

KUYRUK MODELLERİ ANALİZİ  
VE BİR UYGULAMA  
(Yüksek Lisans Tezi)

Ayla ERŞEN  
Eskişehir ~~2000~~ 2000

**KUYRUK MODELLERİ ANALİZİ  
VE BİR UYGULAMA**

Ayla ERŞEN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**İşletme Anabilim Dalı**

**Danışman: Yard. Doç. Dr. Nuri ÇALIK**

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü

~~2000-2000~~  
Ocak-2000

# YÜKSEKLİSANS TEZ ÖZÜ

## KUYRUK MODELLERİ VE ANALİZİ ÜZERİNE BİR UYGULAMA

Ayla ERŞEN

İşletme Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü

Haziran 1999

Danışman : Yard. Doç. Dr. Nuri ÇALIK

Günümüzde teknoloji gelişimi, sistem yaklaşımları işletmecilik ve metod gelişimleri ile maliyetler ve zaman çok önemli hale gelmiştir. Bu nedenler kuyruk sistemlerinin analizini zorunlu hale getirmiştir. Günlük hayatta çok sık karşılaşılan olay türü olan bekleme hep bir bekleme hattı sistemi içinde gerçekleşmektedir. Kuyruk modellerinin çözümüne ilişkin geliştirilen tekniklerin uygulama alanı gittikçe yaygınlaşmaktadır. Fakat uygulaması en zor olanlar arasında olduğu bilinmektedir.

Tüm işletme tiplerini, devlet sanayi, okul ve hastanelerin büyük veya küçük kuyruk problemleri vardır. Bu çalışmada toplam bekleme zamanını azaltıcı yönde yani hasta bekleme süresini, nasıl azaltabileceği karar vericilerin göz önünde bulundurabilecekleri alternatiflere yer verilmiştir.

Çalışmanın ilk bölümünde kuyruk modelleri ile ilgili bilgiler verilmiş kuyruk modellerinin temel yapısı, kuyruk modellerinde kullanılan temel kavramlar ve bu modellerin sınıflandırılması, kuyruk sistemlerindeki maliyetler anlatılmış, kuyruk sistemlerinin analiz yöntemleri, kuyruk modelinde ve servis yapısını açıklamada kullanılan dağılımlar açıklanmış ve bu dağılımın uygunluk testleri üzerinde durulmuştur. Bu bölümde son olarak tek ve çok kanallı kuyruk modelleri açıklanmıştır.

Çalışmamızın ikinci bölümünde bir kuyruk modeli uygulaması yer almaktadır. Burdur Devlet Hastanesinde yapılan uygulamada ilk önce hastane hakkında kısa bir bilgi verilmiş, verilerin nasıl toplandığı, dağılımların belirlenmesi ve dağılımlara

uygunluk testlerin gelişler ve süreler olmak üzere toplanan veriler doğrultusunda uygulanmıştır. MSS-Queuing paket programı yardımıyla mevcut duruma ilişkin işlem karakteristikleri hesaplanmış ve yorumlanmıştır.

## ABSTRACT

Today, the development of technology, system approaches, management, the developments of methods, costs and time gained importance. Because of these reasons, the analysis of queueing systems became necessary. Queueings which are met in daily life very often all occur in a queueing line system. The application field of the techniques that developed for the solution of queueing models, is becoming more and more widespread. But it is known that these techniques are the ones which are the most difficult to apply.

All managements, like government, industrial, schools and hospitals have big or small queueing problems. In this study the alternatives were given to shorten the queueing period of patients so that the deciders can take them account.

In the first chapter; the main body of the queueing models, the main concepts used in queueing models, the categorisation of these models and the costs in queueing models were given; the methods for the analysis of queueing systems, the distributions used in queueing model and in the explanation the service body were explained and the conformity tests of this distribution were dwelled on. Finally one and more than one stable (constant) queueing models were explained.

In the second chapter of the study an application of a queueing models was given. In this application carried out in Burdur Public Hospital, an information about the hospital was given as a firststep and then data collection, the determination of distributions and the application of the conformity tests according to data as coming and periods are explained. The characteristics of the operation were counted with the help of MSS Queueing program for the current position and finally the comments were given.

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Ayla ERŞEN'in "Kuyruk Modelleri Analizi ve Bir Uygulama" başlıklı tezi 27 Ocak 2000 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca, İşletme (Sayısal Yöntemler) Anabilim Dalında, yüksek lisans tezi olarak değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye (Tez Danışmanı) : Yrd.Doç.Dr.Nuri ÇALIK  
Üye : Prof.Dr.Birol TENEKECİOĞLU  
Üye : Doç.Dr.Emel ŞIKLAR

Prof.Dr.Enver ÖZKALP  
Anadolu Üniversitesi  
Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürü

## İÇİNDEKİLER

ÖZ	ii
ABSTRACT	iv
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	v
ÖZGEÇMİŞ	vi
TABLolar LİSTESİ	xi
ŞEKİLLER LİSTESİ	xii
GİRİŞ	1

## BİRİNCİ BÖLÜM

### KUYRUK MODELLERİ

1.SEMBOLLER	2
2.KUYRUK KAVRAMI	3
2.1. Kuyruğun Tanımı	3
2.2. Yöneylem Araştırmasındaki Kuyruk	4
2.3. Yöneticiler Açısından Kuyruğun Önemi	5
2.4. Kuyruğun Teorisinin Yararları	6
3. KUYRUK MODELLERİNİN TEMEL YAPISI	6
4. KUYRUK MODELLERİNDE KULLANILAN TEMEL KAVRAMLAR	9
4.1. Müşteriler	9
4.2. Geliş Özellikleri	10
4.3. Kuyruk Disiplini ( Servis Disiplini )	10
4.4.Servis Süreci (Servis Kanalı )	12
4.5.Servis Olgusu (Çıktılar)	15
4.6.Servis Hızı	15
4.7.Geliş Hızı	15

4.8.Girdi Kaynağı	16
4.9.Kuyruktaki Ortalama Müşteri Sayısı	16
4.10.Sistemdeki Ortalama Müşteri Sayısı	16
4.11.Kuyruktaki Bekleme Süresi	17
4.12.Sistemdeki Bekleme Süresi	17
4.13.Sistem (Servis) Kullanım Faktörü	17
<b>5.KUYRUK MODELİ ÖRNEKLERİ</b>	<b>18</b>
<b>6.KUYRUK MODELLERİNİN SINIFLANDIRILMASI</b>	<b>19</b>
<b>7.KUYRUK SİSTEMLERİNDE MALİYETLER</b>	<b>20</b>
7.1. Servis Olanadı Maliyeti	20
7.2. Bekleme Maliyeti	20
7.3. Toplam Maliyet ve Kuyruk Sistemlerinde Optimizasyon	21
<b>8 KUYRUK SİSTEMLERİNİN ANALİZ YÖNTEMLERİ</b>	<b>22</b>
8.1. Analitik Yöntem	22
8.2. Benzetim Yöntemi	22
<b>9.KUYRUK MODELİNDE VE SERVİS YAPISINI AÇIKLAMADA KULLANILAN DAĞILIMLAR</b>	<b>22</b>
<b>10.DAĞILIMIN UYGUNLUK TESTİ</b>	<b>27</b>
10.1. Hipotez Testi	25
10.2. Ki-Kare Testi	27
<b>11.KUYRUK MODELLERİNİN İFADESİNDE KENDALL – LEE TAHA SİMGELEMESİ</b>	<b>29</b>



<b>12. TEK KANALLI KUYRUK MODELLERİ</b>	<b>31</b>
<b>12.1. Poisson Gelişleriyle Birlikte Tek Servisçi     Kuyruğu ve Sınırsız Kapasite</b>	<b>31</b>
12.1.1. M/M/1 Kuyruğu	35
12.1.2. M/E <sub>k</sub> / 1 Kuyruğu	39
12.1.3. M/D/1 Kuyruğu	41
<b>12.2. Poisson İle Tek Bir Servisçinin Hizmet Verdiği     Kuyruklar</b>	<b>44</b>
<b>13. ÇOK KANALLI KUYRUK MODELLERİ</b>	
<b>13.1. Birden Fazla Kişinin Hizmet Verdiği Kuyruklar</b>	<b>48</b>
<b>13.2 M/G/c/∞ Kuyruğu</b>	<b>55</b>
<b>13.3. Servisçilerin Sayıları Çok Fazla Olduğundan     M/G/ ∞/∞</b>	<b>56</b>
<b>13.4. Sınırlı Topluluk Modellerinin Dalgalanma     Göstermeyen Tutumu M/M/c/K/K</b>	<b>57</b>

**İKİNCİ BÖLÜM**  
**BİR KUYRUK MODELİ UYGULAMASI**

<b>1.UYGULAMA BİRİMİNİN TANITILMASI</b>	<b>63</b>
<b>1.1.Uygulama Birimi Hakkında Genel Bilgi</b>	<b>63</b>
<b>1.2.Uygulama Biriminin Kuyruk Sistemi Olarak İncelenmesi</b>	<b>63</b>
<b>2.VERİLERİN TOPLANMASI</b>	<b>64</b>
<b>3.DAĞILIMLARIN BELİRLENMESİ</b>	<b>64</b>
<b>4.DAĞILIMLARA UYGUNLUK TESTLERİNİN YAPILMASI</b>	<b>65</b>
<b>4.2.Gelişler İçin Gözlem Sayısının Yeterliliğinin Test Edilmesi</b>	<b>65</b>
<b>4.1.Gelişlerin İncelenmesi ve Dağılımın Belirlenmesi</b>	<b>70</b>
<b>4.3.Servis Süreleri İçin Gözlem Sayısının Yeterliliğinin Test Edilmesi</b>	<b>81</b>
<b>4.4. Servis Sürelerinin İncelenmesi ve Dağılımın Belirlenmesi</b>	<b>85</b>
<b>4.5. Analitik Yöntemin Uygulanması</b>	<b>95</b>
<b>SONUÇ</b>	<b>101</b>
<b>EKLER</b>	<b>104</b>
<b>KAYNAKÇA</b>	<b>130</b>

## Tablolar Listesi

Tablo 1. M / G / 1 Kuyruğunun Sabit Konum Parametreleri

Tablo 2. M / M / 1 Kuyruğunun Sabit Konum Parametreleri

Tablo 3. M /  $E_k$  / 1 Kuyruğunun Sabit Konum Parametreleri

Tablo 4. M / D / 1 Kuyruğunun Sabit Konum Parametreleri

Tablo 5. M / M / 1 / N Kuyruğu için Nispeten Dalgalanma Göstermeyen Parametreler

Tablo 6. M / M / C Kuyruğu için Genellikle Dalgalanma Göstermeyen Parametreler

Tablo 7. M / G /  $\infty$  Kuyruğu için Dalgalanma Göstermeyen Parametreler

Tablo 8. M / M / C / K / K Kuyruğu için Dalgalanma Göstermeyen Parametreler

## Şekiller Listesi

Şekil 1. Temel Kuyruk Süreci

Şekil 2. Tek Bir Servisçi Tarafından Verilen Kuyruk Örneği

Şekil 3. Servis Olanakları

Şekil 4. Kuyruk Sisteminin Elemanlarının Sistemdeki Bulunuş Durumlarına Göre Sınıflandırılması

Şekil 5. Bekleme Hattı Sisteminde Maliyet

Şekil 6. Tek Kanallı ve Çok Servisli Sistem

Şekil 7. Birden Fazla Servisçinin Bulunduğu Kuyruk Sistemi

Şekil 8.  $M / M / C / \infty$  Modeli İçin P Değerleri

Şekil 9.  $M / M / C / \infty$  Modeli İçin  $P_0$  Değerleri

Şekil 10. Belli Sayıda Gelenlerin Oluşturduğu Kuyruk Modeli

## GİRİŞ

Günlük hayatta çok sık karşılaşılan olay türü olan bekleme, hep bir kuyruk sistemi dahilinde gerçekleşmektedir. Kuyruk sistemlerinden ortaya çıkan sorunların yapısı üzerine geliştirilen kuramların uygulama alanı gittikçe yaygınlaşmaktadır. Yığılma nüfus artışının kaçınılmaz bir sonucudur. Servis isteyen bireyler çoğaldıkça, bekleme hattı ve kuyruk doğal olarak oluşur.

Kuyruk kuramı belli bir hizmeti bekleyen müşterilerin bulunduğu her durum için geçerli bir kuramdır. Günlük yaşamımızda da kuyruk bekleyen insan ve araçlar ile her zaman karşılaşmaktayız. Bir markette, bilet gişesinde, otobüs durağında , hastanelerde yada bir bankada beklemek zorunda kalınması her bireyin karşılaştığı önemli bir sorun olmaktadır. Bu kuyrukların oluşumundaki tek sebep servise gelen müşteri isteklerinin servisteki personelce karşılanmamasıdır.

Görüldüğü gibi bekleme hatları; herkesin günlük yaşamının bir parçasıdır. Verilen bir hizmete olan talep hizmet kapasitesini aşınca ortaya çıkar. Bir çok durum kuyrukları azaltmak veya oluşumunu önlemek için ek olanaklar bulunur. Bununla beraber ek olanakların sağlanması ise belli bir maliyet karşılığı olur. Yöneticinin karşılamak zorun da olduğu sorun beklemeyle ilişkin maliyet ile bekleme önlenmesine ilişkin maliyetin nasıl dengeleneceğidir.

## BİRİNCİ BÖLÜM

### KUYRUK MODELLERİ

#### 1. SEMBOLLER

M: Poisson geliş dağılımı veya bunun bir gerektirmesi olan üstel gelişler arası

D: deterministik gelişler arası veya servis süresi dağılımı

E: Erlang ve Gamma gelişlerarası veya servis süresi dağılımı

GI: Genel bağımsız gelişler

G: Genel servis süresi dağılımı

d sembolü yerine:

FIFO: İlk giren ilk çıkar

LIFO: Son giren ilk çıkar

SIRO: Rasgele servis

GD: Genel servis disiplini

L<sub>q</sub>: Kuyruk modellerinde müşterilerin sayısının beklenen değeri

L : Kuyruk modellerinde müşteri sayısının beklenen değeri

W<sub>q</sub>: Kuyruk modellerinde bekleme süresinin beklenen değeri

W: Kuyruk modellerinde sistemde bulunma süresinin beklenen değeri

$\lambda$  : Birim zamanda gelen müşteri sayısının beklenen değer

$\mu$ : Birim zamanda servis gören müşteri sayısının beklenen değeri

n: Sistemdeki müşteri sayısı

s: Yapılan gözlemlerin standart sapması

e: Hata payı

S: Sınıf aralığı

N: Gözlenen birimlerin sayısı

X<sub>enb</sub>: En büyük gözlem değeri

X<sub>enk</sub>: En küçük gözlem değeri

## 2. KUYRUK KAVRAMI

### 2.1 Kuyruğun Tanımı

Ekonomik kaynakların kıtlığı ve nüfus artışının doğal bir sonucu olarak günlük yaşamımızda servis sistemlerinin yetersizliği ve bekleme sorunu ile sık karşılaşmaktadır. Meydana gelen bu yığılma olayı "Bekleme Hattı" veya "Kuyruk" olarak adlandırılırken, doğan problemlere de "Bekleme Hattı Problemi" veya "Kuyruk Problemi" adı verilmektedir.<sup>1</sup> Kuyruk teorisi (Kuyruk modelleri) ise bu sistemlerin analizi ve dizaynı için gerçekleştirilen analitik yaklaşımların tümünü içeren çalışmalardır.

Bekleme hattı veya kuyruk, bir hizmet sistemine gelen müşterilerin sistemin başka bir müşteriye hizmet verme durumunda olması nedeniyle oluşturdukları birikim veya sınırlı bir hizmet nedeniyle geciken bir bekleme dizisi durumudur.<sup>2</sup>

Kuyruk Kuramı belli bir hizmeti bekleyen müşterilerin bulunduğu her durum için geçerli bir kuramdır. Günlük yaşamamızda da, kuyrukta bekleyen insan ve araçlar ile her zaman karşılaşmaktayız. Bir markette, bilet gişesinde, otobüs durağında, hastanelerde yada bir bankada beklemek zorunda kalınması her bireyin karşılaştığı önemli bir sorun olmaktadır. Bu kuyrukların oluşumundaki tek sebep servise gelen müşteri isteklerinin servisteki personelce karşılanmamasıdır.

Karar verme durumunun ortaya çıkması servis için bekleyenlerin servis almadan önce beklemek zorunda kalmalarından kaynaklanmaktadır. Servis zamanı, servis alacakların düzeni bilindiği ve bunların belirli kurallar dahilinde toplandığının varlığı biliniyorsa matematiksel hesaplar yapılabilir. Gelen müşteriler bir sıra

<sup>1</sup> İmdat KARA, *Servis Sistemleri ve Gelişler Zamana Bağlı Olduğunda Kapasite Sorununa Matematiksel Yaklaşım* (Eskişehir: A.Ü., İ.T.İ.A. Yayını, 1979) s.7

<sup>2</sup> Ercan GÜNER, *Bekleme Hattı Sistemlerinin Analizi ve Bir Uygulama* (Ankara: Gazi Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü, 1986) s.1

oluşturabilir ve kliniklerde olduğu gibi bir istasyonda servis verilebilir. Bunlar bir tane sıra oluşturabilir ve berberlerdeki gibi birden çok istasyonda servis verebilir.

## 2.2. Yöneylem Araştırmasındaki Kuyruk

Yöneylem araştırması veya yönetim biliminde bekleme hattı, kuyruk olarak adlandırılır. Kuyruk kuramı yöneylem araştırması yönteminin en geniş uygulama alanlarından birini kapsar. Bu konuda kaynaklara geçen ilk yayın Johannson 1907 yılında yayınlanan "Waiting Times and Number of Calls" isimli çalışmadır. Fakat kuyruk teorisinin gelişimini esas etkileyen çalışmalar Danimarkalı telefon Mühendisi A.K.Erlang tarafından 1909 yılında yapıldığı görülür. Erlang'ın ismine verilen Erlang olasılık dağılımı, bekleme hattı modellerinde yaygınca kullanılır. Erlang'dan sonra 1927 yılında Molina tarafından bazı çalışmalar yapılmış ise de bunlar Erlang'ın telefon sistemlerindeki bekleme hattı sorununu inceleyen araştırmalarının bir değerlendirmesi olmaktan ötede gidememiştir.

Erlang'ın uygulaması ile başlayan çalışmalar İkinci Dünya Savaşından sonra diğer problemleri kuyruk teorisiyle ilişkilendirilmiştir. 1950'lerle birlikte kuramsal çalışmalar bankalarda, hastanelerde ve benzeri yerlerde oluşan yığılma olaylarına hızla uygulanmaya başlamıştır.

1930 ve 1950 arasındaki Crommelin, Pollaczek, Khintchine, Kolmogorow ve Palm gibi bilim adamları kuyruk teorisinin gelişimine önemli katkılarda bulunmuşlardır. Crommelin telefon sistemlerinde bekletilen telefonlarla ilgili alarak olasılık formülleri geliştirmiştir. Pollaczek ve Khintchine poisson gelişli, değişen ve sabit zaman servisli tek kanallı sıra bekleme sistemleri için Pollaczek – Khintchine formülü geliştirmişlerdir. Palm değişen trafik yoğunlukları etkilerini ve bekleme zamanlarının momentlerini incelemiştir.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Halil SARIASLAN, *Sıra Bekleme Sistemlerinde Simülasyon (Benzetim) Tekniği* (Ankara: A.Ü. S.B.F. ve Basın Yayın Yüksekokulu Basımevi, 1986) s. 6



### 2.3. Yöneticiler Açısından Kuyruğun Önemi

Günümüzde işletmelerin en önemli sorunlarından birisi müşterilerine etkin bir servis sistemi yönetimi oluşturamamaktadır. Bekleme hattı modelleri bu konuda yöneticilere oldukça yararlı olabilmektedir. Şöyle ki, hizmet için gelen müşteriler istemlerinin bir an önce karşılanmasını isterler. Çünkü müşteriler fazla beklediklerinde psikolojik bir tedirginliğe girdikleri gibi zamanlarını boşa harcamalarının da bir maliyeti söz konusudur. Müşteriler gereğinden fazla beketildiklerinde büyük bir olasılıkla, işletme müşterilerinin bir çoğunu kaybedecektir.<sup>4</sup>

İşletmelerin sundukları hizmete olan talep stokastik olarak değiştiğinden dolayı, birbirine karşıt iki sorun ortaya çıkmaktadır. Bunlardan birincisi, talepteki artış sonucu bir kuyruk oluşmakta ve müşteriler hizmet için beklemekte yada hizmet istediğinde bulunan müşteri sayısı çok az veya hiç olmadığından hizmet birimi boş beklemektedir. Birinci durumda müşterilerin sırada beklemesinden dolayı bir alternatif maliyete müşteri kaybına yol açarken, ikinci durumda işletme maliyetlerinin yükselmesine neden olmaktadır.<sup>5</sup> Yöneticinin karşılamak zorunda olduğu sorun, beklemeyle ilişkin maliyet ile karın maksimizasyonu amacı ile beklemeyle ilişkin maliyetin nasıl dengeleneceği sorunudur.<sup>6</sup>

Öte yandan yönetici, müşterilere hizmet veren personelin sayısını da düşünmek zorundadır. Fazla sayıda personel kullanımı işletmeye ek maliyetler getirir. Yönetici servis maliyetlerinin düşük olmasını isterken servisin niteliğini yükseltmeyi ve müşterilerin bekleme zamanını da en düşük düzeyde tutmayı amaçlamalıdır. Böylece ortaya işletmenin yararları ile müşterilerin yararlarını fazla çatıştırmayan bir ekonomik

<sup>4</sup> Ahmet ÖZTÜRK, *Yöneylem Araştırması* (4. basım, Bursa: Uludağ Üniversitesi, Ekin Kitapevi, 1994) s.263

<sup>5</sup> GÜNER, A.g.e., s.2

<sup>6</sup> Haluk ERKUT, *Yönetimde Simülasyon Yaklaşımı* (İstanbul: Yönetim Bilimleri Dizisi, İrfan Yayıncılık, 1992) s.144

dengeye ulaşma sorunu ile karşılaşır. İşte bu ekonomik denge yani bir anlamda müşterilere en iyi ve etkin servis sağlama ancak bekleme hattı modelleri ile gerçekleştirilir.<sup>7</sup>

#### 2.4. Kuyruk Teorisinin Sağladığı Yararlar

Kuyruk modeli ile, müşterilerin kuyrukta bekleme ve hizmet süreleri azaltılır. Müşteriler daha iyi servis hizmetine kavuşurlar. Müşteriler yönünden bu model bu yararları sağlarken işletmeye ek maliyetlerde getirir. Şöyle ki, müşterilere daha iyi hizmet sunabilmeleri için işletme, servis zamanını hızlandıracak ek tesisleri kurmalı ve ek uzman personeli istihdam etmelidir. Uzman personelin ücret düzeyi yüksek olacağı gibi ek tesislerin maliyeti de olacağından toplam maliyet eskisine göre artacaktır. Buna karşılık; işletmenin Pazar payı, yani müşteri sayısının artması da doğaldır. İşte kuyruk modeli daha iyi servisi sağlayacak maliyet ile servisteki gelişmelerin ekonomik dengelemesini sağlar.

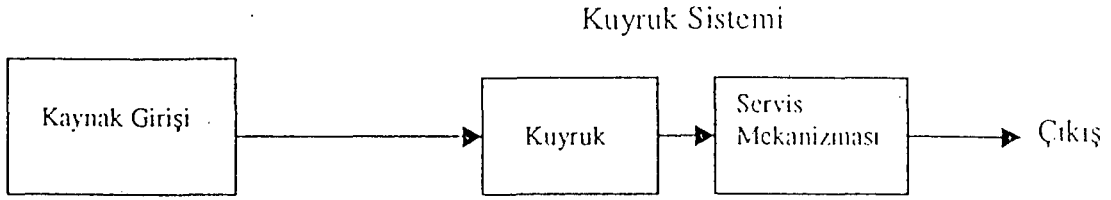
### 3. KUYRUKLAMA MODELLERİNİN TEMEL YAPISI

Pek çok kuyruklama modelince kabul gören temel süreç şöyledir. Servis talep eden “müşteriler” zamanla bir “girdi kaynağı” tarafından oluşturulur. Bu müşteriler kuyruklama sistemine girer ve bir kuyruğa katılırlar. Belirli zamanlarda bir kuyruk üyesi, servis disiplini olarak bilinen bazı kurallarca servis için seçilir. Sonrasında servis mekanizmasınca müşteriye, istenilen servis sunulur ve müşteri kuyruklama sistemini terk eder.

---

<sup>7</sup> Öztürk, a.g.e. s.264

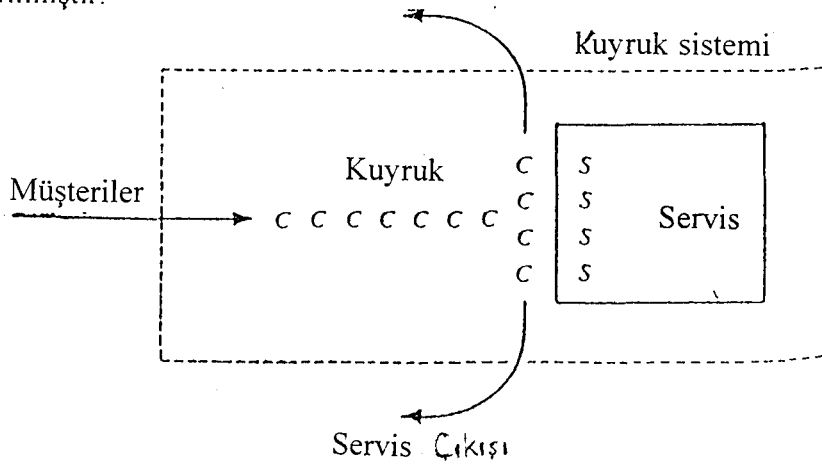
Bu süreç şekil 1.'de gösterilmiştir.<sup>8</sup>



Şekil 1. Temel Kuyruk Süreci

Frederick Hillier, Operations Research ( 2. Edition, San Francisco: Holden Day Inc., 1974)

Başlangıç bölümlerde üzerinde durulduğu gibi, kuyruklama teorisi pek çok farklı türde bekleme-hattı konumunu incelemiştir. Bununla birlikte, öncelikle şu süreç üzerinde durulmuştur: birkaç servisçinin konumlandırıldığı tek bir servis sisteminin önünde tek bir bekleme hattı (bazı zamanlarda boş olabilir) oluşur. Bir girdi kaynağı ile oluşturulan her müşteriye tek bir servisçi tarafından, belki de kuyrukta (bekleme hattı) bir müddet beklendikten sonra hizmet verilir. Gerekli kuyruklama sistemi şekil 2.'de gösterilmiştir.<sup>9</sup>



Şekil 2. Tek Bir Servisçi Tarafından Verilen Kuyruk Örneği

Hillier, 1974

<sup>8</sup> Frederick HILLIER, Operations Research (Second Edition, San Francisco: Holden -Day Inc., 1974 ) s. 381

<sup>9</sup> Hillier, a.g.e., s. 382

Şekil. 1'deki temsili örnekteki kuyruklama sürecinin bu türde olduğuna dikkat ediniz. Girdi kaynağı tıbbi müdahale isteyen acil durumlar şeklinde müşteri oluşturur. Acil odası servis sistemi ve doktorlar servisçilerdir.

Servisçinin tek bir kişi olmasına gerek yoktur; müşteri için talep edilen servisi eş zamanlı olarak gerçekleştirmek için güçlerini birleştiren bir tamir ekibi gibi bir grup da olabilir. Dahası, servisçiler insan da olmayabilir. Pek çok durumda bir servisçi bir makine veya alet parçası, yani bir forklift, kamyon gibi (muhtemelen insan gözetiminde olmasına rağmen) istenen bir servisi gerçekleştiren bir makine olabilir. Aynı şekilde, bekleme hattındaki müşteriler de insan olmayabilir. Örneğin, bunlar belirli bir makinaca belirli bir işlemi bekleyen ürünler veya ücret kabini önünde bekleyen arabalar olabilirler.

Servis sistemini temsil eden fiziksel bir yapının önünde gerçekten fiziksel bir bekleme hattının olmasına da gerek yoktur. Yani, kuyruk üyeleri, bir servisçinin gelerek kendilerine hizmet vermesini bekleyen, örneğin tamir edilmeyi bekleyen, bir alana yayılmış olabilir. Belirli bir alana hizmet vermek için atanmış servisçi veya servisçiler grubu, o alan için servis sistemini temsil edecektir. Kuyruklama teorisi ortalama bekleme sayısı, ortalama bekleme süresini verecektir, çünkü müşterilerin bir grup içinde birlikte bekleyip beklememelerinden bağımsızdır. Kuyruklama teorisinin uygulanabilmesi için gerekli tek şey, verilen bir servis için bekleyen müşteri sayısının kararlı olması gerekir <sup>10</sup>

---

<sup>10</sup> Hillier, a.g.e., s. 383

## 4. KUYRUK MODELLERİNDE KULLANILAN TEMEL KAVRAMLAR

### 4.1. Müşteriler

Müşteriler işlerinin veya hizmet istemlerinin görülmesi için servis sistemine gelen ünitelerdir. Müşteri olarak kişiler, makineler, yedek parça, hammadde v.b. örnekler verilebilir. Müşterilerinin servis için sisteme gelişleri, gelişlerin dağılımı ve gelişler arasındaki farklılaşma, müşteri topluluğu ile müşterilerin özellikleri ve istemlerine sunulan servis v.b. istemin ve doğanın koşullarına bağlıdır. Müşterilerin sisteme gelişleri aşağıdaki tiplerden biri olarak karşımıza çıkar<sup>11</sup>

- Düzgün gelişler
- Tamamen tesadüfi gelişler
- Genel bağımsız gelişler
- Zamana göre sıçramalı düzgün gelişler
- Toplu gelişler
- Karmaşık gelişler
- Kesik zamanlı gelişler
- Zamana bağlı gelişler
- Sistemin diğer yönlerine bağlı gelişler

Müşterilerin topluluğu sonlu veya sonsuz sayıda olabilir. Eğer topluluktan bir birimin servis için ayrılmış olması diğer birimlerin gelişini etkilerse sonlu, etkilemezse sonsuz topluluk söz konusudur.

Matematiksel modellerde en yaygın olarak kullanılan geliş türleri tamamen rassal ve düzenli geliş türleri olup bu şekilde modeller açısından bir genellemeye gidilebilmiştir.

---

<sup>11</sup> Gülçin MUTLUALP, **Sistem Simülasyonu Projesi** (İstanbul: İ.T.Ü., İşletme Fak. Endüstri Müh. Bölümü, 1991) s.8.

Müşteri gelişlerinin oluşturduğu sürecin niteliğine bağlı olarak bir istatistiksel model geliştirilebilir<sup>12</sup>

#### 4.2. Geliş Özellikleri

Kuyruk sistemine müşterilerin gelişlerini karakterize eder. Gelen müşterilerin sisteme dahil olmaları halinde bir bekleme hattı meydana gelebilir. Meydana gelen bekleme hattının uzunluğu, hatta dahil olan ünitelerin miktarına ve bu ünitelere servis merkezleri tarafından yapılan hizmetin durumuna göre değişecektir.<sup>13</sup>

Müşterilerin gelişleri bazen kontrol edilebilir, bazen kontrol edilemez. Sisteme gelişler tek tek veya gruplar halinde olabilir. Gelişler kuyruk sistemi tarafından tamamen veya kısmen kontrol edilebileceği gibi hiç kontrol edilemeyebilir. Müşteri kaynağı birden fazla olabilir. Müşterilerin gelişlerinin olasılık dağılımı türlü biçimde olabilir. Gelişleri açıklamak için yaygınca kullanılan dağılımlar, sabit dağılım, üstel dağılım, poisson dağılımı ve Erlang dağılımıdır. Bu dağılımların her birinin kendine özgü özellikleri vardır.<sup>14</sup>

#### 4.3. Kuyruk Disiplini (Servis Disiplini)

Hizmete başlamak için bekleme hattından seçilen müşterilerin durumudur. Eğer müşterilerin beklemesi söz konusu ise bir bekleme hattı veya kuyruk oluşur. Dört tip servis disiplininin söz edilir.<sup>15</sup>

<sup>12</sup> Erhan Ada, **Hizmet Üreten Sistemlerde Kuyruk Kuramı ve Monte Carlo Benzetim Tekniğinin Önemi, Mersin Limanı Uygulaması** (Adana: Sosyal Bilimler Enstitüsü, 1984) s.

<sup>13</sup> Şemsettin Bağırkan, **Bekleme Hattı Teorisi ve Bir Uygulama**, (İstanbul: İ.Ü. İ.T.İ.A., Yayını, No: 503) s.5

<sup>14</sup> Öztürk, a.g.e., s.426

<sup>15</sup> Mustafa Köksal, "Kuyruk Teorisi (Bekleme Hattı Teorisi) (Stokastik Kuyruk Modellerinin Analitik Yoldan İncelenmesi)", **İ.Ü., İşletme Fakültesi Dergisi**, Cilt no 9, Sayı no 1-2, ( Nisan 1980), s.161

- İlk Giren İlk Çıkar (First In First Out=FIFO) en çok bilinen kuraldır. Servise, müşterilerin geliş sıralarına göre başlanacağını gösterir.
- Son Giren İlk Çıkar (Last In First Out=LIFO)
- Rasgele Seçim (Servis In Ranoom Order=SIRO)
- Öncelikli Seçim (Service In Selective Order=SISO) bu durumda sisteme katılan bazı müşteriler bekletilmeden servise alınır.

Yukarıda oluşturulan kuyruklardan servise alım için bir kural (disiplin) gerekir. İşte müşterilerin servis için sisteme girişlerini saptayan düzene servis alım kuralı veya aynı anlama gelen servis disiplini veya kuyruk disiplini denir.<sup>16</sup>

İnsanın müşteri veya hizmet eden olarak rol aldığı durumları ifade eden kuyruk modelleri insan davranışlarının etkisini de hesaba katmak üzere dizayn edilmelidir. Bir insan hizmet vereni, bekleme hattı tam kapasitesine vardığında hizmeti hızlandırabilir. Bir müşteri, bekleme zamanını aza indirgeme ümidi ile bir bekleme hattından ötekine geçebilir. Bazı müşteriler uzun bir ertelemeyi sezinleyip bekleme hattına katılmaktan vazgeçebilir veya beklemeleri uzun sürdüğü için bir süre kuyrukta kaldıktan sonra ayrılabilir.<sup>17</sup>

Servis disiplini, beklenen ortalama müşteri sayısı, kuyruktaki ortalama müşteri sayısı bekleme zamanı gibi göstergelerini etkilemediğinden sistemin genel akışını değiştirmez. Bu farklı servis disiplinleri yalnızca bekleme zamanı dağılışının farklılaşmasına yol açar. Örneğin FIFO ve LIFO bekleme disiplinlerinde bekleme zamanı dağılışların varyanslar FIFO disiplininde LIFO disiplinine oranla daha küçüktür.<sup>18</sup>

---

<sup>16</sup> .Kara, a.g.e., s.14

<sup>17</sup> Fisun Sakin. **Yapı Kredi Bankası A.Ş. İş Etkinliği** (Samsun: 19 Mayıs Üniversitesi , Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 199 ) s.8

<sup>18</sup> Didem Özpuolat, **Kuyruk Modelleri ve Analizi Üzerine Bir Uygulama** (İzmir: Ege Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi 199 ) s.11

#### 4.4. Servis Süreci (Servis Kanalı)

Servis için müşterilere servis hizmetinin sunulmasıdır. Aşağıdaki üç öğeden oluşur.

- i- Servis Olanakları
- ii- Servis kapasitesi
- iii- Servis Süresi

##### i-Servis Olanakları

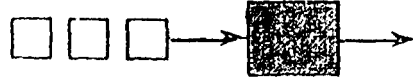
Servis olanakları bekleme hattındaki müşterilerin gereksinme duyduğu etkinlikleri ortaya koymaktadır. Bu sistemlerde servis yapıldıkça bekleme hattındaki eleman sayısında bir azalma meydana gelir. Servis hiçbir yardımcı alet kullanmayan kimseler tarafından veya insan emeği olmadan sadece makineler tarafından yapılabilmektedir.<sup>19</sup>

Servis olanaklarının tümü, noktalar veya kanalların birleşimiyle oluşur. Şekil 3'de gösterildiği gibi bunlar:

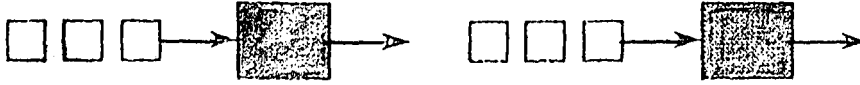
- Tek Kanal - Tek Servis Merkezi
- Tek Kanal -Çok Servis Merkezi
- Çok Kanal - Tek Servis Merkezi
- Çok Kanal - Çok Servis Merkezleri

<sup>19</sup> Hüseyin ERDİN, **Sonsuz Geliş Kaynaklı ve Tek Kanallı Bekleme Hattı Sistemleriyle İki Modelin İlişkisi** (Eskişehir: A.Ü. Müh. Mim. Fak. Yayınları No: 60, 1992) s. 11

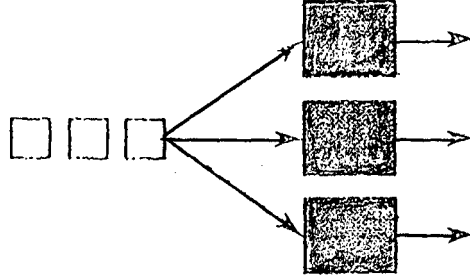




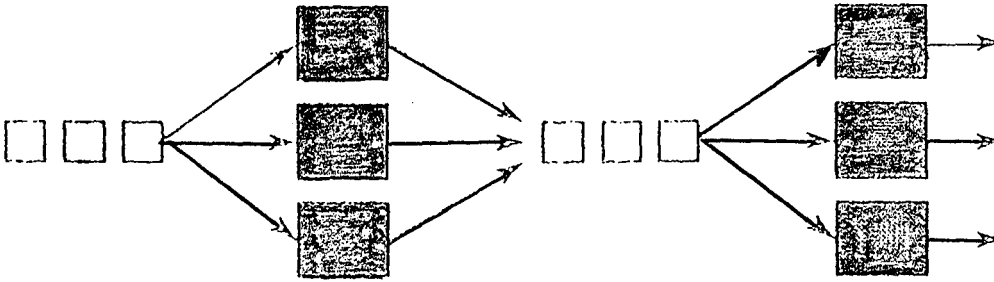
A. Tek Kanallı, Tek Servis  
Kuyruk Sistemi



B. Tek Kanallı, Çok Servis.  
Kuyruk Sistemi



C. Çok Kanallı, Tek Servis  
Kuyruk Sistemi



D. Çok Kanallı, Çok Servis  
Kuyruk Sistemi

Şekil 3 Servis Olanakları

## ii-Servis Kapasitesi

Servis kapasitesi, tanımlanan bir zaman biriminde servise alınıp istemi karşılanabilen en fazla müşteri sayısı olarak tanımlanır. Sistemin amacına göre sistem değişken veya sabit kapasiteli olur.

Sabit kapasiteli sistemler, birim zamanda servis yapılan müşteri sayısı hiçbir şekilde değiştirilemeyen sistemlerdir. Değişken kapasiteli sistemler ise birim zamanda servisi yapılan müşteri sayısı iki değer arasında değiştirilebilen sistemlerdir.

## iii- Servis Süresi

Kuyruk sisteme gelen müşterilerden bir müşteriye servis vermek için ayrılan zaman süresi olarak tanımlanır.

Kuyruk sistemlerinde servis (hizmet) süreleri ile ilgili çeşitli modeller vardır.<sup>20</sup>

Bunlar:

- Sabit servis süresi
- Üstel servis
- Gama tür ve özel Erlang servis süresi
- Genel Erlang servis süresi
- Değişken servis süresi
- Sistemin diğer kurumlarına bağlı servis süresi
- Müşteri farklılığına bağlı servis zamanı

---

<sup>20</sup> Kara, a.g.e., s. 16

#### 4.5. Servis Olgusu (Çıktılar)

Hizmet veya iş istemiyle sisteme gelen her birim , servisin tamamlanmasıyla sistemin bir olgusu (çıktısı) olur. Sistemin bir olgusu için herhangi bir bekleme hattı sistemi için aşağıdaki durumlardan biri veya birkaçı durumunda söz konusu olmaktadır.

- Sistemi bir daha geri dönmek üzere terk eder.
- Sistemin içinde devamlı dönüş halindedir.
- Sistemi terk eder ama gelecekte yine dönmesi beklenir.
- Çıktı (olgu) yeni bir şekle girer ve diğer sistemlere kayar veya başka sistemlerin olgularıyla birleşir. <sup>21</sup>

#### 4.6. Servis Hızı

Servis oranı hizmet için gelen müşterilerin taleplerini karşılamak için istenen servis süresi dağılımı ile ilgilidir. Birim zamanda verilen ortalama hizmet sayısı olarak tanımlanır. Servis için gelen müşterilerin her biri aynı miktarda süreyi gerektirirse servis oranı tek biçimli olabilir. Karmaşık olan servis ise Erlang veya üstel dağılım ile gösterilir. <sup>22</sup>

#### 4.7. Geliş Hızı

Geliş hızı zaman birimi başına müşterilerin kuyruk sistemine geliş sayısıdır. Gelişler arası süre ise müşterilerin gelişlerine göre aradaki geçen süredir.

Geliş oranı kuyruk modelinde müşterilerin geliş yapısının bilinmesi önemlidir. Müşterilerin kuyruk sistemine gelişleri genellikle tesadüfi olduğu kabul edilir ve gelişler ile gelişler arasındaki süreyi açıklamada olasılık dağılımlarından daha çok poisson ve üstel dağılım kullanılır.

<sup>21</sup> Mutlualp, a.g.e., s.8.

<sup>22</sup> Osman Halaç, **Kantitatif Karar Verme Teknikleri** (İstanbul: İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi, Arpaz Matbaacılık 1978) s.

#### 4.8. Girdi Kaynağı

Girdi kaynağı literatürde, hizmet talep eden müşteriler kitlesi olarak tanımlanmaktadır. Girdi kaynağının büyüklüğü zaman aralıklarına göre farklılıklar göstermektedir.

Girdi kaynağının niteliğini ve büyüklüğünü belirlemek için istatistiksel modeller geliştirmek gerekir. Geliştirilecek olan modeller için, girdi kaynağının sonlu veya sonsuz sayıda olması büyük önem arz eder. Girdi kaynağından, hizmet almak için hizmet tesisine müşteriler farklı (düzenli, rassal v.b.) şekillerde gelebilirler. Ayrıca hizmet alımı için gelen müşterilerin davranışları da farklılık gösterebilirler. Bazı müşteriler sisteme girdikten sonra hizmet alımına kadar kuyrukta veya değişik şekillerde olsun beklemeye katlanırlar. Müşterilerden bazıları ise zorunlu (başka işlerinin olması nedeniyle) olarak veya beklemeye katlanamayarak sistemi terk edebilirler. Hizmet alımı için sistemde bekleyenlerin sisteme yararlı oldukları, sistemi terk edenlerin ise sistem için fırsat maliyeti kaybı ve işletmeye olan güvenin azalmasına neden oldukları bir gerçektir.<sup>23</sup>

#### 4.9. Kuyruktaki Ortalama Müşteri Sayısı (Kuyruk Uzunluğu) (Lq)

Servis görmek üzere beklemekte olan müşteri sayısıdır ve buna kuyruk uzunluğuda denir.

#### 4.10. Sistemdeki Ortalama müşteri Sayısı (Ls)

Kuyrukta bekleyen veya beklemesi ümit edilen müşteri sayısıdır.

<sup>23</sup> Mehmet Bahçeci, **Hizmet Üreten Sistemlerde Kapasite Planlaması Ve Kuyruk Modelleri** (Ankara: Gazi Üniversitesi , Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 199 ) s. 20-21

#### 4.11. Kuyruktaki Bekleme Süresi ( $W_q$ )

Boş olmayan kuyruk sistemlerinde bir müşterinin kuyrukta bekleyerek harcadığı süredir. Kuyruk boş olduğu zaman müşteriler sıfır bekleme süresine sahip olurlar.

Bir bekleme hattı probleminde müşteri gelişleri ve servis olanakları sabit tutulduğu takdirde, bekleme hattının (kuyruğun) uzunluğu, zamanın fonksiyonudur. Bundan dolayı kuyruk teşekküllü stokastik bir süreçtir.<sup>24</sup>

#### 4.12. Sistemdeki Bekleme Süresi ( $W_s$ )

Bir müşterinin servis görmek amacıyla, kuyrukta bekleme süresi ve serviste harcadığı süreler toplamı sistemde bekleme süresini oluşturur.

#### 4.13. Sistem (Servis) Kullanım Faktörü

Sistemin meşgul olma olasılığı yani hizmet veren kişi ve sistemin harcadığı zaman oranıdır.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

formülü ile bulunur.

Trafik yoğunluğu oranında denilen sistem kullanım faktörü sonlu kuyruk sistemi için 1'den küçüktür. Ayrıca kanal başına düşen trafik yoğunluğu 1'den küçük ise kuyrukta bir sınırlama olmaz. Bu durumda kuyruk sistemi durağan durumda uzun

<sup>24</sup> İlhami KARAYALÇIN, *Üretim Yönetimi ve Teknikleri*, (İstanbul: İ.Ü. İşletme Fakültesi, İşletme İktisadi Enstitüsü Yayını, No: 23, 1974) s. 512

süre kalmaz. Bazı modellerde ise trafik yoğunluğunun değeri için böyle bir sınırlama yoktur. Bu tür modeller Kuyruk uzunluğunun sınırlı (sonlu) olduğu durumları gösterir.<sup>25</sup>

## 5. KUYRUK MODELİ ÖRNEKLERİ

### - Ticari Servis Sistemlerinde

- a- Berber dükkanı (berberler servisçilerdir.)
- b- Bankacılık (banka memurları servisçilerdir.)
- c- Kafeterya zincirleri
- d- Manav ve bakkallardaki kasalar
- e- Ev aletleri tamircisi (tamirci servisçidir.)
- f- Benzin istasyonu (pompalar servisçiler, arabalar müşterilerdir.)

### - Ulaşım Servis Sistemlerinde

- a- İniş ve kalkış için bekleyen uçaklar (uçak pisti servisçidir.)
- b- Ödeme gişelerinde bekleyen arabalar
- c- Asansörler

### - Endüstriyel Servis Sistemleri

- a- Materyal üretim sistemleri
- b- Montaj sistemleri ( Montaj ekipleri servisçilerdir.)
- c- Kalite kontrol sistemlerinde denetleme merkezi

### -Sosyal Servis Sistemleri

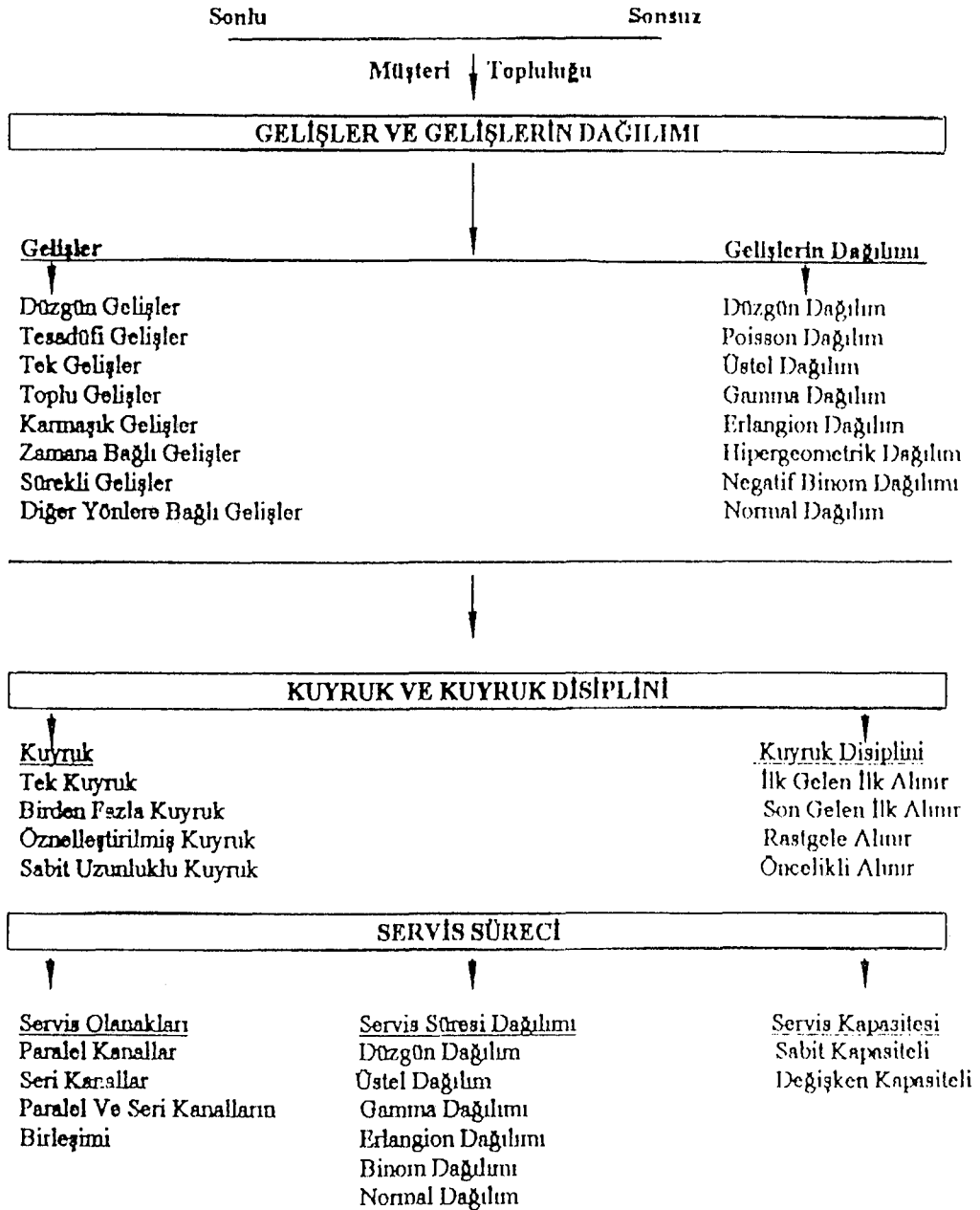
- a- Sağlık bakım sistemleri
- b- Yaşam sistemi ( kanun taslakları müşteriler, yasama organı ise servisçidir.)

---

<sup>25</sup> Halaç, a.g.e., s.238

c- Yargı sistemleri (davalar müşterilerdir.)<sup>26</sup>

## 6. KUYRUK MODELLERİNİN SINIFLANDIRILMASI



Şekil 4. Kuyruk Sisteminin, Elemanların Sistemdeki Bulunuş Durumlarına Göre Sınıflandırılması

<sup>26</sup> İlhan Or, Introduction To Stochastic Models In Operations Research (İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Basımevi, 1996), s. 8

## 7. BEKLEME HATTI SİSTEMİNDE MALİYETLER

İşletmeler genelde servis vermek için kanal sayısını belirlerken, en ekonomik olan çözüm üzerinde dururlar.

Bazı işletmeler ise hızlı ve rahat hizmet verebilmek amacıyla ekonomik kanal sayısından daha fazla kanal sayısına sahip olmak isterler. Bu ayrıcalık onlara rakipleri karşısında üstünlük sağlama imkanını verecektir.

Bekleme hattı sistemlerinde üç tür maliyetle karşılaşılmaktadır.

- Servis birimini açmaktan meydana gelen servis olanağı maliyeti,
- Müşterilerin servis için beklemelerinden doğan bekleme maliyeti,
- Gelen müşterilerin servis görememelerinden kaynaklanan fırsat maliyetidir.

### 7.1. Servis Olanağı Maliyeti

Bekleme hattı sisteminin her kanalı bir sermaye yatırımını ve birde işletme ve bakım masraflarını gerektirmektedir. Ayrıca sistem için gerekli genel masrafları ve hizmet veren personel ücretlerini de göz önüne almak gerekmektedir.

Servis kanalının servise ihtiyaç gösteren müşterilere servis yapma kapasitesi, kanaldaki servis araçlarının bir fonksiyonudur. Servis kapasitesinin artırılması bekleme maliyetinde bir azalmaya sebep olacağından, servis kapasitesi bütün sistemin bekleme ve servis olanağı maliyetleri toplamını minimum yapacak şekilde tayin edilmelidir.

### 7.2. Bekleme Maliyeti

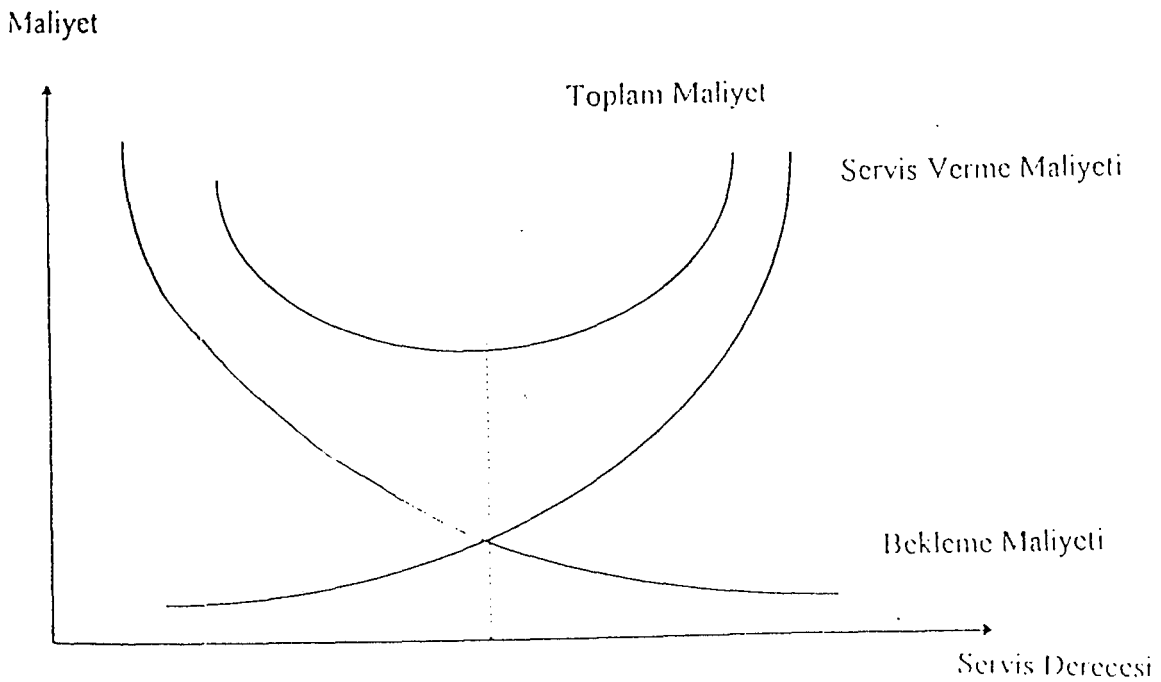
Servis istemi arttığında sistemde kuyruk oluşmaktadır. Bekleme hattına gelen müşterilerin bekleme hattında geçirdikleri sürenin maliyeti, bekleme maliyetini



oluşturmaktadır. Bir bekleme hattı sisteminde kanal sayısı arttıkça bekleme maliyeti azalmaktadır.

### 7.3. Toplam Maliyet ve Kuyruk Sistemlerinde Optimizasyon

Bekleme hattı sistemlerinde, servis olanağı maliyeti ile bekleme maliyeti ters orantılıdır. Bu nedenle, servis birimi sayısını azalttığımızda servis olanağı maliyeti azalırken, bekleme hattındaki beklemeden dolayı meydana gelen bekleme maliyeti artıracaktır. Eğer servis birimini fazla tutarsak bekleme maliyeti azalacak, ancak servis olanağı maliyeti artacaktır. Önemli olan toplam maliyetin minimum olmasıdır. Toplam maliyetin minimum olduğu, optimum kanal sayısı Şekil-5' de gösterilmiştir.



Şekil.5 Bekleme Hattı Sisteminde Maliyet

## 8. KUYRUK SİSTEMLERİNİN ANALİZ YÖNTEMLERİ

Bekleme hattı sistemlerinde karşılaşılan sorunların çözümünde iki yöntem kullanılmaktadır.

Bunlar :

- Analitik yöntem,
- Benzetim yöntemi' dir.

### 8.1. Analitik Yöntem

Gelişler ve servis sürelerinin dağılımları belirlendikten sonra, servise alım kuralı ve yönetim amaçları doğrultusunda soruna fonksiyonel çözüm arayıp karar değişkenlerini bulma yoluna "analitik yöntem" denir. Analitik yöntemle bir sorunun çözülebilmesi için, sorunu etkileyen tüm bileşenlerin ve aralarındaki ilişkilerin matematiksel olarak yazılması gerekmektedir.

### 8.2. Benzetim Yöntemi

Gelişler ve servis süreleri hakkındaki istatistiklerden MONTE-CARLO yöntemiyle gerçek veya varsayılmış dağılımlarla karar değişkenlerini bulma şekline "benzetim yöntemi" denir. Bu yöntem analitik yönetim yetersiz kaldığı durumlarda uygulanmaktadır. Gelişler ve servis süreleri hakkında genel bir istatistiksel bilgi elde edilmemişse benzetim yöntemi sonuç vermemektedir.

## 9. KUYRUK MODELİNDE VE SERVİS YAPISINI AÇIKLAMADA KULLANILAN DAĞILIMLAR

Kuyruk modelinde müşterilerin geliş yapısını ve onlara verilen servis yapısının bilinmesi önemlidir. Müşterilerin kuyruk sistemlerine gelişleri tesadüfi olabileceği gibi önceden de bilinebilir. Müşterilerin kuyruk sistemlerine gelişlerinin genellikle tesadüfi

olduğu kabul edilir ve gelişler ve gidişler arasındaki süreyi açıklamada olasılık dağılımlarından Poisson ve üstel dağılım kullanılır.<sup>27</sup>

Geliş oranları dağılımlarının Poisson tarafından daima yeterli biçimde tanımlandığını kesinlikle söylememize rağmen, durumun sıklıkla böyle olduğu konusunda fazlaca kanıt bulunmaktadır. Bunun doğru olması gerektiğini düşünmemiz gerekir çünkü bekleme hattının her hangi bir durumu kadar bir gelişin diğer gelişlerden tamamen bağımsız olduğu kabul edildiğinden dolayı Poisson dağılımı tamamen tesadüfi gelişlere karşılık verir.

Müşterilerin kuyruk sistemine geliş süreçleri, geliş oranları ve gelişler arasındaki süre bulunarak açıklanır. Geliş oranı ( $\lambda$ ) zaman birimi başına müşterilerin kuyruk sistemine geliş sayısıdır. Eğer müşterilerin geliş sayıları (ortalama geliş oranı  $\lambda$ ) Poisson dağılımında ise gelişler arasındaki süre  $1/\lambda$  üstel dağılımıdır.

Kuyruk modellerinde ortalama servis hızı için kullanılan simge, birim zamanda tamamlanan servis sayısı genellikle  $\mu$  ile gösterilir. Servis süresi, bir servisi gerçekleştirmek için gerekli olan zamandır. Servis sürelerinin dağılımı  $1/\mu$  ortalama servis süresi ile gösterilir.

Benzer olaylar arasındaki zaman aralıkları üstel olarak dağılmış ise, birim zaman aralığında meydana gelen olay sayısı bir poisson dağılımına sahiptir. Poisson rasgele değişimlerinin uygulamaları envanter kontrolü, kuyruk kuramı, kalite kontrolü, trafik akışı ve yöneylem araştırmasının diğer birçok alanında kullanılmaktadır.<sup>28</sup>

$X=0, 1, 2, \dots, \infty$  için.

$$\frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

<sup>27</sup> Öztürk, s. 267

<sup>28</sup> Halaç, a.g.e., s.117

Poisson dağılımı tek parametrelidir bir dağılım olup, dağılımın parametresi  $\lambda$ 'dır.  $\lambda$  ortalama başarı sayısıdır. Ve  $\lambda > 0$  olmalıdır. Poisson dağılımında olasılıklar toplamı,

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1 \text{ dir.}$$

Poisson dağılımında  $\lambda$  tamsayı olabileceği gibi kesirli de olabilir. Bu durumda e logaritma yardımıyla hesaplanabileceği gibi, Mac Lawrin seri açılımı ile,

$$e^{-\lambda} = 1 + \frac{-\lambda}{1!} + \frac{(-\lambda)^2}{2!} + \frac{(-\lambda)^3}{3!} + \dots$$

olarak hesaplanabilir.

Poisson dağılımında olasılıklar,

$$\frac{P(x+1)}{P(x)} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x+1}}{(x+1)!}}{e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}} = \frac{\lambda}{x+1} P(x)$$

işlemi ile  $P(x=0) = e^{-\lambda}$  dan başlanarak da hesaplanabilir.<sup>29</sup>

$$P(X=1) = \lambda \cdot P(X=0).$$

$$P(X=2) = \frac{\lambda}{2} P(x=1)$$

$$P(X=3) = \frac{\lambda}{3} P(x=2)$$

<sup>29</sup> Selahattin GÜRİŞ, Şahamet BÜLBÜL, **Olasılık** (İstanbul:Marmara Üniversitesi İ.İ.B.F. Yayılım Matbaası, 1995) s.423-425

$$P(X+1) = \frac{\lambda}{x+1} P(x)$$

Poisson süreci tesadüfi bir süreç olup aşağıdaki koşulları sağlanmalıdır<sup>30</sup>

- Sistem zaman ekseninin anlamlı dilimlere ya da yer veya belirli bir alanın alt kesimlerine göre incelenmektedir.
- Bu alt dilimlerde biri diğerini izleyen olaylar bağımsızdır.
- Alt dilimlerde öyle bir aralık tanımlanabilir ki, bu aralıkta ilgilenen olay bir defa ortaya çıkabilir, birden fazla ortaya çıkması mümkün değildir.
- Tanımlanan aralıkta olayın bir defa ortaya çıkması olasılığı değişmemektedir.

## 10. DAĞILIMIN UYGUNLUK TESTİ

### 10.1. Hipotez Testi

Yapılan bir istatistik araştırma sonucu elde edilen değerlerin gerçek veya tahmin değerlerinden farklı olup olmadığı sorunuyla karşı karşıya gelirse bazı hipotezler yapmak gerekir.

Sonra bu hipotezlerin belli ihtimallerle geçerli olup olmayacağı kontrol edilir. Sonuç olarak başlangıçta ele alınan hipotez ya kabul ya da reddedilir. İstatistikte bu kontrol işlemine hipotezler testi denir.<sup>31</sup>

İstatistiksel çalışmalarda devamlı ana kütle üzerinde çalışma yapmak hem zaman alıcı hem de pahalıdır. Bu nedenle örnekleme yapılır. Örnekleme sonucu bulunan değerlere dayanılarak kurulan hipotez hakkında karar verilir. Bu karar hipotezinin kabul

<sup>30</sup> İmdat KARA, **Olasılık** (Eskişehir: Bilim Teknik Kitapevi, Kasım 1983) s.206

<sup>31</sup> Kenan URAL, **İstatistik Yöntemleri ve Uygulamaları**, (3. Baskı, İstanbul: Güray Matbaacılık, İ.Ü. Yayın No: 3116, İktisat Fakültesi Yayın No: 495, İstanbul 1983) s.211.

veya reddi şeklinde gerçekleşir. Tabiatıyla ana kütleyle tamsayım uygulanmadığı takdirde, tesadüfi hatalar nedeniyle, hipotezin ne derece güvenle kabul veya reddedileceği belirlenebilir.<sup>32</sup> Hipotezlerin kabul veya reddinde anlamlılık düzeyi adı verilen bir ölçü esas alınır. Bu düzey çoğunlukla % 5 veya % 1 gibi ihtimal değerleridir.

İstatistikte genellikle alınan örneklerin birbirinden farksız olduğu, eşit sayıldığı, aranan özelliği bulundurmadığı veya etkisi aranan konunun etkisiz olduğu varsayımlarını öngören sıfır hipotezleri kurulmakta ve doğruluğu denetlenmektedir. Sıfır hipotezine göre kıyaslanan özellik arasındaki fark sıfır sayılır. Bu fark aslında hiçbir zaman sıfıra eşit olamaz. Ancak araştırmacının esas alacağı belli olasılıklar çerçevesinde sıfır olduğu kabul edilir. Sıfır hipotezi  $H_0$  ile gösterilir. Bunun karşısına ise alternatif hipotez denir ve  $H_1$  ile gösterilir<sup>33</sup>

Bir parametre hakkında  $H_0$  hipotezinin testi, ana kütlede rassal olarak seçilen örneğe ait test istatistiğine dayanarak  $H_0$ 'ın kabul veya reddedilmesi konusunda bir karar vermek demektir.

Bu amaçla yapılacak işlemler şöyle sıralanabilir:<sup>34</sup>

- Üzerinde çalışılan değişkenin ana kütleyle ait dağılımının belirlenmesi
- Hipotezin kurulması
- Red düzeyinin seçilmesi
- Karar Kuralının belirlenmesi ve kararın verilmesi

Aldığımız karar ve ana kütle parametresinin gerçek değerine bağlı olarak iki tip hata yapabiliriz. Bilmediğimiz ana kütle parametresinin gerçek değeri karşısında ya  $H_0$

<sup>32</sup> Orhan İDİL, **Örnekleme Teorisi ve İşletme Yönetiminde Uygulanması**, (İstanbul: Fatih Yayınevi, İ.Ü. Yayın No: 2708, İşletme Fakültesi Yayın No: 107, 1980) s.96

<sup>33</sup> Mehmet ERCAN, **Bilimsel Araştırmalarda İstatistik**, (2. Baskı, İzmit: Orman Bakanlığı Kavak ve Hızlı Gelişen Tür Orman Ağaçları Araştırma Enstitüsü Müdürlüğü Yayınları, Çeşitli Yayınlar Serisi No: 6 Müdürlük Yayın No: 211 , 1997) s.62-63.

<sup>34</sup> Yaşar BAYKUL, **İstatistik Metod ve Uygulamalar** (2. Baskı, Ankara: Erten Basım Yayın Dağıtım Ltd. Şti., 1997) s.317

doğrudur ya da  $H_1$ . Çünkü bu iki hipotez aynı anda ikisi birden doğru olamayacak şekilde teşkil edilmiştir. O halde  $H_0$ 'ın doğruluk veya yanlışlığı bir kriter,  $H_0$ 'ın kabul veya reddine ikinci kriter olarak aklı gelebilecek 4 durumu şöyle sıralayabiliriz.<sup>35</sup>  $H_0$  hipotezi anakütle parametresinin gerçek değeri karşısında doğrudur ve biz örnekleme sonucu  $H_0$ 'ı kabul ederiz. Burada bir hata söz konusu değildir.

- (i)  $H_0$  hipotezi anakütle parametresinin gerçek değerleri karşısında doğrudur ve biz örnekleme sonucu  $H_0$ 'ı kabul ederiz. Burada hata söz konusu değildir.
- (ii)  $H_0$  hipotezi doğrudur fakat örnek değerleri karşısında reddedilmiştir. Yani aslında doğru olan bir hipotez yanlışlık yapılarak reddedilmiştir. Buna 1. Tip hata adını veriyoruz
- (iii)  $H_0$  hipotezi yanlıştır ve reddedilmiştir. Burada bir hata söz konusu olamaz.
- (iv)  $H_0$  hipotezi yanlıştır fakat örnek sonuçlarına göre kabul edilmiştir. Burada yapılan hataya 2. Tip hata adını veriyoruz.

## 10.2. Ki-Kare Uygunluk Testi

$X^2$  testi gözlenen frekanslarla teorik frekanslar arasında bir kıyaslama yapmayı esas alır.

$X^2$  uygunluk testinde hipotezler şu şekilde ifade edilir:<sup>36</sup>

$H_0$ : Örneklem bölünmesi ana kütle bölünmesine uygundur.

$H_1$ : Örneklem bölünmesi ana kütle bölünmesine UYGUN DEĞİLDİR.

Diğer bir anlatımla,

$H_0$ : Örneklem ana kütle temsil edebilir.

<sup>35</sup> Uğur KORUM, İstatistik (Ankara: Sevinç Matbaası, 1972) s.126

<sup>36</sup> Özer SERPER, Uygulamalı İstatistik 2, ( Bursa: Uludağ Üniversitesi, Filiz Kitapevi, 1993) s.116

$H_1$  : Örnekleme ana kütleyle temsil edemez.

Hipotezleri de yazılabilir.

“Anlamlılık düzeyi” için %1 ve %5 düzeylerinden birisi, kararın etkilenmemesi için öncelikle belirlenir.

“Red bölgesi” ise şu şekilde tanımlanır :

$$\text{Red bölgesi : } X^2 > X_{c^2}$$

$X^2$  İstatistiğinin bölünmesi  $X^2$  bölünmesine çok yaklaştığı için, test istatistiği belli bir anlamlılık düzeyine ve 1 serbestlik derecesine göre ek 3 deki “ $X^2$  Değerleri TABLOSU” n dan büyük kritik değer ile karşılaştırılmaktadır.

“Test istatistiği”

$$X^2 = \frac{(n_p - n)}{n_p}$$

Formülüne göre hesaplanır. Gözlenen frekansları “ $F_g$ ” ve teorik frekansları “ $F_b$ ” şeklinde sembolize edip

$$n_p = F_g$$

$$n = F_b$$

dönüşümleri yaptığımızda aşağıdaki formüle geçebiliriz.

$$X^2 = \sum_{F_g} (F_b - F_g)^2$$



$F_b - F_g$  'ye ilişkin eşitlikten, herhangi bir şıkkın teorik frekansını bulunurken, örneklem hacmi ile ana kütlede o şıkkın oranının çarpıldığı anlaşılmaktadır.

Test istatistiği formülünün

$$X^2 = \frac{(F_g)}{F_b} - n$$

şeklinde ifadesinin de mümkün olduğu ispatlanabilir. Yukarıda red bölgesini ( $X^2$ )' nin ( $X_c^2$ )'den büyük olduğunu kabul edersek.  $X^2 > X_c^2$  olduğunda  $H_0$  hipotezinin red ve  $H_1$  hipotezinin kabul edilmesi , örneklem bölünmesinin ana kütle bölünmesine uygun olmadığını (örneğin ana kütle temsil edemeyeceğini) ifade eder.  $H_0$  hipotezinin reddedilmesi ise, örneklemde elde edilen frekans bölünmesinin  $H_1$  karşıt hipotezini destekleyici yeterli bir kanıt sayılmayacağı, yani örneklem bölünmesinin ana kütle bölünmesine uygun olduğu (örneğin anakütleyi temsil edebileceği) anlamını taşır.<sup>37</sup>

## 11. KUYRUK MODELLERİNİN İFADESİNDE KENDALL-LEE TAHA SİMGELERİ

Kuyruk sistemleri arasındaki farklılıkları gören Kendall ( 1953 ) servisçi sistemleri için bir işaretleme sistemi geliştirmiş ve buda geniş anlamda kabul edilmiştir.

Sıra bekleme sistemlerini birbirinden ayırt etmek için önce Kendall tarafından geliştirilen daha sonra Lee ve Taha tarafından genişletilen aşağıdaki simgeleme biçimi sık sık kullanılmaktadır.<sup>38</sup>

$$(.a / b / c) : (.d / e / f)$$

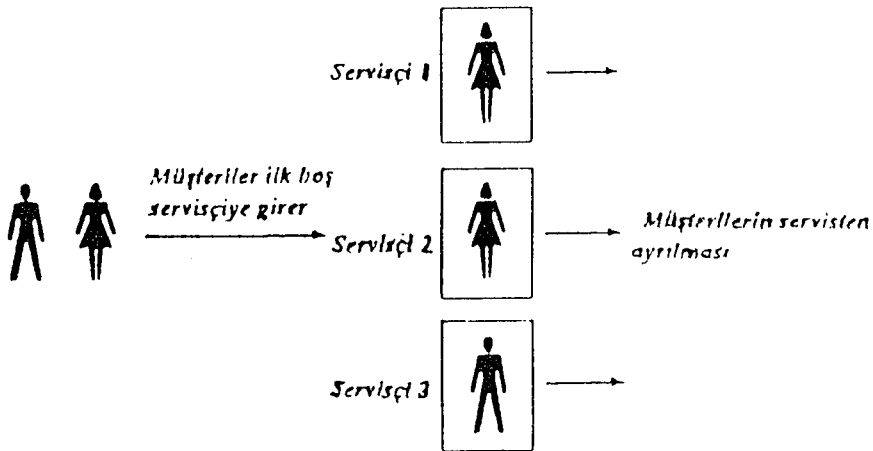
Burada,

<sup>37</sup> Serper, a.g.e., s. 117

<sup>38</sup> Sarıalan, a.g.e., s. 86

- .a : Gelişler yada gelişler arası zaman dağılımını
- .b : Servis zamanı dağılımını
- .c : Sistemdeki servis kanallarının sayısını
- .d : Servis disiplini
- .e : Sisteme alınacak en fazla müşteri sayısını
- .f : Geliş kaynağının büyüklüğünü ifade etmektedir.

Paralel servisçilerden biri boş kalana kadar bütün gelenlerin tek bir hatta beklediği kuyruklama sistemini tanımlamak için kullanılır. Şekil 6 görüldüğü gibi hattaki ilk müşteri servise girer ve böyle devam eder. Örneğin 3 no'lu servisçideki müşterinin servisi tamamlanacak, bir sonraki müşteriye bu durumda (FCFS disiplini olduğunu varsayarak) hattaki ilk müşteri 3 no' lu servisçiye geçecektir. Bir sonraki servis tamamlanmasından sonra bekleyen diğer müşteri servise girecektir.<sup>39</sup>



Şekil 6. Tek Kanallı Çok Servisli Sistem

<sup>39</sup> Wayne L. Winston , *Operations Research Applications and Algorithms* (Boston : Indiana University PWS Publishers Duxbury Press, 1987 ) s. 261

Kendall'ın kısa tanımlarından bazıları şöyledir:<sup>40</sup>

1. M/G/1- Poisson (Markovian (Markovcu)) giriş, Genel servis-süresi dağılımı, 1 servisçi.
2. M/D/c-Poisson girişi, Gerekirci servis süreleri, c sayıda servisçi
3. G1/M/c-Genel, bağımsız biçimde dağıtılmış geliş süreleri, ;Gittikçe artan (Markovian) servis süreleri, c sayıda servisçi.
4. G1/G/c-Genel; bağımsız biçimde dağıtılmış geliş süreleri, Genel servis süresi dağılımı, c sayıda servisçi

Yukarıdaki tanım başka kuyruklama sistemlerini kapsayacak şekilde genişletilebilir. Örneğin sadece M sayıdaki müşteri alabilecek bekleme odasına sahip kuyruklama sistemi (M sayısı hizmet verilenleri de içerir) sıklıkla dört parçalı kod a/b/c/M ile kısaltılır. G1<sup>x</sup>/G/c tanımı müşterilerin yığınlarla geldiği ve yığınların tesadüfi değişken x'e göre dağıtıldığı sonsuz kapasiteye sahip kuyruklama sistemleri için kullanılır.

## 12. TEK KANALLI KUYRUK MODELLERİ

### 12.1 Poisson Gelişleriyle birlikte Tek-Servisçi Kuyruğu ve Sınırsız Kapasite: M/G/1

Servis zamanlarının  $M^{-1}$  ortalama ve  $\sigma^2$  varyansa sahip olduğunu varsayalım ve tek bir servisçi bulunsun. Eğer  $p=\lambda/\mu < 1$  ise M/G/1 kuyruğu Tablo 1'de verildiği şekilde sabit-konum karakteristikleriyle sabit-konum olasılık dağılımına sahiptir. Sabit-konum olasılıkları  $P_1, P_2, \dots$  için genel olarak tek bir basit ifade yoktur.  $\lambda < \mu$  olduğunda,  $p=\lambda/\mu$  miktarı servisçi faydasıdır veya servisçinin uzun dönemli zaman orantısı faaldir. Tablo 1'de görüldüğü üzere  $1-P_0=p$  aynı zamanda bir veya daha fazla müşteri içeren sistemde sabit-konum olasılığı olarak yorumlanabilir.  $L-L_Q=p$ 'nin hizmet edilen

<sup>40</sup> Henk C. TIJMS, Stochastic Models An Algorithmic Approach (America: John Wiley&Sons, 1994) s. 261

müşterilerin zaman-ortalama sayısıdır. (Tablo 1: M/G/1 kuyruğunun sabit konum parametreleri)<sup>41</sup>

### Örnek

Alet yapma makinesi görünür biçimde gelişigüzel çalışmaktadır ve bir teknisyenin bakımına ihtiyaç duymaktadır. Arızanın Poisson sürecine göre  $\lambda=1.5/\text{saat}$  bir oranda olduğu varsayılmaktadır. Aylarca yapılan gözlemlerde, tek bir teknisyenle 20 dakikalık bir standart sapmayla tamir süresinin ortalama 30 dakika sürdüğü görülmüştür. Böylelikle, servis oranı  $\mu=2/\text{saat}$  ve  $\sigma^2 = (20)^2 \text{ dakika}^2=1/9 \text{ saat}^2$  dir. “Müşteriler” alet üreticileridir ve servis sürelerinin dağılımları değil, ortalama ve varyansı bilindiğinden uygun model M/G/1 kuyruğudur. Teknisyenin faal olduğu zamanın oranı  $\rho=\lambda/\mu =1.5/2=0.75$  ve Tablo 1.’den arızalı makinelerin sabit-konum zamanının ortalama sayısı

$$L = 0.75 + \frac{(1.5)^2((0.5)^2 + 1/9)}{2(1 - 0.75)}$$

$$= 0.75 + 1.625 = 2.375 \text{ makinedir.}$$

Böylelikle tamir sisteminin konumu keyfi zamanlara göre not eden bir gözlemci ortalama olarak 2.375 bozuk makine (uzun dönemde) bulacaktır.

---

<sup>41</sup> Jerry BANKS, John S.CARSON, II.Barry L. NELSON, (Second Edition America Discrete-Event System Simulation, Prentice-Hall, 1996 s. 258

Tablo1. 'M/G/1 Kuyruğunun Sabit Konum Parametreleri'

p	$\frac{\lambda}{\mu}$
L	$p + \frac{\lambda^2(\mu^{-2} + \sigma^2)}{2(1-p)} = p + \frac{p^2(1 + \sigma^2\mu^2)}{2(1-p)}$
W	$\mu^{-1} + \frac{\lambda(\mu^{-2} + \sigma^2)}{2(1-p)}$
W <sub>Q</sub>	$\frac{\lambda(\mu^{-2} + \sigma^2)}{2(1-p)}$
L <sub>Q</sub>	$\frac{\lambda^2(\mu^{-2} + \sigma^2)}{2(1-p)} = \frac{p^2(1 + \sigma^2\mu^2)}{2(1-p)}$
P <sub>0</sub>	1-p

Tablo 1'teki formüllere bakıldığında M/G/1 kuyruğundaki bekleme hatları ve gecikmelerin kaynağını görülecektir. Örneğin, L<sub>Q</sub> şu şekilde yeniden yazılabilir.

$$L_Q = \frac{p^2}{2(1-p)} + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2(1-p)}$$

İlk terim yalnızca servis oranı  $\mu$  ifade etmek için ortalama geliş yüzdesi oranını  $\lambda$  içerir. İkinci terimle gösterildiği gibi, eğer  $\lambda$  ve  $\mu$  sabit tutulursa, bekleme hattının (L<sub>Q</sub>) ortalama uzunluğu servis zamanlarının değişkenliğine,  $\sigma^2$ , bağlıdır. Eğer iki sistem aynı ortalama servis sürelerine ve ortalama gelişler arası sürelerine sahipse daha değişken servis sürelerine daha büyük  $\sigma^2$  sahip olan daha uzun hatlara sahip olmaya eğimli olacak ve ortalama daha uzun hatlara sahip olacaktır. Eğer servis süreleri yüksek oranda değişirse geniş bir servis zamanı oluşmasında yüksek bir olasılık

bulunmaktadır. (yani ortalama servis zamanından daha fazla), ve geniş servis zamanları oluştuğunda hatların oluşması ve müşteri gecikmelerinin artmasında alışıldan daha yüksek bir eğilimi olacaktır.<sup>42</sup>

### Örnek

Bir iş için müsabaka yapan iki işçi vardır. Able, Baker'dan daha hızlı olan bir ortalama servis zamanı istemektedir. Fakat Baker hızlı olmasa da daha fazla tutarlılık istemektedir. gelişler saatte  $\lambda=2$  lik bir oranda Poisson sürecine göre oluşmaktadır (dakikada 1/30). Able'in istatistikleri ortalama 25 dakikalık bir servis zamanıdır ancak standart sapması sadece 20 dakikadır. Eğer işe almak için kuyruğun ortalama uzunluğu kriterse hangi işçi işe alınacaktır? Able için  $\lambda$ =dakika başına 1/30,  $\mu=24$  dakika,  $\sigma^2=20^2=400$  dakika<sup>2</sup>,  $p=\lambda/\mu=24/30=4/5$ , ve ortalama kuyruk uzunluğu şöyle hesaplanır.

$$L_Q = \frac{(1/30)^2 (24^2 + 400)}{2(1 - 4/5)} = 2.711 \text{ müşteridir.}$$

Baker için,  $\lambda$ =dakika başına 1/30,  $\mu=25$  dakika,  $\sigma^2=2^2=4$  dakika<sup>2</sup>,  $p=25/30=5/6$ , ve ortalama kuyruk uzunluğu

$$L_Q = \frac{(1/30)^2 (25^2 + 4)}{2(1 - 5/6)} = 2.097 \text{ müşteridir.}$$

Ortalamadan daha hızlı çalışmasına rağmen, Able'ın daha büyük servis değişkenliği Baker'inkinden %30 daha büyük bir kuyruk ortalamasıyla sonuçlanır. Baker'ı faydasız bulanlar ve böylelikle gecikme yaşamayacaklar  $P_0=1/p=1/6=16.7\%$  iken Able'ı faydasız bulan gelenler ve böylelikle gecikme yaşamayacaklar oranı  $P_0=1-p=1/5=20\%$ 'dir. Ortalama kuyruk uzunluğu  $L$  'ya dayanarak Baker kazanır.

---

<sup>42</sup> Bank, ,a.g.e., s.259

M/G/1 kuyruklarının pek çok durumda, yani, servis süreleri hızla arttığında, k Erlang emri veya karar verici durumda olan özel önemdedir.

### 12.1.1.M/M/1 Kuyruğu.

Herhangi bir M/G/1 kuyruğunda servis süresinin  $\mu^{-1}$  ortalama ile artan şekilde dağıtıldığını varsayalım. Öyleyse varyans  $\sigma^2 = \mu^{-2}$  dir. Hızla artan dağılımın standart sapması ve ortalaması eşit olduğundan, servis süreleri yaklaşık olarak ortalamalarına eşit standart sapması ve ortalaması eşit olduğundan, servis süreleri yaklaşık olarak ortalamalarına eşit standart sapmalara sahip olduğunda M/M/1 kuyruğu yararlı bir yaklaşık model olur. Tablo 2 'de verilen sabit-konum parametreleri  $\sigma^2 = \mu^{-2}$  Tablo 1'deki formüllerin yerine kullanıldığında hesaplanabilir.<sup>43</sup>

### Örnek

Tek sandalyeli unisek bir berberde servis süreleri kadar geniş aralık sürelerinin de artan oranda dağıtıldığı gösterilmiştir.  $\lambda$  ve  $\mu$  değerleri sırasıyla saatte 2 ve saatte 3'tür. Yani gelişler arası süre ortalama  $\frac{1}{2}$  saat, gittikçe artan şekilde dağıtılmıştır, ve servis süresi ortalama 20 dakikadır, gittikçe artan şekilde dağıtılmıştır.

---

<sup>43</sup> Bank, a.g.e., s. 260

Tablo 2. 'M/M/1 Kuyruğunun Sabit-Konum Parametreleri'

L	$\frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{p}{1 - p}$
W	$\frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu(1 - p)}$
W <sub>Q</sub>	$\frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{p}{\mu(1 - p)}$
L <sub>Q</sub>	$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{p^2}{1 - p}$
P <sub>n</sub>	$\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (1 - p)p^n$

Dükkanındaki sıfır, bir, iki, üç ve dört veya daha fazla müşteri için olasılıklar ve servisçi kullanımları şöyle hesaplanmıştır.<sup>44</sup>

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3}$$

$$P_1 = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

$$P_2 = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

<sup>44</sup> Bank, a.g.e., s. 261



$$P_3 = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$$

$$P_{\geq 4} = 1 - \sum_{n=0}^3 P_n = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \frac{8}{81} = \frac{16}{81}$$

Hesaplamalardan berberin faal olduğu olasılık  $1 - P_0 = p = 0.67$ 'dir ve böylece berberin aylak kalma olasılığı 0.33'tür. Sistemdeki müşterilerin zaman-ortalama sayıları Tablo 2'de

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3 - 2} = 2 \quad \text{müşteridir.}$$

Gelen birinin sistemde harcadığı ortalama zaman Tablo 2'den şöyle elde edilebilir.

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2}{2} \quad \text{saat.}$$

Müşterinin kuyrukta harcadığı ortalama zaman,

$$W_Q = W - \mu^{-1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{saat olarak elde edilebilir.}$$

Tablo 2 kullanılarak, kuyruktaki ortalama zaman sayısı,

$$L_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{4}{3(1)} = \frac{4}{3} \quad \text{müşteri olarak verilir.}$$

Son olarak,  $w = w_Q + \mu^{-1}$ ,  $\lambda$  ile çarparak,

$$L = L_Q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 \quad \text{müşteri sonucunu getirir.}$$

## Örnek

Servis oranı saatte  $\mu=10$  müşterili M/M/1 kuyruğu için, geliş oranı,  $\lambda$  5 ten 8.64'e %20'lik bir artışla arttığında ve sonrasında  $\lambda=10$ 'a arttığında L ve w'nin nasıl arttığını incelersek,<sup>45</sup>

$\lambda$	5,0	6,0	7,2	8,64	10,0
P	0,500	0,600	0,720	0,864	1,0
L	1,00	1,50	2,57	6,35	$\infty$
W	0,20	0,25	0,36	0,73	$\infty$

Herhangi bir M/G/1 kuyruğu için eğer  $\lambda/\mu \geq 1$  ise bekleme hatları uzunluk olarak sürekli büyüyecektir; uzun dönemli performans ölçümleri, L,w,w<sub>q</sub> ve L sonsuzdur (L=w=w<sub>q</sub>= $\infty$ ); ve sabit-konumlu olasılık dağılımı bulunmaz.  $\lambda < \mu$  için burada görüldüğü gibi, eğer p 1'e yakınsa, bekleme hatları ve gecikmeler uzun olmaya eğilimlidir. Ortalama sistem süresi w, ve sistemdeki ortalama sayının, L, p'nin bir fonksiyonu olarak yüksek ölçüde çizgisel olmadığına dikkat edilmelidir. Örneğin,  $\lambda$  % 20 artarsa, L önce %50 artar (1.00'dan 1.50'ye), sonra %71 (2.57'ye) ve %147 (6.35'e).

## Örnek

Eğer gelişler saatte  $\lambda=10$ 'luk bir hızla oluyorsa ve yönetim iki servisçi seçeneğine sahipse, bu servisçilerden biri saatte  $\mu = 11$  müşteri hızıyla ve ikincisi  $\mu = 12$  müşteri hızıyla çalışıyorsa, faydalar sırasıyla  $p_1 = \lambda/\mu = 10/11=0.909$  ve  $p = \lambda/\mu = 10/12=0.833$  olacaktır. Eğer M/M/1 kuyruğu yaklaşık model olarak kullanılıyorsa, Tablo 2'den, ilk servisçi ile sistemdeki ortalama sayı

$$L_1 = \frac{P_1}{1 - P_1} = 10 \text{ olacaktır.}$$

ve ikinci servisçiyle sistemdeki ortalama sayı

<sup>45</sup> Bank, a.g.e., s. 262

$$L2 = \frac{P2}{1 - P2} = 5 \quad \text{olacaktır.}$$

Böylelikle servis hızında saatte 12 müşteriden 11 müşteriye azalma, sadece % 8.3'lük bir azalma, sistemdeki ortalama sayıda %100'lük bir artış olarak 5'ten 10'a artışla sonuçlanacaktır.

### 12.1.2. M/Ek/1 Kuyruğu.

K düzeninin Erlang dağılımının standart sapması ortalamasının  $\sqrt{k}$ 'ya bölünmesine eşittir ve böylece servis süreleri için Erlang modeli, standart sapmadan daha büyük ortalamayla üstel dağılıma sahip servis zamanlarını yakınlaştırmak için kullanışlı olabilir.  $k \geq 1$  için Erlang rasgele değişkeni yaklaşık olarak normal dağılır, ve  $k = \infty$ , Erlang rasgele değişkeni  $1/\mu$ 'lik sabit bir değere yaklaşır.<sup>46</sup>

M/Ek/1 kuyruğu için sabit-konum parametreleri Tablo 3'de verilmiştir.  $\sigma^2 = 1/K\mu^2$ 'yi Tablo 1'teki M/G/1 kuyruğu için olan formüllerle yer değiştirerek hesaplanabilir.

---

<sup>46</sup> Bank, a.g.e., s. 263

Tablo 3. 'M/Ek/1 Kuyruğu için sabit konum parametreleri'

L	$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{1+k}{2k} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = p + \frac{1+k}{2k} \frac{p^2}{1-p}$
W	$\frac{1}{\mu} + \frac{1+k}{2k} \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \mu^{-1} + \frac{1+k}{2k} \frac{p\mu^{-1}}{1-p}$
W <sub>Q</sub>	$\frac{1+k}{2k} \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1+k}{2k} \frac{p\mu^{-1}}{1-p}$
L <sub>Q</sub>	$\frac{1+k}{2k} \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1+k}{2k} \frac{p^2}{1-p}$

**Örnek**

Poisson sürecine göre saatte bir kişilik bir hızla fiziksel muayene için hastalar gelmektedir. Fiziksel muayene her biri bağımsız üç aşamayı ve 15 dakikalık bir servis zamanı ile artan şekilde dağıtılmıştır. Bir hasta, bir sonraki hasta tedaviye kabul edilmeden önce her üç aşamadan da geçmek zorundadır. Geciken hastaların ortalama sayısı  $L$ , bu sistem için hesaplayalım.

Eğer hastalar bu tedavi şeklini izlerse, hizmet-zaman dağılımı Erlang düzeni  $k=3$  olacaktır. Gerekli parametreler  $\lambda=1/60$ /dakika ve  $\mu=1/45$ /dakika; böylece,

$$L_Q = \frac{1+3}{2(3)} \frac{(1/60)^2}{(1/45)(1/45-1/60)} = \frac{2}{3} \left( \frac{135}{60} \right) = 1 \frac{1}{2} \quad \text{hasta.}$$

## Örnek

Teknisyenlerin bir alet deposuna saatte  $\lambda=10$ 'luk bir Poisson hızıyla rasgele girdiğini varsayım. Tek bir alet memurunun ortalama olarak bir teknisyene yaklaşık 2 dakikalık bir standart sapmayla ortalama 4 dakikada hizmet verdiği bilinmektedir. Servis sürelerinin k düzeninde bir Erlang dağılımını takip ettiği varsayılmaktadır. Ortalama  $E(x)=1/\mu=4$  dakika ve varyans  $V(x)=1/k\mu^2=2^2$  dakika<sup>2</sup> dir ki bu  $k=(E(x))^2/V(x)=4^2/2^2=4$ 'ü ifade eder. Teknisyenlerin saatte 15.00\$ kazandığını varsayalım. Hatlarda üretim dışı bekleme ücreti teknisyenin alet deposuna her ziyareti için 15 \$ WQ'dur. Ortalama olarak saatte  $\lambda=10$  ziyaret olduğundan geciken teknisyenlerin saat başına maliyeti,  $LQ=\lambda WQ$  eşitliğini kullanarak  $\lambda(15\$WQ)=\$15 LQ$ 'dur. Tablo 3 ile, servis hızı  $\mu=1/4/\text{dakika}=15/\text{saat}$  olduğundan teknisyen başına gecikme

$$WQ = \frac{1+k}{2k} \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{5}{8} \frac{10}{15(15-10)} = 0.0833 \quad \text{saattir.}$$

ve bekleme hattındaki teknisyenin ortalama sayısı

$$LQ = \lambda WQ = 0.833 \text{ t'ur.}$$

Böylelikle, teknisyen başına her ziyaretin maliyeti 1.25\$ ve saat başına ortalama maliyet 12.50\$'dır. Tablo 3'te, bir Erlang düzen k dağılımı=1 hızla büyüyen bir dağılım olduğu için, M/M/1 kuyruğu için k=1 sabit-konum parametreleri sağlar.

### 12.1.3. M/D/1 Kuyruğu

Şimdi servis süresinin bir değişkenliğinin olmadığını, yani  $\sigma^2 = 0$  varsayalım ki bu bütün servis sürelerinin sabit bir değerde  $1/M$  olduğunu varsayalım. Sabit-konum parametreleri Tablo 4 de verilmiştir.  $\sigma^2 = 0$ 'ı yer değiştirerek Tablo 3'ten veya  $\lambda$  ve  $\mu$ 'yi sabit tutarak  $k=\infty$  olmasına izin vererek Tablo 3'den elde edilebilir. M/D/1 kuyruğu için ortalama hat uzunluğu  $L$ , M/M/1 kuyruğunun ortalama hat uzunluğunun yarısı

olduğunu azaltabileceğini gösterir. (Bekleme zamanları da servis sürelerinin varyansıya benzer biçimde etkilenir).<sup>47</sup>

Tablo 4. 'M/D/1 kuyruğu için sabit konum parametreleri'

L	$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = p + \frac{1}{2} \frac{p^2}{1 - p}$
W	$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = p^{-1} + \frac{1}{2} \frac{p\mu^{-1}}{1 - p}$
W <sub>Q</sub>	$\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{1}{2} \frac{p\mu^{-1}}{1 - p}$
LQ	$\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{1}{2} \frac{p^2}{1 - p}$

### Örnek

Bir havaalanına gelişlerin hepsi aynı girişe yönlendirilmiştir. Günün belli bir vaktinde bu gelişler saatte 30 olup Poisson dağılımına sahiptir. Bir uçağın iniş süresi sabit 90 saniyedir. Bu  $1/\mu=1.5$  dakika, veya  $\mu=2/3$ /dakikadır. Girişten yararlanma

$$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$$

Sabit –konum parametreleri şöyle verilmiştir.<sup>48</sup>

$$LQ = \frac{(3/4)^2}{2(1 - 3/4)} = \frac{9}{8} = 1.125 \text{ uçak}$$

$$WQ = \frac{LQ}{\lambda} = \frac{9/8}{1/2} = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ dakika}$$

<sup>47</sup> Bank, a.g.e., s. 264

<sup>48</sup> Bank, a.g.e., s. 265

$$w = WQ + \frac{1}{\mu} = 2,25 + 1,5 = 3,75 \text{ dakika}$$

$$L = LQ + \frac{\lambda}{\mu} = 1,125 + 0,75 = 1,875 \text{ uçak}$$

Eğer geciken bir uçak saatte ortalama 5000\$'lık petrol yakıyorsa ortalama yakıt maliyeti saatte \$1125  $LQ = \$5625$ 'dir. Geciken uçak başına ortalama yakıt maliyeti 5000\$.  $WQ = 5000 \$(2,25/60) = 187.50\$$ 'dir.

Fayda ve servis değişebilirliğinin etkileri, eğer hatlar çok uzunsa, herhangi bir M/G/1 kuyruğu için, servisçi faydası  $p$  düşünülerek veya servis zamanı değişebilirliğini,  $Q$  düşürerek azaltılabilir. Bu yalnızca M/G/1 kuyruğu için değil bütün kuyruklar için geçerlidir. Fayda faktörü  $p$  geliş hızını  $\lambda$  azaltarak, servis hızını  $\mu$  artırarak veya servisçi sayısını artırarak düşürebilir çünkü genelde  $c$  paralel servisçiler sayısı iken  $p = \lambda / c\mu$ 'dir.

Kuyruktaki ortalama sabit-konum sayısı  $L$ , pek çok sayıdaki farklı değişim katsayısı için fayda  $p$ 'ye karşılık olarak işaretlenmiştir. Olumlu tesadüfi değişken  $X$  in değişim katsayısı ( $CV$ )

$$(CV)^2 = \frac{V(X)}{(E(X))^2}$$

ile tanımlanır ve bir dağılımın değişebilirlik ölçümüdür. Değeri yükseldikçe dağılım beklenen değerine nispeten daha değişkendir. Karar verici servis süreleri için  $V(x) = 1/\mu^2$  ve  $E(x) = 1/\mu$ , böylece  $cv = \sqrt{n}$  olur. Servis hızı  $\mu$ , ortalama servis süresi  $E(x) = 1/\mu$  ve varyansı  $V(x) = 1/\mu^2$  olan artan servis süreleri için  $cv = 1$ 'dir. Eğer servis zamanları ortalamalarından daha büyük standart sapmaya sahipse (yani, eğer  $cv > 1$  ise), arzu edilen herhangi bir, 1'den büyük değişim katsayısını gerçekleştirebilecek aşırı-hızla artan dağılım iyi bir model sağlar.

Herhangi bir M/G/1 kuyruğu için L formülü  $(cv)^2=Q^2/(1/\mu)^2=Q^2\mu^2$  olduğunu fark ederek değişim katsayıları açısından tekrar yazılabilir. <sup>49</sup>Bu yüzden,

$$\begin{aligned} LQ &= \frac{p^2(1+Q^2\mu^2)}{2(1-p)} \\ &= \frac{p^2(1+(cv)^2)}{2(1-p)} \\ &= \left(\frac{p^2}{1-p}\right)\left(\frac{1+(cv)^2}{2}\right) \end{aligned}$$

ilk ifade  $p^2/(1-p)$  M/M/1 kuyruğu için LQ'dur. İkinci ifade,  $(1+(cv)^2)/2$ , hızla artmayan servis-zaman dağılımı açısından M/M/1 formülünü düzeltir. WQ için formül aynı düzeltme faktörü uygulanarak karşılık gelen M/M/1 formülünden elde edilebilir.

## 12.2. Poisson ile Tek Bir Servisçinin Hizmet Verdiği Kuyruklar

### Gelenler ve Sınırlı Kapasite: M/M/1/N/∞

Farz edelim ki hizmet süreleri üslü bir şekilde  $\mu$  oranında dağılmış olsun, tek bir servisçi var ve toplam işlem kapasitesi N müşteri kadar Eğer sistem doluyken gelen olursa, geri döner ve sisteme giremez. Poisson işlemine göre gelenlerin zaman birimi başına  $\lambda$  oranında rasgele geldiklerini varsayalım.  $\lambda$  ve  $\mu$  hangi değeri alırsa alsın; M/M/1/N kuyruğunun, Tablo 5 'de verildiği gibi, genellikle dalgalanma göstermeyen bir istatistiksel dengesi vardır. Geliş oranı  $\lambda$ , hizmet oranı  $\mu$ 'ye eşit olduğunda, sistemdeki ortalama rakam L;  $N/2$ 'ye eşittir, bu da sistemin yarı dolu, ya da yarı boş olduğuna işarettir. Tablo 5'de  $\rho=\lambda / \mu$  miktarı genellikle dalgalanma göstermeyen parametreleri tanımlamak için kullanılmıştır.<sup>50</sup>

<sup>49</sup> Bank, a.g.e., s. 266

<sup>50</sup> Bank, a.g.e., s. 267



Tablo 5. 'M/M/1/N kuyruğu için nispeten dalgalanma göstermeyen parametreler'

L	$\left\{ \frac{a[1-(N+1)a^N + Na^{N+1}]}{(1-a^{N+1})(1-a)} \right\}$	$\lambda \neq \mu$
	$\frac{N}{2}$	$\lambda = \mu$
1-P <sub>n</sub>	$\left\{ \frac{1-a^N}{1-a^{N+1}} \right\}$	$\lambda \neq \mu$
	$\frac{N}{N+1}$	$\lambda = \mu$
$\lambda_e$	$\lambda(1-P_N) = \mu(1-P_0) = \lambda_e$	
p	$\frac{\lambda_e}{\mu} = 1 - P_0$	
W	$\frac{L}{\lambda_e}$	
W <sub>Q</sub>	$w - \frac{1}{\mu}$	
L <sub>Q</sub>	$\lambda_e W_Q = L - (1 - P_0)$	
P <sub>n</sub>	$\left\{ \frac{(1-a)a^n}{1-a^{N+1}} \right\}$	$\lambda \neq \mu$
		n=0,1,2,...,N
	$\frac{1}{N+1}$	$\lambda = \mu$

Geçerli geliş oranı  $\lambda_e$  zaman birimi içerisinde sisteme giren ve sistemde kalanların ortalama sayısı olarak tanımlanmıştır. Bütün sistemler için,  $\lambda_e \leq \lambda$ ; limitsiz kapasitesi olan sistemler için,  $\lambda_e = \lambda$ ; fakat şimdi olduğu gibi dolu olduğundan müşterileri geri çeviren sistemler için,  $\lambda_e < \lambda$ 'dir.  $1-P_N$ ; müşterinin geldikten sonra yer bulup sisteme girme olasılığı olduğundan, geçerli geliş oranı,  $\lambda_e = \lambda (1-P_N)$ 'e ile

hesaplanır. Sistemde harcanan ortalama süre  $W$  ve kuyrukta harcanan ortalama süre  $W_Q$ 'yu hesaplamak için Little'in eşitliğini kullanırken  $\lambda$  ile  $\lambda_e$  yer değiştirmelidir.

$\lambda \neq \mu$  Tablo 5 yardımıyla sistemin dolu olma olasılığı  $P_N = \frac{(1-a)d^\mu}{1-a^{N+1}}$  ile verilir.

$a = \lambda / \mu$  olduğunda sistemin boş olma olasılığı  $P_0 = \frac{1-a}{1-a^{N+1}}$ 'dir.  $a=1$  ya da  $\lambda=\mu$  olduğunda, tüm ifadeleri birbirine eşittir, bu yüzden  $P_0=P_N= 1/(N+1)$ 'dir. beklenildiği gibi,  $\alpha$  arttıkça  $P_N$  artar ve  $P_0$  azalır yani bu; hizmete oranla, geliş oranının daha fazla olmasıdır.

### Örnek

Önceki örnek de tanımlanan kadın/erkek berber dükkanı, biri hizmet görmekte ve ikisi beklemekte olan üç müşteriyi olabilir. Sistem doğru olduğundan, bunun haricindeki müşteriler geri döner. Arz edilen yük, önceden belirlendiği gibi,  $\lambda / M = 2/3$  'dür. Sistemde 3 müşteri olma olasılığı şöyle hesaplanır. <sup>51</sup>

$$P_N = P_3 = \frac{(1-2/3)(2/3)}{1-(2/3)^4} = \frac{8}{65} = 0,123$$

Dükkana gelmesi beklenen müşteri sayısı :

$$L = \frac{2/3[1-4(2/3)^3+3(2/3)^4]}{[1-2/3]^4[1-2/3]} = \frac{66}{65} = 1.015 \quad \text{müşteriler}$$

Ve geçerli geliş oranı

$$\lambda_e = 2\left(1 - \frac{8}{65}\right) = 2\left(\frac{57}{65}\right) = \frac{114}{65} = 1.754 \quad \text{bir saatteki müşteri sayısı}$$

<sup>51</sup> Bank, a.g.e., s. 268

Böylece W şöyle hesaplanabilir

$$W = \frac{1.015}{1.754} = 0.579 \text{ saat}$$

$L_Q$ 'yu hesaplamak için önce  $P_0$ 'yu şu şekilde belirleyin

$$P_0 = \frac{(1 - 2/3)(2/3)^0}{1 - (2/3)^4} = \frac{1/3}{65/81} = \frac{27}{65} = 0.415$$

Daha sonra kuyruğun ortalama uzunluğu şöyle bulunur

$1 - P_0 = 0,585$ 'in hizmet gören ortalama müşteri sayısı olduğunu ya da başka bir deyişle servis yapan tek kişinin meşgul olma olasılığını unutulmamalıdır. Böylece servisçinin kullanımı ya da uzun vadede servisçinin meşgul olma oranı  $P = 1 - P_0 = (\lambda_e / \mu) = 0,585$  şeklinde verilir. Son olarak Little'in eşitliği ile kuyrukla bekleme süresi:

$$W_Q = \frac{0,43}{1,754} = 0,245 \text{ saat olarak belirlenir.}$$

Bu sonuçları, aynı berber dükkanında sisteme sınırlı kapasite girmeden önceki sonuçlarla karşılaştırılması gerekir. Özellikle sınırlı kapasitesi olan sistemlerde arz edilen yük  $\lambda / \mu$ 'nin pozitif değeri olabilir ve bu değer artık servisçinin kullanımı  $P = \lambda_e / \mu$ 'ye eşit değildir. Sistemde sınırlı kapasite devreye girince, servisçinin kullanım oranının % 67'den % 58'e düşmektedir.

$P_0$  ve  $P_3$  hesaplanmış olduğundan, L değerini kontrol etmek kolaydır,

$$L = \sum_{n=1}^N n \cdot P_n. \text{ Bu kontrolü yapabilmek için, } P_1 \text{ ve } P_2 \text{ yi hesaplamak}$$

gerekir:

$$P_1 = \frac{(1 - 2/3)(2/3)}{1 - (2/3)^4} = \frac{18}{65} = 0.277$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

$$P_2 = 1 - P_0 - P_1 - P_3$$

$$= 1 - \frac{27}{65} - \frac{18}{65} - \frac{8}{65} = \frac{12}{65} = 0.185$$

Daha sonra bir önceki sonucu doğrulayan şu sonuca varabiliriz:

$$L = 0 \left( \frac{27}{65} \right) + 1 \left( \frac{18}{65} \right) + 2 \left( \frac{12}{65} \right) + 3 \left( \frac{8}{65} \right)$$

$$= \frac{0 + 18 + 24 + 24}{65} = \frac{66}{65} = 1.015$$

### 13. ÇOK KANALLI KUYRUK MODELLERİ

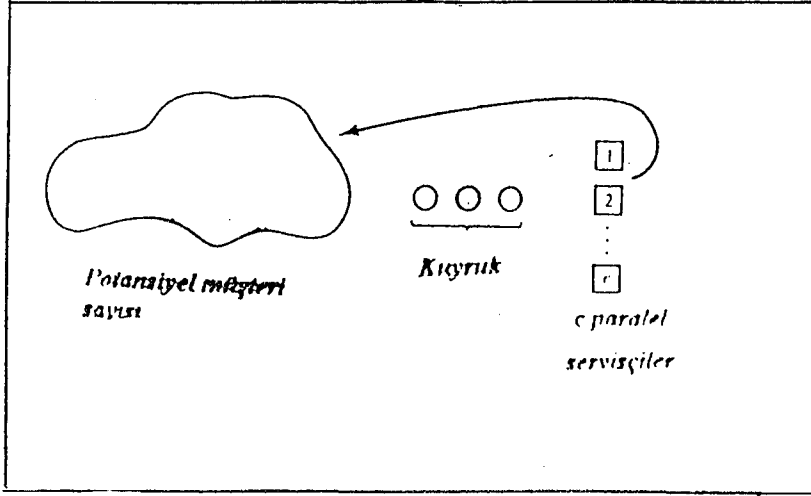
#### 13.1. Birden Fazla Servisçinin Hizmet Verdiği Kuyruklar : M / M / C / ∞ / ∞

Paralel bir şekilde işleyen c kanalları olduğunu varsayalım. Bu kanallardan her birisi,  $1/\mu$  ortalama ile bağımsız ve aynı üslü hizmet süresi dağılımına sahiptir. Geliş debisi  $\lambda$  ve Poisson dağılımına sahiptir. Gelenler tek bir kuyruğa katılır ve boşalan ilk servis kanalına girerler. Kuyruk sistemi, Şekil 7'da gösterilmiştir. Eğer sistemdeki sayı  $n < c$  ise gelenler mevcut kanala girerler. Fakat  $n \geq c$  ise, yeni gelenler olduğu takdirde kuyruk uzar.<sup>52</sup>

Arz edilen yük  $\lambda/\mu$  şeklinde belirlenir. Servisçilerin tümü dolu olduğunda eğer  $\lambda \geq c\mu$  ise, gelenlerin oranı, sistemdeki maksimum servis oranından fazladır ya da eşittir.

<sup>52</sup> Bank, a.g.e., s. 269

Böylece sistem yükü kaldıramaz ve istatistiksel bir denge sağlanamaz. Eğer  $\lambda > c\mu$  ise, bekleme hattı zaman birimi başına ( $\lambda=c\mu$ ) müşteri oranında uzar. Zaman birimi başına sisteme giren müşteri oranı  $\lambda$ . Fakat sistemden çıkan maksimum müşteri oranı, zaman birimi başına  $c\mu$ 'dir.

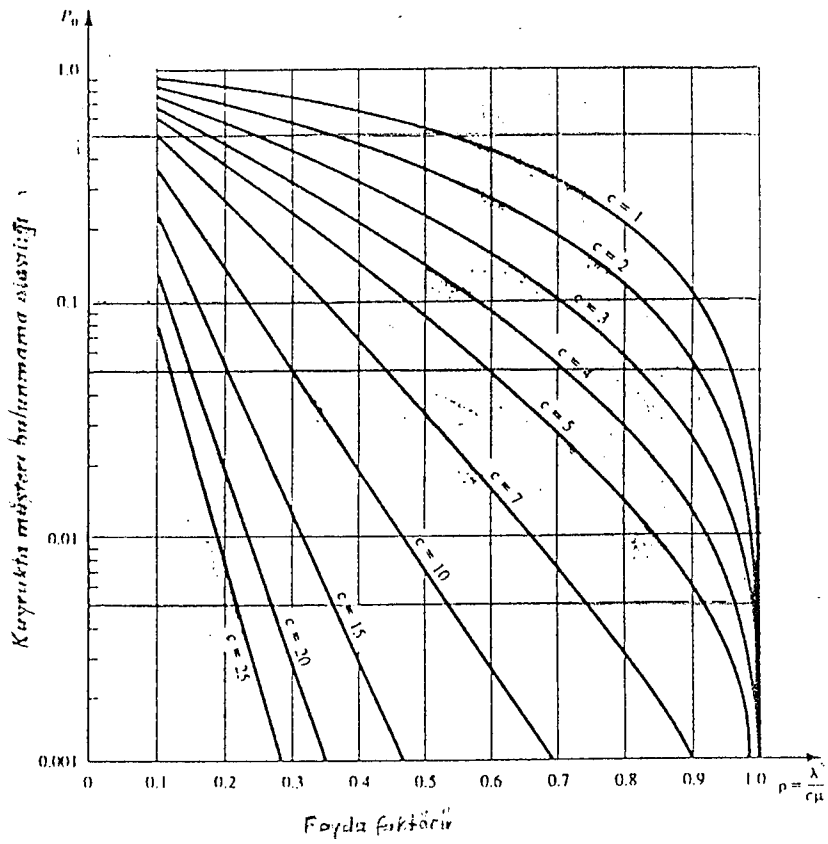


Şekil 7 Birden Fazla Servisçinin Bulunduğu Kuyruk Sistemi

M / M / C kuyruğunun istatistiksel denge sağlayabilmesi için, arz edilen yükün  $\lambda / \mu = P$  de olduğu gibi, 1 servisçinin kullanımı  $\lambda / \mu < c$ 'yi sağlaması gerekir. Tablo 6'da genellikle dalgalanma göstermeyen parametreler sıralanmıştır. Performans neticelerinin çoğu  $P_0$

şeklinde oldukça basit olarak ifade edilebilir,  $L(\infty)$ 'un istatistiksel eşitlikte sistemdeki sayıyı gösteren geliş güzel değişken olduğu durumlarda sistemin boş olma olasılığı,  $\sum_n^{\infty} = cP_n$ , tüm servisçilerin meşgul olma olasılığı ise  $P(L(\infty) \geq c)$  dir. Böylece,  $P(L(\infty)=n) = P_n$ ,  $n = 0,1,2,\dots$ . Verimlilik ölçümlerinin tümünü hesaplamak için  $P_0$  değeri gereklidir ve  $P_0$  eşitliği; daha önceki durumlardan daha karmaşıktır. Bununla birlikte  $P_0$  yalnızca  $c$  ve  $p$ 'ye bağlıdır.  $\beta$ 'ye karşılık,  $P_0$ 'nun farklı  $c$  değerlerine göre  $P_0$ 'yu yaklaşık olarak hesaplamak mümkündür. Şekil 8' de  $p$  ye karşı farklı  $c$  değerlerine göre  $L$ 'nin grafiği görülmektedir.<sup>53</sup>

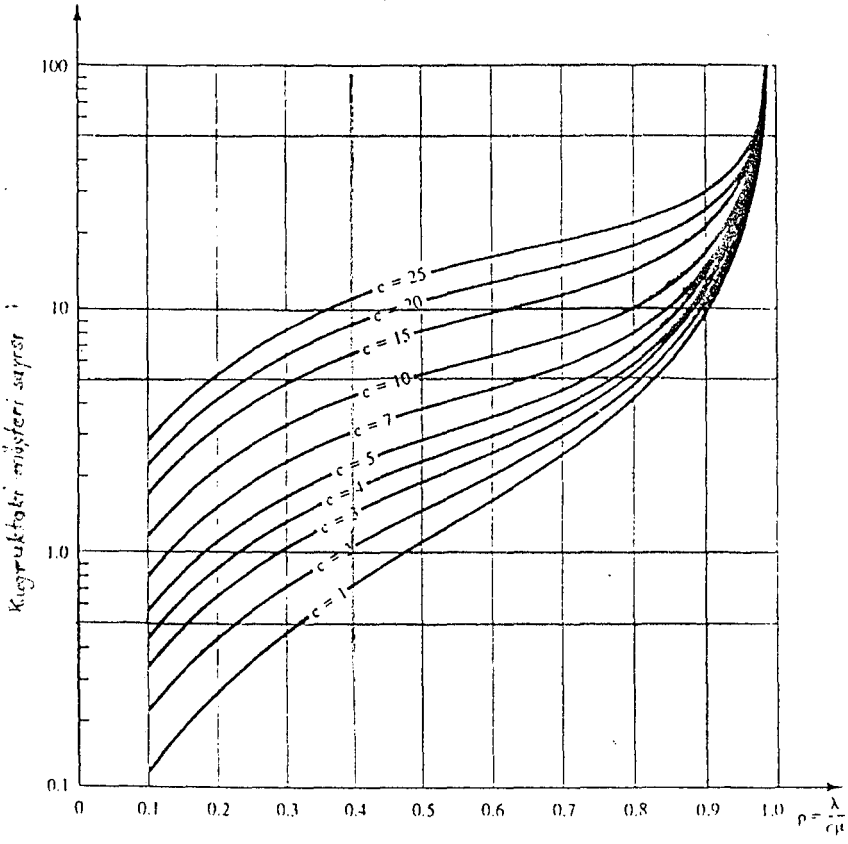
<sup>53</sup> Bank, a.g.e., s. 269



Şekil .8 M/M/C/∞ Modeli İçin P değerleri

Tablo 6. 'M / M / c kuyruğu için genellikle dalgalanma göstermeyen parametreler.'

P	$\frac{\lambda}{c\mu}$
$P_0$	$\left\{ \left[ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right] + \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^c \left( \frac{1}{c!} \right) \left( \frac{c\mu}{c\mu - \lambda} \right) \right\}^{-1}$ $= \left\{ \left[ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right] + \left[ (cp)^c \left( \frac{1}{c!} \right) \frac{1}{1-p} \right] \right\}^{-1}$
$P(L(\infty) \geq c)$	$\frac{(\lambda/\mu)^c P_0}{c!(1 - \lambda/c\mu)} = \frac{(cp)^c P_0}{c!(1-p)}$
L	$cp + \frac{(cp)^{c+1} P_0}{c(c!)(1-p)^2} = cp + \frac{pP(L(\infty) \geq c)}{1-p}$
W	$\frac{L}{\lambda}$
$W_Q$	$w - \frac{1}{\mu}$
$L_Q$	$\lambda w_Q = \frac{(cp)^{c+1} P_0}{c(c!)(1-p)^2} = \frac{pP(L(\infty) \geq c)}{1-p}$
L-L <sub>Q</sub>	$\frac{\lambda}{\mu} = cp$



Fayda sağlama faktörü

Şekil .9 M/M/C/∞ Modeli İçin P değerleri



**Örnek:**

Kuyruk teorisi ile ilgili daha önceki örneklerin çoğu, alet kutuları ile ilgili problemlere uygulanmıştır. Çok farklı meslek gruplarından olan tamirciler servis için geldiklerinde, alet kutuları ile ilgilenen görevlilerin dağılımının Poisson dağılımı gelenlerin oranının, dakikada iki tamirci olduğunu ve bunlara dağılan üslü hizmet süresinin, ortalama 40 saniye olduğunu varsayalım.<sup>54</sup>

Şimdi, dakikada  $\lambda=2$  ve  $\mu=60/40 = 3/2$  dir.  $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{3/2} = \frac{4}{3} > 1$  olduğundan,

ortaya çıkan yük 1'den büyüktür ve sistemde dalgalanma göstermeyen bir denge sağlanabilmesi için birden fazla servisçiye ihtiyaç vardır.

Sistemde dalgalanma olmaması için  $c > 2$ ,  $p = 4 / (3c)$  her servisçinin uzun vadede meşgul olması beklenen süredir.  $c=2$  görevli olsun. Önce, şu şekilde  $P_0$  hesaplanır:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^1 \frac{(4/3)^n}{n!} + \left( \frac{4}{3} \right)^2 \left( \frac{1}{2!} \right) \left[ \frac{2(3/2)}{2(3/2) - 2} \right] \right\}^{-1}$$

$$= \left\{ 1 + \frac{4}{3} + \left( \frac{16}{9} \right) \left( \frac{1}{2} \right) (3) \right\}^{-1} = \left( \frac{15}{3} \right)^{-1} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Ardından, tüm servisçilerin meşgul olma ihtimali şöyle verilir:

$$P(L(\infty) \geq 2) = \frac{(4/3)^2}{2!(1 - 2/3)} \left( \frac{1}{5} \right) = \left( \frac{8}{3} \right) \left( \frac{1}{5} \right) = \frac{8}{15} = 0.533$$

Böylece ortalama bir süre içerisinde tamircilerin bekleme hattı uzunluğu:

$$L_Q = \frac{(2/3)(8/15)}{1 - 2/3} = 1.07$$

<sup>54</sup> Bank, a.g.e., s. 272

ve ortalama bir süre içerisinde sistemde olan tamirci sayısı da:

$$L=LQ+\frac{\lambda}{\mu}=\frac{16}{15}+\frac{4}{3}=\frac{12}{5}=2,4$$

Little'in eşitliğini kullanarak, bir tamircinin alet kutusunda geçirdiği süre:

$$W=\frac{L}{\lambda}=\frac{2.4}{2}=1.2dk$$

görevliyi geçirmek için harcadığı süre ise:

$$W_Q=W-\frac{1}{\mu}=1.2-\frac{2}{3}=0.533dk$$

### Örnek

Önceki örnekteki verileri kullanarak,  $P_o$ 'yu hesaplayalım. Önce şunu hesaplayalım,

$$P=\frac{\lambda}{c\mu}=\frac{2}{2(3/2)}=\frac{2}{3}=0.667$$

Şekil 9. 'da, yatay çizgi üzerindeki 0,667'nin fayda sağlanım faktörü, dikey çizgi, 0,2'nin  $P_o$  için aldığı değeri verir. Aynı şekilde  $L=2,4$  değeri, şekil 8' in dikey çizgisinden okunur.

### 13.2. M / G / c / ∞ kuyruğu

M / G / 1 kuyruğu için;  $L_Q$  ve  $W_Q$  formüllerinin, benzeri bir formül olan M/M/1 formülünden, M / G / c kuyruğu için yaklaşık formüller, aynı düzeltme faktörünü  $L_Q$  ve  $W_Q$  için M / M / c formülüne uygulayarak elde edilebilir. ( $1 < c < \infty$  için kesin bir formül yoktur) cv, 1'e ne kadar yakınsa, tahmin o kadar doğrudur.

#### Örnek

Farz edelim ki alet kutusundaki müşteriler için servis süreleri üslü olarak dağılmamış olsun. Fakat 30 saniyelik bir standart sapma olduğu bilinsin. Bu durumda M / M / c'den ziyade, M / G / c modelimiz vardır. Ortalama servis süresi 40 saniye olduğundan, servis süresi değişkeninin katsayısı

$$Cv = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} < 1$$

Böylece  $L_Q$  ve  $W_Q$ 'nin doğruluğu; düzeltme faktörü

$$\frac{1 + (Cv)^2}{2} = \frac{1 + (3/4)^2}{2} = \frac{25}{32} = 0,78$$

ile geliştirilebilir.

Örneğin, c=2 görevli olduğunda:  $L_Q = (0,78) (1,07) = 0,83$  tamirci vardır.

Servis süresi değişkeninin katsayısı, 1'den az olduğu için,  $L_Q$  ile ölçülen sistemdeki yığılma, benzeri bir model olan M / M / 2 modelinkinden daha azdır.

Düzeltilme faktörü sadece  $L_Q$  ve  $W_Q$  formüllerine uygulanabilir. Bu durumda Little'in formülü L ve W'yi hesaplamak için kullanılır. Ne yazık ki dalgalanmanın olmadığı olasılıklar olan  $P_n$ 'yi düzeltmek için genel bir yöntem yoktur.<sup>55</sup>

---

<sup>55</sup> Bank, a.g.e., s. 274

### 13.3. Servisçilerin Sayısı Çok Fazla Olduğundan (M / G / ∞ / ∞)

Servisçilerin sayısını çok fazla olarak düşünmenin uygun olacağı en az üç durum vardır: İlki, her müşterinin, kendisine ait bir servisçisi olduğundan; başka bir deyişle self servis sistemlerde; ikincisi servis kapasitesi, servis talebinden fazla olduğunda; yani çok fazla servisçisi olan bir sistemde ve üçüncüsü Müşterilerin bekletilmemesi için, kaç tane servisçiye ihtiyaç olduğunu bilmek istediğimizde M / G / ∞ kuyruğu için dalgalanma göstermeyen parametreler, tablo 7.9'da liste olarak verilmiştir. Tabloda,  $\lambda$ : Poisson geliş işleminin geliş oranı,  $1 / \mu$  ise, genel servis süresi dağılımı içerisinde (üslü, sabit ya da başka bir şekilde) beklenen servis süresidir.

Tablo 7 'M / G / ∞ kuyruğu için dalgalanma göstermeyen parametreler.

$P_0$	$e^{-\lambda/\mu}$
$W$	$\frac{1}{\mu}$
$W_Q$	0
$L$	$\frac{\lambda}{\mu}$
$L_Q$	0
$P_n$	$\frac{e^{-\lambda/\mu} (\lambda/\mu)^n}{n!}, n = 0, 1, \dots$

#### Örnek

Yeni on-line bilgisayar enformasyon sistemini tanıtmadan önce, The Connection şirketinin, aynı anda kaybedilebilecek kullanıcı sayısı açısından, sistem kapasitelerinin planlamaları gerekmektedir. Poisson sürecine göre, eğer servis başarılıysa, saatte  $\lambda=500$  oranında müşterinin kaydedilebilmesi ve ortalama olarak  $1/\mu = 20$  dakika (ya da 1/3 saat) hatta kalmaları gerekmektedir. Gerçek sistemde, aynı andaki kullanıcılar için bir üst limit olur. Fakat planlama yaparken The Connection şirketi, eş zamanlı kullanıcıların sonsuz olduğunu varsayabilir. Sistemin M / G / ∞ modeli, eş zamanlı

kullanıcıların  $L = \lambda / \mu = 500 (3) = 1500$  olduğunu gösterir, bu durumda kapasitenin kesinlikle 1500'den fazla olması gerekir. %95'lik bir süre içerisinde uygun kapasiteye sahip olabilmek için, The Connection şirketi eş zamanlı kullanıcıların en küçük değer  $c$ 'yi almasını sağlamalıdır:

$$P(L(\infty) \leq c) = \sum_{n=0}^c P_n = \sum_{n=0}^c \frac{e^{-1500} (1500)^n}{n!} \geq 0,95$$

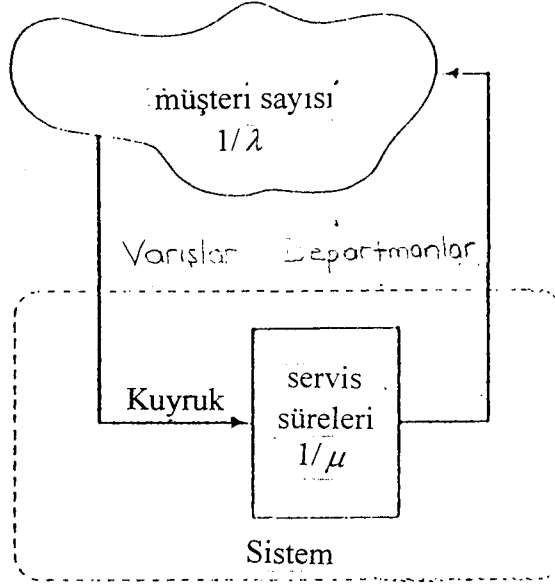
$c$  kapasitesi = 1564 eş zamanlı kullanıcı bu gerçeği yerine getirir.

### 13.4 Sınırlı Topluluk Modellerinin Dalgalanma Göstermeyen Tutumu (M / M / c / K / K)

Pratik problemlerin çoğuna, sonsuz sayıda başvuran topluluk olduğunu varsaymak, geçersiz sonuçlara neden olur çünkü, başvuran kişi sayısı aslında azdır. Başvuran kişi sayısı az olduğunda, sistemde bir ya da iki müşterinin bulunmasının; daha sonraki gelişlerdeki dağılım üzerinde büyük etkisi vardır ve sonsuz sayıda topluluk modeli yanıtlanabilir. Zaman zaman bozulup, tamir gerektiren makinalar, ya da yedek parça veya alet için kuyruğa giren küçük bir grup tamirci, tipik örnekler arasındadır. Aşırı uç durumlarda, eğer tüm makinalar bozulmuşsa yeni gelişler (yeni bozulan makinalar) olamaz, benzeri şekilde eğer tüm tamirciler kuyrukta olsaydı, alet ya da yedek parça için başkalarının gelmesi mümkün olmazdı.<sup>56</sup>

$K$  müşteri ile belli sayıda başvuran topluluk düştüğümüzde bir servis başvurusunun sonuçlanması ile, bir sonraki müşterinin çağrılması arasında geçen sürenin zaman birimi başına üslü olarak  $1 / \lambda$  ortalama ile dağıldığı farz edilsin, servis süreleri de zaman birimi başına üslü olarak  $1 / \mu$  ortalama ile dağılır;  $c$  kadar paralel servisçisi vardır ve sistem kapasitesi  $K$ 'dır, bu durumda gelenlerin tümü servis için kalır. Böyle bir sistem, şekil 11'de gösterilmiştir.

<sup>56</sup> Bank, a.g.e., s. 275



Şekil 10. 'Belli sayıda gelenlerin oluşturduğu kuyruk modeli'

Bu model için dalgalanma göstermeyen parametreleri Tablo 8'de gösterilmiştir. <sup>57</sup>

Tablo 8. 'M / M / c / K / K kuyruğu için dalgalanma göstermeyen parametreler.'

$P_0$	$\left[ \sum_{n=0}^{c-1} \left( \frac{K}{n} \right) \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=c}^K \frac{K!}{(K-n)!c!c^{n-c}} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1}$	
$P_n$	$\left\{ \left( \frac{K}{n} \right) \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 \right\}$	$n=0,1,\dots,c-1$
	$\frac{K!}{(K-n)!c!c^{n-c}} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0,$	$n=c,c+1,\dots,K$
$L$	$\sum_{n=0}^K nP_n$	
$L_Q$	$\sum_{n=c+1}^K (n-c)P_n$	
$\lambda e$	$\sum_{n=0}^K (K-n)\lambda P_n$	
$w$	$L / \lambda e$	
$W_Q$	$L_Q / \lambda e$	
$P$	$\frac{L - L_Q}{c} = \frac{\lambda e}{c\mu}$	

<sup>57</sup> Bank, a.g.e., s. 276

Elektronik çubuk hesaplama programı ya da sembolik hesap programı, bu karmaşık formülleri değerlendirmek için faydalıdır. <sup>58</sup>

Örneğin,

```

MmcKK := proc(lambda, mu, c, K)
    * return steady-state probabilities for M/M/c/K/K queue
    * notice that p(n+1,1) is p_n, n=0,.....K
    local crho, Kfac, cfac, p, n;
    P : Matrix(K+1, 1, 0);
    Crho :=lambda/mu;
    Kfac := K!;
    Cfac :=c!;
    P(1,1):= sum((Kfac/(n!*(K-n)!))*crho^n, n=0...c-1) +
        Sum((Kfac/(c^(n-c)*(K-n)!cfac))*crho^n, n=c....K);
    P(1,1) :=1/p(1,1);
    For n from 1 to c-1
    Do
        P(n+1,1) :=p(1,1)*(Kfac/(n!*(K-n)!)*crho^n;
    Od;
    For n from c to K
    Do
        P(n+1,1) := p(1,1)*(Kfac/c^(n-c)*(K-n)!)*crho^n;
    Od;
    RETURN (evalm(p))

    End;

```

Diğer bir yaklaşımda Bank ve Heikes [1984], Hillier ve Yu [1981], Peck ve Hazelwood [1958] ya da Desloux [1962]'ninkiler gibi, daha önceden hesaplanmış kuyruk tablolarını kullanmaktadır. Etkili geliş oranı  $\lambda_0$ 'nin değişik geçerli tanımları vardır:

<sup>58</sup> Bank, a.g.e., s. 277



$\lambda_e$  = Müşterilerin kuyruğa uzun vadede etkili geliş oranı

$\lambda_e$  = Servise giren müşterilerin, uzun vadede etkili geliş oranı

$\lambda_e$  = Uzun vadede çağrılan topluluk arasına giren müşterilerin oranı

$\lambda_e$  = Uzun vadede, çağrılan topluluk arasından çıkan müşterilerin oranı

## Örnek

On tane pres makinesinden sorumlu iki işçi var. Makineler ortalama 20 dakika çalışıyor ve sonra ortalama 5 dakika servis süresi gerekiyor, sürelerin her ikisi de üslü olarak dağıtılmış. O halde,  $\lambda=1/20$  ve  $\mu=1/5$ . Bu sistem için farklı performans ölçümlerini belirleyelim.<sup>59</sup>

Tüm performans ölçümleri  $P_o$ 'ya bağlıdır. Bu da:

$$\left[ \sum_{n=0}^{2-1} \left( \frac{10}{n} \right) \left( \frac{5}{20} \right)^n + \sum_{n=c}^{10} \frac{10!}{(10-n)!2^{n-2}} \left( \frac{5}{20} \right)^n \right]^{-1} = 0,065$$

$P_o$ 'yu kullanarak, servis için bekleyen makinaların ortalama sayısından  $P_n$ 'yi elde edebiliriz:

$$L_Q = \sum_{n=3}^{10} (n-2)P_n = 1,46 \text{ makina}$$

Etkili geliş oranı:

$$\lambda_e = \sum_{n=0}^{10} (10-n) \left( \frac{1}{20} \right) P_n = 0,342 \text{ makina/dakika}$$

---

<sup>59</sup> Bank, a.g.e., s. 277

makine/dakika ve ortalama olarak kuyrukta bekleme süresi:

$$W_Q = L_Q / \lambda e = 4.27 = \text{dakikadır.}$$

Aynı şekilde servis gören ya da servis görmeyi bekleyen makinelerin umulan sayısını da hesaplayabiliriz:

$$L = \sum_{n=0}^{10} nP_n = 3,17 \text{ makinalar}$$

makine servis görmekte olan makinelerin ortalama sayısı ise:

$$L-LQ=3.17-1.46=1.71 \text{ makinalar}$$

Makinelerin, çalışmaya devam etmesi, servis için bekliyor ya da servis görüyor olması gerektiğinden, çalışmakta olan makinelerin ortalama sayısı da şöyle bulunur:

$$K-L = 10-3.17 = 6.83 \text{ makine.}$$

Eğer servisçilerin sayısı artırılır ya da azaltılırsa ne olur sorusu, sık sık sorulan bir sorudur. Eğer bu örnekteki işçilerin sayısı üçe çıkarılırsa ( $c=3$ ), çalışmakta olan makinelerin ortalama sayısı:  $K-L=7,74$  makineye çıkar. Bu da ortalama olarak 0,91 makinelik bir artıştır.

Bunun tersine, eğer çalışanların sayısı 1'e düşürülürse bu durumda, çalışmakta olan makinelerin sayısı:  $K-L=3,98$  makinaya düşer. Çalışanların sayısının ikiden bire düşürülmesi, neredeyse 3 makinanın çalışmasının düşüşüdür. Eğer servisçilerin sayısı azaltılırsa, gecikmelerde, servisçiden sağlanan faydada ve servisin başlaması için beklemeye geliş olasılıklarında artış olacaktır.<sup>60</sup>

---

<sup>60</sup> Bank, a.g.e., s. 278

## İKİNCİ BÖLÜM

### BİR KUYRUK MODELİ VE UYGULAMASI

#### 1. UYGULAMA BİRİMİNİN TANITILMASI

##### 1.1. Uygulama Birimi Hakkında Genel Bilgi

Kuyruk modeli olarak uygulama yapılan yer Burdur Devlet hastanesi poliklinikleridir. Bu poliklinikler hastalara ilk muayenenin yapıldığı ve gerekli görüldüğü takdirde servislere alındığı yerlerdir. Burdur Devlet hastanesinin 300 kadro yatağı 264 fiili yatağı mevcuttur. Yapılan hizmetler servis ve poliklinik olmak üzere ikiye ayrılmıştır. 35 servis ve 18 polikliniğe sahiptir. Dahiliyede 4 poliklinik vardır. Bunlar 2'şer 2'şer hizmet verirler. Gözde 2 poliklinik, diğerinde 1'er poliklinik vardır. Burdur Devlet hastanesinde 36 uzman doktor, 17 pratisyen hekim, 1 diş hekimi, 109 hemşire mevcuttur. Sağlık personeli olarak hizmet veren 1 mikrobiyoloji uzmanı, 3 eczacı, 35 sağlık memuru, 3 tıbbi teknolog, 1 fizyoterapist, 1 diyetisyen, 1 biyolog, 1 çocuk gelişim uzmanı, 19 laboratuvar teknisyeni, 15 röntgen teknisyeni , 93 ebe görev yapmaktadır.

##### 1. 2. Uygulama Biriminin Bekleme Hattı Sistemi Olarak İncelenmesi

Sistem incelenmesinde servis süresi olarak hastaların polikliniklere gelişleri ve bu poliklinikten ayrılmaları arasında geçen süreler dikkate alınmıştır. Burdur Devlet hastanesi polikliniğine gelişler, emekli sandığına bağlı hastalar, yeşil kartlı hastalar, sigortadan sevkle gelen hastalar ve vizite kağıdı ile gelen hastane tarafından oluşturulmaktadır.

## 2. VERİLERİN TOPLANMASI

Burdur Devlet Hastanesi polikliniklerde yapılan gözlemler 15.05.1999 30.05.1999 ile tarihleri ve 10<sup>00</sup>-12<sup>00</sup> ile 14<sup>00</sup>-15<sup>00</sup> saatleri arasında yapılmıştır. Gelişler ve servis sürelerine ait beklentiler ile bu verilerden elde edilen istatistiksel özetler eklerde verilmiştir.

## 3. DAĞILIMLARIN BELİRLENMESİ

Süreç parametrelerinin belirlenmesinde kullanılacak olan geliş ve servis debilerinin bulunabilmesi için gelişlerin ve servis süresinin grafiklerinin oluşturulması ve bu doğrultuda dağılımların belirlenmesi gerekmektedir. Gelişlerin dağılımının belirlenmesinde kullanılacak sınıf aralığının servis sürelerinin dağılımının belirlenmesinde kullanılan sınıf aralığı ile aynı olması istendiğinden öncelikle servis sürelerine ait sınıf aralığı bulunmalıdır. Sınıf aralığının bulunmasında Sturges formülü kullanılacaktır. Burada sınıf aralığı;

$X_{enb}$  = Gözlenen en büyük servis süresi ,

$X_{enk}$  = Gözlenen en küçük servis süresi ,

n:Yapılan gözlem sayısı,

S = Sınıf aralığı olmak üzere,

$$S = \frac{X_{enb} - X_{enk}}{1 + 3.322(\log n)}$$

formülü ile hesaplanacaktır. Sistemin bütününde gözlenen servis süreleri içinde,  $X_{enb}=4.15$  dk.  $X_{enk}=1.00$  dk. Ve gözlem sayısı olduğundan ilgili formülde yerine konduğunda  $S \cong 1$ dk olarak bulunmaktadır. Gelişlerin dağılımında 1'er dakikalık periyotlarda izlenmiştir. Bu verilere ilişkin tablolar eklerde verilmiştir. Elde edilen grafiklerden gelişlerin poisson dağılımına, servislerinin de üstel dağılımına uyabileceği görülmüştür. Zaten analitik yöntem uygulanmak istendiğinde gelişlerin poisson

dağılımına uyması gerektiği bilinmektedir. Bu bilgiler doğrultusunda dağılımlara uygunluk testleri izleyen biçimde yapılmıştır.

#### 4.DAĞILIMLARA UYGUNLUK TESTLERİNİN YAPILMASI

##### 4.1. Gelişler İçin Gözlem Sayısının Yeterliliğinin Test Edilmesi

Yapılan gözlemlerin yeterli olup olmadığı %90 güven seviyesinde test edilmiştir.

.n : Yapılması gereken gözlem sayısı

.s : Yapılan gözlemlerin standart sapması

.e : Hata payı olmak üzere gözlem sayısının yeterliliği

Formülü ile test edilecektir. Bu bilgiler ile her bir kanal için gözlem yeterlilik testleri izleyen şekilde yapılmıştır.

1. Ortopedi polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.5454$$

$$e = 0.08$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.5454)^2}{(0.08)^2} = 80.802$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 81 gözlem yapılması gerekmektedir. Gelişler için 88 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

2. Cildiye polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.3289$$

$$e = 0.08$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.3289)^2}{(0.08)^2} = 45.46$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 46 gözlem yapılması gerekmektedir. Gelişler için 50 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

3 K.B.B. polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.3434$$

$$e = 0.08$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.3434)^2}{(0.08)^2} = 49.57$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 50 gözlem yapılması gerekmektedir. Gelişler için 65 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

4. Göğüs polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.3307$$

$$e = 0.08$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.3307)^2}{(0.08)^2} = 45.95$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 46 gözlem yapılması gerekmektedir. Gelişler için 60 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

5.Çocuk polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.4061$$

$$e = 0.08$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.4061)^2}{(0.08)^2} = 69.30$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 70 gözlem yapılması gerekmektedir. Gelişler için 98 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

6.Dahiliye polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.6241$$

$$e = 0.08$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.6241)^2}{(0.08)^2} = 163.68$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 164 gözlem yapılması gerekmektedir. Gelişler için 197 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

7. Göz polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.6799$$

$$e = 0.08$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.6799)^2}{(0.08)^2} = 194.26$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 195 gözlem yapılması gerekmektedir. Gelişler için 195 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

8. Hariciye polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.4396$$

$$e = 0.08$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.4396)^2}{(0.08)^2} = 35.72$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 36 gözlem yapılması gerekmektedir. Gelişler için 110 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.



9. Diş polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.4476$$

$$e = 0.08$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.4476)^2}{(0.08)^2} = 84.20$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 85 gözlem yapılması gerekmektedir. Gelişler için 85 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

10. Bevliye polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.5431$$

$$e = 0.08$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.5431)^2}{(0.08)^2} = 123.95$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 124 gözlem yapılması gerekmektedir. Gelişler için 130 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

#### 4.2. Gelişlerin İncelenmesi ve Dağılımın Belirlenmesi:

Gelişlerin poisson dağılımına uygunluğu aşağıdaki süreç çerçevesinde yapılacaktır.

$$\lambda = \frac{\text{BirimZamandaGelenMüşteriSayısı} \times \text{GözlenenFrekans}}{\text{ToplamGözlenenFrekans}}$$

olmak üzere,

#### HİPOTEZLER

$H_0$ : Birim zamanda gelen müşterilerin dağılımı parametresi  $\lambda$  olan poisson dağılımına uyar.

$H_1$ : Birim zamanda gelen müşterilerin dağılımı parametresi  $\lambda$  olan poisson dağılımına uymaz.

#### KARAR KURALI

$\chi^2_c \geq \chi^2_{\alpha, v}$  ise  $H_0$  hipotezi reddedilir.

$\chi^2_c < \chi^2_{\alpha, v}$  ise  $H_0$  hipotezi reddedilemez.

#### TEST İSTATİSTİĞİ

$$\chi^2 = \sum \frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$$

#### İŞLEMLER

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{X!} \text{ Poisson dağılım fonksiyonu}$$

$P_i = P(X=X_i)$   $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  olmak üzere

$F_b = N \times P_i$  beklenen frekanslar hesaplanırsa,

Gelişlere ilişkin frekans tabloları aşağıdaki gibidir;

1. Ortopedi Polikliniği İçin,

Ortopedi Polikliniği Gelişlere İlişkin Frekans Tablosu

1 Dak. Gelen Hasta Sayısı	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0	54	53.9111	0.0002
1	28	26.4164	0.0949
2	4	6.4720	0.9441
3	2	1.0575	0.8400
	+ 88		+ 2.7333

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 2.7333$$

Serbestlik derecesi  $v=2-1=1$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,v} = \chi^2_{0.05;1} = 3.84$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,v}$$

$$2.7333 < 3.84$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Birim zamanda gelen müşterilerin dağılımı parametresi  $\lambda$  olan poisson dağılımına uyar.

## 2. Cildiye Polikliniği İçin,

Cildiye Polikliniği Gelişlere İlişkin Frekans Tablosu

1 Dak. Gelen Hasta Sayısı	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0	32	28.5604	0.0414
1	12	15.9938	0.9972
2	6	4.4782	0.5171
	+ 50		+ 1.5557

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 1.5557$$

Serbestlik derecesi  $v=2-1=1$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,v} = \chi^2_{0,05;1} = 3.84$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\begin{aligned} \chi^2_c &< \chi^2_{\alpha,v} \\ 1.5557 &< 3.84 \end{aligned}$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Birim zamanda gelen müşterilerin dağılımı parametresi  $\lambda$  olan poisson dağılımına uyar.

## 3. K.B.B. Polikliniği İçin,

K.B.B. Polikliniği Gelişlere İlişkin Frekans Tablosu

1 Dak. Gelen Hasta Sayısı	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0	32	34.6531	0.2031
1	24	21.7968	0.2226
2	7	6.8543	0.0030
3	2	1.4369	0.2206
	+ 65		+ 0.6493

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 0.6493$$

Serbestlik derecesi  $v=2-1=1$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha, v} = \chi^2_{0.05; 1} = 3.84$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\begin{aligned} \chi^2_c &< \chi^2_{\alpha, v} \\ 0.6493 &< 3.84 \end{aligned}$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Birim zamanda gelen müşterilerin dağılımı parametresi  $\lambda$  olan poisson dağılımına uyar.

## 4. Göğüs Polikliniği İçin,

Göğüs Polikliniği Gelişlere İlişkin Frekans Tablosu

1 Dak. Gelen Hasta Sayısı	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0	53	49.1238	0.3058
1	7	9.8247	0.8121
2	5	0.9824	0.0003
	+65		+ 1.1182

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 1.1182$$

Serbestlik derecesi  $v=2-1=1$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,v} = \chi^2_{0,05;1} = 3.84$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,v}$$

$$1.1182 < 3.84$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Birim zamanda gelen müşterilerin dağılımı parametresi  $\lambda$  olan poisson dağılımına uyar.

## 5. Çocuk Polikliniği İçin,

Çocuk Polikliniği Gelişlere İlişkin Frekans Tablosu

1 Dak. Gelen Hasta Sayısı	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0	74	75.5630	0.0323
1	19	19.6463	0.0212
2	5	2.5540	2.3425
3			
	+ 98		+ 2.3960

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 2.3960$$

Serbestlik derecesi  $\nu=2-1=1$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,\nu} = \chi^2_{0.05;1} = 3.84$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\begin{aligned} \chi^2_c &< \chi^2_{\alpha,\nu} \\ 2.3960 &< 3.84 \end{aligned}$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Birim zamanda gelen müşterilerin dağılımı parametresi  $\lambda$  olan poisson dağılımına uyar.

## 6. Dahiliye Polikliniği İçin,

Dahiliye Polikliniği Gelişlere İlişkin Frekans Tablosu

1 Dak. Gelen Hasta Sayısı	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0	98	89.7496	0.7584
1	60	67.3122	0.7943
2	32	25.2420	1.8093
3	7	6.3100	0.0754
3	0	1.2454	1.2452
	+ 197		+ 4.6426

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 4.6426$$

Serbestlik derecesi  $\nu=3-1=2$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,\nu} = \chi^2_{0.05;2} = 5.99$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,\nu}$$

$$4.6426 < 5.99$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Birim zamanda gelen müşterilerin dağılımı parametresi  $\lambda$  olan poisson dağılımına uyar.



## 7. Göz Polikliniği İçin,

Göz Polikliniği Gelişlere İlişkin Frekans Tablosu

1 Dak. Gelen Hasta Sayısı	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0	89	82.5166	0.5094
1	61	70.9642	1.3990
2	38	30.5146	1.8362
3	6	8.7475	0.8629
4	1	1.8806	0.4123
	+ 195		+ 5.0198

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 5.0198$$

Serbestlik derecesi  $v=3-1=2$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,v} = \chi^2_{0.05;2} = 5.99$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,v}$$

$$5.0198 < 5.99$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Birim zamanda gelen müşterilerin dağılımı parametresi  $\lambda$  olan poisson dağılımına uyar.

## 8. Hariciye Polikliniği İçin,

Hariciye Polikliniği Gelişlere İlişkin Frekans Tablosu

1 Dak. Gelen Hasta Sayısı	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0	70	69.0734	0.0124
1	24	25.5857	0.0948
2	5	4.7280	0.0156
3	1	0.5825	0.2992
	+ 100		+ 0.4220

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 0.4220$$

Serbestlik derecesi  $\nu=2-1=1$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,\nu} = \chi^2_{0,05;1} = 3.84$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\begin{aligned} \chi^2_c &< \chi^2_{\alpha,\nu} \\ 0.4220 &< 3.84 \end{aligned}$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Birim zamanda gelen müşterilerin dağılımı parametresi  $\lambda$  olan poisson dağılımına uyar.

## 9. Diş Polikliniği İçin,

Diş Polikliniği Gelişlere İlişkin Frekans Tablosu

1 Dak. Gelen Hasta Sayısı	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0	75	70.6906	0.2627
1	42	40.2936	0.0722
2	10	11.4837	0.1916
3	4	2.1808	1.5175
	+ 125		+ 2.0440

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 2.0440$$

Serbestlik derecesi  $v=2-1=1$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,v} = \chi^2_{0.05;1} = 3.84$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\begin{aligned} \chi^2_c &< \chi^2_{\alpha,v} \\ 2.0440 &< 3.84 \end{aligned}$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Birim zamanda gelen müşterilerin dağılımı parametresi  $\lambda$  olan poisson dağılımına uyar.

## 10. Bevliye Polikliniği İçin,

Bevliye Polikliniği Gelişlere İlişkin Frekans Tablosu

1 Dak. Gelen Hasta Sayısı	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0	84	82.8916	0.0148
1	34	37.3012	0.2921
2	9	8.3927	0.0439
3	3	1.2710	2.3520
	+ 130		+ 2.7038

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 2.7038$$

Serbestlik derecesi  $v=2-1=1$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,v} = \chi^2_{0,05;1} = 3.84$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\begin{aligned} \chi^2_c &< \chi^2_{\alpha,v} \\ 2.7038 &< 3.84 \end{aligned}$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Birim zamanda gelen müşterilerin dağılımı parametresi  $\lambda$  olan poisson dağılımına uyar.

### 4.3. Servis Süreleri İçin Gözlem Sayısının Yeterliliğinin Test Edilmesi

Yapılan gözlemlerin yeterli olup olmadığı % 90 güven seviyesinde test edilmiştir.

Gözlemler üzerine yapılan hesaplamalar sonucunda her bir poliklinik için hesaplanan standart sapma değerleri ve hata payı ile gereken gözlem sayıları aşağıdaki gibi bulunmuştur.

#### 1. Ortopedi polikliniği için

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.5197$$

$$e = 0.16$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.5197)^2}{(0.16)^2} = 28.376$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 29 gözlem yapılması gerekmektedir. Servis süreleri için 35 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

#### 2. Cildiye polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.4037$$

$$e = 0.16$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.4037)^2}{(0.16)^2} = 17.12$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 18 gözlem yapılması gerekmektedir. . Servis süreleri 20 için gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

3. K.B.B. polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.5573$$

$$e = 0.16$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.5573)^2}{(0.16)^2} = 32.63$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 33 gözlem yapılması gerekmektedir. . Servis süreleri için 40 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

4. Göğüs polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.4694$$

$$e = 0.16$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.4694)^2}{(0.16)^2} = 23.149$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 24 gözlem yapılması gerekmektedir. . Servis süreleri için 30 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

5. Çocuk polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.5913$$

$$e = 0.16$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.5913)^2}{(0.16)^2} = 36.73$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 37 gözlem yapılması gerekmektedir. Servis süreleri için 40 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

6. Dahiliye polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.4590$$

$$e = 0.16$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.4590)^2}{(0.16)^2} = 22.13$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 23 gözlem yapılması gerekmektedir. Servis süreleri için 35 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

7. Göz polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.4156$$

$$e = 0.16$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.4156)^2}{(0.16)^2} = 18.146$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 19 gözlem yapılması gerekmektedir. . Servis süreleri için 25 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

8. Hariciye polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.5039$$

$$e = 0.16$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.5039)^2}{(0.16)^2} = 26.676$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 27 gözlem yapılması gerekmektedir. Servis süreleri için 30 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

9. Diş polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.4368$$

$$e = 0.16$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.4368)^2}{(0.16)^2} = 20.04$$



gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 21 gözlem yapılması gerekmektedir. Servis süreleri için 30 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

10. Bevliye polikliniği için,

$$Z_{\alpha/2} = 1.64$$

$$s = 0.5431$$

$$e = 0.16$$

$$n = \frac{(1.64)^2 \times (0.5431)^2}{(0.16)^2} = 30.968$$

gözlem olarak bulunur.

% 90 güven seviyesinde yaklaşık 31 gözlem yapılması gerekmektedir. Servis süreleri için 35 gözlem yapıldığı için gözlem sayısı yeterlidir.

#### 4.4. Servis Sürelerinin İncelenmesi ve Dağılımın Belirlenmesi

Analitik yöntemin uygulanabilmesi için servis süresinin üstel, gamma, genel ve erlang dağılımlarından birine uyması gerekmektedir, gelişlerin incelenmesi için izlediğimiz yolu servis süresi içinde uygulayabiliriz. Fark olarak  $\lambda$  yerine  $\mu$  ile işlem yapılacaktır.

$\mu$  : Birim zamanda istediği telefon numarasına ulaşılan ortalama müşteri sayısı

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\text{Servis Gören Müşteri Sayısı}}{\text{Toplam Servis Yapılan Süre}} \\ &= \frac{215}{206.73} = 1.04 \text{ müşteri/dakika} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

## HİPOTEZLER

$H_0$ : Servis sürelerinin dağılımı, parametresi  $\mu$  olan üstel dağılıma uyar.

$H_1$ : Servis sürelerinin dağılımı parametresi  $\mu$  olan üstel dağılıma uymaz.

## KARAR KURALI

$\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha, v}$  ise  $H_0$  hipotezi reddedilir.

$\chi^2 < \chi^2_{\alpha, v}$  ise  $H_0$  hipotezi reddedilemez.

## TEST İSTATİSTİĞİ

$$\chi^2 = \sum \frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$$

## İŞLEMLER

$F(x) = \mu e^{-\mu x}$  üstel dağılım olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere,  
 $F_b = N \int_a^b f(x) dx$  ile  $a$  ve  $b$  aralığında servis süresinin beklenen frekansı hesaplanır.

Servis süreleri için sınıf aralığı şu şekilde belirlenebilir .

$$S = \frac{X_{enb} - X_{enk}}{1 + 3.322 \log N}$$

$S$  : Sınıf aralığı

$X_{enb}$  : En büyük gözlem değeri

$X_{enk}$  : En küçük gözlem değeri

$N$  : Gözlenen birimlerin sayısı olmak üzere,

Sınıf aralığı

$$S = \frac{9-1}{1+3.322 \log 622} = 0,77 dk.$$

olarak hesaplanır. Sınıf aralığı bu durumda 1 dakika olarak alınacaktır.

1. Ortopedi Polikliniği İçin,

Ortopedi Polikliniği Servis Sürelerine İlişkin Frekans Tablosu

Servis Süresi	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0-1	14	15.7922	0.2033
1-2	10	8.6695	0.2041
2-3	6	4.7565	0.3250
3-4	3	2.6075	0.0405
4-5	2	1.4350	0.2224
	+ 35		+ 0.9953

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 0.9953$$

Serbestlik derecesi  $v=3-1=2$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,v} = \chi^2_{0,05;2} = 5.99$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,v}$$

$$0.9953 < 5.99$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Servis sürelerinin dağılımı parametresi  $\mu$  olan üstel dağılıma uyar.

## 2. Cildiye Polikliniği İçin,

Cildiye Polikliniği Servis Sürelerine İlişkin Frekans Tablosu

Servis Süresi	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0-1	10	8.5760	0.2364
1-2	5	4.9000	0.0020
2-3	3	2.7980	0.0145
3-4	1	1.5980	0.2237
4-5	1	0.9117	0.0085
	+20		+ 0.4851

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 0.4851$$

Serbestlik derecesi  $\nu=2-1=1$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,\nu} = \chi^2_{0.05;1} = 3.84$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,\nu}$$

$$0.4851 < 3.84$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Servis sürelerinin dağılımı parametresi  $\mu$  olan üstel dağılıma uyar.

## 3. K.B.B. Polikliniği İçin,

## K.B.B. Polikliniği Servis Sürelerine İlişkin Frekans Tablosu

Servis Süresi	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0-1	22	19.639	0.2846
1-2	12	9.996	0.4017
2-3	4	5.092	0.2341
3-4	1	2.588	0.9743
4-5	1	1.320	0.0775
	+ 40		+ 1.0722

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 1.0722$$

Serbestlik derecesi  $v=2-1=1$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,v} = \chi^2_{0,05;1} = 3.84$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,v}$$

$$1.0722 < 3.84$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Servis sürelerinin dağılımı parametresi  $\mu$  olan üstel dağılıma uyar.

## 4. Göğüs Polikliniği İçin,

## Göğüs Polikliniği Servis Sürelerine İlişkin Frekans Tablosu

Servis Süresi	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0-1	9	9.072	0.0005
1-2	7	6.327	0.0715
2-3	6	4.416	0.5681
3-4	4	3.078	0.2761
4-5	3	2.151	0.3351
5-6	1	1.497	0.1650
	+ 30		+ 1.4163

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 1.4163$$

Serbestlik derecesi  $v=3-1=2$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,v} = \chi^2_{0,05;2} = 5.99$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,v}$$

$$1.4163 < 5.99$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Servis sürelerinin dağılımı parametresi  $\mu$  olan üstel dağılıma uyar.

##### 5. Çocuk Polikliniği İçin,

##### Çocuk Polikliniği Servis Sürelerine İlişkin Frekans Tablosu

Servis Süresi	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0-1	10	10.640	0.0384
1-2	9	7.808	0.1819
2-3	7	5.732	0.2804
3-4	6	4.208	0.7631
4-5	5	3.092	1.1773
5-6	3	2.264	0.2392
	+40		+ 2.6803

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 2.6803$$

Serbestlik derecesi  $v=4-1=3$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,v} = \chi^2_{0,05;3} = 7.82$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,v}$$

$$2.6803 < 7.82$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Servis sürelerinin dağılımı parametresi  $\mu$  olan üstel dağılıma uyar.

#### 6. Dahiliye Polikliniği İçin,

Dahiliye Polikliniği Servis Sürelerine İlişkin Frekans Tablosu

Servis Süresi	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0-1	10	12.9080	0.6551
1-2	9	8.1445	0.0898
2-3	8	5.1450	1.5842
3-4	4	3.2445	0.1759
4-5	3	2.0151	0.4391
5-6	1	1.2950	0.0672
	+ 35		+ 3.0113

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 3.0113$$

Serbestlik derecesi  $v=3-1=2$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,v} = \chi^2_{0,05;2} = 5.99$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,v}$$

$$3.0113 < 5.99$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Servis sürelerinin dağılımı parametresi  $\mu$  olan üstel dağılıma uyar.

## 7. Göz Polikliniği İçin,

## Göz Polikliniği Servis Sürelerine İlişkin Frekans Tablosu

Servis Süresi	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0-1	10	9.8375	0.0026
1-2	6	5.9675	0.0002
2-3	5	3.6175	0.5283
3-4	2	2.1950	0.0173
4-5	1	1.3325	0.0829
5-6	1	0.8085	0.0453
	+ 25		+ 0.6766

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 0.6766$$

Serbestlik derecesi  $\nu=3-1=2$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,\nu} = \chi^2_{0.05;2} = 5.99$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,\nu}$$

$$0.6766 < 5.99$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Servis sürelerinin dağılımı parametresi  $\mu$  olan üstel dağılıma uyar.

## 8. Hariciye Polikliniği İçin,

## Hariciye Polikliniği Servis Sürelerine İlişkin Frekans Tablosu

Servis Süresi	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0-1	12	11.439	0.0275
1-2	7	7.077	0.0008
2-3	6	4.377	0.6018
3-4	3	2.709	0.0312
4-5	1	1.677	0.2733
5-6	1	1.038	0.0013
	+30		+ 0.9359



Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 0.9359$$

Serbestlik derecesi  $v=2-1=1$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,v} = \chi^2_{0.05;1} = 3.84$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,v}$$

$$0.9359 < 3.84$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Servis sürelerinin dağılımı parametresi  $\mu$  olan üstel dağılıma uyar.

### 9. Diş Polikliniği İçin,

Diş Polikliniği Servis Sürelerine İlişkin Frekans Tablosu

Servis Süresi	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0-1	16	15.399	0.0234
1-2	9	7.494	0.3026
2-3	4	3.648	0.0339
3-4	1	1.776	0.3390
	+30		+ 1.5629

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 1.5629$$

Serbestlik derecesi  $v=2-1=1$ 'dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,v} = \chi^2_{0.05;1} = 3.84$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,v}$$

$$1.5629 < 3.84$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Servis sürelerinin dağılımı parametresi  $\mu$  olan üstel dağılıma uyar.

## 10. Bevliye Polikliniği İçin,

Bevliye Polikliniği Servis Sürelerine İlişkin Frekans Tablosu

Servis Süresi	Gözlenen Frekans	Beklenen Frekans	$\frac{(F_b - F_g)^2}{F_b}$
0-1	10	8.2845	0.3553
1-2	9	6.3210	1.1354
2-3	6	4.8265	0.2853
3-4	5	3.6855	0.4688
4-5	4	2.8105	0.5034
5-6	1	2.1490	0.6143
	+35		+ 5.0004

Bu tablo sonuçlarına göre,  $\chi^2_c$  sapma göstergesi

$$\chi^2_c = 5.0004$$

Serbestlik derecesi  $v=4-1=3$ ' dir.  $\alpha=0,05$  anlam düzeyi olmak üzere  $\chi^2$  tablosundan

$$\chi^2_{\alpha,v} = \chi^2_{0.05;3} = 7.82$$

bulunur. Bu sonuca göre,

$$\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,v}$$

$$5.0004 < 7.82$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilemez. Servis sürelerinin dağılımı parametresi  $\mu$  olan üstel dağılıma uyar.

#### 4.5. Analitik Yöntemin Uygulanması

Gözlenen kuyruk sisteminin işlem karakteristiklerinin analitik yöntemle bulunabilmesi için gelişlerin dağılımı Poisson servis sürelerinin dağılımında üstel, genel, gamma ve erlang dağılımlarından birine uyması gerekir. Yapılan  $X^2$  testi sonucunda gelişlerin dağılımının Poisson dağılımına, servis sürelerinin üstel dağılıma uyduğu görülmüştür. Bu durumda analitik yöntem kullanılabilir.

Kuyruk sisteminin analitik çözümü MSS paket programıyla yapılmıştır. Paket program çıktısı Ek 3'de sunulmuştur. Mevcut duruma ilişkin işlem karakteristikleri hesaplanmış ve yorumlanmıştır.

##### 1. Ortopedi polikliniği için,

$$R_h = 0.816667$$

Gözlem süresince sistem % 81.66 oranında doludur.

$$L = 4.450$$

Gözlem süresince sistemdeki ortalama müşteri sayısı 4.450 kişidir.

$$L_q = 3.640$$

Gözlem süresince kuyruktaki ortalama müşteri sayısı 2.940 kişidir.

$$W = 9.091$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama sistemde bulunma süresi 9.091 dakikadır.

$$W_q = 7.424$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama kuyruktaki bulunma süresi 7.424 dakikadır.

$$P_0 = 0.183333$$

Servis sisteminin boş olma olasılığı % 18.33'dür.

##### 2. Cildiye polikliniği için,

$$R_h = 0.788732$$

Gözlem süresince sistem % 78.87 oranında doludur.

$$L= 3.730$$

Gözlem süresince sistemdeki ortalama müşteri sayısı 3.730 kişidir.

$$Lq= 2.940$$

Gözlem süresince kuyruktaki ortalama müşteri sayısı 2.940 kişidir.

$$W= 6.667$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama sistemde bulunma süresi 6.667 dakikadır.

$$Wq= 5.258$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama kuyrukta bulunma süresi 5.258 dakikadır.

$$Po= 0.211268$$

Servis sisteminin boş olma olasılığı % 21.12'dir.

### 3. K.B.B polikliniği için,

$$Rh= 0.931852$$

Gözlem süresince sistem % 93.52 oranında doludur.

$$L= 13.670$$

Gözlem süresince sistemdeki ortalama müşteri sayısı 13.670 kişidir.

$$Lq= 12.740$$

Gözlem süresince kuyruktaki ortalama müşteri sayısı 12.740 kişidir.

$$W= 21.739$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama sistemde bulunma süresi 21.739 dakikadır.

$$Wq= 20.258$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama kuyrukta bulunma süresi 20.258 dakikadır.

$$Po= 0.068148$$

Servis sisteminin boş olma olasılığı % 06.81'dir.

### 4. Göğüs polikliniği için,

$$R_h = 0.555556$$

Gözlem süresince sistem % 55.55 oranında doludur.

$$L = 1.250$$

Gözlem süresince sistemdeki ortalama müşteri sayısı 1.250 kişidir.

$$L_q = 0.690$$

Gözlem süresince kuyruktaki ortalama müşteri sayısı 0.690 kişidir.

$$W = 6.250$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama sistemde bulunma süresi 6.250 dakikadır.

$$W_q = 3.472$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama kuyrukta bulunma süresi 3.472 dakikadır.

$$P_0 = 0.444444$$

Servis sisteminin boş olma olasılığı % 44.44'dür.

##### 5. Çocuk polikliniği için,

$$R_h = 0.840880$$

Gözlem süresince sistem % 84.08 oranında doludur.

$$L = 5.280$$

Gözlem süresince sistemdeki ortalama müşteri sayısı 5.280 kişidir.

$$L_q = 4.440$$

Gözlem süresince kuyruktaki ortalama müşteri sayısı 4.440 kişidir.

$$W = 20.325$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama sistemde bulunma süresi 20.325 dakikadır.

$$W_q = 17.091$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama kuyrukta bulunma süresi 17.091 dakikadır.

$$P_0 = 0.159120$$

Servis sisteminin boş olma olasılığı % 15.91'dir.

## 6. Dahiliye polikliniği için,

$$R_h = 0.86.000$$

Gözlem süresince sistem % 86.00 oranında doludur.

$$L = 6.610$$

Gözlem süresince sistemdeki ortalama müşteri sayısı 6.610 kişidir.

$$L_q = 4.890$$

Gözlem süresince kuyruktaki ortalama müşteri sayısı 4.890 kişidir.

$$W = 7.680$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama sistemde bulunma süresi 7.680 dakikadır.

$$W_q = 5.680$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama kuyrukta bulunma süresi 5.680 dakikadır.

$$P_o = 0.075269$$

Servis sisteminin boş olma olasılığı % 07.52'dir.

## 7. Göz polikliniği için,

$$R_h = 0.81.5217$$

Gözlem süresince sistem % 81.52 oranında doludur.

$$L = 4.860$$

Gözlem süresince sistemdeki ortalama müşteri sayısı 4.860 kişidir.

$$L_q = 3.230$$

Gözlem süresince kuyruktaki ortalama müşteri sayısı 3.230 kişidir.

$$W = 6.481$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama sistemde bulunma süresi 6.481 dakikadır.

$$W_q = 4.307$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama kuyrukta bulunma süresi 4.307 dakikadır.

$$P_o = 0.101796$$

Servis sisteminin boş olma olasılığı % 18.33'dür.

## 8. Hariciye polikliniği için,

$$R_h = 0.770833$$

Gözlem süresince sistem % 77.08 oranında doludur.

$$L = 3.360$$

Gözlem süresince sistemdeki ortalama müşteri sayısı 3.360 kişidir.

$$L_q = 2.590$$

Gözlem süresince kuyruktaki ortalama müşteri sayısı 2.590 kişidir.

$$W = 9.091$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama sistemde bulunma süresi 9.091 dakikadır.

$$W_q = 7.008$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama kuyrukta bulunma süresi 7.008 dakikadır.

$$P_o = 0.229167$$

Servis sisteminin boş olma olasılığı % 22.91'dir.

## 9. Diş polikliniği için,

$$R_h = 0.791667$$

Gözlem süresince sistem % 79.16 oranında doludur.

$$L = 3.800$$

Gözlem süresince sistemdeki ortalama müşteri sayısı 3.800 kişidir.

$$L_q = 3.010$$

Gözlem süresince kuyruktaki ortalama müşteri sayısı 3.010 kişidir.

$$W = 6.667$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama sistemde bulunma süresi 6.667 dakikadır.

$$W_q = 5.278$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama kuyrukta bulunma süresi 5.278 dakikadır.

$$P_o = 0.208333$$

Servis sisteminin boş olma olasılığı % 20.83'dür.

10. Bevliye polikliniği için,

$$R_h = 0.555556$$

Gözlem süresince sistem % 55.55 oranında doludur.

$$L = 1.250$$

Gözlem süresince sistemdeki ortalama müşteri sayısı 1.250 kişidir.

$$L_q = 0.690$$

Gözlem süresince kuyruktaki ortalama müşteri sayısı 0.690 kişidir.

$$W = 8.333$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama sistemde bulunma süresi 8.333 dakikadır.

$$W_q = 4.630$$

Gözlem süresince müşterilerin ortalama kuyrukta bulunma süresi 4.630 dakikadır.

$$P_0 = 0.444444$$

Servis sisteminin boş olma olasılığı % 44.44'dür.



## SONUÇ

Bekleme hizmet üreten sistemlerde devamlı olarak karşımıza çıkan bir sorundur. Sağlık sektörünün insanlar için çok önemli olan bir hizmet üreten sektörlerden biri olması kuyruk modellerinin bu sektör üzerinde uygulanmasını zorunlu kılmıştır.

Uygulama yapılan poliklinikler bir kuyruk sistemi olarak ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir. Öncelikle mevcut durum analiz edilmiş ve sistem hakkında bir görüş oluşmasını sağlayacak bir süreç parametreleri hesaplanmıştır. Bu aşamada kullanım oranının çok yüksek olduğu görülmüştür. Kuyrukta bekleyen hasta sayısı ve olasılık değerleri oldukça büyük değerlerdir. Serviste bekleyen hasta sayısı dikkate alındığında kanal sayısının az olduğu görülmektedir. Hasta sayısında bir sınırlama olmaması, tüm hastalar servis verilmek zorunda kalınması, muayene sürelerinin oldukça küçük zaman dilimlerine ayrılmasına neden olmaktadır. Bu değerler oldukça olumsuz değerlendirilecek bilgilerdir.

Bu durumda mevcut durumun yeterli olmadığını söyleyebiliriz. Bu nedenle ne kadar da maliyetleri artırsa da yeni birimlerin ilave edilmesinin gerekli olduğu şeklinde bir değerlendirme yapmak uygun olacaktır.

Kuyruk sorununun incelenmesi ve servis kapasitesinin kanal sayısı açısından optimal bir biçimde düzenlenmesi amacıyla geliştirilen modelin amacına uygun bir biçimde kullanılabilmesi için gerekli istatistiksel verilerin sağlanması zorunludur.

Hastaneden hastaneye, hastane içinde de servisten servise değişen iş yükünün dikkate alınması zorunludur. Kadrolar oluşturulurken iş dizaynı ve iş analizlerinin yapılması gereklidir. Bu çalışmalarla hastane genelinde ve birimlerde yer alması gereken pozisyonlar ve pozisyonlara atanacak personelde bulunması gereken özellikler tespit edilmiş olur.

Hastane ya da hastanenin bir biriminde hizmeti en iyi şekilde gerçekleştirebilmek için gerekli iş gücü miktarının bilinmesi önemlidir. İhtiyaç duydukları tedavi ve bakım hizmetine göre de hastaneye gelen hasta sayıları da farklılık

göstermektedir. Servise gelen hastaların ihtiyaç duydukları bakım hizmetine göre her gün doktor veya sorumlu hemşire tarafından gruplama yapılarak, hastane deki servisler ve diğer birimler için ortalama günlük, haftalık, aylık, üç aylık ve yıllık hasta sayıları tespit edilmeli. Bunun yanı sıra gelen acil hasta sayısı, bunların aylık ve mevsimlik dalgalanmaları ile gereken bakım miktarı saptanarak yürütülen hizmetlerle ilgili standart zamanlar hesaplanır.

Bir işlemin veya işlemler dizisinin belirli çalışma şartları altında bir iş günü boyunca ve personelin kişisel ihtiyaçları ve beklenmeyen gecikmeler için eklenen toleranslarla standart zamanlar bulunmuş olur. Gelen hasta sayısı ile standart zamanların çarpımı hasta sayısına bağlı iş gücü ihtiyacını verir. Gerekli personel sayısına ilaveten bir miktar yedek personel ile servislerin özelliklerine göre beklenmedik durumlarda mevcut personelin yetersiz kalarak hizmetin aksamaması ihtimali de giderilmiş olur.

Türkiye şartlarında yedek personelin sağlanması bir yana yeterli personelin olduğunu söylemek zordur. Doktorların kişi başına düşen hasta sayısı çok fazla olduğundan özellikle devlet hastanelerinde, sigorta hastanelerinde yığılmalar ve kuyruklar oluşmaktadır. Bu durum gerek hastane personeli gerekse hasta açısından psikolojik ve sosyolojik yönde olumsuz etkiler yaratmaktadır. Ne doktorlar yaptıkları işten memnun kalmakta ne de hastalar verilen hizmetten memnun olmaktadır.

Hastanedeki kuyrukları azaltmak amacıyla son yıllarda uygulamaya konan randevu sistemi çok olumlu sonuçlar vermektedir. Hastalar boşu boşuna saatlerce kuyrukta beklemekten kurtulmaktadır. Belirli zaman aralıkları ile hastalara randevu verilmekte, saatinde gelen hasta beklemeden servise alınmaktadır. Böylece meydana gelecek kuyruklar önceden önlenmiş olmaktadır. Bu uygulama giderek yaygınlaşmaktadır.

Bunun yanı sıra son zamanlarda Sağlık Bakanlığı'nca uygulamaya çalışılan vardiyalı sistem ile sağlık hizmetinin kalitesi, hastaya verilen hizmetin verilmiş süresi, kuyrukların kaldırılması, bu düzenlemelerle dışarıya sevk işlemlerinin bir miktar azaltılması ve hastanelerin gelir miktarının artırılması amaçlanmaktadır. Hastanelerde

kadro eksikliği ve gece vardiyasına yeterli eleman bulunamaması, bulunanların uzun süre çalışamaması bu uygulamanın eldeki imkanlarla pekte olumlu sonuçlar vermeyeceğini göstermektedir. Vardiya, hastanelere başvuruyu artıracığından sorunları da çoğaltacaktır.

Kuyruk modellerinde amaç müşterilerin servis için sıra beklemesi ve servis kanallarının boş beklemesi biçiminde iki durumla karşılaşıldığında, bu iki karşıt bekleme biçimi arasında optimal bir servis kapasitesini belirlemektir.

**EKLER**

<b>EK1: POLİKLİNİKLER BAZINDA SERVİS SÜRELERİ</b>	<b>104</b>
<b>EK 2 : POLİKLİNİKLERE GELİŞLER VE SERVİS SÜRELERİNİN DAĞILIMINA İLİŞKİN GRAFİKLER</b>	<b>114</b>
<b>EK 3: HER POLİKLİNİĞE AİT KUYRUK MODELİ SONUÇLARI</b>	<b>124</b>
<b>EK 4: Kİ-KARE TABLOSU</b>	<b>129</b>

**ORTAPEDİ**

Geliş No.	Servis Süresi	Geliş No.	Servis Süresi
1	1.20	28	1.51
2	1.00	29	1.05
3	1.15	30	1.00
4	3.05	31	1.35
5	1.40	32	3.25
6	1.00	33	1.40
7	1.05	34	2.05
8	1.05	35	2.35
9	3.05		
10	1.45		
11	2.15		
12	1.00		
13	1.30		
14	1.45		
15	1.35		
16	9.25		
17	6.05		
18	1.25		
19	1.05		
20	1.15		
21	2.35		
22	2.05		
23	1.25		
24	1.10		
25	2.20		
26	2.10		
27	2.25		

**CİLDİYE POLİKLİNİĞİ**

Geliş No	Servis süresi
1	1.10
2	1.50
3	1.25
4	1.40
5	1.25
6	2.05
7	1.25
8	1.40
9	1.25
10	1.20
11	1.10
12	2.05
13	1.45
14	1.15
15	1.55
16	1.35
17	2.15
18	1.15
19	1.25
20	1.15

**K.B.B.**

Geliş No	Servis süresi	Geliş No	Servis süresi
1	3.50	32	1.45
2	3.40	33	1.20
3	1.25	34	1.25
4	1.55	35	1.30
5	1.05	36	1.30
6	1.10	37	1.10
7	3.40	38	2.10
8	1.25	39	1.40
9	1.05	40	1.05
10	1.45		
11	1.05		
12	1.35		
13	1.00		
14	3.20		
15	1.20		
16	1.00		
17	1.05		
18	1.30		
19	2.00		
20	1.45		
21	1.50		
22	1.05		
23	1.30		
24	2.00		
25	2.05		
26	1.45		
27	1.50		
28	1.15		
29	1.30		
30	2.40		
31	1.05		

**GÖĞÜS**

Geliş No	Servis süresi
1	1.20
2	2.55
3	3.25
4	1.35
5	1.10
6	1.40
7	6.40
8	3.20
9	3.05
10	3.40
11	3.15
12	3.25
13	2.45
14	2.05
15	2.25
16	3.15
17	1.05
18	3.20
19	1.25
20	1.15
21	1.30
22	2.35
23	1.50
24	3.15
25	2.40
26	1.55
27	2.05
28	2.25
29	3.20
30	2.15
31	2.15



## ÇOCUK POLİKLİNİĞİ-

1	4.05	32	4.10
2	5.15	33	2.40
3	4.30	34	5.15
4	4.45	35	3.20
5	4.45	36	2.10
6	2.40	37	4.50
7	5.10	38	2.10
8	3.25	39	3.25
9	2.15	40	3.25
10	6.10	41	4.30
11	2.15	42	4.20
12	3.20	43	4.20
13	3.25	44	4.20
14	4.35	45	3.35
15	4.25	46	2.55
16	4.20	47	3.30
17	3.35	48	4.10
18	2.55	49	5.15
19	3.35	50	5.05
20	4.15	51	4.10
21	4.10	52	5.215
22	5.20	53	5.05
23	4.15	54	4.20
24	4.10	55	4.10
25	3.35	56	3.35
26	4.10	57	2.55
27	4.05	58	3.35
28	3.35	59	4.10
29	3.35		
30	3.35		
31	4.10		

**GÖZ**

Geliş No	Servis süresi
1	2.35
2	1.40
3	3.20
4	3.05
5	1.30
6	1.45
7	2.15
8	2.05
9	2.10
10	2.35
11	2.05
12	3.10
13	1.55
14	1.05
15	2.30
16	2.15
17	1.00
18	1.05
19	1.20
20	3.10
21	2.45
22	2.20
23	3.45
24	1.30
25	2.40
26	2.05
27	3.15
28	1.45
29	
30	1.05
31	2.00
	1.10

## DAHİLİYE

Geliş No	Servis süresi	Geliş No	Servis süresi
1	1.45	32	2,15
2	2.45	33	2.10
3	6.25	34	1.55
4	1.05	35	2.05
5	2.08		
6	2.15		
7	1.30		
8	2.50		
9	2.00		
10	2.35		
11	3.45		
12	2.15		
13	2.005		
14	1.30		
15	2.50		
16	1.25		
17	2.15		
18	2.15		
19	2.25		
20	2.15		
21	2.25		
22	1.45		
23	3.05		
24	2.15		
25	1.45		
26	2.25		
27	2.10		
28	2.15		
29	1.55		
30	2.25		
31	2.20		

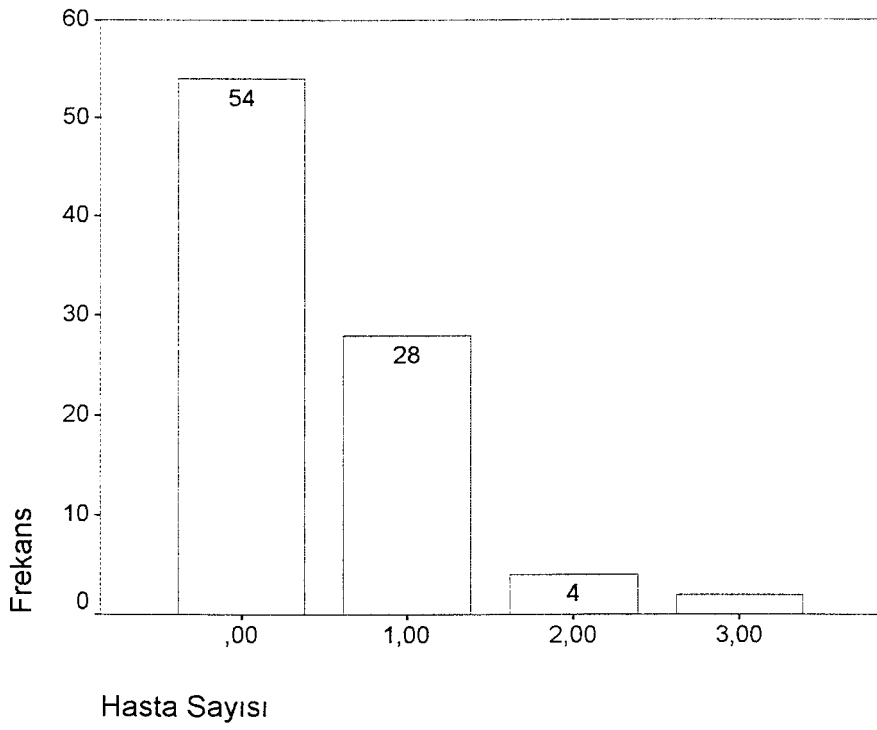
**BEVLİYE**

Geliş no	Servis süresi	Geliş No	Servis süresi
1	2.38	31	3.45
2	4.00	32	2.05
3	3.40	33	4.00
4	3.05	34	3.05
5	4.35	35	3.40
6	3.05		
7	3.45		
8	4.00		
9	3.00		
10	3.55		
11	2.05		
12	3.30		
13	3.40		
14	4.00		
15	4.45		
16	2.50		
17	2.50		
18	4.55		
19	2.45		
20	4.00		
21	4.55		
22	2.55		
23	2.35		
24	4.40		
25	4.30		
26	3.40		
27	4.45		
28	2.45		
29	4.45		
30	4.05		

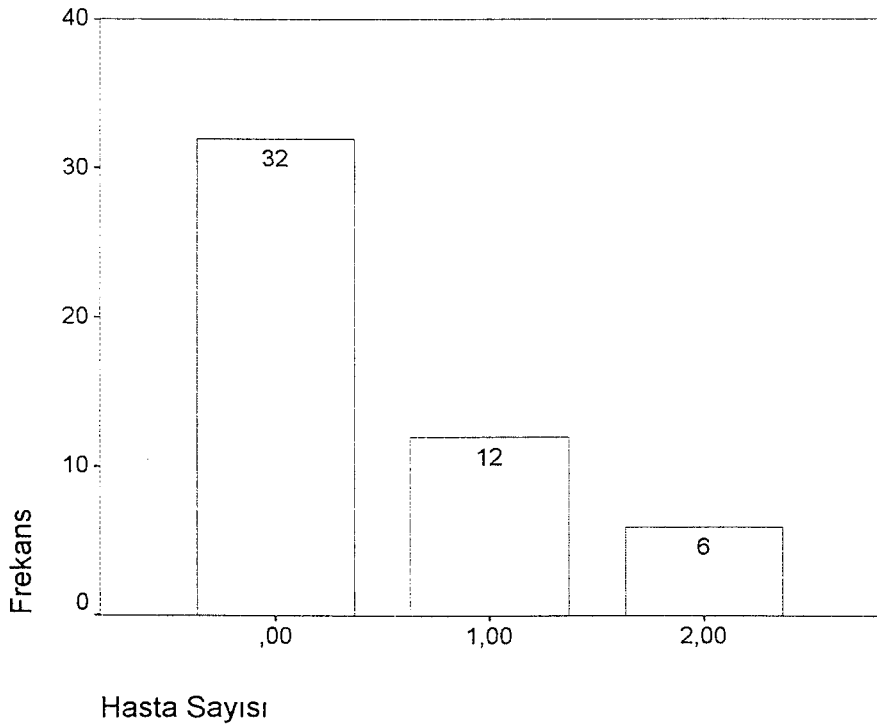
## DİŞ

Geliş No	Servis süresi
1	1.30
2	1.25
3	1.40
4	2.00
5	1.30
6	1.35
7	1.40
8	1.45
9	1.15
10	2.25
11	1.30
12	1.40
13	1.45
14	1.35
15	1.30
16	1.30
17	1.40
18	1.45
19	1.30
20	2.20
21	1.35
22	1.15
23	1.20
24	1.35
25	1.45
26	1.10
27	1.25
28	1.30
29	1.55
30	1.25

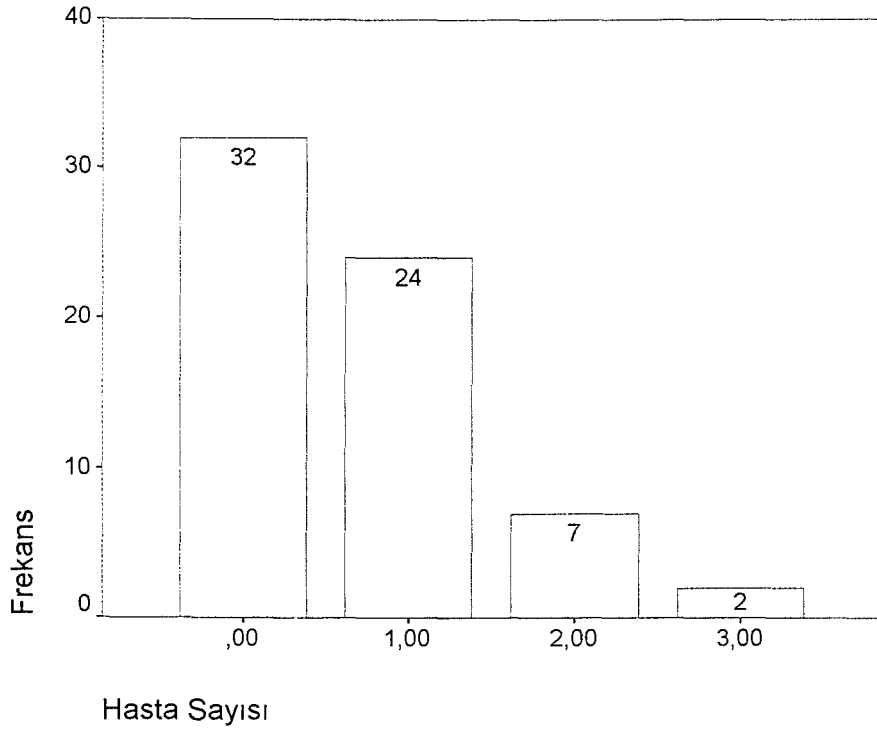
### 1. Ortopedi Polikliniği için Gelişlerin Dağılım Grafiği



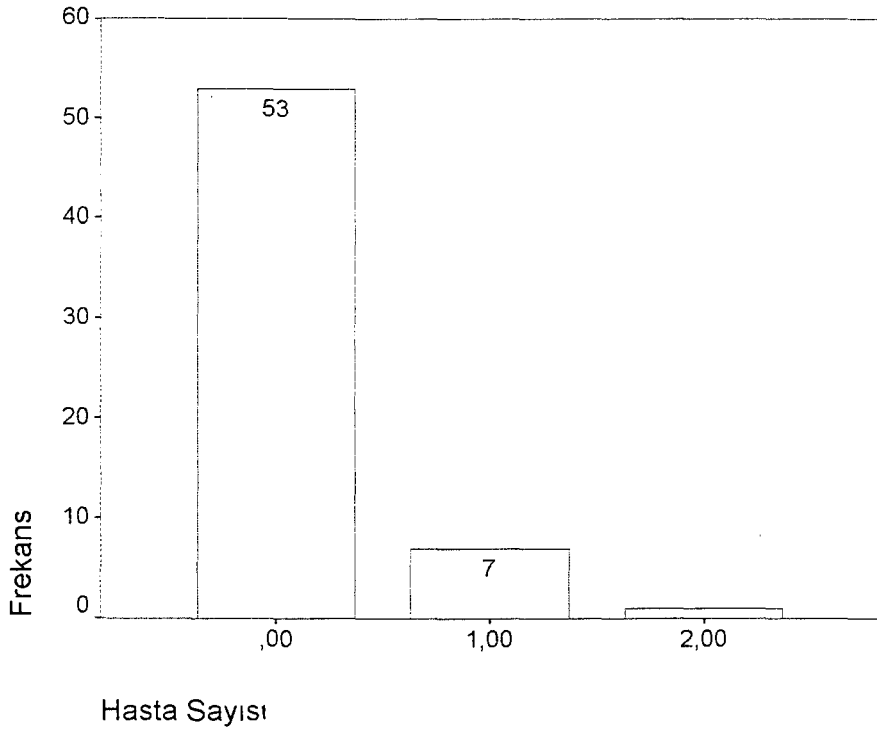
### 2. Cildiye Polikliniği için Gelişlerin Dağılım Grafiği



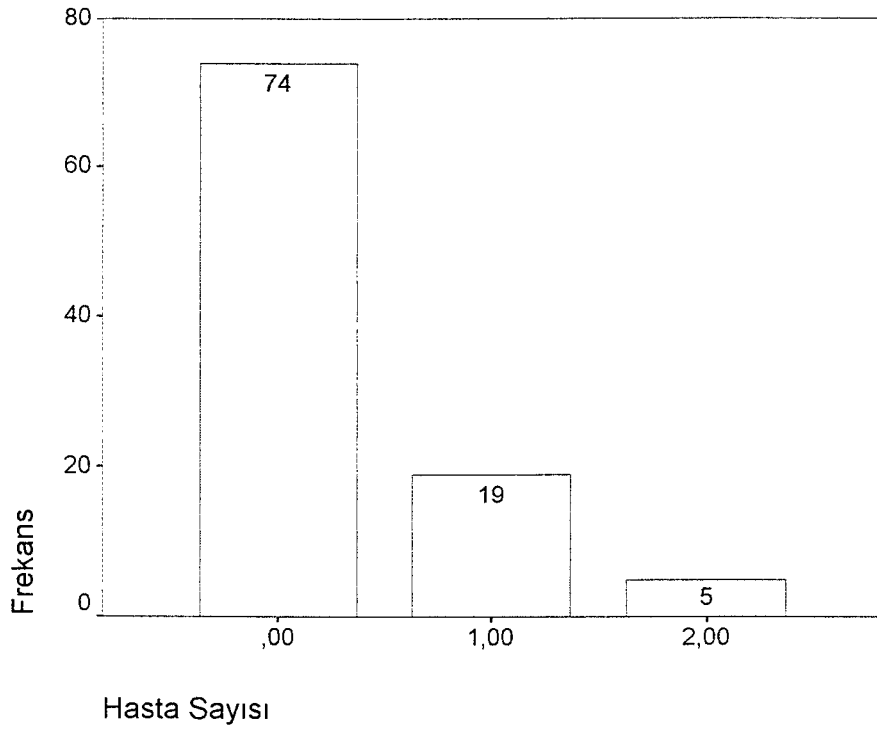
### 3. KBB Polikliniği iin Gelişlerin Dağılım Grafiği



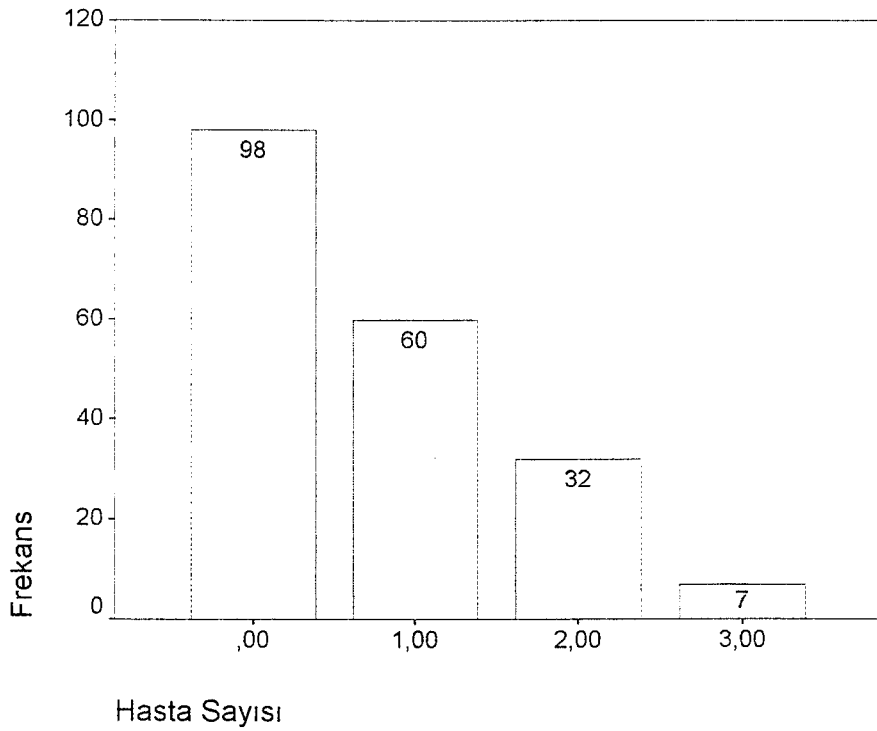
### 4. Ggős Polikliniği iin Gelişlerin Dağılım Grafiği



### 5. Çocuk Polikliniği için Gelişlerin Dağılım Grafiği

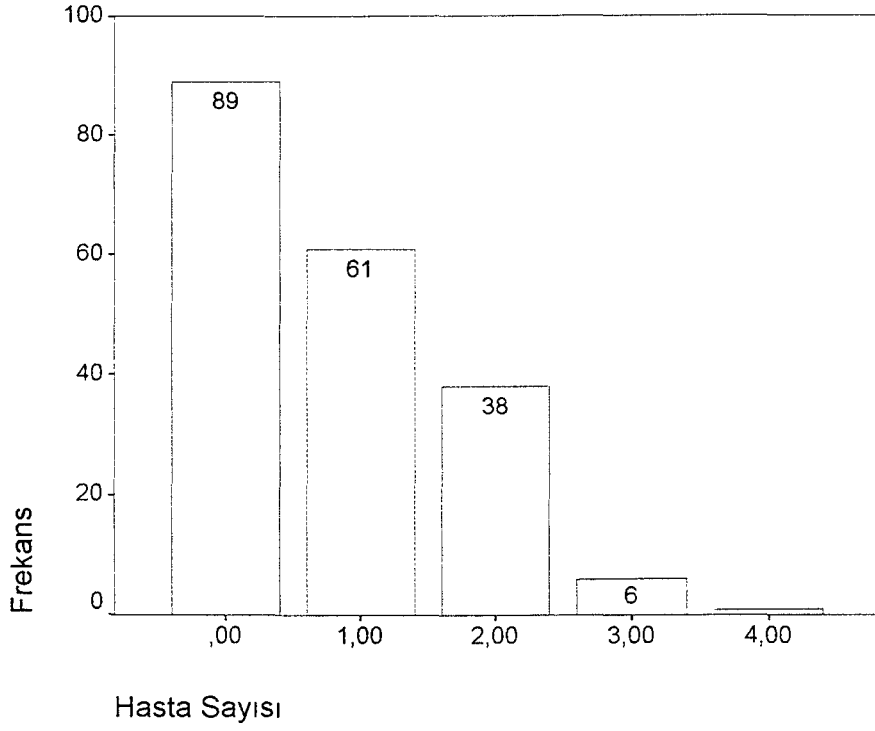


### 6. Dahiliye Polikliniği için Gelişlerin Dağılım Grafiği

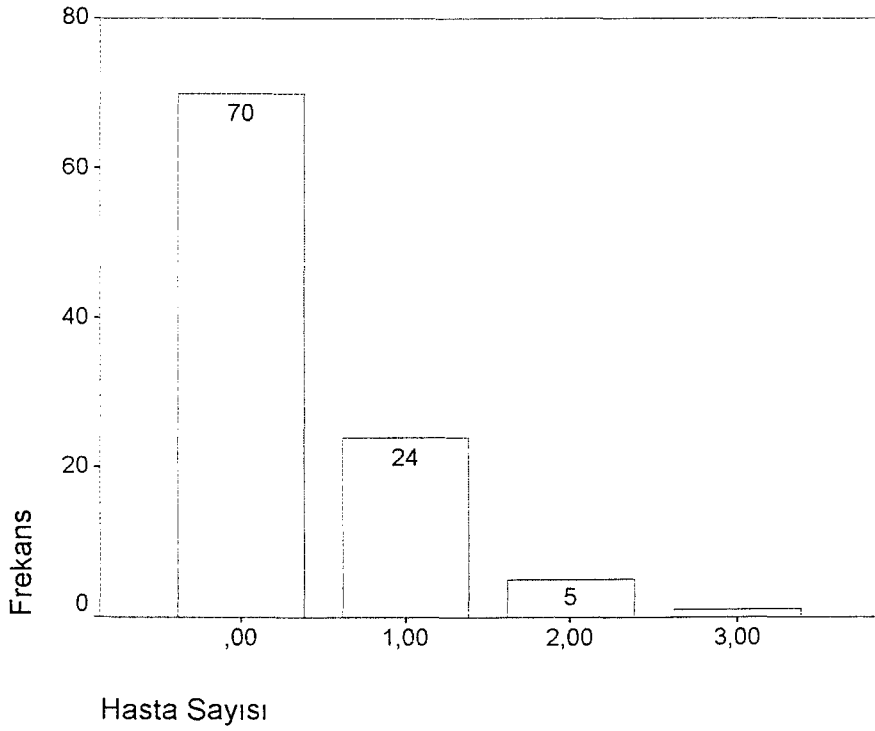




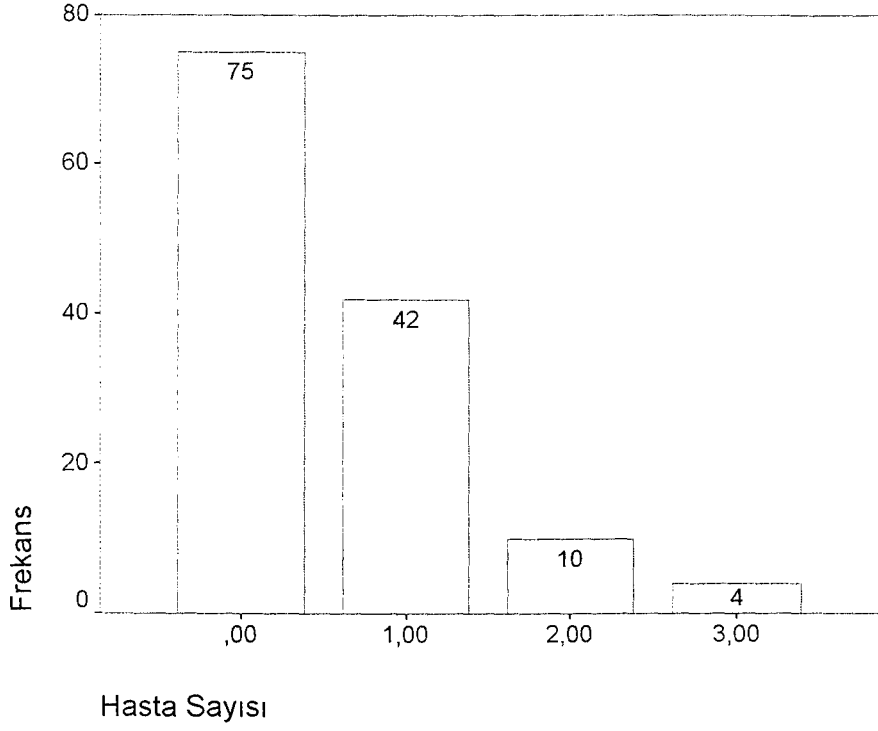
### 7. Göz Polikliniği için Gelişlerin Dağılım Grafiği



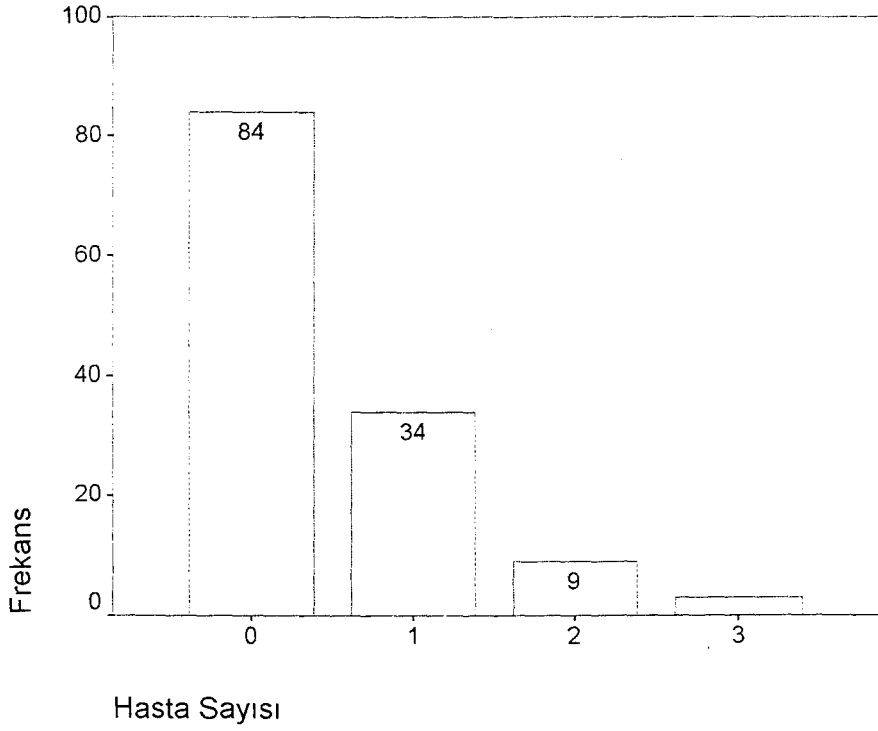
### 8. Hariciye Polikliniği için Gelişlerin Dağılım Grafiği



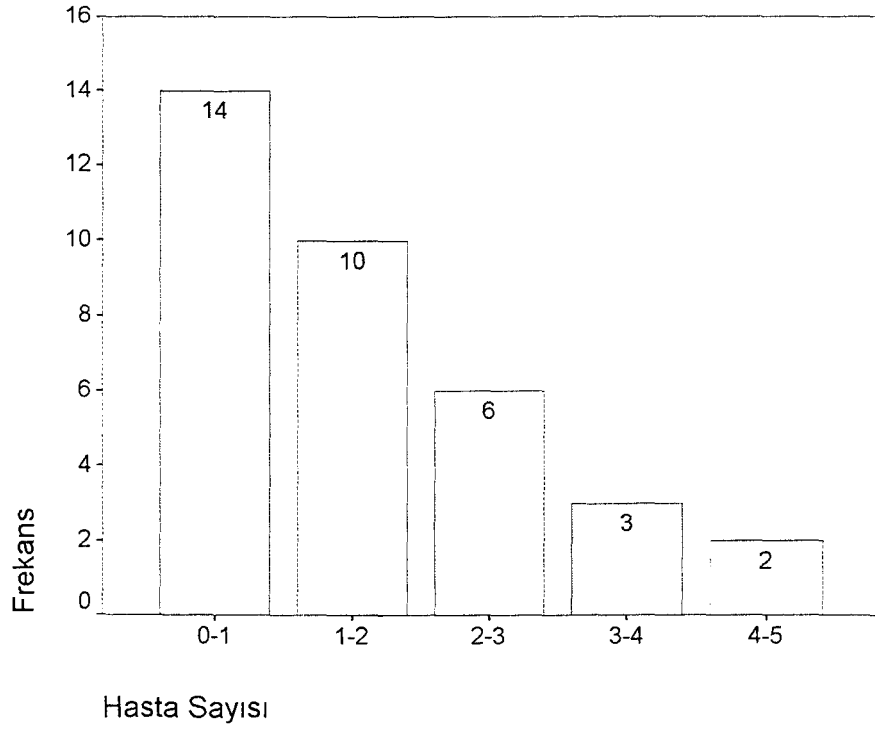
### 9. Diş Polikliniği için Gelişlerin Dağılım Grafiği



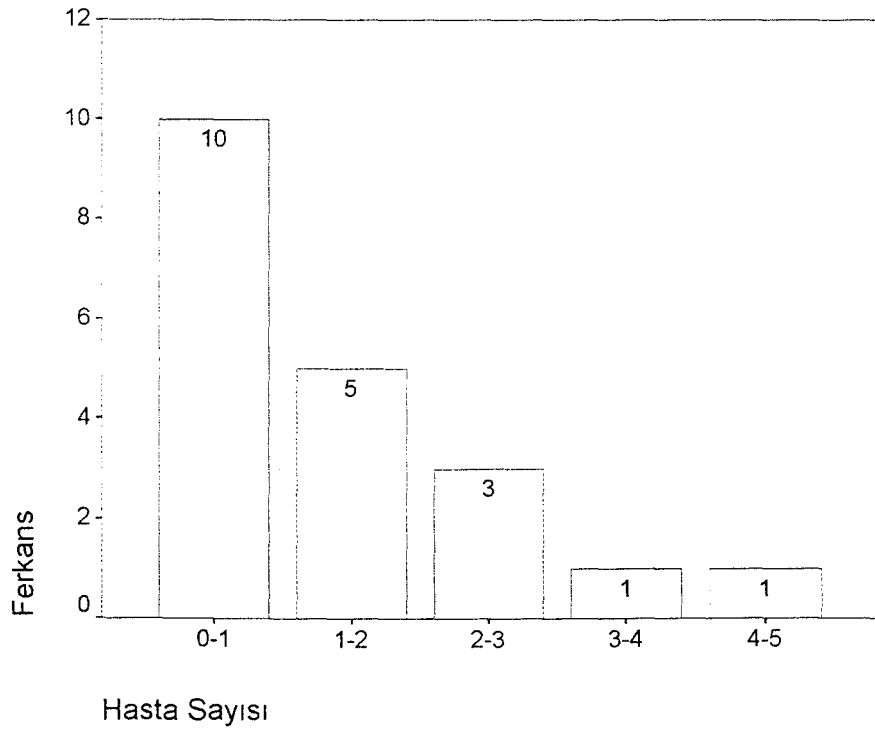
### 10. Bevliye Polikliniği Gelişlerin Dağılım Grafiği



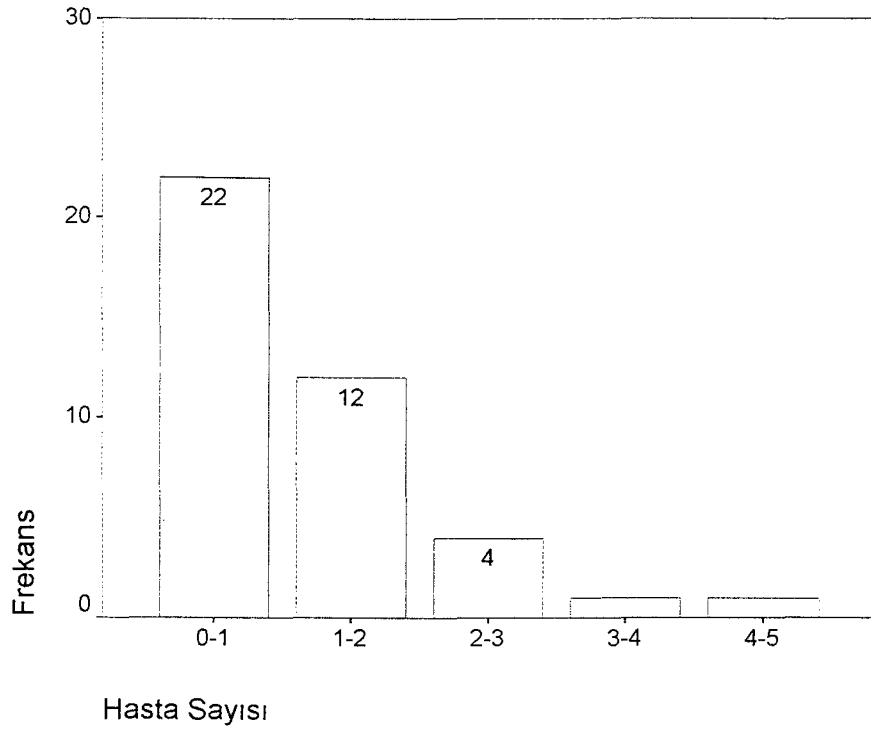
### 1.Ortopedi Polikliniği için Servis Sürelerinin Dağılım Grafiği



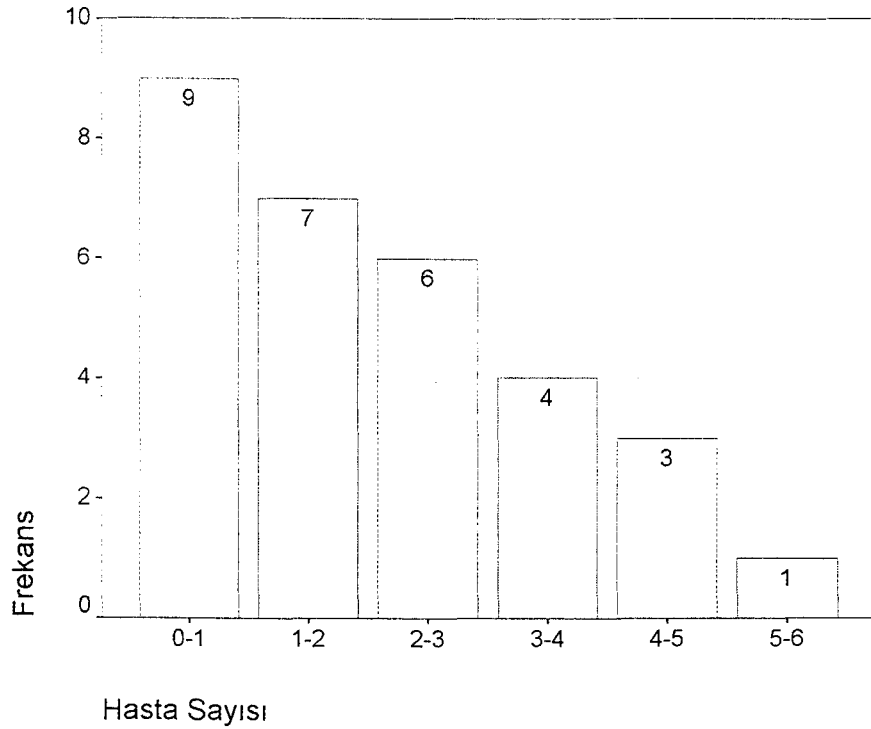
### 2.Cildiye Polikliniği için Servis Sürelerinin Dağılım Grafiği



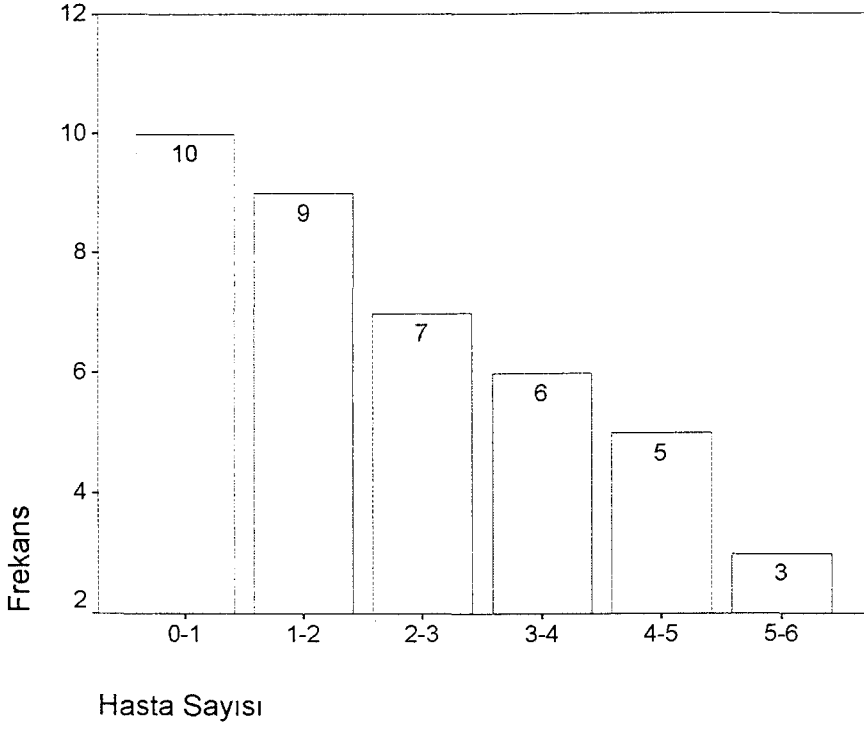
### 3. KBB Polikliniği için Servis Sürelerinin Dağılım Grafiği



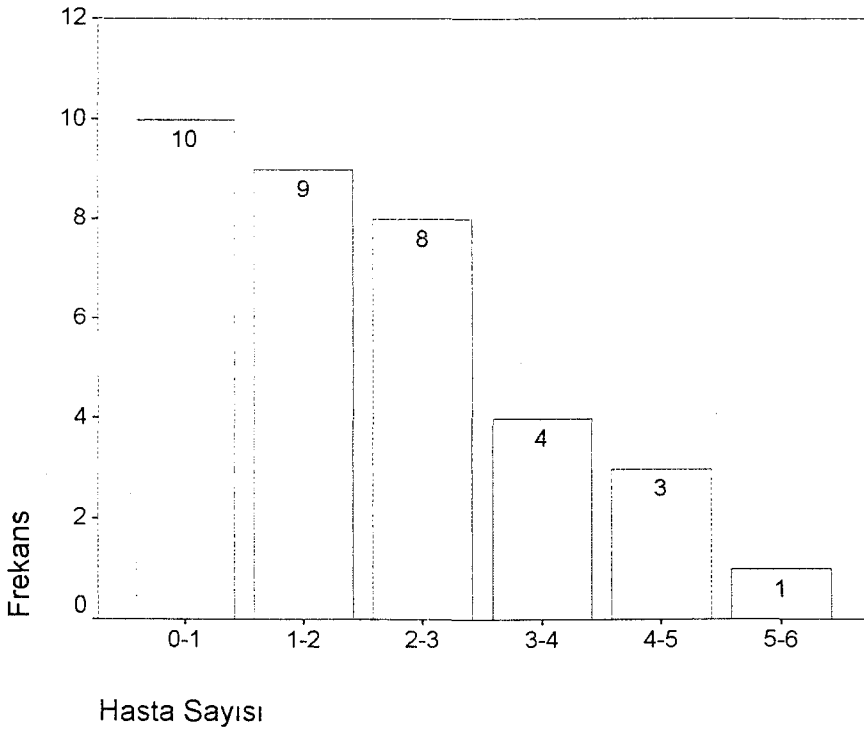
### 4. Göğüs Polikliniği için Servis Sürelerinin Dağılım Grafiği



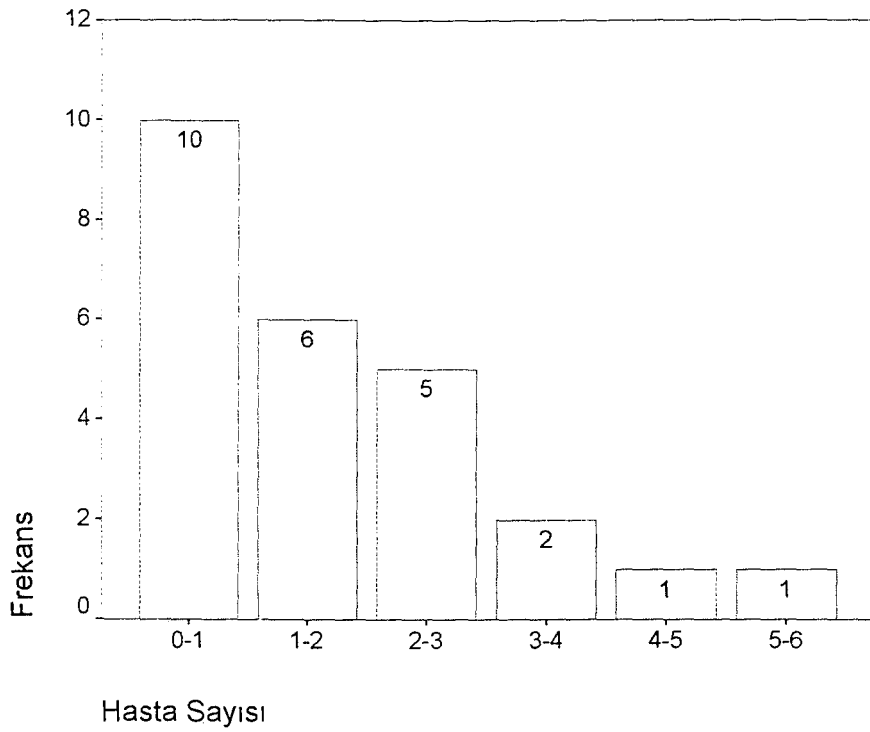
### 5. Çocuk Polikliniği için Servis Sürelerinin Dağılım Grafiği



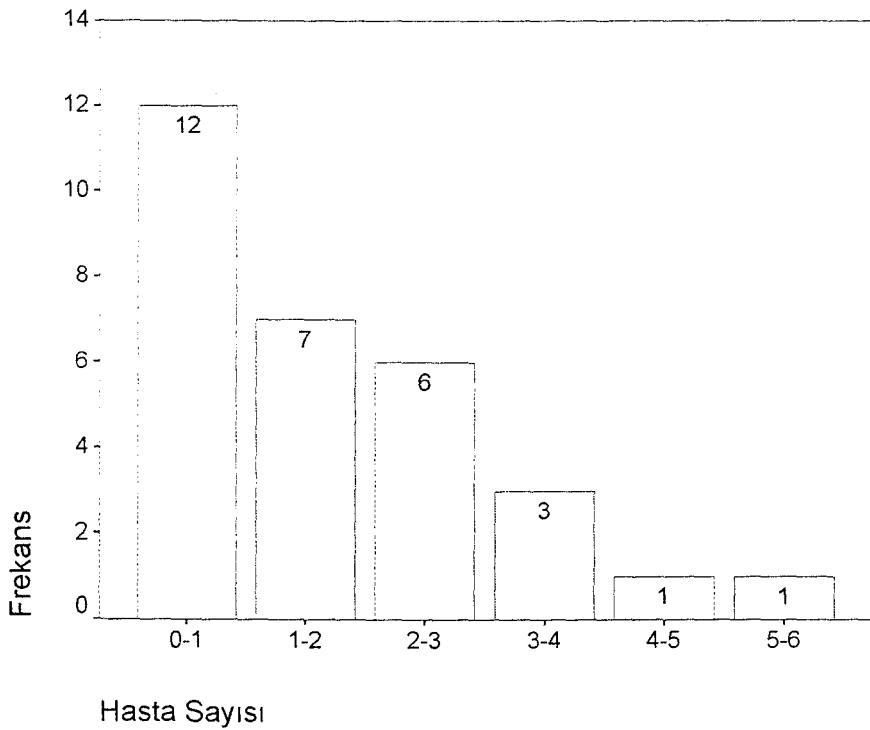
### 6. Dahiliye Polikliniği için Servis Sürelerinin Dağılım Grafiği



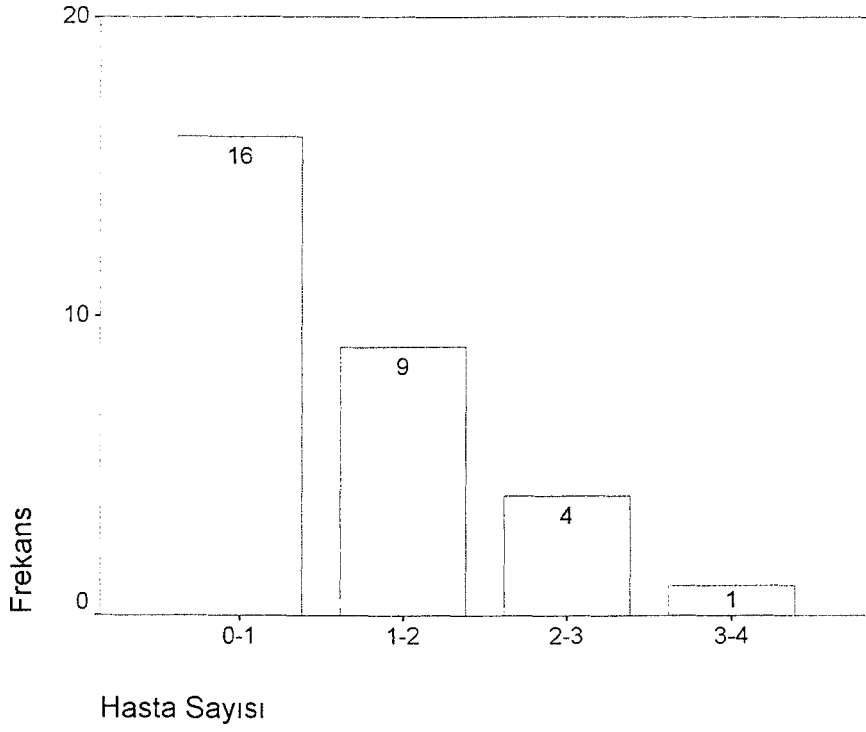
### 7. Göz Polikliniği için Servis Sürelerinin Dağılım Grafiği



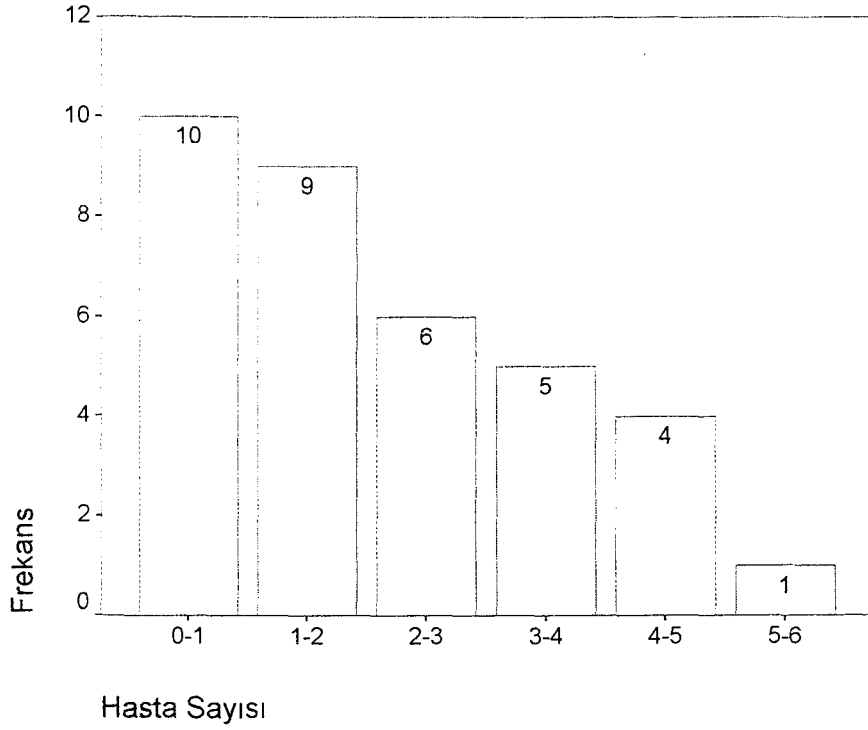
### 8. Hariciye Polikliniği için Servis Sürelerinin Dağılım Grafiği



### 9. Diş Polikliniği için Servis Sürelerinin Dağılım Grafiği



### 10. Bevliye Polikliniği için Servis Sürelerinin Dağılım Grafiği



EK-3

## QUEUING MODEL RESULTS

1. Ortopedi Polikliniği için,

SOLUTION METHOD: Analyze Model

ITEM	SYMBOL	ANALYSIS
Average Waiting Time in the System	W	9.091
Average Waiting Time in the Queue	Wq	7.424
Average No. of Units in the System	L	4.450
Average No. of Units in the Queue	Lq	3.640
Utilization Rate	Rho	0.816667
Probability the System is Idle	P(0)	0.183333

2. Cildiye Polikliniği için,

SOLUTION METHOD: Analyze Model

ITEM	SYMBOL	ANALYSIS
Average Waiting Time in the System	W	6.667
Average Waiting Time in the Queue	Wq	5.258
Average No. of Units in the System	L	3.730
Average No. of Units in the Queue	Lq	2.940
Utilization Rate	Rho	0.788732
Probability the System is Idle	P(0)	0.211268



QUEUING MODEL RESULTS

3. K.B.B. Polikliniği

SOLUTION METHOD: Analyze Model

ITEM	SYMBOL	ANALYSIS
Average Waiting Time in the System	W	21.739
Average Waiting Time in the Queue	Wq	20.258
Average No. of Units in the System	L	13.670
Average No. of Units in the Queue	Lq	12.740
Utilization Rate	Rho	0.931852
Probability the System is Idle	P(0)	0.068148

4. Göğüs Polikliniği için,

SOLUTION METHOD: Analyze Model

ITEM	SYMBOL	ANALYSIS
Average Waiting Time in the System	W	6.250
Average Waiting Time in the Queue	Wq	3.472
Average No. of Units in the System	L	1.250
Average No. of Units in the Queue	Lq	0.690
Utilization Rate	Rho	0.555556
Probability the System is Idle	P(0)	0.444444

## QUEUING MODEL RESULTS

## 5. Çocuk Polikliniği

SOLUTION METHOD: Analyze Model

ITEM	SYMBOL	ANALYSIS
Average Waiting Time in the System	W	20.325
Average Waiting Time in the Queue	Wq	17.091
Average No. of Units in the System	L	5.280
Average No. of Units in the Queue	Lq	4.440
Utilization Rate	Rho	0.840880
Probability the System is Idle	P(0)	0.159120

## 6. Dahiliye Polikliniği için,

SOLUTION METHOD: Analyze Model

ITEM	SYMBOL	ANALYSIS
Average Waiting Time in the System	W	7.680
Average Waiting Time in the Queue	Wq	5.680
Average No. of Units in the System	L	6.610
Average No. of Units in the Queue	Lq	4.890
Utilization Rate	Rho	0.860000
Probability the System is Idle	P(0)	0.075269

QUEUING MODEL RESULTS

7. Göz Polikliniği için,

SOLUTION METHOD: Analyze Model

ITEM	SYMBOL	ANALYSIS
Average Waiting Time in the System	W	6.481
Average Waiting Time in the Queue	Wq	4.307
Average No. of Units in the System	L	4.860
Average No. of Units in the Queue	Lq	3.230
Utilization Rate	Rho	0.815217
Probability the System is Idle	P(0)	0.101796

8. Hariciye Polikliniği için,

Average Waiting Time in the System	W	9.091
Average Waiting Time in the Queue	Wq	7.008
Average No. of Units in the System	L	3.360
Average No. of Units in the Queue	Lq	2.590
Utilization Rate	Rho	0.770833
Probability the System is Idle	P(0)	0.229167

QUEUING MODEL RESULTS

9. Diş Polikliniği için,

SOLUTION METHOD: Analyze Model

ITEM	SYMBOL	ANALYSIS
Average Waiting Time in the System	W	6.667
Average Waiting Time in the Queue	Wq	5.278
Average No. of Units in the System	L	3.800
Average No. of Units in the Queue	Lq	3.010
Utilization Rate	Rho	0.791667
Probability the System is Idle	P(0)	0.208333

10. Bevliye Polikliniği için,

SOLUTION METHOD: Analyze Model

ITEM	SYMBOL	ANALYSIS
Average Waiting Time in the System	W	8.333
Average Waiting Time in the Queue	Wq	4.630
Average No. of Units in the System	L	1.250
Average No. of Units in the Queue	Lq	0.690
Utilization Rate	Rho	0.555556
Probability the System is Idle	P(0)	0.444444

E K 4.

Kritik Ki-kare Değerleri Tablosu

Sıfır hipotezine göre  $X^2$  nin ki-kareden büyük olma olasılığı

s.d.	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.00016	0.00063	0.0039	0.016	0.064	0.15	0.46	1.07	1.64	2.71	3.84	5.41	6.64	10.38
2	0.02	0.04	0.10	0.21	0.45	0.71	1.39	2.41	3.22	4.60	5.99	7.82	9.21	13.82
3	0.12	0.18	0.35	0.58	1.00	1.42	2.37	3.66	4.64	6.25	7.82	9.84	11.34	16.27
4	0.30	0.43	0.71	1.06	1.65	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	11.67	13.28	18.46
5	0.55	0.75	1.14	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	13.39	15.09	20.52
6	0.87	1.13	1.64	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.55	10.64	12.59	15.03	16.81	22.46
7	1.24	1.56	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	16.62	18.48	24.32
8	1.65	2.03	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	18.17	20.09	26.12
9	2.09	2.53	3.32	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	19.68	21.67	27.88
10	2.56	3.06	3.94	4.86	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	21.16	23.21	29.59
11	3.05	3.61	4.58	5.58	6.99	8.15	10.34	12.90	14.63	17.28	19.68	22.62	24.72	31.26
12	3.57	4.18	5.23	6.30	7.81	9.03	11.34	14.01	15.81	18.55	21.03	24.05	26.22	32.91
13	4.11	4.76	5.89	7.04	8.63	9.93	12.34	15.12	16.98	19.81	22.36	25.47	27.69	33.53
14	4.66	5.47	6.57	7.79	9.47	10.82	13.34	16.22	18.15	21.06	23.68	26.87	29.14	36.12
15	5.23	5.98	7.26	8.55	10.31	11.72	14.34	17.32	19.31	22.31	25.00	28.26	30.58	37.70
16	5.81	6.61	7.96	9.31	11.15	12.62	15.34	18.42	20.46	23.54	26.30	29.63	32.00	39.29
17	6.41	7.26	8.67	10.08	12.00	13.53	16.34	19.51	21.62	24.77	27.59	31.00	33.41	40.75
18	7.02	7.91	9.39	10.86	12.86	14.44	17.34	20.60	22.76	25.99	28.87	32.35	34.80	42.31
19	7.63	8.57	10.12	11.65	13.72	15.35	18.34	21.69	23.90	27.20	30.14	33.69	36.19	43.82
20	8.26	9.24	10.85	12.44	14.58	16.27	19.34	22.78	25.04	28.41	31.41	35.02	37.57	45.32
21	8.90	9.92	11.59	13.24	15.44	17.18	20.34	23.86	26.17	29.62	32.67	36.34	38.93	46.80
22	9.54	10.60	12.34	14.04	16.31	18.10	21.24	24.94	27.30	30.81	33.92	37.66	40.29	48.27
23	10.20	11.29	13.09	14.85	17.19	19.02	22.34	26.02	28.43	32.01	35.17	38.97	41.64	49.73
24	10.86	11.99	13.85	15.66	18.06	19.84	23.34	27.10	29.55	33.20	36.42	40.27	42.98	51.18
25	11.52	12.70	14.61	16.47	18.94	20.87	24.34	28.17	30.68	34.38	37.65	41.57	44.31	52.62
26	12.20	13.41	15.38	17.29	19.82	21.79	25.34	29.25	31.80	35.56	38.88	42.86	45.64	54.05
27	12.88	14.12	16.15	18.11	20.70	22.72	26.34	30.32	32.91	36.94	40.11	44.14	46.96	55.48
28	13.56	14.85	16.93	18.94	21.59	23.65	27.34	31.39	34.03	37.92	41.34	45.42	48.28	56.89
29	14.26	15.57	17.71	19.77	22.48	24.58	28.34	32.46	35.14	39.09	42.56	46.69	49.59	58.30
30	14.95	16.31	18.49	20.60	23.36	25.51	29.34	33.53	36.25	40.26	43.77	47.96	50.89	59.70

## KAYNAKÇA

- Ada, Erhan. **Hizmet Üreten Sistemlerde Kuyruk Kuramı ve Monte Carlo Benzetim Tekniğinin Önemi Mersin Limanı Uygulaması**. Adana: Sosyal Bilimler Enstitüsü 1984
- Bahçeci, Mehmet. **Hizmet Üretim Sistemlerde Kapasite Planlaması ve Kuyruk Modelleri**. Ankara: Gazi -Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, 1995
- Banks, Jerry ve Carson S. John ve Nelson, L. II. Barry. **Discrete- Event System Simülasyon**. Second edition. America: Prentice- Hall. 1996
- Bağırkan, Şemsettin. **Bekleme Hattı Teorisi ve Bir Uygulama**, İstanbul: İ.Ü., İ.T.İ.A., Yayını, No:503, 1995
- Baykul, Yaşar. **İstatistik Metot ve Uygulamaları**. İkinci basım, Ankara: Erten Basım Yayın Dağıtım Ltd. 1997
- Ercan, Mehmet. **Bilimsel Araştırmalarda İstatistik**, İkinci basım, İzmit: Çeşitli Yayınlar Serisi no:6, Gelişen Tür Orman Ağaçları Araştırma Enstitüsü Müdürlüğü Yayınları, 1997
- Erdin, Hüseyin. **Sonsuz Geliş Kaynaklı ve Tek Kanallı Bekleme Hattı Sistemleriyle İki Modelin İlişkisi**, Eskişehir: A.Ü., Müh. Mim. Fak., Yayınları, No:60, 1992
- Erkut, Haluk. **Yönetimde Simülasyon Yaklaşımı**. İstanbul: Yönetim Bilimleri Dizisi, İrfan Yayıncılık, 1992
- Güner, Ercan. **Bekleme Hattı Sistemlerinin Analizi ve Bir Uygulama**, Ankara: Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. 1986
- Gürüş, Selahattin ve Bülbül. Şahamet. **Olasılık**, İstanbul: Marmara Üniversitesi, İ.İ.B.F. Yayınları Matbaası, 1995
- Halaç, Osman. **Kantitatif Karar Verme Teknikleri**. İstanbul: İstanbul Üniversitesi, İşletme Fakültesi, Arpaz Matbaacılık, 1978
- Hillier, Frederick. **Operations Research**. Second Edition. San- Francisco: Holden- Day Inc., 1974
- İdil, Orhan. **Örnekleme Teorisi ve İşletme Yönetiminde Uygulanması**, İstanbul: İ. Ü. Yayın No: 2708, İşletme Fakültesi Yayın no: 107. Fatih Yayınevi, 1980
- Kara, İmdat. **Servis Sistemleri ve Gelişler Zamana Bağlı Olduğunda Kapasite Sorununa Matematiksel Yaklaşım**, Eskişehir: A.Ü., İ.T. İ. A., Yayını, 1979.
- ..... . **Olasılık**. Eskişehir: Bilim Teknik Kitapevi. Kasım 1983

- Karayalçın, İlhami. **Üretim Yönetimi ve Teknikleri**, İstanbul: İ.Ü. İşletme Fakültesi, İşletme İktisadi Enstitüsü Yayını. No: 23, 1974
- Korum, Uğur. **İstatistik**, Ankara: Sevinç Matbaası, 1972
- Köksal, Mustafa. Kuyruk Teorisi. ( Bekleme Hattı Teorisi) (Stokastik kuyruk Modellerinin Analitik Yoldan İncelenmesi), **İ. Ü. İşletme Fakültesi Dergisi**, Cilt 9, Sayı no: 1-2, nisan 1980
- Mutlualp, Gülçin. **Sistem Simülasyonu Projesi**, İstanbul: İ.T.Ü., İşletme Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, 1991
- Or. İlhami. **Introduction To Stochastic Models In Operations Research**, İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Basımevi, 1996
- Özpuolat, Didem. **Kuyruk Modelleri ve Analizi Üzerine Bir Uygulama**, İzmir: Ege Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, 1996
- Öztürk, Ahmet. **Yöneylem Araştırması**, Dördüncü basım, Bursa. Uludağ Üniversitesi, Ekin Kitapevi, 1994
- Sakin, Fisun. **Yapı Kredi Bankası A.Ş. İş Etkinliği**, Samsun: 19 Mayıs Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, 1997
- Sarıaslan, Halil. **Sıra Bekleme Sistemlerinde Simülasyon (Benzetim) Tekniği**, Ankara: A.Ü., S.B.F. ve Basın Yayın Yüksekokulu Basımevi, 1986
- Serper, Özer. **Uygulamalı İstatistik 2**, Bursa: Uludağ Üniversitesi, 1993
- Tijms C., Henk. **Stochastics Models An Algorithmic Approach**, America: John Wiley & Sons 1994
- Ural Kenan, **İstatistik Yöntemleri ve Uygulamaları**, Üçüncü Basım, İstanbul:İktisat Fakültesi Yayın no 495 I. Güray Matbaacılık, 1983
- Winston. L. Wayne. **Operations Research Applications and Algorithms**, Boston: Indiana University 1987
- Yılmaz Arzu, **Kuyruk Modelleri ve Endüstriyel Sistemlerde Bir Uygulama**, İstanbul: İ.T.Ü. Endüstri Müh., Haziran 1997