

İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı Birinci Sınıf Öğrencilerinin Fonksiyonlar Konusundaki Hazır Bulunuşlukları*

First Year Prospective Middle School Mathematics Teachers' Readiness for Functions

Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN¹, Abdulkadir ERDOĞAN², H. Bahadır YANIK³
Anadolu Üniversitesi

Özet

Bu çalışmada, ilköğretim matematik öğretmenliği programı birinci sınıf öğrencilerinin fonksiyonlar konusundaki hazır bulunuşluk durumları incelenmiştir. Mevcut alanyazın ve üniversitede okutulacak dersler göz önüne alınarak, fonksiyon kavramının farklı boyutlarda ele alındığı geniş kapsamlı bir anket hazırlanmış ve çalışmanın verileri 79 öğretmen adayına uygulanan bu anket aracılığıyla toplanmıştır. Çalışmanın bulguları, öğretmen adaylarının cebirsel temsille verilen ifadelerden hangilerinin bir fonksiyon belirttiğini belirlemede, fonksiyon kavramını tanımlamada ve fonksiyonları problem çözme aracı olarak kullanmada yetersiz kaldıklarını göstermiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarının cebirsel temsil ve teknikler içeren sorularda grafiksel temsil ve teknikler içeren sorulardan daha başarılı oldukları görülmekle birlikte bu başarının büyük oranla işlemsel bilgiden kaynaklandığı tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyonlar, Hazır Bulunuşluk, İlköğretim Matematik Öğretmen Adayları

Abstract

This study investigated first year prospective middle school mathematics teachers' readiness for functions. A survey was prepared based on literature, various aspects of functions and the courses that include function concept at the undergraduate level and applied to 79 teacher candidates. The findings of the study showed that the

* Bu çalışma Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonunca kabul edilen 1002E49 nolu proje kapsamında desteklenmiştir.

¹ Yr.Doç.Dr., Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi
e-mail: eoerdogan@anadolu.edu.tr

² Yr.Doç.Dr., Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi
e-mail: abdulkadirerdogan@anadolu.edu.tr

³ Doç.Dr., Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi
e-mail: hbyanik@anadolu.edu.tr

prospective teachers had difficulty in identifying functions from their algebraic representations, defining functions, and using functions as problems solving tools. In addition, although the prospective teachers were better in solving function tasks that included algebraic representations and required to use algebraic techniques compared to tasks that involved graphical representations, the results showed that this was mainly procedural.

Keywords: Functions, Readiness, Prospective Middle School Teachers

I. GİRİŞ

1997 yılında yapılan değişikliklerle eğitim fakültelerinde Yüksek Öğretim Kurumu (YÖK) tarafından hazırlanan merkezi programlara geçilmiştir. Bu çerçevede bazı dersler tamamen programlardan kaldırılmış, bazı derslerin içerikleri yeniden düzenlenmiş ve bazı yeni dersler programlara eklenmiştir. İlköğretim matematik öğretmenliği programlarında birinci yarıyılıda okutulan Genel Matematik dersi bu çerçevede yeniden düzenlenen derslerden biridir. Söz konusu dersin içeriği incelendiğinde, sayılardan, doğru ve çember denklemlerinden fonksiyonlar ve dizilere kadar bir takım temel matematik konularının öğretiminin amaçlandığı görülmektedir. Oysaki ortaöğretim matematik öğretim programı dikkate alındığında bu konuların hiç birisinin söz konusu programa yerleşen öğrenciler için yeni konu olmadığı açıkça görülmektedir. Bu durumda Genel Matematik dersinin amaçlarından birini, aynı programa yerleşen fakat matematiğin temel konularında farklı bilgi ve beceri düzeylerine sahip öğrencileri aynı bir hazır bulunuşluk seviyesine getirmek olarak düşünmek mümkündür.

Programda özellikle fonksiyon kavramına ve fonksiyon türlerine geniş bir yer verildiği görülmektedir:

“Fonksiyon kavramı, polinomlar, rasyonel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, hiperbolik fonksiyonlar, üstel ve logaritmik fonksiyonlar ve bunların terslerinden oluşan elemanter fonksiyonlar. Fonksiyonların grafikleri.” (YÖK)

Bu konular göz önüne alındığında Genel Matematik dersinde fonksiyon kavramına ayrılan özel yerin öğrencileri ileriki yıllarda okutulacak olan analiz derslerine hazırlama amacıyla doğrudan ilişkili olduğu, yani analiz derslerine bir hazır bulunuşluk teşkil ettirme amacının güdüldüğü görülmektedir.

Fonksiyon kavramı, ortaya çıkışı, gelişimi, kullanım alanları ve yapısı itibariyle matematik kavramları arasında önemli bir yere sahiptir. Dolayısıyla söz konusu kavram öğretim programlarında büyük yer tutmaktadır. İlköğretim programlarındaki pek çok konu fonksiyon kavramına hazırlık niteliği taşımakta (örüntüler, oran-orantı, vs.) ve kavram lise yıllarında detaylı bir şekilde ele alınmaktadır. Fonksiyon kavramının bu önemi, öğretiminde karşılaşılan güçlükler ve öğrenci kavram yanlışları uluslararası camiada pek çok matematik eğitimi araştırmacısının dikkatini çekmiş ve bugüne kadar fonksiyon kavramıyla ilgili sayısız çalışma gerçekleştirilmiştir.

Yapılan bu çalışmalarda belli bir matematik seviyesine sahip öğrenciler de bile fonksiyon kavramının zayıf kaldığı ve öğrenciler için fonksiyon kavramının anlaşılması zor bir kavram olduğu görülmüştür (Breidenbach vd., 1992; Tall & Bakar, 1992, Carlson, 1998; Thompson, 1994a; Thomas; 2003). Diğer yandan, öğrencilerin fonksiyonu doğru tanımladığı çoğu durumda bu tanımları başarılı bir şekilde uygulayamadıkları saptanmıştır (Vinner & Dreyfus, 1989). Vinner ve Dreyfus öğrencilerin verdikleri fonksiyon tanımlarını 6 grupta toplamışlardır: 1) Formal Drichlet-Bourbaki tanımı, 2) İki değişken arasındaki bir bağımlılık bağıntısı, 3) Belirli bir ölçüde düzenlilik gerektiren bir kural, 4) Bir işlem veya işlem süreci, 5) Bir formül, cebirsel ifade veya denklem, 6) Bir grafik veya sembolik formdaki bir gösterim.

Pek çok araştırmacı fonksiyon kavramının öğretiminde bağıntı, eşleme ve değişkenlik yönlerine vurgu yapılarak dinamik olarak tanımlanması gerektiğinin ve Bourbaki'nin ikili tanımlaması gibi statik tanımlamalardan kaçınılması gerektiği konusunda hem fikirdirler (Dubinsky & Harel, 1992; Romberg, Carpenter vd., 1993; Selden & Selden, 1992; Sierpiska, 1992; Sfard, 1992; Tall, 1992, 1996) Fonksiyon kavramıyla ilgili öğrencilerin karşılaştığı bir diğer önemli güçlük kavramın sahip olduğu farklı temsillerin ve sembollerin kullanımıyla ilgilidir. (Norman, 1992). Cebirsel temsil ile gösterimdeki benzerlikten dolayı fonksiyon ile denklem ayırımının yapılamadığı (Even, 1998; Carlson 1998; Carlson ve Oertman, 2005), grafiksel temilde de fonksiyon grafiğinin düzgün, sürekli bir eğri veya doğru olarak algılanmasının diğer durumları ifade eden (sabit, parçalı tanımlı fonksiyonlar) fonksiyon grafiklerinin öğrenciler tarafından bir fonksiyonun temsili olarak kabul edilmesine engel teşkil ettiği vurgulanmaktadır (Vinner 1993; Breidenbach vd., 1992; Even 1990).

Wilson ve Lloyd (1998) fonksiyon kavramının devreye girdiği problem durumlarını yorumlayabilmek için temsiller arasında geçiş yapabilmenin gerekli olduğunu belirtmektedir. Oysaki kavramın farklı temsilleri ve temsiller arasındaki geçiş öğrencilerin zorlandıkları bir durum ve kavram yanlışlarının temel nedenlerinden biri olarak kabul edilmektedir (Eisenberg, 1991). Öğrencilerin fonksiyonel değişken sembollerini sayısal temsilden (tablodan) cebirsel temsile dönüştürmede zorlandıkları (Herscovics, 1989), doğrusal fonksiyonlarda cebirsel temsilden grafiksel temsile geçiş daha kolay yapılırken grafiksel temsilden cebirsel temsillere geçişte zorlandıkları (Markovist vd., 1986) saptanmıştır. Kieran (1992) ise öğrencilerin cebirsel ve sayısal temsilden grafiksel temsile geçerek yorumlama yapmada da zorlandıklarını tespit etmiştir.

Fonksiyon kavramı bir çok alt kavramı da içinde barındırmaktadır. Bu alt kavramlarla ilgili yapılan çalışmalarda da öğrencilerin zorlandıkları noktalar ve kavram yanlışları belirlenmiştir. Örneğin ters fonksiyon kavramında öğrenciler ters fonksiyonun belirlenmesini cebirsel işlemlerin tersten yapılması (x ve y değişkenlerinin yerlerinin değiştirilmesi) olarak algılamakta, bunun sonucunda da ne grafiksel temsil ile verilen bir fonksiyonun ters fonksiyonunu bulabilmekte (Eisenberg, 1991; Even, 1992) ne de sayısal temsil ile verilen fonksiyonun tersinin değerini belirleyebilmektedir (Carlson, Oehrtman ve Engelke, 2005). Sabit

fonksiyonların ise, cebirsel ifadeleri değişken içermediği için, öğrenciler tarafından fonksiyon olarak algılanmadığı şeklinde kavram yanlışlarının varlığı saptanmıştır (Bakar & Tall, 1992).

Ülkemizde de pek çok çalışmada fonksiyon kavramı benzer şekilde ele alınmakta olup bu konuda yerel bir alanyazın oluşmaya başlamıştır. Lise öğrencileri ile yapılan çalışmalarda Akkoç (2005) öğrencilerin küme eşlemesi, diyagram, sıralı ikili kümeleri, grafiksel ve denklemler gibi çoğul temsiller hakkındaki yorumları ve tanımsal özellikleri kullanabilme becerilerini, Baştürk (2010) farklı temsillerin kullanımındaki öğrenci performanslarını, Tekin, Konyalıoğlu ve Işık (2009) öğrencilerin çeşitli fonksiyonların grafiklerini çizibilme becerilerini, Altun ve Yılmaz (2008, 2010) yapılandırmacı öğrenme ve bilginin soyutlanma süreçlerini referans alarak öğrencilerin parçalı tanımlı fonksiyon ve tam değer fonksiyonu bilgilerini oluşturma süreçlerini incelemiştir. Öğretmen adayları ile yapılan çalışmalarda da Dede, Bayazit ve Soydaş (2010) adayların fonksiyon, denklem ve polinom kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkilere ait bilgi düzeylerini, Erdoğan (2010) fonksiyonların modelleme aracı olarak kullanım becerilerini ve Bayazit (2011) fonksiyon kavramının öğretiminde analogi kullanımları konusundaki görüş ve yeterliklerini araştırmışlardır. Karakaş ve Güven (2004)'nin çalışmasında hem lise öğrencileri hem de öğretmen adayları ile çalışılarak fonksiyon kavramının sözel, cebirsel ve grafiksel gösteriminin nasıl algılandığı üzerinde durulmuştur. Bayazit ve Aksoy (2010) ise yaptıkları çalışmada öğretmenlerin fonksiyonlar konusunda sahip oldukları pedagojik alan bilgilerini incelemiştir.

Bununla birlikte, bu çalışmaların genellikle kavramın bir veya iki boyutuna odaklandığı ve belirli seviyedeki öğrencilerin kavramı algılama düzeyleri ile ilgili bir panorama sunmadığı görülmektedir. Bu durumda Genel Matematik dersi gibi bir derste fonksiyon kavramının hangi özellikleri üzerinde nasıl durulması gerektiğini tespit etmek güçleşmektedir. Dolayısıyla, söz konusu ders işlevsiz, sıkıcı ve bilinen konuların tekrar edildiği bir ders olarak algılanma riski taşımaktadır. Bu çalışmada böylesine bir pratik ihtiyaçtan hareket edilmiş ve üniversiteye geçiş yapan öğrencilerin fonksiyonlar konusundaki hazır bulunuşluk düzeylerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Hazır bulunuşluk belli bir öğrenme faaliyetini gerçekleştirmek için gerekli olan ön koşul davranışların kazanılması (Ülgen 1997; Yılmaz ve Sümbül, 2003; akt. Yapıcı, 2004), insanın belli bir gelişim görevini olgunlaşma ve öğrenme yoluyla yapabilecek düzeye gelmesi (Başaran, 1998; akt. Yapıcı, 2004) olarak tanımlanmakta, diğer bir deyişle hazır bulunuşluk herhangi bir etkinliği yapmaya; bilişsel, duyuşsal, sosyal ve psikomotor planda hazır olma olarak ifade edilmektedir (Yapıcı, 2004). Dolayısıyla üniversiteye yeni başlayan öğrencilerin fonksiyon kavramıyla ilgili lise yıllarında elde ettikleri kazanımlarının, eksik yönlerinin ve var olan kavram yanlışlarının belirlenerek hazır bulunuşluklarının tanımlanması Analiz derslerine girişe hazırlık olarak nitelendirilebileceğimiz Genel Matematik dersi kapsamında söz konusu kavramın nasıl ele alınması gerektiği konusunda bilgiler sunması açısından önem taşımaktadır.

Yukarıda kısaca yer verilen alanyazın incelemesi sonucunda bu çalışmada üniversiteye başlayan öğrencilerden fonksiyon kavramıyla ilgili beklenen hazır bulunuşluk, kavramın tanımı, temsilleri ve problem çözümlerinde kullanımı olarak üç boyutta değerlendirilmekte ve aşağıdaki sorulara cevap aranmaktadır:

- İlköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencileri (İMÖBSÖ) fonksiyon belirten durumları ne ölçüde tanıyabilmekte ve fonksiyon kavramını nasıl tanımlamaktadırlar?
- İMÖBSÖ fonksiyon kavramının farklı temsillerini ne ölçüde kullanabilmektedirler?
- İMÖBSÖ fonksiyon kavramını farklı problemlerin çözümünde ne ölçüde kullanabilmektedirler?

II. YÖNTEM

Bu çalışmada geçmişte ya da halen var olan bir durumun kendi koşulları içinde var olduğu şekliyle betimlenmesi amaçlandığından araştırma modeli olarak tarama modeli kullanılmıştır (Karasar, 2008).

1. Örneklem

Çalışma İç Anadolu Bölgesindeki bir üniversitenin Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği programında Genel Matematik dersini ilk defa alan birinci sınıf öğrencileriyle gerçekleştirilmiştir. Çalışmaya toplam 79 öğrenci katılmıştır. Katılımcıların profilleri (mezun oldukları okullar ve cinsiyet) aşağıdaki tabloda belirtilmiştir.

Tablo 1. Katılımcıların profilleri

Mezun oldukları okul	Cinsiyet		Toplam
	Kız	Erkek	
Anadolu Öğretmen Lisesi	21	12	33
Anadolu Lisesi	23	9	32
Lise	3	2	5
Fen Lisesi	1	1	2
Belirtmeyen	3	4	7
Toplam	51	28	79

2. Veri toplama araçları

Öğrencilerin fonksiyonlarla ilgili hazır bulunuşluk seviyelerini tespit etmek için bir anket uygulanmıştır. Söz konusu anketin geliştirilmesi için öncelikle alanyazında fonksiyon kavramının nasıl ele alındığı incelenmiş, kavramın farklı boyutları tespit edilmiş ve kavramla ilgili karşılaşılan öğrenci kavram yanılgıları ve nedenleri incelenmiştir. Elde edilen bilgiler, genel matematik dersinin amacı ve fonksiyon kavramının analiz derslerinde kilit rol oynayan farklı özellikleriyle birlikte değerlendirilerek bazı ana başlıklar belirlenmiş ve belirlenen ana başlıklar altında belirli sayıda soru hazırlanmıştır. Seçilen sorular aynı zamanda genel

matematik dersini belirli zamandır yürütmekte olan yazarlar tarafından ifade ve içerik yönünden incelenmiş, her bir sorunun amacı yazılı olarak netleştirilmiş ve öğrencilerin vereceği muhtemel cevaplar tartışılarak ankete son hali verilmiştir. Sonuçta dört bölümden oluşan ve her bir bölümde fonksiyon kavramının o bölümle ilgili farklı bir boyutunu ön plana çıkaran sorular içeren ve toplam 11 sorudan oluşan bir anket elde edilmiştir. Anketin fonksiyonların problem çözümlerinde kullanımıyla ilgili olan ikinci bölümündeki dört soru Erdoğan (2010)'nın çalışmasından aynen alınmıştır.

Anketin ana bölümleri ve her bir bölümle ilgili soruların içeriği aşağıda açıklanmıştır:

- A. Fonksiyon belirten durumları tanıma ve fonksiyon kavramını tanımlama
 1. Cebirsel olarak verilen temsillerden fonksiyon belirtenleri tanıma
 2. Grafikselle olarak verilen temsillerden fonksiyon belirtenleri tanıma
 3. Fonksiyonu tanımlayabilme
- B. Fonksiyonları problem çözme aracı olarak kullanabilme
 1. Bir problem durumunda fonksiyonların kullanılıp kullanılmayacağına karar verme
 2. Problemin verilerine uygun fonksiyonu inşa etme
 3. Çözüm için fonksiyonel bir yöntem önerebilme
- C. Fonksiyonların temel cebirsel özelliklerini tanıma ve temel cebirsel teknikleri uygulayabilme
 1. Verilen iki fonksiyonun bileşkesini hesaplayabilme
 2. Verilen bir fonksiyonun tersi olan fonksiyonu bulabilme
 3. Bir fonksiyonun tek/çift olup olmadığına karar verebilme
- D. Fonksiyonların temel grafiksel özelliklerini tanıma ve grafiksel teknikleri uygulayabilme
 1. Grafiği verilen bir fonksiyonun tersinin grafiğini çizebilme
 2. Grafiği verilen bir fonksiyonu iki fonksiyonun bileşkesi olarak ifade edebilme
 3. Tek ve çift fonksiyonların grafiklerini tanıyabilme
 4. Artan ve azalan fonksiyonların grafiklerini tanıyabilme

Söz konusu anket genel matematik dersinin üç şubesinde, 2010-2011 güz eğitim-öğretim döneminin ilk ayında, fonksiyon kavramına giriş yapmadan önce bir ders saatinde uygulanmıştır.

3. Veri analizi

Öğrencilerin ankete verdikleri cevaplar öncelikle her bir araştırmacı tarafından bireysel olarak analiz edilmiştir. Daha sonra araştırmacılar bir araya gelerek bireysel analizleri sonucunda oluşturdukları gruplamalardan hareketle bir kodlama listesi oluşturmuşlardır. Uygulanan anketin yapısı itibarıyla tek bir kodlama yapılması uygun olmadığı için kodlamalarda bölümler arası bazı farklılıklar yapılmıştır. Örneğin bazı sorularda açıklama istenmez iken bazı

sorularda açıklama istenmiştir. Bu durum göz önünde bulundurularak ana kodlar bazı alt kodlara ayrılmıştır. Örneğin anketin B kısmını oluşturan “Aşağıdaki problemlerden her birinin çözümünde fonksiyonlardan yararlanılıp yararlanılmayacağını belirtiniz. Nedenini açıklayınız.” Şeklindeki 3. soruya verilen cevaplar, araştırmacılar tarafından ön analizleri ve gruplamaları yapıldıktan sonra, kodlama listesinde şu şekilde ifade edilmiştir :

D: Fonksiyonlardan yararlanılıp yararlanılmayacağını doğru olarak belirtmiş ve bir açıklama yapmıştır. Yapılan açıklama problemin çözümüne yönelik ifadeleri içermektedir ve problemde tanımlanabilecek fonksiyonlar tanımlanmıştır.

Y1 : Fonksiyonlardan yararlanılıp yararlanılmayacağı yanlış belirtilmiş ve verilen açıklama yanlıştır.

Y2: Fonksiyonlardan yararlanılıp yararlanılmayacağı doğru belirlenmiş fakat yapılan açıklama yanlıştır.

E: Fonksiyonlardan yararlanılıp yararlanılmayacağı doğru belirlenmiş fakat yapılan açıklama yetersizdir.

C1: Ne fonksiyonlardan yararlanılıp yararlanılmayacağı belirtilmiş ne de açıklama yapılmıştır

C2: Fonksiyonlardan yararlanılıp yararlanılmayacağı doğru belirlenmiş fakat hiç bir açıklama yapılmamıştır.

Gİ: Soru genel ifadeler kullanılarak cevaplanmaya çalışılmıştır.

Her bir problem için yapılan bu kodlama ile yüzdelik ve frekans değerleri elde edilmiştir.

Kodlama listelerinin oluşturulmasının ardından her bir araştırmacı belirli sayıdaki cevabı bireysel olarak kodlamıştır. Kodlamanın güvenilirliğini sağlamak için her bir araştırmacının kodladığı cevaplar diğer araştırmacılar tarafından da kodlanmış, daha sonra kodlamalar karşılaştırılmış, görüş ayrılığı olan kodlamalar için ortak karar verilmiştir. Bu işlem sırasında, bazı açıklamaların doğru, eksik veya yanlış olarak kabul edilmesinde tereddütler yaşanmıştır. Örneğin bir öğrencinin “bu ifade y değişkeni içermemektedir, dolayısıyla fonksiyon değildir” şeklindeki bir açıklaması öğrencinin fonksiyonun iki değişken, iki küme veya iki büyüklük arasında bir ilişki olduğunu bilip bilmediğine karar vermek için yeterli bilgi sunmamaktadır. Bu tür durumlar her ne kadar araştırmacılar tarafından derinlemesine tartışıldıktan sonra karara bağlansa da, öğrenci klinik görüşmelerinden elde edilebilecek veriler gibi daha açıklayıcı verilerin olmayışı bu çalışmanın yöntem bazında sınırlılıklarını oluşturmaktadır.

Yapılan kodlamalar sonucunda öğrenci cevaplarının her bir soru ve bölümle ilgili yüzdelik ve frekans değerleri elde edilerek tablolarla ifade edilmiştir.

III. BULGULAR

Anketin yukarıda belirtilen temaları doğrultusunda elde edilen bulgular aşağıda verilmektedir.

A. Fonksiyon belirten durumları tanıma ve fonksiyon kavramını tanımlama**1. Cebirsel olarak verilen temsillerden fonksiyon belirtenleri tanıma**

Öğrencilerin cebirsel olarak verilen temsillerden fonksiyon belirtenleri tanıyıp tanıyamadıklarını tespit edebilmek için 7 tane cebirsel ifade sunulmuş ve öğrencilerden cevaplarını açıklamaları istenmiştir.

Soru 1. Aşağıdaki ifadelerden hangileri bir fonksiyon belirtir. Cevabınızı açıklayınız.						
a	b	c	d	e	f	g
$3x+4=-2$	$2x+y=4$	x^2+3x+2	$y=x^2$	$x^2+y^2=1$	$g(x)=x^{3/2}+e$	$x=a^y, a \in \mathbb{R}$

Bu bölüme ait öğrenci cevaplarının değerlendirilmesi aşağıdaki tabloda verilmektedir.

Tablo 2. Soru 1'in cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar)

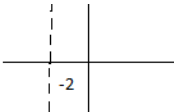
Soru1	a		b		c		d		e		f		g	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
D	32	40.5	35	44.3	16	20.3	38	48.1	12	15	15	19	9	11.4
Y1	32	40.5	7	8.9	37	46.8	5	6.3	47	59.5	29	36.7	19	24
Y2	3	3.8	7	8.9	11	13.9	3	3.8	14	17.7	7	8.9	11	13.9
E	6	7.6	25	31.7	9	11.4	26	33	2	2.6	18	22.8	22	27.8
C1	2	2.6	1	1.2	3	3.8	1	1.2	2	2.6	5	6.3	10	12.8
C2	4	5	4	5	3	3.8	6	7.6	2	2.6	5	6.3	8	10.1

D: Doğru **Y1:** Hem cevap hem açıklama yanlış **Y2:** Cevap doğru ama açıklama yanlış **E:** Eksik (cevap doğru ama açıklama yetersiz) **C1:** Hiç cevap verilmemiş **C2:** Cevap doğru ama açıklama verilmemiş

Tablo2 genel olarak incelendiğinde a, b ve d şıklarındaki sorular doğru cevap sayısı en yüksek olan sorular olarak karşımıza çıkmakta fakat bu soruların hiç birinde doğru cevapların oranı %50'yi bulmamaktadır. a, c, e ve f şıklarındaki sorular öğrencilerin en çok yanlış cevapladıkları sorular olup bu yanlışların Y1 türünden yanlışlar oldukları, yani hem cevabın hem de açıklamanın yanlış olduğu görülmektedir

Soru 1a) ($3x+4=-2$) Bu soruda öğrencilerin doğru cevaplarının sayısı kadar (%40,5) yanlış cevaplarının sayısının da yüksek olduğu görülmektedir (%40,5). Doğru cevap veren öğrenciler verilen ifadenin bir denklem olduğunu ya da fonksiyon olma kuralını taşımadığını belirten açıklamalarda bulunmuşlardır.

Ö1: $3x+4=-2$, Belirtmez, y gibi bir değere eşit değildir. Denklemdir.

Ö2: $3x=-6$  Fonksiyon belirtmez, x elemanı birden fazla y ile eşleşmiş

Yanlış cevap veren öğrencilerin % 65' y yukarıdaki doğru cevap örneklerinde verildiği gibi (Ö1, Ö2) cebirsel çözüm yaparak $x=-2$ ifadesini elde etmiştir. Fakat bu ifadenin bir fonksiyon belirttiğini söyleyerek ifadenin bir sabit fonksiyon, doğru fonksiyonu ya da bir doğru denklemi olduğu şeklinde açıklamalarda bulunmuşlardır. Yanlış cevap veren öğrencilerin %28'inin ise denklemi sıfıra eşitledikten sonra elde ettikleri cebirsel ifadeye bir y ataması yaparak fonksiyon olarak yorumladıkları görülmüştür. Geriye kalan %22'lik öğrenci grubu ise herhangi bir cebirsel işlem yapmadan bir x değeri ve buna bağlı bir $f(x)$ değeri bulacağını söyleyerek ifadenin bir fonksiyon olduğunu belirtmiştir.

Soru 1b)($2x+y=4$) Öğrencilerin %44,3'ü bu soruyu doğru cevaplamıştır. Bu öğrencilerin % 46'sı her x değeri için bir y değeri elde edileceğini ifade ederek, %32'si grafik çizimi sonrası grafik üzerinde x eksenine indirilen dikmeler ile "dikey doğru testi" kullanarak ve %22'si de verilen ifadenin $ax+b$ şeklindeki bir doğrusal fonksiyonu temsil ettiğini belirterek cevaplarını açıklamışlardır.

Öğrencilerin önemli bir bölümünün cevabı ise (%31) eksik olarak değerlendirilmiştir. Öğrencilerin yaptığı açıklamalar verilen bir cebirsel ifadenin fonksiyon olup olmadığını her durumda belirleyebilecek açıklamalar olmayıp sadece bazı özel durumlarda geçerli olduğundan bu açıklamalar eksik olarak nitelendirilmiştir. Eksik cevap veren öğrencilerin %52 si verilen ifadenin $y= f(x)$ yazım formatına uygun olduğu için fonksiyon belirttiğini ifade etmiştir. Öğrencilerin %40'ı için ise ifadenin iki bilinmeyen/değişken içermesi yeterli olmuştur. Eksik değerlendirilen diğer cevaplarda ise grafik çizilebileceği, denklemin çözülebileceği, koordinat sisteminde ikili belirttiği ve tanımsız olmadığı için fonksiyon belirttiği gibi açıklamalar yer almıştır.

Soru 1c)(x^2+3x+2) Öğrencilerin % 46,8'i bu soruyu yanlış cevaplamış, %14' ü ise yanlış açıklama yapmıştır. Her iki yanlış grubunda (Y1 ve Y2) öğrencilerin yaptığı ortak hata verilen ifadeye kendilerinin bir y değişkeni atamalarıdır. Bu öğrencilerden 22'si fonksiyon belirtir derken, 11 öğrenci fonksiyon belirtmez şeklinde görüş bildirmiştir. Fonksiyon belirtir denilen cevaplarda verilen ifadenin öğrencilerin yakından tanıdıkları ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir cebirsel ifade olması nedeniyle, öğrencilerin "parabol belirtir o halde fonksiyondur", "polinom fonksiyondur" ya da " ikinci dereceden denklemdir" şeklindeki hükümleri ön plana çıkmaktadır. Fonksiyon belirtmez diyen 11 öğrencinin ise yaptığı açıklamalarda ifadenin denklem olduğu ya da " tanım kümesindeki bir elemana görüntü kümesinde iki eleman karşılık gelir" gibi fonksiyon tanımıyla ilgili hatalı değerlendirmelerde buldukları saptanmıştır.

Soru 1d)($y=x^2$)Öğrencilerin %48,1'i bu soruyu doğru, %33'ü eksik cevaplamıştır. Doğru cevap verenlerin % 49'u ifadenin bir parabol belirttiğini, %41'i de her x değeri için bir y değerinin karşılık geldiğini ifade etmişlerdir. %8 'lik bir öğrenci grubu da grafik çizerek dikey doğru testini uygulamış ve fonksiyondur sonucuna ulaşmıştır.

Cevapları eksik kabul edilen öğrenciler ise söz konusu ifadenin bir fonksiyon belirttiğini söylerken “ x 'e değer verildiğinde y elde edilir”, “ $y = f(x)$ formatındadır” “ifadede iki değişken (x, y) vardır” gibi bir fonksiyon tanımlamaya yetersiz açıklamalarda bulunmuşlardır.

Soruya yanlış cevap veren öğrencilerin ise fonksiyon tanımıyla 1-1 fonksiyon tanımını karıştırdıkları, “ x 'in farklı değerleri için y aynı değeri alır dolayısıyla fonksiyon belirtmez” gibi ifadelerle yer verdikleri görülmüştür.

Soru 1e) ($x^2 + y^2 = 1$) %59,5'lik bir oranla öğrencilerin yanlış cevaplarının en yüksek olduğu sorudur. Açıklamalar incelendiğinde öğrencilerin sadece cebirsel ifadenin yazım formatına dikkat ettikleri ve fonksiyonun temel kuralı olan tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinden bir ve yalnız bir elemanla eşlenmesi durumunu göz ardı ettikleri, bu durumun cebirsel ifade üzerinde sağlanıp sağlanmadığına bakılmadığı görülmüştür. Öğrenciler açıklamalarında en çok “ x 'e farklı değerler verildiğinde y değeri elde edilir” ya da “ $y = (1 - x^2)^{1/2}$ şeklinde yazılabilir” gibi ifadelerle yer vermişlerdir (28 öğrenci). 13 öğrenci ise ifadenin bir çember belirttiği için fonksiyon olduğu yorumunu yapmıştır. 14 öğrenci ise fonksiyon belirtmediğini ifade etmiştir.

Soru 1f) ($g(x) = x^{3/2} + e$) Bu soruyu öğrencilerin %36,7'si verilen ifadenin fonksiyon belirtmediğini söyleyerek yanlış cevaplamışlardır. Söz konusu öğrencilerin kriter olarak polinom fonksiyon tanımını esas aldıkları görülmüştür. Verilen ifade de x değişkeninin kuvveti rasyonel bir sayı şeklinde verildiği için öğrenciler için sadece kuvveti inceleyerek polinom fonksiyon tanımına uymadığını, dolayısıyla ifadenin fonksiyon belirtmediğini söylemek yeterli olmuştur (14 öğrenci). Sayıları az olmakla birlikte bazı öğrencilerin (4 öğrenci) ise verilen ifadedeki e sayısını değişken olarak algıladıkları görülmüş, bu durum da gerek tanım kümesinin incelenmesinde gerekse ifadenin bilinen bir fonksiyon yazım formatına uygunluğuna karar vermede öğrencilerin farklı yorumlar yapmalarına neden olmuştur. Cevapların %23'ü de eksik olarak nitelendirilmiş, yukarıdaki soruların değerlendirmelerinde ifade edildiği gibi fonksiyon tanımı için yeterli olmayan aynı ya da benzer açıklamalar yapılmıştır ($y = f(x)$ formatındadır, grafiği çizilebilir o halde fonksiyondur, e sabit bir değerdir x değiştikçe $g(x)$ değeri değişir, iki değişkeni vardır, vb.).

Soru 1g) ($x = a^y, a \in \mathbb{R}$) Bu soruyu öğrencilerin %24'ü yanlış cevaplandırırken %27,8'i eksik cevaplandırmıştır. Öğrencilerin yaklaşık %40'ı verilen ifadeyi logaritmik ifadeye dönüştürerek incelemiştir. Bu öğrencilerin %12 'si a 'nın \mathbb{R} de tanımlı olması nedeniyle, bu ifadenin $a < 1$ veya $a < 0$ için logaritmik fonksiyon belirtmeyeceğini vurgulayarak ifadenin fonksiyon olmadığını söylemiş, %28'i de a 'nın durumuna dikkat etmeden ifadenin bir logaritmik ya da üstel fonksiyona karşılık geldiğini belirtmişlerdir. Bu öğrencilerin cevapları eksik olarak değerlendirilmiştir.

Öğrencilerin verilen ifadeye bağımlı ve bağımsız değişkeni belirlerken x 'i sürekli bağımsız değişken, y 'yi ise sürekli bağımlı değişken olarak algıladıkları, verilen ifadedeki eşitliğin verdiği anlam üzerinde durmadıkları görülmüştür. Bundan dolayı öğrenciler “bir x değeri için birden fazla y değeri vardır” açıklamaları ile ifadeyi fonksiyon değildir şeklinde yorumlamışlardır. Ayrıca bazı öğrencilerin bu soruda da a değerini sabit değer olarak değil de bir değişken olarak algıladıkları görülmüştür.

2. Grafikselle verilen temsillerden fonksiyon belirtenleri tanıma

Grafikselle temsil ile ilgili olarak ise toplam 7 adet grafik verilmiş ve bu grafiklerin $y=f(x)$ şeklinde bir fonksiyon belirtip belirtmediği sorulmuştur.

SORU 2) Aşağıdaki grafiklerden hangisi $y=f(x)$ şeklinde ifade edilen bir fonksiyonu temsil eder

a)	b)	c)	d)
e)	f)	g)	

Tablo 3 incelendiğinde ilk beş şıktaki soruyu öğrencilerin ortalama % 70’den fazlasının doğru cevapladığı görülmektedir. Fonksiyon temsil etmeyen iki grafiğin öğrenciler tarafından kolaylıkla belirlendiği söylenebilir (d ve e). Ne var ki f ve g şıklarındaki sorulara bakıldığında öğrencilerin önemli bir oranının bu iki grafiği fonksiyon olarak algılamadıkları görülmektedir. “Fonksiyon grafikleri doğrusaldır, noktalarla ifade edilemez” gibi açıklamaların öğrencilerin genel algılarını ifade ettiği düşünülebilir.

Tablo 3. Soru 2’in cevap tablosu (frekans ve yüzdelik oranlar)

Soru2	a		b		c		d		e		f		g	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
D	59	74.7	47	59.5	59	74.7	67	84.8	51	64.5	30	38	41	51.9
Y	14	17.7	29	36.7	16	20.3	5	6.3	22	27.9	37	46.8	32	40.5
C	6	7.6	3	3.8	4	5	7	8.9	6	7.6	12	15.2	6	7.6

D: Doğru **Y:** yanlış **C:** Cevap verilmemiş

Açıklamaların geneline bakıldığında öğrencilerin bir kısmının fonksiyon tanımını kullanarak (x değerlerine y değerlerinin karşılık gelmesi olarak) cevap verdikleri, çoğunluğunun ise dikey çizgi testi olarak adlandırılan yöntemle

başvurdukları görülmüştür. Fakat bu yönetime başvuran öğrencilerden bazılarının söz konusu testi bire birlik testi (yatay çizgi testi) ile karıştırdıkları fark edilmiştir.

3.Fonksiyonu tanımlayabilme

Bu birinci bölümle ilgili olarak en son öğrencilere “fonksiyonun tanımını yazınız” sorusu yöneltilerek öğrencilerin hangi tanım bilgisine sahip olduklarının tespit edilmesi amaçlanmıştır.

Öğrencilerin verdikleri fonksiyon tanımları içerik ve kullanılan temsil olarak iki farklı açıdan değerlendirilmiştir. Bu analizlere geçmeden önce öğrencilerin fonksiyon kavramını nasıl algıladıklarını görebilmek için formal tanım vermeye çalışan 42 öğrencinin kullandıkları terimlerin bir listesi Tablo4’de verilmiştir.

Tablo 4. Öğrencilerin fonksiyon tanımı için kullandıkları terimler

Fonksiyon	Öğrenci sayısı
bir denklemdir / $y=f(x)$ şeklindeki denklemdir	8
bir ifadedir	7
bağıntıdır	5
eşitliklerdir	3
kümelerdir / A dan B’ye $f(A)=B$ kümesidir / sayı kümesidir	3
$f(x) = ax+b$ ifadesinde verilen değerlerle elde edilen şey	2
$y=f(x)$ şeklindeki ifadeler	2
kavramdır	2
eğrilerdir / grafiklerdir	2
$y=f(x)$ de y ’nin x ’e bağlı olduğu durumlar, x ’e karşılık y ’lerden oluşan şekiller, Matematiksel terimdir, Matematiksel sistemdir, Tanım kümesinden değer kümesine götüren işlem, dönüşümdür, eşitsizliktir, şeylerdir	1 (yanda verilen her bir ifade için)

Fonksiyon tanımlarının içerik yönünden analizinde öğrencilerin fonksiyonun üç temel özelliği olan değişkenler ve büyüklükler arası bağımlılık, değişkenlik ve eşleme özelliğinden hangisine yer verdikleri ve hangi temsili kullandıkları incelenmiştir. Tablo 5’te görüldüğü gibi öğrencilerin %51,9’u eşleme özelliğini belirtmiş ve küme eşleme gösterimine başvurmuştur.

Tablo 5. Öğrencilerin fonksiyon tanımında ifade ettikleri özellikler ve ifadede kullanılan temsiller ve gösterimler (C: cebirsel, G: grafiksel, K: küme eşlemesi)

İçerik	eksik	doğru	yanlış	Kullanılan temsil-gösterim		Toplam	
						f	%
Bağıntı/ bağımlılık	7			C	5	7	8.9
				G	-		
				K	1		
değişkenlik	4	1		C	4	5	6.3
				G	1		
				K	1		
eşleme	26	12	3	C	15	41	51.9
				G	5		
				K	26		
				C	8	9	11.4
				G	1		
				K	-		
cevapsız						16	20.3
genel yorum						1	1.2

Fonksiyon tanımı tam ve doğru kabul edilen cevap sayısı 13 olup bu cevaplardan 12'sinde eşleme özelliği vurgulanmıştır: “*A dan B ye tanımlı f kuralına denir. Yani A daki her bir değere B de bir değer karşılık gelir*” “*Tanım kümesindeki HER elemanın değer kümesindeki YALNIZ BİR elemana eşlendiği kümelerdir. Değer kümesindeki her elemanın tanım kümesinde bir karşılığı olmak zorunda değildir*” “*A ve B boş olmayan iki küme olsun. A da yani tanım kümesinde ki her elemanın B de yani değer kümesinde yalnız bir karşılığı olan bağıntılara fonksiyon denir.*”

37 öğrencinin verdiği tanımlar ise eksik olarak değerlendirilmiştir. Öğrencilerin en çok tanım ve değer kümeleri arasındaki ilişkiyi açıkça belirtecek ifadeler kullanmadığı görülmüştür. “*f(x) şeklinde gösterilir. x bilinmeyenine bağlıdır. x'in çeşitli değerlerine göre değer alır*” “*Belli bir tanım kümesi ve görüntü kümesi olan tanım kümesinden görüntü kümesine götüren işlemdir*”

Bazı öğrencilerin ise fonksiyon tanımı ile 1-1 fonksiyon tanımını karıştırdıkları görülmüştür: “*düzlemde x'in herbir noktası için y'ye gelen karşılığı farklıysa bu fonksiyon belirtir.*” ($y=x$ doğru grafiği çizilerek örnek verilmiş) “ *$y=f(x)$ sağlayan birebir ve örten olan x değeri için birden fazla y değeri alamayan denklemlerdir*” “*her $x \in R$ ise x'in her bir değeri için y farklı değerler alıyorsa $y=f(x)$ şeklindeki ifadelere fonksiyon denir*”

Bazı öğrencilerin ise tanım, değer ve görüntü kümelerini karıştırdıkları saptanmıştır. Söz konusu öğrenciler tanım kümesi yerine değer kümesi, değer kümesi yerine de tanım kümesi ifadelerini kullanmışlardır.

B. Fonksiyonları problem çözme aracı olarak kullanabilme

Anketin bu bölümünde öğrencilerden verilen problemlerin çözümünde fonksiyonlardan yararlanılıp yararlanılmayacağını belirtmeleri istenmiş, böylece fonksiyonları bir problem çözme aracı olarak algılayıp algılamadıklarını öğrenmek amaçlanmıştır. Verilen problemlerden ilk üçünün çözümünde fonksiyonlardan yararlanmak anlamlı iken son soruda böyle bir durum söz konusu değildi. Öğrencilerden problemi tamamen çözmeleri beklenmemiş, sadece evet ya da hayır şeklinde soruyu cevaplandırarak cevaplarını desteklemeleri/savunmaları istenmişti.

SORU 3) Aşağıdaki problemlerden her birinin çözümünde fonksiyonlardan yararlanılıp yararlanılmayacağını belirtiniz. Nedenini açıklayınız.	
a	İki cep telefonu operatöründen biri dakika başına 25 kuruş sabit fiyat alıyor diğeri ise her ay 8tl sabit abonelik kesintisi yapıp dakika başına 17 kuruş gibi daha uygun bir fiyat öneriyor. İkinci operatörü tercih etmek için bir ayda en az ne kadar konuşmam gerekir?
b	Silindir şeklindeki bir litrelik konserve kutularından en az metalle üretilecek olanın yarıçapı ve yüksekliği nedir?
c	Ahmet'in eviyle okulu arası 8 km. Ahmet bu sabah okula yürüyerek gitmeye karar veriyor. İlk yarım saatte 4 km yürüyor. Ama daha sonra yorulmaya başlıyor ve her sonraki yarım saatte hızı yarıya düşüyor. Ahmet okuluna evden çıktıktan kaç saat sonra varır?
d	Yarıçapı 2 cm ve yüksekliği 10 cm olan silindir şeklindeki bir sürahi yarıçapı 1 cm ve yüksekliği 5 cm olan silindir şeklindeki bardaklarla doldurulmak istendiğinde kaç bardak su alır?

Öğrencilerin cevapları genel olarak incelendiğinde doğru cevapların oranının çok düşük olduğu (en yüksek %14) görülmektedir. Bu tabloda dikkat çeken bir başka nokta yanlış cevapların oranı (özellikle Y1) ile açıklamaya yer verilmeyen cevapların oranının (C1) yüksek olmasıdır.

Tablo 6. Soru 3'ün cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar)

Soru 3	a		b		c		d	
	f	%	f	%	f	%	f	%
D	11	14	0	0	5	6.3	5	6.3
Y1	15	19	24	30.4	11	14	28	35.4
Y2	5	6.3	9	11.4	16	20.2	8	10.1
E	6	7.6	0		6	7.6	7	8.8
C1	20	25.3	33	41.8	18	22.8	24	30.4
C2	7	8.8	9	11.4	13	16.4	6	7.8
Gİ	15	19	4	5	10	12.7	1	1.2

Doğru (D): Fonksiyonlardan yararlanılıp yararlanılmayacağını doğru olarak belirtmiş ve bir açıklama yapmıştır. Yapılan açıklama problemin çözümüne yönelik ifadeleri içermektedir ve problemde tanımlanabilecek fonksiyonlar tanımlanmıştır.

Y1 : Fonksiyonlardan yararlanılıp yararlanılmayacağı yanlış belirtilmiş ve verilen açıklama yanlıştır.

Y2: Fonksiyonlardan yararlanılıp yararlanılmayacağı doğru belirlenmiş fakat yapılan açıklama yanlıştır.

E: Fonksiyonlardan yararlanılıp yararlanılmayacağı doğru belirlenmiş fakat yapılan açıklama yetersizdir.

C1: Ne fonksiyonlardan yararlanılıp yararlanılmayacağı belirtilmiş ne de açıklama yapılmıştır

C2: Fonksiyonlardan yararlanılıp yararlanılmayacağı doğru belirlenmiş fakat hiç bir açıklama yapılmamıştır.

Gİ: Soru genel ifadeler kullanılarak cevaplanmaya çalışılmıştır.

Soru 3a) Bu soruda, öğrencilerden iki telefon operatörünün önerdiği abonelik tarifelerini birer fonksiyon olarak tanımlamaları ve bu iki fonksiyonu cebirsel veya grafiksel olarak karşılaştırmaları beklenmekteydi. Bu soruya doğru cevap veren öğrencilerin oranı %14'tür. Öğrencilerin dörtte biri bu soruyu cevapsız bırakmış,%20'si yanlış cevaplamış, bir diğer %20'si de sorudan bağımsız genel ifadelere başvurmuşlardır.

Öğrencilerden bazıları fonksiyonları tanımlayarak sorunun fonksiyon ile çözülebileceğini belirtirken bazı öğrenciler tanımladıkları fonksiyonu kullanarak soruyu çözüme yoluna gitmişlerdir. Öğrencilerden sorunun çözümü istenmediği için, her iki tür cevapta doğru kabul edilmiştir.

Genel ifadeler olarak nitelendirilen cevaplarda şu türden açıklamalara yer verilmiştir: *“Fonksiyondan yararlanabiliriz. Artan ve sabit fonksiyonlardan yararlanarak sorunun çözümüne gidilebilir.”*

Öğrenci cevaplarında karşılaşılan ortak hatalardan biri problem durumunu denklem olarak algılamaları ve sorudaki konuşma sürelerini değişken olarak değil bilinmeyen olarak algılamalarıdır. Bu öğrenciler sorunun denklem ile çözülebileceğini dolayısıyla fonksiyon kullanılmayacağını belirtmişlerdir:

$$\text{Ö3: } 25x = 17x + 800$$

$$8x = 800$$

$$x = 100$$

*Fonksiyon kullanmaya gerek yoktur.
Çünkü tek bir x değeri vardır. Farklı
y'lere göre x'ler değişkenlik
göstermiyor*

Soru 3b) Bu soruda öğrencilerden silindirin yüzey alanı ve hacmi arasındaki fonksiyonel ilişkiyi fark edebilmeleri ve yarıçap veya yüksekliğe bağlı bir fonksiyon tanımlanabileceğini belirtmeleri beklenmekteydi. Hiçbir öğrenci doğru kabul edilebilir bir cevap verememiştir. Öğrencilerin yaklaşık %70'i ya soruyu cevapsız bırakmış (C1) ya da yanlış cevaplamıştır (Y1). Birkaç öğrenci fonksiyon kullanılabileceğini ya da ekstremum (maximum veya minimum) problemi olduğunu belirtmişler ama bunlar genel ifade düzeyinde kalmıştır. Diğer taraftan bazı öğrencilerin problemin ifadesinden hareketle “maximum ve minimum problemi” olduğunu, dolayısıyla türevle çözülebileceğini ifade ettikleri halde fonksiyonlardan yararlanılmaz şeklinde cevapladıkları görülmektedir. 6 öğrenci de soruda verinin eksik olduğunu ifade etmiştir.

Soru 3c) Bu soruda öğrencilerin yaklaşık %36'sı fonksiyon kullanılacağını sezinlemiş fakat ya yanlış açıklama yapmışlar (Y2) ya da açıklama vermemişlerdir (C1). Açıklamalarda %12'lik bir kesim “artan, azalan fonksiyon ile çözülür, değerlere bağlı denklem oluşturulursa bu denklem doğrultusunda fonksiyon yazabiliriz, her yarım saatte hızı yarıya düşüyor yani belli değerler var fonksiyon kullanabiliriz” şeklinde genel ifadeler kullanılmıştır. Bu soruda öğrencilerin ayrıca, dizi-seri ve limit kavramlarını dile getirdikleri görülmektedir. Doğru cevap veren 5

öğrencinin 3'ü azalan fonksiyon söz konusu olduğunu belirtmiş, 2'si dizi-seri kavramlarına dayalı açıklamalarda bulunmuşlardır.

Bu üç soruyla ilgili olarak hiç bir öğrencinin grafik temelli bir açıklamada bulunmadığı görülmektedir.

Soru 3d) Bu soruyu öğrencilerin yaklaşık %36'sı yanlış cevaplamış, %30'u ise cevapsız bırakmıştır. Yanlış cevap veren öğrencilerin açıklamalarına bakıldığında, bu öğrenciler problemin çözümünde kullandıkları hacim formülünün ($\pi r^2 h$) bir fonksiyon belirttiğini söylemişler, problem durumunu ihmal ederek fonksiyonlardan yararlanılabileceğini ifade etmişlerdir. Bazı öğrenciler ise x bardak sayısını göstermek üzere x' 'e bağlı bir denklem kurularak problemin çözülebileceğini, dolayısıyla fonksiyonların kullanılabileceğini belirtmişlerdir. Cevabı eksik olarak değerlendirilen öğrenciler açıklama olarak sadece problem çözümünü hacim formülü kullanarak vermekle yetinmişler, neden fonksiyon kullanılmayacağına yönelik bir açıklamaya yer vermemişlerdir.

C. Fonksiyonların temel cebirsel özellikleri tanıma ve temel cebirsel teknikleri uygulayabilme

Bu bölümde öğrencilerden cebirsel temsille verilen fonksiyonlarla ilgili soruları cevaplamaları istenmiştir.

SORU 4)	$f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ ise $gof(x) = ?$
SORU 5)	$f(x) = x^3 + 1$ ise $f^{-1}(x) = ?$
SORU 6)	Aşağıda verilenlerden hangileri çift fonksiyondur, açıklayınız. a) $f(x)=x^2-2x+1$ b) $f(x)=4x^3-x$ c) $f(x)=x-1$ d) $f(x)=x^2+1$

Bir bileşke fonksiyon sorusu, bir ters fonksiyon sorusu ve 4 maddeden oluşan bir tek fonksiyon/çift fonksiyon sorusu sorulmuştur. Bu sorular aracılığı ile öğrencilerin fonksiyonlarla ilgili temel cebirsel özellikleri bilip teknikleri kullanabilme becerilerinin tespit edilmesi amaçlanmıştır

Tablo 7. Soru 4-5 ve 6'nın cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar)

	Soru 4		Soru5			Soru 6							
	f	%	f	%		a		b		c		D	
	f	%	f	%		f	%	f	%	f	%	f	%
D	78	98.7	70	88.6	D	56	70.9	60	76	58	73.4	59	74.7
E	-	-	1	1.3	Y1	18	22.8	5	6.3	10	12.65	3	3.8
Y	-	-	8	10.1	Y2	4	5	12	15.2	10	12.65	15	19
C	1	1.3	-	-	C	1	1.3	2	2.5	1	1.3	2	2.5
D: Doğru E: Eksik (Cevap doğru ama açıklama yetersiz) Y: Yanlış Y1: Hem cevap hem açıklama yanlış Y2: Cevap doğru ama açıklama yanlış C: cevapsız													

Öğrencilerin büyük bir kısmının cebirsel teknikleri hiç zorlanmadan uyguladıkları görülmektedir. 4. soruda sadece bir öğrenci soruyu cevapsız bırakmış, onun dışında tüm öğrenciler doğru cevap vermişlerdir. 69 (%) öğrenci $g \circ f(x) = g(f(x))$ eşitliğini belirtmiştir. 5 öğrenci $f(x)$ ifadesini doğrudan $g(x)$ fonksiyonunda yerine yazarak bileşke ifadesini almıştır ($g(x-1)$). 2 öğrenci $x^{(1/2)}$ o $(x-1)$, 2 öğrenci $g(x) \circ f(x)$ ifadesinin sonucu olarak bileşkeyi ifade etmişlerdir.

5.soruyu da, öğrencilerin %88'i doğru cevaplamıştır, yani verilen fonksiyonun tersini bulmuştur. Bununla birlikte, hiçbir öğrenci söz konusu fonksiyonun tersinin olup olmadığına karar vermek için 1-1 ve örten olup olmadığını incelememiştir. Öğrenciler $y = f(x)$ ifadesini kullanarak x için y 'ye bağlı ifadeyi elde etmiş daha sonra bu ifadeyi $f^{-1}(x)$ olarak tanımlamışlardır. Ters fonksiyonu yanlış hesaplayan öğrencilerin ise cebirsel işlem hataları yaptıkları ve değişkenler arası geçişi karıştırdıkları görülmüştür.

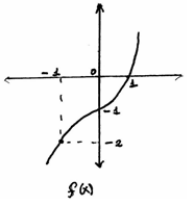
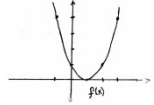
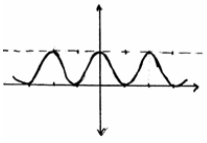
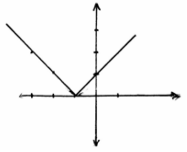
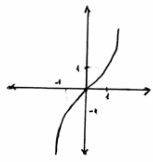
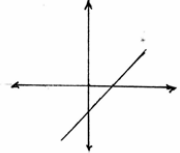
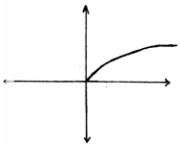
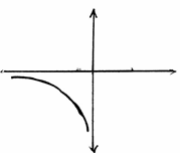
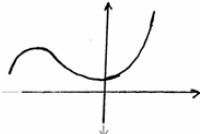
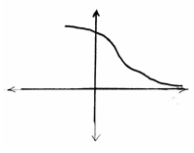
$$\text{Ö4. } f(x) = x^3 + 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{f(x) - 1} \rightarrow x^{-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}} \rightarrow$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

6.soruda öğrencilerden cebirsel temsil ile verilen dört fonksiyonun çift olup olmadıklarını incelemeleri istenmiştir. Bu soruda da öğrencilerin ortalama %70'den fazlasının doğru cevap verdiği görülmektedir. Yanlış cevaplar iki grupta incelenebilmektedir. Birinci gruptaki öğrenciler $f(x) = f(-x)$ ise fonksiyonun çift olduğunu bu eşitlik sağlanmıyorsa fonksiyonun tek olduğunu belirtmişlerdir. Aynı zamanda bu gruptaki pek çok öğrenci bu kuralı cebirsel olarak tanım kümesindeki tüm değerler için doğrulamak yerine, aldıkları iki sayının (örneğin 1 ve -1) görüntüsünün eşitlik durumunu incelemiş, eşitlik elde ediyorlarsa çift elde edilmiyorsa tek fonksiyon sonucuna ulaşmışlardır. İkinci grup öğrencilerin ise, fonksiyon ifadesinde verilen x 'in en büyük derecesinin tek veya çift sayı olma durumuna göre fonksiyonun çiftlik ve tekliğini belirledikleri görülmüştür.

D. Fonksiyonların temel grafiksel özelliklerini tanıma ve teknikleri uygulayabilme

Bu bölümde toplam 4 adet fonksiyon grafiğine dayalı soru sorulmuştur. Bu sorular sırasıyla; (S7) grafiği verilen fonksiyonların terslerinin grafiğini çizme, (S8) grafiği verilen bileşke fonksiyonu oluşturan fonksiyonları belirleme, (S9) grafiği verilen fonksiyonların tek/çift olup olmadıklarına karar verme ve (S10) grafiği verilen fonksiyonların artan/azalan olup olmadıklarına karar verme ile ilgili sorulardır.

SORU 7) Aşağıda grafiği verilen $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının tersi olan fonksiyonların grafiklerini çiziniz.			
a)			b)
SORU 8) Grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu hangi iki fonksiyonun bileşkesi olarak ifade edilebilir?			
SORU 9) Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlardan hangileri çift hangileri tek fonksiyondur, açıklayınız.			
a)	b)	c)	d)
			
SORU 10) Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlardan hangileri artan hangileri azalan fonksiyondur, açıklayınız.			
a)	b)	c)	d)
			

Tablo 8 incelendiğinde yaklaşık %75'lik bir oranla öğrencilerin en çok doğru cevapladığı sorunun 10. soru, yani grafik üzerinden artan/azalan fonksiyonları belirleme sorusu olduğu görülmektedir. Diğer sorulardaki doğru cevapların oranı ise sırasıyla %33, %25 ve %21 civarındadır.

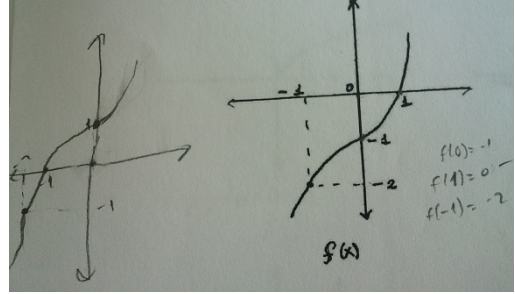
7. soruda verilen iki fonksiyonun ters fonksiyonlarının grafikleri istenmiştir. Öğrencilerin genel olarak izlediği çözüm yolu; a) grafiği verilen fonksiyonu cebirsel olarak tanımlama b) cebirsel olarak bu ifadenin tersini alma ve c) elde edilen bu ters fonksiyon ifadesinin grafiğini çizme aşamalarından oluşmaktadır.

Verilen ilk grafik $y=x^3-1$ fonksiyonunun grafiği idi. Öğrencilerin yaklaşık % 24'ü soruyu doğru, % 34'ü ise yanlış cevaplamıştır. Yanlış cevaplar incelendiğinde öğrencilerin büyük çoğunluğunun grafiğin hangi fonksiyona ait

olduğunu cebirsel olarak belirlemede yanlış oldukları, verilen grafiğin $y=x-1$ fonksiyonuna ait grafik olarak aldıkları görülmüştür.

Öğrencilerin %34'nün cevabı ise eksik olarak değerlendirilmiştir. Bu cevapların hepsinde, öğrenciler grafik üzerinde belirtilen üç noktadan hareketle bu noktaların koordinatlarını yer değiştirerek ters fonksiyonun geçtiği üç noktayı belirlemişlerdir. Ne var ki belirlen bu üç noktadan geçen eğri çiziminde, ters fonksiyon için fonksiyon eğiminde değişiklik yapmak yerine bu noktalardan geçecek şekilde verilen grafiğin bir ötelemesini almışlardır (şekil 1).

Verilen ikinci grafik $f(x) = x^2$,



$x > 0$ fonksiyonuna ait idi. Doğru cevap veren öğrenci oranının bu bölüm içinde en yüksek olduğu tabloda görülmektedir. Öğrenciler fonksiyonun cebirsel ifadesini bularak buradan ters fonksiyonu elde etme ve grafik üzerinde verilen noktalardan ters fonksiyonun geçtiği noktaları belirleyerek ters fonksiyonun grafiğinin çizimi olmak üzere iki yolu izleyerek doğru cevaba ulaştıkları görülmüştür. Bu grafiğin öğrenciler tarafından daha iyi tanınmasından dolayı, cebirsel olarak fonksiyon ifadesini doğru yazdıkları ve tersini de daha rahat elde ettikleri anlaşılmaktadır. Eksik cevaplarda ise öğrenciler ters fonksiyon olarak $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ 'i elde etmişler, fakat grafik çiziminde bir önceki soruda olduğu gibi fonksiyonun bükeyliğini hatalı çizmişlerdir. Yanlış cevaplarda ise orijine göre simetri olarak ya da y eksenine göre simetri olarak x^2 parabolünün tersini çizme girişimi öne çıkan ortak öğrenci hatalarıdır.

Şekil 1. Hatalı cevap örneği

7. soruyu çalışmaya katılan 79 öğrenciden sadece biri cebirsel temsil ile işleme geçmeden, sadece grafiksel temilde kalarak ve verilen grafiklerin $y=x$ doğrusuna göre simetrilerini alarak cevaplamıştır.

8. soruyu öğrencilerin %30'u doğru cevaplarırken yaklaşık yarısı yanlış cevaplamıştır. Bu soruda da öğrenciler öncelikle cebirsel temsile geçiş yapmış, grafiği verilen fonksiyonun cebirsel ifadesi tanımlanmış, sonrasında bileşke işlemi yapıldığında bu cebirsel ifadeye ulaşmayı sağlayacak iki fonksiyonun cebirsel ifadelerini verme yoluna gitmişlerdir. Yanlış cevaplara bakıldığında, %30'undaki hatanın f fonksiyonunun cebirsel ifadesinin yanlış tanımlanmasından, % 43,5'nun f fonksiyonunun doğru tanımlanmasına rağmen bileşkeyi oluşturan fonksiyonların yanlış tanımlanmasından kaynaklandığı görülmektedir.

Tek ve çift fonksiyonları grafiksel olarak belirlemeye yönelik 9. soruda öğrencilerin %70'i cebirsel kurala dayalı çözüm ararken (fonksiyonların cebirsel ifadelerini tanımlayarak, grafik üzerinde alınan noktaların görüntülerini inceleme),

sadece %14'ü grafiksel yaklaşımı kullanarak y eksenini ve orijine göre simetri durumunu incelemişlerdir. Tablo 8'den öğrencilerin özellikle (yaklaşık %65'inin) ne tek ne çift olan fonksiyonlarda yanıldıkları görülmektedir. Verilen açıklamalar cebirsel yaklaşımı izleyen öğrencilerin eğer bir fonksiyon çift fonksiyon kuralını sağlamıyorsa tek fonksiyon olacağını düşündüklerini göstermektedir. Grafiksel yaklaşımı izleyen öğrencilerde ise çift ve tek fonksiyon için simetri kurallarının ayrı ayrı yazıldığı ama bu öğrencilerden bazılarının belirttikleri simetri kuralını uygulayamadıkları görülmüştür.

Öğrencilerin yaklaşık %75'inin doğru cevapladığı 10. soruya gelince, öğrencilerin %67'sinin, artanlık ve azalanlığı sözel olarak açıkladığı (x artarken y artıyorsa artan, y azalıyorsa azalandır), % 7,6'sının ise cebirsel temsil kullandığı görülmektedir. Öğrencilerin %19'u ise herhangi bir kuralı ifade etmeden sadece grafik üzerinde bazı noktaları işaretleyerek fonksiyonların artan veya azalan olup olmadıklarına karar vermiş, %5'i belli noktalarda grafiğe çizilen teğetlerin eğimini inceleyerek cevaplamış, 1 öğrenci ise "sağ kol yukarı artan, sağ kol aşağı azalan" olarak ifade ettiği informel bir teknik uygulamıştır.

Sorunun a, b ve d şıklarında verilen fonksiyonlar verilen tanım aralığında artan veya azalan iken, c şikkındaki fonksiyon için grafiğin üç farklı bölgeye ayrılması gerekli idi. Bu soruda diğerlerine oranla doğru cevap veren öğrencilerin sayısının azaldığı, yanlış cevap veren veya cevapsız bırakan öğrencilerin sayısının ise arttığı görülmektedir. En çok yanlış yapılan grafik ise b şikkında koordinat sisteminin III. bölgesinde verilen azalan fonksiyon grafiğidir. Öğrencilerin bu sorudaki açıklamalarına bakıldığında, x değerleri artarken y değerlerini artan olarak algıladıkları, inceledikleri x ve y değerlerinin negatif reel sayılar olduğunu ihmal ettikleri görülmektedir.

Tablo 8. Soru 7-8-9 ve 10'nun cevap tablosu (frekans ve yüzdelik oranlar)

			D	E	Y		C	
					Y1	Y2	C1	C2
Soru 7	a	f	20	27	27		5	
		%	23.3	34.2	34.2		6.4	
	b	f	33	18	24		4	
		%	41.8	22.8	30.4		5	
Soru 8		f	22	4	39		14	
		%	27.9	5	49.4		17.7	
Soru 9	a	f	23	21	5	13	11	6
		%	29.1	26.5	6.4	16.5	13.9	7.6
	b	f	11	3	51	-	13	1
		%	13.9	3.7	64.6	-	16.5	1.3
	c	f	20	14	9	28	7	1
		%	25.3	17.7	11.4	35.4	8.9	1.3
	d	f	14	1	48	-	14	2
		%	17.7	1.3	60.8	-	17.7	2.5

Soru 10	a	f	66	2	4	1	-	6
		%	83.6	2.5	5	1.3	-	7.6
	b	f	56	-	17	1	-	5
		%	70.9	-	21.5	1.3	-	6.3
	c	f	46	7	12	-	10	4
		%	58.2	8.9	15.2	-	12.7	5
	d	f	63	4	3	-	1	8
		%	79.7	5	3.8	-	1.3	10.2
D: Doğru E: Eksik (Cevap doğru ama açıklama yetersiz) Y: Yanlış Y1: Hem cevap hem açıklama yanlış Y2: Cevap doğru ama açıklama yanlış C: cevapsız C1: Hiç cevap verilmemiş C2: Cevap doğru ama açıklama verilmemiş								

III. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada Genel Matematik dersi kapsamında henüz fonksiyon kavramını incelememiş ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinin fonksiyon kavramı ile ilgili hazır bulunuşluk düzeyleri farklı açılardan (kavramsal ve işlemsel bilgileri, farklı temsilleri ve bu kavramı bir problem çözme aracı olarak kullanabilme durumları) incelenmiştir.

Çalışmanın sonuçlarında, öğrencilerin cebirsel temsil ile verilen durumlardan fonksiyon olanları tanıma ile ilgili olarak çoğunlukla daha önceden tanıdıkları yapılardan (doğrusal fonksiyon, parabol, vs.) hareket ettikleri görülmüştür. Tall ve Bakar (1992) bu durumun öğrencilerin fonksiyon kavramı ile ilgili “prototip örnekler” geliştirmelerinin bir sonucu olduğunu belirtmektedir. Öğrencilerin fonksiyonun formal bir tanımını bilseler de verilen bir ifadenin fonksiyon olup olmadığı sorulduğunda tanımı kullanmak yerine geliştirdikleri bu prototip örneklerine dayalı cevaplar verdikleri daha önceki araştırmalarda da elde edilen sonuçlardan biridir (Tall & Vinner, 1981). Bu çalışmada da öğrencilerin cebirsel bir ifadenin bir fonksiyon belirtip belirtmediğine karar vermeyi sağlayan aşağıdaki üç özelliği göz ardı ettikleri veya sistematik olarak kullanmadıkları sonucuna ulaşılmıştır:

- 1- Bir fonksiyon biri tanım ve diğeri değer kümesi olmak üzere iki küme arasında bir ilişki tanımlar
- 2- Cebirsel ifadeyle verilen bir fonksiyon biri bağımlı ve biri bağımsız değişken olmak üzere iki değişkeni görünür kılar
- 3- Fonksiyonun iki küme arasında tanımlanmış olduğu ilişki özel bir ilişkidir.

Öğrencilerin fonksiyon tanımındaki bu özellikleri birlikte değerlendirmeyip sadece birini veya ikisini kullanmaları alanyazında da ele alınan ve bu çalışma kapsamında da elde edilen bazı öğrenci hatalarının ortaya çıkmasının nedeni olarak yorumlanabilir. Bu yanılgıların başında dekleme ve fonksiyonun

ayrılmaması, verilen bir cebirsel ifadenin (x^2+3x+2 vb.) fonksiyon olarak kabul edilmesi, tanım ve değer kümelerin belirli olmadığı ama iki değişkenin görünür olduğu cebirsel ifadelerin fonksiyon olarak kabul edilmesi gelmektedir. Bunun yanında öğrencilerin fonksiyon ifadesindeki bağımlı- bağımsız değişkenlerin ya da değişken ve sabit değerlerin belirlenmesinde de zorluklar yaşadıkları görülmüştür.

Fonksiyon kavramının grafiksel temsilde kavramsal bilginin kullanılmadığı, verilen teknikleri uygulamanın ön plana çıktığı görülmektedir. Grafiksel temsil ile verilen durumlardan fonksiyon belirtenlerin belirlenmesinde öğrenciler dikey çizgi testi dediğimiz tekniği başarı ile uygulamaktadır. Bununla birlikte öğrencilerin özellikle süreksizlik içeren grafikleri değerlendirirken yanılgıları görülmektedir. Bu yanılgı da Vinner (1993) ve Breidenbach vd. (1992)'nin çalışmalarında belirttikleri, fonksiyon grafiğini düzgün ve sürekli olarak algılama, parçalı tanımlı (ayrık noktalar, eğri parçaları) fonksiyon grafiklerini fonksiyon olarak kabul etmeme şeklindeki kavram yanılgıları ile örtüşmektedir.

Fonksiyon kavramının tanımına baktığımızda ise öğrencilerin sadece %15'nin formal tanımı doğru verdiği, %47'sinin tanımının eksik kaldığı, %20'sinin ise bu soruyu cevaplamadığı görülmüştür. Fonksiyon kavramının formal tanımın öğrenciler tarafından verilemediği daha önceki çalışmalarda da ortak sonuç olarak vurgulanmaktadır. Verilen ifadelerde öğrencilerin büyük çoğunluğunun fonksiyonun eşleme özelliğini belirttiği, bağıllık ve değişkenlik özelliğinin ise çok az öğrenci tarafından ifade edilmeye çalışıldığı görülmüştür. Ayrıca tanımlarda kümesel gösterim öne çıkmaktadır. Buna benzer bir sonuç Bayazıt ve arkadaşlarının (2010) eğitim fakültesinde farklı sınıf seviyelerinde bulunan ortaöğretim matematik öğretmeni adayları ile yaptıkları çalışmada da elde edilmiştir. Söz konusu çalışmada katılımcıların % 87'sinin küme eksenli tanımları verdiği, fonksiyonun eşleme özelliğinin öne çıkarıldığı, fonksiyon olma şartlarının ise sadece bu öğrencilerin % 45'i tarafından belirtildiği sonucuna ulaşılmıştır. Bu çalışmada elde edilen bir diğer sonuç öğrencilerin özellikle tanım, değer, görüntü kümesi ifadelerini karıştırmalarıdır. Öğrenciler tarafından fonksiyon tanımında, değer kümesi, x değerlerinin alındığı küme ve tanım kümesi de f fonksiyonun sonuçlandığı yani tanımlandığı küme olarak alındığı düşünüldüğünde bu kullanımın kelimelerin Türkçe anlamlarıyla ilişkili olabileceği fikri akla gelmektedir.

Fonksiyonların problem çözme aracı olarak kullanılması konusunda ise yapılan çalışmaların daha çok fiziksel olayları içeren (örneğin hız problemleri) durumlarda öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri yorumlamaları konusuna yoğunlaştıkları görülmektedir. Bu durumlarda devreye giren topografiksel yapıların kullanılmasına bağlı olarak öğrencilerin bazı ortak hatalar yaptıkları görülmüştür (Carlson, 1998; Monk, 1992; Monk ve Nemirovsky, 1994 akt. Carlson and Oehrtman, 2005) Örneğin, yandan görünümü verilen bir arazide bisikletle ilerleyen bir kişinin hız-konum grafiğinin çiziminde öğrenciler grafiğe verilen arazi şeklinin özelliklerini yansıtmaktadırlar (Monk, 1992). Türkiye'de gerçekleştirilen bir çalışmada ise Mahir (2010) matematik bölümü öğrencilerinden günlük hayat

durumlarını ifade eden fonksiyon grafikleri ile matematiksel fonksiyonları yorumlamalarını istemiş ve öğrencilerin günlük hayat durumları ile ilgili grafikleri daha rahat yorumladıklarını tespit etmiştir. Mahir'in çalışmasının aksine bu çalışmada öğrencilerin fonksiyonları günlük hayat problemlerinin çözümünde bir araç olarak kullanmakta önemli oranda zorlandıkları ve bu problemlere fonksiyonel bir değer atfetmedikleri görülmüştür. Bu sonuç, Mahir'in çalışmasının tersine, öğrencilerden verilen grafikleri yorumlamaları değil, sözel ifadelerden fonksiyon ve fonksiyon grafikleri oluşturmalarının istenmiş olmasıyla açıklanabilir. Öğrencilerin denklem ile fonksiyon arasındaki ayrımı yapamadıkları, bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi net bir şekilde göremedikleri (yüzey alanı ve hacim, yarıçap ve yükseklik) ve fonksiyonların grafiklerinden yararlanamadıkları görülmektedir. Yine bir önceki bölümde olduğu gibi, sadece problemlerin ifadelerinin kendilerine çağrıştırdıkları konulardan ve problem içinde geçen kelimelerden (en az, en çok, hacim-alan, vs.) hareket ederek cevap verdikleri görülmektedir. Bu sonuç Erdoğan (2010) çalışmasındaki sonuçlarla büyük oranda örtüşmektedir.

Fonksiyonlarla ilgili temel cebirsel özellikleri ve teknikleri kullanmayla ilgili olarak öğrencilerin genelini başarılı oldukları görülmekle birlikte, aşırı teknik cevaplar ve eksik tanımlar burada da kendini göstermektedir. Öğrencilerin önerilen fonksiyonların tersi var mıdır sorusu üzerine düşünmeden doğrudan ters fonksiyon ifadesini hesaplamaları veya bir fonksiyon çift değil ise tektir gibi çıkarsamalarda bulunmaları bu cevaplara örnek olarak verilebilir.

Temel grafiksel özellikleri tanıma ve teknikleri uygulayabilme bölümünde öğrenciler bazı sorularda belirli bir başarı göstermekle birlikte, bu başarının önemli bir kısmının cebirsel temsile geçiş yaparak soruyu cebirsel olarak inceledikten sonra elde edilen sonucu grafiksel olarak ifade etme yönteminden kaynaklandığı görülmektedir. Dolayısıyla öğrencilerin grafiksel özellikleri tanıma ve teknikleri uygulama konusunda önemli eksikliklerinin olduğunu söylemek mümkündür. Yapılan diğer çalışmalarda da bu yönde sonuçlar elde edilmiştir. Bayazıt (2006)'ın öğretmenlerle yaptığı çalışmada öğretmenlerin de sadece cebirsel temsil kullandıkları görülmüştür. Baştürk (2010), Akkoç (2003) ve Karakaş ve Güven (2004)'nin çalışmalarında da elde edilen sonuçlar öğrencilerin cebirsel temsilde başarılı olduğunu fakat grafiksel temsil alanında aynı başarının elde edilemediğini göstermektedir.

Sonuç olarak, öğrencilerin fonksiyon kavramını tanımlama ve kavramın cebirsel temsillerini tanıma konularında önemli eksiklikleri olduğu görülmektedir. Diğer yandan, cebirsel teknikleri grafiksel tekniklere oranla daha iyi tanıyıp kullanabiliyor olmalarına rağmen bu kullanımın daha çok işlemsel bilgi üzerine kurulu olduğu ve gerektiği şekilde anlamlandırılmamış olduğu görülmektedir. Fonksiyonlardan problem çözme aracı olarak yararlanabilmenin hem kavrama gerekli anlamları yükleme hem de cebirsel ve grafiksel tekniklere yeterince hakim olmayı gerekli kıldığı düşünüldüğünde öğrencilerin bu tür problemler karşısında

tespit edilen başarısızlıklarının nedeni belirli bir oranda açıklanabilmektedir. Wilson ve Llyod (1998) da fonksiyon kavramının farklı temsilleri arasında geçiş yapabilmeye yeteneğinin problem durumlarını yorumlayabilmeleri için gerekli olduğunu belirtmektedir.

Bu sonuçtan hareketle, ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinin üniversiteye girişte fonksiyonlar konusundaki hazır bulunuşluklarının analiz derslerine giriş yapmak için yeterli olmadığı, dolayısıyla genel matematik dersinde fonksiyonların kapsamlı bir şekilde ele alınmasının gerekli olduğu söylenebilir. Dubinsky & Harel (1992) ve Breidenbach vd., (1992) fonksiyon tanımının tüm özellikleri ile verilmediğinde fonksiyonun sadece cebirsel ve aritmetik işlemlere indirgenerek fonksiyon kavramının anlamında ve açıklamasında sorunlar yaşandığını belirtmektedirler. Dolayısıyla Genel Matematik derslerinde fonksiyon kavramının ele alınışında daha bütüncül bir yaklaşımın ortaya konulmasının gerekli olduğu anlaşılmaktadır. Özellikle fonksiyon kavramının içerdiği bağıklık, değişkenlik ve eşleme anlamlarının her birine eşit önem verilmeli, öğrencilerin cebirsel temsillere verdiği anlam kuvvetlendirilmeli, grafiksel temsil ve teknikler geniş bir şekilde ele alınmalıdır. Ayrıca Erdoğan (2010)'ın da belirttiği gibi fonksiyonların teorik anlamı kadar problem çözme aracı olarak kullanımına da önem verilmeli, bu türden etkinlikler gerçekleştirilmelidir.

Alanyazında fonksiyon kavramının öğretimine yönelik pek çok öğretim modeli ve önerileri bulunmaktadır. Yapılandırmacı yaklaşımı esas alan öğretim modelleri (DeMarois ve Tall, 1999), beşgensel model (Janvier, 1987), fonksiyonlarda süreç bakış açısının kazandırılması (Carlson ve Oehrtman (2005) ve kavram eksenli öğretim modeli (Hiebert vd, 1997 akt. Bayazıt, 2008) bu modellere örnek olarak verilebilir. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar söz konusu modeller ışığında değerlendirilerek Genel Matematik derslerinde fonksiyonların öğretimiyle ilgili nasıl bir yaklaşım sergilenebileceği belirlenebilir.

Diğer yandan, Genel Matematik derslerine haftada 6 saat ayrıldığı düşünüldüğünde teknolojik araçlar bu ders kapsamında rahatlıkla kullanılabilir. Bu kullanımın belirtilen amaçlara ulaşmada büyük fayda sağladığı daha önceki çalışmalarda ortaya konmuştur (Schwingendorf vd., 1992; Smart, 1995). Örneğin, Smart (1995) grafiksel hesap makinelerinin kullanımının öğrencilerin cebirsel ve grafiksel temsilleri anlamalarını, bu temsiller arasındaki ilişkileri kurmalarını kolaylaştırdığını ve problem durumlarında görsel stratejileri kullanmalarını desteklediğini belirtmektedir (akt. Bayazıt,2008). İnternette kolayca ulaşılabilecek pek çok ücretsiz yazılımın ve her geçen gün fiyatları daha ulaşılabilir olan performanslı hesaplı makinelerinin (TI Nspire CAS gibi) bu ders kapsamında rahatlıkla kullanılabilmesi düşünülmektedir.

Kaynakça

- Akkoç, H. (2005). Fonksiyon kavramının anlaşılması: Çoğul temsiller ve tanımsal özellikler. *Eğitim Araştırmaları Dergisi (Eurasian Journal of Educational Research)*, 20.
- Akkoç, H. (2006). Fonksiyon kavramının çoklu temsillerinin çağrıştırdığı kavram görüntüleri. *Hacettepe Üni. Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30, 1–10
- Altun, M. ve Yılmaz, A. (2008). Lise öğrencilerinin tam değer fonksiyonu bilgisini oluşturma süreci, *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(2), 237-271.
- Altun, M. ve Yılmaz, A. (2010). Lise öğrencilerinin parçalı fonksiyon bilgisini oluşturma ve pekiştirme süreci. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 23(1), 253-274
- Baştürk, S. (2010). Öğrencilerinin fonksiyon kavramının farklı temsillerindeki matematik dersi performansları. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30(2), 465-482.
- Bayazit İ ve Aksoy Y. (2010). Öğretmenlerin Fonksiyon Kavramı ve Öğretimine İlişkin Pedagojik Görüşleri. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 9(3):697 -723
- Bayazit İ. (2011). Öğretmen adaylarının matematik öğretiminde analogi kullanımları konusundaki görüş ve yeterlilikleri. *Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi*, 31,139-158.
- Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285. Breidenbach, D., Dubinsky, Ed., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics*, 23(3), 247-285.
- Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. III. CBMS Issues in Mathematics Education* (pp. 114-162). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Carlson, M. ve Oehrtman, M. (2005). *Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function*. The Mathematical Association of America (Research Sampler).
- D. Tall, Ve S., Vinner, “Concept İmage And Concept Definition İn Mathematics, With Special Reference To Limits And Continuity”, *Educational Studies İn Mathematics*, 12: 151– 169 (1981).

- Dede, Y., Bayazit, İ., & Soybaş, D. (2010). Öğretmen adaylarının denklem, fonksiyon ve polinom kavramlarını anlamaları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 18(1), 67-88
- Dubinsky, Ed. & Harel, G. (Eds.). (1992). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, United States of America: Mathematical Association of America.
- Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 140-152). Dordrecht: Kluwer Academic.
- Erdoğan, A. (2010). Primary teacher education students' ability to use functions as modeling tools. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2(2), 4518-4522.
- Even, R. (1990). Subject Matter Knowledge for Teaching and the Case of Function. *Educational Studies in Mathematics* 21 (6), 521-544.
- Even, R. (1991). The Inverse Function: Prospective Teachers' Use of 'Undoing'. *International Journal of Mathematics Education Science and Technology*, 23 (4), 557-562.
- Even, R. (1993). Subject-Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge: Prospective Secondary Teachers and the Function Concept. *Journal for Research in Mathematics Education* , 24 (2), 94-116.
- Goldenberg, E. P. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: Mathematical, technical and pedagogical challenges in the educational use of graphical representation of functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 7(2), 135-173.
- Hitt F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 123-134.
- Karakaş, İ., ve Güven, B. (2004). Fonksiyon Kavramının Farklı Öğrenim Düzeyinde Olan Öğrencilerdeki Gelişimi. *Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 4(16), 64-73.
- Knuth, J. E. (2000). Student understanding of the Cartesian Connection: An exploratory study. *Journal of Research in Mathematics Education*, 31(4), 500-508.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
- Markovits Z., Eylon B. ve Bruckheimer M. (1986). Functions today and yesterday *For the learning of mathematics*, 6(2)

- Rojano, T. (2002). Mathematics Learning in the Junior Secondary School: Students' Access to Significant Mathematical Ideas. In L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (vol. 1, pp. 143-161). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Romberg, T. A., Fennema, E. & Carpenter., T. P. (Eds.). (1993). *Integrating research on the graphical representation of functions*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sajka, M. (2003). A secondary school student understands of the concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 229-254.
- Tall D. & Vinner S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Tall, D. O. & Bakar, M. (1992). Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs. *International Journal of Math, Education, Science, and Technology*, 23 (1). 39–50.
- Tekin, B., Konyalıoğlu, A. C., ve Işık, A. (2009). Ortaöğretim öğrencilerinin fonksiyon grafiklerini çizebilme becerilerinin incelenmesi, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 17(3) 919-932
- Thompson, P. W.(1994a). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 229-274. Vidakovic, D. (1996). Learning the concept of inverse function. *Journal for Computers in Mathematics and Science Teaching*, 15(3), 295-318.
- Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (4), 356-366.
- YÖK, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı ve Ders İçeriği, http://www.yok.gov.tr/component/option,com_docman/task,cat_view/gid,134/temid,215/ adresinden Eylül 2011 tarihinde alınmıştır.

First Year Prospective Middle School Mathematics Teachers' Readiness for Function Concepts

I. Introduction

In 1997, the Higher Education Council (YÖK) went through some changes on nationwide teacher education programs and prepared a common curriculum to be used in these programs around the country. In this reorganization, some of the courses previously taught were removed from the program, some new courses were added to the program, and the content of some of the courses were redeveloped. General Mathematics was one of such courses that its content was revised. When

we look at the content, we see that the purpose of the course is to teach variety of basic mathematics topics, such as number sets, equations and inequalities, function concepts and operation with functions, and series. These concepts are not new to those students who enroll the mathematics teacher education program since the secondary mathematics curriculum already includes them. In this respect, it is possible to think that the purposes of General Mathematics is to help students from different mathematical backgrounds reach a similar readiness level before they take advanced mathematics courses in the program.

A special emphasis is given to the function concepts in content of the course. Functions are considered as one of the fundamental concepts of mathematics. Research (e.g., Even 1990, Breindenbach vd 1992, Tall & Vinner 1981, Markovits et al. 1986, Goldenberg 1988, Vinner & Dreyfus 1989, Leinhard et al. 1990, Eisenberg 1991, Even 1992, Tall & Bakar 1992, Dubinsky & Harel 1992, Romberg et al. 1993, Vidakovic 1996, Hitt 1998, Knuth 2000, Rojano, 2002; Sajka, 2003, Carlson & Oehrtman 2005) indicated that many students have difficulties in understanding functions, specifically interpreting different representations (algebraic, graphical, and numerical) related to functions. Many studies (e.g., Karakaş & Güven 2004, Akkoç 2005, Altun & Yılmaz, 2008, 2010, B Tekin, Konyalıoğlu & Işık, 2009, Dede, Bayazit & Soydaş, 2010; Baştürk 2010, Bayazit & Aksoy 2010, Bayazit 2011) have been conducted in Turkey about function concepts. However, in general, these studies do not provide a clear picture of how prospective teachers conceive function concepts. This creates a difficulty about what to emphasize in General Mathematics related to function concept. The purpose of this study was to explore prospective middle school teachers' levels of readiness for concepts of functions.

II. Method

This study employed survey method (Karasar, 2008) to investigate prospective middle school teachers' understanding of functions.

1. Participants

This study was conducted in an elementary mathematics teacher education program at a public university in the central part of Turkey with a total of 79 first year prospective middle school teachers, who took General Mathematics course for the first time.

2. Data Collection Tools

A written instrument which consisted of 11 tasks was used to identify the prospective teachers' readiness levels for function concepts. The instrument consisted of the following themes:

A. Identifying functions under different representations and defining function concept

1. Identifying functions from given algebraic representations

2. Identifying functions from given graphical representations
 3. Defining function concept
- B. Using functions as problems solving tools
1. Deciding whether functions can be used for a problem situation
 2. Forming a function for a given problem situation
 3. Suggesting a functional method for a solution
- C. Knowing basic algebraic properties of functions and using algebraic methods
1. Finding compound functions
 2. Finding inverse functions
 3. Deciding whether a function is an even or odd function
- D. Knowing basic graphical properties of functions and using graphical methods
1. Drawing a graph of an inverse function based on a given function graph
 2. Identifying a function as a compound of two function, based on a given function graph.
 3. Identifying even and odd functions based on their graphs
 4. Identifying increasing or decreasing functions based on their graphs

3. Data Analysis

The responses given to the tasks were coded. To increase the validity of codes three researchers coded the data separately and made comparisons and discussions to reach a common decision.

III. Results and Discussion

The results of the study indicated that prospective middle school mathematics teachers had difficulty defining functions and identifying functions from their algebraic representations. However, although the teacher candidates seemed to better execute functions using algebraic techniques compared to graphical techniques, this showed their procedural understanding rather than conceptual understanding. Therefore, General Mathematics course should focus on functions extensively and help teacher candidates develop meaningful understanding of functions. Specifically, the meanings that teacher candidates assign to algebraic representations of functions should be broadened. The course should spend more time on graphical representations and techniques. Functions should be used as problems solving tools. Technology, specifically graphing calculators, can help teacher candidates develop meaningful understanding of functions.