

ARAŞTIRMA MAKALESİ/RESEARCH ARTICLE

DOĞRUSAL REGRESYONDA SAĞLAM TAHMİN EDİCİLER VE BİR UYGULAMA

Meral Candan ÇETİN¹, Aynur ORSOY¹

ÖZ

Bu çalışmada, regresyon analizinde çok sık kullanılan En Küçük Kareler (EKK) yöntemi ile sağlam (robust-güçlü/gürbüz) M yöntemi ve yüksek bozulma noktasına sahip En Küçük Medyan Kareler (EMK) ve MM yöntemleri tanıtılmıştır. Bu sağlam yöntemler, doğrusal modele uyan tıbbi bir veri seti üzerinde EKK ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sağlam tahmin ediciler, Doğrusal regresyon modeli, Bozulma noktası, M tahmin edicileri.

ROBUST ESTIMATORS IN LINEAR REGRESSION AND A STUDY

ABSTRACT

In this study, the least squares method (LS) which is commonly used in the analysis of regression, the M method that give robust estimates, the LMS (least median of squares) and MM methods having the properties of robustness and high breakdown point are presented. The real data set obtained from an experimental study is fitted to the linear model. The robust estimates obtained from this model compared with EKK.

Key Words: Robust estimators, Linear regression model, Breakdown point, M-estimators.

1. GİRİŞ

Bir doğrusal regresyon modeli,

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (1)$$

biçiminde tanımlanır. Burada, Y , $n \times 1$ boyutlu bağımlı değişken vektörü; X , $n \times (p+1)$ boyutlu bağımsız değişkenler matrisi; β , $(p+1) \times 1$ boyutlu parametre vektörü; ε , $n \times 1$ boyutlu hatalar vektörüdür. X bilinen sabit değerleri ve Y gözlenen değerleri, parametre vektörü β 'nin tahmininde kullanılır. En Küçük Kareler (EKK) tahmin edicisi $\hat{\beta}$,

$$\varepsilon = Y - X\hat{\beta} \quad (2)$$

olmak üzere,

$$AKT_{\beta} = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) \quad (3)$$

ifadesini en küçük yapan $\hat{\beta}$ değeri olarak belirlenir. Bu eşitlikte, AKT_{β} artıkların kareler toplamını göstermektedir. (3) eşitliğinden parametre vektörü, $\text{rank}(X)=(p+1)$ olmak üzere,

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y \quad (4)$$

eşitliğinden elde edilir. β parametrelerinin en iyi tahmin edicilerinin elde edilmesi için hata vektörü ε üzerine konan bazı varsayımların sağlanması gerekir. Bu vektöre ilişkin temel varsayımlar Myers (1986)'den incelenebilir.

Regresyon modellerinin EKK ile analizinde karşılaşılan önemli sorunlardan biri kuşkulu gözlemlerdir. Bir veri kümesinde kuşkulu gözlemler aykırı değer, uç değer ya da etkin gözlem olarak ortaya çıkabilir.

Doğrusal regresyon modellerinde uç değer (extrem value), açıklayıcı değişkenin ucunda olan ve dağılımın iki ucunda yer alan gözlem; aykırı değer (outlier), veri kümesindeki diğer gözlemlere göre daha büyük artıklı gözlem; etkin nokta (lverage point) ise tahmin sonuçlarını büyük ölçüde etkileyen gözlem olarak tanımlanmaktadır. Eger aykırı değer ya da uç değer değer, veri kümesinden çıkartıldığında bu gözlemler model kestiriminde büyük bir etki yapıyorsa aynı zamanda etkin gözlem olarak ifade edilmektedir (Özmen, 1998).

¹ Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Beytepe-ANKARA/TÜRKİYE.

E-posta: meral@hacettepe.edu.tr; aorsoy@hacettepe.edu.tr.

Geliş: 29 Aralık 1999; Düzeltme: 14 Nisan 2000; Kabul: 21 Haziran 2000.

Bir veri kümesi kuşku gözlem(ler) içeriyorsa bu gözlem(ler)in tahminler üzerindeki etkisinin belirlenmesinde farklı tanısallık yöntemler ve araçlar kullanılmaktadır. Bu yöntemlere alternatif olarak önerilen sağlam yöntemler ile, aykırı ve uç değerlerin etkisine karşı duyarlı ya da çok az duyarlı tahminler elde edilebilmektedir.

Bir tahmin edicinin sağlamlığının önemli bir ölçüsü bozulma noktasıdır (breakdown point). Bozulma noktasının genel bir tanımı Hampel (1971) tarafından verilmiştir. Daha sonra Donoho ve Huber (1983) sonlu örneklem için daha basit bir tanım vermiştir (Rousseeuw and Leroy, 1987). Bu tanıma göre, iyi bir sağlam tahmin edicinin yüksek bir bozulma noktasına sahip olması gerektiği söylenmektedir. Bozulma noktası için elde edilebilecek en yüksek değer, % 50'dir. Çünkü, % 50'yi aşan bozulma noktası ile normal gözlemlerle aykırı değerler arasında ayırım yapılamamaktadır.

Bir tahmin edicinin sağlamlığına karar vermede kullanılan başka bir ölçütte etkinlik fonksiyonudur. Etkinlik fonksiyonu ve bu fonksiyondan elde edilen bazı önemli sağlamlık ölçüleri Hampel (1971), Huber (1981), Hampel et al. (1986) tarafından incelenmiştir (Candan, 1995). Tüm tahmin edicilerin bozulma noktası hesaplanabilir, ancak hepsi için etkinlik fonksiyonu tanımlanamayabilir (Rousseeuw and Leroy, 1987).

Kaynaklarda bozulma noktası ve etkinlik fonksiyonu açısından incelenen çok sayıda sağlam yöntemin temeli, artıkların karelerinin toplamının kullanılması yerine aykırı değerlerin etkisini azaltan fonksiyonların kullanılmasına dayanmaktadır. Bu çalışmada, bu yöntemlerden bazıları tanıtılacak ve bir uygulama üzerinde karşılaştırılacaktır.

2. M YÖNTEMİ

Huber (1964), EKK tahminlerinin aykırı değerlere karşı duyarlılığını azaltmak için (3) ifadesinin en küçük yapılması yerine, uygun bir ρ fonksiyonunun kullanılmasını önermiştir. Buna göre bir $\hat{\beta}$ M tahmin edicisi,

$$\text{Min}_{\beta} \rho(Y - X\beta) \quad (5)$$

sağlayan β değeri olarak ya da $\rho'(y) = \psi'(y)$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n \psi(Y - X\beta)X = 0 \quad (6)$$

denkleminin çözümünden elde edilmektedir (Orsoy, 1998). (5)'deki ρ fonksiyonu doğrusal değildir ve iteratif yöntemlerle çözülür. Eğer ρ konveks ise (5) ile (6) eşitliklerinin çözümü aynıdır; değilse (6)'nın en iyi çözümünün elde edilmesinde problemler çıkabilir. Burada, ϵ_i 'lerin $E[\psi(\epsilon_i)] = 0$ olacak biçimde bağımsız

ve özdeş dağılımlı oldukları varsayılmaktadır (Huber, 1981). Huber'in ρ fonksiyonu,

$$\rho(y) = \begin{cases} y^2/2, & |y| \leq k \\ k|y| - k^2/2, & |y| > k \end{cases} \quad (7)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Bu fonksiyonun türevi alınarak,

$$\psi(y) = \begin{cases} y, & |y| \leq k \\ k \text{Sign}(y), & |y| > k \end{cases} \quad (8)$$

fonksiyonu elde edilmektedir. Burada,

$$\text{Sign}(y) = \begin{cases} -1 & y < k \\ +1 & y > k \end{cases}$$

ve k , veri kümesinin normal dağılımı durumunda yüksek etkinliğe sahip (% 95 civarında) bir tahmin edici elde edilmesi için seçilen sabit bir değerdir. k için önerilen bazı değerler Hogg (1979)'da verilmektedir. Huber'in tahmin edicisi için bu değer, 1.345'tir.

M tahmin edicilerinin bulunmasında kullanılmak üzere değişik ψ fonksiyonları verilmektedir. Andrews (1974),

$$\psi(y) = \begin{cases} \text{Sin}(y/k), & |y| < k \\ 0, & |y| \geq k \end{cases} \quad (9)$$

fonksiyonunu vermiştir. ψ , yeniden azalan (re-descending) bir fonksiyon olduğundan uç gözlemlerde sıfıra yakın değerler almaktadır. Bir başka ifadeyle, veri kümesindeki istenmeyen gözlemler atılmaktadır. Yüksek bir etkinlik için $k=1.339$ verilmektedir (Orsoy, 1998).

Tukey (1974)'in çift karesel (bisquare) fonksiyonu,

$$\psi(y) = y \left[1 - \left(\frac{y}{k} \right)^2 \right]^2 \quad (10)$$

biçiminde tanımlıdır ($k=4.685$). Bu fonksiyon da yeniden azalan bir ψ eğrisine sahiptir (Orsoy, 1995).

M tahminlerinin iteratif yöntemlerle hesaplanmasında, yeniden ağırlıklı En Küçük Kareler (reweighted least squares) ve Huber ile Dutter (1974) tarafından önerilen H algoritması kullanılmaktadır (Candan, 1995).

M yöntemiyle elde edilen tahminlerin ölçek değişmez (equivariant) olması için bir σ ölçüğü ile β 'nin

$$\sum_{i=1}^n \psi \left(\frac{Y - X\beta}{\sigma} \right) X = 0 \quad (11)$$

denkleminin birlikte (aynı anda) tahmini önerilmiştir.

3. EN KÜÇÜK MEDYAN KARELER YÖNTEMİ

Doğrusal regresyon modellerinin parametrelerinin yüksek bozulma noktalı, çok sağlam parametre tahminlerinin elde edilmesi amacıyla, 0.50 bozulma noktasına sahip örneklem medyanına bazı seçenekler önerilmiştir.

EKK'in sağlamaştırılması adına önemli bir yaklaşım, tahminlerin elde edilmesinde amaç fonksiyonundaki toplam yerine medyan kullanılarak olmuştur. Bir $\hat{\beta}$ En Küçük Medyan Kareler (EMK) tahmin edicisi, artıkların karelerinin medyanını en küçük yapan β değeri olarak,

$$\text{Min mede}_{\beta}^2 \quad (12)$$

biçiminde tanımlanmaktadır.

Sağlam regresyon yöntemlerinin önemli bir özelliği, doğrusal bir ilişkiye tam uyan noktaları ortaya çıkarmaktır. Rousseeuw (1984), EMK tahmin edicilerinin gözlemlerin en az $[n - (n/2) + p - 1]$ 'i için bu özelliğe sahip olduğunu göstermiştir. EMK yöntemi, Rousseeuw ve Leroy (1987) tarafından verilen yeniden örnekleme (re-sampling) algoritması ile hesaplanır. Bu algoritma, sürekli bağımsız değişkenler için kullanılmaktadır. Eğer model tek göstermelik değişken içeriyorsa yeniden örnekleme algoritması ile EMK'in elde edilmesi güçleşir. Atkinson (1994) da çok değişkenli aykırı değerler için ileri doğru hızlı (fastforward) bir algoritma önermiştir. EMK tahmin edicisi x değişkenlerindeki aykırı değerlere olduğu kadar y değişkenindeki aykırı değerlere karşı da dirençli ve sağlamdır. Bu tahmin edicinin bozulma noktası 0.5'tir (Candan, 1998).

4. MM YÖNTEMİ

MM yöntemi, istatistiksel etkinliğin (hataların normal dağıldığı varsayımı altında) yüksek ve yüksek bozulma noktasına sahip bir yöntem olarak Yohai (1987) tarafından önerilmiştir. MM tahminleri 3 aşamada aşağıdaki gibi tanımlanır:

1.Aşama:

Yüksek bozulma noktasına sahip (mümkünse 0.5) bir başlangıç tahmini seçilir.

2.Aşama:

$$e_i(T_0) = y_i - T_0' x_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (13)$$

artıkları hesaplanır. Burada, T_0 başlangıç tahmini göstermektedir. $s_n = s(e(T_0))$ M ölçek tahmini, Yohai (1987)'de verilen varsayımları sağlayan ρ_0 fonksiyonu kullanılarak,

$$b/a = 0.5$$

eşitliğini sağlayan bir b sabiti için,

$$(1/n) \sum_{i=1}^n \rho(e_i(\beta) / s_n) = b$$

çözümünden hesaplanır. Burada,

$$a = \max \rho_0(u)$$

dur. Huber (1981), bu ilk ölçek tahmininin 0.5 bozulma noktasına sahip olması için, $b/a=0.5$ olması gerektiğini ispatlamıştır.

3.Aşama:

ρ_1, ρ_0 için verilen koşulları sağlayan diğer bir fonksiyon olmak üzere,

$$\rho_1(u) \leq \rho_0(u) \quad (14)$$

ve

$$\sup \rho_1(u) = \sup \rho_0(u) = a \quad (15)$$

olmak üzere, MM tahmini T_1 ,

$$\sum_{i=1}^n \psi_1(e_i(\beta) / s_n) x_i = 0 \quad (16)$$

eşitliğinin bir çözümü olarak tanımlanır. Bu T_1 tahmini ile,

$$S(T_1) \leq S(T_0)$$

olmaktadır. Burada,

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^n \rho_1(e_i(\beta) / s_n) \quad (17)$$

dir. $\rho_1(0/0)$, 0 olarak tanımlanır. Bu tahminlerin hesaplanmasında M tahminlerini hesaplamada kullanılan iteratif ağırlıklı EKK algoritmasının değişik bir biçimi önerilmiştir. Bu algoritma da Yohai (1987)'de verilmektedir.

5. UYGULAMA

Bu bölümde, önce gerçek bir veri kümesi, sonra gerçek veri kümesi değiştirilerek elde edilen yeni veri kümesi üzerinde EKK, M (Huber, Tukey, Andrews), EMK ve MM parametre tahminleri elde edilmiştir. Çalışmada SAS 6.0 programında yazılan macro bir program ile Huber, Tukey, Andrews türü M tahminleri hesaplanmış ve XLispstat 2.1 programında yazılan bir programla da EMK ve MM tahminleri elde edilmiştir.

Çalışmada kullanılan veri kümesi, Hacettepe Üniversitesi Hastanesi'ne başvuran 22 hastaya ilişkin değerleri içermektedir. Biri bağımlı (Y) olmak üzere, çalışmada kullanılan tüm değişkenler aşağıda verilmektedir:

X_1 : Osteocalcin miktarı.

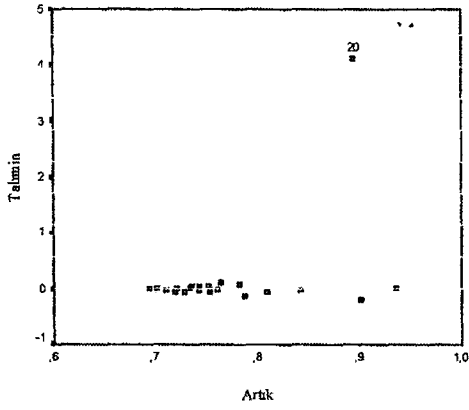
X_2 : Paratiroid hormonu.

X_3 : Yaş.

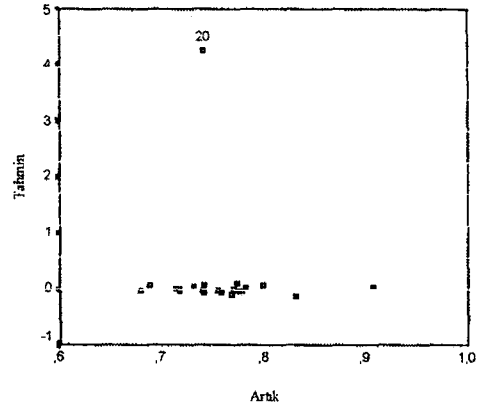
Y : Kemik mineral yoğunluğu.

Yukarıda verilen değişkenleri içeren 22 gözlemleri veri kümesi Tablo 1'de verilmektedir. Bu veri kümesi için elde edilen EKK ve sağlam parametre tahminleri ile artık kareler toplamları (AKT) da Tablo 2'de verilmektedir:

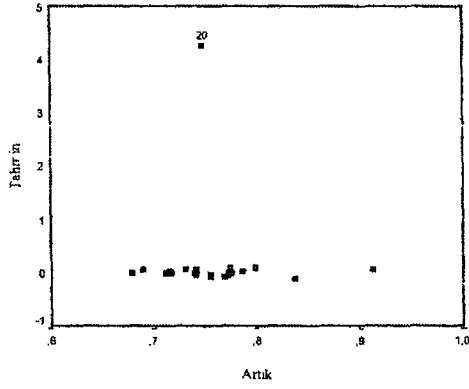
Bu tahmin sonuçlarından elde edilen artık değerlerinden veri kümesinin hiç aykırı değer içermediği sonucuna varılmıştır.



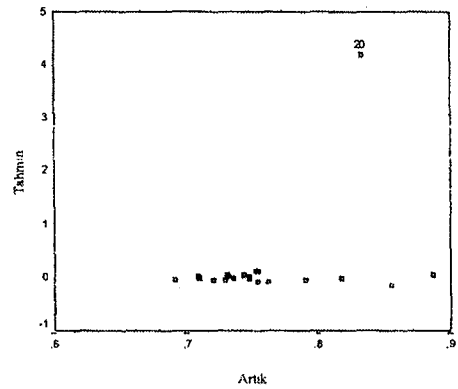
(a)



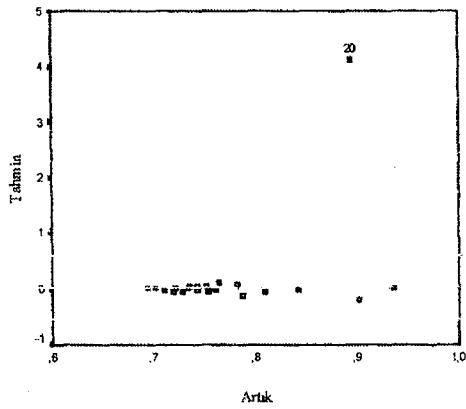
(b)



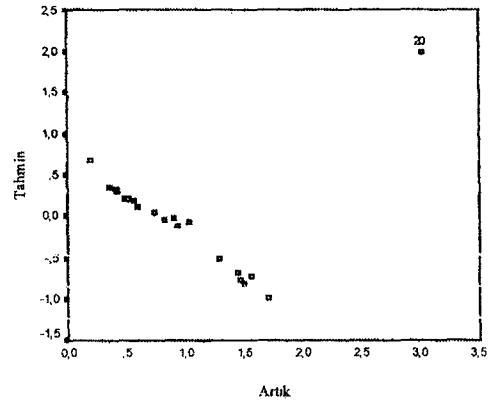
(c)



(d)



(e)



(f)

Şekil 1. EKK ve Sağlam Tahmin Ediciler İçin Elde Edilen Artık Grafikleri: a) Huber b) Tukey c) Andrews d) EMK e) MM f) EKK

Tablo 1. n=22 Gözlemleri veri Kümesi.

| Osteocalcin Miktarı | Yaş | Paratiroid | Kemik mineral yoğunluğu |
|---------------------|-----|------------|-------------------------|
| 4,85 | 62 | 34,7 | 0,76 |
| 2,98 | 60 | 20,7 | 0,69 |
| 3,86 | 68 | 40,1 | 0,76 |
| 3,16 | 60 | 32,5 | 0,8 |
| 3,4 | 65 | 23,5 | 0,78 |
| 6,27 | 50 | 27,2 | 0,96 |
| 6,6 | 57 | 41,5 | 0,71 |
| 3,06 | 63 | 19,5 | 0,72 |
| 2,87 | 66 | 16,3 | 0,72 |
| 1,45 | 52 | 27 | 0,69 |
| 2,49 | 56 | 22,9 | 0,74 |
| 4,1 | 59 | 44,3 | 0,68 |
| 2,18 | 52 | 19,7 | 0,88 |
| 2,16 | 63 | 25,4 | 0,7 |
| 3,13 | 70 | 18 | 0,7 |
| 5,95 | 64 | 36,6 | 0,82 |
| 1,5 | 45 | 36,3 | 0,75 |
| 2,71 | 50 | 38,5 | 0,88 |
| 2,71 | 60 | 31,2 | 0,78 |
| 7,72 | 63 | 71,4 | 0,8 |
| 2,01 | 64 | 20,4 | 0,72 |
| 1,9 | 53 | 57,1 | 0,66 |

Tablo 2. EKK ve Sağlam Parametre Tahminleri.

| Yöntem | Regresyon katsayıları | | | | AKT |
|-----------|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|---------|
| | Sabit | X ₁ | X ₂ | X ₃ | |
| EKK | 1,0874 (0,1385) | 0,0288 (0,0096) | -0,0023 (0,0012) | -0,006 (0,0022) | 0,07022 |
| Huber M | 1,071767 (0,12525) | 0,033896 (0,00882) | -0,002374 (0,00108) | -0,005986 (0,00203) | 0,07167 |
| Tukey M | 1,0847 (0,13) | 0,032 (0,009) | -0,00234 (0,0011) | -0,006 (0,0021) | 0,07204 |
| Andrews M | 1,08659 (0,1165) | 0,0364 (0,00825) | -0,00247 (0,001) | -0,0063 (0,0019) | 0,07325 |
| EMK | 0,951655 | 0,036369 | -0,00216 | -0,00445 | 0,08109 |
| MM | 1,0372 (0,13124) | 0,025387 (0,00775) | -0,0019 (0,0011) | -0,0052 (0,00209) | 0,07105 |

Tablo 3. EKK ve Sağlam Parametre Tahminleri.

| Yöntem | Regresyon katsayıları | | | | AKT |
|-----------|-----------------------|---------------------|---------------------|----------------------|----------|
| | Sabit | X ₁ | X ₂ | X ₃ | |
| EKK | -1,72015 (1,5269) | 0,1455 (0,0154) | 0,03524 (0,0134) | 0,0174 (0,0247) | 8,52799 |
| Huber M | 0,9599 (0,3598) | 0,0406 (0,0246) | -0,0007 (0,0035) | -0,0052 (0,0054) | 16,9535 |
| Tukey M | 1,1255 (0,1496) | 0,02858 (0,0099) | -0,0028 (0,0014) | -0,00639 (0,0023) | 18,20726 |
| Andrews M | 1,1199 (0,146) | 0,03 (0,0097) | -0,0028 (0,0014) | -0,00638 (0,0022) | 18,14808 |
| EMK | 1,25528 | 0,020289 | -0,00035 | -0,00878 | 17,4445 |
| MM | 1,08556 (0,131) | 0,02916 (0,009) | -0,0023 (0,001) | -0,006 (0,002) | 18,0363 |

EKK ve sağlam tahminleri aykırı değer varlığında karşılaştırmak amacıyla bağımlı değişkendir 20. gözlemin değeri 5 olarak değiştirilmiştir. Oluşturulan bu yeni veri kümesi kullanılarak tüm sonuçlar yeniden el-

Tablo 4. Tablo 1 ve Tablo 2'de Verilen Herbir Tahmin İçin Katsayılar Arasındaki Farklılıkların Mutlak Değerleri.

| Yöntem | Regresyon katsayıları | | | |
|-----------|-----------------------|----------------|----------------|----------------|
| | Sabit | X ₁ | X ₂ | X ₃ |
| EKK | 2,80755 | 0,1167 | 0,03754 | 0,0234 |
| Huber M | 0,11186 | 0,0067 | 0,00167 | 0,00079 |
| Tukey M | 0,0408 | 0,00342 | 0,00046 | 0,00039 |
| Andrews M | 0,0333 | 0,0064 | 0,00033 | 0,00008 |
| EMK | 0,30365 | 0,01617 | 0,0018 | 0,00433 |
| MM | 0,04836 | 0,0037 | 0,0004 | 0,0008 |

de edilmiştir. Tek aykırı değer varlığında elde edilen sonuçlar Tablo 3' de verilmiştir.

Bu yöntemler için artık grafikleri Şekil 1'de verilmektedir:

Şekil 1'den görüldüğü gibi EKK'in artık grafiği dışında diğer yöntemlerin artık grafikleri birbirine benzemektedir. Sağlam yöntemlerle elde edilen artık değerleri 20. gözlemin dışında sıfıra yakın elde edilmiştir. 20. gözlemin artık değeri ise yaklaşık 4 civarındadır. EKK grafiğinde ise artıkların rasgele değil bir sistematik bir dağılım gösterdiği görülmektedir. 20. gözlemin artık değeri $e_i = 1.98$ olup bu değer aykırı değer olarak gözlenmemiştir.

6. SONUÇ VE TARTIŞMA

Aykırı değer içeren veri kümelerinde sağlam regresyon yöntemlerinin uygulandığı çalışmalar çok sayıdadır. Örneğin, Huynh (1982), EKK, Huber, Hampel, Andrews, Tukey tahminlerini karşılaştırdığı çalışmada, n=20 gözlemleri veri kümesine EKK yöntemi uygulandığında, 3., 11. ve 18. gözlemler aykırı; Huber, Hampel, Andrews ve Tukey'in yöntemleriyle ise sadece 3. ve 18. gözlemler aykırı olarak belirlenmiştir. Rousseeuv (1984)'un n=20 gözlemleri veri kümesi için yaptığı çalışmada, EKK yöntemi ile hiç aykırı değere rastlanmazken, EMK yöntemi ile 4 gözlem aykırı olarak belirlenmiştir. Yohai (1987) ise, bir veri kümesi üzerinde çok sayıda aykırı değer varlığında MM tahminlerinin etkinliğini ve sağlamlığını göstermiştir. Bu çalışmada da aykırı değer içeren bir veri kümesinde bu sağlam yöntemlerin tümü EKK ile karşılaştırılmıştır.

Veri kümesi aykırı değer içermediğinde, Tablo 2'de verilen sonuçlardan EKK, M (Huber, Tukey, Andrews), EMK ve MM tahminleri işaretçe aynı, büyüklükçe benzer elde edilmiştir. AKT değerleri de birbirine yakın bulunmuştur. Parametre tahminleri ve AKT'ından

EKK ve sağlam tahmin yöntemlerinin tümüyle, veri kümesiyle iyi uyumların elde edildiği görülmektedir. Veri kümesi içindeki tek gözlem aykırı değer olarak değiştirilip yeniden elde edilen sonuçlardan (Tablo 3), tüm sağlam tahminlerin işaretçe aynı, büyüklükçe benzer; EKK tahminlerinin ise hem işaretçe hem büyüklükçe farklılık gösterdiği görülmektedir. Tablo 4'de elde edilen sonuçlardan, tahminler arasındaki uzaklık değerleri incelendiğinde, en büyük değerlerin EKK yönteminden elde edildiği görülmektedir. Özellikle, sabit katsayılar arasındaki farklılık dikkat çekicidir. Orjinal veri kümesinden elde edilen EKK tahminlerine en yakın sonuç, MM yöntemiyle elde edilmiştir. Bu sonuç için, Tablo 2'in ilk ve Tablo 3'ün son satırları incelenmelidir. Daha önce yapılan çalışmalar ve bu çalışma da göstermektedir ki, veri kümesi tek aykırı değer içerse bile EKK tahminleri bu değere duyarlı olabilmektedir.



Meral Candan Çetin, Ankara doğumludur. Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü'nden mezun olduktan sonra yüksek lisans eğitimini aynı üniversitede tamamlamıştır. Halen İstatistik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak doktora tez çalışmalarına devam etmektedir.

KAYNAKÇA

- Candan, M. (1995). *Doğrusal Regresyon Çözümlemesinde Sağlam Kestiriciler*, Yayınlanmamış Bilim Uzmanlığı Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara, s.94.
- Hampel, F.R. (1971). A general qualitative definition of robustness, *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(6), 1887-1896.
- Hogg, Robert V. (1979). Statistical robustness: One view of its use in applications today, *The American Statistician*, 33(3), 108-115.
- Huber, P.J. (1981). *Robust Statistics*, John Wiley & Sons Inc., NY, s.308.
- Huynh, H. (1982). A comparison of four approaches to robust regression, *Psychological Bulletin*, 92(2), 505-512.
- Myers, R.H. (1986). *Classical and Modern Regression with Applications*, Duxbury Press, Boston, Massachusetts, s.358.
- Orsoy, A. (1998). *Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Regresyonda Bozulma Noktasına Sahip Tahmin Ediciler*, Yayınlanmamış Bilim Uzmanlığı Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara, s.102.
- Özmen, İ. (1998). *Poisson Regresyon Çözümleme Teknikleri*, Yayınlanmamış Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi, s.72.
- Rousseeuw, P.J. (1984). Least Median of Squares Regression, *JASA*, 79(388), 871-880.
- Rousseeuw, P.J. ve Leroy, A. (1987). *Robust Regression and Outlier Detection*, John Wiley, NY, s.329.
- Yohai, V.J. (1987). High breakdown point and high efficiency robust estimates for regression, *The Annals of Statistics*, 15(20), 642-656.