MINKOWSKI SERİLERİ İLE FRAKTALLARA ALTERNATİF BİR YAKLAŞIM

İsmail ÇUVALCI

Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Kasım 2015

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

İsmail Çuvalcı'nın **"Minkowski Serileri İle Fraktallara Alternatif Bir Yaklaşım"** başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki Doktora tezi 05.11.2015 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı - Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Prof.Dr. HÜSEYİN AZCAN	....
Üye	:	Prof.Dr. MAHMUT KOÇAK	....
Üye	:	Prof.Dr. ZEKERİYA ARVASİ	....
Üye	:	Doç.Dr. MURAT LİMONCU	....
Üye	:	Doç.Dr. HAKAN CEBECİ	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hasan Ferdi GERÇEL
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

MINKOWSKI SERİLERİ İLE FRAKTALLARA ALTERNATİF BİR YAKLAŞIM

İsmail ÇUVALCI

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Geometri Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Hüseyin AZCAN

2015, 90 Sayfa

Bu tezde geometrinin önemli kavramlarından biri olan fraktal kavramına alternatif bir kavramsal yaklaşım ortaya koyulmuştur. Tezimizin birinci bölümü tarihsel notların verildiği giriş bölümüdür. Tezimizin ikinci bölümü fraktallar uzayının Hausdorff metrik ile bir metrik uzay olarak metrik özelliklerinin sunumunu içermektedir. Üçüncü bölümde fraktallar uzayı üzerinde Minkowski toplamı, Minkowski çarpımı ve skalerle çarpma adı verilen işlemler tanımlayıp, bu işlemlerin Hausdorff metriği ile arasındaki ilişkiler sunulmuştur. Dördüncü bölümde üçüncü bölümde tanımlanan işlemler yardımıyla fraktallar uzayı üzerinde çeşitli seriler tanımlanıp, bu serilerin yakınsaklıkları tartışılmıştır. Beşinci bölümde kısaca Yinelemeli Fonksiyon Sistemi kavramı hatırlatılıp, bazı klasik fraktalların Minkowski serileri yaklaşımına göre karşılığı olan seriler belirlenip, bu örneklerden elde edilen bazı genellemeler sunulmuştur. Tezimizin altıncı bölümünde Minkowski serileri yaklaşımı ile literatürde bulunmayan sayılabilir sonsuz çoklukta yeni fraktal örneği inşa edilmiştir. Tezimizin yedinci ve son bölümü olan sonuç bölümünde elde ettiğimiz genel sonuçları ifade ettikten sonra yeni araştırma sorularını sunarak tezimizi tamamladık.

Anahtar Kelimeler: Fraktal, Hausdorff Metrik, Minkowski Toplamı, Minkowski Çarpımı, Minkowski Serileri

ABSTRACT

PhD Dissertation

AN ALTERNATIVE APPROACH TO FRACTALS VIA MINKOWSKI SERIES

İsmail ÇUVALCI

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Prof.Dr. Hüseyin AZCAN

2015, 90 Pages

This thesis suggests an alternative conceptual approach to the concept of fractal which is an important notion of geometry. The first section of our thesis is introduction section where the historical notes are given . The second section of our thesis deals with the metric properties of the space of fractals which is a metric spaces with Hausdorff metric. In the third section of our thesis we define three operations which is called the Minkowski sum, on compact subset of $\mathbb{R}^n$, the Minkowski product, on compact subset of complex numbers and the multiplication with a scalar, then we present some relations between these operations and Hausdorff metric. The fourth section of our thesis, we define various series on the fractals space via operations defined in the third chapter and we discuss convergence conditions for these series. The fifth chapter, the concept of iterated function systems briefly reminded, some classical fractals were identified by the corresponding Minkowski series. In the sixth section of our thesis, we construct countable many new fractals via Minkowski series approach that are not available the litterateur. In the seventh section of our thesis, we present our results and we completed the thesis by presenting new research questions.

Keywords: Fractal, Hausdorff metric, Minkowski sum, Minkowski product, Minkowski series

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında gösterdiği ilgi ve sabırdan dolayı danışman hocam Prof.Dr. Hüseyin AZCAN 'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Kavramsal çerçevenin belirlenmesi, temel problemlerin tanımlanmasında gösterdiği ilgi ve sabırdan dolayı hocam Prof.Dr. Şahin KOÇAK 'a teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında gösterdiği sabır ve bütün maddi, manevi desteklerinden dolayı sevgili eşim Deniz ÇUVALCI 'ya teşekkürlerimi sunarım.

İsmail Çuvalcı

Kasım 2015

İÇİNDEKİLER

Şekiller Dizini

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	:	n boyutlu Öklidyen uzay
(X, d)	:	Metrik uzay
$D(x, r)$	:	x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$D[x, r]$	:	x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
$\mathcal{H}(X)$	:	X metrik uzayının boştan farklı kompakt altkümelerinin kümesi
d^H	:	Hausdorff uzaklık fonksiyonu
$\mathcal{S}(X)$	:	X metrik uzayının boştan farklı sonlu altkümelerinin kümesi
$\mathcal{K}(X))$	:	$\mathbb{R}^n$ metrik uzayının boştan farklı konveks altkümelerinin kümesi
$A \oplus B$	:	A ve B kompakt kümelerinin Minkowski toplam kümesi
$Conv(A)$	:	Akümesinin konveks kabuğu
λA	:	A kümesinin λ skaleri ile çarpım kümesi
$A \otimes B$	:	A ve B kompakt kümelerinin Minkowski çarpım kümesi
çap$A$	:	A kümesinin çapı
M_A	:	A kümesinin 0 kümesine Hausdorff uzaklığı
e_M	:	Minkowski üstel fonksiyonu
sin_M	:	Minkowski sinüs fonksiyonu
cos_M	:	Minkowski kosinüs fonksiyonu
$A(p)$	:	Birimin p. kökleri ve sıfır kompleks sayısından oluşan küme
YFS	:	Yinelemeli Fonksiyon Sistemi

1 GİRİŞ

"Fraktal" terimi Latince fractus kelimesinden gelmektedir. Fraktal kavramı ilk olarak Mandelbrot [1] kitabının girişinde kullanmıştır. Mandelbrot [1] kaynağında fraktal kümeyi bir metrik uzay içerisinde Haussdorff boyutu topolojik boyutundan daha büyük olan bir küme olarak tanımlamıştır. İlerleyen yıllarda pek çok farklı fraktal tanımları yapılmıştır. Değişik tanımlamarı görmek için [2]' ye bakılabilir. Fraktal tanımı üzerinde tam bir uzlaşmanın olmadığına işaret edelim.

Yinelemeli Fonksiyon Sistemi (YFS) fraktal üretmenin en temel araçlarından biridir. YFS kavramı 1985' de Barnsley ve Demko tarafından [3]' de ortaya koyulmuştur. Yinelemeli fonksiyon sistemlerinin esas teorisi Hutchinson [4]' den sonra ortaya çıkmıştır. Hutchinson ünlü [4] eserinde tam bir metrik uzay üzerinde verilen bir YFS' nin, metrik uzayın boştan farklı kompakt bir altkümesini belirlediğini kanıtladı. Bu boştan farklı kompakt alt kümeye ilgili YFS' nin atraktörü denir. Barnsley [5] eserinde bir YFS atraktörünün deterministik fraktal olarak tanımlanabileceğine işaret etmiştir. YFS fraktal üretmenin temel bir aracı olduğundan fraktal teorisinin açısından oldukça önemlidirler.

Minkowski toplamı kavramı 1903 yılında Minkowski tarafından [6]' da tanımlandı. Minkowski çarpımı kavramı ise 2001 yılında Farouki ve Ark. tarafından [7]' de tanımlandı. Farouki ve Ark. [7] çalışmasında YFS teorisi ile kurulmuş herhangi bir bağ yoktur.

Biz bu tez çalışmasında fraktal kavramına Minkowski toplamları ve Minkowski çarpımını kullanarak oluşturulan Minkowski serileri ile yaklaşmaya çalıştık.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümümüz beş kısımdan oluşacaktır. İlk kısımda metrik uzaylar ile ilgili temel tanım, gösterim, örnek ve teoremleri ifade edeceğiz. İkinci kısımda bir (X, d) metrik uzayının boştan farklı kompakt alt kümelerinin kümesi $\mathcal{H}(X)$ in Hausdorff metriği d^H ile bir metrik uzay olduğu gösterileceğiz. Üçüncü kısımda $\left(\mathcal{H}(X), d^H\right)$ uzayının topolojisi hakkında elementer bazı bulgular ifade edilecektir. Dördüncü kısımda $\left(\mathcal{H}(X), d^H\right)$ metrik uzayı içerisinde yer alan bazı dizileri ve bu dizilerin yakınsaklıklarını inceleyeceğiz. Beşinci son kısımımızda ise $X = \mathbb{R}^n$ özel durumu için $\left(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n), d^H\right)$ uzayının topolojisi hakkında elementer bazı bulguları ifade ederek bölümü tamamlayacağız.

2.1 Metrik Uzaylar

Bu kısımda metrik uzaylar ile ilgili temel kavramları hatırlatacağız.

Tanım 2.1. *$X \neq \varnothing$ olmak üzere $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları her $x, y, z \in X$ için sağlasın:*

1)(*pozitif tanımlılık*) $d(x, y) \geq 0$ *ve* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2)(*simetri*) $d(x, y) = d(y, x)$,

3)(*üçgen eşitsizliği*) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Bu durumda d fonksiyonuna X üzerine bir metrik (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Aşağıda yer alan örnekte de görüleceği üzere boştan farklı bir X kümesi üzerinde birden çok sayıda metrik tanımlanabilir. Öte yandan karışıklık meydana çıkmayacağı durumlarda, yazım kolaylığı açısından (X, d) ikilisi yerine X bir metrik uzay olarak isimlendirilir. Biz de bu gösterim kolaylığını kullanacağız.

Örnek 2.1. *(Metrik uzay örnekleri)*

1) $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$d(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

2) $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$d(x, y) = \max \{ | x_i - y_i | : \; i = 1, \ldots, n \},$$

3) $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |,$$

4) $X = \mathbb{R}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}.$$

Yukarıdaki örnekte bir küme üzerinde birden çok sayıda metrik tanımlanabileceğini gördük. Eğer bu metrikler X kümesi üzerinde birbirine homeomorf topolojiler üretiyor ise bu metriklere denk metrikler denir.

Tanım 2.2. (X, d) *bir metrik uzay,* $x \in X$ *ve* $r_1 > 0, r_2 \geq 0$ *gerçel sayısıları için*

$$\begin{aligned} D(x, r_1) &= \{ y \in X : d(x, y) < r_1 \} \\ D[x, r_2] &= \{ y \in X : d(x, y) \leq r_2 \} \end{aligned}$$

olarak tanımlı kümelere sırasıyla x *merkezli* r_1 *yarıçaplı açık yuvar ve* x *merkezli* r_2 *yarıçaplı kapalı yuvar denir.*

Sıkça karşımıza çıkacak olan bir dizinin yakınsaklığı ve Cauchy dizisi kavramlarını hatırlatalım:

Tanım 2.3. (X, d) *bir metrik uzay,* X *içerisinde bir dizi* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ve* $x_0 \in X$ *olsun. Eğer verilen her* $\varepsilon > 0$ *gerçel sayısı için bir* $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *sayısı* $n \geq N(\varepsilon)$ *özelliğindeki her* n *için*

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon$$

olacak şekilde var ise $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisine yakınsak bir dizi ve* $x_0 \in X$ *noktasına da* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisinin limiti denir.*

Bir dizi için yakınsaklık kadar önemli başka bir özellikte dizinin Cauchy dizisi olmasıdır. Cauchy dizisi tanımını hatırlatarak devam ediyoruz:

Tanım 2.4. (X, d) *bir metrik uzay,* X *içerisinde bir dizi* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *olsun. Eğer verilen her* $\varepsilon > 0$ *gerçel sayısı için bir* $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *sayısı* $n, m \geq N(\varepsilon)$ *özelliğindeki her* n, m *için*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde var ise $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisine bir Cauchy dizisi denir. Her Caucyh dizisinin yakınsak olduğu bir metrik uzaya tam metrik uzay denir.*

Uyarı 2.1. *Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir. Öte yandan her Cauchy dizisi yakınsak olmak zorunda değildir. Basit bir örnek olarak* $(0, 1]$ *yarı açık aralığını* $\mathbb{R}$ *nin indirgediği metrik ile bir metrik uzay olarak göz önüne alalım.*

$$x_n = \frac{1}{n}$$

olarak tanımlı $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi bir Cauchy dizisi iken bu dizi* $(0, 1]$ *uzayında yakınsak bir dizi değildir.*

Tanım 2.5. $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ *metrik uzaylar,* $f : (X_1, d_1) \longrightarrow (X_2, d_2)$ *bir dönüşüm ve* $x \in X_1$ *olsun. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *için bir* $\delta > 0$ *sayısı*

$$d_1(x, y) < \delta \quad \textit{iken } d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

koşulu sağlanacak şekilde var ise f *dönüşümüne* $x \in X_1$ *noktasında süreklidir denir. Eğer* f *dönüşümü her* $x \in X_1$ *için sürekli ise* f *dönüşümüne sürekli bir dönüşüm denir.*

Tanım 2.6. (X, d) *bir metrik uzay* $f : (X, d) \longrightarrow (X, d)$ *bir dönüşüm olsun. Eğer her* $x, y \in X$ *için*

$$d(f(x), f(y)) \leq r d(x, y)$$

olacak şekilde bir $r \in [0, 1)$ *var ise* f *dönüşümüne bir büzülme dönüşümü denir.* r *sayısına da* f *dönüşümünün büzülme katsayısı denir.*

Kompaklık tanımını hatırlatarak devam edelim:

Tanım 2.7. *(X,d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ olsun. Eğer A'nın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A altkümesine kompaktır denir.*

Kompaklığın metrik uzaylar açısından pek çok denk karakterizasyonu vardır. Bunlardan bir kaçını kanıtlarını vermeden aşağıdaki Teorem 2.1. de ifade edeceğiz. Teorem 2.1. den önce tamamen sınırlılık kavramını hatırlatıyoruz:

Tanım 2.8. *X bir metrik uzay olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için X i örten sonlu sayıda ε yarıçaplı kapalı yuvar var ise X metrik uzayına tamamen sınırlı metrik uzay denir.*

Teorem 2.1. *[10] Bir X metrik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir:*
1) X kompakt metrik uzaydır.
2) X içerisindeki her dizinin yakınsak bir altdizisi vardır.
3) X içerisindeki her sonsuz kümenin bir yığılma noktası vardır.
4) X tam ve tamamen sınırlı bir metrik uzaydır.

2.2 Hausdorff Metriği

Bu kısımda önemli bir metrik uzay örneğini yakından inceleyeceğiz.

Gösterim 1. *(X,d) metrik uzayının boştan farklı kompakt alt kümelerinin kümesini $\mathcal{H}(X)$ ile göstereceğiz:*

$$\mathcal{H}(X) = \{A \subseteq X : A \neq \varnothing \text{ ve } A \text{ kompakt}\}.$$

Tanım 2.9. *(X,d) metrik uzay $x \in X$ ve $B \in \mathcal{H}(X)$ olsun.*

$$d(x,B) = \inf\{d(x,y) : y \in B\},$$

olarak tanımlı $d(x,B)$ sayısına x noktasının B kümesine uzaklığı denir. Apaçık olarak $d(x,B) \geq 0$ ve $d(x,B) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x \in B$ olmasıdır.

Tanım 2.10. *(X,d) metrik uzay ve $A,B\in\mathcal{H}(X)$ olsun.*

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sup\{d(x,B) : x\in A\} \\ &= \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\{d(a,b)\} \end{aligned}$$

olarak tanımlı $d(A,B)$ sayısına A kümesinin B kümesine uzaklığı denir. Apaçık olarak $d(A,B)\geq 0$ olur.

Uyarı 2.2. *Genel olarak*

$$d(A,B)=d(B,A)$$

eşitliği yanlıştır. Gerçekten $A=\{0\}$, $B=[-1,1]\subset\mathbb{R}$ altkümeleri için

$$d(A,B)=\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\{d(a,b)\}=0,\ \textit{iken}\ d(B,A)=\sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\{d(a,b)\}=1$$

olur.

Tanım 2.11. $d^H:\mathcal{H}(X)\times\mathcal{H}(X)\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} d^H(A,B) &= \max\{d(A,B),d(B,A)\} && (2.1) \\ &= \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\{d(a,b)\},\sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\{d(a,b)\}\right\} && (2.2) \end{aligned}$$

olarak tanımlı d^H dönüşümüne Hausdorff uzaklık fonksiyonu denir. Burada d, X üzerindeki metriktir.

Hausdorff uzaklğının denk ifadeleri vardır. Bu ifadelerden birini ve Hausdorff uzaklığa denkliğini aşağıdaki Önerme 2.2. ile gösteriyoruz.

Önerme 2.2. *Her $A,B\in\mathcal{H}(X)$ için*

$$d^H(A,B)=\min\left\{\varepsilon\geq 0 : A\subset\bigcup_{b\in B}D[b,\varepsilon],\ B\subset\bigcup_{a\in A}D[a,\varepsilon]\right\} \qquad (2.3)$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. (2.3) eşitliğinin sağ tarafı α olsun. Bir $a\in A$ için bir $b\in B$ vardır öyle ki $a\in D(b,\alpha)$ olur. Buradan $d(a,b)\leq\alpha$ ve böylece $\min_{b\in B}\{d(a,b)\}\leq\alpha$ elde edilir. $a\in A$ keyfi olduğundan

$$\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\{d(a,b)\}\leq\alpha$$

olur. Benzer şekilde A ile B nin yerleri değiştirilerek $d^H(A,B) \leq \alpha$ elde edilir.

Tersine $0 < \beta < \alpha$ ise $A \subsetneq \bigcup_{b\in B} D[b,\beta]$ olur. Bu durumda bir $a \in A$ vardır öyle ki her $b \in B$ için $a \notin D[b,\beta]$ olur. Buradan her $b \in B$ için $d(a,b) \geq \beta$ elde edilir. Bu ise $d^H(A,B) \geq \beta$ olduğunu verir. $\beta < \alpha$ ve β keyfi olduğundan $d^H(A,B) = \alpha$ elde edilir. □

Buradan sonra Hausdorff uzaklık fonksiyonu için Önerme 2.2 de kanıtladığımız eşitliğide yeri geldikçe kullanacağız.

Yardımcı Teorem 2.3. $\left(\mathcal{H}(X), d^H\right)$ *bir metrik uzaydır.*

Kanıt. i) İlk metrik aksiyomu olarak her $A, B \in \mathcal{H}(X)$ için $d^H(A,B) \geq 0$ ve $d^H(A,B) = 0$ olması için gerek ve yeter koşulun $A = B$ olması olduğunu gösterelim. $d^H(A,B) \geq 0$ olması $d(a,b) \geq 0$ olmasının sonucudur. $A = B$ için $d^H(A,B) = 0$ olacağı apaçıktır. Tersine $d^H(A,B) = 0$ olsun. Şimdi $A = B$ olduğunu göstermek istiyoruz. $d^H(A,B) = 0$ olduğundan verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $A \subset \bigcup_{b\in B} D[b,\varepsilon]$ kapsamı geçerlidir. $a \in A$ ise $\varepsilon = 1$ için bir $b_1 \in B$ vardır öyle ki

$$d(a,b_1) \leq 1$$

olur. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için bir $b_2 \in B$ vardır öyle ki

$$d(a,b_2) \leq \frac{1}{2}$$

olur. Benzer şekilde $\varepsilon = \frac{1}{n}$ için

$$d(a,b_n) \leq \frac{1}{n}$$

eşitsizliği geçerlidir. $\{b_n\}$ dizisi $a \in A$ noktasına yakınsayan bir Cauchy dizisidir ve B kompakt olduğundan $a \in B$ elde edilir. Böylece $A \subset B$ olur. Benzer şekilde $B \subset A$ elde edilir ve böylece $A = B$ olur.

ii) Her $A, B \in \mathcal{H}(X)$ için $d^H(A,B) = d^H(B,A)$ olur. Gerçekten

$$\begin{aligned} d^H(A,B) &= \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\{d(a,b)\}, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\{d(a,b)\}\right\} \\ &= \max\left\{\sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\{d(a,b)\}, \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\{d(a,b)\}\right\} \\ &= d^H(B,A), \end{aligned}$$

elde edilir.

iii) Son olarak üçgen eşitsizliğini kontrol edelim: $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ ve $d^H(A,B) = \alpha$, $d^H(B,C) = \beta$ olsun. Önerme 2.2 de kanıtladığımız eşitlik gereği $A \subset \underset{b\in B}{\cup} D[b,\alpha]$ ve $B \subset \underset{c\in C}{\cup} D[c,\beta]$ kapsamları geçerli. Buradan $A \subset \underset{c\in C}{\cup} D[c,\alpha+\beta]$ elde edilir. Benzer şekilde yine Önerme 2.2. de kanıtladığımız eşitlik gereği $B \subset \underset{a\in A}{\cup} D[a,\alpha]$ ve $C \subset \underset{b\in B}{\cup} D[b,\beta]$ kapsamları geçerlidir. Buradan $C \subset \underset{a\in A}{\cup} D[a,\alpha+\beta]$ elde edilir. Sonuç olarak

$$d^H(A,C) \leq \alpha + \beta = d^H(A,B) + d^H(B,C)$$

olur. □

Tanım 2.12. *(X,d) tam metrik uzay olmak üzere $\left(\mathcal{H}(X), d^H\right)$ uzayına fraktallar uzayı denir.*

2.3 $\left(\mathcal{H}(X), d^H\right)$ Uzayının Topolojisi

Bu kısım içerisinde $\left(\mathcal{H}(X), d^H\right)$ metrik uzayının topolojik bazı özelliklerini sunacağız.

Önerme 2.4. *[5] (Genişleme Önermesi) (X,d) metrik uzay, $\left(\mathcal{H}(X), d^H\right)$ içerisinde bir Cauchy dizisi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve*

$$0 < n_1 < n_2 < \cdots,$$

özelliğinde bir tamsayılar dizisi $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ olsun. Varsayalım ki (X,d) içerisinde $j \in \mathbb{N}$ için $x_{n_j} \in A_{n_j}$ olmak üzere bir Cauchy dizisi $\left(x_{n_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ olsun. Bu durumda $n \in \mathbb{N}$ için $\widetilde{x}_n \in A_n$ olacak şekilde bir $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi vardır öyle ki, her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\widetilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$$

sağlanır.

Kanıt. $n \in \mathbb{N}$ için $\widetilde{x}_n \in A_n$ olacak şekilde bir $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisini inşa edeceğiz. Bunun için $n \in \{1, ..., n_1\}$ olmak üzere her bir n için

$$\widetilde{x}_n \in \{x \in A_n : d(x, x_{n_1}) = \min\{d(x_{n_1}, y) : y \in A_n\}\}$$

olsun. Aslında A_n kümesinde yer alan noktalardan x_{n_1} noktasına en yakın olan noktalardan birini seçiyoruz. A_n kompakt olduğu için bu özellikte noktalar vardır. Öte yandan tek olmak zorunda değil. Benzer şekilde $j \in \{2, 3, ...\}$ ve her bir $n \in \{n_j + 1, ..., n_{j+1}\}$ için

$$\widetilde{x}_n \in \left\{x \in A_n : d\left(x, x_{n_j}\right) = \min\left\{d(x_{n_j}, y) : y \in A_n\right\}\right\}$$

olarak seçilsin. Şimdi bu yolla seçilen $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin istenilen özelliği sağladığını göstereceğiz. Apaçık olarak inşa gereği $\widetilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$ ve $\widetilde{x}_n \in A_n$ geçerli. $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $\left(x_{n_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisin bir Cauch dizisi olması sebebiyle bir $N_1(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır öyle ki $n_k, n_j \geq N_1(\varepsilon)$ olmak üzere

$$d\left(x_{n_k}, x_{n_j}\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

sağlanır. Benzer şekilde $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin Cauchy dizisi olması sebebiyle bir $N_2(\varepsilon)$ sayısı vardır öyle ki $m, n \geq N_2(\varepsilon)$ olmak üzere

$$d^H(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

sağlanır. $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$, $m \in \{n_{j-1} + 1, n_{j-1} + 2, ..., n_j\}$ ve $n \in \{n_{k-1} + 1, n_{k-1} + 2, ..., n_k\}$ olmak üzere $n, m \geq N(\varepsilon)$ için

$$d(\widetilde{x}_m, \widetilde{x}_n) \leq d\left(\widetilde{x}_n, x_{n_j}\right) + d\left(x_{n_j}, x_{n_k}\right) + d\left(x_{n_k}, \widetilde{x}_m\right)$$

eşitsizliği geçerlidir. $d^H(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ eşitsizliği gereği bir $y \in A_n \cap \left(D\left[x_{n_j}, \frac{\varepsilon}{3}\right]\right)$ vardır. Böylece

$$d\left(\widetilde{x}_n, x_{n_j}\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

sağlanır. Benzer gerekçeyle

$$d\left(x_{n_k}, \widetilde{x}_m\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

sağlanır. Hipotez gereği $d\left(x_{n_k}, x_{n_j}\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ olduğundan, her $n, m \geq N(\varepsilon)$ için

$$d(\widetilde{x}_m, \widetilde{x}_n) \leq \varepsilon$$

sağlanır. Buradan $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisi olur. □

Teorem 2.5. *[5]* (X,d) *tam metrik uzay ise* $\left(\mathcal{H}(X), d^H\right)$ *de tam metrik uzaydır. Dahası eğer* $\left(\mathcal{H}(X), d^H\right)$ *uzayı içerisinde bir Cauchy dizisi* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ise*

$$A = \{x \in X : x \text{ e yakınsayan bir } \{x_n \in A_n\} \text{ Cauchy dizisi vardır.}\}$$

olmak üzere

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} A_n = A$$

olur.

Kanıt. $\mathcal{H}(X)$ içerisinde bir Cauchy dizisi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olsun. A kümesi teoremin ifadesinde yer alan küme olsun. Kanıtı aşağıdaki adımlara ayırıyoruz:

(a) $A \neq \varnothing$,

(b) A kapalıdır. (Böylece X tam olduğundan A tam olur.)

(c) $\varepsilon > 0$ için bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır öyle ki $n \geq N(\varepsilon)$ için

$$A \subset \bigcup_{a\in A_n} D[a,\varepsilon]$$

kapsaması sağlanır.

(d) A tamamen sınırlı (Böylece (b) geçerli olduğundan A kompakt olur)

(e)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} A_n = A.$$

(a)'nın kanıtı: Bu adımda X uzayı içerisinde $\{a_n \in A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ özelliğinde Cauchy dizileri var olduğunu kanıtlayacağız. X tam olduğundan $A \neq \varnothing$ olacak.

$N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_n < \cdots$ doğal sayılarını $n, m \geq N_i$ olduğunda

$$d^H(A_m, A_n) \leq \frac{1}{2^i}$$

olacak şekilde seçelim. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisi olduğundan bu seçimi yapmak mümkündür. $x_{N_1} \in A_{N_1}$ elemanını seçelim. $d^H(A_{N_1}, A_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$ olduğundan bir $x_{N_2} \in A_{N_2}$ vardır öyle ki $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$ sağlanır. Varsayalım ki $i = 1, ..., k$ olmak üzere $x_{N_i} \in A_{N_i}$ elemanlarını $i = 2, ..., k$ için $d\left(x_{N_{i-1}}, x_{N_i}\right) \leq \frac{1}{2^{i-1}}$ olacak şekilde seçelim. $d^H\left(A_{N_k}, A_{N_{k+1}}\right) \leq \frac{1}{2^k}$ ve $x_{N_k} \in A_{N_k}$ olduğundan bir $x_{N_{k+1}} \in A_{N_{k+1}}$ elemanını $d\left(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}\right) \leq \frac{1}{2^k}$ olacak şekilde bulabiliriz. Örnek olarak $x_{N_{k+1}}$ elemanı x_{N_k} elemanına en yakın $A_{N_{k+1}}$ elemanı olarak seçebiliriz.

İndüksiyon ile $\{x_{N_i} \in A_{N_i}\}$ dizisini $d\left(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}\right) \leq \frac{1}{2^i}$, olacak şekilde bulabiliriz. $\left(x_{N_i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisinin X içerisinde bir Cauchy dizisi olduğunu görmek için $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $N(\varepsilon)$ sayısını

$$\sum_{i=N(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$$

olacak şekilde seçelim. $n > m \geq N(\varepsilon)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d\left(x_{N_m}, x_{N_n}\right) &\leq d\left(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}\right) + d\left(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}\right) + \cdots + d\left(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}\right) \\ &< \sum_{i=N(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon \end{aligned}$$

böylece $\left(x_{N_i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisinin X içerisinde bir Cauchy dizisi olur. Genişleme Önermesi gereği $\{a_i \in A_i\}$ dizisinin yakınsak bir altdizisi $a_{N_i} = x_{N_i}$ olacak şekilde vardır. Buradan $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n$ vardır ve tanım gereği bu limit nokta A nın bir elemanıdır. Sonuç olarak $A \neq \varnothing$ olur.

(b)'nin kanıtı : Bu adımda A nın kapalı olduğunu göstereceğiz. $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \in A$ olacak şekilde yakınsak bir dizi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olsun. $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = a$ yazalım. $a \in A$ olduğunu göstereceğiz. Her bir pozitif i tamsayısı için $a_{i,n} \in A_n$ olmak üzere $(a_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_{i,n} = a_i$ olacak şekilde vardır. Doğal sayıların $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ artan dizisi $d(a_{N_i}, a) < \frac{1}{i}$ olacak şekilde vardır. Dahası doğal sayıların bir $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ altdizisi $d(x_{N_i,m_i}, a_{N_i}) \leq \frac{1}{i}$ olacak şekilde vardır. Böylece $d(x_{N_i,m_i}, a) \leq \frac{2}{i}$ olur. Eğer $y_{m_i} = x_{N_i,m_i}$ olarak tanımlayacak olursak $y_{m_i} \in A_{m_i}$ ve $\lim_{n\longrightarrow\infty} y_{m_i} = a$ olur. Genişleme Önermesinden $(y_{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$ dizisi $i \in \mathbb{N}$ için $z_i \in A_i$ olacak şekilde a noktasına yakınsayan $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisine genişletilebilir. Böylece $a \in A$ ve A kapalı bir kümedir.

(c)'nin kanıtı: $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin Cauchy dizisi olması sebebiyle bir $N(\varepsilon)$ sayısı vardır öyle ki $n, m \geq N(\varepsilon)$ için

$$d^H(A_n, A_m) \leq \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. $n \geq N(\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $m \geq n$ olmak üzere

$$A_m \subset \bigcup_{b\in A_n} D[b, \varepsilon]$$

kapsaması sağlanır. İddiamızın kanıtını tamamlamak için

$$A \subset \bigcup_{b \in A_n} D[b, \varepsilon]$$

kapsamasını göstermemiz yeterli olacaktır. Bu kapsamayı göstermek için $a \in A$ elemanını göz önüne alalım. A kümesinin tanımı gereği $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \in A_n$ olmak üzere bir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $a \in A$ ya yakınsayacak şekilde vardır. $N(a, \varepsilon)$ sayısını $m \geq N(a, \varepsilon)$ olduğunda

$$d(a, a_m) \leq \varepsilon$$

sağlanacak şekilde seçelim. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $a \in A$ ya yakınsadığından böyle bir $N(a, \varepsilon)$ sayısı vardır. $A_m \subset \bigcup_{b \in A_n} D[b, \varepsilon]$ kapsaması gereği $m \geq N(a, \varepsilon)$ özelliğindeki indisler için $a_m \in \bigcup_{b \in A_n} D[b, \varepsilon]$ sağlanır. A_n kompakt olduğundan $\bigcup_{b \in A_n} D[b, \varepsilon]$ kapalı olur. $m \geq N(a, \varepsilon)$ eşitsizliğini sağlayan tüm m indisleri için $a_m \in \bigcup_{b \in A_n} D[b, \varepsilon]$ olduğundan ve $\bigcup_{b \in A_n} D[b, \varepsilon]$ kapalı olduğundan $a \in \bigcup_{b \in A_n} D[b, \varepsilon]$ olur. Böylece yeteri kadar büyük n indisleri için

$$A \subset \bigcup_{b \in A_n} D[b, \varepsilon]$$

kapsaması geçerli.

(d)'nin kanıtı: Varsayalım ki A tamamen sınırlı olmasın. Bu durumda bir $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki A kümesini örten sonlu sayıda ε yarıçaplı kapalı yuvarlar yoktur. Buradan A içerisinde bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini $i \neq j$ olmak üzere $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ olacak şekilde bulmak mümkündür. Bu tip bir dizinin varlığının bir çelişki verdiğini göstereceğiz. (c) gereği bir $N(\varepsilon)$ sayısı vardır öyle ki $n \geq N(\varepsilon)$ için

$$A \subset \bigcup_{b \in A_n} D\left[b, \frac{\varepsilon}{3}\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan her $x_i \in A$ ya karşılık $y_i \in A_n$ bulunabilir öyle ki

$$d(x_i, y_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

eşitsizliği sağlanır. A_n kompakt olduğundan $\{y_i\}$ dizisinin yakınsak bir $\{y_{n_i}\}$ dizisi seçilebilir. Böylece $\{y_{n_i}\}$ dizisinin öyle noktaları bulunabilir ki bu noktalar birbirine istenildiği kadar yakındır. Özel olarak y_{n_i} ve y_{n_j} noktaları bulunabilir öyle ki $d\left(y_{n_i}, y_{n_j}\right) < \frac{\varepsilon}{3}$ sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} d\left(x_{n_i}, x_{n_j}\right) &\leq d\left(x_{n_i} y_{n_i}\right) + d\left(y_{n_i} y_{n_j}\right) + d\left(x_{n_j} y_{n_j}\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin seçilişi gereği mümkün değildir. Böylece varsayım yanlış A tamamen sınırlı bir kümedir. Dahası A nın tamamen sınırlılığı ve (b) gereği A kompakt olur.

(e) nin kanıtı: (d) iddisından $A \in \mathcal{H}\left(X, d^H\right)$ olduğunu gördük. Bu kısımdaki iddiamız

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} A_n = A$$

eşitliğini göstermek. (c) ve Önerme 18 gereği yukarıdaki eşitlik her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $N(\varepsilon)$ sayısının $n \geq N(\varepsilon)$ özelliğindeki indisler için

$$A_n \subset \bigcup_{a\in A} D\left[a, \frac{\varepsilon}{3}\right]$$

kapsaması sağlanacak şekilde bulunmasına indirgenir. Bunu gerçeklemek için $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin, $N(\varepsilon) > 0$ sayısı $n, m > N(\varepsilon)$ olmak üzere

$$d^H(A_n, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde seçilsin. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisi olduğundan bu özellikte bir $N(\varepsilon)$ sayısı vardır. Buradan $n, m \geq N(\varepsilon)$ için

$$A_m \subset \bigcup_{b\in A_n} D\left[b, \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

kapsaması sağlanır. $n \geq N(\varepsilon)$ için

$$A_n \subset \bigcup_{a\in A} D[a, \varepsilon]$$

kapsamasını göstereceğiz. Bunun için $y \in A_n$ elemanını göz önüne alalım. Bu durumda doğal sayıların artan bir

$$n < N_1 < \cdots < N_k < \cdots$$

$(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisini $m,k \geq N_j$ özelliğindeki her m,k indisi

$$A_m \subset \bigcup_{a\in A_k} D\left[a, \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right]$$

kapsaması sağlanacak şekilde seçelim. Burada

$$A_n \subset \bigcup_{a\in A_{N_1}} D\left[a, \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

kapsamının geçerli olduğuna işaret edelim. $y \in A_n$ olduğundan bir $x_{N_1} \in A_{N_1}$ vardır öyle ki $d(y, x_{N_1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ eşitsizliği sağlanır. $x_{N_1} \in A_{N_1}$ olduğundan bir $x_{N_2} \in A_{N_2}$ vardır öyle ki $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{\varepsilon}{2^2}$ olur. Benzer şekilde indüksiyon kullanılarak $x_{N_j} \in A_{N_j}$ ve $d\left(x_{Nj}, x_{N_{j+1}}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ koşullarını sağlayan bir x_{N_1}, x_{N_2}, $x_{N_3}, ...$ noktalar dizisi bulabiliriz. Üçgen eşitsizliği kullanılarak her j için

$$d\left(y, x_{N_j}\right) \leq \varepsilon$$

eşitsizliği ve $\left(x_{N_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi olduğunu görürüz. Böylece $\left(x_{N_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi A içerisinde yer alan bir x noktasına yakınsar. Dahası $d\left(x_{N_j}, y\right) \leq \varepsilon$ eşitsizliği $d(x,y) \leq \varepsilon$ eşitsizliğide sağlanır. Böylece $n \geq N(\varepsilon)$ özelliğindeki n indisleri için

$$A_n \subset \bigcup_{a\in A_{N_1}} D\left[a, \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

eşitsizliği geçerli. Buradan

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} A_n = A$$

elde edilir. Sonuç olarak $\mathcal{H}\left(X, d^H\right)$ bir tam metrik uzaydır. □

Teorem 2.6. *[8] (X,d) kompakt bir metrik uzay ise $\left(\mathcal{H}(X), d^H\right)$ kompakt bir metrik uzaydır.*

Kanıt. Teorem 2.1. (4) gereği $\left(\mathcal{H}(X), d^H\right)$ kompakt bir metrik uzay olduğunu göstermek için tam ve tamamen sınırlı olduğunu göstermek yeterli. X kompakt olduğundan yine Teorem 2.1. (4) gereği tamdır. Böylece Teorem 2.5. gereği $\mathcal{H}(X)$ tamdır. Buradan $\mathcal{H}(X)$ uzayının kompakt olduğunu göstermek için tamamen sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.

$\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. X kompakt olduğundan sonlu sayıda $x_1, ..., x_n \in X$ vardır öyle ki;

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} D[x_i, \varepsilon]$$

olur. $A = \{x_1, ..., x_n\}$ olmak üzere $\mathcal{S} = \mathcal{P}(A) - \{\varnothing\}$ olsun. S kümesi A kümesinin boştan farklı tüm altkümelerinin kümesidir. $\mathcal{S}$ nin elemanları sonlu kümeler olduğu için kompakt kümelerdir. Dahası $\mathcal{S}$ nin eleman sayısı da $2^n - 1$ olur. İddia ediyoruz ki

$$\mathcal{H}(X) = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} D[S, \varepsilon]$$

eşitliği geçerlidir. Gerçekten $B \in \mathcal{H}(X)$ ise

$$S = \{x_i \in A : D[x_i, \varepsilon] \cap B \neq \varnothing\} \in \mathcal{S}$$

olsun. $B \subset \bigcup_{x_i \in S} D[x_i, \varepsilon]$ kapsaması $X = \bigcup_{i=1}^{n} D[x_i, \varepsilon]$ eşitliği ve S nin tanımı gereğince doğrudur. Bu sebeble her $b \in B$ için bir $x_i \in A$ vardır öyle ki, $d(b, x_i) < \varepsilon$ sağlanır. Buradan

$$d(B, S) < \varepsilon$$

elde edilir. Öte yandan her $x_i \in S$ için S nin tanımı gereği $D[x_i, \varepsilon] \cap B \neq \varnothing$ olduğundan bir $b \in B$ vardır öyle ki, $d(x_i, b) < \varepsilon$ sağlanır. Buradan

$$d(S, B) < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $d^H(B, S) \leq \varepsilon$ olur. B keyfi olduğundan

$$\mathcal{H}(X) \subset \bigcup_{S \in \mathcal{S}} D[S, \varepsilon]$$

kapsaması elde edilir. Öte yandan

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}} D[S, \varepsilon] \subset \mathcal{H}(X)$$

kapsaması apaçık olarak doğrudur. Böylece

$$\mathcal{H}(X) = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} D[S, \varepsilon]$$

ve $\mathcal{H}(X)$ kompakt olur. $\square$

Gösterim 2. $\mathcal{S}(X) = \{A \in \mathcal{H}(X) : A \text{ sonlu bir küme}\}$

Önerme 2.7. *$\mathcal{S}(X) \subset \mathcal{H}(X)$ yoğun bir altkümedir.*

Kanıt. $\mathcal{S}(X)$ nin kapanışının $\mathcal{H}(X)$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için keyfi bir $Y \in \mathcal{H}(X)$ alıp bu elemana yakınsayan $\mathcal{S}(X)$ içerisinde bir dizi vermemiz yeterli. Diziyi şu şekilde inşa edeceğiz: $\varepsilon_1 = 1$ için $\{D(x, 1) : x \in Y\}$ ailesi Y kümesinin bir açık örtüsüdür. Y kompakt olduğundan bu ailenin sonlu bir altörtüsü Y kümesini örter. Varsayalım ki bu sonlu aile $\left\{D(x_1^1, 1), ..., D(x_{r_1}^1, 1)\right\}$ olsun. Dizimizin ilk elemanı olarak

$$A_1 = \left\{x_1^1, ..., x_{r_1}^1\right\}$$

kümesini alıyoruz. $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ için $\left\{D\left(x, \frac{1}{2}\right) : x \in Y\right\}$ ailesi Y kümesinin bir açık örtüsüdür. Y kompakt olduğundan bu ailenin sonlu bir altörtüsü yine Y kümesini örter. Varsayalım ki bu sonlu aile $\left\{D\left(x_1^2, \frac{1}{2}\right), ..., D\left(x_{r_2}^2, \frac{1}{2}\right)\right\}$ olsun. Dizimizin ikinci elemanı olarak

$$A_2 = \{x_1^2, ..., x_{r_2}^2\}$$

kümesini alıyoruz. Benzer şekilde devam edilerek $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ için; $\left\{D\left(x, \frac{1}{n}\right) : x \in Y\right\}$ ailesi de Y kümesinin bir açık örtüsüdür. Y kompakt olduğundan bu ailenin yine sonlu bir altörtüsü Y kümesini örter. Varsayalım ki bu sonlu aile $\left\{D(x_{n_1}, \frac{1}{n}), ..., D(x_{n_{r_n}}, \frac{1}{n})\right\}$ olsun. Dizimizin n. elemanı olarak

$$A_n = \{x_1^n, ..., x_{r_n}^n\}$$

kümesini alalım.

İddia ediyoruz ki

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} A_n = Y$$

olur. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $N(\varepsilon)$ sayısını $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ özelliğindeki ilk n sayısı olarak seçmek yeterli.Gerçekten $m > N(\varepsilon)$ ise

$$d^H(A_m, Y) \leq \varepsilon$$

eşitsizliği dizinin inşası gereği geçerli. $Y \in \mathcal{H}(X)$ keyfi ve her n için $A_n \in \mathcal{S}(X)$ olduğundan $\mathcal{S}(X)$ nin kapanışı $\mathcal{H}(X)$ olur. □

2.4 $\left(\mathcal{H}(X), d^H\right)$ Uzayındaki Bazı Dizilerin Yakınsaklığı

Aşağıda ifade edeceğimiz dört önerme ile $\left(\mathcal{H}(X), d^H\right)$ metrik uzayında yer alan bazı dizilerin yakınsaklıklarını ve bu dizilerin yakınsandıkları kümeleri karakterize edeceğiz:

Önerme 2.8. *[8] $\left(\mathcal{H}(X), d^H\right)$ metrik uzayında, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset A_{n+1}$ olacak şekilde bir dizi ve $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ kümesi göreli kompakt olsun. ($\overline{A}$ ile A kümesinin topolojik kapanışı gösterilmek üzere $\overline{A}$ kompakt ise A kümesine göreli kompakt denir.) Bu durumda*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} A_n = \overline{A}$$

olur.

Kanıt. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N \in \mathbb{N}$ doğal sayısını $d^H(A_n, \overline{A}) < \varepsilon$ olacak şekilde bulmak istiyoruz. İlk olarak her $N \in \mathbb{N}$ için $A_n \subseteq A_{n+1}$ kapsamı gereği $A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ kapsamaları geçerli ve böylece

$$\sup_{a_n\in A_n} \inf_{a\in\overline{A}} \{d(a_n, a)\} = 0$$

eşitliği geçerlidir. Böylece verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için $N \in \mathbb{N}$ sayısını

$$\sup_{a\in\overline{A}} \inf_{a_n\in A_n} \{d(a_n, a)\} < \varepsilon \tag{2.4}$$

olacak şekilde belirlememiz yeterli. Varsayalım ki (2.4) yanlış olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için bir $b_n \in \overline{A}$ vardır öyle ki her $a_n \in A_n$ için

$$d(b_n, a_n) \geq \varepsilon \tag{2.5}$$

olur. $\overline{A}$ kompak olduğundan (b_n) dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu dizi (b_{n_k}) olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $k_0 = N((b_{n_k}), \varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyleki $l > k_0$ olduğundan $d(b_{n_{k_0}}, b_{n_l}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanır. $b_{n_{k_0}} \in \overline{A}$ olduğundan bir $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ dizisi vardır öyle ki $\lim_{n\to\infty} c_n = b_{n_{k_0}}$ olur. Yine verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $N((C_n), \varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki $p > N((C_n), \varepsilon)$ olduğunda $d(c_p, b_{n_{k_0}}) < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanır. $p, l > \max\{N((C_n), \varepsilon), N((b_{n_k}), \varepsilon)\}$ olduğunda (2.5) den

$$\varepsilon \leq d(b_{n_l}, c_p) \leq d(b_{n_l}, b_{n_{k_0}}) + d(b_{n_{k_0}}, c_p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

çelişkisi elde edilir. Böylece varsayım yanlış yani (2.4) eşitsizliği geçerlidir. Buradan verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $n > N$ olduğunda $d(A_n, \overline{A}) < \varepsilon$ sağlanır. $\square$

Önerme 2.9. *[8] $K \subset X$, kompakt bir küme, $\left(\mathcal{H}(X), d^H\right)$ metrik uzayında $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset K$ olacak şekilde bir dizi ve*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} A_n = K$$

ise

$$K = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$$

olur.

Kanıt. K kompakt ve her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subseteq K$ olduğundan

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \subseteq K$$

olur. Tersine $x \in K$ olsun. $x \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ olduğunu göstereceğiz. Varsayalım ki bir $x_0 \in K$ için $x_0 \notin \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ olsun. Bu durumda bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$D(x_0, \varepsilon) \bigcap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \varnothing$$

olur. Bu eşitliğin anlamı her $y \in A_n$ için $d(x_0, y) \geq \varepsilon$ olmasıdır. Öte yandan $\lim_{n\to\infty} A_n = K$ olduğundan, bu $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N(\varepsilon)$ sayısı vardır öyleki her $n \geq N(\varepsilon)$ olduğundan

$$\sup_{z\in K}\left\{\inf_{y\in A_n}\{d(z,y)\}\right\} < \varepsilon$$

olur. O halde $n \geq N(\varepsilon)$ olduğunda ki n'ler için $y \in A_n$ vardır öyle ki $d(x_0, y) < \varepsilon$ sağlanır. Bu ise her $y \in A_n$ için $d(x_0, y) \geq \varepsilon$ olması ile çelişir. O halde varsayım yanlış $x_0 \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ olur. $\square$

Önerme 2.10. *[8] $K \subset X$, boştan farklı kompakt bir küme, $\left(\mathcal{H}(X), d^H\right)$ metrik uzayında $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ her $n \in \mathbb{N}$ için $K \subset A_n$ olacak şekilde bir dizi ve*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} A_n = K$$

ise

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

olur.

Kanıt. Her $n \in \mathbb{N}$ için $K \subseteq A_n$ olduğundan $K \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ olur. Tersine bir $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ için $x_0 \notin K$ olsun. Bu durumda bir $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki

$$D(x_0, \varepsilon) \cap K = \varnothing$$

olur. Buradan

$$\inf_{y \in K} \{d(y, x_0)\} \geq \varepsilon$$

olur. Buradan $n \geq 1$ olmak üzere

$$\sup_{x \in A_n} \inf_{y \in K} \{d(y, x_0)\} \geq \varepsilon$$

elde edilir ki, bu ise

$$\lim_{n \to \infty} A_n = K$$

olması ile çelişir. □

Önerme 2.11. *Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n, B_n, C_n \in \mathcal{H}(X)$ ve $A_n \subset B_n \subset C_n$ kapsamaları geçerli olsun. Eğer $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ve $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizileri aynı $A \in \mathcal{H}(X)$ kompakt kümesine yakınsıyor ise $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi de aynı A kümesine yakınsar.*

Kanıt. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi A kümesine yakınsadığından bir $N_1(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır öyle ki $n > N_1(\varepsilon)$ özelliğindeki n ler için

$$d^H(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{6}$$

eşitsizliği geçerlidir. Benzer şekilde $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi A kümesine yakınsadığından bir $N_2(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır öyle ki $n > N_2(\varepsilon)$ özelliğindeki n ler için

$$d^H(C_n, A) < \frac{\varepsilon}{6}$$

eşitsizliği geçerlidir. $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ olmak üzere $n > N(\varepsilon)$ özelliğindeki n ler için ilk olarak

$$d^H(A_n, B_n) < \frac{\varepsilon}{3}$$

eşitsizliği geçerlidir. Gerçekten $A_n \subset B_n$ kapsamı gereği

$$A_n \subset \left[\bigcup_{b_n \in B_n} D\left[b_n, \frac{\varepsilon}{3}\right] \right]$$

kapsamı geçerlidir. Öte yandan verlen bir $b_n \in B_n$ için $b_n \in C_n$ ve böylece bir $a \in A$ vardır öyle ki $d(a, b_n) < \frac{\varepsilon}{6}$ sağlanır. Öte yandan bu $a \in A$ için bir $a_n \in A_n$ vardır öyle ki $d(a, a_n) < \frac{\varepsilon}{6}$ sağlanır. Bu iki ifadeden

$$d(b_n, a_n) \leq d(b_n, a) + d(a, a_n) < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}$$

elde edilir. $b \in B_n$ keyfi oldundan

$$B_n \subset \left[\bigcup_{a_n \in A_n} D\left[a_n, \frac{\varepsilon}{3}\right] \right]$$

elde edilir ki, buradan $d^H(A_n, B_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ olur. Şimdi $n > N(\varepsilon)$ özelliğindeki n ler için

$$\begin{aligned} d^H(B_n, A) &\leq d^H(B_n, C_n) + d^H(C_n, A) \\ &\leq d^H(B_n, A_n) + d^H(A_n, C_n) + d^H(C_n, A) \\ &\leq d^H(B_n, A_n) + d^H(A_n, A) + d^H(A, C_n) + d^H(C_n, A) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{5\varepsilon}{6} < \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. □

2.5 $\left(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n), d^H\right)$ Uzayının Topolojisi

Bu kısımda $\left(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n), d^H\right)$ metrik uzayının topolojisi ile ilgili bazı temel bulguları sunacağız.

Gösterim 3. $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) = \{A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) : A \text{ } konveks\}$

Önerme 2.12. *[9] $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ kapalı bir altkümedir.*

Kanıt. $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \backslash \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $x, y \in K$ ve $\lambda \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$ sayıları vardır öyle ki, $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ olmak üzere $D(z, \varepsilon) \cap K = \varnothing$ olur. (Eğer her $x, y \in K$ ve her $\lambda \in (0,1)$ için $z = (1-\lambda)x + \lambda y \in K$ olsa idi

K konveks olurdu. K konveks olmadığı için böyle bir λ ve z var. Dahası K kompakt olduğundan kapalı ve tümleyeni açık bir küme olduğundan $\varepsilon > 0$ sayısıda $D(z, \varepsilon) \cap K = \varnothing$ olacak şekilde vardır.) Şimdi $d^H(K, K') < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $K' \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ kümesini göz önüne alalım. K ve K' arasındaki uzaklıkla ilgili varsayımımızdan ötürü $x', y' \in K'$ elemanları $\|x' - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\|y' - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde vardır. $z' = (1-\lambda)x' + \lambda y'$ olsun.

$$\begin{aligned} \|z - z'\| &= \|(1-\lambda)x + \lambda y - (1-\lambda)x' - \lambda y'\| \\ &= \|(1-\lambda)(x - x') + \lambda(y - y')\| \\ &\leq (1-\lambda)\|x - x'\| + \lambda\|y - y'\| \\ &< (1-\lambda)\frac{\varepsilon}{2} + \lambda\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlar. Eğer $z' \in K'$ olsa idi bir $w \in K$ bulunabilirdi öyle ki $\|w - z'\| < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanırdı. Öte yandan

$$\|w - z\| \leq \|w - z'\| + \|z' - z\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $D(z, \varepsilon) \cap K = \varnothing$ olması ile çelişir. O halde varsayım yanlış $z' \notin K'$ ve K' konveks değil. $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ açık bir küme ve dolayısıyla $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ kapalı bir kümedir. □

Önerme 2.13. *[9] $\left(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n), d^H\right)$ metrik uzayında sınırlı her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.*

Kanıt. $(K_i^0)_{i \in \mathbb{N}}$ sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda kenar uzunluğu γ olan bir $C \subset \mathbb{R}^n$ küpü bulunabilir öyle ki her $i \in \mathbb{N}$ için $K_i^0 \subset C$ kapsaması sağlanır. Her bir $m \in \mathbb{N}$ için C küpü kenar uzunlukları $2^{-m}\gamma$ olan 2^{mn} tane altküpün birleşimi olarak ifade edilebilir. $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ için $A_m(K)$ ile K ile kesişimi boştan farklı yukarıda tanımladığımız tipten altküplerin birleşimini gösterelim. Her bir m için altküp sayısı sonlu olduğundan $(K_i^0)_{i \in \mathbb{N}}$ dizisinin $(K_i^1)_{i \in \mathbb{N}}$ altdizisi $A_m(K_i^1) = T_1$, i indisinden bağımsız olacak şekilde vardır. Benzer şekilde kenar uzunlukları $2^{-2}\gamma$ olacak şekilde altküplerin bir T_2 birleşimi ve $(K_i^0)_{i \in \mathbb{N}}$ dizisinin $(K_i^2)_{i \in \mathbb{N}}$ altdizisi $A_m(K_i^2) = T_2$, i indisinden bağımsız olacak şekilde vardır. Bu şekilde devam ederek bir verilen bir m için kenar uzunlukları

$2^{-m}\gamma$ olan altküplerin birleşiminden oluşan bir $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dizisinini ve $(K_i^0)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisinin $(K_i^m)_{i\in\mathbb{N}}$ altdizisini

$$A_m(K_i^m) = T_m \tag{2.6}$$

ve

$$k < m \text{ ise } (K_i^m)_{i\in\mathbb{N}} \text{ altdizisi } \left(K_i^k\right)_{i\in\mathbb{N}} \text{ altdizisinin bir altdizisi,} \tag{2.7}$$

olacak şekilde elde ederiz. (2.6) eşitliğiden

$$K_i^m \subset \bigcup_{x\in K_j^m} D(x, 2^{-m}\sqrt{n\gamma})$$

kapsamı geçerli. Buradan $d^H(K_i^m, K_j^m) \leq 2^{-m}\sqrt{n\gamma}$ elde edilir. Öte yandan (2.7) ifadesi gereği $k \geq m$ olmak üzere

$$d^H(K_i^m, K_j^k) \leq 2^{-m}\sqrt{n\gamma}$$

elde edilir. Şimdi $K_m = K_m^m$ olarak tanımlayalım. İddia ediyoruz ki $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Bunu görmek için $k \geq m$ olmak üzere

$$d^H(K_k, K_m) = d^H(K_k^k, K_m^m) \leq 2^{-m}\sqrt{n\gamma}$$

eşitsizliğinden, $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dizisi bir Cauchy dizisi olur. $\left(\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^n\right), d^H\right)$ tam metrik uzay olduğundan, $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsadığı bir $K \in \mathcal{H}\left(\mathbb{R}^n\right)$ vardır. □

Sonuç 2.14. *[9] $\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{R}^n\right), d^H\right)$ metrik uzayında kapalı ve sınırlı altkümeler kompaktır.*

3 MINKOWSKI TOPLAMI VE MINKOWSKI ÇARPIMI

Bu bölümümüz altı kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda $\mathbb{R}^n$ nin boştan farklı kompakt altkümelerinin Minkowski toplamları tanımlanıp, temel cebirsel özellikler incelenecektir. İkinci kısımda Minkowski toplam ile küme kesişimi, küme birleşimi ve bir kümenin konveks kabuğu arasındaki ilişki ifade edilecektir. Üçüncü kısımda kompakt bir kümenin bir gerçel sayı ile skaler çarpımı tanımlanıp, temel özellikler sunulacaktır. Dördüncü kısımda $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerinde tanımlı kompleks sayı çarpımı kullanılarak $\mathbb{C}$ nin boştan farklı kompakt altkümeleri için Minkowski çarpım tanımlanıp, bu işlemin temel özellikleri ifade edilecektir. Beşinci kısımımızda bir önceki bölüm de tanımlanan Hausdorff metrik ile bu bölümde tanımlanan Minkowski toplamı ve Minkowski çarpımı arasındaki temel ilişkiler sunulacaktır. Altıncı ve son bölümümüz de Minkowski toplamını koruyan dönüşümleri ve Minkowski toplamı yardımıyla tanımlanan bazı özel dönüşümleri tartışacağız.

Bu bölümde göz önüne alacak olduğumuz $\mathbb{R}^n$ nin boştan farklı kompakt kümelerin Minkowski toplamları ve $\mathbb{C}$ nin boştan farklı kompakt kümelerinin Minkowski çarpımları kavramlarının uygun metrik yapı ile uygun cebirsel yapıya sahip uzaylara doğal olarak genişletilebileceğine işaret edelim. Örnek olarak üzerinde metrik bulunan her hangi bir topolojik grubun boştan farklı kompakt altkümelerinin kümesi için burada verdiğimiz tanımlar geçerlidir.

Bu bölüm içerisinde $\mathbb{C}$ kompleks sayıları toplamsal birimini $\mathbf{0}$ ve çarpımsal birimini ise $\mathbf{1}$ ile göstereceğiz.

3.1 Minkowski Toplamı

Bu kısımda, ilk olarak $\mathbb{R}^n$ nin boştan farklı kompakt alt kümelerinin Minkowski toplamlarının cebirsel özellikleri incelenecektir.

Gösterim 4.

$$\oplus : \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \quad (A, B) \mapsto \oplus(A, B) = A \oplus B$$

$$A \oplus B = \{a + b : a \in A, \ b \in B\}$$

olarak tanımlı dönüşümü göz önüne alalım. Burada $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$ nin kuvvet kümesi gösterilmektedir. $a+b$ ile a, b vektörlerinin vektör toplamı gösterilmektedir.

Önerme 3.15. *$A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ için $A \oplus B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olur.*

Kanıt. $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto x + y$ olarak tanımlı dönüşüm, sürekli bir dönüşümdür. Öte yandan $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ kompak kümeleri için $A \times B \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ kompakt ve kompakt kümelerin sürekli dönüşümler altında görüntüleri kompakt olduğundan $+(A \times B) = A \oplus B$ kompakt bir küme olur (burada $\mathbb{R}^n$ üzerinde standart topoloji ve $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ üzerinde çarpım topolojisi vardır). Böylece $\oplus : \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olarak göz önüne alınabilir. $\square$

Tanım 3.13. *$\oplus(A, B) = A \oplus B$ olarak tanımlı kümeye, A ve B kümelerinin Minkowski toplamı denir.*

Önerme 3.16. *$A, B, C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere*

1) $A \oplus \{\mathbf{0}\} = A$,

2) $A \oplus B = B \oplus A$,

3) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$ *olur.*

Kanıt.

1)

$$A \oplus \{\mathbf{0}\} = \{a + \mathbf{0} : a \in A\} = \{a : a \in A\} = A.$$

2)

$$A \oplus B = \{a + b : a \in A, \ b \in B\} = \{b + a : a \in A, \ b \in B\} = B \oplus A.$$

3)

$$
\begin{aligned}
A \oplus (B \oplus C) &= \{a + d : a \in A,\ d \in B \oplus C\} \\
&= \{a + (b + c) : a \in A,\ b \in B, c \in C\} \\
&= \{(a + b) + c : a \in A,\ b \in B, c \in C\} \\
&= \{e + c : e \in A \oplus B, c \in C\} \\
&= (A \oplus B) \oplus C
\end{aligned}
$$

eşitliklerinden elde edilir. □

Uyarı 3.3. *Yukarıdaki önermede* $\{\mathbf{0}\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *elemanının* $\oplus$ *ikili işlemine göre birim eleman olduğu görüldü. Bu bulgu doğal olarak* $\oplus$ *işlemine göre bir* $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *elemanının tersinin var olup olmadığı sorusunu akla getirir. Genel olarak bu sorunun yanıtı olumsuzdur. Tersi olan kümeleri karakterize etmek ise mümkündür.*

Önerme 3.17. *Bir* $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *için* $A \oplus B = B \oplus A = \{\mathbf{0}\}$ *eşitliklerinin sağlanması için gerek ve yeter koşul* A *nın tek elemanlı bir küme olmasıdır.*

Kanıt. Eğer $A = \{a\}$ ise $B = \{-a\}$ olmak üzere $A \oplus B = B \oplus A = \{\mathbf{0}\}$ sağlanır. Tersine varsayalım ki $A \oplus B = B \oplus A = \{\mathbf{0}\}$ ve $a_1, a_2 \in A$ olsun. Bu durumda $b_1, b_2 \in B$ vardır öyle ki;

$$a_1 + b_1 = \mathbf{0},\ a_2 + b_2 = \mathbf{0},\ a_1 + b_2 = \mathbf{0},\ a_2 + b_1 = \mathbf{0}$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu eşitliklerden

$$a_1 = -b_1,\ a_2 = -b_2,\ a_1 = -b_2,\ a_2 = -b_1$$

elde edilir. Böylece $a_1 = a_2$ olur. □

3.2 Çeşitli Küme İşlemleri ve Minkowski Toplamı

Bu kısımda ilk olarak küme birleşimi ve küme kesişimi ile Minkowski toplamı arasındaki ilişkiyi ortaya koyacağız. Daha sonra konveks kabuk ile Minkowski toplamı arasındak ilişkiyi ifade edeceğiz.

Önerme 3.18. *[9] $A, B, C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} 1)\ (A \cup B) \oplus C &= (A \oplus C) \cup (B \oplus C) \\ 2)\ (A \cap B) \oplus C &\subset (A \oplus C) \cap (B \oplus C) \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. İkinci eşitlik $A \cap B \neq \varnothing$ olduğu durum için ifade edildi.

Kanıt. 1) $x \in (A \cup B) \oplus C$ ise $x = d + c$ öyle ki $d \in A \cup B$ ve $c \in C$ olur. $d \in A \cup B$ ise $d \in A$ ya da $d \in B$ ve böylece $x = d + c$ ya $A \oplus C$ nin ya da $B \oplus C$ nin elemanı olur. Buradan $(A \cup B) \oplus C \subset (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$ elde edilir.

$x \in (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$ ise $x \in A \oplus C$ ya da $x \in B \oplus C$ olur. $x \in A \oplus C$ ise $x = a + c$ öyle ki $a \in A$ ve $c \in C$ ve böylece $x = a + c \in (A \cup B) \oplus C$ elde edilir. $x \in B \oplus C$ durumu aynı sonuçu verir.

2) $x \in (A \cap B) \oplus C$ ise $x = d + c$ öyle ki $d \in A \cap B$ ve $c \in C$ olur. $d \in A \cap B$ ise $d \in A$ ve $d \in B$ ve böylece $x = d + c$ hem $A \oplus C$ nin hem de $B \oplus C$ nin elemanı olur. Buradan $(A \cap B) \oplus C \subset (A \oplus C) \cap (B \oplus C)$ elde edilir. □

$\mathbb{R}^n$ içerisindeki bir kümelerin konveks kabuğu ile Minkowski toplamları arasındaki ilişkiyi ortaya koyacağız. Önce konveks kabuk tanımını hatırlatıyoruz.

Tanım 3.14. *$A \subset \mathbb{R}^n$ ve $A \neq \varnothing$ olsun.*

$$Conv(A) = \left\{ \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_s a_s : a_i \in A, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1, s \in \mathbb{N} \right\}$$

olarak tanımlı kümeye A kümesinin konveks kabuğu denir.

Önerme 3.19. *[9] $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere*

$$Conv(A \oplus B) = Conv(A) \oplus Conv(B)$$

olur.

Kanıt. Gerçekten $x \in Conv(A \oplus B)$ ise

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{s} \alpha_i c_i,\ c_i \in A \oplus B \\ &= \sum_{i=1}^{s} \alpha_i (a_i + b_i),\ a_i \in A, b_i \in B \\ &= \sum_{i=1}^{s} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{s} \alpha_i b_i \in Conv(A) \oplus Conv(B) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $Conv(A \oplus B) \subset Conv(A) \oplus Conv(B)$ olur. Ters kapsama için $x \in Conv(A) \oplus Conv(B)$ ise

$$\begin{aligned} x &= a + b, \ a \in Conv(A), b \in Conv(B) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j, \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq r}} \alpha_i \alpha_j (a_i + b_j) \in Conv(A \oplus B) \end{aligned}$$

elde edilir. □

3.3 Skaler İle Çarpma

$\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde var olan bir vektörün bir gerçel sayı ile skaler çarpımı işlemi kolaylıkla kompakt kümelere aktarılabilir.

Tanım 3.15. *$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere*

$$\lambda A = \{\lambda a : A \in A\}$$

olarak tanımlı λA kümesine A kümesinin λ skaleri ile çarpım kümesi denir.

Önerme 3.20. *$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ için $\lambda A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olur.*

Kanıt. Gerçekten $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ olarak tanımlı dönüşüm sürekli bir dönüşümdür. $\{\lambda\} \times A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ kompakt bir küme ve kompakt kümenin sürekli dönüşüm altında görüntüsü kompakt olduğundan $\cdot(\{\lambda\} \times A) = \lambda A$ eşitliği istenilen sonucu verir. □

Önerme 3.21. *$1, 0, \lambda \in \mathbb{R}$ ve $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere*

1) $1A = A$, $0A = \{\mathbf{0}\}$,

2) $\lambda_1 (\lambda_2 A) = (\lambda_1 \lambda_2) A$,

3) $\lambda (A \cup B) = (\lambda A) \cup (\lambda B)$,

4) $A \cap B \neq \varnothing$ *olmak üzere* $\lambda (A \cap B) = (\lambda A) \cap (\lambda B)$.

Kanıt. Tanımların doğal sonucu. □

Uyarı 3.4. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *ve* $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *için genel olarak*

$$(\lambda_1 + \lambda_2)A \neq \lambda_1 A \oplus \lambda_2 A$$

olur. Gerçekten $n = 1,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ *ve*

$$A = ([1,2] \cup [4,5]) \subset \mathbb{R}$$

kompakt altkümesi için

$$1A \oplus 1A = A \oplus A = [2,4] \cup [5,7] \cup [8,10]$$

iken

$$(1+1)A = 2A = [2,4] \cup [8,10]$$

ve $(1+1)A \neq A \oplus A$ *olduğu görülür.*

Uyarı 3.5. *Uyarı 3.4. de genel olarak* $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A \oplus \lambda_2 A$ *eşitliğinin her zaman doğru olmadığını gördük. Doğal olarak bu eşitliğin hangi durumlarda geçerli olduğu sorulabilir. Bu soru için kısmi bir cevap vereceğiz. İlk olarak*

$$(\lambda_1 + \lambda_2)A \subset \lambda_1 A \oplus \lambda_2 A$$

kapsamının her zaman geçerli olduğuna işaret edelim. Gerçekten

$$x \in (\lambda_1 + \lambda_2)A \Rightarrow x = (\lambda_1 + \lambda_2)a = \lambda_1 a + \lambda_2 a \in \lambda_1 A \oplus \lambda_2 A$$

olur. Şimdi bir kaç özel durum için $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A \oplus \lambda_2 A$ *eşitliğinin geçerli olduğunu göstereceğiz. İlk olarak eğer* A *tek elemanlı bir küme ise apaçık olarak* $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A \oplus \lambda_2 A$ *eşitliği her* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *için geçerlidir. İkinci olarak* $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ *ya da* $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$ *ve* A *konveks ise eşitlik geçerlidir.*

$$(\lambda_1 + \lambda_2)A \subset \lambda_1 A \oplus \lambda_2 A$$

kapsamı geçerlidir. Ters kapsama için $x \in \lambda_1 A + \lambda_2 A$ *için*

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)\underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} a_2\right)}_{\in A} \in (\lambda_1 + \lambda_2)A \end{aligned}$$

eşitliklerinden sonuç elde edilir.

Sonuç 3.22. *Buraya kadar ki gözlemler ve tanımlardan* $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n), \oplus)$ *ikilisinin bir abelyen monoid yapısına sahip olduğunu ve skaler ile çarpma işlemin de ise*

$$(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A \oplus \lambda_2 A$$

eşitliğinin genel olarak geçerli olmadığını gördük.

3.4 Minkowski Çarpımı

$\mathbb{R}^2$ ile $\mathbb{C}$ arasında yer alan doğal eşleme yardımıyla $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ ile $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ arasında doğal bir eşleme kurulabilir. Bu eşleme Minkowski toplamını ve metrik özellikleri de korur. Öte yandan kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}$ üzerindeki çarpma kullanılarak $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ üzerinde yeni bir işlem tanımlanabilir. Bu kısımda bu işlemi tanımlayıp elementer bazı özelliklerini ifade edeceğiz.

Gösterim 5.

$$\otimes : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C}), \quad (A, B) \mapsto \otimes (A, B) = A \otimes B$$

$$A \otimes B = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

olarak tanımlı dönüşümü göz önüne alalım. Burada $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ *ile* $\mathbb{C}$ *nin kuvvet kümesi gösterilmektedir. Burada* ab *ile* a *ve* b *nin kompleks sayı olarak çarpımları gösterilmektedir.*

Önerme 3.23. $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *için* $A \otimes B \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *olur.*

Kanıt. $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\cdot(a, b) = ab$ kompleks çarpım dönüşümü sürekli bir dönüşümdür. A ve B kompakt olduğundan $A \times B \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ kompakt bir kümedir. Kompakt bir kümenin sürekli dönüşüm altındaki görüntü kümeside kompaktır. $\cdot(A \times B) = A \otimes B$ eşitliğinden $A \otimes B \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ elde edilir. □

Tanım 3.16. $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *olmak üzere* $A \otimes B$ *kümesine* A *ve* B *kümelerinin Minkowski çarpımı denir.*

Önerme 3.24. $A, B, C \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *olmak üzere Minkowski çarpımının aşağıdaki özellikleri vardır:*

1) $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$,

2) $A \otimes B = B \otimes A$,

3) $A \otimes \{\mathbf{1}\} = A$, $A \otimes \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$,

4) $A \otimes (B \cup C) = (A \otimes B) \cup (A \otimes C)$,

5) $B \cap C \neq \varnothing$ *olmak üzere* $A \otimes (B \cap C) \subset (A \otimes B) \cap (A \otimes C)$.

Kanıt. (1), (2) ve (3) kompleks sayıların çarpımın doğal sonucudur.

4) $x \in A \otimes (B \cup C)$ ise bir $a \in A$ ve bir $b \in B$ için $x = ab$ ya da bir $a \in A$ ve bir $c \in C$ için $x = ac$ olur. Buradan $x \in A \otimes B$ ya da $x \in A \otimes C$ elde edilir. Böylece $x \in (A \otimes B) \cup (A \otimes C)$ olur. Tersine $x \in (A \otimes B) \cup (A \otimes C)$ ise ya $x \in A \otimes B$ ya da $x \in A \otimes C$ olur. $x \in A \otimes B$ ise bir $a \in A$ ve bir $b \in B$ için $x = ab$ ve buradan $x \in A \otimes (B \cup C)$ olur. $x \in A \otimes C$ ise bir $a \in A$ ve bir $c \in C$ için $x = ac$ ve buradan $x \in A \otimes (B \cup C)$ olur.

5) $x \in A \otimes (B \cap C)$ ise bir $a \in A$ ve bir $d \in B \cap C$ için $x = ad$ olur. $d \in B \cap C$ olduğundan $d \in B$ ve $d \in C$ olur. Buradan $ad \in A \otimes B$ ve $ad \in A \otimes C$ ve sonuç olarak $ad \in (A \otimes B) \cap (A \otimes C)$ elde edilir. □

Gösterim 6. *Önerme 3.24. de yer alan 1) özelliğinden, (Minkowski çarpımın birleşme özelliği) parantezlere gerek duymadan*

$$A \otimes B \otimes C$$

yazacağız. Dahası eğer $k \geq 1$ *ve* $i = 1, ..., k$ *olmak üzere* $A_i = A$ *ise yazım kolaylığı açısından*

$$A_1 \otimes \cdots \otimes A_k = \otimes^k A = A^k$$

gösterimlerini kullanacağız. $A^0 = \{\mathbf{1}\}$ *olarak tanımlıyoruz.*

Uyarı 3.6. $A = [-1, 1]$, $B = [-3, -2]$, $C = [0, 1] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ *kompakt kümelerini göz önüne alalım.*

$$\begin{aligned} A \otimes (B \oplus C) &= [-1, 1] \otimes ([-3, -2] \oplus [0, 1]) \\ &= [-1, 1] \otimes [-3, -1] \\ &= [-3, 3] \end{aligned}$$

iken

$$\begin{aligned}(A \otimes B) \oplus (A \otimes C) &= ([-1,1] \otimes [-3,-2]) \oplus ([-1,1] \otimes [0,1]) \\ &= [-3,3] \oplus [-1,1] \\ &= [-4,4]\end{aligned}$$

eşitliği geçerli. Böylece genel olarak

$$A \otimes (B \oplus C) \neq (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

olur.
Minkowski çarpımın abelyen bir monoid yapısına sahip olduğunu ifade ederek bu kısımı bitiriyoruz.

3.5 Hausdorff Metriği, Minkowski Toplamı ve Minkowski Çarpımı

Bu kısımda Minkowski toplamı, skalerle çarpma ve Minkowski çarpımı ve küme birleşimi ile ilk bölümde tanımladığımız Hausdorff metrik arasındaki ilişkiyi ortya koyacağız:

Önerme 3.25. $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *için*

$$d^H(X_1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2) \leq d^H(X_1, X_2) + d^H(Y_1, Y_2)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt.

$$
\begin{aligned}
& d^H(X_1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2) \\
= \; & \max \left\{ \begin{array}{c} \sup\limits_{x+y \in X_1 \oplus Y_1} \left\{ \inf\limits_{x'+y' \in X_2 \oplus Y_2} \{ \|x + y - x' - y'\| \} \right\}, \\ \sup\limits_{x'+y' \in X_2 \oplus Y_2} \left\{ \inf\limits_{x+y \in X_1 \oplus Y_1} \{ \|x' + y' - x - y\| \} \right\} \end{array} \right\} \\
\leq \; & \max \left\{ \begin{array}{c} \sup\limits_{x+y \in X_1 \oplus Y_1} \left\{ \inf\limits_{x'+y' \in X_2 \oplus Y_2} \{ \|x - x'\| + \|y - y'\| \} \right\}, \\ \sup\limits_{x'+y' \in X_2 \oplus Y_2} \left\{ \inf\limits_{x+y \in X_1 \oplus Y_1} \{ \|x' - x\| + \|y' - y\| \} \right\} \end{array} \right\} \\
= \; & \max \left\{ \begin{array}{c} \sup\limits_{x+y \in X_1 \oplus Y_1} \left\{ \inf\limits_{x' \in X_2} \{ \|x - x'\| \} + \inf\limits_{y' \in Y_2} \{ \|y - y'\| \} \right\}, \\ \sup\limits_{x'+y' \in X_2 \oplus Y_2} \left\{ \inf\limits_{x \in X_1} \{ \|x' - x\| \} + \inf\limits_{y \in Y_1} \{ \|y' - y\| \} \right\} \end{array} \right\} \\
= \; & \max \left\{ \begin{array}{c} \sup\limits_{x \in X_1} \left\{ \inf\limits_{x' \in X_2} \{ \|x - x'\| \} \right\} + \sup\limits_{y \in Y_1} \left\{ \inf\limits_{y' \in Y_2} \{ \|x' - y'\| \} \right\}, \\ \sup\limits_{x' \in X_2} \left\{ \inf\limits_{x \in X_1} \{ \|x' - x\| \} \right\} + \sup\limits_{y' \in Y_2} \left\{ \inf\limits_{y \in Y_1} \{ \|y' - y\| \} \right\} \end{array} \right\} \\
\leq \; & \max \left\{ \sup_{x \in X_1} \left\{ \inf_{x' \in X_2} \{ \|x - x'\| \} \right\}, \sup_{x' \in X_2} \left\{ \inf_{x \in X_1} \{ \|x' - x\| \} \right\} \right\} \\
& + \max \left\{ \sup_{y \in Y_1} \left\{ \inf_{y' \in Y_2} \{ \|y - y'\| \} \right\}, \sup_{y' \in Y_2} \left\{ \inf_{y \in Y_1} \{ \|y' - y\| \} \right\} \right\} \\
= \; & d^H(X_1, X_2) + d^H(Y_1, Y_2),
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Sonuç 3.26. *$X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ için*

$$d^H(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n, Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_n) \leq d^H(X_1, Y_1) + \cdots + d^H(X_n, Y_n)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt. n üzerine tümevarım ile sonuç elde edilir. □

Önerme 3.27. *$X, Y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ için*

$$d^H(\alpha X, \alpha Y) = |\alpha| \, d^H(X, Y)$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt.

$$\begin{aligned}
d^H(\alpha X, \alpha Y) &= \max\left\{\sup_{\alpha x\in\alpha X}\inf_{\alpha y\in\alpha Y}\{\|\alpha x-\alpha y\|\}, \sup_{\alpha y\in\alpha Y}\inf_{\alpha x\in\alpha X}\{\|\alpha y-\alpha x\|\}\right\}\\
&= \max\left\{\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\{|\alpha|\,\|x-y\|\}, \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}\{|\alpha|\,\|y-x\|\}\right\}\\
&= |\alpha|\max\left\{\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\{\|x-y\|\}, \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}\{\|y-x\|\}\right\}\\
&= |\alpha|\, d^H(X,Y).
\end{aligned}$$

□

Tanım 3.17. $X \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *için*

$$\text{çap}A = \max\{\|a-b\| : a, b \in A\}$$

olarak tanımlı negatif olmayan çapA gerçel sayısına A kümesinin çapı denir.

Gösterim 7. $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *ya da* $A \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *olmak üzere*

$$M_A = d^H(A, \{\mathbf{0}\}) = \max\{\|a\| : a \in A\}$$

olsun.

Önerme 3.28. $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *ve* $\lambda \in \mathbb{R}$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}
1)\ \text{çap}(A\oplus B) &\leq \text{çap}(A) + \text{çap}(B)\\
2)\ \text{çap}(\lambda A) &= |\lambda|\text{çap}(A)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Kanıt. 1)

$$\begin{aligned}
\text{çap}(A\oplus B) &= \max\{\|x-y\| : x, y \in A\oplus B\}\\
&= \max\{\|a_1+b_1-a_2-b_2\| : a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B\}\\
&= \max\{\|a_1-a_2+b_1-b_2\| : a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B\}\\
&\leq \max\{\|a_1-a_2\| + \|b_1-b_2\| : a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B\}\\
&= \max\{\|a_1-a_2\| : a_1, a_2 \in A\} + \max\{\|b_1-b_2\| : b_1, b_2 \in B\}\\
&= \text{çap}(A) + \text{çap}(B).
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\text{ç}ap(\lambda A) &= \max\{\|x-y\| : x,y \in \lambda A\} \\
&= \max\{\|\lambda a - \lambda b\| : a,b \in A\} \\
&= |\lambda| \max\{\|a-b\| : a,b \in A\} \\
&= |\lambda| \text{ç}ap(A).
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 3.29. *$s \geq 2,\ A_1, A_2, ..., A_s \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$\text{ç}ap\left(\lambda_1 A_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_s A_s\right) \leq |\lambda_1|\, \text{ç}ap\left(A_1\right) + \cdots + |\lambda_s|\, \text{ç}ap\left(A_s\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt. s üzerine tümevarım ile sonuça ulaşılır. □

Önerme 3.30. *$A, B, C, D \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ için*

$$d^H(A \otimes B, C \otimes D) \leq M_B d^H(A, C) + M_C d^H(B, D)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Kanıt.

$$
\begin{aligned}
& d^H(A\otimes B, C\otimes D) \\
= \;& \max\left\{ \sup_{ab\in A\otimes B} \inf_{cd\in C\otimes D} \{\|ab-cd\|\}, \sup_{cd\in C\otimes D} \inf_{ab\in A\otimes B} \{\|cd-ab\|\} \right\} \\
= \;& \max\left\{ \begin{array}{c} \sup_{ab\in A\otimes B} \inf_{cd\in C\otimes D} \{\|ab-bc+bc-cd\|\}, \\ \sup_{cd\in C\otimes D} \inf_{ab\in A\otimes B} \{\|cd-bc+bc-ab\|\} \end{array} \right\} \\
\leq \;& \max\left\{ \begin{array}{c} \sup_{ab\in A\otimes B} \inf_{cd\in C\otimes D} \{\|ab-bc\|+\|bc-cd\|\}, \\ \sup_{cd\in C\otimes D} \inf_{ab\in A\otimes B} \{\|cd-bc\|+\|bc-ab\|\} \end{array} \right\} \\
= \;& \max\left\{ \begin{array}{c} \sup_{ab\in A\otimes B} \inf_{cd\in C\otimes D} \{\|b\|\,\|a-c\|+\|c\|\,\|b-d\|\}, \\ \sup_{cd\in C\otimes D} \inf_{ab\in A\otimes B} \{\|c\|\,\|d-b\|+\|b\|\,\|c-a\|\} \end{array} \right\} \\
= \;& \max\left\{ \begin{array}{c} [\sup_{b\in B}\{\|b\|\}]\,[\sup_{a\in A}\inf_{c\in C}\{\|a-c\|\}]+ \\ [\inf_{c\in C}\{\|c\|\}]\,[\sup_{b\in B}\inf_{d\in D}\{\|b-d\|\}], \\ [\sup_{c\in C}\{\|c\|\}]\,[\sup_{d\in D}\inf_{b\in B}\{\|d-b\|\}]+ \\ [\inf_{b\in B}\{\|b\|\}]\,[\sup_{c\in C}\inf_{a\in A}\{\|c-a\|\}] \end{array} \right\} \\
\leq \;& \max\left\{ \begin{array}{c} [\sup_{b\in B}\{\|b\|\}]\,[\sup_{a\in A}\inf_{c\in C}\{\|a-c\|\}], \\ [\inf_{b\in B}\{\|b\|\}]\,[\sup_{c\in C}\inf_{a\in A}\{\|c-a\|\}] \end{array} \right\} + \\
& \max\left\{ \begin{array}{c} [\inf_{c\in C}\{\|c\|\}]\,[\sup_{b\in B}\inf_{d\in D}\{\|b-d\|\}], \\ [\sup_{c\in C}\{\|c\|\}]\,[\sup_{d\in D}\inf_{b\in B}\{\|d-b\|\}] \end{array} \right\} \\
\leq \;& \max\left\{ \begin{array}{c} [\sup_{b\in B}\{\|b\|\}]\,[\sup_{a\in A}\inf_{c\in C}\{\|a-c\|\}], \\ [\sup_{b\in B}\{\|b\|\}]\,[\sup_{c\in C}\inf_{a\in A}\{\|c-a\|\}] \end{array} \right\} + \\
& \max\left\{ \begin{array}{c} [\sup_{c\in C}\{\|c\|\}]\,[\sup_{b\in B}\inf_{d\in D}\{\|b-d\|\}], \\ [\sup_{c\in C}\{\|c\|\}]\,[\sup_{d\in D}\inf_{b\in B}\{\|d-b\|\}] \end{array} \right\} \\
= \;& M_B d^H(A,C) + M_C d^H(B,D)
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Önerme 3.31. $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$,

$$\text{\c{c}}ap(A\otimes B) \leq M_B \text{\c{c}}ap(A) + M_A \text{\c{c}}ap(B),$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt:

$$
\begin{aligned}
\text{ç}ap(A\otimes B) &= \max\{\|a_1b_1-a_2b_2\| : a_1b_1, a_2b_2 \in A\otimes B\}\\
&= \max\{\|a_1b_1-a_2b_1+a_2b_1-a_2b_2\| : a_1,a_2\in A,\ b_1,b_2\in B\}\\
&\leq \max\{\|a_1b_1-a_2b_1\|+\|a_2b_1-a_2b_2\| : a_1,a_2\in A,\ b_1,b_2\in B\}\\
&= \max\{\|b_1\|\,\|a_1-a_2\|+\|a_2\|\,\|b_1-b_2\| : a_1,a_2\in A,\ b_1,b_2\in B\}\\
&= \max\{\|b_1\|\,\|a_1-a_2\| : a_1,a_2\in A,\ b_1\in B\}+\\
&\quad \max\{\|a_2\|\,\|b_1-b_2\| : a_2\in A,\ b_1,b_2\in B\}\\
&= \max\{\|b_1\| : b_1\in B\}\max\{\|a_1-a_2\| : a_1,a_2\in A,\}\\
&\quad +\max\{\|a_2\| : a_2\in A,\}\max\{\|b_1-b_2\| :\ b_1,b_2\in B\}\\
&= M_B\text{ç}ap(A)+M_A\text{ç}ap(B)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Önerme 3.32. *$A, B\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$,olmak üzere*

$$M_{A\otimes B}=M_AM_B$$

olur.

Kanıt.

$$
\begin{aligned}
M_{A\otimes B} &= \max\{\|ab\| : ab\in A\otimes B\}\\
&= \max\{\|a\|\,\|b\| : a\in A, b\in B\}\\
&= \max\{\|a\| : a\in A\}\max\{\|b\| : b\in B\}\\
&= M_AM_B
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Sonuç 3.33. *$r\geq 2$ ve $i=1,2,...,r$ olmak üzere $A_i\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$, olsun. Bu durumda*

$$M_{A_1\otimes\cdots\otimes A_r}=M_{A_1}\cdots M_{A_r}$$

olur.

Kanıt. r üzerinden tümevarım ile sonuca ulaşılır. □

Sonuç 3.34. *$r \geq 2$ ve $i = 1, 2, ..., r$ olmak üzere $A_i \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ olsun.*

$$\begin{aligned} çap(A_1 \otimes \cdots \otimes A_r) &\leq M_{A_2} \cdots M_{A_r} çap(A_1) + \\ &\cdots + M_{A_1} \cdots \widehat{M_{A_i}} \cdots M_{A_r} çap(A_i) + \\ &\cdots + M_{A_1} \cdots M_{A_{r-1}} çap(A_r) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. $\widehat{\ }$ *sembolü ilgili terimin çarpım içerisinde yer almadığı anlamında kullanılmaktadır.*

Kanıt. r üzerine tümevarım ile sonuca ulaşılır. □

Önerme 3.35. *[5] $A, B, C, D \in \mathcal{H}(X)$ için*

$$d^H (A \cup B, C \cup D) \leq \max \left\{ d^H (A, C), d^H (B, D) \right\}$$

eşitsizliği geçerlidir.

3.6 Minkowski Toplamı ve Dönüşümler

Önerme 3.36. *$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ büzülme katsayısı r olan bir büzülme dönüşümü ve $X, Y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda*

$$d^H(f(X), f(Y)) \leq r d^H(X, Y)$$

olur.

Kanıt. $X, Y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\begin{aligned} d^H(f(X), f(Y)) &= \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \{ \|f(x) - f(y)\| \}, \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \{ \|f(y) - f(x)\| \} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \{ r \|x - y\| \}, \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \{ r \|y - x\| \} \right\} \\ &= r \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \{ \|x - y\| \}, \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \{ \|y - x\| \} \right\} \\ &= r d^H(X, Y). \end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 3.37. *$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ büzülme katsayısı r olan bir büzülme dönüşümü ve $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $F : \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$,*

$$X \longmapsto F(X) = B \oplus f(X)$$

büzülme katsayısı r olan bir büzülme dönüşümüdür.

Kanıt. $X, Y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d^H(F(X), F(Y)) &= d^H(B \oplus f(X), B \oplus f(Y)) \\ &\leq d^H(B, B) + d^H(f(X), f(Y)) \\ &= d^H(f(X), f(Y)) \\ &= r d^H(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 3.38. *$i = 1, ..., k$ olmak üzere $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ büzülme katsayısı r_i olan büzülme dönüşümü, ve $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer $r_1 + \cdots + r_k < 1$ ise $F : \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $X \longmapsto F(X) = B \oplus f_1(X) \oplus \cdots \oplus f_k(X)$ büzülme katsayısı $r_1 + \cdots + r_k$ olan bir büzülme dönüşümüdür.*

Kanıt. $X, Y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\begin{aligned} d^H(F(X), F(Y)) &= d^H(B \oplus f_1(X) \oplus \cdots \oplus f_r(X), B \oplus f_1(Y) \oplus \cdots \oplus f_r(Y)) \\ &\leq d^H(B, B) + d^H(f_1(X), f_1(Y)) + \cdots + d^H(f_r(X), f_r(Y)) \\ &\leq r_1 d^H(X, Y) + \cdots + r_k d^H(X, Y) \\ &= (r_1 + \cdots + r_k)\, d^H(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 3.39. *$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bir büzülme dönüşümü olsun. Eğer her $X, Y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ için*

$$f(X \oplus Y) = f(X) \oplus f(Y) \tag{3.8}$$

ise f lineer bir büzülme dönüşümüdür.

Kanıt. Kanıtı $n = 2$ için yapacağız. Genel durum benzer şekilde elde edilir. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (3.8) özelliğini sağlayan bir büzülme dönüşümü olsun. İlk olarak f nin sürekli bir dönüşüm olduğuna işaret edelim.(Büzülme dönüşümü tanımı gereği her $x, y \in \mathbb{R}^2$ için $d_{\mathbb{R}^2}(f(x), f(y)) \leq r d_{\mathbb{R}^2}(x, y)$, $r \in [0, 1)$ eşitsizliği gereği iddia apaçıktır.)

Tek nokta kümelerini kümenin elemanı ile özdeşleştirip, iddiamızı kanıtlayalım. Örnek olarak $\{\mathbf{0}\}$ tek nokta kümesi yerine $\mathbf{0}$ yazalım. İlk olarak $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ eşitliği ile başlayacağız:

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0})$$

ve böylece $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ elde edilir. $\mathbb{R}^2 = span\{e_1, e_2\}$ standart tabanını göz önüne alalım:

$$f(2e_1) = f(e_1 + e_1) = f(e_1) + f(e_1) = 2f(e_1)$$

eşitliği f nin özelliğinden doğru. Benzer şekilde negatif olmayan bir n tamsayısı için

$$f(ne_1) = nf(e_1)$$

eşitliği tümevarımla görülebilir. Şimdi $f(-e_1) = -f(e_1)$ eşitliğini göstereceğiz. Bunun için yine f dönüşümünün özelliğinden

$$\mathbf{0} = f(e_1 + (-e_1)) = f(e_1) + f(-e_1)$$

eşitlikleri geçerli ve buradan $f(-e_1) = -f(e_1)$ eşitliği elde edilir. Buradan hareketle yine tümevarımla negatif bir m tamsayısı için

$$f(me_1) = mf(e_1)$$

eşitliği görülebilir. Böylece herhangi bir $m \in \mathbb{Z}$ tamsayısı için

$$f(me_1) = mf(e_1)$$

eşitliği geçerli. $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı için

$$af(e_1) = f(ae_1) = f\left(b\left(\tfrac{a}{b}e_1\right)\right) = \underbrace{f\left(\tfrac{a}{b}e_1\right) + \cdots + f\left(\tfrac{a}{b}e_1\right)}_{b \text{ tane}}$$

eşitliklerinden

$$f\left(\tfrac{a}{b}e_1\right) = \tfrac{a}{b}f(e_1)$$

elde edilir. Buraya kadar e_1 için yaptığımız tüm hesaplamalar e_2 içinde geçerli. Dahası $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ için

$$f\left(\tfrac{a}{b}e_1 + \tfrac{c}{d}e_2\right) = f\left(\tfrac{a}{b}e_1\right) + f\left(\tfrac{c}{d}e_2\right) = \tfrac{a}{b}f(e_1) + \tfrac{c}{d}f(e_2)$$

eşitlikleri f dönüşümünün toplamsallıkla ilgili özelliğinden dolayı geçerli.

Şimdi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ keyfi gerçel sayıları için $f(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha f(e_1) + \beta f(e_2)$ eşitliğini göstererek kanıtı tamamlayacağız. Burada f dönüşümünün sürekliliğini kullanacağız. Yukarıda gösterdiğimiz rasyonel sayılar için f nin lineerliği hatırlatarak, sırasıyla α ve β gerçel sayılarına yakınsayan $(a_n) \longrightarrow \alpha$ ve $(b_n) \longrightarrow \beta$ rasyonel sayı dizilerini göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} f(\alpha e_1 + \beta e_2) &= f\left(\lim_{n\longrightarrow\infty}(a_n e_1 + b_n e_2)\right) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(f(a_n e_1 + b_n e_2)\right) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(a_n f(e_1) + b_n f(e_2)\right) \\ &= \alpha f(e_1) + \beta f(e_2), \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece f lineer bir büzülme dönüşümü olur. □

Uyarı 3.7. *Bir anlamda Önerme 28 in karşıtıda doğrudur. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineer bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda her $X, Y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ için*

$$f(X \oplus Y) = f(X) \oplus f(Y)$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlik f nin lineerliğinin doğal sonucudur.

Sonuç 3.40. *$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bir büzülme dönüşümü olsun. Her $X, Y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ için*

$$f(X \oplus Y) = f(X) \oplus f(Y)$$

eşitliğinin geçerli olması için gerek ve yeter koşul f dönüşümünün lineer bir büzülme dönüşümü olmasıdır.

4 MINKOWSKI SERİLERİ

Bölüm 2 içerisinde bir X metrik uzayının boştan farklı kompakt altkümelerinin kümesi $\mathcal{H}(X)$ üzerinde bir metrik tanımlayıp, bu metrik uzaya ilişkin temel gözlemleri sunduk. Bölüm 3 içerisinde $X = \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ uzayı üzerinde Minkowski topamı ve $X = \mathbb{C}$ olmak üzere $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ üzerinde Minkowski çarpımını tanımlayıp bu işlemlerin cebirsel özelliklerini ve Hausdorff metriği ile ilişkisini ifade etmiştik. Bu bölümde Minkowski toplamı ve çarpımı kullanılarak oluştulan özel bazı dizileri göz önüne alacağız. Bu bölüm dört kısımdan oluşacaktır. Birinci kısımda $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ metrik uzayında kompakt kümelerin Minkowski toplamları ile oluşturulacak seriler tanımlanıp, bu serilerin yakınsaklıkları tartışılacaktır. İkinci kısımda klasik gerçel analizde seriler için ifade edilen bazı temel işlemlerin Minkowski toplam serileri cinsinden karşılıkları ifade edilip, yakınsaklık ile bu işlemler arasındaki ilişkiler tartışılacaktır. Üçüncü kısım da $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ metrik uzayında Minkowski toplamına ek olarak var olan kompakt kümelerin Minkowski çarpımları kullanılarak oluşturulan seriler göz önüne alınıp, bu serileri yakınsalıkları tartışılacaktır. Son kısımda seriler kullanılarak oluşturulacak $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ ve $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ uzayları üzerindeki bazı dönüşümlerin göz önüne alıp, bu dönüşümlerin bazı özelliklerini ifade edeceğiz.

4.1 Minkowski Toplamı ve Seriler

$\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ uzayı üzerinde Minkowski toplamı adı verdiğimiz bir işlem tanımlayıp, bu işlemin cebirsel özelliklerini incelemiştik. Şimdi bu işlemi kullanarak $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde tanımlanan bazı dizileri göz önüne alacağız.

$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olarak kullanılacaktır.

Tanım 4.18. *$\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ içerisinde bir dizi $(A_i)_{i\in\overline{\mathbb{N}}}$ olsun.*

$$\begin{aligned} S_0 &= A_0 \\ S_1 &= A_0 \oplus A_1 \\ S_2 &= A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \\ &\vdots \\ S_n &= A_0 \oplus \cdots \oplus A_n \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. $\left\{(A_i)_{i\in\overline{\mathbb{N}}}, (S_i)_{i\in\overline{\mathbb{N}}}\right\}$ sıralı ikilisine bir Minkowski toplam serisi ya da kısaca bir seri, S_i kompakt kümesine serinin i inci kısmi toplamı ve $(S_i)_{i\in\overline{\mathbb{N}}}$ dizisine serinin kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer $(S_i)_{i\in\overline{\mathbb{N}}}$ dizisinin bir limiti var yani $(S_i)_{i\in\overline{\mathbb{N}}}$ dizisi yakınsak ise seriye yakınsak aksi halde ıraksaktır denir. Yazım kolaylığı açısından bir $\left\{(A_i)_{i\in\overline{\mathbb{N}}}, (S_i)_{i\in\overline{\mathbb{N}}}\right\}$ serisini göstermek için

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$$

gösterimi kullanılır. Bizde bu gösterimi kullanacağız. $\left(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n), d^H\right)$ tam metrik uzay olduğundan $(S_i)_{i\in\overline{\mathbb{N}}}$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $(S_i)_{i\in\overline{\mathbb{N}}}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olmasıdır.

Önerme 4.41. *$\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ uzayı içerisinde $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ serisi için*

$$M_{A_n} = d^H(A_n, \{\mathbf{0}\}) = \max\{\|x\| : x \in A_n\}$$

olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{A_n}$$

gerçel sayı serisi yakınsak ise

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$$

Minkowski serisi yakınsaktır.

Kanıt. Burada verilen koşul $(S_i)_{i\in\overline{\mathbb{N}}}$ nin bir Cauchy dizisi olmasını sağlar. Gerçekten

$n > m$ olmak üzere:

$$\begin{aligned} d^H(S_n, S_m) &= d^H\left(A_0 \oplus \cdots \oplus A_n, A_0 \oplus \cdots \oplus A_m\right) \\ &= d^H\left(A_0 \oplus \cdots \oplus A_n, A_0 \oplus \cdots \oplus A_m \oplus \underbrace{\{\mathbf{0}\} \oplus \cdots \oplus \{\mathbf{0}\}}_{n-m \text{ tane}}\right) \\ &\leq d^H(A_0, A_0) + \cdots + d^H(A_m, A_m) \\ &\quad + d^H(A_{m+1}, \{\mathbf{0}\}) + \cdots + d^H(A_n, \{\mathbf{0}\}) \\ &= \sum_{i=m+1}^{n} M_{A_i} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\sum_{n=0}^{\infty} M_{A_n}$ serisinin yakınsaklığından sonuca ulaşılır. □

Uyarı 4.8. $\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ *yakınsak serisi için* $\sum_{n=0}^{\infty} M_{A_n}$ *serisi her zaman yakınsak değildir. Örnek olarak*

$$A_n = \left\{\frac{(-1)^n}{n+1}\right\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$$

tek nokta kümeleri için

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n = \{\ln 2\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$$

iken

$$M_{A_n} = \frac{1}{n+1},$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{A_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

ıraksak bir seridir.

Önerme 4.42. $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *uzayı içerisinde* $\sum_{n=0}^{\infty} M_{A_n}$ *gerçel sayı serisi yakınsak olacak şekilde bir* $\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ *yakınsak Minkowski serisi için*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} M_{A_n} = 0$$

olur.

Kanıt. $\sum_{n=0}^{\infty} M_{A_n}$ gerçel sayı serisinin yakınsaklığından sonuç elde edilir. □

Önerme 4.43. *$\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_{B_n}$ yakınsak olacak şekilde bir Minkowski serisi $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ ve $A_n \subseteq B_n$ olsun. Bu durumda $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ yakınsak bir serisidir.*

Kanıt. $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subseteq B_n$ kapsamı gereği

$$0 \leq M_{A_n} = \max\{\|a_n\| : a_n \in A_n\} \leq \max\{\|b_n\| : b_n \in B_n\} = M_{B_n}$$

eşitsizliği gereği $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_{A_n}$ serisi yakınsak olduğu elde edilir. Önerme 4.41 den sonuç elde edilir. □

4.2 Minkowski Serileri ile İşlemler

Bu kısımda klasik analiz de seriler ile yapılan temel işlemlerin Minkowski serileri için karşılıklarını ifade edeceğiz.

Tanım 4.19. *$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n > m$ için $f(n) > f(m)$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ ve $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ aşağıdaki ilişkileri sağlayacak şekilde iki seri olsunlar:*

$$\begin{aligned} 1)\quad B_0 &= A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_{f(0)} \\ 2)\ B_{n+1} &= A_{f(n)+1} \oplus A_{f(n)+2} \oplus \cdots \oplus A_{f(n+1)},\ \textit{her } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

bu durumda $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ serisine, $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ serisi parantezlendirilerek elde edilmiş bir seri ve $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ serisine de $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ serisinden parantezler kaldırılarak elde edilen seri denir.

Önerme 4.44. *Eğer $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ yakınsak bir seri ise $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ serisinden parantezlendirilerek elde edilen her $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ serisi de yakınsaktır ve $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ serisi, $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ serisinin yakınsadığı kümeye yakınsar.*

Kanıt. $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $(T_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ ve $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $(S_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ olsun.

$$\begin{aligned} T_n &= \bigoplus_{k=0}^{n} B_k \\ &= B_0 \oplus \cdots \oplus B_n \\ &= A_0 \oplus \cdots \oplus A_{f(0)} \oplus \cdots \oplus A_{f(n-1)+1} \oplus A_{f(n-1)+2} \oplus \cdots \oplus A_{f(n)} \\ &= \bigoplus_{k=0}^{f(n)} A_i = S_{f(n)} \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Öte yandan $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ Minkowski toplam serisinin yakınsaklığından, $(S_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ kısmi toplamlar dizisi yakınsak bir dizidir. $(S_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ dizisinin yakınsaklığından sonuca ulaşılır. □

Uyarı 4.9. *Parantezleri silme işlemi yakınsaklığı bozabilir.* $B_n = \{0\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$, $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ *olarak tanımlı dönüşüm ve* $A_n = \{(-1)^n\}$ *olsun. Kolayca görüleceği üzere Tanım 4.19. daki koşullar geçerlidir. Öte yandan* $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n = \{0\}$ *yakınsak bir seri iken,* $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ *serisinin kısmi toplamlar dizisinin limiti yoktur.*

Teorem 4.45. $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ *ve* $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ *Tanım 4.19 daki koşulları sağlayan iki seri olsun. Varsayalım ki aşağıdaki koşullarda sağlansın:*

$$\begin{aligned} 1) \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} M_{A_n} &= 0 \\ 2)\ f(n+1) - f(n) &< K \end{aligned}$$

burada K *sabit bir sayıdır. Bu durumda* $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ *serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul* $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ *serisinin yakınsak olmasıdır.*

Kanıt. $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ ve $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ serilerinin kısmi toplam dizileri sırasıyla $(S_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ ve $(T_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ olsun.

$\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ serisi yakınsak ise Önerme 4.44 den sonuca ulaşılır. Tersine varsayalım ki $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ serisi B kümesine yakınsasın. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ serisi B kümesine yakınsadığından bir $N_1(\varepsilon)$ sayısı vardır öyle ki $n > N_1(\varepsilon)$ olduğunda

$$d^H(T_n, B) < \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır. Aynı $\varepsilon > 0$ sayısı için; $\lim_{n\longrightarrow\infty} M_{A_n} = 0$ olduğundan bir $N_2(\varepsilon)$ sayısı vardır öyle ki, $n > N_2(\varepsilon)$ olduğunda

$$M_{A_n} < \frac{\varepsilon}{2K}$$

sağlanır. $n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\} = N(\varepsilon)$ olmak üzere

$$d^H(S_n, B) < \varepsilon$$

olur. Bunu görmek için bir $m > N(\varepsilon)$ sayısı vardır öyle ki

$$f(m) \leq n < f(m+1)$$

eşitsizliği sağlanır. Gerçekten f sıralamayı koruduğu için bire-bir fonksiyon ve böylece üstten sınırlı değildir. Buradan $N(\varepsilon)+1, N(\varepsilon)+2, ...$ dizisindeki bir terim için, varsayalım ki bu terim $N(\varepsilon)+k$ olsun, $f(N(\varepsilon)+k) > n$ sağlanacaktır. Öte yandan f nin bire-birliği gereği $f^{-1}(N(\varepsilon)+k-1) = m$ istenilen özellikte olur. Şimdi

$$\begin{aligned}
d^H(S_n, B) &\leq d^H(S_n, T_{m+1}) + d^H(T_{m+1}, B) \\
&= d^H\left(\bigoplus_{i=0}^{n} A_i, \bigoplus_{i=0}^{m+1} B_i\right) + d^H(T_{m+1}, B) \\
&= d^H\left(\bigoplus_{i=0}^{n} A_i, \bigoplus_{i=0}^{f(m+1)} A_i\right) + d^H(T_{m+1}, B) \\
&\leq \left[\sum_{i=n+1}^{f(m+1)} d^H\left(A_i, \{\mathbf{0}\}\right)\right] + d^H(T_{m+1}, B) \\
&\leq \left[\sum_{i=f(m)+1}^{f(m+1)} d^H\left(A_i, \{\mathbf{0}\}\right)\right] + d^H(T_{m+1}, B) \\
&< \left[\sum_{i=f(m)+1}^{f(m+1)} \frac{\varepsilon}{2K}\right] + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2K}(f(m+1) - f(m)) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2K}K + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(S_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ dizisi B kümesine yakınsar. Tanım gereği $\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ serisi yakınsaktır. $\square$

Tanım 4.20. $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n, \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *iki Minkowski toplam serisi ve* $\alpha \in \mathbb{R}$ *sayısı verilsin:*

$$\begin{aligned} 1)\ C_n &= A_n \oplus B_n,\ n \in \mathbb{N} \\ 2)\ D_n &= \alpha A_n,\ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} C_n$*, Minkowski toplam serisine* $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ *ve* $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ *Minkowski toplam serilerinin toplam serisi ve* $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} D_n$ *Minkowski toplam serisine de* $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ *Minkowski toplam serinin* α *skaleri ile çarpım serisi denir.*

Önerme 4.46. *Tanım 4.20 deki gösterimler saklı olmak üzere* $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n, \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *Minkowski toplam serileri sırasıyla* $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *kompakt kümelerine yakınsıyor ise*

$$\begin{aligned} 1)\ \lim_{n \longrightarrow \infty} \bigoplus_{i=0}^{n} C_n &= A \oplus B \\ 2)\ \lim_{n \longrightarrow \infty} \bigoplus_{i=0}^{n} D_n &= \alpha A \end{aligned}$$

olur.

Kanıt. 1) $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ serisi A kümesine yakınsadığından, verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki, $n > N_1(\varepsilon)$ olduğunda

$$d^H\left(\bigoplus_{i=0}^{n} A_n, A\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır. Benzer şekilde $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ serisi B kümesine yakınsadığından, verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n > N_2(\varepsilon)$ olduğunda

$$d^H\left(\bigoplus_{i=0}^{n} B_n, B\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ olsun. $n > N(\varepsilon)$

için

$$\begin{aligned}
d^H\left(\bigoplus_{i=0}^{n} C_n, A\oplus B\right) &= d^H\left(\bigoplus_{i=0}^{n} (A_n\oplus B_n), A\oplus B\right)\\
&= d^H\left(\left(\bigoplus_{i=0}^{n} A_n\right)\oplus\left(\bigoplus_{i=0}^{n} B_n\right), A\oplus B\right)\\
&\leq d^H\left(\left(\bigoplus_{i=0}^{n} A_n\right), A\right)+d^H\left(\left(\bigoplus_{i=0}^{n} B_n\right), B\right)\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir.

2) $\alpha = 0$ ise iddia aşikar. $\alpha \neq 0$ olsun. Bu durumda $\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ serisi A kümesine yakınsadığından, verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki, $n > N(\varepsilon)$ olduğunda

$$d^H\left(\bigoplus_{i=0}^{n} A_n, A\right) \leq \frac{\varepsilon}{2\,|\alpha|}$$

sağlanır. $\lim_{n\longrightarrow\infty} \bigoplus_{i=0}^{n} D_n = \alpha A$ iddiasının kanıtı için verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $N(\varepsilon)$ sayısını yukarıdaki koşulu gerçekleyen $N(\varepsilon)$ olarak seçiyoruz. $n \geq N(\varepsilon)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
d^H\left(\bigoplus_{i=0}^{n} D_n, \alpha A\right) &= d^H\left(\bigoplus_{i=0}^{n} \alpha A_n, \alpha A\right)\\
&= |\alpha|\, d^H\left(\bigoplus_{i=0}^{n} A_n, A\right)\\
&\leq |\alpha|\,\frac{\varepsilon}{2\,|\alpha|}=\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

eşitlik ve eşitsizliklerinden sonuç elde edilir. □

Örnek 4.2. $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i$ *pozitif terimli yakınsak bir seri ve* $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *olsun. Bu durumda*

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} (\lambda_i B)$$

serisi yakınsaktır. Bu iddiayı görmek için

$$A_n = \lambda_n B$$

tanımını yapalım.

$$M_{A_n} = \max\{\|\lambda_n b\| : b \in B\} = \lambda_n M_B,$$

eşitliklerinden

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{A_n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n M_B) = M_B \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \right),$$

elde edilir. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ *serisini yakınsaklığı ve Önerme 4.41 den sonuca ulaşılır.*

Örnek 4.2. aşağıdaki Önermenin kanıtını içermektedir:

Önerme 4.47. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ *pozitif terimli yakınsak bir gerçel sayı serisi ve* $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *olsun. Bu durumda*

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} (\lambda_n B),$$

olarak tanımlı Minkowski toplam serisi yakınsaktır.

Önerme 4.48. *Eğer* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_i$ *pozitif terimli bir gerçel sayı serisi ve* $B = \{e_1 = (1, 0, ..., 0)\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *tek noktalı kümesi için*

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} \lambda_i B,$$

serisi yakınsak ise $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_i$ *serisi yakınsaktır.*

Kanıt. Bir tam metrik uzayda her yakınsak dizi bir Cauchy dizisi ve Cauchy dizileri sınırlı (Yeteri kadar büyük bir disk tarafından dizinin tüm terimleri kapsanır.) olduğundan, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_i$ sınırlıdır. Monoton artan sınırlı bir dizi yakınsak olduğundan, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_i$ serisinin yakınsak olduğu elde edilir. Burada B nin seçilişinin özel bir anlamı yoktur. B kümesi olarak $\{\mathbf{0}\}$ tek nokta kümesinden farklı herhangi bir tek nokta kümesi alınabilir. □

Önerme 4.49. $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_i$ *mutlak yakınsak bir gerçel sayı serisi ve* $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *keyfi bir küme olsun. Bu durumda* $\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_i B$, *serisi yakınsaktır.*

Kanıt. Örnek 4.2 deki hesaplamalara benzer hesaplamalarla sonuç elde edilir. □

Uyarı 4.10. *Yakınsak bir* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_i$ *gerçel sayı serisinin terimlerinin mutlak değerleri alınarak oluşturulan* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|$ *serisi her zaman yakınsak olmayabilir. Bir örnek olarak*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = \ln 2 \tag{4.9}$$

serisi verilebilir. Eğer $B = \{e_1 = (1, 0, ..., 0)\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *ise*

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} \left[\left| \frac{(-1)^i}{i+1} \right| B \right] \tag{4.10}$$

serisi yakınsak olmayacaktır.((4.10) toplamı sınırlı değildir.)
(4.9) de yer alan yakınsak gerçel sayı serisi için de keyfi kümelerle oluşturulacak serilerin yakınsaklığı geçerli değildir. Örnek olarak $C = \{e_1, -e_1\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *ise*

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^i}{i+1} C \right] \tag{4.11}$$

serisi yakınsak değildir. Gerçekten çift katsayılarda e_1 *ve tek katsayılarda* $-e_1$ *alınarak oluşturulacak toplam sınırlı olmaz ve böylece (4.11) kompakt bir küme değildir.*

Önerme 4.50. $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ *serisi için eğer* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_{A_n}$ *yakınsak ise* $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} [(-1)^n A_n]$ *olarak tanımlı seride yakınsaktır.*

Kanıt. Bunu görmek için

$$B_n = (-1)^n A_n$$

tanımı yapılısa, aşikar olarak

$$M_{B_n} = M_{A_n}$$

eşitliği gereği $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_{B_n}$ serisi yakınsak ve Önerme 4.41. den sonuca ulaşılır. □

Önerme 4.51. $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ *yakınsak bir seri ve* $i \in \mathbb{N}$ *için* $b_i \in \mathbb{R}^n$, $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f_i(x) = x + b_i$ *olsun. Eğer* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \|b_i\|$ *ve* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} M_{A_i}$ *serileri yakınsak ise* $i \in \mathbb{N}$ *için*

$$B_i = f_i(A_i)$$

olmak üzere

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n$$

serisi yakınsaktır.

Kanıt. $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $(S_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ olsun. $n > m$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
d^H(S_n, S_m) &= d^H\left(\bigoplus_{i=0}^{n} B_i, \bigoplus_{i=0}^{m} B_i\right) \\
&\leq d^H\left(\bigoplus_{i=m+1}^{n} B_i, \{\mathbf{0}\}\right) \\
&\leq \sum_{i=m+1}^{n} d^H\left(B_i, \{\mathbf{0}\}\right) \\
&= \sum_{i=m+1}^{n} d^H\left([A_i \oplus \{b_i\}], \{\mathbf{0}\}\right) \\
&\leq \sum_{i=m+1}^{n} d^H\left(A_i, \{\mathbf{0}\}\right) + \sum_{i=m+1}^{n} d^H\left(\{b_i\}, \{\mathbf{0}\}\right) \\
&= \sum_{i=m+1}^{n} M_{A_i} + \sum_{i=m+1}^{n} \|b_i\|
\end{aligned}$$

eşitlikleri ve eşitsizlikleri geçerlidir. $\sum\limits_{i=0}^{\infty} M_{A_i}, \sum\limits_{i=0}^{\infty} \|b_i\|$ serilerinin yakınsaklığından sonuç elde edilir. □

4.3 Minkowski Çarpımı ve Seriler

$\mathcal{H}(\mathbb{C})$ uzayı içerisinde kümelerin Minkowski çarpımı kullanılarak yeni seriler tanımlanabilir. Bu kısım içerisinde bu çarpım kullanılarak oluşturulabilecek serileri göz önüne alıp, yakınsaklık kriterleri vermeye çalışacağız:

Tanım 4.21. *$\mathcal{H}(\mathbb{C})$ içerisinde iki seri $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n, \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ olsun.*

$$C_n = \bigoplus_{k=0}^{n} (A_k \otimes B_{n-k})$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} S_0 &= C_0 \\ S_1 &= C_0 \oplus C_1 \\ &\vdots \\ S_n &= C_0 \oplus \cdots \oplus C_n \end{aligned}$$

kısmi toplam dizisi $(S_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ *olan* $\bigoplus_{n=0}^{\infty} C_n$ *Minkowski toplam serisine* $\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n, \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n$ *serilerinin Minkowski-Caucyh çarpım serisi denir.*

Önerme 4.52. $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ *içerisinde* $\sum_{n=0}^{\infty} M_{A_n}$ *ve* $\sum_{n=0}^{\infty} M_{B_n}$ *yakınsak olacak şekilde iki seri* $\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n, \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n$ *olsun. Bu durumda* $\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n, \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n$ *serilerinin Minkowski - Caucyh çarpım serisi* $\bigoplus_{n=0}^{\infty} C_n$ *yakınsaktır.*

Kanıt. $\bigoplus_{n=0}^{\infty} C_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $(S_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ yi göz önüne alalım. $(S_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Gerçekten $n > m$ olmak üzere S_n, S_m arasındaki farka bakalım:

$$\begin{aligned} d^H(S_n, S_m) &= d^H\left(\bigoplus_{i=0}^{n} C_i, \bigoplus_{i=0}^{m} C_i\right) \\ &\leq d^H\left(\bigoplus_{i=m+1}^{n} C_i, \{\mathbf{0}\}\right) \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{n} d^H(C_i, \{\mathbf{0}\}) \\ &= \sum_{i=m+1}^{n} d^H\left(\bigoplus_{k=0}^{i} (A_k \otimes B_{i-k}), \{\mathbf{0}\}\right) \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{n} \left[\sum_{k=0}^{i} d^H((A_k \otimes B_{i-k}), \{\mathbf{0}\})\right] \\ &= \sum_{i=m+1}^{n} \left[\sum_{k=0}^{i} M_{A_k \otimes B_{i-k}}\right] \\ &= \sum_{i=m+1}^{n} \left[\sum_{k=0}^{i} M_{A_k} M_{B_{i-k}}\right] \end{aligned}$$

eşitlik ve eşitsizlikleri geçerlidir. $\sum_{n=0}^{\infty} M_{A_n}$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} M_{B_n}$ serilerinin yakınsaklığından bu iki serinin Cauchy çarpımları ile elde edilen seri yakınsak ve böylece $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir Cauchy dizisi olduğu elde elde edilir. $\square$

Tanım 4.22. *$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha_n \in \mathbb{C}$ kompleks sayıları verilsin. $A \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ olmak üzere*

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n \tag{4.12}$$

olarak tanımlı seriye kuvvet serisi denir. Burada $A^0 = \{\mathbf{1}\}$ ve $n \geq 1$ için $A^n = \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n-kez}$ olarak tanımlı Minkowsi çarpım kümesidir.

Önerme 4.53. *$A \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve olmak üzere $n \in \overline{\mathbb{N}}$ olmak üzere $\alpha_n \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha_n\| (M_A)^n$$

gerçel sayı serisi yakınsak ise

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n$$

olarak tanımlı kuvvet serisini yakınsaktır.

Kanıt. $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_n = \alpha_n A^n$$

olmak üzere $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ serisini göz önüne alalım.

$$M_{B_n} = \max\{\|\alpha_n a^n\|\} = \|\alpha_n\| (M_A)^n$$

eşitliği geçerlidir. Önerme 4.41. gereği

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n$$

serisi yakınsaktır. □

Örnek 4.3. *Her $n \in \overline{\mathbb{N}}$ için $\alpha_n \in S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ve $A \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $M_A = r < 1$ olacak şekilde bir küme olsun. Bu durumda $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n$ serisi yakınsaktır. Bunu görmek için*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha_n\| (M_A)^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

ve geometrik serinin yakınsaklığından sonuca ulaşılır.

4.4 Minkowski Serileri ve Dönüşümler

Bu son bölümde önceki kısımlarda elde ettiğimiz seriler yardımıyla tanımlanan dönüşümleri göz önüne alacağız.

Önerme 4.54. *Her* $A \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *için*

$$1) \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} A^n\right]$$

$$2) \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}\right]$$

$$3) \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)n}{(2n)!} A^{2n}\right]$$

serileri yakınsaktır.

Kanıt. $A \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ için

(1) serisinin yakınsaklığı

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (M_A)^n = e^{M_A}$$

eşitliği ve Önerme 4.53. den elde edilir.

(2) serisinin yakınsaklığı

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (M_A)^{2n+1} = \sin(M_A)$$

eşitliği ve Önerme 4.53. den elde edilir.

(3) serisinin yakınsaklığı

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (M_A)^{2n} = \cos(M_A)$$

eşitliği ve Önerme 4.53. den elde edilir. □

Tanım 4.23. $e_M : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$

$$e_M(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} A^n\right]$$

olarak tanımlı dönüşüme Minkowski üstel fonksiyonu denir.

Tanım 4.24. $\sin_M : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$

$$\sin_M(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} \right]$$

olarak tanımlı dönüşüme Minkowski sinüs fonksiyonu denir.

Tanım 4.25. $\cos_M : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$

$$\cos_M(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n} \right]$$

olarak tanımlı dönüşüme Minkowski kosinüs fonksiyonu denir.

Önerme 4.55. $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_i = r < 1$, *olacak şekilde yakınsak pozitif terimli bir gerçel sayı serisi,* $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *olsun.* $F : \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $X \mapsto F(X) = A \oplus \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_i X$ *olarak tanımlansın. Bu durum da* F *büzülme katsayısı* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_i = r$ *olan bir büzülme dönüşümüdür.*

Kanıt. $X, Y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\begin{aligned}
d^H(F(X), F(Y)) &= d^H\left(A \oplus \bigoplus_{i=0}^{\infty} \lambda_i X, A \oplus \bigoplus_{i=0}^{\infty} \lambda_i Y\right) \\
&= d^H\left(\lim_{n\longrightarrow\infty}\left[A \oplus \bigoplus_{i=0}^{n} \lambda_i X\right], \lim_{n\longrightarrow\infty}\left[A \oplus \bigoplus_{i=0}^{n} \lambda_i Y\right]\right) \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} d^H\left(A \oplus \bigoplus_{i=0}^{n} \lambda_i X, A \oplus \bigoplus_{i=0}^{n} \lambda_i Y\right) \\
&\leq \lim_{n\longrightarrow\infty}\left[d^H(A, A) + \lambda_0 d^H(X, Y) + \cdots + \lambda_n d^H(X, Y)\right] \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left[(\lambda_0 + \cdots + \lambda_n)\, d^H(X, Y)\right] \\
&\leq \left[\lim_{n\longrightarrow\infty}(\lambda_0 + \cdots + \lambda_n)\right] d^H(X, Y) \\
&= r d^H(X, Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece F bir büzülme dönüşümü olur. □

Uyarı 4.11. *Önerme 4.55. de tanımlanan* F *dönüşümleri* $A = \{\mathbf{0}\}$ *için de büzülme dönüşümleridir. Öte yandan bu dönüşümler için sabit nokta teoremi gereği varlığı ve tekliği bilinen sabit nokta* $A = \{\mathbf{0}\}$ *olur ki bu çokta ilginç bir sonuç vermemektedir. İlginç durum* $A \neq \{\mathbf{0}\}$ *durumu olacağına işaret edelim.*

5 FRAKTALLAR VE MINKOWSKI SERİLERİ

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda büzülme dönüşümü kavramını hatırlatıp, Banach sabit nokta teoremini kanıtlayıp, Yinelemeli Fonksiyon Sistemi (YFS) kavramını tanımlayacağız. İkinci kısımda klasik bazı fraktalların Minkowski serileri cinsinden ifadeleri verilecektir. Üçüncü ve son kısmımızda İkinci kısımdan hareketle Minkowski küme denklemleri göz önüne alıp, bu denklemlerden hareketle fraktal kümeler ve Minkowski serileri arasındaki ilişkileri örnekler üzerinde irdeleyeceğiz.

5.1 Yinelemeli Fonksiyon Sistemi

Büzülme dönüşümü tanımını hatırlatarak başlıyoruz.

Tanım 5.26. *(X, d) bir metrik uzay ve $f : X \longrightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için*

$$d(f(x), f(y)) \leq r d(x, y)$$

olacak şekilde bir $r \in [0, 1)$ var ise f dönüşümüne bir büzülme dönüşümü denir. Burada yer alan r sayısına f büzülme dönüşümünün büzülme katsayısı denir. $f(x) = x$ özelliğindeki $x \in X$ noktasına da f dönüşümünün bir sabit noktası denir.

Örnek 5.4. *$r \in [0, 1)\,,\ a \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$,*

$$f(x) = rx + a$$

dönüşümleri büzülme katsayıları r olan büzülme dönüşümleridir. Burada $\mathbb{R}^n$ üzerinde standart metrik vardır.

Teorem 5.56. *[5] (Banach Sabit Nokta Teoremi) (X, d) tam metrik uzay $f : X \longrightarrow X$, büzülme katsayısı $r \in [0, 1)$ olan bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda f dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır. Dahası her hangi bir $x \in X$ için*

$$x_n = \begin{cases} x, & n = 0 \\ f^{n-1}(x), & n \geq 1 \end{cases}$$

olarak tanımlı (x_n) dizisi yakınsaktır ve f dönüşümünün sabit noktası (x_n) dizisinin limit noktasıdır.

Kanıt. İlk olarak sabit noktanın varlığını göstererek kanıta başlıyoruz. $x \in X$ ve $m \geq 1$ olmak üzere

$$d(f^m(x), f^{m+1}(x)) \leq r^m d(x, f(x))$$

eşitsizliğini tümevarım ile kanıtlayacağız. $m = 1$ ise

$$d(f(x), f^2(x)) = d(f(x), f(f(x))) \leq rd(x, f(x))$$

eşitsizliği f nin büzülme dönüşümü olmasından elde edilir. $m = k$ için iddia doğru

$$d(f^k(x), f^{k+1}(x)) \leq r^k d(x, f(x))$$

olsun. Şimdi $m = k + 1$ için

$$\begin{aligned} d(f^{k+1}(x), f^{k+2}(x)) &= d(f(f^k(x)), f(f^{k+1}(x))) \\ &\leq rd(f^k(x), f^{k+1}(x)) \\ &\leq rr^k d(x, f(x)) \\ &= r^{k+1} d(x, f(x)) \end{aligned}$$

elde edilir.

$(f^n(x))$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. Bunun için $n > m$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d(f^m(x), f^n(x)) &\leq d(f^m(x), f^{m+1}(x)) + \cdots + d(f^{n-1}(x), f^n(x)) \\ &\leq \left(r^m + \cdots + r^{n-1}\right) d(x, f(x)) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri üçgen eşitsizliği ve yukarıdaki hesaplamalardan geçerli. $r \in [0, 1)$ için $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi bir Cauchy dizisi olduğundan $(f^n(x))$ dizisi bir Cauchy dizisi olur. X uzayı tam olduğundan $(f^n(x))$ dizisi bir $x_0 \in X$ noktasına yakınsar. Ayrıca f sürekli bir dönüşüm olduğundan

$$x_0 = \lim_{n \longrightarrow \infty} f^n(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(f^{n-1}(x)) = f\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} (f^{n-1}(x))\right) = f(x_0)$$

elde edilir. Böylece f dönüşümünün sabit noktası vardır. Varlığını gösterdiğimiz sabit noktanın tekliğini gösterelim. Varsayalım ki $x_0, y_0 \in X$ için $f(x_0) = x_0$ ve $f(y_0) = y_0$ olsun. Bu durumda

$$d(x_0, y_0) = d\left(f(x_0), f(y_0)\right) \leq rd(x_0, y_0)$$

elde edilir ki bu ancak $x_0 = y_0$ olduğunda mümkündür. Buradan sabit nokta tektir. □

Önerme 5.57. *[5] (X, d) metrik uzay, $f : (X, d) \longrightarrow (X, d)$, büzülme katsayısı r olan bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durum da f sürekli bir dönüşümdür.*

Kanıt. $r = 0$ ise f sabit dönüşüm ve bu durumda iddia apaçık olarak doğrudur. $0 < r < 1$ için, verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için $\delta = \frac{\varepsilon}{2r}$ almak yeterlidir. □

Önerme 5.58. *[5] (X, d) metrik uzay $f : (X, d) \longrightarrow (X, d)$, sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda*

$$f\left(\mathcal{H}\left(X\right)\right) \subset \mathcal{H}\left(X\right)$$

olur. Yani $A \in \mathcal{H}(X)$ ise $f(A) \in \mathcal{H}(X)$ olur.

Kanıt. $A \in \mathcal{H}(X)$ için $f(A) \neq \varnothing$ olacağı apaçıktır. $A \in \mathcal{H}(X)$ için $f(A)$ nın kompakt olduğunu göstermek yeterli. Bunun için $f(A)$ içerisinde sonsuz bir dizi $(y_n = f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ olsun. A kompakt olduğundan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizinin $x \in A$ noktasına yakınsayan bir $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ altdizisi vardır. Öte yandan f nin sürekliliği gereği $(y_n = f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $(y_{n_i} = f(x_{n_i}))_{i\in\mathbb{N}}$ altdizisi $f(x) = y \in f(A)$ noktasına yakınsar. Böylece $f(A)$ kompaktır. □

Önerme 5.59. *[5] (X, d) metrik uzay, $f : (X, d) \longrightarrow (X, d)$, büzülme katsayısı r olan bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda*

$$F : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X), \ A \mapsto F(A) = f(A)$$

büzülme katsayısı r olan bir büzülme dönüşümüdür.

Kanıt. Önerme 5.57 gereği f sürekli bir dönüşümdür. Önerme 5.58 gereği $f(\mathcal{H}(X)) \subset \mathcal{H}(X)$ kapsaması geçerlidir. Böylece F iyi tanımlı bir dönüşüm olur. $A, B \in \mathcal{H}(X)$ için

$$\begin{aligned}
d^H(F(A), F(B)) &= d^H(f(A), f(B)) \\
&= \max \left\{ \begin{array}{c} \sup_{f(a)\in f(A)} \left\{ \inf_{f(b)\in f(B)} \{d(f(a), f(b))\} \right\}, \\ \sup_{f(b)\in f(B)} \left\{ \inf_{f(a)\in f(A)} \{d(f(a), f(b))\} \right\} \end{array} \right\} \\
&\leq \max \left\{ \sup_{a\in A} \left\{ \inf_{b\in B} \{rd(a,b)\} \right\}, \sup_{b\in B} \left\{ \inf_{a\in A} \{rd(a,b)\} \right\} \right\} \\
&= r \max \left\{ \sup_{a\in A} \left\{ \inf_{b\in B} \{d(a,b)\} \right\}, \sup_{b\in B} \left\{ \inf_{a\in A} \{d(a,b)\} \right\} \right\} \\
&= rd^H(A, B),
\end{aligned}$$

eşitliğinden sonuca ulaşılır. □

Önerme 5.60. *[5] (X, d) tam metrik uzay, $i = 1, 2, \ldots, s$ için $f_i : (X, d) \longrightarrow (X, d)$ büzülme katsayıları r_i olan büzülme dönüşümleri olsun. Bu durumda*

$$F : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X), \ A \mapsto F(A) = \bigcup_{i=1}^{s} f_i(A)$$

olarak tanımlı F dönüşümü büzülme katsayısı $r = \max\{r_i : i = 1, ..., s\}$ olan bir büzülme dönüşümüdür.

Kanıt. $s = 2$ için kanıtı yapmak yeterli. Genel durum tümevarımla elde edilir. $A, B \in \mathcal{H}(X)$ için

$$\begin{aligned}
d^H(F(A), F(B)) &= d^H(f_1(A) \cup f_2(A), f_1(B) \cup f_2(B)) \\
&\leq \max \left\{ d^H(f_1(A), f_1(B)), d^H(f_2(A), f_2(B)) \right\} \\
&\leq \max \left\{ s_1 d^H(A, B), s_2 d^H(A, B) \right\} \\
&= \max\{s_1, s_2\} d^H(A, B) \\
&= sd^H(A, B)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Tanım 5.27. (X, d) *tam metrik uzay,* $i = 1, 2, \ldots, s$ *için* $f_i : (X, d) \longrightarrow (X, d)$ *büzülme dönüşümleri olsun. Bu durumda* $(X, f_1, ..., f_s)$ *sistemine bir Yinelemeli Fonksiyon Sistemi (YFS) denir.*

Tanım 5.28. (X,d) *tam metrik uzay,* $(X,f_1,...,f_s)$ *Yinelemeli Fonksiyon Sistemi için*

$$A=\bigcup_{i=1}^{s} f_i(A) \tag{5.13}$$

eşitliği sağlanıyor ise $A\subset X$ *boştan farklı kompakt kümesine* $(X,f_1,...,f_s)$ *yinelemeli (itere) fonksiyon sisteminin atraktörü denir.*

Uyarı 5.12. *Tanım 5.28 de (5.13) eşitliği ile verilen A kümesi her zaman var olup olmadığı sorulabilir. Bu sorunun yanıtı* (X,d) *tam metrik uzay olduğu sürece olumludur. Bu iddiayı görmek için* $F:\mathcal{H}(X)\longrightarrow\mathcal{H}(X)$, $A\in\mathcal{H}(X)$ *için*

$$F(A)=\bigcup_{i=1}^{s} f_i(A)$$

olarak tanımlı dönüşümü göz önüne alalım. (X,d) *tam metrik uzay olduğundan* $\left(\mathcal{H}(X),d^H\right)$ *tam metrik uzaydır. Dahası Önerme 8 gereği F bir büzülme dönüşümüdür. Bu iki bilgi ve Banach Sabit Nokta Teoreminden*

$$A=F(A)=\bigcup_{i=1}^{s} f_i(A)$$

eşitliğini gerçekleyen bir $A\in\mathcal{H}(X)$ *boştan farklı kompakt kümesinin varlığı elde edilir.*

5.2 Klasik Fraktallar ve Minkowski Serileri

Bu kısımda bazı klasik fraktal uzay örneklerini üç yaklaşım ile ifade edeceğiz.

Örnek 5.5. *($\mathcal{C}$,Cantor Kümesi)*

1. Yaklaşım (Geometrik): $[0,1]\subset\mathbb{R}$ kapalı aralığını göz önüne alalım. $[0,1]$ aralığını üç eşit parçaya ayırıp ortadaki parçayı atalım. Elde ettiğimiz iki alt aralığın her birini üç eşit parçaya bölüp ortadaki parçaları atalım. Herbir adımda elde edilen alt aralıkları üç eşit parçaya bölüp, ortadaki parçaları atarak yeni alt aralıklar elde edelim. Bu şekilde elde edilen dizinin limit kümesine Cantor kümesi denir.

2. Yaklaşım (IFS): $f_1, f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{3}x \\ f_2(x) &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\bigcup_{i=1}^{2} f_i(\mathcal{C}) = \left(\frac{1}{3}\mathcal{C}\right) \cup \left(\left\{\frac{2}{3}\right\} \oplus \frac{1}{3}\mathcal{C}\right) = \mathcal{C}$$

eşitliklerinden $\mathcal{C}$ Cantor kümesi $(\mathbb{R}, f_1, f_2)$ IFS nin atraktörüdür.

3. Yaklaşım (Minkowski Serisi): $B = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= B \oplus \frac{1}{3}\mathcal{C} \\ &= B \oplus \frac{1}{3}\left(B \oplus \frac{1}{3}\mathcal{C}\right) \\ &= B \oplus \frac{1}{3}B \oplus \frac{1}{9}\mathcal{C} \\ &\vdots \\ &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n}B\right) \end{aligned}$$

eşitlikleri gereği $\mathcal{C}$ Cantor kümesi bir Minkowski toplam serisi ile ifade edilebilir.

Örnek 5.6. *($\mathcal{S}$, Sierpinski Üçgeni)*

1. Yaklaşım (Geometrik): $\mathbb{R}^2$ de köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ de yer alan birim uzunluktaki eşkenar üçgeni göz önüne alalım. Kenarların orta noktalarını birleştirip elde edilen dört üçgenden ortadakini atıp, geriye kalan üçgenleri göz önüne alalım. Bu üçgenlerin herbirinin kenarlarının orta noktalarını birleştirip, elde edilen dört alt üçgenden ortadakileri atarak işlem tekrar edilsin. Elde edilen dizinin limit kümesine Sierpinski üçgeni denir.

2. Yaklaşım (IFS): S, Sierpinski üçgeni ve $i = 1, 2, 3$ için $f_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right) \\ f_2(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right) \\ f_3(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\bigcup_{i=1}^{3} f_i(\mathcal{S}) = \left(\frac{1}{2}\mathcal{S}\right) \cup \left(\left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right\} \oplus \frac{1}{2}\mathcal{S}\right) \cup \left(\left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\} \oplus \frac{1}{2}\mathcal{S}\right) = \mathcal{S}$$

eşitliklerinden $\mathcal{S}$ Sierpinski üçgeni $(\mathbb{R}^2, f_1, f_2, f_3)$ IFS nin atraktörüdür.

3. Yaklaşım (Minkowski Serisi): $B = \left\{(0,0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= B \oplus \frac{1}{2}\mathcal{S}, \\
&= B \oplus \frac{1}{2}\left(B \oplus \frac{1}{2}\mathcal{S}\right) \\
&= B \oplus \frac{1}{2}B \oplus \frac{1}{4}\mathcal{S}, \\
&= B \oplus \frac{1}{2}B \oplus \frac{1}{4}B \oplus \frac{1}{8}\mathcal{S} \\
&\vdots \\
&= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}B\right)
\end{aligned}$$

eşitlikleri gereği $\mathcal{S}$ Sierpinski üçgeni bir Minkowski toplam serisi ile ifade edilebilir.

Örnek 5.7. *($\mathcal{CD}$ Cantor Tozu)*

1. Yaklaşım (Geometrik): $\mathbb{R}^2$ de $[0,1] \times [0,1]$ birim karesini göz önüne alalım. Bu kareyi dokuz eş kareye bölüp köşelere değen kareleri alıp geriye kalan beş kareyi atalım. Sonra elde ettiğimiz dört karenin herbirine aynı işlemi uygulayalım. Bu şekilde devam ederek elde edeceğimiz limit kümeye Cantor Tozu denir.

2. Yaklaşım (IFS): $\mathcal{CD}$, Cantor Tozu ve $i = 1, 2, 3, 4$ için $f_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y\right) \\
f_2(x,y) &= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y\right) \\
f_3(x,y) &= \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\right) \\
f_4(x,y) &= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\bigcup_{i=1}^{4} f_i(\mathcal{CD}) = \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{1}{3}\mathcal{CD}\right) \cup \left(\left\{\left(\frac{2}{3}, 0\right)\right\} \oplus \frac{1}{3}\mathcal{CD}\right) \cup \\ \left(\left\{\left(0, \frac{2}{3}\right)\right\} \oplus \frac{1}{3}\mathcal{CD}\right) \cup \left(\left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\} \oplus \frac{1}{3}\mathcal{CD}\right) \end{array} \right\} = \mathcal{CD}$$

eşitliklerinden $\mathcal{CD}$, Cantor Tozu $(\mathbb{R}^2, f_1, f_2, f_3, f_4)$ IFS nin atraktörüdür.

3. Yaklaşım (Minkowski erisi): $B = \left\{(0,0), \left(\frac{2}{3}, 0\right), \left(0, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathcal{CD} &= B \oplus \frac{1}{3}\mathcal{CD} \\
&= B \oplus \frac{1}{3}\left(B \oplus \frac{1}{3}\mathcal{CD}\right) \\
&= B \oplus \frac{1}{3}B \oplus \frac{1}{9}\mathcal{CD} \\
&= B \oplus \frac{1}{3}B \oplus \frac{1}{9}B \oplus \frac{1}{27}\mathcal{CD} \\
&\vdots \\
&= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n}B\right)
\end{aligned}$$

eşitlikleri gereği $\mathcal{CD}$ Cantor Tozu bir Minkowski toplam serisi ile ifade edilebilir.

Örnek 5.8. *($\mathcal{SC}$, Sierpinski Halısı):*

1. Yaklaşım (Geometrik): $\mathbb{R}^2$ de $[0,1] \times [0,1]$ birim karesini göz önüne alalım. Bu kareyi dokuz eş kareye bölüp ortadaki kareyi atalım. Sonra elde ettiğimiz sekiz karenin herbirine aynı işlemi uygulayalım. Bu şekilde devam ederek elde edeceğimiz limit kümeye Sierpinski Halısı denir.

2. Yaklaşım (IFS): $\mathcal{SC}$, Sierpinski Halısı ve $i = 1, 2, ..., 8$ için $f_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y\right) \\
f_2(x,y) &= \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}y\right) \\
f_3(x,y) &= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y\right) \\
f_4(x,y) &= \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}\right) \\
f_5(x,y) &= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}\right) \\
f_6(x,y) &= \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\right) \\
f_7(x,y) &= \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\right) \\
f_8(x,y) &= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{8} f_i(\mathcal{SC}) &= \left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{3}\mathcal{SC}\right)\cup\left(\left\{\left(\frac{1}{3},0\right)\right\}\oplus\frac{1}{3}\mathcal{SC}\right)\\ \cup\left(\left\{\left(\frac{2}{3},0\right)\right\}\oplus\frac{1}{3}\mathcal{SC}\right)\cup\left(\left\{\left(0,\frac{1}{3}\right)\right\}\oplus\frac{1}{3}\mathcal{SC}\right)\\ \cup\left(\left\{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}\oplus\frac{1}{3}\mathcal{SC}\right)\cup\left(\left\{\left(0,\frac{2}{3}\right)\right\}\oplus\frac{1}{3}\mathcal{SC}\right)\\ \cup\left(\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}\oplus\frac{1}{3}\mathcal{SC}\right)\cup\left(\left\{\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}\oplus\frac{1}{3}\mathcal{SC}\right)\end{array}\right]\\ &= \mathcal{SC}\end{aligned}$$

eşitliklerinden SC, Sierpinski Halısı $(\mathbb{R}^2, f_1, ..., f_8)$ IFS nin atraktörüdür.

3. Yaklaşım (Minkowski Serisi):

$$B=\left\{(0,0),\left(\frac{1}{3},0\right),\left(\frac{2}{3},0\right),\left(0,\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(0,\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathcal{SC} &= B\oplus\frac{1}{3}\mathcal{SC}\\ &= B\oplus\frac{1}{3}\left(B\oplus\frac{1}{3}\mathcal{SC}\right)\\ &= B\oplus\frac{1}{3}B\oplus\frac{1}{9}\mathcal{SC}\\ &= B\oplus\frac{1}{3}B\oplus\frac{1}{9}B\oplus\frac{1}{27}\mathcal{SC}\\ &\ \ \vdots\\ &= \bigoplus_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}B\right)\end{aligned}$$

eşitlikleri gereği $\mathcal{SC}$ Sierpinski Halısı bir Minkowski toplam serisi ile ifade edilebilir.

Örnek 5.9. *($\mathcal{V}$ Vicsek Fraktalı)*

1. Yaklaşım (Geometrik): $\mathbb{R}^2$ de $[0,1]\times[0,1]$ birim karesini göz önüne alalım. Bu kareyi dokuz eş kareye bölüp köşelere değen kareleri ve ortada yer alan kareyi alıp geri kalan kareleri atalım. Sonra elde ettiğimiz beş karenin herbirine aynı işlemi uygulayalım. Bu şekilde devam ederek elde edeceğimiz limit kümeye Vicsek Fraktalı denir.

2. Yaklaşım (IFS): $\mathcal{V}$, Vicsek Fraktalı ve $i = 1, 2, 3, 4, 5$ için $f_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y\right) \\
f_2(x,y) &= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y\right) \\
f_3(x,y) &= \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}\right) \\
f_4(x,y) &= \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\right) \\
f_5(x,y) &= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{5} f_i(\mathcal{V}) &= \left[\begin{array}{c} \left(\frac{1}{3}\mathcal{V}\right) \cup \left(\left\{\left(\frac{2}{3}, 0\right)\right\} \oplus \frac{1}{3}\mathcal{V}\right) \cup \left(\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\} \oplus \frac{1}{3}\mathcal{V}\right) \\ \cup \left(\left\{\left(0, \frac{2}{3}\right)\right\} \oplus \frac{1}{3}\mathcal{V}\right) \left(\left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\} \oplus \frac{1}{3}\mathcal{V}\right) \end{array}\right] \\
&= V
\end{aligned}$$

eşitliklerinden $\mathcal{V}$, Vicsek Fraktalı $(\mathbb{R}^2, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ IFS nin atraktörüdür.

3. Yaklaşım (Minkowski serisi): $B = \left\{(0,0), \left(\frac{2}{3}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \left(0, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= B \oplus \frac{1}{3}\mathcal{V} \\
&= B \oplus \frac{1}{3}\left(B \oplus \frac{1}{3}\mathcal{V}\right) \\
&= B \oplus \frac{1}{3}B \oplus \frac{1}{9}\mathcal{V}, \\
&= B \oplus \frac{1}{3}B \oplus \frac{1}{9}B \oplus \frac{1}{27}\mathcal{V} \\
&\vdots \\
&= \bigoplus_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}B\right)
\end{aligned}$$

eşitlikleri gereği V Vicsek Fraktalı bir Minkowski toplam serisi ile ifade edilebilir.

5.3 Minkowski Küme Denklemleri

Yukarıda yer alan beş örnek belirli küme denklemleri ile fraktallar arasında yakın bir ilişkinin olduğunu ortaya koymaktadır. Şimdi yukarıdaki örnekleri genellemeye çalışacağız:

Örnek 5.10. *$A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ ve $\alpha \in (0,1)$ olsun.*

$$A = B \oplus \alpha A \tag{5.14}$$

eşitliği sağlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} A &= B \oplus \alpha A \\ &= B \oplus \alpha B \oplus \alpha^2 A \\ &= B \oplus \alpha B \oplus \alpha^2 B \oplus \alpha^3 A \\ &= B \oplus \alpha B \oplus \alpha^2 B \oplus \alpha^3 B \oplus \alpha^4 A \end{aligned}$$

eşitlikleri (5.14) eşitliği gereğince geçerlidir. Bu eşitliklerden hareketle bir dizi tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} S_1 &= B \oplus \alpha A \\ S_2 &= B \oplus \alpha B \oplus \alpha^2 A \\ S_3 &= B \oplus \alpha B \oplus \alpha^2 B \oplus \alpha^3 A \\ &\vdots \\ S_n &= \left[\bigoplus_{i=0}^{n-1} \alpha^i B\right] \oplus \alpha^n A \end{aligned} \tag{5.15}$$

Bu dizi iki şekilde göz önüne alınabilir: ilk olarak (S_n) dizisi terimleri sabit ve her $n = 1, 2, ...$ için $S_n = A$ ve ikinci olarak (5.15) eşitliği ile genel terimi tanımlı dizidir. Elbette (S_n) yakınsak bir dizi ve yakınsadığı küme A kümesidir. Öte yandan

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \longrightarrow \infty} S_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left[\left[\bigoplus_{i=0}^{n-1} \alpha^i B\right] \oplus \alpha^n A\right] \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \left[\bigoplus_{i=0}^{n-1} \alpha^i B\right] \oplus \lim_{n \longrightarrow \infty} \alpha^n A = \lim_{n \longrightarrow \infty} \bigoplus_{i=0}^{n-1} \alpha^i B \oplus \{0\} \\ &= \bigoplus_{i=0}^{\infty} \alpha^i B \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerli ve böylece A kümesi yakınsak bir küme serisi ile ifade edilmiş olur. Tersine $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ ve $\alpha \in (0,1)$ için

$$A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \alpha^i B \tag{5.16}$$

ise

$$A = B \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} \alpha^i B = B \oplus \alpha \left[\bigoplus_{i=1}^{\infty} \alpha^{i-1} B \right] = B \oplus \alpha A \tag{5.17}$$

eşitlikleride geçerlidir. Böylece (5.16) ifadesi ile verilen bir A kümesi için (5.17) eşitlikleriyle elde edilen Minkowski toplamı ile ifade edilen bir küme denklemi vardır.

Örnek 5.11. *$A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in (0,1)$ ve $\alpha + \beta < 1$ olsun.*

$$A = B \oplus \alpha A \oplus \beta A \tag{5.18}$$

eşitliği geçerli olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} A &= B \oplus \alpha A \oplus \beta A \\ &= B \oplus \alpha B \oplus \beta B \oplus \alpha^2 A \oplus \alpha\beta A \oplus \alpha\beta A \oplus \beta^2 A \\ &= B \oplus \alpha B \oplus \beta B \oplus \alpha^2 B \oplus \beta^2 B \oplus \alpha^3 A \oplus \alpha^2\beta A \oplus \alpha^2\beta A \oplus \alpha^2\beta A \oplus \alpha\beta^2 A \\ &\quad \oplus \alpha\beta^2 A \oplus \alpha\beta^2 A \oplus \beta^3 A \end{aligned}$$

eşitlikleri (5.18) gereği geçerlidir. Genel olarak

$$\alpha B \oplus \beta B = (\alpha + \beta) B$$

eşitliğinin geçerli olmadığını Üçüncü bölümde ifade etmiştik. Öte yandan yukarıdaki ifadeyi düzenlemek için özel bir parantezleme tanımı yapacağız:

$$\begin{aligned} ((\alpha+\beta))\, B &= \alpha B \oplus \beta B \\ ((\alpha+\beta))^2\, B &= \alpha^2 B \oplus \alpha\beta B \oplus \alpha\beta B \oplus \beta^2 B \\ &\vdots \\ ((\alpha+\beta))^{n-1}\, B &= \alpha^{n-1} B \oplus \cdots \oplus \underbrace{\alpha^{n-1-i}\beta^i B \oplus \cdots \oplus \alpha^{n-1-i}\beta^i B}_{\binom{n-1}{i}-tane} \oplus \cdots \oplus \beta^{n-1} B \end{aligned}$$

Bu gösterimden hareketle hareketle bir (S_n) dizisini şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} S_1 &= B \oplus \alpha A \oplus \beta A \\ S_2 &= B \oplus \alpha B \oplus \beta B \oplus \alpha^2 A \oplus \alpha\beta A \oplus \alpha\beta A \oplus \beta^2 A \\ &\vdots \\ S_n &= B \oplus ((\alpha+\beta))^{n-1} B \oplus ((\alpha+\beta))^n A \end{aligned} \tag{5.19}$$

Bu dizi iki şekilde göz önüne alınabilir: ilk olarak (S_n) *dizisi terimleri sabit ve her* $n = 1, 2, ...$ *için* $S_n = A$ *ve ikinci olarak (5.19) eşitliği ile genel terimi tanımlı dizidir. Elbette* (S_n) *yakınsak bir dizi ve yakınsadığı küme* A *kümesidir. Öte yandan*

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \longrightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \left[B \oplus ((\alpha+\beta))^{n-1} B \oplus ((\alpha+\beta))^{n} A \right] \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \left[B \oplus ((\alpha+\beta))^{n-1} B \right] \oplus \lim_{n \longrightarrow \infty} \left[((\alpha+\beta))^{n} A \right] \qquad (5.20) \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Üst satırda yer alan toplamın $\lim_{n \longrightarrow \infty} \left[((\alpha+\beta))^{n} A \right]$ *parçası için Üçüncü bölüm Sonuç 3.29 gereğince*

$$\text{çap}\left(((\alpha+\beta))^{n} A \right) \leq (\alpha+\beta)^{n} \text{çap}(A)$$

eşitliği geçerli ve $n \longrightarrow \infty$ *için* $(\alpha+\beta)^n \longrightarrow 0$ *olacağından*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left[((\alpha+\beta))^{n} A \right] = \{0\}$$

olur. Buradan (5.20) ifadesi

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left[B \oplus ((\alpha+\beta))^{n-1} B \right]$$

olarak elde edilir. Bu ise S *kümesinin* α, β *uygun çarpımları katsayı olmak üzere* B *kümesi kullanılarak oluşturulan bir Minkowski serisi ile ifade edilmesine olanak verir.*

6 FRAKTAL ÖRNEKLERİ

Beş kısımdan oluşan bu bölümde sayılabilir sonsuz çoklukta fraktal küme örneğini inşa edeceğiz. Birinci kısımda Minkowski üstel fonksiyonunu e_M yi hatırlatıp, $p \geq 1$ olmak üzere birimin p. köklerine orjinin katılmasıyla elde edilen $A(p) \subset \mathbb{C}$ kompakt kümesi ile ilgili bazı gösterimleri tanımlayacağız. İkinci kısımda sabit bir p için $e_M(A(p)) = X$ kümesi ile ilgili bazı gözlemlerde bulunacağız. Üçüncü kısımda, $f : X_1 \subset X \longrightarrow W_1^{s_0} \subset X_1$ dönüşümünü tanımlayıp, bir büzülme dönüşümü olduğunu göstereceğiz. Dördüncü bölümümüzde $F : X \longrightarrow X$ büzülme dönüşümünü tanımlayıp, bu dönüşümden yararlanarak X kümesinin bir fraktal küme olduğunu göstereceğiz. Beşinci bölümümüz de $p = 2, 3, 4, 5, 6$ için X uzaylarının yaklaşık şekillerini sunacağız.

6.1 e_M Fonksiyonu ve $A(p)$ Kümesi

Minkowski çarpımı kullanılarak bir $A \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ kümesinin n. inci kuvvet kümesini $n \geq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} A^n &= 1, && n = 0 \\ A^n &= A^{n-1} \otimes A, && n > 0 \end{aligned}$$

olarak tanımlamıştık. Bu tanım ve Minkowski toplam kullanılarak çeşitli serileri tanımlayıp bu serilerin yakınsaklıklarını Bölüm 4 de tartıştık. Şimdi Minkowski üstel fonksiyonu e_M hatırlatarak başlayalım. Bölüm 4 Önerme 4.54. gereği her $A \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ kompakt kümesi için

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} A^n \right]$$

serisi yakınsaktır. Bu serinin yakınsaklığından hareketle, Minkowski üstel fonksiyonunu $e_M : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$,

$$e_M(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} A^n \right]$$

olarak tanımlamıştık.

Tanım 6.29. *$p \geq 1$ sabit bir tamsayı olmak üzere*

$$A(p) = \{z \in \mathbb{C} : z^p = 1 \text{ veya } z = 0\} \subset \mathbb{C}$$

altkümesini göz önüne alalım. $A(p)$ kümesi birimin p. köklerine orjinin katılmasıyla elde edilen $(p+1)$ elemanlı sonlu bir kümedir. $\mathbb{C}$ ile $\mathbb{R}^2$ arasındaki $z = x + iy \mapsto (x, y)$ doğal eşlemesi yardımıyla gerekli olduğunda $A(p) \subset \mathbb{R}^2$ varsayacağız. $A(p)$ sonlu bir küme olduğundan, $A(p) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ olacağı açıktır.

Önerme 6.61. *$n \geq 1$ için*

$$[A(p)]^n = A(p)$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. $n = 1$ ise iddia aşikar. $n = k$ için iddia doğru olsun. Yani

$$[A(p)]^k = A(p)$$

olsun. $n = k + 1$ için

$$[A(p)]^{k+1} = [A(p)]^k \otimes A(p) = A(p) \otimes A(p)$$

eşitlikleri $(k+1)$. kuvvet tanımı ve tümevarım hipotezi gereği geçerli. Böylece kanıt

$$A(p) \otimes A(p) = A(p)$$

eşitliğine indirgenir. $z_1, z_2 \in A(p)$ için z_1, z_2 den biri sıfır ise çarpım sıfır ve böylece $z_1 z_2 \in A(p)$ olur. Öte yandan z_1, z_2 nin her ikiside sıfırdan farklı ise z_1, z_2 birimin p. kökü olduklarından çarpımları yine $A(p)$ nin elemanıdır. Böylece $A(p) \otimes A(p) \subset A(p)$ olur. $A(p) = A(p) \otimes \{1\} \subset A(p) \otimes A(p)$, kapsamından sonuca ulaşılır. □

Önerme 6.62.

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\mathrm{Re}(z) : z \in A(p)\} \\ C_2 &= \{\mathrm{Im}(z) : z \in A(p)\}, \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} m_1 &= \min\{|a-b| : a,b \in C_1, a \neq b\} \\ m_2 &= \min\{|c-d| : c,d \in C_2, c \neq d\} \\ m &= \min\{m_1, m_2\} \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda

$$K = \left\{ k \in \mathbb{Z}^+ : \frac{2}{k} \leq m, \right\} \neq \varnothing$$

olur.

Kanıt. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar cisminin Arşimet özelliği gereği $K \neq \varnothing$ olur. K kümesinin en küçük elemanını k_0 ile göstereceğiz. Devam eden kısımda k_0 gösterimi burada tanımlandığı anlamda kullanılacaktır. □

Önerme 6.63. *Önerme 6.62. de tanımlanan m ve k_0 pozitif tam sayıları için*

$$\frac{m}{k_0!} > 2 \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt. $2 \sum\limits_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ toplamına konsantre olalım.

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} &= 2 \left[\frac{1}{(k_0+1)!} + \frac{1}{(k_0+2)!} + \cdots \right] \\ &= \frac{2}{(k_0+1)!} \left[1 + \frac{1}{k_0+2} + \frac{1}{(k_0+2)(k_0+3)} + \cdots \right] \\ &\leq \frac{2}{(k_0+1)!} \left[1 + \frac{1}{k_0+2} + \frac{1}{(k_0+2)^2} + \cdots \right] \\ &= \frac{2}{(k_0+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{k_0+2}} = \frac{2(k_0+2)}{(k_0+1)(k_0+1)!}, \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$2 \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{2(k_0+2)}{(k_0+1).(k_0+1)!}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\frac{m}{k_0!} \geq \frac{2}{k_0.k_0!}$$

eşitsizliği k_0 ın seçimi gereği doğrudur. Böylece

$$\frac{2}{k_0.k_0!} > \frac{2(k_0+2)}{(k_0+1).(k_0+1)!}$$

eşitsizliğini görmek yeterli. Bu eşitsizlik ise

$$\frac{1}{k_0} > \frac{(k_0+2)}{(k_0+1)(k_0+1)}$$

eşitsizliğine denktir. Bu ise her $k_0 > 0$ tamsayısı için geçerli. □

Önerme 6.64. *C_1, C_2, m, k_0 Önerme 6.62. de tanımlanan kümeler ve sayılar olmak üzere*

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{1 + a_{i_1} + \frac{1}{2!}a_{i_2} + \cdots + \frac{1}{k_0!}a_{i_{k_0}} : a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{k_0}} \in C_1\right\} \\ B_2 &= \left\{1 + a_{i_1} + \frac{1}{2!}a_{i_2} + \cdots + \frac{1}{k_0!}a_{i_{k_0}} : a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{k_0}} \in C_2\right\} \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $x, y \in B_1$ ve $x \neq y$ ise

$$|x-y| \geq \frac{m}{k_0!}$$

eşitsizliği geçerlidir. Benzer şekilde $x, y \in B_2$ ve $x \neq y$ ise

$$|x-y| \geq \frac{m}{k_0!}$$

eşitsizliği de geçerlidir.

Uyarı 6.13. *Genel olarak B_1 ya da B_2 kümesindeki elemanların yazımının tek türlü olmadığına işaret edelim. Bir örnek olarak*

$$\begin{aligned} B_1 &= \{-1, 0, 1\} \\ m &= 1 \\ k_0 &= 2 \end{aligned}$$

durumunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} x &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(-1) = \frac{3}{2} \\ x &= 1 + 0 + \frac{1}{2!}(1) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

eşitlikleri gereği $x \in B_1$ elemanının iki farklı yazımı vardır.

Kanıt. $x, y \in B_1$ ve $x \neq y$ olsun. x, y nin yazımı tek türlü olmasa bile

$$\begin{aligned} x &= 1 + a_{i_1} + \frac{1}{2!} a_{i_2} + \cdots + \frac{1}{k!} a_{i_{k_0}} \\ y &= 1 + a_{j_1} + \frac{1}{2!} a_{j_2} + \cdots + \frac{1}{k!} a_{j_{k_0}} \end{aligned}$$

ifadeleri geçerlidir. $x \neq y$ olduğundan en az bir $1 \leq t \leq k_0$ için $a_{i_t} \neq a_{j_t}$ olur. Şimdi aşağıdaki tabloya bakalım:

$$\begin{aligned} x &= 1 + a_{i_1} + \frac{1}{2!} a_{i_2} + \frac{1}{3!} a_{i_3} + \cdots + \frac{1}{k_0!} a_{i_{k_0}} \\ x_1 &= 1 + a_{j_1} + \frac{1}{2!} a_{i_2} + \frac{1}{3!} a_{i_3} + \cdots + \frac{1}{k_0!} a_{i_{k_0}} \\ x_2 &= 1 + a_{j_1} + \frac{1}{2!} a_{j_2} + \frac{1}{3!} a_{i_3} + \cdots + \frac{1}{k_0!} a_{i_{k_0}} \\ &\vdots \\ x_n &= 1 + a_{j_1} + \cdots + \frac{1}{n!} a_{j_n} + \frac{1}{(n+1)!} a_{i_{n+1}} + \cdots + \frac{1}{k_0!} a_{i_{k_0}} \\ &\vdots \\ x_{k_0-1} &= 1 + a_{j_1} + \frac{1}{2!} a_{j_2} + \frac{1}{3!} a_{j_3} + \cdots + \frac{1}{(k_0-1)!} a_{j_{k_0-1}} + \frac{1}{k_0!} a_{i_{k_0}} \\ y &= 1 + a_{j_1} + \frac{1}{2!} a_{j_2} + \frac{1}{3!} a_{j_3} + \cdots + \frac{1}{k_0!} a_{j_{k_0}} \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki tabloda yer alan ardışık iki eleman arasındaki fark

$$\begin{aligned} |x - x_1| &= |a_{i_1} - a_{j_1}| \geq \frac{m}{k_0!} \\ |x_n - x_{n+1}| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} \left(a_{i_{n+1}} - a_{j_{n+1}} \right) \right| \geq \frac{m}{k_0!} \\ |x_{k_0-1} - y| &= \left| \frac{1}{k_0!} \left(a_{i_{k_0}} - a_{j_{k_0}} \right) \right| \geq \frac{m}{k_0!} \end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlar. x ve y farklı elemanlar olduğundan en az bir tane x_n elemanı vardır. Böylece iddia doğru. Tamamen benzer şekilde B_2 için de iddianın doğruluğu görülür. □

Önerme 6.65. *C_1, C_2, k_0, m Önerme 6.62 de tanımlanan kümeler ve sayılar* *olmak üzere* $n \geq k_0 + 1$ *için* $a_n, c_n \in C_1$ *ve* $b_n, d_n \in C_2$ *olmak üzere*

$$\sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} (a_n - c_n)$$
$$\sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} (b_n - d_n)$$

serilerinin 0 *a yakınsaması için gerek ve yeter koşul her* $n \geq k_0 + 1$ *için*

$$a_n = c_n \text{ ve } b_n = d_n$$

olmasıdır.

Kanıt. Her $n \geq k_0 + 1$ için

$$a_n = c_n \text{ ve } b_n = d_n$$

eşitlikleri geçerli ise serilerin 0 a yakınsayacağı aşikar.

Tersine varsayalım ki $\sum\limits_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} (a_n - c_n) = 0$ olsun. $\sum\limits_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} (a_n - c_n)$ serisinin t. kısmi toplamı ile arasındaki farka bakalım:

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} (a_n - c_n) - \sum_{n=k_0+1}^{t} \frac{1}{n!} (a_n - c_n) \right| \\
\leq\ & \sum_{n=t+1}^{\infty} \frac{1}{n!} |a_n - c_n| \\
\leq\ & 2 \sum_{n=t+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
=\ & 2 \left[\frac{1}{(t+1)!} + \frac{1}{(t+2)!} + \frac{1}{(t+3)} + \cdots \right] \\
=\ & \frac{2}{(t+1)!} \left[1 + \frac{1}{t+2} + \frac{1}{(t+2)(t+3)} + \cdots \right] \\
\leq\ & \frac{2}{(t+1)!} \left[1 + \frac{1}{t+2} + \frac{1}{(t+2)^2} + \cdots \right] \\
=\ & \frac{2}{(t+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{t+2}} = \frac{2(t+2)}{(t+1).(t+1)!}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik şu şekilde yorumlanabilir. 0 a yakınsayan $\sum\limits_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} (a_n - c_n)$ serisinin t. kısmi toplamı 0 ın $\frac{2(t+2)}{(t+1).(t+1)!}$ komşuluğunda yer almaktadır.

Her $n \geq k_0 + 1$ için $a_n = c_n$ olduğunu göstermek istiyoruz. Varsayalım ki her $n \geq k_0 + 1$ için $a_n = c_n$ eşitliği geçerli olmasın. $a_n \neq c_n$ özelliğindeki ilk n indeksini t ile gösterelim. $t \geq k_0 + 1$ olduğunu hatırlatalım. Bu durumda yukarıdaki hesaplamalar gereği

$$\frac{|a_t - c_t|}{t!} \leq \frac{2(t+2)}{(t+1).(t+1)!}$$

olmalıdır. İfade düzenlenirse

$$m = \min\{m_1, m_2\} \leq |a_t - c_t| \leq \frac{2(t+2)}{(t+1)(t+1)} < \frac{2}{t} < \frac{2}{k_0}$$

elde edilir. Bu ise k_0 nın seçimi gereği mümkün değil. Tamamen benzer hesaplamalarla her $n \geq k_0 + 1$ için

$$b_n = d_n$$

eşitliği elde edilir. □

6.2 $e_M(A(p)) = X$ Uzayı ile İlgili Özellikler

Bu kısımda $e_M(A(p)) = X$ uzayının uygun bir ayrışımını elde edeceğiz.

Gösterim 8. *$p \geq 2$ tamsayısını sabitleyelim.*

$$e_M(A(p)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} [A(p)]^n \right) = X$$

olsun. X kümesi üzerinde $\mathbb{C}$ nin indirgediği standart metriğin var olduğunu kabul edeceğiz. k_0 Önerme 6.62. de tanımlanan pozitif tam sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} X &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} [A(p)]^n \right) \\ &= \left[\underbrace{\{(1,0)\} \oplus A(p) \oplus \frac{1}{2} A(p) \oplus \cdots \oplus \frac{1}{k_0!} A(p)}_{B} \right] \oplus \left[\bigoplus_{n=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} A(p) \right) \right] \end{aligned}$$

olsun. $b \in B$ olmak üzere

$$X_b = \{b\} \oplus \bigoplus_{n=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} A(p) \right)$$

olarak tanımlayalım.

Önerme 6.66. *Gösterim 8 de tanımlanan gösterimler saklı olmak üzere X uzayı için aşağıdaki özellikler geçerlidir:*

1) $\{X_b : b \in B\}$ kümesi X uzayının bir ayrışımıdır. Yani

i) $X = \bigcup_{b \in B} X_b$,

ii) $b, c \in B$ *ve* $b \neq c$ *ise* $X_b \cap X_c = \varnothing$,

olur.

2) $b = b_1 + ib_2 \in B$, $z \in X_b$ ve $n \geq k_0 + 1$ için $a_n \in C_1$, $b_n \in C_2$ olmak üzere

$$z = b_1 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n + i \left[b_2 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} b_n \right]$$

eşitliği tektir. Yani $n \geq k_0 + 1$ için $c_n \in C_1$ ve $d_n \in C_2$ olmak üzere

$$z = b_1 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} c_n + i \left[b_2 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} d_n \right]$$

ise her $n > k_0 + 1$ için

$$a_n = c_n, \text{ ve } b_n = d_n$$

eşitlikleri geçerli olur.

Kanıt. 1)

$$\begin{aligned}
\bigcup_{b \in B} X_b &= \bigcup_{b \in B} \left[\{b\} \oplus \bigoplus_{n=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} A(p) \right) \right] \\
&= B \oplus \bigoplus_{n=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} A(p) \right) \\
&= \{(1,0)\} \oplus A(p) \oplus \frac{1}{2} A(p) \oplus \cdots \oplus \frac{1}{k_0!} A(p) \oplus \bigoplus_{n=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} A(p) \right) \\
&= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \left[A(p) \right]^n \right) = X
\end{aligned}$$

eşitliklerinden elde edilir. $b, c \in B$ ve $b \neq c$ ise $X_b \cap X_c = \varnothing$ kanıtını yapmadan önce (2). iddiamızı kanıtlayacağız.

2) $b = b_1 + ib_2 \in B$, $z \in X_b$ ve $n \geq k_0 + 1$ için $a_n, c_n \in C_1$, $b_n, d_n \in C_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
z &= b_1 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n + i \left[b_2 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} b_n \right] \\
z &= b_1 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} c_n + i \left[b_2 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} d_n \right]
\end{aligned}$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!}(a_n - c_n) \text{ ve } \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!}(b_n - d_n)$$

serileri 0 a yakınsar. Öte yandan Önerme 6.65. gereği bu serilerin 0 a yakınsaması için gerek ve yeter koşul her $n \geq k_{0+1}$ için

$$a_n = c_n \text{ ve } b_n = d_n$$

olmasıdır. Böylece $z \in X_b$ nin yazımı tektir.

Şimdi $b, c \in B$ ve $b \neq c$ ise $X_b \cap X_c = \varnothing$ kanıtını yaparak kanıtı tamamlayalım. $b, c \in B$ ve $b \neq c$ olmak üzere $z \in X_b \cap X_c$ olsun. $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$ ve $n \geq k_0 + 1$ için $a_n, c_n, \in C_1$ ve $b_n, d_n \in C_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} z &= b_1 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n + i\left[b_2 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} b_n\right] \in X_b \\ z &= c_1 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} c_n + i\left[c_2 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} d_n\right] \in X_c \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. $b \neq c$ olduğundan $b_1 \neq c_1, b_2 \neq c_2$ ifadelerinden en az biri doğrudur. Varsayalım ki $b_1 \neq c_1$olsun. z nin iki farklı yazımı gereği

$$b_1 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n - \left[c_1 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} c_n\right] = 0 \tag{6.21}$$

olmalıdır. Öte yandan

$$\sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n - \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} c_n = \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!}(a_n - c_n)$$

serisi için

$$\left|\sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!}(a_n - e_n)\right| \leq 2 \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

eşitsizlikleri geçeli iken, $b_1 - c_1$ farkı için Önerme 6.64 gereği

$$|b_1 - c_1| \geq \frac{m}{k_0!}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Öte yandan Önerme 6.63 gereği

$$\frac{m}{k_0!} > 2 \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Böylece (6.21) ifadesi geçerli değil. Eğer $b_2 \neq c_2$ ise benzer hesaplamalarla sonuca ulaşılır. Buradan varsayım yanlış.$X_b \cap X_c = \varnothing$ elde edilir. □

Önerme 6.66. (1) de $b, c \in B$ ve $b \neq c$ ise $X_b \cap X_c = \varnothing$ olduğunu gördük.

$$\alpha = \min \left\{ d^H \left(X_b, X_c \right) : b, c \in B, b \neq c \right\}$$

olsun. Sonlu sayıda b indisi var olduğundan sonlu sayıda X_b kümesi vardır. Dahası bu kümelerin her biri kompakt ve ikişer ikişer kesişimleri boş küme olduğundan $\alpha > 0$ olur.

6.3 Bir Büzülme Dönüşümü

Bu kısımda $f : X_1 \longrightarrow W_1^{s_0}$ büzülme dönüşümünü inşa edeceğiz. $X_1, W_1^{s_0} \subset X$ kümeleri aşağıda tanımlanacaklardır.

Önerme 6.67.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{1\} \oplus \bigoplus_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} A(p) \\ W_1^s &= \{1\} \oplus \bigoplus_{n=s}^{\infty} \frac{1}{n!} A(p) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\text{çap} \left(W_1^s \right) < \frac{\alpha}{2}$$

olacak şekilde $s > k_0 + 3$ tamsayısısı vardır.

Kanıt. $\left(W_1^s \right)_{s \geq k_0+3}$ kümeler dizisi için $W_1^{s+1} \subset W_1^s$ kapsamı her s için geçerli. Dahası

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} W_1^s = \{1\}$$

tek nokta olduğundan, yeteri kadar büyük s indisleri için çap $\left(W_1^s \right) < \frac{\alpha}{2}$ sağlanır. Bu özelliği sağlayan $k_0 + 3$ den büyük, en küçük s indisini s_0 ile göstereceğiz. Bundan böyle s_0 gösterimi burada tanımlandığı anlamda kullanılacaktır. □

Gösterim 9. *$f : X_1 \longrightarrow W_1^{s_0}$, $z \in X_1$ için $n \geq k_0 + 1$ ve $a_n \in C_1, b_n \in C_2$ olmak üzere*

$$z = 1 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n + i \left[\sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} b_n \right]$$

için

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + \sum_{n=s_0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_{n-s_0+k_0+1} + i \left[\sum_{n=s_0}^{\infty} \frac{1}{n!} b_{n-s_0+k_0+1} \right] \\ &= 1 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{(n-k_0+s_0-1)!} a_n + i \left[\sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{(n-k_0+s_0-1)!} b_n \right] \end{aligned}$$

olarak tanımlansın.

Yardımcı Teorem 6.68. *Gösterim 9 da tanımlanan f fonksiyonu her $z, w \in X_1$ için*

$$\|f(z) - f(w)\| \leq \frac{43}{180} \|z - w\|$$

eşitsizliğini sağlar. Dahası f örten bir fonksiyondur.

Kanıt. $z, w \in X_1$ için $n \geq k_0 + 1$ ve $a_n, c_n \in C_1$ ve $b_n, d_n \in C_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} z &= 1 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n + i \left[\sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} b_n \right] \\ w &= 1 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} c_n + i \left[\sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} d_n \right] \end{aligned}$$

olsun.

$$\begin{aligned} \|z - w\| &= \left\| \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} (a_n - c_n) + i \left[\sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} (b_n - d_n) \right] \right\| \\ \|f(z) - f(w)\| &= \left\| \begin{pmatrix} \sum\limits_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{(n-k_0+s_0-1)!} (a_n - c_n) + \\ i \left[\sum\limits_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{(n-k_0+s_0-1)!} (b_n - d_n) \right] \end{pmatrix} \right\| \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. $n \geq k_0 + 1$ için

$$\begin{aligned} e_n &= a_n - c_n \\ f_n &= b_n - d_n \end{aligned}$$

yazalım. Yard. Teoremin kanıtı

$$\left|\sum_{n=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{(n-k_0+s_0-1)!}e_n\right| \leq \frac{43}{180}\left|\sum_{n=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{n!}e_n\right| \tag{6.22}$$

$$\left|\sum_{n=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{(n-k_0-1+s_0-1)!}f_n\right| \leq \frac{43}{180}\left|\sum_{n=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{n!}f_n\right| \tag{6.23}$$

eşitsizliklerinin gösterilmesine denktir. İlk olarak $\sum\limits_{n=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{(n-k_0+s_0-1)!}e_n$, $\sum\limits_{n=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{n!}e_n$ serilerinin t. kısmi toplamları ile seriler arasındaki farkı sınırlamaya çalışalım:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{n!}e_n-\sum_{n=k_0+1}^{t}\frac{1}{n!}e_n\right| &\leq \sum_{n=t+1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left|e_n\right| \\
&\leq 2\sum_{n=t+1}^{\infty}\frac{1}{n!}, \\
&= 2\left[\frac{1}{(t+1)!}+\frac{1}{(t+2)!}+\frac{1}{(t+3)!}+\cdots\right] \\
&= \frac{2}{(t+1)!}\left[1+\frac{1}{t+2}+\frac{1}{(t+2)(t+3)}+\cdots\right] \\
&\leq \frac{2}{(t+1)!}\left[1+\frac{1}{t+2}+\frac{1}{(t+2)^2}+\cdots\right] \\
&= \frac{2}{(t+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{t+2}}=\frac{2}{(t+1)!}\frac{(t+2)}{(t+1)}<\frac{2}{t.(t)!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{(n-k_0+s_0-1)!}e_n-\sum_{n=k_0+1}^{t}\frac{1}{(n-k_0+s_0-1)!}e_n\right| \\
\leq\ & \frac{2(t-k_0+s_0+1)}{(t-k_0+s_0).(t-k_0+s_0)!}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Şimdi $e_n \neq 0$ özelliğindeki ilk n indeksini r ile gösterelim. İddiamız için aşağıdaki durumlara bakalım:

1. Durum: $e_r > 0$ olsun. Bu durumda

$$0<\sum_{n=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{(n-k_0+s_0-1)!}e_n \leq \frac{43}{180}\sum_{n=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{n!}e_n \tag{6.24}$$

eşitsizliği geçerlidir. Aslında

$$\frac{e_r}{(r-k_0+s_0-1)!}+\frac{2(r-k_0+s_0+1)}{(r-k_0+s_0).(r-k_0+s_0)!} \leq \frac{43}{180}\left(\frac{e_r}{r!}-\frac{2}{r.r!}\right) \tag{6.25}$$

eşitsizliği görmek yeterli. $\sum\limits_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{(n-k_0+s_0-1)!}e_n$ toplamı $\frac{e_r}{(r-k_0+s_0-1)!}$ sayısının $\frac{2(r-k_0+s_0+1)}{(r-k_0+s_0).(r-k_0+s_0)!}$ komşuluğunda ve $\sum\limits_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!}e_n$ toplamı $\frac{e_r}{r!}$ sayısının $\frac{2}{r.r!}$ komşuluğunda böylece (6.25) eşitsizliği görüldüğünde (6.24) geçerli olacaktır.

$$\frac{e_r}{(r-k_0+s_0-1)!} + \frac{2(r-k_0+s_0+1)}{(r-k_0+s_0).(r-k_0+s_0)!} \tag{6.26}$$

ifadesi için bir üst sınır bulmaya çalışacağız. Bunun için $e_r = 2$, $s_0 = k_0 + 4$ olsun:

$$\frac{e_r}{(r-k_0+s_0-1)!} + \frac{2(r-k_0+s_0+1)}{(r-k_0+s_0)\cdot(r-k_0+s_0)!} \leq \frac{2}{(r+3)!} + \frac{2(r+5)}{(r+4)(r+4)!} \tag{6.27}$$

elde edilir. Şimdi $\left(\frac{e_r}{r!} - \frac{2}{r.r!}\right)$ ifadesi için bir alt sınır bulmaya çalışalım:

$$\left(\frac{e_r}{r!} - \frac{2}{r.r!}\right) \geq \left(\frac{m}{r!} - \frac{2}{r.r!}\right) \geq \left(\frac{2}{k_0.r!} - \frac{2}{r.r!}\right) \tag{6.28}$$

(6.26) ve (6.27) eşitsizliklerinin en sağında yer alan ifadelerden $\frac{2}{r!}$ ifadelerini kısaltalım:

$$\frac{1}{(r+3)(r+2)(r+1)} + \frac{r+5}{(r+4)^2(r+3)(r+2)(r+1)}$$
$$\frac{1}{k_0} - \frac{1}{i}$$

$r \geq k_0 + 1$ olduğundan:

$\frac{1}{k_0} - \frac{1}{r}$ için

$$\frac{1}{k_0} - \frac{1}{r} \geq \frac{1}{k_0(k_0+1)}$$

ve $\frac{1}{(r+2)(r+1)} + \frac{r+4}{(r+3)^2(r+2)(r+1)}$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(r+3)(r+2)(r+1)} + \frac{r+5}{(r+4)^2(r+3)(r+2)(r+1)} \\ \leq \quad & \frac{1}{(k_0+4)(k_0+3)(k_0+2)} + \frac{k_0+6}{(k_0+5)^2(k_0+4)(k_0+3)(k_0+2)} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerli. Öte yandan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(k+4)(k+3)(k+2)} + \frac{k+6}{(k+5)^2(k+4)(k+3)(k+2)} \\ \leq \quad & \frac{43}{180}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği her $k > 0$ tamsayısı için geçerlidir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(k+4)(k+3)(k+2)} + \frac{k+6}{(k+5)^2(k+4)(k+3)(k+2)} \\
= \;& \frac{1}{(k+3)(k+2)}\left[\frac{1}{k+4} + \frac{k+6}{(k+5)^2(k+4)}\right] \\
\leq \;& \frac{1}{k(k+1)}\left[\frac{1}{k+4} + \frac{k+6}{(k+5)^2(k+4)}\right] \\
\leq \;& \frac{1}{k(k+1)}\left[\frac{1}{5} + \frac{7}{180}\right] \\
= \;& \frac{43}{180}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden sonuça ulaşılır. Özel olarak $k = k_0$ bizim kanıtlamak istediğimiz eşitsizliktir.

2. Durum: $e_r < 0$ olsun. Bu durumda

$$0 > \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{(n-k_0+s_0-1)!}e_n \geq \frac{43}{180}\sum_{n=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{n!}e_n \tag{6.29}$$

eşitsizliği geçerlidir. Aslında

$$0 > \frac{e_r}{(r-k_0+s_0-1)!} - \frac{2(r-k_0+s_0+1)}{(r-k_0+s_0).(r-k_0+s_0)!} \geq \frac{43}{180}\left(\frac{e_r}{r!} + \frac{2}{r.r!}\right) \tag{6.30}$$

eşitsizliği görmek yeterli. $\sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{(n-k_0-1+s)!}e_n$ toplamı $\frac{e_r}{(r-k_0+s_0-1)!}$ sayısının $\frac{2(r-k_0+s_0+1)}{(r-k_0+s_0).(r-k_0+s_0)!}$ komşuluğunda ve $\sum_{n=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{n!}e_n$ toplamı $\frac{e_r}{r!}$ sayısının $\frac{2}{r.r!}$ komşuluğunda böylece (6.29) eşitsizliği görüldüğünde (6.28) geçerli olacak. (6.29) eşitsizliği ise (6.25) eşitsizliğine denktir.

Şimdi örtme iddiamızı kanıtlayalım: $w \in W_1^{s_0}$, için $n \geq s_0$ ve $a_n \in C_1, b_n \in C_2$ olmak üzere

$$w = 1 + \sum_{n=s_0}^{\infty}\frac{1}{n!}a_n + i\left[\sum_{n=s_0}^{\infty}\frac{1}{n!}b_n\right]$$

ise $n \geq k_0 + 1$ için

$$c_n = a_{n-k_0+s_0-1},\; d_n = b_{n-k_0+s_0-1}$$

olmak üzere,

$$z = 1 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{n!}c_n + i\left[\sum_{n=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{n!}d_n\right]$$

ise $z \in X_1$ ve $f(z) = w$ eşitsizliği geçerlidir. □

6.4 X Uzayı Üzerinde Bir Büzülme Dönüşümü ve X' in Fraktal Oluşu

Bu kısımda X uzayını bir İFS nin atraktörü olarak ifade edeceğiz.

Önerme 6.69. *$b = b_1 + ib_2 \in B$ olmak üzere $g_b : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$,*

$$z = x + iy \mapsto g_b(z) = x - b_1 + 1 + i(y - b_2)$$

olarak tanımlı dönüşüm öteleme olduğundan bir izometri dönüşümüdür. Ayrıca her $b \in B$ için

$$g_b(X_b) = X_1$$

eşitliği geçerlidir.

Gösterim 10. *$F : X = \bigcup_{b \in B} X_b \longrightarrow W_1^{s_0}$ dönüşümünü şu şekilde tanımlayalım. $\in X_b$ için*

$$F(x, y) = f(g_b(x, y))$$

olsun. Burada f Gösterim 9 da tanımlanan fonksiyon ve g_b fonksiyonu da Önerme 6.69 da tanımlanan fonksiyondur.

Teorem 6.70. *Gösterim 10 da tanımlanan F fonksiyonu büzülme katsayısı $\frac{1}{2}$ olan bir büzülme dönüşümüdür. Ayrıca*

$$F(X) = W_1^{s_0}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. Önce örtme iddiasını gösterelim. $b = 1$ için $g_b = id$ birim dönüşüm ve Yard. Teorem 6.68 den sonuca ulaşılır.

F nin büzülme dönüşümü olduğunu görmek için: $z, w \in X$ noktaları verilsin. Bu noktaların her ikisi ya bir X_b içerisindedir, ya da farklı iki X_b, X_c kümeleri içindedirler. İki duruma bakacağız:

1.Durum: $z, w \in X_b$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|F(z) - F(w)\| &= \|f(g_b(z)) - f(g_b(w))\| \\ &\leq \frac{43}{180} \|g_b(z) - g_b(w)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|z - w\| \end{aligned}$$

eşitsizliklerinden sonuca ulaşılır.

2.Durum: $b \neq c$ olmak üzere $z \in X_b$ ve $w \in X_c$ olsun. Bu durumda

$$\|z-w\| \geq \alpha$$

iken $F(z), F(w) \in W_1^{s_0}$ olduğundan bu iki nokta arası uzaklık $W_1^{s_0}$ kümesinin çapından küçük eşit ve böylece Önerme 6.67. gereği $\frac{\alpha}{2}$ den küçük eşittir. Buradan

$$\|F(z)-F(w)\| \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{2}\|z-w\|$$

eşitsizliği geçerli. Böylece kanıt tamamlanır. □

Buraya kadar $F : X \longrightarrow X$ büzülme dönüşümünü inşa ettik. Bu dönüşüm şu özellikleri sağlar:

1) $F(X) = W_1^{s_0}$,

2) Her $z, w \in X$ için $\|F(z)-F(w)\| \leq \frac{1}{2}\|z-w\|$.

Amacımız

$$X = \bigcup_i F_i(X)$$

olacak şekilde sonlu sayıda $F_i : X \longrightarrow X$ büzülme dönüşümlerini üst satırda yer alan eşitlik sağlanacak şekilde bulmaktı. X kümesini göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} X &= \{1\} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}A(p) \\ &= \left[\underbrace{\{(1,0)\} \oplus A(p) \oplus \frac{1}{2}A(p) \oplus \frac{1}{6}A(p) \oplus \cdots \oplus \frac{1}{(s_0-1)!}A(p)}_{C}\right] \oplus \bigoplus_{n=s_0}^{\infty} \frac{1}{n!}A(p) \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Minkowski toplamın özelliklerinden

$$X = \bigcup_{c \in C}\left[\{c\} \oplus \bigoplus_{n=s_0}^{\infty} \frac{1}{n!}A(p)\right] \tag{6.31}$$

eşitliğide geçerlidir. Öte yandan herhangi bir $c \in C$ için

$$\left[\{c\} \oplus \bigoplus_{n=s_0}^{\infty} \frac{1}{n!}A(p)\right] \text{ ve } \left[W_1^{s_0} = \{(1\} \oplus \bigoplus_{n=s_0}^{\infty} \frac{1}{n!}A(p)\right]$$

kümeleri izometriktir. Gerçekten $c \in C$, $c = c_1 + ic_2$ olmak üzere $G_c : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z = x + iy \mapsto G_c(z) = x - 1 + c_1 + i(y + c_2)$, olarak tanımlansın. G_c dönüşümü izometridir. Dahası

$$G_c\left(X_1\right) = X_c$$

olur. C kümesinin sonlu sayıda elemanı vardır. $c \in C$ karşılık, $F_c : X \longrightarrow X$

$$F_c(z) = G_c(F(z))$$

olsun. İnşa gereği $F_c : X \longrightarrow X$ büzülme katsayısı $\frac{1}{2}$ olan bir büzülme dönüşümüdür. Dahası

$$F_c\left(X\right) = \{c\} \oplus \bigoplus_{n=s_0}^{\infty} \frac{1}{n!} A(p)$$

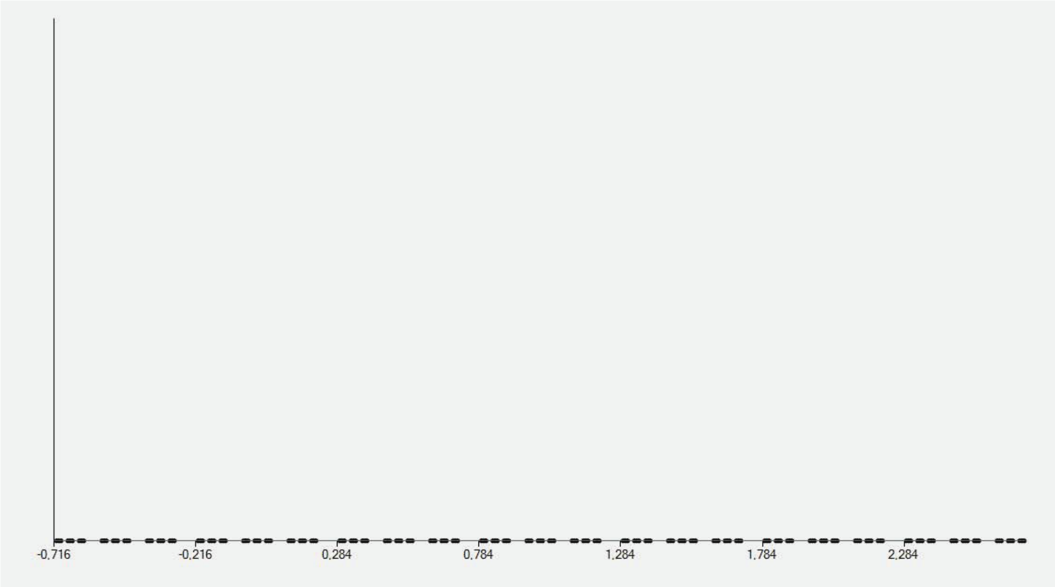
eşitliği geçerlidir. (6.30) eşitliğinden

$$X = \bigcup_{c \in C} \left[\{c\} \oplus \bigoplus_{n=s_0}^{\infty} \frac{1}{n!} A(p) \right] = \bigcup_{c \in C} F_c(X)$$

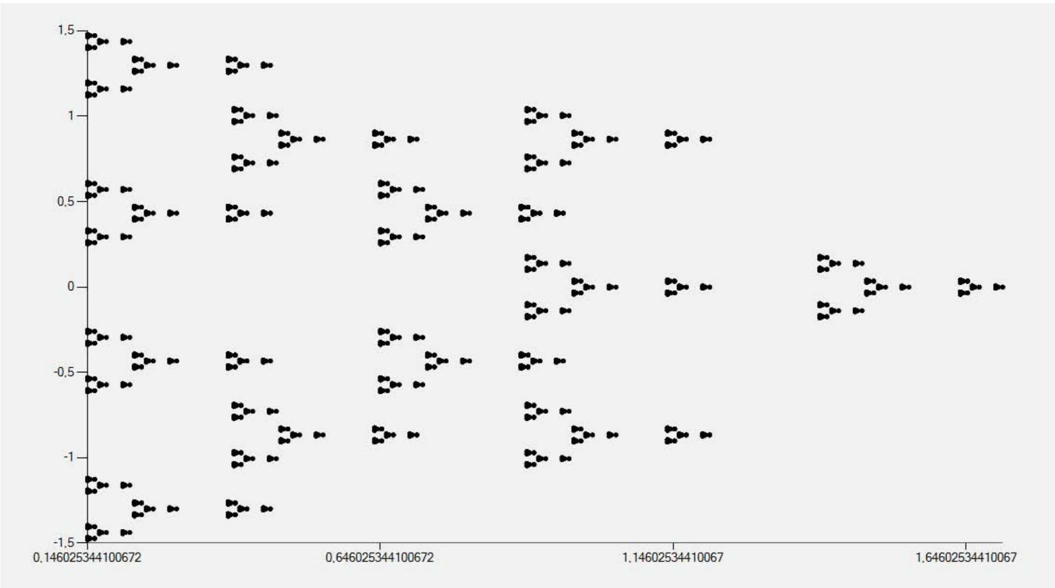
böylece X bir fraktal olur.

6.5 $p = 2, 3, 4, 5, 6$ için X Uzayının Yaklaşık Çizimleri

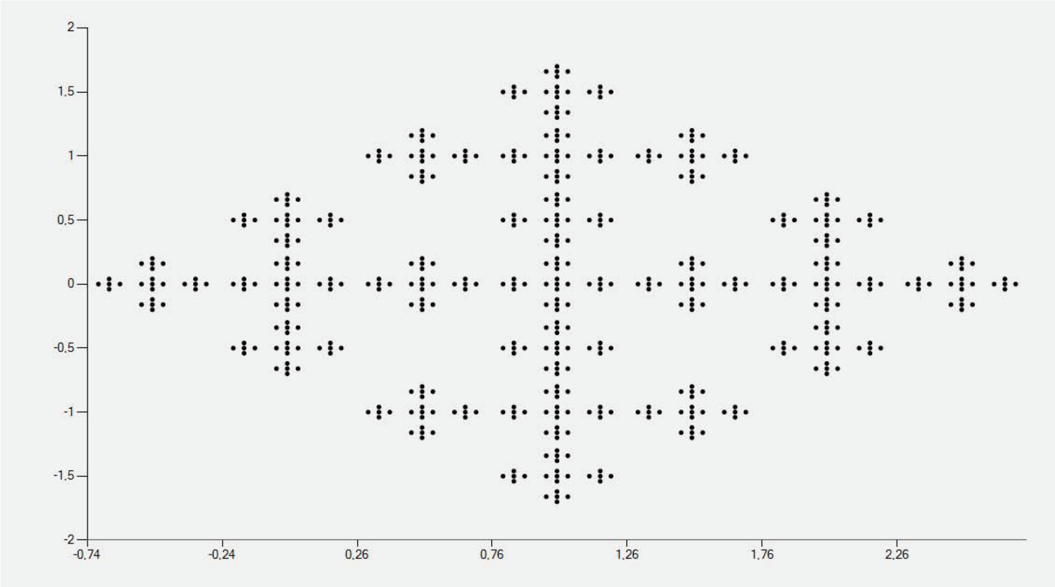
Bu kısımda $p = 2, 3, 4, 5, 6$ için $e_M\left(A(p)\right)$ uzayının yaklaşık çizimlerini sunacağız.



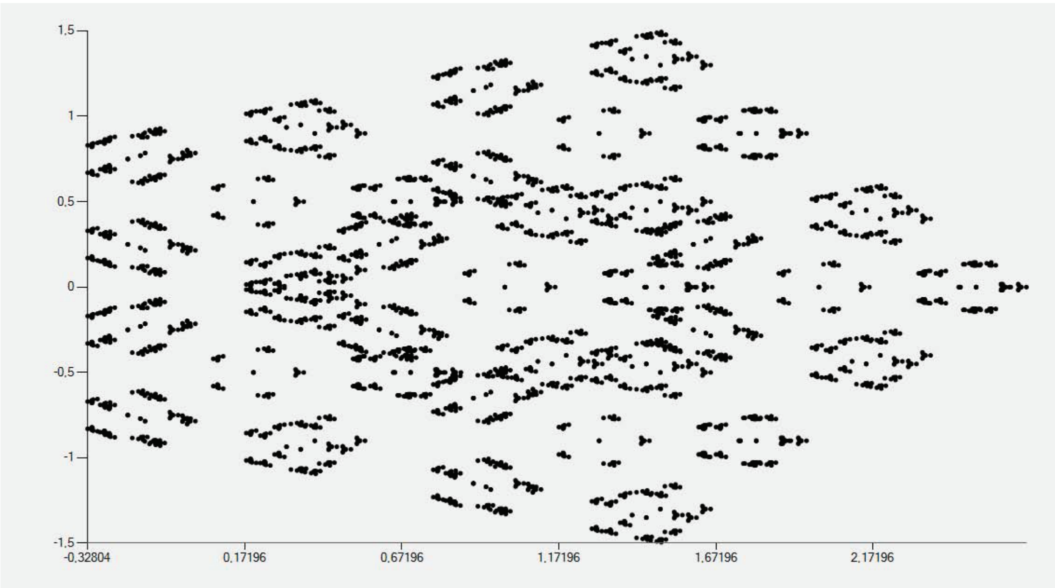
Şekil 6.1: $e_M\left(A(2)\right) \approx \left[\{(1,0)\} \oplus \bigoplus_{n=1}^{4} \frac{1}{n!}A(2)\right]$



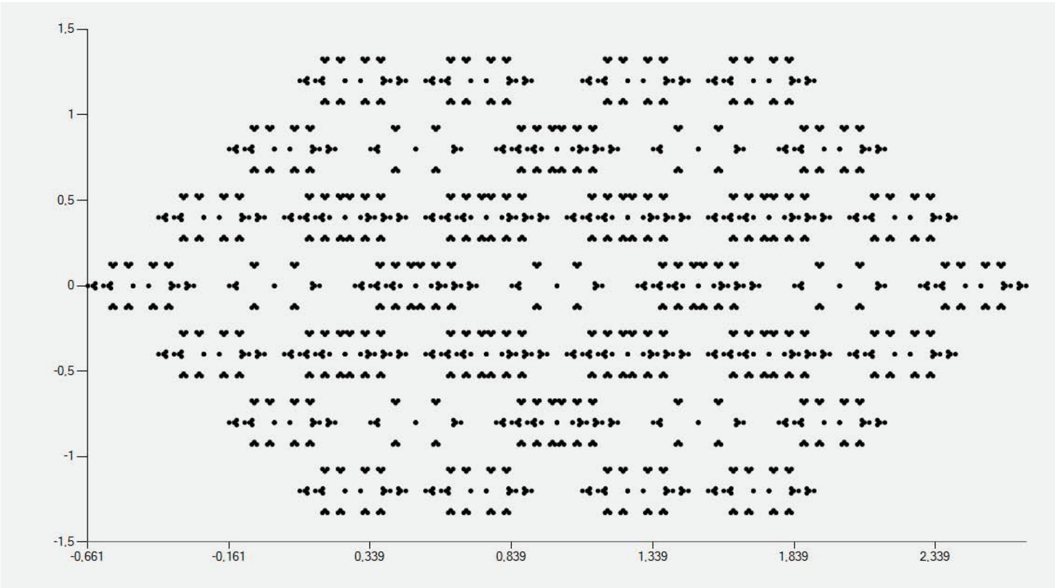
Şekil 6.2: $e_M\left(A(3)\right) \approx \left[\{(1,0)\} \oplus \bigoplus_{n=1}^{4} \frac{1}{n!}A(3)\right]$



Şekil 6.3: $e_M\left(A(4)\right) \approx \left[\{(1,0)\} \oplus \bigoplus_{n=1}^{4} \frac{1}{n!} A(4)\right]$



Şekil 6.4: $e_M\left(A(5)\right) \approx \left[\{(1,0)\} \oplus \bigoplus_{n=1}^{4} \frac{1}{n!} A(5)\right]$



Şekil 6.5: $e_M\left(A(6)\right) \approx \left[\{(1,0)\} \oplus \bigoplus_{n=1}^{4} \frac{1}{n!}A(6)\right]$

7 SONUÇ

Sonuç olarak, Minkowski serileri yardımıyla klasik bazı fraktal kümelerin ifade edilebileceği ve Minkowski serileri ile yeni fraktal kümeler inşa edilebileceği görülmüştür. Hangi fraktal kümelerin Minkowski serileri ile ifade edilebileceğine dair genel bir koşulun belirlenmesi açık bir sorudur. Hangi Minkowski serilerinin fraktal küme üreteceğinin belirlenmesi de yine açık bir soru olarak ifade edilebilir. Dahası fraktal teorisinden bağımsız olarak Minkowski serileri ile yapılabilecek analizin klasik analizdekine benzer pek çok soruya sahip olduğunu ifade ederek, tezimizi tamamlıyoruz.

KAYNAKLAR

[1] B.B. Mandelbrot, Fractals: Form, Chance and Dimension, San Francisco: W.H.Freeman Co, 1977.

[2] B.B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, San Francisco: W.H.Freeman Co, 1982.

[3] M.F. Barnsley, S. Demko, Iterated function systems and the global construction of fractals, Proc.R.Soc.Lond.Ser.A 399 (1985), 243-275.

[4] J.Hutchinson, Fractals and self-similarity, Indiana Univ.Math.J. 30 (1981),713-747.

[5] M.F. Barnsley,Fractals everywhere, Academic Press, Harcout Brace Janovitch, 1988.

[6] H. Minkowski, Volumen und Ober£a che, Math. Ann. 57 (1903), 447-495.

[7] T.R. Farouki,P.M.Hwan and B. Ravani, Minkowski Geometric Algebra of Complex Sets, Geometriae Dedicata 85: 283-315, 2001.

[8] N.A. Secelea, Countable Iterated Function Systems, LAP Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, Germany, 2013.

[9] R. Schneider, Convex Bodies: Brunn-Minkowski Theory Expanded Second Edition, Cambridge Univercity Press, Cambridge, United Kingdom, 2014.

[10] Y.Burago, D. Burago, S. Ivanov, A Cource in Metric Geometry, American Mathematic Society, U.S.A., 2001.