**WIENER-HOPF TEKNİĞİ VE BAZI DALGA DENKLEMLERİNE UYGULANMASI**

Hazel BAYINTIR

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ocak-2012

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

**Hazel Bayıntır**' ın **"Wiener-Hopf Tekniği ve Bazı Dalga Denklemlerine Uygulanması"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki Yüksek Lisans Tezi 14/12/2011 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

| | Adı - Soyadı | İmza |
|---|---|---|
| Üye (Tez Danışmanı) | : Yard. Doç. Dr. Barış ERBAŞ | |
| Üye | : Yard. Doç. Dr. Nihal EGE | |
| Üye | : Doç. Dr. Murat TANIŞLI | |

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .......... tarih ve ..........sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

# ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**Wiener-Hopf Tekniği ve Bazı Dalga Problemlerine Uygulanması**



**Hazel BAYINTIR**

**Anadolu Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: **Yard. Doç. Dr. Barış ERBAŞ**


**2012, 45 sayfa**

Bu tezde, farklı geometrilere sahip iki sınır-değer problemi Wiener-Hopf tekniği kullanılarak çözülmüştür. Wiener-Hopf tekniği uygulanırken kompleks analizin temel kavramlarından, Fourier dönüşümlerinden ve Fourier dönüşümlerinin analitiklik özelliklerinden faydalanılmıştır.

İlk problem Sommerfeld yarı düzlem problemidir. Negatif $x$ ekseni boyunca uzanan bir bariyer üzerine, $x - y$ düzleminin birinci bölgesinden $x$-ekseni ile $\Theta$ açısı yaparak gelen akustik dalga vardır. Verilen sınır koşulları altında, düzlemin keyfi bir noktasında, gelen dalganın iletilmesi, yansıması ve kırınması sonucu oluşan toplam potansiyel incelenmiştir. Bu inceleme yapılırken Jones metodu kullanılmıştır.

İkinci problemde sadece geometri farklıdır, öyle ki $x$-ekseninin negatif kısmında $y = b$ ve $y = -b$ boyunca uzanan kanal şeklinde iki yarı sonsuz bariyer vardır. Bazı sınır koşulları altında, hem pozitif $x$-ekseni, hem de kanalın duvarları boyunca, gelen dalganın iletilmesi, yansıması ve kırınması sonucu oluşan, düzlemin keyfi bir noktasındaki toplam potansiyel incelenmiştir.

İki sınır-değer probleminin de çözümünü elde etmek için Wiener-Hopf tekniği kullanılmıştır.



**Anahtar Kelimeler:** Kırınan dalga, Wiener-Hopf tekniği, Fourier dönüşümleri.

**ABSTRACT**

**Master of Science Thesis**

**Wiener-Hopf Technique and Applications to Some Wave Problems**

**Hazel BAYINTIR**

**Anadolu Üniversity**

**Graduate School of Sciences**

**Mathematics Program**

**Supervisor: Assist. Prof. Dr. Barış ERBAŞ**

**2012, 45 pages**

In this thesis, two boundary-value problems with different geometries have been solved by using Wiener-Hopf Technique. Fundamental notions from complex analysis, Fourier transforms and the analyticity properties of Fourier transforms have been employed during the application of the Wiener-Hopf technique.

The first problem considered is the Sommerfeld half-plane problem. An acoustic wave making an angle $\Theta$ with the x-axis is incident from the first quadrant of the $x-y$-plane on a barrier along the negative x-axis. Under given boundary conditions, the total potential arising due to the transmission, reflection and diffraction of the incident wave is analyzed at an arbitrary point of the plane. Jones method is used in this analysis.

In the second problem only the geometry differs in that there are now two semi-infinite barriers located at $y = b$ and $y = -b$ along the negative part of the $x$-axis, which now forms a channel. Imposing certain boundary conditions both along the walls of the channel and the positive $x$-axis, the total potential resulting from the transmission, reflection and diffraction of the incident wave is investigated at an arbitrary point of the plane.

The Wiener-Hopf technique is used extensively to obtain the solution of both of the boundary-value problems.


**Keywords:** Diffracted wave, Wiener-Hopf technique, Fourier transforms.

## TEŞEKKÜR

Matematik öğrenimim boyunca, beni hep ileriye, en iyiye, en doğruya yönelik davranışlar sergilemem için destekleyen ve cesaretlendiren, tez çalışmam boyunca da yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yard. Doç. Dr. Barış Erbaş'a teşekkürlerimi sunarım.

Beni her konuda destekleyen ve her zaman yanımda olan sevgili eşime ve eğitimim boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen canım aileme de minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Hazel BAYINTIR

Ocak, 2012

İÇİNDEKİLER

# ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

# 1 GİRİŞ

Bu çalışmada, ilk defa N. Wiener ve E. Hopf (1931) tarafından yarı sonsuz aralıkta fark çekirdeği ile verilen integral denklemi çözmek için önerilen ve daha sonraları geliştirilen, birçok kırınım probleminde, elastisite teorisinde, sınır değer problemlerinde, Milne problemi olarak bilinen radyoaktif geçiş teorisindeki integral denklemlerin çözümünde ve daha birçok matematiksel fizik problemlerinde kullanılan Wiener-Hopf metodu tanıtılmış ve Sommerfeld yarı düzlem kırınım problemi ile iki yarı sonsuz paralel düzlem üzerine düşen düzlem dalgası problemlerinin çözümünde Wiener-Hopf metodundan faydalanılmıştır.

Problemlerin ilki olan Sommerfeld yarı düzlem kırınım probleminde negatif $x$- ekseni boyunca katı bir bariyer ve bu bariyer üzerine, birinci bölgede sonsuzdan $\Theta$ açısıyla düşen dalga vardır. Bu dalganın katı bariyere çarpması sonucu oluşan ve sonsuzda sönümlendiği varsayılan kırınan, yansıyan ve iletilen dalga potansiyellerinin, düzlemin keyfi bir noktasındaki değeri incelenmiştir. Bu inceleme yapılırken Wiener-Hopf tekniği kullanılmış ve bu teknik ile çözülebilen problemlerde kolaylık sağlayan Jones metodundan faydalanılmıştır.

İkinci problemde ise yine katı bir bariyer vardır. Ancak bu bariyer bir kanaldır ve birinci bölgede sonsuzdan $\Theta$ açısıyla kanal üzerine düşen dalga vardır. Bu dalganın kanala çarpması sonucu oluşan ve sonsuzda söndüğü varsayılan kırınan, yansıyan ve iletilen dalga potansiyellerinin düzlemin keyfi bir noktasındaki değeri incelenmiştir. Her iki problemin çözümünde de Fourier dönüşümü kullanılarak kısmi diferansiyel denklemle ifade edilen dalga denklemi, dönüşüm parametresinin adi diferansiyel denklemine dönüştürülmüştür. Bu dönüşümler kompleks $\alpha$ parametresinin düzleminde sınırları kesin olarak belli olan bir bölgede tanımlanarak, adi diferansiyel denklemin çözülmesi ile elde edilen fonksiyonlar toplamsal ve çarpımsal ayrışma kullanılıp (+) ve (-) fonksiyonlarına ayrıştırılmıştır. Çözümde ortaya çıkan bilinmeyen katsayılar ise sınır koşulları yardımıyla yok edilerek bilinen Wiener-Hopf denklemi elde edilmiş ve problemler Wiener-Hopf metodu ile çözülmüştür.

## 1.1 Kompleks Analiz

Bu bölümde, ileride ele alacağımız problemlerde gerekli olacak temel tanım ve kavramlardan bahsedeceğiz. İlk olarak kompleks fonksiyonlar teorisinin sıklıkla kullanacağımız birkaç kavramını verelim. Ancak, türevlenebilme, bir fonksiyonun sıfırları, singüler noktaları gibi en temel kavramlardan burada bahsetmeyeceğiz. İlk olarak Liouville teoremini ifade edelim.

**Teorem 1.1.1** (Liouville Teoremi). *$\mathbb{C}$ kompleks düzlemindeki her $\alpha$ için $f(\alpha)$ fonksiyonu sınırlı ve analitik bir fonksiyon ise $f(\alpha)$ sabittir.*[1]

Bazı uygulamalarda, Liouville teoreminin yukarıdaki ifadesi yeterli olmayabilir. Bundan dolayı aşağıda bu teoremin genelleşmiş halini vereceğiz.

**Teorem 1.1.2** (Genelleşmiş Liouville Teoremi). *$M$ ve $p$ sabitler olmak üzere, eğer $|\alpha| \to \infty$ iken $|f(\alpha)| \leq M|\alpha|^p$ ise $f(\alpha)$ fonksiyonu tüm $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde analitik ve derecesi $p$ veya $p$ den daha az olan bir polinomdur.*[2]

Liouville teoremi ile birlikte sıkca karşımıza çıkacak olan analitik devam ilkesini açıklayalım.

**Tanım 1.1.3** (Analitik Devam İlkesi). *$f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonları sırasıyla $D_1$ ve $D_2$ bölgelerinde analitik olsun ve $D_1$ ve $D_2$ bölgelerinin arakesitleri boş kümeden farklı olsun. $D = D_1 \cap D_2$ diyelim. Eğer, $z \in D$ için $f_1(z) \equiv f_2(z)$ oluyorsa, $f_2(z)$ fonksiyonu $f_1(z)$ fonksiyonunun $D$ üzerinden $D_2$ bölgesinin içine analitik devamıdır denir. Benzer şekilde, $f_1(z)$ fonksiyonu da $f_2(z)$ fonksiyonunun $D$ üzerinden $D_1$ bölgesine analitik devamı olarak adlandırılır* [3].

$C$, kompleks $\zeta$ düzleminde düzgün bir kontur, $\alpha$ ve $\zeta$ kompleks değişkenler ve $\alpha$ bir $R$ bölgesinde olmak üzere, bu tez çalışmasında sıklıkla karşımıza çıkacak olan

$$G(\alpha) = \int_C g(\alpha, \zeta) d\zeta$$

şeklinde tanımlanan $G(\alpha)$ fonksiyonunun analitikliği için sağlanması gereken koşulları aşağıdaki teorem ile ifade edelim:

**Teorem 1.1.4.**

$$G(\alpha) = \int_C g(\alpha, \zeta) d\zeta$$

*olmak üzere $g(\alpha, \zeta) = f(\zeta) h(\alpha, \zeta)$ fonksiyonu için aşağıdaki koşullar sağlansın.*

(i) *$\alpha$ bir $R$ bölgesinde ve $\zeta$, $C$ konturu üzerinde olmak üzere $\alpha$ ve $\zeta$ kompleks değişkenlerine bağlı $h(\alpha,\zeta)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon,*

(ii) *$h(\alpha,\zeta)$ fonksiyonu her $C$ konturu üzerindeki $\zeta$ için $\alpha$ nın analitik bir fonksiyonu,*

(iii) *$f(\zeta)$ fonksiyonu, $C$ üzerinde sadece sonlu sayıda süreksizliğe ve $C$ nin herhangi bir sonlu kısmında sonlu sayıda maximum ve minimuma sahip,*

(iv) *$f(\zeta)$ sonlu sayıda nokta dışında sınırlı bir fonksiyon. Eğer $\zeta_0$ bir nokta öyle ki $\zeta \to \zeta_0$ iken $g(\alpha,\zeta)\to\infty$ ise*

$$\int_C g(\alpha,\zeta) = \lim_{\delta\to 0}\int_{C-\delta} g(\alpha,\zeta)d\zeta$$

*dır ve $\alpha$, $R$ nin içindeki herhangi kapalı $R'$ bölgesinde iken limit düzgün yaklaşmalıdır,*

(v) *Eğer $C$ sonsuza giderse, $C$ nin herhangi sınırlı bir parçası düzgün olmalı ve (i), (ii) koşulları $C$ nin herhangi sınırlı parçası üzerinde sağlanmalı, $\alpha$, $R$ nin herhangi kapalı $R'$ bölgesinde iken has olmayan integralle tanımlanan $G(\alpha)$ fonksiyonu düzgün yakınsak olmalı,*

*Yukarıda verilen koşullar sağlanıyor ise $R$ de tanımlanan $G(\alpha)$ fonksiyonu analitik bir fonksiyondur* [2].

## 1.2 Fourier Dönüşümü

Wiener-Hopf metodu ile kullanılan birçok dönüşüm olmasına rağmen, biz Fourier dönüşümünü kullanacağız. Bu bölümde Fourier dönüşümüne ve Fourier integralleri ile tanımlanan fonksiyonların analitiklik özelliklerine değineceğiz. $\alpha$; reel ya da kompleks bir parametre olmak üzere, reel eksen boyunca mutlak integrallenebilir herhangi bir $f(x,y)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$F(\alpha,y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{i\alpha x}dx$$

integrali ile tanımlanır. Ters Fourier dönüşümü ise

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha,y)e^{-i\alpha x}d\alpha$$

integrali ile tanımlanır. Fourier dönüşümü fonksiyon uzayları arasında bir dönüşüm operatörü olduğundan,

$$\mathscr{F}(f(x))=F(\alpha)$$

yazmak mümkündür. $f(x)$ türevlenebilir, $f(x)$ ve $f'(x)$ integrallenebilir olmak üzere, $f'(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü,

$$\mathscr{F}(f'(x))=-i\alpha F(\alpha)$$

şeklinde tanımlıdır. $F(\alpha)$, $(0,\infty)$ ve $(-\infty,0)$ yarı sonsuz aralıklarında

$$F_+(\alpha)=\int_{0}^{\infty} f_+(x)e^{i\alpha x}dx$$
$$F_-(\alpha)=\int_{-\infty}^{0} f_-(x)e^{i\alpha x}dx$$

integrallerinin toplamı olarak

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx=F_+(\alpha)+F_-(\alpha)$$

şeklinde yazılır [4]. İleride karşımıza çıkacak olan $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ gibi sıfırlardan oluşan bir $K(\alpha)$ fonksiyonunun çarpanlarına ayrışmasını veren aşağıdaki teoremi verelim:

**Teorem 1.2.1** (Sonsuz Çarpım Teoremi). *Eğer $K(\alpha)$ fonksiyonu $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ gibi sıfırlardan oluşan bir tam fonksiyon ise*

$$K(\alpha)=K(0)e^{\alpha K'(0)/K(0)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha}{\alpha_n}\right)e^{\alpha/\alpha_n}$$

*şeklinde ifade edilir* [4].

Burada eğer $K(\alpha)$, $\alpha$ nın bir çift fonksiyonu ise kökler çiftler halinde $\alpha = \pm\alpha_n$ şeklindedir ve $K(\alpha)$ fonksiyonunu, $K_+(\alpha)$ fonksiyonu bir üst yarı düzlemde analitik ve tüm sıfırları bir alt yarı düzlemde, $K_-(\alpha)$ fonksiyonu bir alt yarı düzlemde analitik ve tüm sıfırları bir üst yarı düzlemde olmak üzere,

$$K_\pm(\alpha) = K(0)^{1/2} e^{\mp\chi(\alpha)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 \pm \frac{\alpha}{\alpha_n}\right) e^{\mp\alpha/\alpha_n},$$

şeklinde ayırabiliriz. Eşitlikteki $\chi(\alpha)$, $\alpha \to \infty$ iken uygun yarı düzlemde $K_\pm(\alpha)$ fonksiyonunun yakınsaklığını garanti etmek için seçilmiş keyfi bir fonksiyondur.

Son olarak özellikle kırınım ve saçılma problemlerinde fonksiyonların davranışları ile ilgili kestirimlere yardımcı olan Abelian teoremini vereceğiz.

**Teorem 1.2.2** (Abelian Teoremi). *$F_+(\alpha)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi verilsin.*

$$F_+(\alpha) = \int_0^\infty f(x) e^{i\alpha x} dx.$$

*$-1 < \eta < 0$ için $A$ sabit olmak üzere eğer*

$$f(x) \sim A x^\eta \ (x \to +0)$$
$$(x \to \infty)$$

*ise*

$$F_+(\alpha) \sim A\Gamma(\eta + 1) e^{\frac{1}{2}\pi i(\eta+1)} \alpha^{-\eta-1} \ (\alpha \to \infty)$$
$$(\alpha \to +0),$$

*davranışı ile ifade edilir*[1] [1].

[1] $\Gamma$ fonksiyonunun tanımı 3. bölümde verilmiştir.

## 1.3 Wiener-Hopf Tekniği

Uygulamalı matematikte geniş kullanım alanı bulan Wiener-Hopf metodu

$$u(x) = \lambda \int_0^{\infty} \nu(x-s)u(s)ds + f(x)$$

şeklindeki yarı sonsuz aralıkta fark çekirdeği ile verilen integral denklemi çözmek amacıyla ilk defa N.Wiener ve E.Hopf tarafından 1931 yılında ortaya konulmuştur [5]. Daha sonra Wiener-Hopf metodu ya da faktorizasyon metodu olarak bilinen bu metod değişik uygulama alanları bulmuştur. Bu metod; elastisite teorisinde, kırınım ve karışık sınır değer problemlerinin çözümünde ve daha birçok matematiksel fizik problemlerinde[2] kullanılmıştır. Metod uygulanırken Fourier, Laplace ve Mellin gibi integral dönüşümlerden ve bu dönüşümlerin analitiklik özelliklerinden faydalanılır. Başlangıç-sınır değerleri ile verilmiş dalga denklemini çözmek için Fourier dönüşümü tanımlayıp, bu dönüşümleri ve sınır koşullarını kullanarak fonksiyonların analitiklik şeridi belirlenir ve analitik çözüm için fonksiyonları, aşağıdaki teoremlerde ifade edilen toplamsal ve çarpımsal ayrışmayı kullanarak $(+)$ ve $(-)$ kısımlara ayırılır. Daha sonra sınır koşulları yardımıyla cebirsel işlemler sonucu elde edilen Wiener-Hopf denklemi Wiener-Hopf metodu ile çözülür. Şimdi ilerde ele alacağımız problemlerin çözümünde kullanacağımız toplamsal faktorizasyon ve çarpımsal faktorizasyon teoremlerini vereceğiz.

**Teorem 1.3.1.** *$f(\alpha)$, $\tau_- < \tau < \tau_+$ şeridinde $\alpha = \sigma + i\tau$ nun analitik fonksiyonu olsun, öyle ki $\tau_- + \varepsilon \leq \tau \leq \tau_+ - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ şeridindeki tüm $\tau$ lar için $|\sigma| \to \infty$ iken,*

$$|f(\sigma + i\tau)| < C|\sigma|^{-p}, \quad p > 0$$

*eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $\tau_- < c < \tau < d < \tau_+$ için,*

$$f_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha},$$

$$f_-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+id}^{\infty+id} \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha},$$

*ile tanımlanan $f_+(\alpha)$ fonksiyonu tüm $\tau > \tau_-$ için, $f_-(\alpha)$ fonksiyonu da tüm $\tau < \tau_-$ için analitiktir ve*

$$f(\alpha) = f_+(\alpha) + f_-(\alpha)$$

[2]Wiener-Hopf tekniği içeren birçok örneğe B.Noble da değiniliyor, *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique*, Pergaman, New York, 1958

*eşitliği geçerlidir* [4].

**Teorem 1.3.2.** $\ln K(\alpha)$, *Teorem(1.3.1) in koşullarını sağlamak üzere* $\tau_- < \tau < \tau_+$ *ve* $-\infty < \sigma < \infty$ *şeridinde* $K(\alpha)$ *fonksiyonu analitik ve sıfır olmayan bir fonksiyon ve şeridin içinde* $\sigma \to \mp\infty$ *iken* $K(\alpha) \to +1$ *ise,* $K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha)$ *şeklinde yazılır ve* $K_+(\alpha)$, $K_-(\alpha)$ *fonksiyonları sırasıyla* $\tau > \tau_-$, $\tau < \tau_+$ *bölgelerinde analitik, sınırlı ve sıfır olmayan fonksiyonlardır* [4].

## 1.4 Wiener-Hopf Problemi

$\alpha = \sigma + i\tau$ ve $\tau_- < \tau_+$ olmak üzere, sırasıyla Im $\alpha > \tau_-$ ve Im $\alpha < \tau_+$ bölgelerinde analitik olan ve aşağıdaki (1.4.1) denklemini sağlayan bilinmeyen $\Phi_+(\alpha)$ ve $\Phi_-(\alpha)$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. Teorik ve pratik bakımından büyük bir öneme sahip olan sınır değer problemlerinin bir kısmı, aranan dalga potansiyeli $\Phi_\pm(\alpha)$ fonksiyonlarının bulunmasına indirgenir, öyle ki bu fonksiyonlar $\tau_- < \tau < \tau_+$ ve $-\infty < \sigma < \infty$ şeridinde

$$\Phi_+(\alpha) + G(\alpha)\Phi_-(\alpha) = g(\alpha) \tag{1.4.1}$$

denklemini sağlarlar ve bu denkleme Wiener-Hopf denklemi denir [6]. Eğer bu denklemde $g(\alpha) = 0$ alınırsa, denklem homojen Wiener-Hopf denklemi adını alır. Burada (1.4.1) denkleminden daha karmaşık yapıda olan

$$A(\alpha)\Phi_+(\alpha) + B(\alpha)\Phi_-(\alpha) + C(\alpha) = 0 \tag{1.4.2}$$

denklemi ele alacağız ve $\Phi_+(\alpha)$ ve $\Phi_-(\alpha)$ fonksiyonlarının sırasıyla $\tau > \tau_-$ ve $\tau < \tau_+$ bölgelerinde analitik ve (1.4.2) denkleminde verilen $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ fonksiyonlarının da $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < \infty$ şeridinde analitik ve sıfırlarının olmadığını kabul edeceğiz. O halde bu kabul şartları altında (1.4.2) denkleminin her iki tarafını $A(\alpha)$ fonksiyonuna bölüp, aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz.

$$\Phi_+(\alpha) + \frac{B(\alpha)}{A(\alpha)}\Phi_-(\alpha) + \frac{C(\alpha)}{A(\alpha)} = 0$$

Burada,

$$\frac{B(\alpha)}{A(\alpha)} = \frac{K_-(\alpha)}{K_+(\alpha)} \tag{1.4.3}$$

diyelim. $K_+(\alpha)$ fonksiyonu Im$\alpha > \tau'_-$ ve $K_-(\alpha)$ fonksiyonu Im$\alpha < \tau'_+$ bölgesinde analitik olsun, öyle ki $\tau'_-$ <Im$\alpha < \tau'_+$ ile $\tau_-$ <Im$\alpha < \tau_+$ bölgelerinin arakesitleri boş olmasın. Bu şart altında (1.4.3) eşitliğini (1.4.2) denkleminde yerine yazalım.

$$K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + K_-(\alpha)\Phi_-(\alpha) + \frac{C(\alpha)}{A(\alpha)}K_+(\alpha) = 0. \tag{1.4.4}$$

(1.4.4) denklemindeki $\dfrac{C(\alpha)}{A(\alpha)}K_+(\alpha)$ ifadesini ele alalım ve

$$\frac{C(\alpha)}{A(\alpha)}K_+(\alpha) = D_+(\alpha) + D_-(\alpha) \tag{1.4.5}$$

şeklinde olsun. Öyle ki $D_+(\alpha)$ ve $D_-(\alpha)$ fonksiyonları sırasıyla $\tau > \tau''_-$ ve $\tau < \tau''_+$ bölgelerinde analitik olsun. Burada $\tau'_-$ <Im$\alpha < \tau'_+$ ile $\tau''_-$ <Im$\alpha < \tau''_+$ bölgelerinin arakesiti boş olmasın. Bu şart altında (1.4.5) eşitliğini de (1.4.4) denkleminde yerine yazarsak,

$$K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + D_+(\alpha) + K_-(\alpha)\Phi_-(\alpha) + D_-(\alpha) = 0 \qquad (1.4.6)$$

denklemini elde ederiz ve eşitliğin bir tarafına (+) fonksiyonları, diğer tarafına (−) fonksiyonları toplayabiliriz:

$$K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + D_+(\alpha) = -[K_-(\alpha)\Phi_-(\alpha) + D_-(\alpha)]. \qquad (1.4.7)$$

(1.4.7) denklemindeki eşitliğin sol tarafı Im $\alpha > \tau''_-$ ve eşitliğin sağ tarafı Im $\alpha < \tau''_+$ bölgesinde analitiktir ve bu bölgelerin arakesitleri boş olmadığından eşitliğin sol tarafı sağ tarafına (ve tersi) analitik olarak devam ettirilebilir. Analitik devam ilkesinden alt yarı düzlemde analitik olan bir fonksiyon üst yarı düzlemde analitik olan bir fonksiyona devam ettirildiğinden eşitliğin her iki tarafını tüm düzlemde analitik olan bir $J(\alpha)$ fonksiyonuna eşitleyebiliriz. Eğer $J(\alpha)$ fonksiyonu $\alpha \to \infty$ iken sınırlı ise Liouville teoremini kullanarak $J(\alpha) =$ sabit diyebiliriz.

$$J(\alpha) = c, \qquad c = sabit$$

olsun. Bu durumda (1.4.7) eşitliğinden

$$K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + D_+(\alpha) = c$$
$$K_-(\alpha)\Psi_-(\alpha) + D_-(\alpha) = -c$$

alınabilir. Buradan

$$\Phi_+(\alpha) = \frac{c - D_+(\alpha)}{K_+(\alpha)},$$
$$\Phi_-(\alpha) = \frac{-c - D_-(\alpha)}{K_-(\alpha)},$$

çözümleri elde edilir. (1.4.3) ve (1.4.5) türündeki çarpımsal faktorizasyon ve toplamsal faktorizasyon ile (1.4.2) denkleminin çözüm tekniğine Wiener-Hopf tekniği adı verilir. (1.4.3) ve (1.4.5) türündeki toplamsal faktorizasyon ve çarpımsal faktorizasyonların mümkün olup olmayacağı Teorem 1.3.1 ve Teorem 1.3.2 ile verilmiştir.

# 2 SOMMERFELD YARI-DÜZLEM KIRINIM PROBLEMİ

## 2.1 Giriş

Bu bölümde Sommerfeld yarı düzlem kırınım probleminden bahsedip, Wiener-Hopf metodu ve Fourier dönüşümü kullanarak problemi çözeceğiz. Problemin çözümü her biri Wiener-Hopf tekniğine dayanan üç metodla elde ediliyor. Bu metodlardan biri Jones metodu, bir diğeri dual integral denklem yaklaşımı ile yapılan çözüm, üçüncüsü ise integral denklem ile formülüze edilip yapılan çözümdür.

Burada Jones metodunu kullanacağız. Bu metod tam olarak Wiener-Hopf tekniği ile çözülebilen problemler için daha sade ve rutin bir prosedür sağlar. Kısmi diferansiyel denklemlere Fourier dönüşümü uygulayarak ve toplamsal ve çarpımsal ayrışma kullanarak Wiener-Hopf denklemini elde edip, problemi Wiener-Hopf metodu ile çözeceğiz.

## 2.2 Sommerfeld Yarı-Düzlem Kırınım Problemi

Aşağıda ifade edilen Sommerfeld yarı-düzlem kırınım problemini çözmek için Wiener-Hopf tekniği ile çözülebilen problemlerde kolaylık sağlayan Jones metodundan faydalanacağız [1,7].

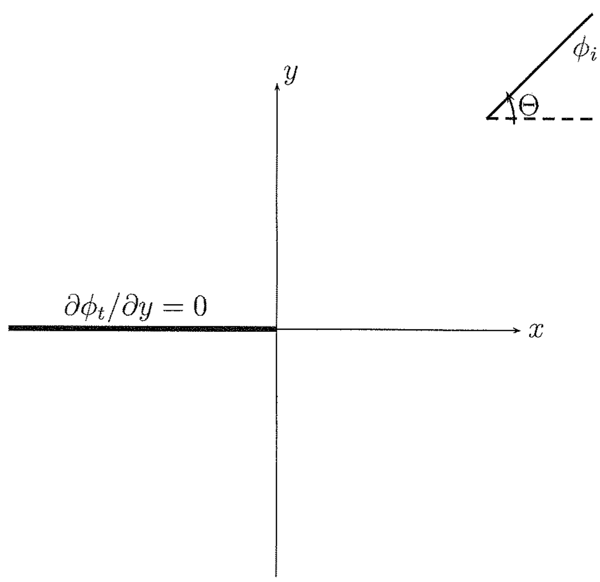
Kısmi diferansiyel denkleme Fourier dönüşümü uygulayarak Wiener-Hopf tekniğini uygulanabilir hale getireceğiz. $(x, y)$ iki boyutlu uzayda $t$ zaman parametresi ve $\phi(x, y, t)$ dalga potansiyeli olmak üzere $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$ olarak bilinen dalga denklemini sağlasın. $e^{\pm iwt}$ zaman çarpanı olmak üzere, $\phi$ fonksiyonu zamana göre harmonik olsun. Bu durumda

$$\phi(x, y, t) = \phi(x, y)e^{\pm iwt} \tag{2.2.8}$$

eşitliği geçerlidir. Aşağıdaki şekilde ifade edildiği üzere negatif $x$-ekseni boyunca katı bir bariyer olsun ve bu bariyer üzerine bir $\Theta$ açısıyla,

$$\phi_i(x, y) = e^{-ikx\cos\Theta - iky\sin\Theta}, \qquad 0 < \Theta < \pi \tag{2.2.9}$$

eşitliği ile ifade edilen bir dalga düşsün.




Şekil 2.2.1: Sommerfeld Yarı Düzlem Problemi

$\phi_t(x,y)$ fonksiyonu herhangi bir noktadaki toplam dalga potansiyelini, $\phi(x,y)$ fonksiyonu ise yansıyan, geçen ve kırınan dalgayı temsil etmek üzere,

$$\phi_t(x,y) = \phi(x,y) + \phi_i(x,y) \tag{2.2.10}$$

eşitliği geçerlidir ve $\phi_t$ bilinen dalga denklemini sağlar. Belirli sınır şartları altında bariyer üzerine düşen ve bariyere çarpması sonucu oluşan kırınan, iletilen ve yansıyan dalga potansiyellerinin herhangi bir noktadaki değerini bulmaya çalışalım. $\phi_t(x,y)$ toplam potansiyeli bilinen dalga denklemini sağladığından aranan $\phi(x,y)$ dalga potansiyeli aşağıdaki indirgenmiş dalga denklemini sağlar.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + k^2\phi = 0. \tag{2.2.11}$$

Burada $k = k_1 + ik_2$, $(k_2 > 0)$ dalga sayısıdır ve matematiksel uygunluk açısından kompleks sayı olarak alınmıştır. Problemin sınır koşulları:

i) Negatif $x$- ekseni boyunca $y = 0$ noktasında, $\dfrac{\partial\phi_t}{\partial y}(x,y) = 0$ dır. Dolayısıyla $\phi_t(x,y) = \phi(x,y) + \phi_i(x,y)$ eşitliğinden

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) = ik\sin\Theta e^{-ikx\cos\Theta}, \quad y = 0, \quad x < 0$$

olarak elde edilir,

ii) Tüm $x$-ekseni, $y = 0$ boyunca $\dfrac{\partial\phi_t}{\partial y}(x,y)$ dalga potansiyeli sürekli ve dolayısıyla $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)$ dalga potansiyeli de süreklidir,

iii) Pozitif $x$-ekseni ve $y = 0$ da $\phi_t(x,y)$ dalga potansiyeli sürekli ve dolayısıyla $\phi(x,y)$ dalga potansiyeli de süreklidir,

iv) Bu koşullara ek olarak katı bariyerin ucunda ve sonsuzda $\phi(x,y)$ fonksiyonunun davranışıyla ilgili bazı varsayımlara ihtiyacımız vardır.
$x = r\cos\Theta$, $y = r\sin\Theta$ diyelim. Yukarıdaki koşullardan dalganın davranışıyla ilgili şu sonuçları çıkarabiliriz:
$y \leq 0$ veya $y \geq 0$ bölgelerinde sabitlenmiş keyfi bir $y$ noktası için $C_1, C_2$ sabitler olmak üzere, $-\infty < x < -|y|\cot\Theta$ bölgesinde $\phi(x,y)$ dalga potansiyeli için

$$\begin{aligned} |\phi| &= e^{i(k_1+ik_2)x\cos\Theta + i(k_1+ik_2)|y|\sin\Theta} \\ &\leq C_1 e^{k_2 x\cos\Theta - k_2|y|\sin\Theta} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $-|y|\cot\Theta < x < \infty$ bölgesinde ise $\phi \sim e^{ikx}$ ve $|\phi| < C_2 e^{-k_2 x}$ koşulları sağlanır. $\phi(x,y)$ dalga potansiyelinin davranışının yukarıdaki şekilde sınırlanmasının sonucunda analitiklik şeridi $-k_2 < \tau < k_2 \cos\Theta$ olarak belirlenir.

v) Son olarak uç koşullarının aşağıdaki şekilde olduğunu varsayacağız:

. $y = 0$ ve $x \to +0$ iken $\partial\phi_t/\partial y \to C_3 x^{-1/2}$,

. $y = 0$ ve $x \to +0$ iken $\phi_t \to C_4$,

. $y = +0$ ve $x \to -0$ iken $\phi_t \to C_5$,

. $y = -0$ ve $x \to -0$ iken $\phi_t \to C_6$ dır.

Burada $y = +0$ ve $x \to -0$ ifadesi ile üst yarı düzlemde, sıfır noktasına $x$ in negatif değerleri ile yaklaşıldığı gösteriliyor. $C_i$ katsayıları ise bilinmesi gerekmeyen sabitlerdir. Burada verilen uç koşulları problemin fiziği olarak da düşünülebilir. Bu uç koşulları problemin çözümü ve tekliğinde önemli rol oynar.

## 2.3 Jones Metodu

Bu bölümde yukarıda ifade ettiğimiz problemi Jones metodu ile çözeceğiz [7]. Öncelikle aranan $\phi(x,y)$ dalga potansiyelinin $\alpha$ parametresine göre Fourier dönüşümünü alalım ve $\phi(x,y)$ dalga potansiyelinin Fourier dönüşümü olan $\Phi(\alpha,y)$ fonksiyonunun analitiklik şeridini belirleyelim.

$$\Phi(\alpha,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,y)e^{i\alpha x}dx$$

ve

$$\Phi_+(\alpha,y)=\int_0^{\infty}\phi(x,y)e^{i\alpha x}dx \qquad ; \qquad \Phi_-(\alpha,y)=\int_{-\infty}^{0}\phi(x,y)e^{i\alpha x}dx$$

olmak üzere

$$\Phi(\alpha,y)=\Phi_+(\alpha,y)+\Phi_-(\alpha,y)$$

şeklinde yazmak mümkündür.

(iv) sınır koşulunda verildiği üzere keyfi verilen bir $y$ için, $x\to\infty$ iken $|\phi|<C_1e^{-k_2x}$ ve $x\to-\infty$ iken $|\phi|<C_2e^{k_2x\cos\Theta}$ idi. O halde bu fonksiyonların Fourier dönüşümleri olan $\Phi_+(\alpha,y)$ ve $\Phi_-(\alpha,y)$ fonksiyonları sırasıyla $\tau>-k_2$ ve $\tau<k_2\cos\Theta$ bölgelerinde analitiktir. $\Phi(\alpha,y)=\Phi_+(\alpha,y)+\Phi_-(\alpha,y)$ olduğundan $\Phi(\alpha,y)$ fonksiyonunun, $\Phi_-(\alpha,y)$, $\Phi_+(\alpha,y)$ fonksiyonlarının ortak analitiklik şeridi olan $-k_2<\tau<k_2\cos\Theta$ şeridinde analitik olduğu sonucu ortaya çıkar (bkz. Teorem 1.3.1). $\Phi(\alpha,y)$ fonksiyonunun analitiklik şeridini belirledikten sonra yine (iv) koşulunu kullanarak $-k_2<\tau<k_2\cos\Theta$ şeridinde

$$|\Phi(\alpha,y)|\leq\int_{-\infty}^{\infty}|\phi e^{-\tau x}|dx=|\Phi_1|+|\Phi_2|$$

yazılabilir. Burada $\alpha=\sigma+i\tau$ ve $|y|\to\infty$ iken $K_1,K_2$ sabit olmak üzere problemin sınır kuşullarından, $\Phi_1(\alpha,y)$, $\Phi_2(\alpha,y)$ fonksiyonları, $\tau_1<k_2\cos\Theta$ bölgesinde

$$|\Phi_1(\alpha,y)|<K_1\int_{-\infty}^{-|y|\cot\Theta}e^{(k_2x\cos\Theta-k_2|y|\sin\Theta)-\tau_1x}dx,$$

$-k_2<\tau_2<k_2$ bölgesinde ise

$$|\Phi_2(\alpha,y)|<K_2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k_2\sqrt{x^2+y^2}-\tau_2x}dx$$

ile sınırlıdır. Şimdi (2.2.11) numaralı indirgenmiş dalga denkleminin Fourier dönüşümünü alalım. Eşitliğin her iki tarafını $e^{i\alpha x}$ ile çarpıp $-\infty$ dan $\infty$ a $x$ değişkenine göre integralini alalım:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,y)e^{i\alpha x}dx+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}(x,y)e^{i\alpha x}dx+\int_{-\infty}^{\infty}k^2\phi(x,y)e^{i\alpha x}dx=0.$$

Burada $\Phi(\alpha, y)$ fonksiyonu $\phi(x, y)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}(x, y)e^{i\alpha x}dx = \frac{d^2\Phi}{dy^2}(\alpha, y),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k^2\phi(x, y)e^{i\alpha x}dx = k^2\Phi(\alpha, y)$$

ve

$$\begin{aligned}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x, y)e^{i\alpha x}dx &= \lim_{A\to\infty}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}e^{i\alpha x}\Big|_{-A}^{A} - \int_{-A}^{A} i\alpha e^{i\alpha x}\frac{\partial\phi}{\partial x}dx\right\} \\ &= \lim_{A\to\infty}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}e^{i\alpha x}\Big|_{-A}^{A} - i\alpha\frac{\partial\phi}{\partial x}e^{i\alpha x}\Big|_{-A}^{A} - \alpha^2\Phi(\alpha, y)\right\} \\ &= -\alpha^2\Phi(\alpha, y)\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $\phi(x, y)$ dalga potansiyelinin sonsuzda sönmesinden dolayı $A \to \infty$ iken üst ve alt limitlerden gelen katkı sıfırdır. O halde indirgenmiş dalga denklemi, $\gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$ olmak üzere, aşağıdaki şekilde adi diferansiyel denkleme indirgenir.

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2}(\alpha, y) - \gamma^2(\alpha)\Phi(\alpha, y) = 0. \tag{2.3.12}$$

(2.3.12) denklemini çözersek, $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$ sadece $\alpha$ değişkenine bağlı fonksiyonlar olmak üzere,

$$\Phi(\alpha, y) = A_1(\alpha)e^{-\gamma(\alpha)y} + B_1(\alpha)e^{\gamma(\alpha)y} \quad , \qquad (y \geq 0) \tag{2.3.13}$$

$$= A_2(\alpha)e^{-\gamma(\alpha)y} + B_2(\alpha)e^{\gamma(\alpha)y} \quad , \qquad (y \leq 0) \tag{2.3.14}$$

çözümünü elde ederiz [8]. Bu problemde $\alpha = 0$ için $\gamma(0) = -ik$ olan dalı alacağız (bkz. Ek-1). $\alpha = \sigma + i\tau$ olmak üzere, $-k_2 < \tau < k_2$ şeridinde iken $\gamma(\alpha)$ fonksiyonunun reel kısmı her zaman pozitiftir. O halde $B_1(\alpha) = A_2(\alpha) = 0$ dır. Sınır koşullarında verildiği gibi $\frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y)$ fonksiyonu tüm $x$ ekseni, $y = 0$ boyunca sürekliydi, bu sınır koşulundan, bu fonksiyonun Fourier dönüşümü olan $\frac{d\Phi}{dy}(\alpha, y)$ fonksiyonu da tüm $x$ ekseni boyunca süreklidir. Bundan dolayı (2.3.13) ve (2.3.14) eşitliklerinin $y = 0$ sınırı boyunca

$$-\gamma(\alpha)A_1(\alpha)e^{-\gamma(\alpha)y} = \gamma(\alpha)B_1(\alpha)e^{\gamma(\alpha)y}.$$

$$A_1(\alpha) = -B_1(\alpha) = A(\alpha).$$

değerleri eşittir diyelim. O halde $\Phi(\alpha, y)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$\Phi(\alpha, y) = \begin{cases} A(\alpha)e^{-\gamma(\alpha)y}, \ (y \geq 0), \\ -A(\alpha)e^{\gamma(\alpha)y}, (y \leq 0) \end{cases}. \tag{2.3.15}$$

Bir karışıklığa yol açmadığı sürece $\Phi(\alpha, y)$ yerine $\Phi(y)$ ifadesini kullanacağız. $y = 0$ için,

$$\Phi_+(0) = \Phi_+(\alpha, 0)$$

ve

$$\begin{aligned} \Phi_-(\alpha, \pm 0) &= \Phi_-(\pm 0) \\ &= \lim_{y \to \pm 0} \int_{-\infty}^{0} \phi(x, y) e^{i\alpha x} dx \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

olarak alınacaktır. Pozitif $x$ ekseni boyunca $\phi(x, y)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, bu fonksiyonun Fourier dönüşümü de aynı bölgede süreklidir. Bundan dolayı

$$\Phi_+(+0) = \Phi_+(-0) = \Phi_+(0) \tag{2.3.17}$$

yazabiliriz. $\phi(x, y)$ nin $y$ değişkenine göre türevinin Fourier dönüşümünü aşağıdaki şekilde $(+)$ ve $(-)$ fonksiyonlara ayırarak yazalım.

$$\Phi'_+(\alpha, y) = \int_0^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial y} e^{i\alpha x} dx \quad ; \quad \Phi'_-(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \phi}{\partial y} e^{i\alpha x} dx.$$

Tüm $x$ ekseni boyunca $\dfrac{\partial \phi}{\partial y}(x, y)$ fonksiyonu sürekli olduğundan aynı yerde $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y)$ fonksiyonu da süreklidir. O halde bu fonksiyonun $y = \pm 0$ boyunca, diğer bir deyişle $x$ eksenine üstten ve alttan yaklaşırken limit değerleri de eşittir yani

$$\Phi'_+(\alpha, 0) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\alpha, 0)$$

olmak üzere,

$$\Phi'_+(\alpha, 0) = \Phi'_+(\alpha, -0) = \Phi'_+(0)$$

ve benzer şekilde

$$\Phi'_-(\alpha, 0) = \Phi'_-(\alpha, -0) = \Phi'_-(0)$$

eşitliği geçerlidir. $y = 0$ sınırı boyunca ve bu sınır civarında (2.3.13) ve (2.3.14) eşitliklerinden faydalanarak,

$$\Phi_+(0) + \Phi_-(+0) = A(\alpha), \tag{2.3.18}$$

$$\Phi_+(0) + \Phi_-(-0) = -A(\alpha), \tag{2.3.19}$$

$$\Phi'_+(0) + \Phi'_-(0) = -\gamma(\alpha) A(\alpha) \tag{2.3.20}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki üç denklemden $A(\alpha)$ bilinmeyenini elemek suretiyle Wiener-Hopf denklemine ulaşabiliriz. Şimdi (2.3.18) ve (2.3.19) denklemini taraf tarafa toplarsak,

$$2\Phi_+(0) = -\Phi_-(-0) - \Phi_-(+0) \tag{2.3.21}$$

eşitliğini elde ederiz. Yine (2.3.18), (2.3.19) ve (2.3.20) numaralı eşitliklerden faydalanarak

$$\Phi_+(+0) - \Phi_-(-0) = 2A(\alpha), \tag{2.3.22}$$

$$\Phi'_+(0) + \Phi'_-(0) = -\gamma(\alpha)A(\alpha) \tag{2.3.23}$$

eşitliklerini yazabiliriz ve $A(\alpha)$ fonksiyonunu $\Phi'_+(0)$ ve $\Phi'_-(0)$ fonksiyonları cinsinden aşağıdaki şekilde bulabiliriz:

$$A(\alpha) = -\frac{1}{\gamma(\alpha)}(\Phi'_+(0) + \Phi'_-(0)).$$

$A(\alpha)$ nın eşitini (2.3.21) ve (2.3.23) denkleminde yerine yazdığımızda,

$$\begin{aligned} \Phi_+(+0) - \Phi_-(-0) &= -\frac{2}{\gamma(\alpha)}(\Phi'_+(0) + \Phi'_-(0)), \\ \Phi'_+(0) + \Phi'_-(0) &= -\frac{1}{2}\gamma(\alpha)\left(\Phi_-(+0) - \Phi_-(-0)\right) \end{aligned} \tag{2.3.24}$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitliklerde yer alan $\Phi'_-(0)$ fonksiyonunun değerini $(i)$ sınır koşulunu kullanarak aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} \Phi'_-(0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial\phi}{\partial y} e^{i\alpha x} dx &= \int_{-\infty}^{0} ik\sin\Theta e^{-ikx\cos\Theta + i\alpha x} dx \\ &= ik\sin\Theta \int_{-\infty}^{0} e^{x(-ik\cos\Theta + i\alpha)} dx \\ &= \frac{k\sin\Theta}{\alpha - k\cos\Theta}. \end{aligned}$$

İşlemlerde çok fazla karmaşa yaşamamak için,

$$\Phi_-(+0) - \Phi_-(-0) = 2D_-(\alpha) \quad ; \quad \Phi_-(+0) + \Phi_-(-0) = 2S_-(\alpha)$$

diyelim. $(iv)$ koşulunda verildiği üzere $x \to -\infty$ ve sabitlenmiş bir $y$ için $|\phi(x,y)| < C_1 e^{k_2 x\cos\Theta}$ olduğundan, bu fonksiyonun Fourier dönüşümü olan $\Phi_-(\alpha, y)$ fonksiyonu da $\tau < k_2\cos\Theta$ bölgesinde analitiktir. O halde yukarıda farklar $S_-(\alpha)$ ve toplamlar $D_-(\alpha)$ olmak üzere bu fonksiyonlarda $\tau < k_2 \cos\Theta$ bölgesinde analitiktir. (2.3.21) eşitliğinden faydalanarak

$$\Phi_+(0) = -S_-(\alpha) \tag{2.3.25}$$

ve (2.3.24) eşitliğinden faydalanarak da

$$\begin{aligned}\Phi'_+(0) + \Phi'_-(0) &= -\frac{1}{2}\gamma(\alpha)\{\Phi_-(+0) - \Phi_-(-0)\} \\ &= -\gamma(\alpha)D_-(\alpha)\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Yazdığımız en son denklemde $\Phi'_-(0)$ fonksiyonunun eşitini yerine yazalım:

$$\Phi'_+(0) + \frac{k\sin\Theta}{\alpha - k\cos\Theta} = -\gamma(\alpha)D_-(\alpha). \tag{2.3.27}$$

Şimdi de $\gamma(\alpha)$ fonksiyonunu çarpanlarına ayıralım:

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha) &= (\alpha^2 - k^2)^{1/2} \\ &= (\alpha - k)^{1/2}(\alpha + k)^{1/2}\end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada $-k_2 < \tau < k_2$ şeridinde $\sigma \to \infty$ iken $(\alpha \pm k)^{1/2} \to \alpha^{1/2}$ dir. $(\alpha + k)^{1/2}$ çarpanı $\tau > -k_2$ bölgesinde analitik ve sıfır olmayan bir çarpandır. O halde (2.3.27) eşitliğinde her iki tarafı $(\alpha + k)^{1/2}$ ifadesine bölebiliriz.

$$\frac{\Phi'_+(0)}{(\alpha + k)^{1/2}} + \frac{k\sin\Theta}{(\alpha + k)^{1/2}(\alpha - k\cos\Theta)} = -(\alpha - k)^{1/2}D_-(\alpha). \tag{2.3.28}$$

Yukarıdaki eşitliğin sol tarafındaki ilk terim $\tau > -k_2$ bölgesinde analitiktir. Eşitliğin sağ tarafındaki terimler $\tau < k_2\cos\Theta$ bölgesinde analitiktir. Kalan terim ise $-k_2 < \tau < k_2\cos\Theta$ şeridinde analitiktir. Ayrıca $\alpha = k\cos\Theta$ noktası, eşitliğin sol tarafındaki toplamlardan ikincisinin kutup noktasıdır. Bu kutup noktasındaki rezidü,

$$\mathsf{Res}(\phi, k\cos\Theta) = \frac{k\sin\Theta}{(k + k\cos\Theta)^{1/2}}$$

olarak bulunur. $\dfrac{k\sin\Theta}{(\alpha + k)^{1/2}(\alpha - k\cos\Theta)}$ fonksiyonundan rezidüsünü çıkartıp ekleyerek bu fonksiyonuda $(+)$ ve $(-)$ fonksiyonlarına ayırabiliriz ve

$$\begin{aligned}\frac{k\sin\Theta}{(\alpha + k)^{1/2}(\alpha - k\cos\Theta)} &= \frac{k\sin\Theta}{(\alpha - k\cos\Theta)}\left\{\frac{1}{(\alpha + k)^{1/2}} - \frac{1}{(k + k\cos\Theta)^{1/2}}\right\} + \\ &\quad + \frac{k\sin\Theta}{(k + k\cos\Theta)^{1/2}(\alpha - k\cos\Theta)}\end{aligned} \tag{2.3.29}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada,

$$\frac{k\sin\Theta}{\alpha-k\cos\Theta}\left\{\frac{1}{(\alpha+k)^{1/2}}-\frac{1}{(k+k\cos\Theta)^{1/2}}\right\}=H_+(\alpha)$$

ve

$$\frac{k\sin\Theta}{(k+k\cos\Theta)(\alpha-k\cos\Theta)}=H_-(\alpha)$$

alınırsa

$$\frac{k\sin\Theta}{(\alpha+k)^{1/2}(\alpha-k\cos\Theta)}=H_+(\alpha)+H_-(\alpha)$$

olur. $H_+(\alpha)$ fonksiyonu $\tau > -k_2$ bölgesinde, $H_-(\alpha)$ fonksiyonu ise $\tau < k_2\cos\Theta$ bölgesinde analitiktir. Şimdi $H_+(\alpha)$ ve $H_-(\alpha)$ fonksiyonlarını (2.2.28) numaralı eşitlikte yerine yazalım:

$$(\alpha+k)^{-1/2}\Phi'_+(0)+H_+(\alpha)=-(\alpha-k)^{1/2}D_-(\alpha)-H_-(\alpha)$$

ve

$$(\alpha+k)^{-1/2}\Phi'_+(0)+H_+(\alpha)=-(\alpha-k)^{1/2}D_-(\alpha)-H_-(\alpha)=E(\alpha) \qquad (2.3.30)$$

diyelim. Yukarıdaki eşitlikte sol taraf $\tau > -k_2$ bölgesinde, sağ taraf ise $\tau < k_2\cos\Theta$ bölgesinde analitik olduğundan, bunların eşit olduğu bir $E(\alpha)$ fonksiyonu yukarıdaki bölgelerde ve $-k_2 < \tau < k_2\cos\Theta$ bölgesinde analitiktir. Analitik devam ilkesi kullanılarak da $E(\alpha)$ fonksiyonu tüm $\alpha$ düzlemine analitik devam ettirebilir. Eğer (2.2.30) eşitliğindeki fonksiyonların $\alpha \to \infty$ iken davranışlarını kestirebilirsek, Liouville teoremini kullanarak $E(\alpha)$ fonksiyonun davranışını belirleyebiliriz. (2.2.30) eşitliğindeki fonksiyonların $\alpha \to \infty$ iken davranışlarını inceleyecek olursak, $(v)$ sınır koşulunu ve Abelian teoremini kullanarak

$\tau < k_2\cos\Theta$ bölgesinde

$$|\Phi_-(+0)| < C_1|\alpha|^{-1},$$

$\tau > -k_2$ bölgesinde

$$|\Phi'_+(0)| < C_2|\alpha|^{-1/2}$$

ile sınırlıdır. $H_+(\alpha)$ ve $H_-(\alpha)$ fonksiyonlarının $\alpha \to \infty$ iken davranışları da tanımları gereği $\tau < k_2\cos\Theta$ bölgesinde

$$|H_-(\alpha)| < C_4|\alpha|^{-1},$$

$\tau > -k_2$ bölgesinde ise

$$|H_+(\alpha)| < C_4|\alpha|^{-1}$$

şeklindedir. $\alpha \to \infty$ iken yukarıdaki fonksiyonların davranışları sonucunda $\tau < k_2 \cos\Theta$ bölgesinde

$$|E(\alpha)| < C_5|\alpha|^{-1/2},$$

$\tau > -k_2$ bölgesinde ise

$$|E(\alpha)| < C_6|\alpha|^{-1}$$

olduğu çıkar. O halde $E(\alpha)$ fonksiyonu tüm $\alpha$ düzleminde analitiktir ve $\alpha \to \infty$ iken sıfıra gider. Liouville teoreminden $E(\alpha) = 0$ sonucu çıkar. (2.3.30) numaralı eşitliğe tekrar dönecek olursak,

$$\Phi'_+(0) = -(\alpha + k)^{1/2} H_+(\alpha) \qquad (2.3.31)$$

$$D_-(\alpha) = -(\alpha - k)^{1/2} H_-(\alpha) \qquad (2.3.32)$$

eşitliklerini yazabiliriz. Ayrıca

$$\Phi'_+(0) + \Phi'_-(0) = -\gamma(\alpha)A(\alpha)$$

ve

$$\Phi'_-(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x} ik \sin\Theta e^{-ikx\cos\Theta} dx = \frac{k\sin\Theta}{\alpha - k\cos\Theta}$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikleri (2.3.30) numaralı denklemde yerine yazarsak,

$$-H_+(\alpha)(\alpha + k)^{1/2} + \frac{k\sin\Theta}{\alpha - k\cos\Theta} = -(\alpha + k)^{1/2}(\alpha - k)^{1/2}A(\alpha)$$

buluruz. $H_+(\alpha)$ fonksiyonunun eşitini de yerine yazarsak,

$$\frac{-k\sin\Theta}{\alpha - k\cos\Theta}\left\{\frac{1}{(\alpha + k)^{1/2}} - \frac{1}{(k + k\cos\Theta)^{1/2}}\right\}(\alpha + k)^{1/2} + \frac{k\sin\Theta}{\alpha - k\cos\Theta} = -(\alpha + k)^{1/2}(\alpha - k)^{1/2}A(\alpha) \qquad (2.3.33)$$

eşitliğine dönüşür ve $A(\alpha)$ fonksiyonunu da

$$A(\alpha) = -\frac{k\sin\Theta}{(k + k\cos\Theta)^{1/2}(\alpha - k\cos\Theta)(\alpha - k)^{1/2}} \qquad (2.3.34)$$

şeklinde buluruz. Bilinmeyen $A(\alpha)$ fonksiyonunu bulduktan sonra problemin çözümü olan (2.3.15) numaralı eşitlikteki $\Phi(\alpha, y)$ fonksiyonunun eşitinde yerine yazıp, bu fonksiyonun ters Fourier dönüşümünü alırsak,

$$\phi(x, y) = \mp\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\sin\Theta e^{-i\alpha x \mp \gamma y}}{(k + k\cos\Theta)^{1/2}(\alpha - k\cos\Theta)(\alpha - k)^{1/2}} d\alpha$$

eşitliğini elde ederiz ve yarım açı formülleri yardımıyla, $y \geq 0$ bölgesi üst yarı düzlemi, $y \leq 0$ bölgesi ise alt yarı düzlemi ifade etmek üzere $\phi(x,y)$ fonksiyonunun eşitini aşağıdaki şekilde yazarız:

$$\phi(x,y) = \mp\frac{1}{2\pi}(k - k\cos\Theta)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\alpha x \mp \gamma y}}{(\alpha - k\cos\Theta)(\alpha - k)^{1/2}}d\alpha. \tag{2.3.35}$$

En son yazılan integralin hesabı payda da hem dal hem de kutup noktası olduğundan oldukça zordur. Bu integralin hesabında $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere $\alpha = -k\cos(\varphi + it)$ $(-\infty < t < \infty)$ konturunu kullanılıp (bkz. Ek-2), trigonometrik eşitliklerden ve dönüşümlerden faydalanarak yapılmıştır. Sonuç ise $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\Theta$ gelen dalganın bariyer ile yaptığı açı ve $\Theta$, $\theta$ açısı $(0, \pi)$ aralığında iken,

$$\phi = \begin{cases} J + 2\pi i e^{-ikr\cos(\Theta+\theta)}, & 0 < \pi - \Theta < \theta < \pi, \\ J & , \ 0 < \theta < \pi - \Theta < \pi \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. (2.3.35) integralininin detaylı hesabı Ek-2 de verilmiştir. Burada

$$J = 2i\sin\frac{1}{2}\Theta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikr\cosh t}\sin\frac{1}{2}(\theta + it)}{\cos(\theta + it) + \cos\Theta}dt$$

dir. O halde $(0, \pi)$ aralığındaki tüm $\theta$ ve $\Theta$ açıları için $\phi(x,y)$ dalga potansiyeli

$$F(v) = \int_{0}^{\infty} e^{iu^2}du$$

ile tanımlanan Fresnel integralleri cinsinden

$$\begin{aligned}\phi(x,y) = 2\pi^{1/2}e^{i\pi/4}[&-e^{-ikr\cos(\varphi-\Theta)}F[(2kr)^{1/2}\cos\tfrac{1}{2}(\theta - \Theta)] \\ &+ e^{-ikr\cos(\theta+\Theta)}F[(2kr)^{1/2}\cos\tfrac{1}{2}(\theta + \Theta)]]\end{aligned} \tag{2.3.36}$$

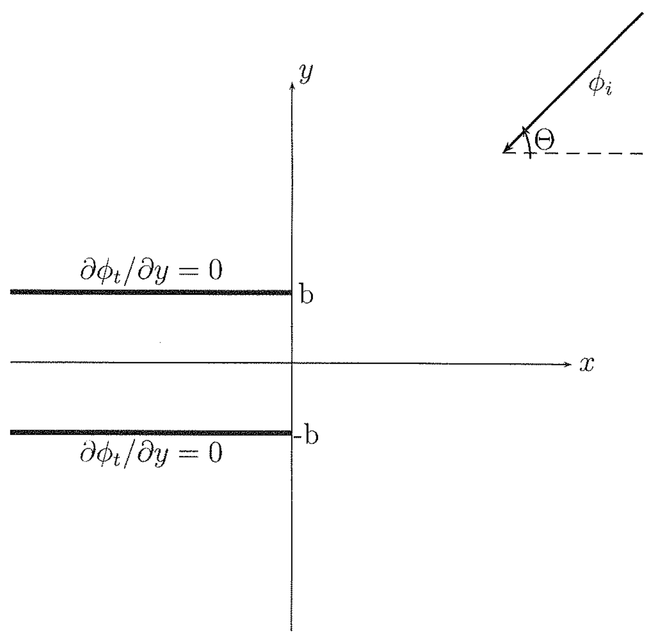
şeklinde hesaplanır [1].

# 3 İKİ YARI SONSUZ PARALEL DÜZLEM ÜZERİNE DÜŞEN DÜZLEM DALGASI

Bir önceki bölümde Sommerfeld yarı düzlem problemini çözmek için Jones metodunu ve bu metodda kullanılan Wiener-Hopf tekniğini kullandık. Bu bölümde ise daha karmaşık bir geometri ve sınır değerleri ile verilen dalga probleminde aynı tekniğe başvuracağız. Ele alacağımız problemde, düzlemin $-\infty < x < 0$ kısmındaki $y = +b$ ile $y = -b$ doğruları arasında kalan bölgesinde bir kanal ve birinci bölgede sonsuzdan bir $\Theta$ açısıyla gelen düzlem dalgası olsun. Belli sınır şartları altında, bu gelen dalganın kanalın duvarlarına çarpması sonucu oluşan iletilen, yansıyan ve kırınan dalga potansiyellerinin herhangi bir noktadaki değerini bulmaya çalışacağız. $t$ zaman parametresi olmak üzere, $\phi(x, y, t)$ fonksiyonu bir önceki bölümde verilen, bilinen dalga denklemini sağlasın. $e^{\pm iwt}$ zaman çarpanı olmak üzere, $\phi$ fonksiyonu zamana göre harmonik olsun. Bu durumda

$$\phi(x, y, t) = \phi(x, y)e^{\pm iwt}$$

eşitliği geçerlidir.




Şekil 3.0.2: İki Yarı Sonsuz Paralel Düzlem Üzerine Düşen Düzlem Dalgası

Şekil 3.0.2 de görüldüğü gibi negatif $x$ ekseni boyunca $y = -b$ ve $y = +b$ arasında kalan bölgede bir kanal ve birinci bölgeden bir $\Theta$ açısıyla gelip bu kanala çarpan dalga vardır. Gelen dalganın ifadesi

$$\phi_i = e^{-ikx\cos\Theta - iky\sin\Theta}$$

şeklindedir. 2. Bölümde ele alınan problemdeki gibi herhangi bir noktadaki $\phi_t(x, y)$ fonksiyonu toplam potansiyel olup $\phi(x, y)$ iletilen, yansıyan ve kırınan dalgayı temsil etmek üzere, $\phi_t(x, y) = \phi(x, y) + \phi_i(x, y)$ eşitliği geçerlidir ve $\phi_t(x, y)$ bilinen dalga denklemini sağlar. $\phi_t(x, y)$ nin eşitini dalga denkleminde yerine koyduğumuzda

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + k^2\phi = 0$$

olan indirgenmiş dalga denklemini elde ederiz. Buradaki dalga sayısı $k = k_1 + ik_2$ $(k_2 > 0)$ matematiksel uygunluk açısından kompleks değerli alınmıştır. Düzlem üzerinde $y = +b$ ve $y = -b$ eksenleri boyunca $\dfrac{\partial \phi_t}{\partial y} = 0$ kabul edip, aşağıdaki sınır koşulları altında yukarıdaki indirgenmiş dalga denklemini çözüp, herhangi bir noktadaki $\phi$ dalga potansiyelini hesaplayabileceğiz.

Sınır koşulları aşağıdaki gibidir:

(i) $x < 0$ bölgesinde ve $y = \mp b$ sınırında $\phi_y(x, \mp b) = ik\sin\Theta e^{-ikx\cos\Theta \mp ikb\sin\Theta}$,

(ii) $-\infty < x < \infty$ olmak üzere $y = \pm b$ sınırında $\phi_y(x, \pm b)$ fonksiyonu sürekli,

(iii) $y = \pm b$ sınırında ve $x > 0$ bölgesinde $\phi(x, y)$ fonksiyonu sürekli,

(iv) $x > 0$ bölgesinde $r$ sırasıyla, $(x, b)$ den $(0, b)$ ye yada $(x, -b)$ den $(0, -b)$ ye uzaklık olmak üzere $\phi = \mathcal{O}(1)$, $\phi_y = \mathcal{O}(r^{-1/2})$,

(v) $-\infty < x < \infty$ aralığında, herhangi bir sabitlenmiş $y$ için, $C_1$, $C_2$, $C_3$ pozitif sabitler olmak üzere,

a) $x \to \infty$ iken kırınan dalganın varlığından dolayı $|\phi| < C_1 e^{-k_2 x}$ ,

b) $x \to -\infty$ iken $|\phi| < C_2 e^{k_2 x\cos\Theta}$ ,

c) $x < 0$ iken $y \leq -b$ bölgesinde sadece kırınan dalga vardır ve toplam potansiyel $x \to -\infty$ iken $|\phi_t| < C_3 e^{k_2 x}$,

d) Kanalın içinde ilerleyen dalgaların $C_4$, $C_5$ pozitif sabitler olmak üzere $C_5 e^{-ikx}$ şeklinde davranmasından dolayı $y \in [-b, b]$ iken $x < 0$ bölgesinde dalganın davranışı $|\phi_t| \leq C_4 e^{k_2 x}$ şeklindedir.

Yukarıdaki koşullarda $x \to -\infty$ iken $|\phi| < C_2 e^{k_2 x \cos\Theta}$ ve $x \to \infty$ iken $|\phi| < C_1 e^{-k_2 x}$ verilmiştir. O halde bu sınır şartlarından yola çıkarak $-\infty < x < \infty$ iken $\phi(x, y)$ dalga potansiyelinin analitiklik bölgesi $-k_2 < \tau < k_2 \cos\Theta$ şeridi olarak belirlenir. Şimdi indirgenmiş dalga denkleminin Fourier dönüşümünü alarak, denklemi dönüşüm parametresi $\alpha$ nın bir adi diferansiyel denklemine indirgeyebiliriz. Eşitliğin her tarafını $e^{i\alpha x}$ ile çarpıp eksi sonsuzdan, artı sonsuza $x$ değişkenine göre integralini alalım.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, y) e^{i\alpha x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x, y) e^{i\alpha x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \phi(x, y) e^{i\alpha x} dx = 0.$$

Burada $\Phi(\alpha, y)$ fonksiyonu $\phi(x, y)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x, y) e^{i\alpha x} dx = \frac{d^2 \Phi}{dy^2}(\alpha, y),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k^2 \phi(x, y) e^{i\alpha x} dx = k^2 \Phi(\alpha, y)$$

ve

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, y) e^{i\alpha x} dx &= \lim_{A\to\infty} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} e^{i\alpha x} \Big|_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R} i\alpha e^{i\alpha x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \right\} \\
&= \lim_{R\to\infty} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} e^{i\alpha x} \Big|_{-R}^{R} - i\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} e^{i\alpha x} \Big|_{-R}^{R} - \alpha^2 \Phi(\alpha, y) \right\} \\
&= -\alpha^2 \Phi(\alpha, y)
\end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır. $\phi(x, y)$ dalga potansiyelinin sonsuzda sönümleniyor, bu sebepten $R \to \infty$ iken üst ve alt limitlerden gelen katkı sıfır olur. O halde indirgenmiş dalga denklemi, $\gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$ olmak üzere aşağıdaki şekilde adi diferansiyel denkleme dönüşür [8]:

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2}(\alpha, y) - \gamma^2(\alpha) \Phi(\alpha, y) = 0. \tag{3.0.37}$$

$\gamma(\alpha)$, $\alpha$ kompleks değerli değişkeninin iki değerli fonksiyonudur ve problemin çözümünde biz $\gamma(\alpha)$ fonksiyonunun $\alpha = 0$ iken $\gamma(0) = -ik$ değerini alan dalı ile çalışacağız. O halde yukarıdaki adi diferansiyel denklemi çözdüğümüzde $\alpha = \sigma + i\tau$ ve $\gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$ olmak üzere, $\gamma(\alpha)$ fonksiyonunun reel kısmı pozitif olduğundan

$\Phi(\alpha, y)$ dalga potansiyelini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\Phi(\alpha, y) = \begin{cases} A(\alpha)e^{-\gamma y} & y \geq b \\ D(\alpha)e^{\gamma y} & y \leq -b \\ B(\alpha)e^{-\gamma y} + C(\alpha)e^{\gamma y} & -b \leq y \leq b. \end{cases} \tag{3.0.38}$$

Burada $A(\alpha)$, $D(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ bilinmeyen fonksiyonlardır. $\Phi(\alpha, y)$ dalga potansiyelini bulmak için Wiener-Hopf tekniğini kullanacağız. Wiener-Hopf denklemini elde etmek için verilen sınır değer koşullarından faydalanarak eleme yöntemi ile $A - D$ fonksiyonlarını eleyeceğiz. $y = +b$ ve $y = -b$ sınırında $\dfrac{\partial \phi}{\partial y}$ fonksiyonu sürekli olduğundan bu ifadenin Fourier dönüşümü olan $\dfrac{d\Phi}{dy}$ fonksiyonu da süreklidir. O halde (3.0.38) eşitliklerini kullanarak $y = +b$ sınırında $\dfrac{d\Phi}{dy}$ fonksiyonunun değerini yazarsak,

$$A(\alpha) = B(\alpha) - C(\alpha)e^{2\gamma b},$$

$y = -b$ sınırında $\dfrac{d\Phi}{dy}$ fonksiyonunu yazarsak:

$$D(\alpha) = -B(\alpha)e^{2\gamma b} + C(\alpha)$$

eşitlikleri çıkar. $\Phi(\alpha, y)$ fonksiyonunun $y = +b$ sınırındaki sağdan ve soldan limit değerlerini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\Phi(b^+) = \Phi_+(b^+) + \Phi_-(b^+)$$
$$\Phi(b^-) = \Phi_+(b^-) + \Phi_-(b^-).$$

Benzer şekilde $y = -b$ noktasındaki sağdan ve soldan limit değerlerini de

$$\Phi(-b^+) = \Phi_+(-b^+) + \Phi_-(-b^+)$$
$$\Phi(-b^-) = \Phi_+(-b^-) + \Phi_-(-b^-)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.0.38) eşitliğindeki $y$ nin değerlerine göre $\Phi(\alpha, y)$ fonksiyonunun eşitinden faydalanarak

$$\Phi_+(b^+) + \Phi_-(b^+) = Be^{-\gamma b} - Ce^{\gamma b} \tag{3.0.39}$$

$$\Phi_+(b^-) + \Phi_-(b^-) = Be^{-\gamma b} + Ce^{\gamma b} \tag{3.0.40}$$

$$\Phi_+(-b^+) + \Phi_-(-b^+) = Be^{\gamma b} + Ce^{-\gamma b} \tag{3.0.41}$$

$$\Phi_+(-b^-) + \Phi_-(-b^-) = -Be^{\gamma b} + Ce^{-\gamma b} \tag{3.0.42}$$

denklemlerini elde ederiz. Sınır koşullarında verildiği üzere $x > 0$ iken $y = +b$ ve $y = -b$ sınırında $\phi(x, y)$ fonksiyonu sürekli idi. Bundan dolayı bu sınırlarda $\phi$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü olan $\Phi(\alpha, y)$ fonksiyonuda süreklidir. O halde sağ ve sol limit değerleri eşittir. Yani $\Phi_+(b^+) = \Phi_+(b^-)$ ve $\Phi_+(-b^+) = \Phi_+(-b^-)$ dir. Bu süreklilik koşulunu kullanarak (3.0.39) eşitliğinden (3.0.40) eşitliğini taraf tarafa çıkartırsak,

$$\Phi_-(b^+) - \Phi_-(b^-) = -2Ce^{\gamma b}$$

elde ederiz. Burada,

$$-2Ce^{\gamma b} = 2F_-(b) \tag{3.0.43}$$

diyelim. Benzer şekilde (3.0.42) eşitliğinden de (3.0.41) eşitliğini taraf tarafa çıkartırsak

$$\Phi_-(-b^-) - \Phi_-(-b^+) = -2Be^{\gamma b}$$

elde ederiz. Ayrıca,

$$-2Be^{\gamma b} = 2F_-(-b) \tag{3.0.44}$$

diyelim. $(v)$ koşulunda bahsedildiği gibi, $x \to -\infty$ iken $|\phi| < C_2 e^{k_2 x \cos\Theta}$ olduğundan sabitlenmiş bir $y$ için,

$$\begin{aligned}\Phi_-(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{0} e^{i(\sigma+i\tau)x+k_2 x\cos\Theta}dx &= \int_{-\infty}^{0} e^{(i\sigma-\tau)x+k_2 x\cos\Theta}dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{i\sigma}e^{x(k_2\cos\Theta-\tau)}dx\end{aligned}$$

elde edilir. Bu integral $\tau < k_2\cos\Theta$ bölgesinde yakınsaktır ve $F_-(-b)$ ve $F_-(b)$ fonksiyonları da bu bölgede analitiktir. $y = +b$ ve $y = -b$ sınırında (3.0.39) eşitliğinin türevini alırsak,

$$\Phi'_+(b) + \Phi'_-(b) = \gamma(-Be^{-\gamma b} + Ce^{\gamma b}) \tag{3.0.45}$$

$$\Phi'_+(-b) + \Phi'_-(-b) = \gamma(-Be^{\gamma b} + Ce^{-\gamma b}) \tag{3.0.46}$$

eşitliklerini elde ederiz. $(i)$ sınır koşulunu kullanarak, $\phi_y(x, y)$ fonksiyonunun $y = \mp b$ sınırında Fourier dönüşümünü alırsak, $\Phi'_-(x, \pm b) = \Phi'_-(\pm b)$ olmak üzere,

$$\Phi'_-(\pm b) = k\sin\Theta e^{\mp ikb\sin\Theta}(\alpha - k\cos\Theta)^{-1} \tag{3.0.47}$$

eşitliğini buluruz.

$$\Phi'_+(b) + \Phi'_+(-b) = S'_+ \tag{3.0.48}$$

$$F_-(b) + F_-(-b) = S_- \tag{3.0.49}$$

ve

$$\Phi'_+(b) - \Phi'_+(-b) = D'_+ \tag{3.0.50}$$

$$F_-(b) - F_-(-b) = D_- \tag{3.0.51}$$

şeklinde toplamları $S$, farkları $D$ ile tanımlayalım. (3.0.43) ile (3.0.44) eşitliklerini taraf tarafa çıkartırtıp, (3.0.43) ile (3.0.44) eşitliklerini taraf tarafa ekleyip, tanımlanan $S'_+, S_-, D'_+, D_-$ gösterimlerini ve (3.0.47) sonucunu kullanarak,

$$\Phi'_+(b) + \Phi'_+(-b) + 2\Phi'_-(b) = \gamma(\alpha)[(C-B)e^{\gamma(\alpha)b} + (C-B)e^{-\gamma(\alpha)b}],$$

$$S'_+ + \frac{2k\sin\Theta e^{-ikb\sin\Theta}}{\alpha - k\cos\Theta} = -\gamma(\alpha)(1+e^{-2\gamma(\alpha)b})(C-B)$$

olarak ifade ederiz. Buradan da $(C-B)$ ifadesinin yerine $D_-$ yazarsak,

$$S'_+ + \frac{2k\sin\Theta\cos(kb\sin\Theta)}{\alpha - k\cos\Theta} = -\gamma(1+e^{-2\gamma b})D_-$$

eşitliğini elde ederiz. Benzer yollar ile

$$D'_+ - \frac{2ik\sin\Theta\sin(kb\sin\Theta)}{\alpha - k\cos\Theta} = -\gamma(1-e^{-2\gamma b})S_-.$$

eşitliği de elde edilir. Yukarıdaki denklemler Wiener-Hopf tipinde denklemlerdir. Şimdi çarpanlarına ayırma metodunu kullanarak yukarıdaki son iki eşitliğin sağ tarafını $(+)$ ve $(-)$ fonksiyonlarına aşağıdaki biçimde ayıralım.

$$\frac{1}{2}(1+e^{-2\gamma b}) = e^{-\gamma b}\cosh\gamma b = K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha). \tag{3.0.52}$$

$$\frac{1}{2\gamma b}(1-e^{-2\gamma b}) = e^{-\gamma b}(\gamma b)^{-1}\sinh\gamma b = L(\alpha) = L_+(\alpha)L_-(\alpha). \tag{3.0.53}$$

Burada $K_+$, $L_+$ ve $K_-$, $L_-$ fonksiyonlarını sırasıyla $\tau > -k_2$ ve $\tau < k_2$ bölgelerinde analitik, uygun yarı düzlemde $\alpha \to \infty$ iken $|K_+|$, $|K_-|$ sabite, $|L_+|$, $|L_-|$ ise $|\alpha|^{-1/2}$ ye asimptotik olacak şekilde ayıracağız. $K(\alpha)$ fonksiyonunu yukarıdaki (3.0.52) numaralı denklemde yerine yazarsak;

$$\frac{S'_+ + \dfrac{2k\sin\Theta\cos(kb\sin\Theta)}{\alpha - k\cos\Theta}}{\sqrt{\alpha+k}K_+(\alpha)} = -2\sqrt{\alpha-k}K_-(\alpha)D_-$$

eşitliğini elde ederiz. Bu denklemin $\alpha = k\cos\Theta$ basit kutbudur. Basit kutbundaki rezidü

$$\frac{2k\sin\Theta\cos(kb\sin\Theta)}{(k+k\cos\Theta)^{1/2}K_+(k\cos\Theta)}$$

olarak hesaplanır. Bu rezidüyü denklemin her iki tarafından çıkartarak

$$\frac{S'_+}{(\alpha+k)^{1/2}K_+(\alpha)} + \frac{2k\sin\Theta\cos(kb\sin\Theta)}{\alpha - k\cos\Theta}\left\{\frac{1}{(\alpha+k)^{1/2}K_+(\alpha)}\right\} - \tag{3.0.54}$$

$$-\frac{2k\sin\Theta\cos(kb\sin\Theta)}{\alpha - k\cos\Theta}\left\{\frac{1}{(k\cos\Theta+k)^{1/2}K_+(k\cos\Theta)}\right\}$$

$$= -2(\alpha-k)^{1/2}K_-(\alpha)D_- - \frac{2k\sin\Theta\cos(kb\sin\Theta)}{(\alpha-k\cos\Theta)(k\cos+k)^{1/2}K_+(k\cos\Theta)}$$

ifadesini elde ederiz. $(iv)$ koşulunu kullanarak uygun yarı düzlemde Abelian teoreminden $\alpha \to \infty$ iken $D_- = \mathcal{O}(|\alpha|^{-1})$ ve $S'_+ = \mathcal{O}(|\alpha|^{-1/2})$ diyebiliriz. Bundan dolayı yazdığımız en son eşitlikteki tüm terimler $\alpha \to \infty$ iken sıfıra gider. (3.0.56) numaralı denklemde eşitliğin her iki tarafındaki fonksiyonlar her $\alpha$ için analitik ve sınırlı olduğundan, Liouville teoreminden eşitliğin her iki tarafıda sıfıra eşittir. O halde

$$-2(\alpha-k)^{1/2}K_-(\alpha)D_-(\alpha) - \frac{2k\sin\Theta\cos(kb\sin\Theta)}{(\alpha-k\cos\Theta)(k\cos\Theta+k)^{1/2}K_+(k\cos\Theta)} = 0$$

yazabiliriz ve buradan da

$$D_-(\alpha) = -\frac{k\sin\Theta\cos(kb\sin\Theta)}{(k+k\cos\Theta)^{1/2}K_+(k\cos\Theta)(\alpha-k)^{1/2}K_-(\alpha)(\alpha-k\cos\Theta)} \tag{3.0.55}$$

olduğu çıkar. Benzer bir yol ile (3.0.52) eşitliğinden de,

$$S_-(\alpha) = \frac{ik\sin\Theta\sin(kb\sin\Theta)}{b(k+k\cos\Theta)(\alpha-k)(\alpha-k\cos\Theta)L_+(k\cos\Theta)L_-(\alpha)} \tag{3.0.56}$$

ifadesi elde edilir. Şimdi (3.0.54) numaralı denklemde verilen $K_-$ ve $K_+$ fonksiyonlarının, çarpımsal ayrışma kullanarak davranışlarını belirlemeye çalışalım. $K(\alpha)$ fonksiyonunun içerdiği $\cosh\gamma b$ fonksiyonu tam fonksiyondur [9]. O halde sonsuz çarpım teoremini kullanarak bu fonksiyonu sonsuz çarpım şeklinde yazıp $(+)$ ve $(-)$ fonksiyonlarına ayırabiliriz. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ noktaları, $f(\alpha) = \cosh\gamma b$ nin sıfırları olmak üzere,

$$f(\alpha) = f(0)e^{\alpha f'(0)/f(0)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha}{\alpha_n}\right)e^{\alpha/\alpha_n}$$

şeklinde ifade edilir.

$$f(0) = \frac{e^{ikb}+e^{-ikb}}{2} = \cos kb$$

olarak elde ederiz. $(n-\frac{1}{2})\pi$ noktaları $\cos kb$ nin sıfırları olmak üzere,

$$\cos kb = \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\left\{\frac{kb}{(n-\frac{1}{2})\pi}\right\}^2\right\}$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-k^2 b^2_{n-\frac{1}{2}}\right\}$$

şeklinde yazılabilir ( $b_{n-1/2}=\frac{b}{(n-1/2)\pi}$, $n=0,1,2\cdots$).

$\alpha_{n-\frac{1}{2}}$ noktaları $\cosh\gamma(\alpha)b$ nin sıfırları ve

$$\alpha_{n-\frac{1}{2}} = i\left\{\frac{1}{b^2_{n-\frac{1}{2}}-k^2}\right\}^{1/2}$$

olmak üzere

$$\cosh\gamma(\alpha)b = \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-k^2 b^2_{n-\frac{1}{2}}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-(\alpha/\alpha_{n-\frac{1}{2}})\right\}$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-k^2 b^2_{n-\frac{1}{2}}+\alpha^2 b^2_{n-1/2}\right\}$$

olarak ifade edilir. Yukarıdaki fonksiyonun tamamına $H(\alpha)$ dersek,

$$H(\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-k^2 b^2_{n-\frac{1}{2}}+\alpha^2 b^2_{n-\frac{1}{2}}\right\}$$

olur ve $H(\alpha)$ fonksiyonunu, sıfırlarının üst yarı düzlem veya alt yarı düzlemde olmasına göre aşağıdaki şekilde $(+)$ ve $(-)$ fonksiyonlarına ayırabiliriz:

$$H\pm(\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty}\left\{(1-k^2 b^2_{n-\frac{1}{2}})^{1/2}\mp i\alpha b_{n-\frac{1}{2}}\right\}e^{\pm i\alpha b_{n-\frac{1}{2}}}.$$

$e^{-\gamma(\alpha)}$ fonksiyonunun faktorizasyonu oldukça zor ve uzun olduğundan akışı bozmamak için bu faktorizasyon Ek-1 de verilmiştir ve aşağıdaki şekildedir:

$$e^{-\gamma(\alpha)b} = e^{-T_+(\alpha)}e^{-T_-(\alpha)}$$

$$T_+(\alpha) = \pi^{-1}b\gamma(\alpha)\arccos(\alpha/k) \quad : \quad T_-(\alpha) = T_+(-\alpha) \tag{3.0.57}$$

$$T_+(\alpha) = (ib\alpha/\pi)\ln(2\alpha/k)+\mathcal{O}(|\alpha|^{-1}). \tag{3.0.58}$$

Görüldüğü üzere $K(\alpha) = e^{-\gamma(\alpha)b}\cosh\gamma(\alpha)b$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan sonsuz çarpım teoreminden,

$$K(\alpha) = K(0)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-(\alpha/\alpha_n)^2\right\}$$

yazabiliriz ve $K(\alpha)$ fonksiyonunu da düzlemdeki sıfırlarının yerlerine göre aşağıdaki şekilde ayrıştırabiliriz:

$$K_\pm(\alpha) = K(0)^{1/2} e^{\mp\chi(\alpha)} \prod_{n=1}^{\infty} \{1 \pm (\alpha/\alpha_n)\}\, e^{\mp(\alpha/\beta_n)},$$

$$K_\pm(\alpha) = e^{\mp\chi_1(\alpha) - T_\pm(\alpha)} \times \prod_{n=1}^{\infty} \{(1 - k^2 b_{n-1/2}^2)^{1/2} \mp i\alpha b_{n-1/2} e^{\pm i\alpha b_{n-1/2}}\}.$$

Burada $K_+(\alpha)$ ve $K_-(\alpha)$ fonksiyonlarının sırasıyla bir üst yarı düzlemde ve bir alt yarı düzlemde (arakesitleri boş kümeden farklı) analitik ve sıfırları yoktur. Ayrıca $\chi(\alpha)$ keyfi bir fonksiyondur ve $\chi(\alpha)$ nın uygun seçimi ile $\alpha \to \infty$ iken $K_+(\alpha)$ ve $K_-(\alpha)$ nın istenmeyen davranışlarını elimine edebiliriz. Bilinen $\Gamma(\alpha)$ fonksiyonunun özelliklerinden faydalanacağız. Bunun için öncelikle $\Gamma(\alpha)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $\alpha$ kompleks değişken olmak üzere $\Gamma$ fonksiyonu,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad : \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

şeklinde ifade edilir. $\{\Gamma(\alpha)^{-1}\}$ fonksiyonu ise

$$\{\Gamma(\alpha)\}^{-1} = \alpha e^{C\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \{1 + (\alpha/n)\}\, e^{-\alpha/n}$$

ile ifade edilir.[3] Stirling yaklaşımını kullanarak, $\alpha \to \infty$ ve $|\arg\alpha| < \pi$ olmak üzere,

$$\Gamma(\alpha) \sim e^{-\alpha}(\alpha)^{\alpha-\frac{1}{2}}(2\pi)^{1/2} 1 + (12\alpha)^{-1} + \ldots$$

ve

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)/\Gamma(2\alpha) &= 2e^{C\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{1 + \frac{\alpha}{(n-\frac{1}{2})}\right\} e^{-\alpha/(n-\frac{1}{2})} \\ &= \pi^{1/2} 2^{1-2\alpha}/\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \\ &\sim 2^{\frac{1}{2}-2\alpha} e^{\alpha+\frac{1}{2}} (\alpha)^{-\alpha}\end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Şimdi yukarıdaki $\Gamma(\alpha)$ fonksiyonunun $\alpha \to \infty$ iken asimptotik davranışından faydalanarak, $K_-(\alpha)$ fonksiyonunun

$$\begin{aligned}K_-(\alpha) &= e^{\chi_1(\alpha)} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{\sqrt{1 - k^2 b_{n-\frac{1}{2}}^2} + \frac{i\alpha b}{\pi(n-\frac{1}{2})}\right\} e^{\frac{-i\alpha b}{(n-\frac{1}{2})\pi}} \\ &\sim e^{\chi_1(\alpha) + \frac{i\alpha b}{\pi}\ln(\frac{-2\alpha}{k})} A e^{-C\frac{i\alpha b}{\pi}} e^{\frac{i\alpha b}{\pi}} e^{-\frac{i\alpha b}{\pi}\ln(\frac{\alpha b}{\pi})} e^{\frac{-2i\alpha b}{\pi}\ln 2} \\ &\sim A e^{\chi_1(\alpha)} e^{\frac{i\alpha b}{\pi}\ln(\frac{-2\alpha}{k})} e^{\frac{i\alpha b}{\pi}(1-C)} e^{\frac{-i\alpha b}{\pi}\ln(\frac{i\alpha b}{\pi})} e^{\frac{i\alpha b}{\pi}\ln(\frac{1}{4})} \\ &\sim A e^{\chi_1(\alpha)} e^{\frac{i\alpha b}{\pi}\ln(\frac{-2\alpha}{k}\frac{\pi}{i\alpha b}\frac{1}{4})}\end{aligned}$$

[3] $C = 0.5772\ldots$ Euler sabitidir.

biçiminde davrandığı çıkar. O halde $\alpha \to \infty$ iken $K_-(\alpha)$ fonksiyonunun davranışı

$$K_-(\alpha) \sim A e^{\chi_1(\alpha)} e^{\frac{i\alpha b}{\pi}(1-C) - \frac{i\alpha b}{\pi}\ln(\frac{\pi}{2kb}) + \frac{\alpha b}{2}} \tag{3.0.59}$$

şeklindedir. Burada $A$, $\alpha$ dan bağımsız bir sabittir ve üst ve alt yarı düzlemde sırasıyla $K_+$ ve $K_-$ fonksiyonları $|\alpha| \to \infty$ iken sabite asimptotik davrandıklarından,

$$\begin{aligned}\chi_1(\alpha) &= -\frac{i\alpha b}{\pi}\left\{1 - C + \ln\left(\frac{\pi}{2kb}\right) + \frac{\pi i}{2}\right\} \\ &= -\frac{i\alpha b}{\pi}\left\{1 - C + \ln\left(\frac{\pi}{2kb}\right)\right\} + \frac{\alpha b}{2}\end{aligned}$$

şeklindedir. Benzer bir yol ile (3.0.53) eşitliğindeki fonksiyon da $b_n = (b/n\pi)$ olmak üzere,

$$L_{\pm}(\alpha) = e^{\mp\chi_2(\alpha) - T_{\pm}(\alpha)} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{(1 - k^2 b_n^2)^{1/2} \mp i\alpha b_n\right\} e^{\pm i\alpha b_n}, \tag{3.0.60}$$

$$\chi_2(\alpha) = -ib\alpha\pi^{-1}\left\{1 - C + \ln\left(\frac{2\pi}{bk}\right)\right\} + \frac{1}{2}\alpha b \tag{3.0.61}$$

bulunur. Uygun yarı düzlemde $|\alpha| \to \infty$ iken $|L_+(\alpha)|$, $|L_-(\alpha)| \sim |\alpha|^{-1/2}$ dir. Ek-1 de verilen ayrışmadan faydalanarak,

$$K_+(-\alpha) = K_-(\alpha) \quad ; \quad L_+(-\alpha) = L_-(\alpha) \tag{3.0.62}$$

yazılabilir. Şimdi (3.0.43), (3.0.44) ve (3.0.51) numaralı eşitliklerden faydalanarak,

$$\begin{aligned}e^{-\gamma(\alpha)b} D_- &= B - C \\ e^{-\gamma(\alpha)b} S_- &= -B - C\end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu eşitlikler kullanılarak taraf tarafa toplama ve çıkarma işlemleri yapıldığında $B$ ve $C$ katsayıları

$$B = -\frac{1}{2}(S_- - D_-)e^{-\gamma b} \quad : \quad C = -\frac{1}{2}(S_- + D_-)e^{-\gamma b}$$

olarak ifade ederiz. Bu katsayıları $\Phi$ fonksiyonunun eşitinde yerine koyarsak,

$$\begin{aligned}\Phi &= -\frac{1}{2}(S_- - D_-)e^{-\gamma b}e^{-\gamma y} - \frac{1}{2}(S_- + D_-)e^{-\gamma b}e^{\gamma y} \\ &= -S_-\left\{\frac{e^{-\gamma y} + e^{\gamma y}}{2}\right\}e^{-\gamma b} + D_-\left\{\frac{e^{-\gamma y} - e^{\gamma y}}{2}\right\}e^{-\gamma b} \\ &= -S_- \cosh\gamma y e^{-\gamma b} - D_- \sinh\gamma y e^{-\gamma b} \\ &= -\left\{S_- \cosh\gamma y + D_- \sinh\gamma y\right\}e^{-\gamma b}\end{aligned}$$

yazabiliriz. Ters Fourier dönüşümünü kullanarak $\phi$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde buluruz:

$$\phi = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{S_- \cosh\gamma y + D_- \sinh\gamma y\}\, e^{-\gamma b - i\alpha x} d\alpha \quad (|y| \leq b), \quad (3.0.63)$$

$$\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{S_- \sinh\gamma b \pm D_- \cosh\gamma b\}\, e^{-\gamma|y| - i\alpha x} d\alpha \quad (|y| \geq b). \quad (3.0.64)$$

$-b \leq y \leq b$ ve $x < 0$ iken konturu üst yarı düzlemde kapatırsak, $\alpha = k\cos\Theta$ noktası $D_-$ ve $S_-$ fonksiyonlarının, $\alpha = k$ noktası ise $S_-$ fonksiyonunun kutup noktası olur. Ayrıca $\sinh\gamma b$ ve $\cosh\gamma b$ fonksiyonlarının sıfırları sırasıyla $S_-$ ve $D_-$ fonksiyonlarının kutup noktalarıdır. Şimdi sırayla bu kutup noktalarındaki rezidülerini hesaplayalım. (3.0.52) ve (3.0.53) eşitliğinden

$$\frac{1}{L_-(\alpha)} = \frac{L_+(\alpha)\gamma(\alpha) b e^{\gamma(\alpha)b}}{\sinh\gamma(\alpha)b}$$

$$\frac{1}{K_-(\alpha)} = \frac{K_+(\alpha)e^{\gamma(\alpha)b}}{\cosh\gamma(\alpha)b}$$

yazabiliriz. Bu eşitlikler kullanılarak ve $S_-$ ve $D_-$ fonksiyonlarını yerine konularak $y \geq b$ için

$$\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(S_- \sinh\gamma(\alpha)y + D_- \cosh\gamma(\alpha)y)e^{-\gamma y - i\alpha x} d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ik\sin\Theta\sin(kb\sin\Theta)\sinh\gamma(\alpha)bL_+(\alpha)\gamma(\alpha)be^{\gamma(\alpha)b-\gamma(\alpha)y-i\alpha x}}{b(k+k\cos\Theta)L_+(k\cos\Theta)(\alpha-k)\sinh\gamma(\alpha)b(\alpha-k\cos\Theta)}d\alpha$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\sin\Theta\cos(kb\sin\Theta)\cosh\gamma(\alpha)bK_+(\alpha)e^{\gamma(\alpha)b-\gamma(\alpha)y-i\alpha x}}{(k+k\cos\Theta)^{1/2}K_+(k\cos\Theta)(\alpha-k)^{1/2}\cosh\gamma(\alpha)b(\alpha-k\cos\Theta)}d\alpha$$

şeklinde elde edilir. $\alpha = k\cos\Theta$ noktasındaki rezidüyü hesaplayacak olursak,

$$\mathsf{Res}(\phi, k\cos\Theta) = i(\sin(kb\sin\Theta) + i\cos(kb\sin\Theta))e^{ik(b-y)\sin\Theta - ikx\cos\Theta}$$

$$= -e^{-ikb\sin\Theta}e^{ikb\sin\Theta}e^{-iky\sin\Theta - ikx\cos\Theta}$$

$$= -e^{-iky\sin\Theta - ikx\cos\Theta}$$

çıkar. Bu da gelen dalgayı iptal eder. $\alpha = k$ noktasındaki rezidüsü:

$$\mathsf{Res}(\phi, k) = \frac{2\pi i}{2\pi}\left\{0 - \frac{k\sin\Theta\cos(kb\sin\Theta)K_+(k)e^{-ikx}}{(k+k\cos\Theta)^{1/2}K_+(k\cos\Theta)(k-k\cos\Theta)}\right\}$$

$$= i\left\{\frac{-k\sin\Theta\cos(kb\sin\Theta)K_+(k)e^{-ikx}}{ik\sin\Theta\sqrt{k-k\cos\Theta}K_+(k\cos\Theta)}\right\}$$

$$= \frac{\cos(kb\sin\Theta)K_+(k)e^{-ikx}}{(k-k\cos\Theta)^{1/2}K_+(k\cos\Theta)}$$

olarak hesaplanır. O halde $y \geq b$ için

$$\begin{aligned}\phi_t &= \phi + \phi_i \\ &= \phi_i + \frac{\cos(kb\sin\Theta)K_+(k)e^{-ikx}}{(k-k\cos\Theta)^{1/2}K_+(k\cos\Theta)} - e^{-iky\sin\Theta - ikx\cos\Theta}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $y \leq -b$ için $\alpha = k\cos\Theta$ noktasındaki rezidü:

$$\begin{aligned}\mathsf{Res}(\phi, k\cos\Theta) &= i\left\{\sin(kb\sin\Theta) - i\cos(kb\sin\Theta)\right\} e^{ikb\sin\Theta + iky\sin\Theta - ikx\cos\Theta} \\ &= e^{2ikb\sin\Theta + iky\sin\Theta - ikx\cos\Theta}\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\alpha = k$ noktasındaki rezidü:

$$\begin{aligned}\mathsf{Res}(\phi, k) &= \frac{2\pi i}{2\pi}\left\{\frac{k\sin\Theta\cos(kb\sin\Theta)K_+(k)e^{-ikx}}{(k+k\cos\Theta)^{1/2}K_+(k\cos\Theta)(k-k\cos\Theta)}\right\} \\ &= \left\{\frac{k\sin\Theta\cos(kb\sin\Theta)K_+(k)e^{-ikx}}{ik\sin\Theta K_+(k\cos\Theta)(k-k\cos\Theta)^{1/2}}\right\} \\ &= \frac{\cos(kb\sin\Theta)K_+(k)e^{-ikx}}{K_+(k\cos\Theta)(k-k\cos\Theta)^{1/2}}.\end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde

$$\begin{aligned}\phi_t &= \phi_i + \phi \\ &= e^{-ikx\cos\Theta - iky\sin\Theta} + \frac{\cos(kb\sin\Theta)K_+(k)e^{-ikx}}{K_+(k\cos\Theta)(k-k\cos\Theta)^{1/2}} + \\ &+ e^{2ikb\sin\Theta + iky\sin\Theta - ikx\cos\Theta}\end{aligned}$$

olarak ifade edilir. $-b \leq y \leq b$ bölgesinde ;

$\alpha = k$ noktasındaki rezidü,

$$\begin{aligned}\mathsf{Res}(\phi, k) &= \frac{-k\sin\Theta\sin(kb\sin\Theta)e^{-ikx}}{b(k+k\cos\Theta)L_+(k\cos\Theta)L_-(k)(k-k\cos\Theta)} \\ &= \frac{\sin(kb\sin\Theta)e^{-ikx}}{bk\sin\Theta L_+(k\cos\Theta)L_-(k)}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve bu da kanalın içinde ilerleyen dalgayı verir. $\sinh\gamma b$ nin sıfırları $S_-$ fonksiyonunun ve $\cosh\gamma b$ nin sıfırları ise $D_-$ fonksiyonunun kutup noktalarıdır. Bu kutup noktalarındaki rezidüleri bulmak için,

$$A = \frac{ik\sin\Theta\sin(kb\sin\Theta)}{b(k+k\cos\Theta)L_+(k\cos\Theta)}$$

ve

$$B = \frac{k\sin\Theta\cos(kb\sin\Theta)}{(k+k\cos\Theta)^{1/2}K_+(k\cos\Theta)}$$

olsun. Öncelikle $\sinh \gamma b$ ve $\cosh \gamma b$ nin sıfırlarını bulalım. $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$ ve $\gamma_n = \sqrt{\alpha_n^2 - k^2}$ olmak üzere

$$\sinh \gamma b = \frac{e^{\gamma b} - e^{-\gamma b}}{2} = 0,$$

diyelim ve $\alpha_n$ ($\sinh \gamma b$ nin sıfırları) leri

$$\begin{aligned} e^{\gamma b} &= e^{-\gamma b} \\ e^{2\gamma b} &= 1 \\ 2\gamma b &= 2n\pi i \\ \gamma b &= n\pi i \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} \alpha_n^2 - k^2 &= -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \\ \alpha_n^2 &= k^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right). \end{aligned}$$

$$i\gamma_n = \alpha_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)}$$

olarak yazabiliriz. $\cosh \gamma b$ fonksiyonunun sıfırları

$$\cosh \gamma b = \frac{e^{\gamma b} + e^{-\gamma b}}{2} = 0$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} e^{2\gamma b} &= -1 \\ &= e^{-\pi i + 2n\pi i} \end{aligned}$$

ve eşitliğin her iki tarafının logaritmasını alırsak,

$$\begin{aligned} 2\gamma b &= -\pi i + 2n\pi i \\ \gamma_n b &= \pi i\left(\frac{-1}{2} + n\right) \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

$$\gamma_n^* = \frac{\pi i}{b}\left(n - \frac{1}{2}\right)$$

diyelim.

$$\alpha_n^* = \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2}{b^2}(n - \frac{1}{2})^2}$$

yazalım. O halde,

$$\mathsf{res}(\phi,\alpha_n,\alpha_n^*) = -\frac{2\pi i}{2\pi}\left\{\frac{A\cosh\left(\sqrt{-(\frac{n\pi}{b})^2}y\right)L_+(i\gamma_n)\gamma_n b e^{i\alpha_n x}}{(\alpha_n-k)(\alpha_n-k\cos\Theta)\Big(\sinh\gamma b\Big)'|_{\alpha=\alpha_n}}\right\} -$$

$$-\frac{2\pi i}{2\pi}\left\{\frac{B\sinh\left(\sqrt{-(\frac{n\pi}{b})^2}\right)yK_+(i\gamma_n)e^{-i\alpha_n x}}{(\alpha_n-k)^{1/2}(\alpha_n-k\cos\Theta)\cosh\left(\sqrt{-(\frac{n\pi}{b})^2 b}\right)}\right\} -$$

$$-\frac{2\pi i}{2\pi}\left\{\frac{A\cosh\left(\sqrt{k^2-(n-1/2)^2\frac{\pi^2}{b^2}-k^2}\right)yL_+(i\gamma_n^*)\gamma_{n^*}be^{-i\alpha_{n^*}x}}{(\alpha_n^*-k)(\alpha_n^*-k\cos\Theta)(\sinh\left(\sqrt{-\frac{\pi^2}{b^2}(n-1/2)^2 b}\right)|_{\alpha=\alpha_n^*}}\right\} -$$

$$-\frac{2\pi i}{2\pi}\left\{\frac{B\sinh\left(\sqrt{k^2-\frac{\pi^2}{b^2}(n-1/2)^2-k^2}\right)yK_+(i\gamma_n^*)e^{-i\alpha_{n^*}x}}{(\alpha_n^*-k)^{1/2}(\alpha_n^*-k\cos\Theta)(\cosh\gamma b)'|_{\alpha=\alpha_n^*}}\right\}$$

olarak hesaplanır.

$$\mathsf{res}(\phi,\alpha_n,\alpha_n^*) = -i\left\{\frac{(-1)^n ik\sin\Theta\sin(kb\sin\Theta)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)L_+(i\gamma_n)\gamma_n e^{-i\alpha_n x}}{b(k+k\cos\Theta)L_+(k\cos\Theta)(\alpha_n-k)(\alpha_n-k\cos\Theta)}\right\} -$$

$$-i\left\{-\frac{(-1)^n ik\sin\Theta\cos(kb\sin\Theta)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)K_+(i\gamma_n)e^{-i\alpha_n x}}{(k+k\cos\Theta)^{1/2}K_+(k\cos\Theta)(\alpha_n-k)^{1/2}(\alpha_n-k\cos\Theta)}\right\} -$$

$$-i\left\{\frac{(-1)^n k\sin\Theta\sin(kb\sin\Theta)\cos\left((n-1/2)\frac{\pi y}{b}\right)L_+(i\gamma_n^*)\gamma_n^* e^{-i\alpha_n^* x}}{(k+k\cos\Theta)L_+(k\cos\Theta)(\alpha_n^*-k)(\alpha_n^*-k\cos\Theta)}\right\} -$$

$$-i\left\{-\frac{(-1)^n k\sin\Theta\cos(kb\sin\Theta)\sin\left((n-1/2)\frac{\pi y}{b}\right)K_+(i\gamma_n^*)e^{-i\alpha_n^* x}}{(k+k\cos\Theta)^{1/2}K_+(k\cos\Theta)(\alpha_n^*-k)^{1/2}(\alpha_n^*-k\cos\Theta)b}\right\}.$$

$$\mathsf{res}(\phi,\alpha_n,\alpha_n^*) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{Ai\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)L_+(i\gamma_n)n\pi e^{-i\alpha_n x}}{(\alpha_n-k)(\alpha_n-k\cos\Theta)}\right\} -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{B\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)K_+(i\gamma_n)e^{-i\alpha_n}}{(\alpha_n-k)^{1/2}(\alpha_n-k\cos\Theta)}\right\} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{A\cos\left((n-1/2)\frac{\pi y}{b}\right)L_+(i\gamma_n^*)(n-1/2)\pi e^{-i\alpha_n^* x}}{(\alpha_n^*-k)(\alpha_n^*-k\cos\Theta)}\right\} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{iB\sin\left((n-1/2)\frac{\pi y}{b}\right)K_+(i\gamma_n^*)e^{-i\alpha_n^* x}}{b(\alpha_n^*-k)^{1/2}(\alpha_n^*-k\cos\Theta)}\right\}.$$

Burada

$$\left(\sinh\gamma b\right)'\Big|_{\alpha=\alpha_n} = b\cos n\pi = b(-1)^n$$

ve

$$\left(\cosh\gamma b\right)'\Big|_{\alpha=\alpha_n} = ib(-1)^n$$

değerlerine eşittir. İlk toplama $P_n$, ikinci toplama $P_{n-1/2}$ dersek,

$$\phi_t = e^{-ikx\cos\Theta - iky\sin\Theta} + \left(-e^{-ikx\cos\Theta-iky\sin\Theta}\right) + \frac{\sin(kb\sin\Theta)e^{-ikx}}{kb\sin\Theta L_+(k\cos\Theta)L_-(k)} + \\ + P_n + P_{n-1/2}$$

buluruz. Böylelikle toplam dalga potansiyelini, $y$-eksenini bölgelere ayırarak, $\phi_i = e^{-ikx\cos\theta - iky\sin\theta}$ olmak üzere

$$\phi_t(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(kb\sin\Theta)K_+(k)e^{-ikx}}{(k-k\cos\Theta)^{1/2}K_+(k\cos\Theta)}, & y > b \\ \dfrac{\sin(kb\sin\Theta)e^{-ikx}}{kb\sin\Theta L_+(k\cos\Theta)L_-(k)} + P_n + P_{n-1/2}, & -b \le y \le b \\ \phi_i + \dfrac{\cos(kb\sin\Theta)K_+(k)e^{-ikx}}{K_+(k\cos\Theta)(k-k\cos\Theta)^{1/2}}, & y < -b. \end{cases}$$

olarak elde ederiz.

# 4 SONUÇ

Başlangıç-sınır değerleri ile verilen, geometrileri birbirinden farklı, iki yarı düzlem kırınım problemi ele alınmıştır. İki problemde de sonsuzdan $x$-ekseni ile $\Theta$ açısı yaparak gelen bir dalga vardır. Bu dalganın, ilk problemde negatif $x$-ekseni boyunca uzanan katı bariyere ve ikinci problemde negatif $x$- ekseni boyunca uzanan katı bir kanala çarpması sonucu oluşan, kırınan, ilerleyen ve yansıyan dalgaların keyfi noktadaki analitik çözümü bulunmuştur. Problemlerin çözümünde faktorizasyon metodu olarak da bilinen Wiener-Hopf metodu kullanılmıştır.

Problemlerin ikisinde de düzlem bölgelere ayrılıp, her bölgedeki toplam potansiyel hesaplanmıştır. Bu tez çalışmasının devamı olarak bu bölgelerdeki kırınan, iletilen ve yansıyan dalga potansiyellerinin enerjileri hesaplanabilir ve grafikleri çizilebilir.

## KAYNAKLAR


[1] Nobel B., *Methods Based on the Wiener Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations*, Pergamon Press, London, Newyork, Paris, Los Angeles, 1958.

[2] Titchmarsh E.C., *Introduction to the Theory of Fourier İntegrals*, Clarendon baskı, Oxford, 1948.

[3] İdemen M., *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*, Literatür Yayıncılık, İstanbul, 1999.

[4] Erbaş B., *Scattering of Waves in Ducts and by Periodic Structures*, Doktora Tezi, Manchester Üniversitesi, UK, 2002.

[5] Lawrie Jane B. and Abrahams I.D., "A Brief Historical Perspective of the Wiener-Hopf Technique", Springer Science + Business Media B.V. 2007.

[6] Demirci M., *Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde Wiener-Hopf Tekniği*, Yüksek Lisans Tezi, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Gebze, 2007.

[7] Jones D.S., "Note on Diffraction by An Edge", Quart. J. Mech. Uygulamalı Matematik, 1950.

[8] Ross S. L., *Introduction To Ordinary Differential Equations,* Halliday, Canada, 1989.

[9] Rudin W., *Real and Complex Analysis*, ISBN 0-07-100276-6, Singapur Pte Ltd., 1986.

## Ek-1 $e^{\gamma(\alpha)b}$ nin Çarpanlarına Ayrılması

Bu bölümde 3. bölümde incelenen problemde karşılaştığımız $e^{-\gamma(\alpha)b}$ fonksiyonunun nasıl çarpanlara ayrıldığını açıkca elde edeceğiz. $K(\alpha) = e^{-\gamma(\alpha)b}$ diyelim ve eşitliğin her iki tarafının da logaritmasını alalım:

$$\ln K(\alpha) = -\gamma(\alpha)b,$$

bu fonksiyonuda aşağıdaki şekilde yazabiliriz,

$$-(\alpha^2 - k^2)^{1/2}b = b(\alpha^2 - k^2)^{-1/2}(k^2 - \alpha^2). \tag{4.0.65}$$

Elde edilen bu eşitlikte $(k^2 - \alpha^2)$ çarpanı bir tam fonksiyondur. O halde $b(\alpha^2 - k^2)^{-1/2}$ ayıralım ve bunun için Teorem 1.3.1 i kullanalım. $(\alpha^2 - k^2)^{-1/2} = \gamma^{-1}(\alpha)$ dir. Bu fonksiyonu çarpanlarına ayırmaya çalışalım ve bunun için aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım [1]. $k = k_1 + ik_2$ $(k_1, k_2 > 0)$ ve $-k_2 < d < k_2$ olmak üzere,

$$f_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-id-\infty}^{-id+\infty} \frac{f(-\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta, \tag{4.0.66}$$

$$f_-(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-id-\infty}^{-id+\infty} \frac{f(-\zeta)}{\zeta + \alpha} d\zeta. \tag{4.0.67}$$

Burada $f_-(-\alpha) = f_+(\alpha)$, $f_+(-\alpha) = f_-(\alpha)$ eşitlikleri geçerlidir. $f(\alpha)$ fonksiyonu $(-)$ ve $(+)$ fonksiyonların toplamı olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$f(\alpha) = f_+(\alpha) + f_-(\alpha). \tag{4.0.68}$$

Bu fonksiyonların farkları

$$f_+(\alpha) - f_-(\alpha) = g(\alpha) \tag{4.0.69}$$

olarak tanımlansın. $K(\alpha)$ çift ve $-k_2 < \tau < k_2$ şeridinde analitiktir ve Teorem 1.3.1 in koşullarını sağlar. $\alpha = \xi$ reel ve integrasyon konturu reel eksen olsun. (4.0.68) ve (4.0.69) eşitliklerini kullanarak aşağıdaki denklemleri yazabiliriz.

$$f_+(\xi) = \frac{1}{2}f(\xi) + \frac{1}{2}g(\xi), \tag{4.0.70}$$

$$f_-(\xi) = \frac{1}{2}f(\xi) - \frac{1}{2}g(\xi). \tag{4.0.71}$$

Bazı cebirsel işlemler, değişken değiştirmeler ve Teorem 1.1.5 kullanılarak [1]

$$g(\xi) = \frac{\xi a}{\pi i}\int_0^\infty \frac{F(u)-F(-u)}{u^2 - a^2(k^2-\xi^2)}\frac{udu}{(u^2+k^2a^2)^{1/2}}$$

eşitliğini elde ederiz. $F(u) = u^{-1}$, $a = 1$ aldığımızda

$$g(\xi) = \frac{2\xi}{\pi i}\int_0^\infty \frac{1}{u^2 + (k^2-\xi^2)}\frac{du}{(u^2+k^2)^{1/2}}$$

çıkar. İntegral tablosuna bakarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\int \frac{du}{(u^2+p)(u^2+q)^{1/2}} = \frac{1}{p^{1/2}(q-p)^{1/2}}\arctan\left\{\frac{u(q-p)^{1/2}}{p^{1/2}(u^2+q)^{1/2}}\right\}, \quad q > p$$

$k$ yı reel aldığımızda $0 \leq \xi \leq k$ için

$$\begin{aligned} g(\xi) &= f_+(\xi) - f_-(\xi), \qquad (4.0.72)\\ &= \frac{2\xi}{\pi i(k^2-\xi^2)^{1/2}(k^2-\xi^2-\xi^2)}\arctan\left\{\frac{(k^2-\xi^2)(\xi^2)^{1/2}}{(k^2-\xi^2)^{1/2}(k^2-\xi^2)}\right\}\\ &= \frac{2}{\pi i(k^2-\xi^2)^{1/2}}\arctan\frac{\xi}{(k^2-\xi^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $\gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$ olduğundan $e^{\gamma(\alpha)b}$ fonksiyonunun $\alpha = \pm k$ noktasında dalları vardır. Burada $\alpha = 0$ için $\gamma(0) = -ik$ olan dalı seçilmiştir. Bundan dolayı $i(k^2-\xi^2)^{1/2} = -(\xi^2-k^2)^{1/2}$ yazılabilir. (4.0.71) ve (4.0.72) denklemlerini kullanarak,

$$\begin{aligned} f_+(\xi) &= \frac{1}{2}f(\xi) + \frac{1}{2}g(\xi), \qquad (4.0.73)\\ &= \frac{1}{2}(\xi^2-k^2)^{-1/2} + \frac{1}{2}\frac{2}{\pi i(k^2-\xi^2)^{1/2}}\arctan\frac{\xi}{(k^2-\xi^2)^{1/2}}\\ &= \frac{1}{\pi}(\xi^2-k^2)^{-1/2}\left\{\frac{1}{2}\pi - \arctan\xi(k^2-\xi^2)^{-1/2}\right\} \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Arctan fonksiyonunu arccos fonksiyonu cinsinden yazmak istersek, bir dik üçgenden ve pisagor bağıntısından faydalanarak bunları birbiri cinsinden rahatlıkla yazabiliriz. Dik kenar uzunlukları $\xi$ ve $(k^2-\xi^2)^{1/2}$ olan bir dik üçgen alalım.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\xi}{(k^2-\xi^2)^{1/2}}$$

olsun. Her iki tarafının tersini alırsak,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} - \theta &= \arctan \frac{\xi}{(k^2 - \xi^2)^{1/2}} \\ \theta &= \frac{\pi}{2} - \arctan \xi (k^2 - \xi^2)^{-1/2}\end{aligned}$$

çıkar. Yine aynı dik üçgenden

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\xi}{k}, \\ \arccos \left(\frac{\xi}{k}\right) &= \theta\end{aligned}$$

yazabiliriz. $\theta$ açısının eşitini hem arccos hemde arctan fonksiyonu cinsinden bulduk. O halde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\frac{\pi}{2} - \arctan \left\{\xi^2 (k^2 - \xi^2)^{-1/2}\right\} = \arccos \left(\frac{\xi}{k}\right).$$

$\xi = 0$ için $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ olan dalı seçildiğinde

$$\begin{aligned}f_+(\xi) &= \pi^{-1} (\xi^2 - k^2)^{-1/2} \arccos (\frac{\xi}{k}) \\ &= \frac{2}{\pi} (\xi^2 - k^2)^{-1/2} \arctan (\frac{k - \xi}{k + \xi})^{1/2}\end{aligned}$$

eşitlikleri çıkar. Şimdi arccos fonksiyonunun logaritma cinsinden eşitini bulup seriye açalım. $\cos \theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = w$ olsun. Burada $\theta$ bilinmeyenini bulalım.

$$e^{2i\theta} - 2we^{i\theta} + 1 = 0$$

dir. Bu denklemin kökleri $\theta_{1,2} = -i \ln(w \mp \sqrt{w^2 - 1})$ dir. $w = \frac{\alpha}{k}$ dersek,

$$\arccos (\frac{\alpha}{k}) = -i \ln (\frac{\alpha}{k} + \sqrt{\frac{\alpha^2 - k^2}{k^2}}) \tag{4.0.74}$$

eşitliğini elde ederiz. (4.0.74) eşitliğindeki ln fonksiyonunun önündeki işareti fonksiyonunun içine alırsak,

$$\arccos \left(\frac{\alpha}{k}\right) = i \ln \left(\frac{\alpha}{k} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - k^2}}{k}\right)$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi $\sqrt{\alpha^2 - k^2}$ fonksiyonunu seriye açalım.

$$\sqrt{\alpha^2 - k^2} = -\alpha \left\{1 - \frac{k^2}{2\alpha^2} - \frac{k^4}{8\alpha^4} - \cdots\right\}$$

olmak üzere

$$\arccos\left(\frac{\alpha}{k}\right) = i\ln\left\{\frac{\alpha-\alpha(1-\frac{k^2}{2\alpha^2}\cdots)}{k}\right\} \tag{4.0.75}$$
$$= i\ln\left\{\frac{k}{2\alpha}+\frac{k^3}{8\alpha^3}+\cdots\right\}$$
$$= i\ln\left\{\frac{k}{2\alpha}(1+\frac{k^2}{4\alpha^2}+\cdots)\right\}$$
$$= i\ln\left(\frac{k}{2\alpha}\right)+i\ln\left(1+\frac{k^2}{4\alpha^2}+\cdots\right)$$
$$\sim -i\ln\left(\frac{2\alpha}{k}\right)+\mathcal{O}(|\alpha|^{-2})$$

olarak bulunur. O halde $f(\alpha)=\gamma^{-1}(\alpha)$ dersek,

$$f(\alpha)=f_+(\alpha)+f_-(\alpha) \quad ; \quad f_+(\alpha)=f_-(-\alpha)$$

olmak üzere $f_+(\alpha)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{\alpha^2-k^2}}\arccos(\dfrac{\alpha}{k})$ ve

$$-\gamma(\alpha)b = b(k^2-\alpha^2)\Big(f_+(\alpha)+f_-(\alpha)\Big)$$
$$= -b\pi^{-1}\sqrt{\alpha^2-k^2}\arccos(\alpha/k)-b\pi^{-1}\sqrt{\alpha^2-k^2}\arccos(-\alpha/k)$$

dır.

$$T_+(\alpha)=\pi^{-1}b(\alpha^2-k^2)^{1/2}\arccos(\alpha/k) \tag{4.0.76}$$

dersek (4.0.75) açılımından,

$$T_+(\alpha)=\frac{ib\alpha}{\pi}\ln(2\alpha/k)+\mathcal{O}(|\alpha|^{-1}) \tag{4.0.77}$$

yazarız. Burada $T_-(\alpha)=T_+(-\alpha)$ eşitliği geçerli olmak üzere

$$K_+(\alpha)=e^{-T_+(-\alpha)},$$
$$K_-(\alpha)=e^{-T_-(\alpha)}$$

olarak bulunur.

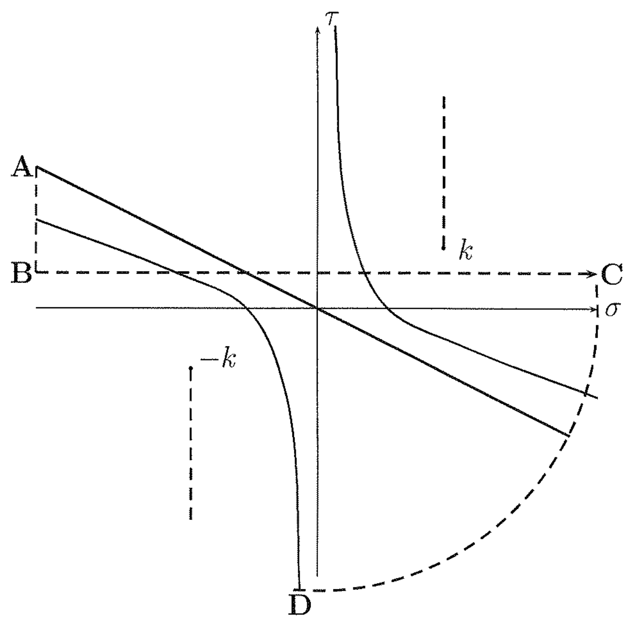
## EK-2 İntegral Hesabı

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{-i\alpha x - \gamma|y|} d\alpha \tag{4.0.78}$$

integralini ele alalım. $k = k_1 + ik_2$, $\gamma(\alpha) = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}$, -Imk< $\alpha$ <Imk ve $f(\alpha)$ fonksiyonu analitik fonksiyon olmak üzere (4.0.78) integralini yakınsatır. $x = r\cos\theta$, $|y| = r\sin\theta$ ve $0 \leq \theta \leq \pi$ olsun. $\alpha$ düzleminde, aşağıdaki eşitlikle ifade edilen kaydırma konturunu düşünerek yukarıdaki integralin hesabını yapacağız.

$$\alpha = -k\cos(\theta + it) \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{4.0.79}$$

Aşağıda, bahsettiğimiz konturun geometrik şekli verilmiştir. Bu konturun $-k$ dan $k$ ya olan doğruya göre simetriye sahip ve $\alpha = -k\cos\theta$ dan geçen hiperbolün yarısını temsil ettiği kolayca gösterilebilir.




Şekil 4.0.3: Kaydırma Konturu

$\alpha = \sigma + i\tau$ olmak üzere, yeterince küçük $k_2$ ler için,

$$\sigma \simeq -k_1 \cos\theta \cosh t \qquad \tau \simeq k_1 \sin\theta \sinh t$$

şeklinde davranır. (4.0.79) eşitliği $0 < \theta < \pi/2$ için hiperbolün sol yarı düzlemini ve $\pi/2 < \theta < \pi$, sağ yarı düzlemini temsil eder. $\alpha = -k\cos(\theta + it)$ eşitini $\gamma(\alpha) = -i(k^2 - \alpha^2)^{1/2}$ de yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha) &= -i(k^2 - k^2\cos^2(\theta + it))^{1/2}, \qquad (4.0.80) \\ &= -i(k^2(\sin^2(\theta + it)))^{1/2}, \\ &= -ik\sin(\theta + it) \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Analitik devamlılıktan, son terimdeki $\theta = \pi/2$, $t = 0$ için ilk terimdeki $\alpha = 0$ iken, $\gamma = -ik$ dır. Bunlara ek olarak $\alpha$ ve $\gamma$ nın değerlerini aşağıda yerine koyarsak,

$$-i\alpha x - \gamma(\alpha)|y| = ikr\cos\theta\cos(\theta + it) + \sin\theta\sin(\theta + it) = ikr\cosh t$$

eşitliğini elde ederiz. $-k$ dan $k$ ya olan konturu uygun şekilde hiperbolün uygun yarı düzlemine deforme edelim. İki konturu sonsuzda birleştirelim. $f(\alpha)$ fonksiyonunun kapalı konturun içinde singüler noktası olmasın. ( 4.0.78) eşitliğinden $\alpha = -ik\cos(\theta+it)$ olduğundan $d\alpha = ik\sin(\theta+it)dt$ dir. O halde (4.0.78) integralini aşağıdaki şekilde yazalım. $r^2 = x^2 + y^2$ olmak üzere

$$I = -ik\int_{-\infty}^{\infty} f\left\{-k\cos(\theta + it)\right\} e^{ikr\cosh t}\sin(\theta + it)dt.$$

Kullanacağımız konturdan bahsettikten sonra aşağıdaki integrali hesaplayalım.

$$I = (k\cos\theta - k)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x - \gamma|y|}}{(\alpha - k)^{1/2}(\alpha - k\cos\theta)}d\alpha$$

$\Theta$ açısı düzlem üzerine düşen dalganın düzlem ile yaptığı açı olmak üzere $0 < \Theta < \pi$ ve $\alpha \to 0$ iken $\gamma(0) = -ik$ dalını alacağız. Yarım açı formullerini kullanarak $(k\cos\Theta - k)^{1/2} = -i(2k)^{1/2}\sin\frac{1}{2}\Theta$ yazabiliriz. Yukarıdaki integral $\alpha = k\cos\theta$ kutbuna sahiptir. (4.0.79) konturunu aldığımızda keyfi $\theta$ ve $0 < \theta < \pi$, $0 < \pi - \Theta < \theta$ için $-1 < \cos\Theta < -\cos\theta$ olduğunda kutup noktası konturun içinde kalır ve bu kutup noktasındaki rezidüyü hesaplayabiliriz. $\alpha = k\cos\theta$ noktasındaki rezidü,

$$ResI_{\alpha=k\cos\theta} = 2\pi i e^{-ikr\cos(\theta+\Theta)}$$

ve

$$J = 2i\sin\frac{1}{2}\Theta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{exp(ikr\cosh t)\sin\frac{1}{2}(\theta+it)}{\cos(\theta+it)+\cos\Theta}dt$$

olmak üzere

$$I = \begin{cases} J + 2\pi i exp(-ikr\cos(\theta+\Theta)) & ,0<\pi-\Theta<\theta<\pi \\ J & ,0<\theta<\pi-\Theta<\pi \end{cases} \tag{4.0.81}$$

olarak hesaplanır. Burada $(0,\pi)$ aralığındaki tüm $\theta$ ve $\Theta$ açıları için I integrali

$$F(v) = \int_{0}^{\infty} e^{iu^2}du$$

ile tanımlanan Fresnel integralleri cinsinden

$$I = 2\pi^{1/2}e^{i\pi/4}[-e^{-ikr\cos(\theta-\Theta)}F(2kr)^{1/2}\cos\frac{1}{2}(\theta-\Theta) +$$
$$+ e^{-ikr\cos(\theta+\Theta)}F(2kr)^{1/2}\cos\frac{1}{2}(\theta+\Theta)]$$

olarak hesaplanır.