\}$ *onun dual tabanı ve* $\{s^A\}$ *$\mathcal{B}$ nın bir spin çatısı olsun. Verilen* $v^* \in \mathcal{M}^*$ $(v^* = v_a e^a)$ *world-kovektörüne karşılık bir* $V \in \mathcal{B}^{0\,0}_{1\,1}$ $\left(V = V_{A\dot{X}} s^A \otimes \bar{s}^{\dot{X}}\right)$ *hermityen spinorü vardır öyleki V nin* $\{s^A\}$ *spin çatısına göre bileşenleri,*

$$V_{A\dot{X}} = \sigma^a_{A\dot{X}} v_a, \qquad A = 1, 0 \ \dot{X} = \dot{1}, \dot{0}$$

olarak tanımlıdır.

İspat. Şimdi $\{\hat{s}^A\}$ başka bir spin çatısı olsun. Bu durumda, iki spin çatısı arasında bilinen

$$s^B = G_A{}^B \hat{s}^A, \ \hat{s}^A = \mathcal{G}^A{}_B s^B$$

eşitliklerini sağlayan $\mathcal{G}$ ve $G \in SL(2,\mathbb{C})$ matrisleri $\left([\mathcal{G}^A{}_B] = \left([G_A{}^B]^{-1}\right)^T\right)$ düşünülürse; $\mathcal{G}$ matrisi için, $spin : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}$ dönüşümü göz önüne alındığında, $spin(\mathcal{G}) = \wedge_{\mathcal{G}} = \wedge$ olacak şekilde bir $\wedge \in \mathcal{L}$ lorentz dönüşümü vardır. $\{\hat{e}^a\}$, $\{e^a\}$ dual tabanına bu

$\wedge \in \mathcal{L}$ lorentz dönüşümü ile bağlanan dual taban olmak üzere, verilen $v^* \in \mathcal{M}^*$ vektörü, $v^* = \hat{v}_a \hat{e}^a$ olarak ifade edilebilir ve iki dual tabana göre bileşenler arasında,

$$\hat{v}_a = \Lambda_a{}^b v_b, \quad a = 1, 2, 3, 4$$

eşitliğinin geçerli olduğu bilinyor. V nin $\left\{\hat{s}^A\right\}$ spin çatısına göre bileşenleri $\hat{V}_{A\dot{X}}$ ler ile gösterilmek üzere,

$$\hat{V}_{A\dot{X}} = \sigma^a_{A\dot{X}} \hat{v}_a, \qquad A = 1, 0 \ \dot{X} = \dot{1}, \dot{0}$$

olarak tanımlansın. Farklı iki spin çatısına göre bileşenleri $V_{A\dot{X}}$ ve $\hat{V}_{A\dot{X}}$ olan ve yukarıdaki gibi tanımlanan V, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ valansında bir hermityen spinördür, Yani $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ valansında bir spinör için bileşenler arasındaki

$$\hat{V}_{A\dot{X}} = G_A{}^B \bar{G}_{\dot{X}}{}^{\dot{Y}} V_{B\dot{Y}} \qquad A = 1, 0 \ \dot{X} = \dot{1}, \dot{0}$$

dönüşüm kuralı sağlar. Gerçekten;

$$\begin{aligned} G_A{}^B \bar{G}_{\dot{X}}{}^{\dot{Y}} V_{B\dot{Y}} &= G_A{}^B \bar{G}_{\dot{X}}{}^{\dot{Y}} \sigma^b_{B\dot{Y}} v_b \\ &= \Lambda_a{}^b \sigma^a_{A\dot{X}} v_b \quad (4.6) \text{ 'dan} \\ &= \sigma^a_{A\dot{X}} \left(\Lambda_a{}^b v_b\right) \\ &= \sigma^a_{A\dot{X}} \hat{v}_a \\ &= \hat{V}_{A\dot{X}} \end{aligned}$$

olup istenen sağlanır. Yani verilen $v^* \in \mathcal{M}^*$ world-kovektörü yardımıyla tanımalanan V, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ valansında bir spinördür. $\sigma_a^{A\dot{X}}$ matrisi hermityen ve v_a sayıları reel oluğundan, $\bar{V}_{A\dot{X}} = \overline{V_{\dot{A}X}} = \sigma^a_{\dot{A}X} v_a = \overline{\sigma^a_{\dot{A}X}}\, \overline{v_a} = \sigma^a_{A\dot{X}} v_a = V_{A\dot{X}}$ olup V, hermityendir. ■

Yardımcı Teorem 4.7 *$G \in SL(2, \mathbb{C})$ matrisi ve $\Lambda \in \mathcal{L}$ lorentz dönüşümü için,*

$$G_A{}^B \bar{G}_{\dot{X}}{}^{\dot{Y}} \sigma_a^{A\dot{X}} = \Lambda_a{}^b \sigma_b^{B\dot{Y}} \tag{4.9}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. ${G_A}^B {\bar{G}_{\dot{X}}}^{\dot{Y}} \sigma^a_{B\dot{Y}} = {\Lambda_\alpha}^a \sigma^\alpha_{A\dot{X}}$ eşitliği düşünülürse; eşitliğin iki yanı $\sigma_b^{B\dot{Y}}$ ve $\sigma_\alpha^{A\dot{X}}$ ile çarpılırsa,

$$ {G_A}^B {\bar{G}_{\dot{X}}}^{\dot{Y}} \sigma_b^{B\dot{Y}} \sigma^a_{B\dot{Y}} \sigma_\alpha^{A\dot{X}} = {\Lambda_\alpha}^a \sigma_b^{B\dot{Y}} \sigma^\alpha_{A\dot{X}} \sigma_\alpha^{A\dot{X}} $$

$\sigma_\alpha^{A\dot{X}}$ ve $\sigma^\alpha_{A\dot{X}}$ matrisleri ile ilgili eşitliklerden,

$$ \begin{aligned} {G_A}^B {\bar{G}_{\dot{X}}}^{\dot{Y}} \delta^a_b \sigma_\alpha^{A\dot{X}} &= {\Lambda_\alpha}^a \sigma_b^{B\dot{Y}} \delta^\alpha_\alpha \\ {G_A}^B {\bar{G}_{\dot{X}}}^{\dot{Y}} \sigma_\alpha^{A\dot{X}} &= {\Lambda_\alpha}^b \sigma_b^{B\dot{Y}} \end{aligned} $$

olup indisler düzenlenirse;

$$ {G_A}^B {\bar{G}_{\dot{X}}}^{\dot{Y}} \sigma_a^{A\dot{X}} = {\Lambda_a}^b \sigma_b^{B\dot{Y}} $$

elde edilir. ■

Şimdi ise verilen $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ valansında bir hermityen spinöre karşılık bir world-kovektör karşılık getiren bir teorem verilecektir.

Teorem 4.5 *$\left\{s^A\right\}$ $\mathcal{B}$ nın bir spin çatısı, $\{e_a\}$ $\mathcal{M}$ nin bir uygun tabanı, $\{e^a\}$ onun dual tabanı olsun. Bu durumda verilen her $V \in \mathcal{B}^{0\,0}_{1\,1}$ $\left(V = V_{A\dot{X}} s^A \otimes \bar{s}^{\dot{X}}\right)$ hermityen spinorüne karşılık bir $v^* \in \mathcal{M}^*$ $(v^* = v_a e^a)$ world-kovektörü vardır öyleki v^* nin $\{e^a\}$ dual tabanına göre bileşenleri,*

$$ v^a = -V_{A\dot{X}} \sigma_a^{A\dot{X}} \qquad a = 1, 2, 3, 4 $$

olarak tanımlıdır.

İspat. $\{\hat{e}^a\}$ $\mathcal{M}^*$ nin başka bir dual tabanı ve olsun. $\wedge \in \mathcal{L}$ lorentz dönüşümü, $\{e^a\}$ ve$\{\hat{e}^a\}$ uygun tabanlarını birbirine bağlayan matris olsun. Bu durumda spinor dönüşümü örten olduğundan, $\wedge$ matrisine karşılık $spin(\pm G) = \wedge_{\pm G} = \wedge$ olacak şekilde bir $G \in SL(2, \mathbb{C})$ matrisi vardır. $\left\{\hat{s}^A\right\}$, $\left\{s^A\right\}$ ya bu G (ya da -G) matrisi ile ilişkili spin çatısı olsun. Bu durumda V spinörü $\left\{\hat{s}^A\right\}$ spin çatısına göre $V = \hat{V}_{A\dot{X}} \hat{s}^A \otimes \bar{\hat{s}}^{\dot{X}}$ olarak yazılmak üzere bileşenler arasında

$$ \hat{V}_{A\dot{X}} = {G_A}^B {\bar{G}_{\dot{X}}}^{\dot{Y}} V_{B\dot{Y}} \qquad A = 1, 0 \ \dot{X} = \dot{1}, \dot{0} $$

dönüşüm kuralı olduğu biliniyor (burada -G matrisi de aynı bileşenleri verir). Şimdi, v^* nin $\{\hat{e}^*\}$ dual tabanına göre bileşenleri,

$$\hat{v}_a = -\hat{V}_{A\dot{X}}\sigma_a^{A\dot{X}} \qquad a = 1, 2, 3, 4$$

olarak tanımlansın. Bu durumda gösterilecektir ki farklı iki dual tabana göre bileşenleri yukarıdaki gibi tanımlı v^* gerçekten bir world-kovektörüdür. Yani $v^* \in \mathcal{M}^*$ dır. Bunun için v_a ve $\hat{v}_a$ lar arasındaki bilinen,

$$\hat{v}_a = \Lambda_a{}^b v_b$$

dönüşüm kuralı geçerli olmalıdır. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
\hat{v}_a &= -\hat{V}_{A\dot{X}}\sigma_a^{A\dot{X}} \\
&= -\left(G_A{}^B \bar{G}_{\dot{X}}{}^{\dot{Y}} V_{B\dot{Y}}\right)\sigma_a^{A\dot{X}} \\
&= -\left(G_A{}^B \bar{G}_{\dot{X}}{}^{\dot{Y}} \sigma_a^{A\dot{X}}\right) V_{B\dot{Y}} \\
&= -\left(\Lambda_a{}^b \sigma_b^{B\dot{Y}}\right) V_{B\dot{Y}} \qquad \text{(4.9) 'dan} \\
&= \Lambda_a{}^b\left(-V_{B\dot{Y}}\sigma_b^{B\dot{Y}}\right) \\
&= \Lambda_a{}^b v_b
\end{aligned}$$

olur. Tanımlanan v^* bir world-kovektördür. ■

4.2 Spinörler ve World-Tensörler Arasındaki İlişki

Teorem 4.6 $\{e_a\}$, *$\mathcal{M}$ nin bir uygun tabanı ve* $\left\{s^A\right\}$, *$\mathcal{B}$ nın bir spin çatısı olsun. Verilen her $T \in \mathcal{T}^r_s$ world-tensörüne kaşılık bir $S \in \mathcal{B}^{r}_{s}{}^{r}_{s}$ hermityen spinorü vardır öyleki T , $\{e_a\}$ uygun tabanı göre*

$$T = T^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s} e_{a_1} \otimes ... \otimes e_{a_r} \otimes e^{b_1} \otimes ... \otimes e^{b_s}$$

olarak yazılmak üzere, S nin $\{s^A\}$ spin çatısına göre bileşenleri,

$$S^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s} = \sigma_{a_1}^{A_1\dot{X}_1}...\sigma_{a_r}^{A_r\dot{X}_r}\sigma^{b_1}_{B_1\dot{Y}_1}...\sigma^{b_s}_{B_s\dot{Y}_s} T^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s}$$

oarak tanımlıdır.

İspat. Tanımlanan S, $\begin{pmatrix} r & r \\ s & s \end{pmatrix}$ valansında bir spinördür. Bunun için S nin, $\begin{pmatrix} r & r \\ s & s \end{pmatrix}$ valansında bir spinörün farklı iki tabana göre bileşenleri arasındaki dönüşüm kuralını sağlaması gerekir.

$\{\hat{s}^A\}$ başka bir spin çatısı ve bu iki spin çatısı arasında bilinen

$$s^B = G_A{}^B \hat{s}^A, \; \hat{s}^A = \mathcal{G}^A{}_B s^B$$

eşitliklerini sağlayan $\mathcal{G}$ ve $G \in SL(2,\mathbb{C})$ matrisleri $\left(\left[\mathcal{G}^A{}_B\right] = \left(\left[G_A{}^B\right]^{-1} \right)^T \right)$ düşünülürse; $\mathcal{G}$ matrisi için, $spin : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}$ dönüşümü göz önüne alındığında, $spin(\mathcal{G}) = \wedge_{\mathcal{G}} = \wedge$ olacak şekilde bir $\wedge \in \mathcal{L}$ lorentz dönüşümü vardır. $\{\hat{e}_a\}$, $\{e_a\}$ uygun tabanına bu $\wedge \in \mathcal{L}$ lorentz dönüşümü ile bağlanan uygun taban olsun. Bu durumda S nin $\{\hat{s}^A\}$ spin çatsına göre bileşenleri,

$$\hat{S}^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s} = \sigma^{A_1\dot{X}_1}_{a_1}...\sigma^{A_r\dot{X}_r}_{a_r}\sigma^{b_1}_{B_1\dot{Y}_1}...\sigma^{b_s}_{B_s\dot{Y}_s}\hat{T}^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s}$$

olarak tanımlanmak üzere; Bu iki spin çatısına göre S nin bileşenleri arasında,

$$\hat{S}^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s} = \mathcal{G}^{A_1}{}_{C_1}...\mathcal{G}^{A_r}{}_{C_r}\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_1}{}_{\dot{U}_1}...\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_r}{}_{\dot{U}_r}G_{B_1}{}^{D_1}...G_{B_s}{}^{D_s}\bar{G}_{\dot{Y}_1}{}^{\dot{V}_1}...\bar{G}_{\dot{Y}_s}{}^{\dot{V}_s}S^{C_1...C_r\dot{U}_1...\dot{U}_r}{}_{D_1...D_s\dot{V}_1...\dot{V}_s}$$

dönüşüm kuralı sağlanmalıdır.

Eşitliğin sağ tarafına $S^{C_1...C_r\dot{U}_1...\dot{U}_r}{}_{D_1...D_s\dot{V}_1...\dot{V}_s}$ yerine tanımlanan eşiti yerine koyulur ve (4.6) ve (4.3) kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& \mathcal{G}^{A_1}{}_{C_1}...\mathcal{G}^{A_r}{}_{C_r}\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_1}{}_{\dot{U}_1}...\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_r}{}_{\dot{U}_r}G_{B_1}{}^{D_1}...G_{B_s}{}^{D_s}\bar{G}_{\dot{Y}_1}{}^{\dot{V}_1}...\bar{G}_{\dot{Y}_s}{}^{\dot{V}_s}S^{C_1...C_r\dot{U}_1...\dot{U}_r}{}_{D_1...D_s\dot{V}_1...\dot{V}_s} \\
= \; & \mathcal{G}^{A_1}{}_{C_1}...\mathcal{G}^{A_r}{}_{C_r}\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_1}{}_{\dot{U}_1}...\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_r}{}_{\dot{U}_r}G_{B_1}{}^{D_1}...G_{B_s}{}^{D_s}\bar{G}_{\dot{Y}_1}{}^{\dot{V}_1}...\bar{G}_{\dot{Y}_s}{}^{\dot{V}_s}\sigma^{C_1\dot{U}_1}_{\alpha_1}...\sigma^{C_r\dot{U}_r}_{\alpha_r}\sigma^{\beta_1}_{D_1\dot{V}_1}...\sigma^{\beta_s}_{D_s\dot{V}_s}T^{\alpha_1...\alpha_r}{}_{\beta_1...\beta_s} \\
= \; & \left(\mathcal{G}^{A_1}{}_{C_1}\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_1}{}_{\dot{U}_1}\sigma^{C_1\dot{U}_1}_{\alpha_1}\right)...\left(\mathcal{G}^{A_r}{}_{C_r}\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_r}{}_{\dot{U}_r}\sigma^{C_r\dot{U}_r}_{\alpha_r}\right)\left(G_{B_1}{}^{D_1}\bar{G}_{\dot{Y}_1}{}^{\dot{V}_1}\sigma^{\beta_1}_{D_1\dot{V}_1}\right)...\left(G_{B_s}{}^{D_s}\bar{G}_{\dot{Y}_s}{}^{\dot{V}_s}\sigma^{\beta_s}_{D_s\dot{V}_s}\right)T^{\alpha_1...\alpha_r}{}_{\beta_1...\beta_s} \\
= \; & \left(\Lambda^{a_1}{}_{\alpha_1}\sigma^{A_1\dot{X}_1}_{a_1}\right)...\left(\Lambda^{a_r}{}_{\alpha_r}\sigma^{A_r\dot{X}_r}_{a_r}\right)\left(\Lambda_{b_1}{}^{\beta_1}\sigma^{b_1}_{B_1\dot{Y}_1}\right)...\left(\Lambda_{b_s}{}^{\beta_s}\sigma^{b_s}_{B_s\dot{Y}_s}\right)T^{\alpha_1...\alpha_r}{}_{\beta_1...\beta_s} \\
= \; & \left(\sigma^{A_1\dot{X}_1}_{a_1}...\sigma^{A_r\dot{X}_r}_{a_r}\sigma^{b_1}_{B_1\dot{Y}_1}...\sigma^{b_s}_{B_s\dot{Y}_s}\right)\left(\Lambda^{a_1}{}_{\alpha_1}...\Lambda^{a_r}{}_{\alpha_r}\Lambda_{b_1}{}^{\beta_1}...\Lambda_{b_s}{}^{\beta_s}T^{\alpha_1...\alpha_r}{}_{\beta_1...\beta_s}\right) \\
= \; & \sigma^{A_1\dot{X}_1}_{a_1}...\sigma^{A_r\dot{X}_r}_{a_r}\sigma^{b_1}_{B_1\dot{Y}_1}...\sigma^{b_s}_{B_s\dot{Y}_s}\hat{T}^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s} \\
= \; & \hat{S}^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s}
\end{aligned}$$

yani;

$$\hat{S}^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s} = \mathcal{G}^{A_1}{}_{C_1}...\mathcal{G}^{A_r}{}_{C_r}\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_1}{}_{\dot{U}_1}...\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_r}{}_{\dot{U}_r}G_{B_1}{}^{D_1}...G_{B_s}{}^{D_s}\bar{G}_{\dot{Y}_1}{}^{\dot{V}_1}...\bar{G}_{\dot{Y}_s}{}^{\dot{V}_s}S^{C_1...C_r\dot{U}_1...\dot{U}_r}{}_{D_1...D_s\dot{V}_1...\dot{V}_s}$$

elde edilir. Tanımalanan S gerçekten $\begin{pmatrix} r & r \\ s & s \end{pmatrix}$ valansında bir spinördür. Ayrıca $\sigma_\alpha^{A\dot{X}}$ ve $\sigma^b_{B\dot{Y}}$ ler hermityen ve $T^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s}$ reel olduğundan,

$$\begin{aligned}
\bar{S}^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s} &= \overline{S^{\dot{A}_1...\dot{A}_rX_1...X_r}{}_{\dot{B}_1...\dot{B}_sY_1...Y_s}} \\
&= \overline{\sigma_{a_1}^{\dot{A}_1X_1}}...\overline{\sigma_{a_r}^{\dot{A}_rX_r}}\,\overline{\sigma^{b_1}_{\dot{B}_1Y_1}}...\overline{\sigma^{b_s}_{\dot{B}_sY_s}}\,\overline{T^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s}} \\
&= \sigma_{a_1}^{A_1\dot{X}_1}...\sigma_{a_r}^{A_r\dot{X}_r}\sigma^{b_1}_{B_1\dot{Y}_1}...\sigma^{b_s}_{B_s\dot{Y}_s}T^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s} \\
&= S^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s}
\end{aligned}$$

$$\bar{S}^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s} = S^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s}$$

elde edilir, yani S hermityen spinördür. Böylece kanıt tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.7 $\{s^A\}$ *$\mathcal{B}$ nın bir spin çatısı, $\{e_a\}$ $\mathcal{M}$ nin bir uygun tabanı olsun. Bu durumda verilen her $S \in \mathcal{B}^{r\ r}_{s\ s}$ hermityen spinorüne karşılık bir $T \in \mathcal{T}^r_s$ world-tensörü vardır öyleki S, $\{s^A\}$ spin çatısına göre*

$$S = S^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_s}{}_{B_1...B_m\dot{Y}_1...\dot{Y}_n}s_{A_1}\otimes...\otimes\bar{s}^{\dot{Y}_n}, \qquad A_i, B_j = 1,0, \ \dot{X}_k, \dot{Y}_l = \dot{1}, \dot{0}$$

$$\begin{aligned}
A_1...A_r, B_1...B_m &= 1,0 \\
\dot{X}_1...\dot{X}_s, \dot{Y}_1...\dot{Y}_n &= \dot{1}, \dot{0}
\end{aligned}$$

olarak yazılmak üzere, T nin $\{e_a\}$ uygun tabanına göre bileşenleri,

$$T^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s} = \sigma^{a_1}_{A_1\dot{X}_1}...\sigma^{a_r}_{A_r\dot{X}_r}\sigma_{b_1}^{B_1\dot{Y}_1}...\sigma_{b_s}^{B_s\dot{Y}_s}S^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s}$$

olarak tanımlıdır.

İspat. $\{\hat{e}_a\}$, $\mathcal{M}$ nin başka bir uygun tabanı ve $\wedge \in \mathcal{L}$ Lorentz dönüşümü, $\{e_a\}$ ve$\{\hat{e}_a\}$ uygun tabanlarını birbirine bağlayan matris olsun. Bu durumda spinor dönüşümü örten olduğundan, $\wedge$ matrisine karşılık $spin(\pm\mathcal{G}) = \wedge_{\pm\mathcal{G}} = \wedge$ olacak şekilde bir $\mathcal{G} \in SL(2,\mathbb{C})$ matrisi vardır. $\{\hat{s}^A\}$, $\{s^A\}$ ya bu $\mathcal{G}$ (ya da -$\mathcal{G}$) matrisi ile ilişkili spin çatısı olsun. Bu durumda verilen S spinörünün $\{\hat{s}^A\}$ spin çatısına göre bileşenleri $\hat{S}^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_s}{}_{B_1...B_m\dot{Y}_1...\dot{Y}_n}$ ile gösterilmek üzere; T nin $\{\hat{e}_a\}$ uygun tabanına göre bileşenleri,

$$\hat{T}^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s} = \sigma^{a_1}_{A_1\dot{X}_1}...\sigma^{a_r}_{A_r\dot{X}_r}\sigma^{B_1\dot{Y}_1}_{b_1}...\sigma^{B_s\dot{Y}_s}_{b_s}\hat{S}^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s}$$

olarak tanımlansın. Şimdi, farklı iki uygun tabana göre bileşenleri bu şekilde tanımlı T nin gerçekten bir (r,s) tipinde bir tensör olduğu gösterilecektir. Bunun için bileşenler arasında (r,s) tipinde bir tensörün bileşenleri arasındaki dönüşüm kuralı olan

$$\hat{T}^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s} = \Lambda^{a_1}{}_{\alpha_1}...\Lambda^{a_r}{}_{\alpha_r}\Lambda_{b_1}{}^{\beta_1}...\Lambda_{b_s}{}^{\beta_s}T^{\alpha_1...\alpha_r}{}_{\beta_1...\beta_s}$$

eşitliği sağlandığı gösterilmesi yeterlidir. Öncelikle $\sigma^{A\dot{X}}_{\alpha}$ ve $\sigma^{b}_{B\dot{Y}}$ ler ve S hermityen olduğundan,

$$\begin{aligned}
\overline{T^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s}} &= \overline{\sigma^{a_1}_{A_1\dot{X}_1}}...\overline{\sigma^{a_r}_{A_r\dot{X}_r}}\,\overline{\sigma^{B_1\dot{Y}_1}_{b_1}}...\overline{\sigma^{B_s\dot{Y}_s}_{b_s}S^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s}} \\
&= \sigma^{a_1}_{A_1\dot{X}_1}...\sigma^{a_r}_{A_r\dot{X}_r}\sigma^{B_1\dot{Y}_1}_{b_1}...\sigma^{B_s\dot{Y}_s}_{b_s}S^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s} \\
&= T^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s}
\end{aligned}$$

olup, tanımalanan $T^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s}$ sayıları reeldir.

$$\hat{T}^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s} = \sigma^{a_1}_{A_1\dot{X}_1}...\sigma^{a_r}_{A_r\dot{X}_r}\sigma^{B_1\dot{Y}_1}_{b_1}...\sigma^{B_s\dot{Y}_s}_{b_s}\hat{S}^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s}$$

eşitlinde $\hat{S}^{A_1...A_r\dot{X}_1...\dot{X}_r}{}_{B_1...B_s\dot{Y}_1...\dot{Y}_s}$ yerine spinör dönüşüm kuralından eşiti yerine koyulursa;

(4.7) ve (4.9) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\hat{T}^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s} &= \sigma^{a_1}_{A_1\dot{X}_1}...\sigma^{a_r}_{A_r\dot{X}_r}\sigma^{B_1\dot{Y}_1}_{b_1}...\sigma^{B_s\dot{Y}_s}_{b_s}\mathcal{G}^{A_1}_{C_1}...\mathcal{G}^{A_r}_{C_r}\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_1}_{\dot{U}_1}...\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_r}_{\dot{U}_r}G_{B_1}{}^{D_1}...G_{B_s}{}^{D_s}\bar{G}_{\dot{Y}_1}{}^{\dot{V}_1}...\bar{G}_{\dot{Y}_s}{}^{\dot{V}_s} \\
&\quad S^{C_1...C_r\dot{U}_1...\dot{U}_r}{}_{D_1...D_s\dot{V}_1...\dot{V}_s} \\
&= \left(\mathcal{G}^{A_1}_{C_1}\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_1}_{\dot{U}_1}\sigma^{a_1}_{A_1\dot{X}_1}\right)...\left(\mathcal{G}^{A_r}_{C_r}\bar{\mathcal{G}}^{\dot{X}_r}_{\dot{U}_r}\sigma^{a_r}_{A_r\dot{X}_r}\right)\left(G_{B_1}{}^{D_1}\bar{G}_{\dot{Y}_1}{}^{\dot{V}_1}\sigma^{B_1\dot{Y}_1}_{b_1}\right)...\left(G_{B_s}{}^{D_s}\bar{G}_{\dot{Y}_s}{}^{\dot{V}_s}\sigma^{B_s\dot{Y}_s}_{b_s}\right) \\
&\quad S^{C_1...C_r\dot{U}_1...\dot{U}_r}{}_{D_1...D_s\dot{V}_1...\dot{V}_s} \\
&= \left(\Lambda^{a_1}{}_{\alpha_1}\sigma^{\alpha_1}_{C_1\dot{U}_1}\right)...\left(\Lambda^{a_r}{}_{\alpha_r}\sigma^{\alpha_r}_{C_r\dot{U}_r}\right)\left(\Lambda_{b_1}{}^{\beta_1}\sigma^{D_1\dot{V}_1}_{\beta_1}\right)...\left(\Lambda_{b_s}{}^{\beta_s}\sigma^{D_s\dot{V}_s}_{\beta_s}\right)S^{C_1...C_r\dot{U}_1...\dot{U}_r}{}_{D_1...D_s\dot{V}_1...\dot{V}_s} \\
&= \Lambda^{a_1}{}_{\alpha_1}...\Lambda^{a_r}{}_{\alpha_r}\Lambda_{b_1}{}^{\beta_1}...\Lambda_{b_s}{}^{\beta_s}\left(\sigma^{\alpha_1}_{C_1\dot{U}_1}...\sigma^{\alpha_r}_{C_r\dot{U}_r}\sigma^{D_1\dot{V}_1}_{\beta_1}...\sigma^{D_s\dot{V}_s}_{\beta_s}S^{C_1...C_r\dot{U}_1...\dot{U}_r}{}_{D_1...D_s\dot{V}_1...\dot{V}_s}\right) \\
&= \Lambda^{a_1}{}_{\alpha_1}...\Lambda^{a_r}{}_{\alpha_r}\Lambda_{b_1}{}^{\beta_1}...\Lambda_{b_s}{}^{\beta_s}T^{\alpha_1...\alpha_r}{}_{\beta_1...\beta_s}
\end{aligned}
$$

olup,

$$\hat{T}^{a_1...a_r}{}_{b_1...b_s} = \Lambda^{a_1}{}_{\alpha_1}...\Lambda^{a_r}{}_{\alpha_r}\Lambda_{b_1}{}^{\beta_1}...\Lambda_{b_s}{}^{\beta_s}T^{\alpha_1...\alpha_r}{}_{\beta_1...\beta_s}$$

elde edilir. Yani T (r, s) tipinde bir word-tensördür. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

■

Örnek 4.1 *$H : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ bir bilineer form olsun. $\{e_a\}$, $\mathcal{M}$ nin uygun bir tabanı ve $\{s^A\}$, $\mathcal{B}$ nin bir spin çatısı olsun. Bu durumda verilen H bilineer formuna karşılık bir $S \in \mathcal{B}^{00}_{22}$ hermityen spinörü vardır öyle ki H, $\{e_a\}$ uygun tabanına göre*

$$H = H_{ab}e^a \otimes e^b$$

olarak yazılmak üzere, S nin $\{s^A\}$ ya göre bileşenleri

$$S_{AB\dot{X}\dot{Y}} = \sigma^{\alpha}_{A\dot{X}}\sigma^{b}_{B\dot{Y}}H_{ab}$$

olarak tanımlıdır. $\{\hat{s}^A\}$ başka bir spin çatısı ve $\{\hat{e}_a\}$ ve $\Lambda \in \mathcal{L}$ Teorem (4.5) in koşullarını sağlayan uygun taban ve Lorentz dönüşümleri olmak üzere H nın farklı iki tabana göre bileşenleri arasında

$$\hat{H}_{ab} = \Lambda_a{}^{\alpha}\Lambda_b{}^{\beta}H_{\alpha\beta}$$

olduğu biliniyor. Bu durumda S nin $\{\hat{s}^A\}$ *spin çatısına göre bileşenleri*

$$\hat{S}_{AB\dot{X}\dot{Y}} = \sigma^a_{A\dot{X}}\sigma^b_{B\dot{Y}}\hat{H}_{ab}$$

olarak tanımlıdır ve iki spin çatısına görebileşenler arasında

$$\hat{S}_{AB\dot{X}\dot{Y}} = G_A{}^{A_1}G_B{}^{B_1}\bar{G}_{\dot{X}}{}^{\hat{X}_1}\bar{G}_{\hat{Y}}{}^{\hat{Y}_1}S_{A_1B_1\dot{X}_1\dot{Y}_1}$$

dönüşüm kuralı sağlanmalıdır.

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{AB\dot{X}\dot{Y}} &= \sigma^\alpha_{A\dot{X}}\sigma^b_{B\dot{Y}}\hat{H}_{ab} \\
&= \sigma^\alpha_{A\dot{X}}\sigma^b_{B\dot{Y}}\Lambda_a{}^\alpha\Lambda_b{}^\beta H_{\alpha\beta} \\
&= \left(\Lambda_a{}^\alpha\sigma^\alpha_{A\dot{X}}\right)\left(\Lambda_b{}^\beta\sigma^b_{B\dot{Y}}\right) \qquad (4.6)\ \text{'}dan \\
&= \left(G_A{}^{A_1}\bar{G}_{\dot{X}}{}^{\dot{X}_1}\sigma^\alpha_{A_1\dot{X}_1}\right)\left(G_B{}^{B_1}\bar{G}_{\dot{Y}}{}^{\dot{Y}_1}\sigma^\beta_{B_1\dot{Y}_1}\right)H_{\alpha\beta} \\
&= \left(G_A{}^{A_1}G_B{}^{B_1}\bar{G}_{\dot{X}}{}^{\dot{X}_1}\bar{G}_{\dot{Y}}{}^{\dot{Y}_1}\right)\left(\sigma^\alpha_{A_1\dot{X}_1}\sigma^\beta_{B_1\dot{Y}_1}H_{\alpha\beta}\right) \\
&= G_A{}^{A_1}G_B{}^{B_1}\bar{G}_{\dot{X}}{}^{\dot{X}_1}\bar{G}_{\dot{Y}}{}^{\dot{Y}_1}S_{A_1B_1\dot{X}_1\dot{Y}_1}
\end{aligned}$$

olur ki bu isteneni verir. Yani S gerçekten bir $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ *valansında bir spinördür.*

Örnek 4.2 *g, Lorentz iç çarpımı olsun. Bu durumda g nin spinör denginin bir tabana göre bileşenleri* $g_{AB\dot{X}\dot{Y}}$ *ile gösterilmek üzere*

$$g_{AB\dot{X}\dot{Y}} = \sigma^\alpha_{A\dot{X}}\sigma^b_{B\dot{Y}}\eta_{ab}$$

olarak tanımlıdır. Toplam açılırsa $a \neq b$ *iken* $\eta_{ab} = 0$ *olduğundan*

$$g_{AB\dot{X}\dot{Y}} = \sigma^1_{A\dot{X}}\sigma^1_{B\dot{Y}} + \sigma^2_{A\dot{X}}\sigma^2_{B\dot{Y}} + \sigma^3_{A\dot{X}}\sigma^3_{B\dot{Y}} - \sigma^4_{A\dot{X}}\sigma^4_{B\dot{Y}}$$

halini alır.

Yardımcı Teorem 4.8 [8] *g nin spinör dengininbileşenleri* $\sigma^\alpha_{A\dot{X}}$ *ve* ϵ *matrisleri göz önüne alınarak daha sade bir şekilde*

$$g_{AB\dot{X}\dot{Y}} = -\epsilon_{AB}\bar{\epsilon}_{\dot{X}\dot{Y}}$$

olarak yazılabilir.

Örnek 4.3 *F ters-simetrik bir bilineer form olsun. F nin iki spin çatısına göre $A, B = 1, 0$ bileşenleri ve $\dot{X}, \dot{Y} = \dot{1}, \dot{0}$ olmak üzere*

$$F_{AB\dot{X}\dot{Y}} = \sigma^{a}_{A\dot{X}}\sigma^{b}_{B\dot{Y}}F_{ab}$$

ve

$$\hat{F}_{AB\dot{X}\dot{Y}} = \sigma^{a}_{A\dot{X}}\sigma^{b}_{B\dot{Y}}\hat{F}_{ab}$$

olarak tanımlıdır. Burada

$$F_{AB\dot{X}\dot{Y}} = -F_{BA\dot{X}\dot{Y}} \tag{4.10}$$

özelliği geçerlidir. Gerçekten, F ters-simetrik olduğundan

$$\begin{aligned} F_{BA\dot{X}\dot{Y}} &= \sigma^{a}_{A\dot{X}}\sigma^{b}_{B\dot{Y}}F_{ab} = \sigma^{a}_{B\dot{Y}}\sigma^{b}_{A\dot{X}}\left(-F_{ba}\right) \\ &= -\sigma^{b}_{A\dot{X}}\sigma^{a}_{B\dot{Y}}F_{ba} = -\sigma^{a}_{A\dot{X}}\sigma^{b}_{B\dot{Y}}F_{ab} \\ &= -F_{AB\dot{X}\dot{Y}} \end{aligned}$$

olur. F ters simetrik olduğundan

$$F_{ab} = \frac{1}{2}\left(F_{ab} - F_{ba}\right)$$

yazılabilir. Bileşenlerin spinör dengi yerine yazılıp

$$\begin{aligned} F_{AB\dot{X}\dot{Y}} &= \frac{1}{2}\left[F_{AB\dot{X}\dot{Y}} - F_{BA\dot{X}\dot{Y}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[F_{AB\dot{X}\dot{Y}} - F_{BA\dot{X}\dot{Y}} + F_{BA\dot{X}\dot{Y}} - F_{BA\dot{Y}\dot{X}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[F_{AB\dot{X}\dot{Y}} - F_{BA\dot{X}\dot{Y}}\right] + \frac{1}{2}\left[F_{BA\dot{X}\dot{Y}} - F_{BA\dot{Y}\dot{X}}\right] \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\epsilon_{AB}\epsilon^{CD} = \delta^{C}_{A}\delta^{D}_{B} - \delta^{D}_{A}\delta^{C}_{B}, \quad A, B, C, D = 1, 0$$

eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \epsilon_{AB}\epsilon^{CD}F_{CD\dot{X}\dot{Y}} &= \left(\delta^{C}_{A}\delta^{D}_{B} - \delta^{D}_{A}\delta^{C}_{B}\right)F_{CD\dot{X}\dot{Y}} \\ &= \delta^{C}_{A}\delta^{D}_{B}F_{CD\dot{X}\dot{Y}} - \delta^{D}_{A}\delta^{C}_{B}F_{CD\dot{X}\dot{Y}} \\ &= F_{AB\dot{X}\dot{Y}} - F_{BA\dot{X}\dot{Y}} \end{aligned}$$

benzer olarak

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon}_{\dot{X}\dot{Y}}\bar{\epsilon}^{\dot{U}\dot{V}}F_{BA\dot{U}\dot{V}} &= \left(\delta^{\dot{U}}_{\dot{X}}\delta^{\dot{V}}_{\dot{Y}} - \delta^{\dot{V}}_{\dot{X}}\delta^{\dot{U}}_{\dot{Y}}\right)F_{BA\dot{U}\dot{V}} \\
&= \delta^{\dot{U}}_{\dot{X}}\delta^{\dot{V}}_{\dot{Y}}F_{BA\dot{U}\dot{V}} - \delta^{\dot{V}}_{\dot{X}}\delta^{\dot{U}}_{\dot{Y}}F_{BA\dot{U}\dot{V}} \\
&= F_{BA\dot{X}\dot{Y}} - F_{BA\dot{Y}\dot{X}}
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
F_{AB\dot{X}\dot{Y}} &= \frac{1}{2}\left[F_{AB\dot{X}\dot{Y}} - F_{BA\dot{X}\dot{Y}}\right] + \frac{1}{2}\left[F_{BA\dot{X}\dot{Y}} - F_{BA\dot{Y}\dot{X}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\epsilon_{AB}\epsilon^{CD}F_{CD\dot{X}\dot{Y}}\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{\epsilon}_{\dot{X}\dot{Y}}\bar{\epsilon}^{\dot{U}\dot{V}}F_{BA\dot{U}\dot{V}}\right) \\
&= \epsilon_{AB}\left(\frac{1}{2}\epsilon^{CD}F_{CD\dot{X}\dot{Y}}\right) + \bar{\epsilon}_{\dot{X}\dot{Y}}\left(\frac{1}{2}\bar{\epsilon}^{\dot{U}\dot{V}}F_{BA\dot{U}\dot{V}}\right) \\
&= \epsilon_{AB}\left(\frac{1}{2}F_{C}{}^{C}{}_{\dot{X}\dot{Y}}\right) + \bar{\epsilon}_{\dot{X}\dot{Y}}\left(F_{BA\dot{U}}{}^{\dot{U}}\right)
\end{aligned}$$

yani

$$F_{AB\dot{X}\dot{Y}} = \epsilon_{AB}\left(\frac{1}{2}F_{C}{}^{C}{}_{\dot{X}\dot{Y}}\right) + \bar{\epsilon}_{\dot{X}\dot{Y}}\left(F_{BA\dot{U}}{}^{\dot{U}}\right)$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse,

$$F_{AB\dot{X}\dot{Y}} = \epsilon_{AB}\left(\frac{1}{2}F_{C\dot{X}}{}^{C}{}_{\dot{Y}}\right) + \bar{\epsilon}_{\dot{X}\dot{Y}}\left(\frac{1}{2}F_{\dot{U}B}{}^{\dot{U}}{}_{A}\right)$$

olur. Şimdi ϕ_{AB} *ve* $\bar{\phi}_{\dot{X}\dot{Y}}$

$$\phi_{AB} = \frac{1}{2}F_{\dot{U}A}{}^{\dot{U}}{}_{B}, \quad \bar{\phi}_{\dot{X}\dot{Y}} = \frac{1}{2}F_{C\dot{X}}{}^{C}{}_{\dot{Y}}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\phi_{AB} = \phi_{BA} \quad ve \quad \bar{\phi}_{\dot{X}\dot{Y}} = \bar{\phi}_{\dot{Y}\dot{X}}$$

olur. Gerçekten, (4.10) dan

$$
\begin{aligned}
\phi_{BA} &= \frac{1}{2}F_{\dot{U}A}{}^{\dot{U}}{}_{B} = -\frac{1}{2}F^{\dot{U}}{}_{A\dot{U}B} \\
&= -\frac{1}{2}\left[\bar{\epsilon}^{\dot{U}\dot{V}}F_{\dot{V}A}\dot{W}_{B}\bar{\epsilon}_{\dot{W}\dot{U}}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[F_{\dot{V}A}\dot{W}_{B}\left(\bar{\epsilon}^{\dot{U}\dot{V}}\bar{\epsilon}_{\dot{W}\dot{U}}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[F_{\dot{V}A}\dot{W}_{B}\left(-\bar{\epsilon}^{\dot{U}\dot{V}}\bar{\epsilon}_{\dot{U}\dot{W}}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[F_{\dot{V}A}\dot{W}_{B}\left(-\delta^{\dot{V}}_{\dot{W}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}F_{\dot{V}A}\dot{V}_{B} \\
&= \phi_{AB}
\end{aligned}
$$

olur. İkinci eşitlik benzer şekilde gösterilir. Bu durumda verilen her simetrik bilineer dönüşümün spinör denginin bileşenleri

$$F_{AB\dot{X}\dot{Y}} = \epsilon_{AB}\ \bar{\phi}_{\dot{X}\dot{Y}} + \phi_{BA}\bar{\epsilon}_{\dot{X}\dot{Y}}$$

olarak daha sade bir şekilde ifade edilebilir. Burada dikkat edilirse ϕ_{AB} $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *valansında simetrik bir spinördür. Eğer* F *elektromanyetik tensöre karşılık gelen skew-simetrik bilineer form ise* ϕ_{AB} *spinörüne* ***elektromanyetik spinör*** *ya da* ***Maxwell spinörü*** *adı verilir.* [8, 11]

5 SONUÇ

Her bir tensöre, hermityen bir spinör karşılık gelmesinden dolayı, tensörlerle ifade edilen bir denklemin spinorlar türünden de ifadesi mümkündür. Diğer yandan bazı spinörlere tensör karşılık getirilememektedir, yani spinörler daha fazladır, bu yüzden spinörler ile ifade edilen bazı denklemlerin tensörel karşılığı yoktur. Bu özellik spinorları, tensörlerden daha üstün kılmaktadır.

$\mathcal{M}$=$\mathbb{R}^4$ Minkowski uzayı üzerinde spinorların inşası ve tensörlerle eşlenmesi için $\mathcal{L}$ Lorentz grubu, $Sl(2,\mathbb{C})$ özel lineer grubu ve bu gruplar arasındaki ikiye bir *spin* : $Sl(2,\mathbb{C}) \to \mathcal{L}$ homomorfizması kullanılmıştır. Burada $\mathcal{L}$ Lorentz grubu $\mathcal{M}$=$\mathbb{R}^4$ ün otomorfizma grubu $GL(4,\mathbb{R})$ nin bir altgrubudur. $\mathbb{R}^6$ uzayı göz önüne alındığında $SO(3,\mathbb{C})$ kompleks ortogonal grubu, $\mathbb{R}^6$ nın otomorfizm grubu olan $GL(6,\mathbb{R})$ nin bir altgrubudur üstelik $\mathcal{L} \cong SO(3,\mathbb{C})$ dir. Ayrıca $Sl(2,\mathbb{C}) \cong Spin(3,\mathbb{C})$ dir ve $Spin(3,\mathbb{C})$ den $SO(3,\mathbb{C})$ ye ikiye bir bir grup homomorfizması vardır. Acaba $\mathbb{R}^6$ üzerinde de $\mathcal{M}$ üzerinde olduğu gibi spinörler inşa edilebilir mi? Eğer edilirse $\mathbb{R}^6$ üzerindeki tensörlerle aralarında bir eşleme kurulabilir mi? Bunlar birer araştırma problemidir.

KAYNAKLAR

[1] Friedrich, T., Dirac Operators in Riemannian Geometry, (2000).

[2] Lawson, H. B., Michelsohn, M. L., Spin Geometry Princeton Univ., (1989).

[3] Penrose, R., Rindler, W., *Spinors and Space-Time*, Volume 1-2., Cambridge University Press, Cambridge, (1987)

[4] Cartan, E., *The Theory of Spinors*, M.I.T. Press, Cambridge, MA, (1966)

[5] O'Donnell, P., *Introduction to 2-Spinors in General Relativity*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., London, (2003)

[6] Lang, S., *Linear Algebra,* Springer-Verlag, New York, (*1987*)

[7] Hoffman, K., Kunze, R., *Linear Algebra*, Second Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, (1971)

[8] Naber, G.L., *The Geometry of Minkowski Spacetime*, Springer-Verlag, New York, (*1992*)

[9] Bleecker, D., *Gauge Theory and Variational Principles*, Dover Publications, New York, (*2005*)

[10] Gelfand, I.M., R.A. Minlos ve Z. Ya. Shapiro, *Represantations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications*, Perganon, New York, (1963)

[11] Carmeli, M., Malin, S., *An Introduction Theory of Spinors*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., London, (2000)