

## ARAŞTIRMA MAKALESİ/RESEARCH ARTICLE

# EN KÜÇÜK KARELER KESTİRİCİLERİNİN ETKİNLİKLERİNİN NORMAL OLMAYAN BAZI DAĞILIMLAR İÇİN İNCELENMESİ

Birdal ŞENOĞLU<sup>1,2</sup>, Özlem ÖZARICI<sup>1</sup>, Hatice FİDAN<sup>1</sup>

### ÖZ

Bu çalışmanın temel amacı uygulamada yaygın olarak kullanılan En Küçük Kareler (EKK) Kestiricilerinin Normal dağılım dışındaki dağılımlar için etkin kestiriciler olmadığını gösterilmesidir. Özellikle normal olmayan simetrik dağılımlar ailesi ve çarpık dağılımlar (Weibull ve genelleştirilmiş Lojistik) üzerinde durulacaktır.

**Anahtar Kelimeler:** Minimum Varyans Sınırı, Göreli Etkinlik, Simetrik Dağılımlar Ailesi, Weibull Dağılımı, Genelleştirilmiş Lojistik Dağılımı.

## INVESTIGATING THE EFFICIENCIES OF LEAST SQUARES ESTIMATORS FOR SOME NONNORMAL DISTRIBUTIONS

### ABSTRACT

The aim of this study is to show that least squares estimators (LS) used commonly in application problems are not efficient estimators for the nonnormal distributions. Specifically, we will concentrate on the symmetric family of distributions and skew distributions (Weibull and Generalized Logistic).

**Key Words:** Minimum Variance Bound (MVB), Relative Efficiency, Symmetric Family of Distributions, Weibull Distribution, Generalized Logistic Distributions.

### 1. GİRİŞ

Birçok uygulamacı kurdukları modeldeki parametrelerin kestiricilerini ve bu kestiricilere dayanan test istatistiklerini bulurken verilerin normal dağılıma sahip olduğunu varsayarlar. Bununla birlikte Geary (1947) Normal dağılımın hiçbir zaman var olmadığını ve hiçbir zamanda olmayacağını söyler. Bu biraz abartılı bir ifade olmakla birlikte Tiku, vd. (1986) gibi birçok bilim adamı da normal dağılımın gerçek hayatta çok sık rastlanılmayan bir başka deyişle çok nadiren karşılaşılan bir dağılım olduğu konusunda hemfikirdirler.

Uyum iyiliği testi ve Q-Q grafiği gibi grafiksel teknikler verilerin dağılımı hakkında bilgi verir. Ancak bu metotlar orta büyüklükteki örneklem için normal dağılım ile normal dağılımdan biraz uzaklaşmış normal olmayan (kısa kuyruklu ve uzun kuyruklu simetrik dağılımlar ve orta düzeyde çarpık dağılımlar için) dağı-

lımları belirlemede çok başarılı değildirler. Şenoğlu (2000) Weibull dağılımının farklı  $p$  değerleri için Q-Q grafiğini vermiştir. Bu grafiklerin birbirine çok benzer olması gerçek parametre değerinin dolayısıyla gerçek dağılımın hangisi olduğu konusunda çelişkiler yaratmaktadır. Dolayısıyla bu durum uygulamada çok büyük istatistiksel hatalara yol açabilir. Çünkü verilerin normal dağılmadığı durumlarda EKK kestiricileri etkin kestiriciler değildir ve bu kestiricilere dayanan test istatistiğinin gücü de çok düşüktür (Şenoğlu, 2000).

### 2.NORMAL OLMAYAN DAĞILIMLARDA EKK KESTİRİCİLERİNİN ETKİNLİKLERİ

Bu bölümde verilerin normal olmayan simetrik ve ya çarpık bir dağılıma sahip olması durumunda EKK kestiricilerinin etkinlikleri incelenecektir. Özellikle si-

<sup>1</sup> Osmangazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Eskişehir.

<sup>2</sup> E-posta: birdal@ogu.edu.tr.

Geliş: 16 Aralık 2000; Düzeltme: 09 Mayıs 2001; Kabul: 16 Ekim 2001.

metrik dağılımlar ailesi ve çarpık dağılımlardan Weibull ve Genelleştirilmiş Lojistik dağılımları üzerinde durulacaktır. Weibull ve Genelleştirilmiş Lojistik Dağılımlarının kullanılmasının ana sebebi parametre değerleri farklılaştığında dağılım sağa çarpık, sola çarpık veya simetrik olabilmektedir. Bu durum veri analizinde çok büyük esneklik kazandırmaktadır. Çünkü birçok uygulama problemindeki veriler bu üç kategoriden biriyle modellenebilir.

## 2.1. Simetrik Dağılımlar Ailesi İçin EKK Kestircilerinin Etkinlikleri

Simetrik dağılımlar ailesi için tek örneklem testlerinde ( $H_0: \mu = 0$ ) kullanılan EKK kestircilerinin ( $\bar{y}$  ve  $s^2$ ) etkinlikleri incelenecektir. Ancak örnek varyansı  $s^2$ 'nin etkinliği  $\bar{y}$ 'nin etkinliği ile benzer sonuçlar verdiğinden dolayı burada ve bundan sonraki kısımlarda gösterilmeyecektir.

Eğer veri simetrik dağılımlar ailesinden geliyorsa  $y$ 'nin dağılımı

$$f(y, p) = \frac{1}{\sigma \sqrt{k} \beta \left( \frac{1}{2}, p - \frac{1}{2} \right)} \left[ 1 + \frac{(y - \mu)^2}{k\sigma^2} \right]^{-p},$$

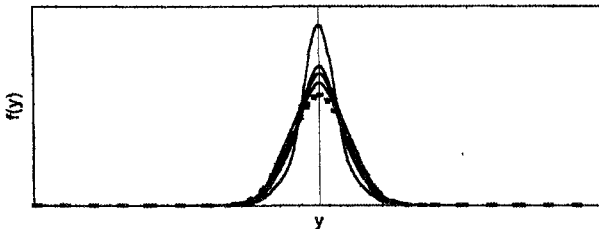
$$-\infty < y < \infty, p \geq 2, k = 2p - 3 \quad (2.1.1)$$

ve  $E(Y) = \mu$ ,  $V(Y) = \sigma^2$ 'dir (Tiku ve Suresh, 1992).

Şekil 1'den de görüleceği gibi  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$  olan simetrik dağılımlar ailesi (düz çizgilerle gösterilenler)  $p$  değeri büyüdükçe  $N(0,1)$  (kesikli çizgiyle gösterilen) dağılımına yaklaşmaktadır. Bu da yukarıda bahsedilen uygulamalardaki temel hataların kaynağını oluşturmaktadır. Başka bir deyişle veri normal olmayan simetrik dağılımlar ailesinden gelmesine rağmen araştırmacılar Normal Dağılımı kullanabilmektedirler.

Bir  $\theta$  parametresinin minimum varyans sınırı (Minimum Variance Bound, MVB);

$$MVB(0) = \frac{1}{-E \left( \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \ln \theta^2} \right)} \quad (2.1.2)$$



Şekil 1. Simetrik Dağılımlar Ailesinin Farklı  $p$  Değerleri İçin Olasılık Yoğunluk Fonksiyonlarının Grafiği.

olarak tanımlanır. Burada

$$L = \prod_{i=1}^n f(y_i, \theta)$$

dır. Eğer  $\hat{\theta}$ ,  $\theta$  parametresinin yansız bir kestircisiyse ve  $V(\hat{\theta}) = MVB(\theta)$  ise  $\hat{\theta}$  MVB kestircisi olarak adlandırılır (Tiku ve Suresh, 1992).

Herhangi bir kestircinin minimum varyans sınırını bulabilmek için Fisher Bilgi Matrisine ihtiyaç duyulur. Fisher Bilgi Matrisi;

$$I = \begin{bmatrix} -E \left( \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2} \right) & -E \left( \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu \partial \sigma} \right) \\ -E \left( \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu \partial \sigma} \right) & -E \left( \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} \right) \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

dir. Fisher Bilgi Matrisinin kullanılabilmesi için öncelikle olabilirlik fonksiyonunun belirlenmesi gerekir. Simetrik dağılımlar ailesi için olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{k} \beta \left( \frac{1}{2}, p - \frac{1}{2} \right)} \left[ 1 + \frac{(y_i - \mu)^2}{k\sigma^2} \right]^{-p}$$

$$= \left[ \frac{1}{\sigma \sqrt{k} \beta \left( \frac{1}{2}, p - \frac{1}{2} \right)} \right]^n \prod_{i=1}^n \left[ 1 + \frac{(y_i - \mu)^2}{k\sigma^2} \right]^{-p} \quad (2.1.4)$$

$$\ln L = -n \ln \left[ \sigma \sqrt{k} \beta \left( \frac{1}{2}, p - \frac{1}{2} \right) \right] - p \sum_{i=1}^n \ln \left[ 1 + \frac{(y_i - \mu)^2}{k\sigma^2} \right] \quad (2.1.5)$$

$$= -n \ln \left[ \sigma \sqrt{k} \beta \left( \frac{1}{2}, p - \frac{1}{2} \right) \right] - n \ln \sigma - p \sum_{i=1}^n \ln \left[ 1 + \frac{(y_i - \mu)^2}{k\sigma^2} \right]$$

Buradan

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 2p \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mu)}{1 + \frac{(y_i - \mu)^2}{k\sigma^2}} = 0 \quad (2.1.6)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + 2p \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mu)^2}{k\sigma^3} = 0 \quad (2.1.7)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2} = -\frac{2p}{k\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{\left[ 1 - \frac{(y_i - \mu)^2}{k\sigma^2} \right]}{\left[ 1 + \frac{(y_i - \mu)^2}{k\sigma^2} \right]^2} = 0 \quad (2.1.8)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{\sigma^2} - 2p \sum_{i=1}^n \frac{\left[ \frac{3(y_i - \mu)^2}{k\sigma^4} + \frac{(y_i - \mu)^4}{k^2\sigma^6} \right]}{\left[ 1 + \frac{(y_i - \mu)^2}{k\sigma^2} \right]^2} = 0 \quad (2.1.9)$$

dır. Diğer taraftan ilgili beklenen değerler;

$$-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2}\right) = \frac{2p}{k\sigma^2} \sum_{i=1}^n E\left[\frac{1 - \frac{(y_i - \mu)^2}{k\sigma^2}}{\left(1 + \frac{(y_i - \mu)^2}{k\sigma^2}\right)^2}\right] = \frac{p\left(p - \frac{1}{2}\right)}{(p+1)\left(p - \frac{3}{2}\right)} \frac{n}{\sigma^2} \quad (2.1.10)$$

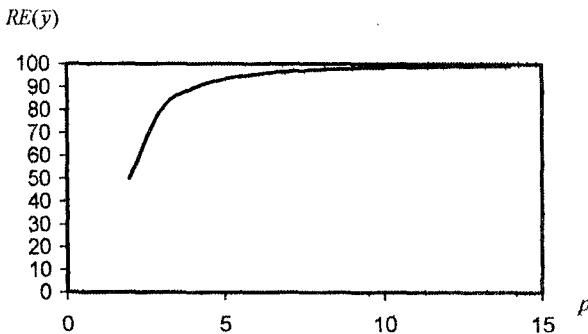
$$-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2}\right) = -\frac{n}{\sigma^2} + 2p \sum_{i=1}^n E\left[\frac{\frac{3(y_i - \mu)^2}{k\sigma^4} + \frac{(y_i - \mu)^4}{k^2\sigma^6}}{\left[1 + \frac{(y_i - \mu)^2}{k\sigma^2}\right]^2}\right] = \frac{2\left(p - \frac{1}{2}\right)}{(p+1)} \frac{n}{\sigma^2} \quad (2.1.11)$$

$$-E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \mu \partial \sigma}\right) = 0 \quad (\text{çünkü dağılım simetriktir}) \quad (2.1.12)$$

biçiminde bulunur. Böylece Fisher Bilgi Matrisi;

$$I = \frac{n}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \frac{p\left(p - \frac{1}{2}\right)}{(p+1)\left(p - \frac{3}{2}\right)} & 0 \\ 0 & \frac{2\left(p - \frac{1}{2}\right)}{(p+1)} \end{bmatrix} \quad (2.1.13)$$

olur. Fisher Bilgi Matrisinin tersi alınarak  $\mu$  ve  $\sigma$  parametreleri için minimum varyans sınırları bulunur. Yukarıda simetrik dağılımlar ailesi için hesaplanan Fisher Bilgi Matrisinin tersi;



Şekil 2.  $\bar{y}$  'nin Simetrik Dağılımlar Ailesi İçin Görelî Etkinliğinin Grafiği.

$$I^{-1} = \frac{\sigma^2}{1} \begin{bmatrix} \frac{(p+1)\left(p - \frac{3}{2}\right)}{p\left(p - \frac{1}{2}\right)} & 0 \\ 0 & \frac{(p+1)}{2\left(p - \frac{1}{2}\right)} \end{bmatrix} \quad (2.1.14)$$

dir. Dolayısıyla  $\mu$  için;

$$MVB(\mu) = \frac{(p+1)\left(p - \frac{3}{2}\right)}{p\left(p - \frac{1}{2}\right)} \frac{\sigma^2}{n} \quad (2.1.15)$$

olur (bakınız Tiku (1992)). Diğer taraftan  $\bar{y}$  'nin görelî etkinliği (Relative Efficiency, RE);

$$RE(\bar{y}) = \frac{MVB(\mu)}{V(\bar{y})} = \frac{(p+1)\left(p - \frac{3}{2}\right)}{p\left(p - \frac{1}{2}\right)} \cdot 100 \quad (2.1.16)$$

dir. Görelî etkinliğin grafik üzerindeki gösterimi Şekil 2'de verilmiştir. Küçük  $p$  değerleri için  $\bar{y}$  'nin görelî etkinliğinin son derece küçük olduğu görülmektedir. Diğer taraftan büyük  $p$  değerleri için görelî etkinliğin büyük olmasının nedeni dağılımın Normal'e yaklaşmasıdır. Çünkü  $\bar{y}$  Normal dağılım varsayımı altında en etkin kestiricidir.

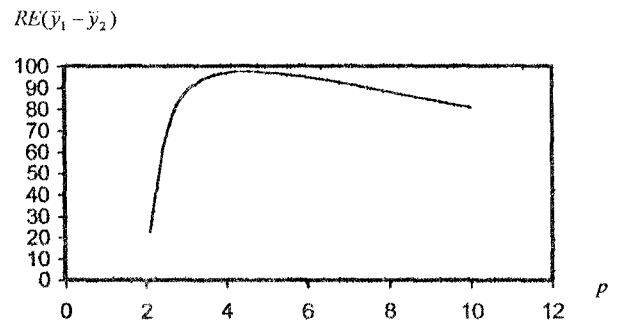
## 2.2. Weibull Dağılımında EKK Kestiricilerinin Etkinlikleri

Weibull dağılımında ve bundan sonra ele alınacak olan Genelleştirilmiş Lojistik dağılımında iki örneklem problemleri ( $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ) üzerinde durulacaktır. Dolayısıyla  $\mu_1 - \mu_2$ 'nin EKK kestiricisi olan  $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$  'nin etkinliği incelenecektir.

Herhangi bir veri Weibull dağılımına sahipse  $y$ 'nin dağılımı;

$$W(p, \sigma) = \frac{p}{\sigma^p} y^{p-1} \exp\left\{-\left(\frac{y}{\sigma}\right)^p\right\} \quad 0 < y < \infty, \quad p > 2 \quad (2.2.1)$$

olur.



Şekil 3.  $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$  'nin  $W(p, \sigma)$  Dağılımı İçin Görelî Etkinliğinin Grafiği.

$W(p, \sigma)$  için Pearson basıklık ve çarpıklık katsayıları

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad (2.2.2)$$

biçiminde verilir. Bu katsayıların farklı  $p$  değerleri için alacağı değerler aşağıda verilmiştir (Şenoğlu, 2000).

| $p$              | 1.5   | 2     | 2.5   | 3     | 4      | 6      |
|------------------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| $\sqrt{\beta_1}$ | 1.064 | 0.631 | 0.358 | 0.168 | -0.087 | -0.158 |
| $\beta_2$        | 4.365 | 3.246 | 2.858 | 2.705 | 2.752  | 2.538  |

Diğer taraftan  $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ 'nin görel etkinliği;

$$RE(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = \frac{1}{(p-1)^2 \Gamma\left(1 - \frac{2}{p}\right)} \cdot 100 \cdot \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{p}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{p}\right) \right\} \quad (2.2.3)$$

dir ve Şekil 3'de  $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ 'nin  $W(p, \sigma)$  dağılımı için görel etkinliğin grafiği verilmiştir. İlgili grafikte  $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ 'nin görel etkinliği belli bir noktaya kadar yükselmekte daha sonra yeniden düşmektedir. Dikkat edilirse görel etkinliğin en yüksek olduğu noktalar Weibull dağılımının çarpıklık ve basıklık değerlerinin Normal dağılımın çarpıklık ve basıklık değerlerine (0,3) en yakın olduğu noktalardır. Başka bir deyişle, bu  $p$  değerleri için  $W(p, \sigma)$  dağılımı Normal dağılıma diğer  $p$  değerlerinden daha fazla benzemektedir. Bu da  $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ 'nin etkinliğini  $W(p, \sigma)$  dağılımı altında maksimum yapar. Ayrıca dikkat edilirse  $2 < p < 3$  veya  $p > 8$  olduğu zaman  $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ 'nin etkinliği diğer  $p$  değerlerine göre nispeten daha küçüktür. Dolayısıyla bu kestiricilere dayanan test istatistiğinin gücü de bahsedilen  $p$  değerleri için otomatik olarak daha küçük olur (Şenoğlu, 2000).

### 2.3. Genelleştirilmiş Lojistik Dağılımında EKK Kestiricilerinin Etkinlikleri

Genelleştirilmiş lojistik dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$GL(b, \sigma) = \frac{b}{\sigma} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right)}{\left\{1 + \exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right)\right\}^{b+1}} \quad -\infty < y < \infty, \quad b > 0 \quad (2.3.1)$$

dir. Farklı  $b$  değerleri için  $GL(b, \sigma)$  ilişkin Pearson basıklık ve çarpıklık katsayıları aşağıda verilmiştir.

| $p$              | 0.5   | 1    | 2    | 4    | 6    |
|------------------|-------|------|------|------|------|
| $\sqrt{\beta_1}$ | -0.86 | 0    | 0.33 | 0.75 | 0.92 |
| $\beta_2$        | 5.40  | 3.29 | 4.33 | 4.76 | 4.95 |

Diğer taraftan  $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ 'nin görel etkinliği;

$$RE(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = \frac{\left(\frac{b+2}{b}\right)}{\left\{ \Psi'(b) + \Psi'(1) \right\}} \cdot 100 \quad (2.3.2)$$

olur. Burada

$$\Psi^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} \Gamma(x) \quad (2.3.3)$$

dir.  $\Psi^k(x)$  fonksiyonu hakkında daha detaylı bilgi Abramowitz ve Stegun (1985)'de bulunabilir. Bazı  $b$  değerleri için  $\Psi'(b)$  değerleri Ek'deki tabloda verilmiştir.

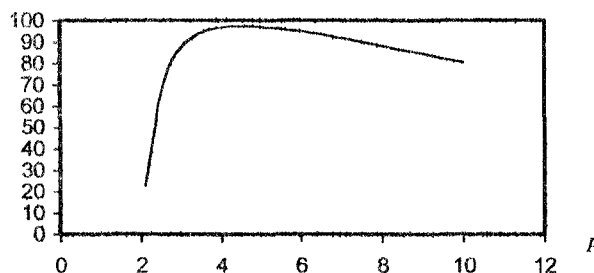
Görel etkinliğin grafik üzerindeki gösterimi ise Şekil 4'deki gibidir. Burada  $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ 'nin etkinliği Genelleştirilmiş Lojistik dağılımı Normal dağılımdan uzaklaşıkça ( $b \neq 1$  iken) küçülür.  $b = 1$  için etkinlik en yüksek değerini alır, çünkü bu durumda Lojistik dağılımı Normal dağılıma benzemektedir.

### 3. SONUÇ

Yukarıdaki etkinlik değerlerinden de görülebileceği gibi simetrik olsun veya olmasın Normal dağılım dışındaki dağılımlar için EKK kestiricileri etkinliği küçük olan kestiricilerdir. Dolayısıyla normal olmayan veri yanlışlıkla Normal dağılıma sahipmiş gibi düşünülür ve bütün istatistiksel analizler EKK kestiricileri kullanılarak yapılırsa, test istatistiğinin gücü diğer bazı robust testlerinkinden çok daha az olur. Bu durum reddedilmesi gereken bir hipotezin kabul edilmesi gibi istatistiksel açıdan hiçte istenmeyen sonuçlar doğurabilir (Tiku vd., 1986). Sonuç olarak Normal dağılım varsayımını kabul etmek için çok titiz davranılmalı ve dağılımın normal olmadığı kanısına varıldığı zaman EKK kestiricileri kullanılmamalıdır.

Eğer dağılımın Normal olmadığına karar verilirse veri analizinde EKK kestiricileri yerine Uyarlanmış En Çok Olabilirlik kestiricilerinin (Tiku, 1967, 1968, 1980) ve bu kestiricilere dayanan test istatistiklerinin kullanılması önerilir. Deney tasarımındaki bazı tasarım teknikleri için Şenoğlu (2000) Uyarlanmış En Çok Olabilirlik kestiricilerinin EKK kestiricilerinden daha etkin ve bu kestiricilere dayanan test istatistiklerinin de daha güçlü olduğunu göstermiştir.

$RE(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)$



Şekil 4.  $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ 'nin  $GL(b, \sigma)$  Dağılımı İçin Görel Etkinliğin Grafiği.

## KAYNAKÇA

- Abramowitz, M. ve Stegun, I.A. (1985). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover: New York.
- Geary, R.C. (1947). Testing for Normality. *Biometrika*, 34, 209-220.
- Şenoğlu, B. (2000). *Experimental design under non-normality*. Doktora tezi, ODTÜ, Ankara, Türkiye.
- Tiku, M.L., Tan, W.Y. ve Balakrishnan, N. (1986). *Robust Inference*. New York: Marcel Dekker.
- Tiku, M.L. (1967). Estimating the mean and standard deviation from censored normal samples. *Biometrika*, 54, 155-165.
- Tiku, M.L. (1968). Estimating the parameters of log-normal distribution from censored samples. *J. Amer. Stat. Assoc.*, 63, 134-140.
- Tiku, M.L. (1980). Robustness of MML estimators based on censored samples and robust test statistics. *J. Stat. Plann. Inf.*, 30, 123-143.
- Tiku, M.L. ve Suresh, R.P. (1992). A new method of estimation for location and scale parameters. *J. Stat. Plann. Inf.*, 30, 281-292.

## EK 1. Psi-fonksiyonlarının değerleri

$\Psi(b)$  ve  $\Psi'(b)$  değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

| $b$ | $\Psi(b)$ | $\Psi(b+1)$ | $\Psi'(b)$ | $\Psi'(b+1)$ |
|-----|-----------|-------------|------------|--------------|
| 0.1 | -10.4238  | -0.4238     | 101.4316   | 1.4331       |
| 0.2 | -5.2891   | -0.2891     | 26.2665    | 1.2672       |
| 0.5 | -1.9635   | 0.0365      | 4.9348     | 0.9348       |
| 1.0 | -0.5772   | 0.4228      | 1.6449     | 0.6449       |
| 2.0 | 0.4228    | 0.9228      | 0.6449     | 0.3949       |
| 4.0 | 1.2561    | 1.5061      | 0.2838     | 0.2213       |
| 6.0 | 1.7061    | 1.8728      | 0.1813     | 0.1536       |
| 8.0 | 2.0156    | 2.1406      | 0.1331     | 0.1175       |



**Birdal Şenoğlu**, 1971 yılında Şarkış-la'da doğdu. Lisans eğitimini Orta Doğu Teknik Üniversitesi, İstatistik Bölümü'nde tamamladı. Yüksek lisans eğitimini Iowa State Üniversitesi'nde (ABD) tamamladıktan sonra, 2000 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi'nde Doktorasını tamamladı. Halen Osmangazi Üniversitesi'nde Yardımcı Doçent olarak görev yapmaktadır.



**Özlem Özarıcı**, Eskişehir 1973 doğumludur. Anadolu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü'nü 1993 yılında bitirdikten sonra, yüksek lisansını Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nde 1996 yılında tamamlamıştır. Halen Osmangazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışan Özlem Özarıcı, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Uygulamalı İstatistik Anabilim Dalı'nda doktora öğrenciliğini sürdürmektedir.



**Hatice Fidan**, 1992 yılında Anadolu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü'nden mezun oldu. 1994 yılında Osmangazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak görev ve başladı. Yüksek lisans eğitimini 1995 yılında Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nde tamamladı. Halen Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı İstatistik Anabilim Dalı'nda doktora tez çalışmasını yürütmektedir.