

Cebir Öncesi: 3, 4 ve 5. Sınıf Öğrencilerinin Fonksiyonel İlişkileri Genelme Düzeyleri^{††}

Early Algebra: The Levels of 3th, 4th and 5th Grade Students' Generalisations of Functional Relationship

Handegül Türkmen^{**}
Dilek Tanışlı^{***}

To cite this article/Atf için:

Türkmen, H. ve Tanışlı, D. (2019). Cebir öncesi: 3. 4. ve 5. sınıf öğrencilerinin fonksiyonel ilişkileri genelme düzeyleri. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi – Journal of Qualitative Research Education*, 7(1), 344-372. doi:10.14689/issn.2148-2624.1.7c1s.16m

Öz. Bu çalışmanın amacı, cebir öncesi dönemde olan üçüncü, dördüncü ve beşinci sınıf öğrencilerinin fonksiyonel ilişkileri genelme düzeylerini belirlemektir. Araştırma yöntemi olarak temel nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Araştırmanın katılımcıları cebir öncesi dönemde olan orta sosyo-ekonomik düzeyde yer alan bir okulda öğrenim gören üçüncü sınıflardan 45, dördüncü sınıflardan 36 ve beşinci sınıflardan 35 kişi olmak üzere toplam 116 öğrenciden oluşmaktadır. Veriler araştırma amacı doğrultusunda açık uçlu sorular yardımıyla toplanmıştır. Verilerin analizinde tematik analiz yöntemi kullanılmıştır. Bu bağlamda alanyazında daha önce geliştirilmiş olan fonksiyonel düşünme düzeyleri dikkate alınmış ve bu düzeylerden bazıları bu araştırma kapsamında kullanılmış aynı zamanda bazı düzeylere ilişkin alt düzeyler oluşturulmuştur. Tüm sınıf düzeylerindeki öğrencilerin genel olarak fonksiyonel düşünmenin birçok göstergesine sahip olduğu görülmüştür. Ancak genel kuralı $y=mx+n$ formunda olan ilişkileri genelleyebilme ve temsil etmede bazı öğrencilerin daha çok zorlandığı araştırmanın önemli görülen sonucundan birisi olmuştur. Bu sonuç cebir öncesi dönemde yer alan öğrencilerin fonksiyonel düşüncelerinin geliştirilebilir olduğu göstermektedir. Bu nedenle daha erken yaşlarda fonksiyonel düşünmeyi geliştirici etkinliklerin programlarda ve ders kitaplarında artırılması gerekmektedir.

Anahtar Sözcükler: Cebir öncesi, fonksiyonel düşünme, genelme

Abstract. The purpose of this study is to determine the students' levels of generalisation of functional relationships in third, fourth and fifth grade. The design of the study was a basic qualitative research study. Participants were 116 students; 45 from the third grade, 36 from the fourth grade and 35 from the fifth grade from a middle school. The data were collected with the help of open-ended questions. Thematic analysis was used to analyze the data. In this context, the levels of functional thinking previously developed in the literature have been taken into consideration and some of these levels have been used in this research and at the same time some levels of lower levels have been formed. It has been seen that most students at all grade levels have many indications of functional thinking in general but some students have more difficulty in generalizing and representing the general rule $y=mx+n$. This result shows that the functional thinking of the students in the early algebra period can be improved. Therefore, it is necessary to increase the activities that develop functional thinking in curriculum and textbooks at an earlier age.

Keywords: Early algebra, functional thinking, functional relationship, generalization

Makale Hakkında

Gönderim Tarihi: 11.11.2018

Düzeltilme Tarihi: 19.12.2018

Kabul Tarihi: 27.01.2019

^{††} Bu çalışma 23-25 Mayıs 2018 tarihlerinde Afyonkarahisar'da düzenlenen Uluslararası Bilim ve Eğitim Kongresi'nde-ICSE2018 (International Congress on Science and Education) sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

^{**} Milli Eğitim Bakanlığı, Konya, Türkiye, e-mail: handegulturkmen@gmail.com ORCID: 0000-0003-4129-6816

^{***} Sorumlu Yazar / Correspondence: Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, Türkiye, e-mail: dtanisl@anadolu.edu.tr ORCID: 0000-0002-2931-5079

Giriş

Okul matematiğinin önce aritmetik ile başlayan daha sonraki dönemlerde cebir ile devam eden geleneksel yaklaşımının cebir öğrenmede başarısızlığa yol açması cebir öncesinin temel olarak matematik derslerine girmesini sağlamıştır (Kaput, 1998; Kaput, Carraher ve Blanton, 2008; Stephens, vd. 2017). Son on yılda birçok matematik eğitimcisi cebirin erken yaşlardan itibaren başlaması gerektiğini tartışarak, cebir öncesinin ilköğretim matematik dersi öğretim programının bir parçası haline gelebilmesini sağlamıştır (NCTM, 2000; Carraher vd., 2006). Cebir öncesinin sezgisel ve informal yollarla cebirsel düşünmenin temelini oluşturarak, hem cebir öğreniminde ortaya çıkan problemlerin giderilmesinde hem de cebirdeki başarıyı artırmada kritik bir önemi olduğu bilinmektedir (Stephens vd. 2017). Aynı zamanda cebir öncesinin öğrencilerin genelleştirilmiş aritmetik, eşitlik ve değişken gibi temel cebirsel kavramları daha derinden anlamalarını sağlayarak aritmetik ve cebir arasında köprü görevi gördüğü de tartışılmaktadır (Akkan, Baki ve Çakıroğlu, 2011; Stephens vd., 2016).

Cebir öncesi, aritmetiği genelleme ve örüntüler ile çalışarak fonksiyonel ilişkiyi tanımlama diğer bir değişle fonksiyonel düşünme şeklinde iki temel alana odaklanmaktadır. Bu çalışmanın da temel konusu olan fonksiyonel düşünme en genel anlamıyla nicelikler ve nicelikler arası ilişki bilgisi olarak tanımlanabilir (Smith, 2003). Matematik sayılar, modeller ve değişkenler, bunlar arasındaki ilişkiler ve bunların dönüşümü (ya da değişim) dır. Matematiğin gücü de ilişkiler ve dönüşüme dayanır. İlişkinin ve dönüşümün temeli ise fonksiyonel düşünmedir (Scandura, 1971; akt. Warren ve Cooper 2005). Bu nedenle fonksiyonel düşünme matematik eğitiminin bütününe etkileyen genel bir düşünme yoludur (Hoffkamp, 2011; Vollrath, 1989).

Fonksiyonel düşünme fonksiyon kavramı ile güçlü bir şekilde bağlantılıdır (Vollrath, 1989). Bu bağlamda fonksiyonel düşünmenin kazanımı hem cebire hem de fonksiyon kavramına girişi kolaylaştırır (Kabael ve Tanışlı, 2010). Bu nedenle fonksiyonel düşünmenin erken yaşlardan itibaren aşamalı olarak ve uzun bir zaman diliminde kazandırılması gerekmektedir (Warren, Cooper ve Lamb, 2006). Alanyazın incelendiğinde ise okulöncesinden başlamak üzere küçük yaşta öğrencilerin fonksiyonel düşünebildiklerini (Blanton ve Kaput, 2004; Warren ve Cooper, Lamb, 2006) fonksiyonel düşünebilen öğrencilerin nicelikler arasındaki fonksiyonel ilişkiyi anlayabildiklerini, bu ilişkiyi kullanarak yeni değerleri tahmin edebildiklerini (Carraher vd. 2008), genel kuralı sözel ve sembolik olarak ifade edebildiklerini (Carraher vd., 2008; Cooper ve Warren, 2008), küçük çocukların nicelikler arasındaki ilişkileri temsil etmek için değişken notasyonu kullanmaya başlayabileceklerini (Blanton vd., 2015), sembolik ifadelerle başarılı bir şekilde fonksiyonel ilişkileri temsil edebildiklerini (Wilkie, 2016) göstermektedir. Blanton ve arkadaşları (2015) matematiksel ilişkileri ve yapıyı genelleme, temsil etme, kanıtlama ve muhakeme gibi erken cebirsel düşünme uygulamalarının daha erken yaşlardan itibaren sınıflara başarıyla entegre edilebileceğine dair kanıtlar sunmuştur. Stephens ve arkadaşlarının (2017) cebir öncesi dönemde olan öğrencilere yaptıkları öğretim deneyi araştırmalarının sonucunda ise öğrencilerin sayılar arasındaki ilişki hakkında giderek daha fazla fikir sahibi olduğu, genel kuralları belirleme becerilerinin geliştiği ve aynı zamanda fonksiyonel ifadenin genel kuralını sembollerle ve kelimelerle ifade edebilen öğrenci sayısının arttığı gözlemlenmiştir. Bahsedilen bu araştırma sonucunda genel olarak erken yaşta öğrencilerin bile fonksiyonel düşünebildikleri, fonksiyonel düşünmenin gelişimine okulöncesinden itibaren başlanabileceği vurgulanarak cebir öncesi dönemin önemine dikkat çekilmiştir.

Türkiye’de ise 2005’ten itibaren yenilenen ilköğretim matematik dersi öğretim programları incelendiğinde, cebirsel düşünme ve özde fonksiyonel düşünmenin gelişimini sağlayacak yönde kazanımların ve etkinliklerin, uluslararası matematik eğitimi alan yazınında önerildiği şekilde olmasa da, programlara dâhil edildiği görülmektedir. Türkiye’de cebir öncesi dönemde olan öğrencilerin fonksiyonel düşünebilmeleri üzerine uluslararası alan yazının aksine çok az sayıda çalışmanın (Tanışlı, 2011) yapıldığı da dikkati çekmiştir. Yapılan bu çalışmada ilköğretim beşinci sınıfta öğrenim gören dört öğrencinin fonksiyon tablosu ile temsil edilen sayı örüntülerine ilişkin fonksiyonel düşünme becerileri araştırılmıştır. Araştırma sonunda dört öğrencinin başarı farklılıkları da olsa fonksiyonel düşünme becerisine sahip oldukları belirlenmiştir. Ancak Türkiye’de bu çalışmanın yanı sıra cebir öncesi dönemde yer alan farklı sınıf düzeylerinde ve farklı bağlam içeren etkinlikler ile öğrencilerin gelecekte karşılaşacakları pek çok kavramın kazanımında önemli etkisi olan fonksiyonel düşünme becerilerinin araştırılmasına yönelik daha fazla sayıda çalışmaya gereksinim vardır. Bu gereklilik çalışmanın planlanmasında etkili olmuştur. Böylece Türkiye’de cebir öncesi dönemde olan öğrencilerin konuya ilişkin genel durumları değerlendirilerek cebir öncesi döneme dikkat çekilecektir.

Amaç

Bu çalışmanın genel amacı, cebir öncesi dönemde olan üçüncü, dördüncü ve beşinci sınıf öğrencilerinin fonksiyonel ilişkileri genelleme düzeylerini belirlemektir. Bu genel amaç doğrultusunda aşağıdaki soruya yanıt aranmıştır:

Cebir öncesi dönemde olan üçüncü, dördüncü ve beşinci sınıf öğrencileri fonksiyonel düşünme düzeylerinden hangisinde yer almaktadır?

Bu araştırma cebir öncesi dönemin fonksiyonel düşünme becerileri üzerindeki önemine vurgu yaparak öğrencilerin cebirde ve fonksiyon kavramında yaşadıkları zorlukların üstesinden gelebilmelerine çözüm getirmesi amacıyla matematik eğitimi alan yazınına, programlara ve içeriklerine katkı yapacağı düşünülmektedir.

Kavramsal Çerçeve

Cebir öncesi aritmetik ve cebiri birlikte işleyerek cebirsel karakterlerin ortaya çıkmasına ve geliştirilmesine yardımcı olarak matematiksel yapıları genelleme yetisini sağlayan bir yaklaşımdır. Bu yaklaşımda fonksiyonel düşünme aritmetiği genellemeden farklı olarak değişen örüntüleri tanımlama, devam ettirme, genelleme, çoklu temsilleri kullanma ve bunlar arasında geçiş yapabilme, sembol kullanarak bilinmeyen bir niceliği temsil etme, nicelikler arasındaki ilişkiyi araştırma gibi becerileri gerektirir (Blanton, 2008). Bu becerilerin gelişiminde özellikle değişen şekil örüntülerini genelleme çalışmaları yaygın olarak kullanılmaktadır (Stacey, 1989; Garcia-Cruz ve Martinon, 1997; Rivera, 2007, İmre, Akkoç ve Şahin, 2017). Yapılan bu çalışmalarda öğrencilerin yinelemeli ve fonksiyonel olmak üzere iki tür genelleme yaklaşımını kullandıkları gözlenmektedir (Blanton vd., 2015). Yinelemeli düşünen öğrencilerin örüntüdeki ardışık iki terim arasındaki ilişkiye, fonksiyonel düşünen öğrencilerin ise iki nicelik arasındaki ilişkiye odaklandıkları bilinmektedir (Amit ve Neria, 2008; Carraher vd., 2008; Lannin, 2005; Ley, 2005; Orton ve Orton, 1999; Samsan, Linchevski ve Olivier, 1999; Stacey, 1989). Diğer yandan girişte de ifade edildiği gibi, yapılan pek çok çalışma ile okul öncesinden itibaren özellikle küçük yaşta öğrencilerin yinelemeli düşünceden ziyade nicelikler arasındaki ilişkileri açıklayabildikleri ve fonksiyonel düşünebildikleri görülmektedir (Blanton ve Kaput, 2004; Carraher, Martinez ve Schliemann, 2008; Martinez ve Brizuela, 2006; Warren, Cooper ve

Lamb, 2006). Ancak son zamanlarda fonksiyonel düşünmenin doğası, bu düşünmenin nasıl ortaya çıktığı ve nasıl geliştiği konusu sınırlı sayıda da olsa yapılan çalışmalarla gündeme gelmiştir. Küçük yaştaki öğrenciler üzerinde gerçekleştirilen bu çalışmalarda öğrenme yol haritaları geliştirilerek örüntüleri genellemede öğrencilerin takip ettikleri öğrenme yolları çıkarılarak fonksiyonel düşünme düzeyleri belirlenmiştir (Blanton vd., 2015, Stephens vd., 2016, Stephens vd., 2017). Bu çalışmalardan biri Blanton ve arkadaşlarının (2015) okul öncesinden ikinci sınıfa kadar öğrenim gören öğrenciler üzerinde gerçekleştirdikleri bir çalışmadır. Çalışmada 8 hafta süren bir sınıf öğretim deneyi gerçekleştirilmiş ve öğrencilerin fonksiyonel düşünme gelişimlerine ilişkin öğretim dizileri tasarlanmıştır. Bu öğretimlerde genel kuralı $y=mx$ den $y=mx+n$ e değişen fonksiyon türleri ele alınmış ve Tablo 1’de görüldüğü gibi öğrencilerin fonksiyonel ilişkiyi genelleme düzeylerini belirlenmiştir.

Tablo 1.

Fonksiyonel İlişkiyi Anlama Düzeyleri

Düzeyler	Özellikleri
Ön yapısal	Öğrenciler verilen bir problem durumunda herhangi bir matematiksel ilişkiyi tanımlayamazlar ya da kullanmazlar (örtülü olarak). Ancak matematiksel olmayan düzenli ilişkileri fark edebilirler.
Yinelemeli-Özel	Öğrenciler bu düzeyde yalnızca belirli, özel durumlar için yinelemeli örüntüyü kavramsallaştırırlar. Ancak verilen dizi ile sınırlı kalıp örüntüyü tanımlayabilirler.
Yinelemeli-Genel	Bu düzeydeki öğrenciler, belirli örneklerle bağlı kalmadan, keyfi ardışık değerler arasında genel bir kural olarak yinelemeli örüntüyü kavramsallaştırırlar.
Fonksiyonel Özel	Bu düzeyin kritik özelliği öğrencilerin belirli, özel durumlar için bir ilişkiyi tanımlayabilmeleri, ancak dizinin tüm değerleri üzerinde genelleştirilmiş bir fonksiyonel ilişki tanımlayamamalarıdır.
Basit Fonksiyonel-Genel	Öğrenciler bu düzeyde, fonksiyonel bir ilişkiyi iki nicelik arasındaki genel bir ilişki olarak kavramsallaştırırlar. Ancak iki keyfi nicelik arasında matematiksel bir dönüşüm tanımlayamazlar. Genel bir kural verildiğinde bu kuralın doğruluğunu değerlendirebilirler.
Gelişmiş Fonksiyonel-Genel	Bu düzey, eksik te olsa genelleştirilmiş bir fonksiyonel ilişkinin temel özelliklerinin ortaya çıkışını yansıtmaktadır. Bu düzeydeki öğrenciler fonksiyonel ilişkinin yanında karşılaştırılan nicelikleri de tanımlayabilirler. Ancak bu nicelikler arasındaki matematiksel dönüşümü açıkça ifade edemezler.
Yoğun Fonksiyonel-Genel	Öğrenciler bu düzeyde, fonksiyonel kuralı belirlemek için problem durumundaki iki niceliği ve nicelikler arasındaki matematiksel dönüşümü sözcükler ve değişkenler kullanarak açıkça ve doğru bir şekilde ifade ederler.
Nesne olarak Fonksiyon	Öğrenciler bu düzeyde fonksiyonel ilişkilerin genelliğine dair sınırları algırlar. Öğrenciler fonksiyonel ilişkiyi yapısal olarak kendi içinde yeni süreçlerin gerçekleştirilebileceği bir nesne olarak kavramsallaştırırlar.

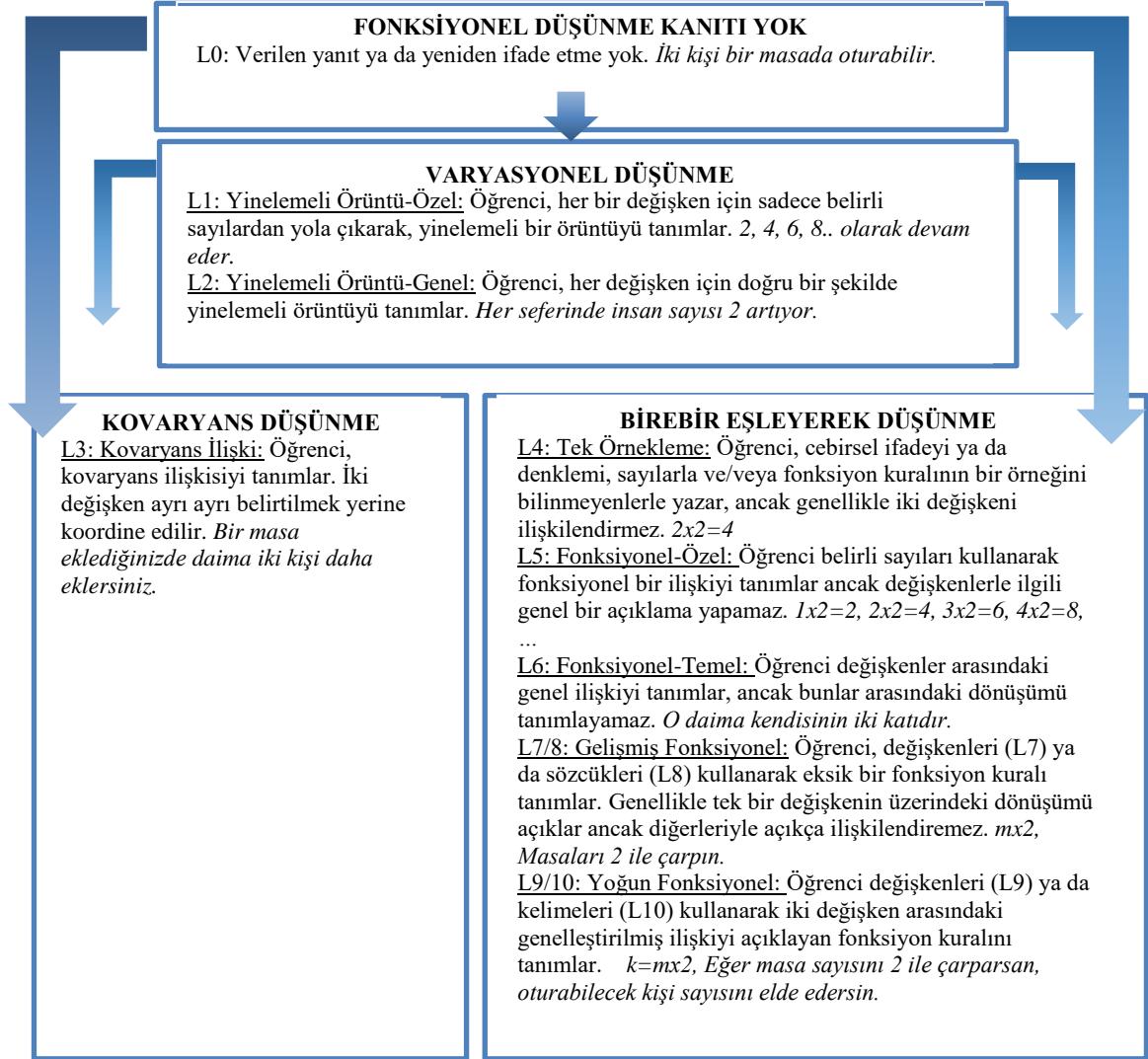
Benzer bir çalışma da Stephens ve arkadaşlarının (2016), 3.-5. Sınıf düzeylerinde yer alan öğrenciler üzerinde gerçekleştirdikleri çalışmadır. Bu çalışmada öğrencilerin fonksiyonel ilişkiyi genelleme ve temsil etme becerilerinin gelişimi araştırılmıştır. Araştırmada her sınıf düzeyinde 17-18 ders saati süren

sınıf öğretim deneyi gerçekleştirilmiş ve öğrencilere sabit ve artarak değişen örüntü problemleri sunulmuştur. Araştırma sonunda Blanton ve arkadaşlarının belirledikleri düzeyler geliştirilmiş ve Tablo 2’de verilen düzeyler oluşturulmuştur.

Tablo 2.*Fonksiyonel İlişkiyi Genelleme ve Temsil Etme Düzeyleri*

Düzeyler	Özellikleri
Yanıt yok	Öğrenci herhangi bir cevap vermez.
Yeniden ifade etme	Öğrenci verilen bilgiyi tekrarlar.
Yinelemeli örüntü-özel	Öğrenci her bir değişkendeki yinelemeli örüntüyü sadece belirli sayılar üzerinden yola çıkarak tanımlar.
Yinelemeli örüntü-genel	Öğrenci her bir değişkendeki yinelemeli örüntüyü doğru bir şekilde tanımlar.
Kovaryans İlişki	Öğrenci doğru bir kovaryans ilişki tanımlar. İki değişken ayrı ayrı belirtilmek yerine koordine edilerek tanımlanır.
Fonksiyonel-Özel	Öğrenci fonksiyonel bir ilişkiyi yalnızca bazı özel sayıları kullanarak tanımlar ancak değişkenlerle ilgili genel bir açıklama yapamaz.
Fonksiyonel-Temel	Öğrenci iki değişken arasındaki genel ilişkiyi tanımlar, ancak bu değişkenler arasındaki dönüşümü tanımlayamaz.
Fonksiyonel-Değişkenler ile ortaya çıkan	Öğrenci değişkenleri kullanarak eksik bir fonksiyon kuralı tanımlar. Sık sık bir değişken üzerindeki dönüşümü ifade eder ancak diğer değişkenle açıkça ilişkilendiremez.
Fonksiyonel-kelimeler ile ortaya çıkan	Öğrenci kelimeleri kullanarak eksik bir fonksiyon kuralı tanımlar. Sık sık bir değişken üzerindeki dönüşümü ifade eder ancak diğer değişkenle açıkça ilişkilendiremez ya da değişkenlerden birini açıkça tanımlayamaz.
Yoğun Fonksiyonel-Değişkenler ile ortaya çıkan	Öğrenci, iki değişken arasındaki genelleştirilmiş ilişkiyi açıklayan bir fonksiyon kuralını değişkenler kullanarak doğru bir şekilde tanımlar.
Yoğun Fonksiyonel-Kelimeler ile ortaya çıkan	Öğrenci, iki değişken arasındaki genelleştirilmiş ilişkiyi açıklayan bir fonksiyon kuralını kelimeler kullanarak doğru bir şekilde tanımlar.

Daha sonra Stephens ve arkadaşlarının (2017) 3.-5. sınıf düzeylerinde yer alan öğrenciler üzerinde gerçekleştirdikleri bir başka çalışmada ise her sınıf düzeyinde 18 ders saati süren bir sınıf öğretim deneyi gerçekleştirilmiştir. Bu süreçte üçüncü sınıf öğrencilerine genel kuralı $y=mx$ ve $y=x+b$ olan lineer, dördüncü sınıf öğrencilerine genel kuralı $y=x^2$ ve $y=x^2+b$ olan kwadratik ve beşinci sınıf öğrencilerine ise üstel fonksiyon türlerini içeren görevler sunulmuştur. Araştırma sonunda öğrencilerin fonksiyonel düşünme düzeyleri yeniden revize edilmiş ve Şekil 1’deki verilen yapı oluşturulmuştur.



Şekil 1. Fonksiyonel İlişkiyi Genelleme ve Temsil Etme Düzeyleri

Şekil 1’de görüldüğü gibi, her düzeye ilişkin verilen örnekler bu çalışmada da kullanılan Tablo 3’te sunulan masa sayısı ve masaya oturan kişi sayısı arasındaki ilişkinin sorgulandığı örüntü probleminde aittir.

Bu çalışmada ise 3.-5. sınıf öğrencilerinin değişen şekil örüntülerine ilişkin fonksiyonel ilişkiyi genelleme becerileri söz konusu belirlenen düzeyler bağlamında incelenmiş ve öğrencilerin bu düzeylerden hangisinde yer aldığı, bu öğrencilerin öğrenme ilerleyişinin bu düzeyler ile uygun olup olmadığı araştırılmıştır.

Yöntem

Araştırma Deseni

Bu araştırmada temel nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Bu yaklaşım ile bir olgu, bir süreç ya da ilgili kişilerin perspektifleri ve dünya görüşleri keşfedilmeye ve anlaşılmaya çalışılır. Temel nitel araştırmada görüşmeler, gözlemler ve doküman incelemelerinde kullanılan sorular, belirlenen odak noktaları ve kurulan ilişkiler araştırmanın kuramsal çerçevesine bağlı olarak gerçekleştirilmektedir (Merriam ve Tisdell, 2016). Merriam ve Tisdell'e göre temel nitel araştırma nitel araştırmanın temel özelliklerini taşımakla birlikte durum çalışması ve olgubilim gibi özel durumlar içermeyen araştırmalar için kullanılabilir. Bu bağlamda araştırmada cebir öncesi dönemde yer alan toplam 116 öğrencinin açık uçlu sorulara verdikleri yanıtların incelenmesi sonucu sahip oldukları bilgi yapıları araştırmanın kuramsal çerçevesi doğrultusunda belirlenmeye çalışılmıştır. Bu süreçte kuramsal çerçeve yeniden düzenlenmiş ve öğrencilerin sahip oldukları fonksiyonel ilişkiyi genelleme yapıları ortaya konulmuştur.

Katılımcılar

Araştırmanın katılımcılarının seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden birisi olan ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Katılımcıların orta sosyo-ekonomik düzeydeki bir ilkokulda öğrenim gören üçüncü, dördüncü ve bir ortaokulda öğrenim gören beşinci sınıflardan seçilmesi ve seçilen sınıfların kendi aralarında benzer başarı düzeyine sahip olmaları temel ölçüt olarak kabul edilmiştir. Öğrencilerin başarı düzeylerinde ise karne notları temel alınmıştır. Öğrencilerin üçüncü, dördüncü ve beşinci sınıflardan seçilmesinin nedeni bu sınıflardaki öğrencilerin cebir öncesi dönemde olmalarıdır. Özel olarak üçüncü sınıftan itibaren öğrencilerin seçilmesinin sebebi ise aralarındaki farkın sabit olduğu örüntüleri genişletme ve oluşturma kazanımının öğretim programında üçüncü sınıftan itibaren yer almasıdır.

Araştırmaya üçüncü sınıf öğrencilerinden 45, dördüncü sınıf öğrencilerinden 36, beşinci sınıf öğrencilerinden 35 kişi olmak üzere toplam 116 gönüllü öğrenci katılmıştır. Öğrencilerin ailelerinden, okuldan ve sınıf öğretmenlerinden de gerekli izinler alınmıştır.

Verilerin Toplanması

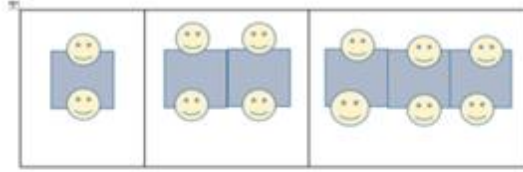
Araştırmada cebir öncesi dönemdeki öğrencilerin fonksiyonel ilişkiyi genelleme düzeylerini araştırmak amaçlanmıştır. Amaca bağlı olarak da veriler açık uçlu sorular yardımıyla toplanmıştır. Stephens, Fonger, Blanton ve Knuth (2015) tarafından geliştirilen açık uçlu sorular Tablo 3'de gösterilmiştir. Soruların ilk bölümünde öğrencilerin verilen bir örüntüyü ifade etme ve kuralı $y=mx$ olan örüntüyü genelleme becerileri (Görev 1), ikinci bölümünde ise kuralı $y=mx+n$ olan örüntüyü genelleme becerileri (Görev 2) sorgulanmıştır. Aynı zamanda, öğrencilerin fonksiyonel ilişki için buldukları kuralın sınırlılıkları konusundaki farkındalıklarını belirleyebilmek amacıyla araştırmacıların sorularına ek olarak iki madde (f, g) daha eklenmiştir.

Hazırlanan açık uçlu soruların uygunluğu önce uzman görüşüne sunulmuştur. Ardından aynı okulların farklı sınıflarından seçilen 10 öğrenci üzerinde pilot çalışması gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışma sonucunda hazırlanan açık uçlu sorularda hiçbir değişiklik yapılmamıştır.

Tablo 3.
Değerlendirme Görevi

Görev 1:

Handegül bir masaya aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi 2 kişiyi oturtabiliyor:



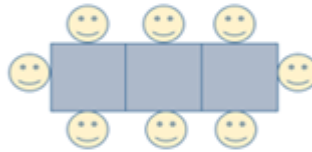
- Eğer bir masanın yanına başka bir masa eklerse 4 kişiyi oturtabiliyor:
 - Eğer iki masaya başka bir masa daha eklerse 6 kişi oturtabiliyor:
- a) Farklı sayılardaki masalara Handegül'ün kaç kişiyi oturtabildiğini göstermek için aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Sıraların Sayısı	Kişi Sayısı
1	2
2	4
3	
4	
5	
6	
7	

- b) Doldurduğunuz tabloda bir örüntü görebiliyor musunuz? Eğer görüyorsanız açıklayınız.

Görev 2:

- c) Masaların sayısı ile kişi sayısı arasındaki ilişkiyi düşününüz:
- Sözcükler kullanarak bu ilişkiyi açıklayan bir kural yazınız.
 - Harfler kullanarak bu ilişkiyi açıklayan bir kural yazınız.
- d) Eğer Handegül'ün 100 masası olursa, bu masalara toplam kaç kişi oturabilir? Yanıtınızı nasıl bulduğunuzu gösteriniz ve açıklayınız.
- e) Handegül masaların uçlarına da iki kişi oturtursa toplamda daha çok kişinin oturabileceğini düşündü.
Örneğin: Handegül'ün 3 masası olsaydı, toplam 8 kişi oturabilirdi.



Bu yeni bilgi c maddesinde bulduğunuz kuralı nasıl etkiler? Açıklayınız.

- Sözcükler kullanarak yeni kuralı yazınız.
- Harfler kullanarak yeni kuralı yazınız.

f) c maddesinde bulduğunuz kural her zaman bu problem için işe yarar mı? Neden? Açıklayınız.

g) e maddesinde bulduğunuz kural her zaman bu problem için işe yarar mı? Neden? Açıklayınız.

Verilerin Analizi

Araştırmada verilerin analizi iki aşamada gerçekleştirilmiştir. Birinci aşamada üçüncü, dördüncü ve beşinci sınıf öğrencilerinin fonksiyonel düşünme düzeylerinin belirlenmesinde tematik analiz yöntemi kullanılmıştır. Tematik analizde temalar ve örüntüler veri içinden çıkarılabileceği gibi çeşitli modellerde kullanılan mevcut temalardan da yararlanılabilir (Liamputtong, 2009). Bu araştırmada ise Blanton ve arkadaşları (2015) ile Stephens ve arkadaşlarının (2017) geliştirdiği fonksiyonel düşünme düzeyleri dikkate alınmış ve bu düzeylerden bazıları bu araştırma kapsamında kullanılmış yanı sıra elde edilen verilere dayalı olarak yeni bir düzey ve bazı düzeylere ilişkin alt düzeyler oluşturulmuştur.

Tablo 4.

Fonksiyonel Düşünmeyi Genelleme ve Temsil Etme Düzeyleri

FONKSİYONEL DÜŞÜNME KANITI YOK	D0. Ön Yapısal: Bu düzeydeki öğrenciler örüntüde herhangi bir matematiksel ilişkiyi açıklayamazlar. Örüntüde yinelemeli ilişkinin farkına varamazlar.
VARYASYONEL DÜŞÜNME	D1. Yinelemeli-Özel: Bu düzeydeki öğrenciler örüntüde yinelemeli ilişkiyi fark ederler ve bu ilişkiyi sadece belirli örnekler üzerinden tanımlarlar. D2. Yinelemeli-Genel: Bu düzeydeki öğrenciler belirli örneklerden bağımsız olarak yinelemeli ilişkiyi bütüne genellerler.
	D3. Karşılıklı Değişim: Bu düzeydeki öğrenciler D0, D1, D2 düzeylerindeki öğrencilerden farklı olarak nicelikleri (sıra sayısı ve kişi sayısı) fark ederler ve her bir niceliğin kendi arasındaki değişimi belirlerler. Ayrıca nicelikleri ayrı ayrı belirtmek yerine koordine edilmiş bir şekilde ifade ederler. Ancak nicelikler arasında herhangi bir matematiksel ilişki kuramazlar.
	BİREBİR EŞLEYEREK DÜŞÜNME
	D4. Fonksiyonel Özel: Bu düzeydeki öğrenciler D2 düzeyine benzer olarak belirli durumlar için fonksiyonel ilişkiyi tanımlayabilirler. Ancak fonksiyonel ilişkiyi genellemezler.
KOVARYANS DÜŞÜNME	D4.1. Toplamsal İlişki: Öğrenciler bu düzeyde yazdıkları matematiksel ilişkilere niceliklerin toplamsal ilişkisinden yola çıkarak ulaşırlar. D4.2. Çarpımsal İlişki: Öğrenciler bu düzeyde yazdıkları matematiksel ilişkilere niceliklerin çarpımsal ilişkisinden yola çıkarak ulaşırlar.
	D5. Temel Fonksiyonel: Bu düzey nicelikler arası ilişkilerin eksik bir şekilde ifade edilmesine karşın fonksiyonel ilişkinin temel özelliklerinin oluşmaya başladığını gösterir. Bu düzeydeki öğrenciler fonksiyonel ilişkinin yanı sıra nicelikleri de tanımlarlar. Ancak bu nicelikler arasındaki dönüşümü açıkça ifade edemezler.
	D5.1. Kelimelerle Ortaya Çıkan: Bu düzeydeki öğrenciler kelimeler kullanarak eksik fonksiyonel bir kuralı belirlerler. Belirledikleri kuralda bir nicelik üzerinde matematiksel dönüşüm tanımlarlar. Ancak bu dönüşümü diğer niceliklerle açıkça ilişkilendiremezler ya da niceliklerden birini açıkça tanımlayamazlar.
	D5.2. Değişkenlerle Ortaya Çıkan: Bu düzeydeki öğrenciler değişkenler kullanarak eksik fonksiyonel bir kuralı belirlerler. Belirledikleri kuralda bir nicelik üzerinde matematiksel dönüşüm tanımlarlar. Ancak bu dönüşümü diğer niceliklerle açıkça ilişkilendiremezler ya da niceliklerden birini açıkça tanımlayamazlar. Öğrenciler ifadede yeni bir değişken kullanmak yerine aynı değişkenin özel bir sayısını kullanabilirler.

Tablo 4. (devam)

D6. Gelişen Fonksiyonel: Bu düzeydeki öğrenciler fonksiyonel ilişkilerdeki nicelikleri hem kelimelerle hem de değişkenlerle doğru bir şekilde ifade ederler. Aynı zamanda nicelikler arasındaki matematiksel dönüşümü açıkça tarif edebilirler.
D6.1. Kelimelerle Ortaya Çıkan: Öğrenciler kelimeler kullanarak doğru bir fonksiyonel ilişkiyi belirlerler. Bu fonksiyonel ilişki iki nicelik arasında geliştirilmiş ilişkiyi tanımlar. Bu ilişkide bir niceliğin dönüşümü ile diğer bir nicelik elde edilir.
D6.2. Değişkenlerle Ortaya Çıkan: Öğrenciler değişkenler kullanarak doğru bir fonksiyonel ilişki belirlerler. Belirledikleri ilişkide nicelikler arasındaki dönüşümü ifade ederken eşitlik kullanırlar. Bu eşitlik iki nicelik arasındaki geliştirilmiş ilişkiyi tanımlar. Bir niceliğin dönüşümü aracılığı ile diğer bir nicelik elde edilir.
D7. Temel Düzeyde Nesne Olarak Fonksiyon: Bu düzeydeki öğrenciler belirledikleri fonksiyonel ilişkiye yönelik oluşturdukları genel kuraldaki değişkenleri soyutlayarak o değişkenlerin yerine farklı nesnelerin gelebileceğini anlarlar.

Analiz sürecinde öncelikle dokümanlar baştan sona sırasıyla numaralandırılmıştır. Daha sonra iki araştırmacı bağımsız olarak tüm dokümanları inceleyerek Görev 1 ve Görev 2 için ayrı ayrı tablo oluşturmuş ve her öğrencinin çözüm yollarını özetlemiştir. Aynı çözüm yoluna sahip öğrenciler bir araya getirilmiştir. Farklılık gösteren öğrenciler ise diğerlerinden ayrıştırılmıştır. Daha sonra iki araştırmacı bir araya gelerek hazırlanmış oldukları içerikleri karşılaştırmış ve öğrenciler üzerinde uzlaşmıştır.

Bu sürecin devamında iki araştırmacı öğrenci çözümlerini Blanton ve arkadaşlarının (2015) fonksiyonel düşünme düzeyleri ve bu düzeyleri yeniden revize eden Stephens ve arkadaşlarının (2017) geliştirdiği fonksiyonel düşünme düzeyleri ile karşılaştırmıştır. Ancak bazı öğrenci çözümlerinin iki çalışmadaki fonksiyonel düşünme düzeylerini de tam olarak karşılamadığı görülmüştür. Bu durumda iki araştırmacı çözümlere dayalı olarak bazı düzeylere ilişkin alt düzeyler ve yeni bir düzey oluşturmuştur. Tablo 4'te görüldüğü gibi, alt düzeyler fonksiyonel özel olarak ifade edilen 4. düzeye aittir. Bu düzeyde fonksiyonel ilişkiyi belirli durumlar için ifade eden öğrenciler bu süreçte toplamsal ve çarpımsal olmak üzere iki tür muhakeme kullanmışlardır. Bu muhakeme türleri arasında bilişsel anlamda bir hiyerarşinin olduğu göz önüne alınarak bu düzeye ait iki alt düzey oluşturulmuştur. Diğer yandan araştırmada bir öğrencinin bilişsel yapısı gelişen fonksiyonel ve nesne olarak fonksiyon arasında kaldığı için Blanton ve arkadaşları (2015)'nin nesne olarak fonksiyon şeklinde ifade ettikleri düzeyin öncesi temel düzeyde nesne olarak fonksiyon şeklinde yeni bir düzey oluşturulmuştur.

Veri analizinin ikinci aşamasında ise betimsel analiz kullanılmıştır. Bu bağlamda Görev 1 ve Görev 2 için ayrı ayrı tüm düzeylere atanan öğrenci sayıları belirlenmiş ve yüzdeleri hesaplanmıştır. Daha sonra düzeyler bazında üç sınıf birbirleriyle ve ayrı ayrı kendi içlerinde karşılaştırılmış ve bulgular yorumlanmıştır. Bulguların sunumunda ise tablo ve grafik temsillerinden yararlanılmıştır.

Bulgular

Bu araştırmada cebir öncesi dönemde yer alan üçüncü, dördüncü ve beşinci sınıf öğrencilerinin fonksiyonel ilişkiyi genelleme düzeylerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla öğrencilerin genelleme becerilerine odaklanılmıştır. Bu bağlamda açık uçlu sorular yardımıyla toplanan veriler üçüncü, dördüncü ve beşinci sınıf öğrencilerinin Fonksiyonel Düşünmeyi Genelleme Düzeylerine İlişkin Tematik Bulgular ve Betimsel Bulgular olmak üzere iki başlık altında sunulmuştur.

Üçüncü, Dördüncü ve Beşinci sınıf Öğrencilerinin Fonksiyonel Düşünmeyi Genelleme Düzeylerine ilişkin Tematik Bulgular

Bu bölümde üçüncü, dördüncü ve beşinci sınıf öğrencilerinin fonksiyonel düşünmeyi genelleme düzeyleri tanımlanmış ve bu düzeylerin özellikleri ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Öğrencilerin Tablo 3'te gösterilen açık uçlu sorulara verdikleri yazılı yanıtlardan doğrudan alıntılar ile hiyerarşik olarak sıralanan düzeylerin özelliklerini en iyi yansıtan örnekler seçilerek düzeylerin tanımları desteklenmiştir.

Fonksiyonel Düşünmenin Gözlenmediği Düzey

D0. Ön Yapısal Düzeyi: Öğrencilerden öncelikle masa/sıra sayıları ile kişi sayıları arasındaki ilişkinin sorgulandığı t-tablosunu doldurmaları istenmiştir. Burada öğrencilerin t-tablosu kullanarak şekilsel muhakemeleri aracılığıyla sayısal ilişkiler kurabilmeleri amaçlanmıştır. Bu süreçte ise öğrencilerden tabloda oluşan örüntünün farkına varmaları ve örüntüde herhangi bir matematiksel ilişkiyi açıklamaları beklenmiştir. Ancak bazı öğrenciler tabloda masa sayıları ile kişi sayıları arasında herhangi bir matematiksel ilişki kuramamışlar ve örüntüdeki yinelemeli ilişkinin farkına varamamışlardır. Şekil 2'deki beşinci sınıf öğrencisinin yanıtı bu düzeye örnek olarak sunulabilir.

a) Farklı sayılardaki masalara Handegül'ün kaç kişiyi oturtabildiğini göstermek için aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Sraların Sayısı	Kişi Sayısı
1	2
2	4
3	6
4	7
5	3
6	4
7	5

Şekil 2. Beşinci Sınıf Öğrencisinin Çözümü

Şekil 2'de görüldüğü gibi, öğrenci tabloda verilen kişi sayılarını rastgele sayılarla devam ettirmiştir. Buna benzer davranışlar sergileyen bu düzeyde yer alan öğrencilerden fonksiyonel düşünmeye ilişkin herhangi bir kanıt elde edilememiştir.

Varyasyonel Düşünme

Bu düşünmenin göstergesi iki nicelik arasındaki ilişkiden ziyade tek bir niceliğe odaklanarak bu nicelikte yer alan sayılar arasındaki ilişkinin farkına varılmasıdır. Varyasyonel düşünme yinelemeli özel ve yinelemeli genel olmak üzere iki alt düzey ile ele alınmaktadır.

D1. Yinelemeli-Özel: Bu düzeydeki öğrenciler D0 düzeyinden farklı olarak t-tablosunda sadece kişi sayılarına odaklanarak oluşan sayı örüntüsünde yinelemeli ilişkiyi fark etmişler ve bu ilişkiyi tabloda verilen yedinci masadaki kişi sayısına kadar tanımlayabilmişlerdir. Bu düzeyde yer alan öğrenciler tabloda 1'den 7'ye kadar verilen masa sayısı ile sınırlı kalmışlar yinelemeli ilişkiyi bütüne genelleymemişlerdir. Bu düzeyde yer alan dördüncü sınıf öğrencisinin yanıtı Şekil 3'te gösterilmiştir.

a) Farklı sayılardaki masalara Handegül'ün kaç kişiyi oturabildiğini göstermek için aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Sıraların Sayısı	Kişi Sayısı
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14

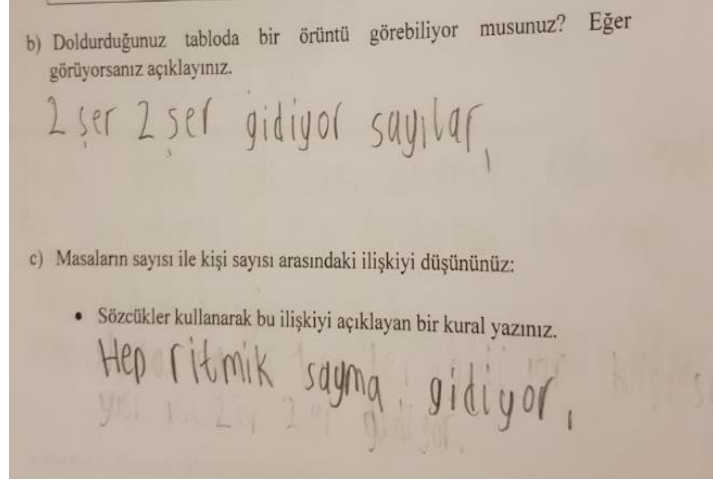
b) Doldurduğunuz tabloda bir örüntü görebiliyor musunuz? Eğer görüyorsanız açıklayınız.

ikişer ikişer sayma vardır.

Şekil 3. Dördüncü Sınıf Öğrencisinin Çözümü

Şekil 3'te görüldüğü gibi, öğrenci kişi sayısının oluşturduğu 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 şeklindeki örüntüyü oluşturarak, örüntüdeki yinelemeli ilişkiyi fark etmiş ve tabloyu doğru bir şekilde tamamlamıştır. Öğrenci ilişkiyi açıklarken sadece tablodaki değerler için "ikişer ikişer sayma vardır" şeklinde bir açıklamada bulunmuş, henüz örüntünün kuralını bütüne genelleymemiştir.

D2. Yinelemeli-Genel: Bu düzeydeki öğrenciler yinelemeli ilişkiyi tablodaki her bir nicelik (masa sayısı ve kişi sayısı) için ayrı ayrı tanımlamışlar, masa sayılarından ve kişi sayılarından bağımsız olarak örüntüdeki yinelemeli ilişkiyi de bütüne genelledebilmişlerdir. Diğer bir deyişle D1 düzeyindeki öğrencilerden farklı olarak tabloda 1'den 7'ye kadar verilen masa sayısı dışına çıkarak kişi sayıları arasındaki 2 şer farkın devam ettiğini ifade etmişlerdir. Şekil 4'teki üçüncü sınıf öğrencisinin yanıtı bu düzeye örnek olarak sunulabilir.



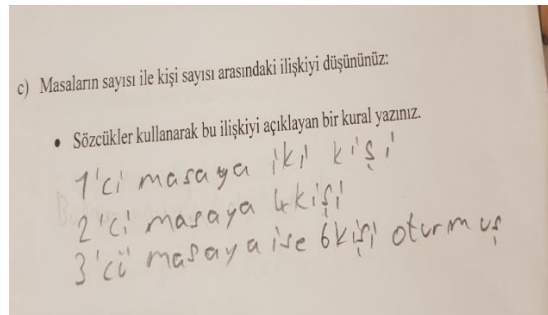
Şekil 4. Üçüncü Sınıf Öğrencisinin Çözümü

Şekil 4'te görüldüğü gibi, öğrencinin örüntü kuralını açıklarken “2 şer 2 şer gidiyor sayılar” ve her iki nicelik için “Hep ritmik sayma gidiyor” ifadesini kullanması örüntünün kuralını bütüne genellebileceğinin bir göstergesidir.

Kovaryans Düşünme

Bu düşünmenin göstergesi iki nicelik (masa sayısı ve kişi sayısı) arasındaki ilişkiye odaklanarak bu niceliklerde yer alan sayılar arasındaki ilişkinin kurulmasıdır. Bu düşünme öğrencilerin sergilemiş oldukları eylemlere dayalı olarak D3, D4, D5, D6 ve D7 şeklinde beş alt düzeye ayrılmaktadır. Ancak D3 dışındaki düzeylerde kovaryans düşünmenin yanı sıra birebir eşleyerek düşünme şeklinde farklı bir düşünme düzeyi de söz konusudur.

D3. Karşılıklı Değişim: Öğrencilerden görevin devam eden sürecinde masa sayıları ile kişi sayıları arasındaki ilişkiyi veren kuralı ifade etmeleri istenmiştir. Öğrencilerin kuralı ifade ederken de kelimeler ve değişkenler kullanmaları beklenmiştir. Bu süreçte öğrencilerden bazıları D0, D1, D2 düzeylerindeki öğrencilerden farklı olarak nicelikleri (masa/sıra sayısı ve kişi sayısı) fark etmişler ve her bir niceliğin kendi arasındaki değişimini belirleyebilmişlerdir. Ayrıca nicelikleri ayrı ayrı belirtmek yerine koordine edilmiş bir şekilde ifade edebilmişlerdir. Ancak nicelikler arasında herhangi bir matematiksel ilişki kuramamışlardır. Bu düzeye örnek olarak üçüncü sınıf öğrencisinin yanıtı Şekil 5'te gösterilmiştir.



Şekil 5. Üçüncü Sınıf Öğrencisinin Çözümü

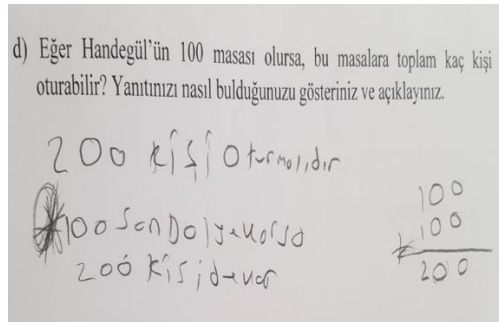
Şekil 5’te görüldüğü gibi, öğrenci masa ve kişi olarak nicelikleri kullanmış ve her masaya oturan kişi sayısındaki değişimi doğru olarak belirtmiştir. Ancak bu değişimi sadece her niceliğe ilişkin yazabilmiş, masa sayısı ile kişi sayısı arasındaki matematiksel ilişkiyi kuramamıştır.

Birebir Eşleyerek Düşünme

Bu düşünmede öncelikle kovaryans düşünmenin gerçekleşmesi yani iki nicelik (masa sayısı ve kişi sayısı) arasındaki ilişkinin kurulması gereklidir. Birebir eşleyerek düşünmenin göstergesi ise iki nicelik arasındaki ilişkinin fonksiyonel olarak tanımlanmasıdır. Bu düşünme fonksiyonel düşünmenin hiyerarşik olarak gözlenebildiği düşünme şeklidir ve dört alt düzeye ayrılmaktadır.

D4. Fonksiyonel Özel: Bu düzeydeki bazı öğrenciler D3 düzeyindeki öğrencilerden farklı olarak sadece belirli durumlar için masa sayısı ve kişi sayısı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi tanımlayabilmişler ancak fonksiyonel ilişkiyi genelleyememişlerdir. Öğrenciler kendilerine verilen girdi değerine (100 masa) karşılık bir çıktı değeri (kişi) elde edebilmiş, aynı zamanda belirli örneklerden yola çıkarak bir kural yazmaya da çalışmışlardır. Ancak bu süreçte öğrenciler niceliklerin var olduğunu sezgisel olarak fark etmişler buna karşın yazdıkları kuralda nicelikleri ifade edememişlerdir. Diğer yandan fonksiyonel özel düzeyindeki bu öğrenciler matematiksel ilişkileri toplamsal ve çarpımsal olarak iki şekilde ifade edebilmişlerdir.

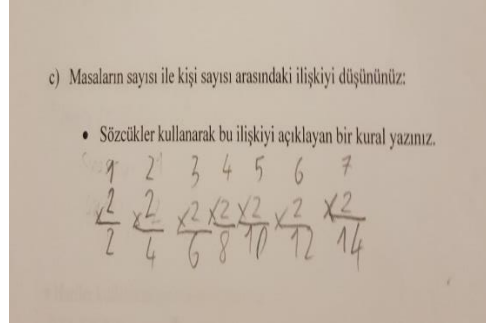
D4.1. Toplamsal İlişki: Öğrenciler bu düzeyde yazdıkları matematiksel ilişkilere niceliklerin toplamsal ilişkisinden yola çıkarak ulaşmışlardır. Bu düzeye Şekil 6’da sunulan beşinci sınıf öğrencisinin yanıtı örnek olarak gösterilebilir.



Şekil 6. Beşinci Sınıf Öğrencisinin Çözümü

Şekil 6’da görüldüğü gibi, örüntünün uzak bir adımının sorulduğu soruya öğrenci $100+100=200$ şeklinde yanıt vererek niceliklerin toplamsal ilişkisini kullanmıştır.

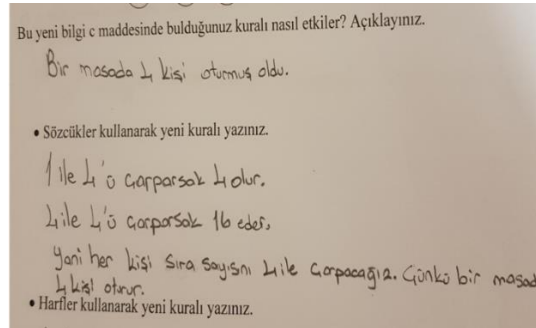
D4.2. Çarpımsal İlişki: Öğrenciler bu düzeyde yazdıkları matematiksel ilişkilere niceliklerin çarpımsal ilişkisinden yola çıkarak ulaşmışlardır. Bu düzeye Şekil 7’de sunulan üçüncü sınıf öğrencisinin yanıtı örnek olarak gösterilebilir.



Şekil 7. Üçüncü Sınıf Öğrencisinin Çözümü

Şekil 7’de görüldüğü gibi, öğrenci masa sayısı ile kişi sayısı arasındaki ilişkiyi $1 \times 2 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 2 = 6$... şeklinde niceliklerin çarpımsal ilişkisini kullanarak ifade etmiştir.

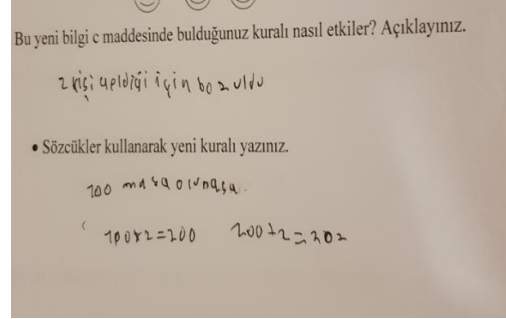
Öte yandan öğrencilerden bazıları çarpımsal ilişkiyi sadece $y = mx$ genel kuralına sahip görev 1 de kullanabilirken, bazıları hem $y = mx$ hem de $y = mx + n$ genel kuralına sahip görev 1 ve görev 2 de kullanabilmiştir. Örneğin bazı öğrenciler sadece $y = mx$ şeklindeki matematiksel ilişkiye niceliklerin çarpımsal ilişkisinden yola çıkarak ulaşmışlar, $y = mx + n$ şeklindeki matematiksel ilişkilerde eksik ya da hatalı olarak niceliklerin çarpımsal ilişkisini kullanmışlardır. Bu düzeye Şekil 8’de sunulan beşinci sınıf öğrencisinin yanıtı örnek olarak gösterilebilir.



Şekil 8. Beşinci Sınıf Öğrencisinin Çözümü

Şekil 8’de görüldüğü gibi, öğrencinin genel kuralı $y = mx + n$ olan ifade için yazmış olduğu sözel kural hatalıdır. Öğrenci burada görev 2 için geçerli olan kuralı ($y = mx + n$), görev 1 için geçerli olan kurala ($y = mx$) genellemiştir. Yani öğrenci $y = mx$ şeklindeki ifadeyi temsil eden “bir masada 4 kişi oturmuş oldu”, 1 ile 4’ü çarparsak 4 olur, 4 ile 4’ü çarparsak 16 olur. Yani her kişi sıra sayısını 4 ile çarpacağız. Çünkü bir masada 4 kişi olur” şeklinde bir sözel kural yazmıştır. Ancak hatalı da olsa yazdığı matematiksel ifade de masa sayısı ile kişi sayısı arasında çarpımsal ilişkiyi kullanmıştır.

Şekil 9’da sunulan örnek ise dördüncü sınıf öğrencisinin hem $y = mx$ hem de $y = mx + n$ genel kuralına sahip görevlerdeki matematiksel ilişkilere niceliklerin çarpımsal ilişkisinden yola çıkarak ulaşıldığının bir göstergesidir.

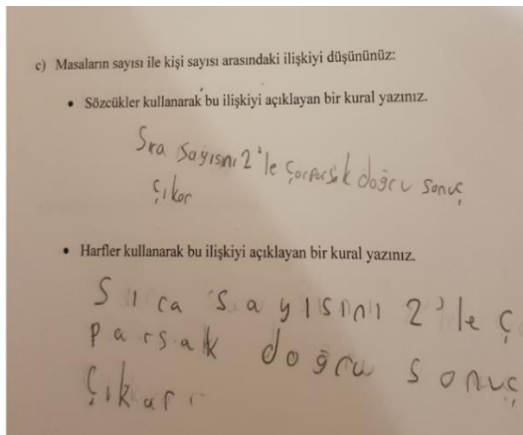


Şekil 9. Dördüncü Sınıf Öğrencisinin Çözümü

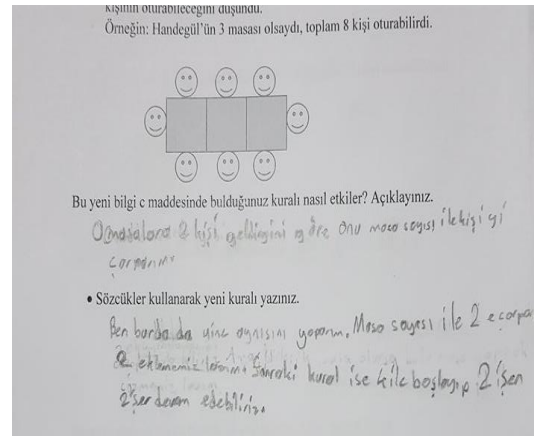
Burada öğrencinin $y=mx+n$ biçimindeki göreve ilişkin matematiksel ifadeyi niceliklerin çarpımsal ilişkisini kullanarak doğru bir şekilde ifade ettiği görülmektedir. Öğrenci burada Fonksiyonel Özel düzeyinin bir özelliği olarak belirli bir örnek için fonksiyonel ilişkiyi tanımlamıştır.

D5. Temel Fonksiyonel: Fonksiyonel ilişkinin temel özelliklerinin oluşmaya başladığını gösteren bu düzeyde yer alan öğrenciler, D4 düzeyindeki öğrencilerden farklı olarak masa sayısı ve kişi sayısı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi eksik de olsa ifade edebilmişler, aynı zamanda nicelikleri de tanımlayabilmişlerdir. Ancak bu nicelikler arasındaki dönüşümü açıkça ifade edememişlerdir. Bu düzeyin iki alt düzeyi de söz konusudur. Bu alt düzeylerde yer alan öğrencilerden bazıları fonksiyonel ilişkiyi sadece kelimelerle bazıları da kelimelerin yanı sıra değişkenleri de kullanarak ifade edebilmişlerdir.

D5.1. Kelimelerle Ortaya Çıkan: Bu düzeyde yer alan öğrenciler kelimeleri kullanarak masa sayısı ile kişi sayısı arasındaki fonksiyonel kuralı eksik olarak belirlemişlerdir. Belirledikleri kuralda bir nicelik üzerinde matematiksel dönüşüm tanımlamışlar, ancak bu dönüşümü diğer nicelikte açıkça ilişkilendirememişler ya da niceliklerden birini açıkça tanımlayamamışlardır. Şekil 10’da sunulan dördüncü sınıf öğrencisinin yanıtı ve Şekil 11’de sunulan beşinci sınıf öğrencisinin yanıtı bu düzeye örnek olarak gösterilebilir.



Şekil 10. Dördüncü Sınıf Öğrencisinin Çözümü

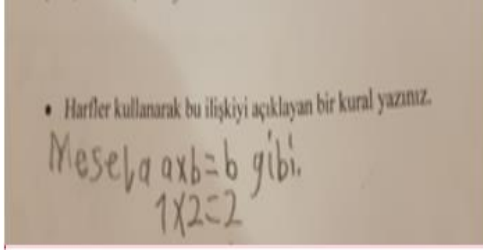


Şekil 11. Beşinci Sınıf Öğrencisinin Çözümü

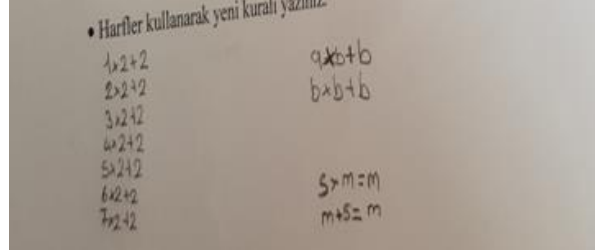
Şekil 10’da görüldüğü gibi, dördüncü sınıf öğrencisinin “Sıra sayısını 2 ile çarparsak doğru sonuç çıkar” şeklindeki ifadesi niceliklerden yalnızca birinden bahsettiğini iki nicelik arasındaki

matematiksel dönüşümü henüz tam olarak tanımlayamadığını göstermektedir. Benzer şekilde Şekil 11’de görüldüğü gibi, beşinci sınıf öğrencisinin genel kuralı $y=mx+n$ olan göreve ilişkin ifadeyi “Ben burada yine aynısını yaparım. Masa sayısı ile 2 çarpıp 2 eklememiz lazım buradaki kural (2. adımı işaret ediyor) ise 4 ile başlayıp 2’şer 2’şer devam edebiliriz” şeklinde kelimelerle eksik bir şekilde tanımlaması bu düzeye ait başka bir örnektir.

D5.2. Değişkenlerle Ortaya Çıkan: Bu düzeydeki öğrenciler masa sayısı ile kişi sayısı arasındaki fonksiyonel kuralı kelimelerin yanı sıra değişkenler kullanarak eksik olarak belirleyebilmişlerdir. Belirledikleri kuralda bir nicelik üzerinde matematiksel dönüşüm tanımlamışlar, ancak bu dönüşümü diğer nicelikte açıkça ilişkilendirememişler ya da niceliklerden birini açıkça tanımlayamamışlardır. Bu öğrenciler ifadede yeni bir değişken kullanmak yerine aynı değişkenin özel bir sayısını kullanabilmişlerdir. Şekil 12’de sunulan üçüncü sınıf öğrencisinin yanıtı ve Şekil 13’te sunulan dördüncü sınıf öğrencisinin yanıtı bu düzeye örnek olarak gösterilebilir.



Şekil 12. Üçüncü Sınıf Öğrencisinin

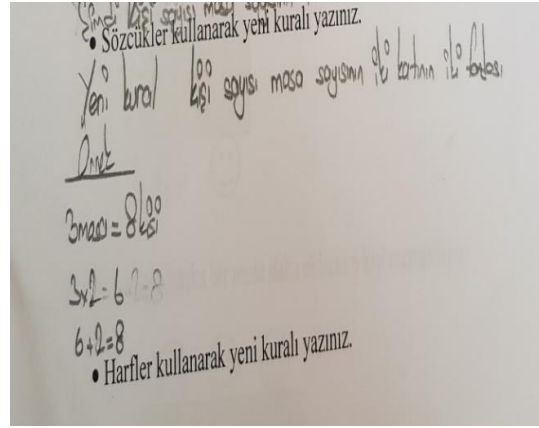
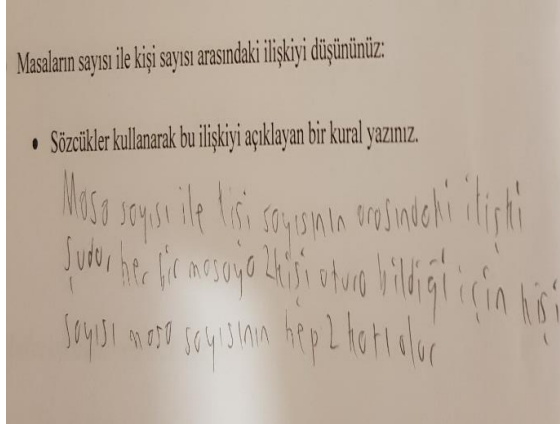


Şekil 13. Dördüncü Sınıf Öğrencisinin Çözümü

Şekil 12’de görüldüğü gibi, öğrenci masa sayısı ile kişi sayısı arasındaki ilişkiyi harfli ifade kullanarak bir eşitlik ile belirtmiştir. Ancak burada nicelikleri tam olarak doğru ifade edememiştir. Burada öğrenci katsayıya bir değişken atamış ve “ $axb=b$ ” şeklinde bir eşitlik oluşturmuştur. Benzer olarak Şekil 13’te görüldüğü gibi, bir başka öğrenci de Görev 2 için belirli örnekler üzerinden fonksiyonel kuralı “ $axb+b$, $bx b+b$, $sxm=m$ ve $m+s=m$ ” şeklinde değişkenler kullanarak ifade etmeye çalışmış ancak doğru bir kural yazamamıştır.

D6. Gelişen Fonksiyonel: Bu düzeydeki öğrenciler D5 düzeyindeki öğrencilerden farklı olarak fonksiyonel ilişkideki nicelikleri hem kelimelerle hem de değişkenlerle doğru bir şekilde ifade edebilmişler, aynı zamanda nicelikler arasındaki matematiksel dönüşümü de açıkça tarif edebilmişlerdir. Bu düzeyin de D5 düzeyinde olduğu gibi iki alt düzeyi söz konusudur. Bu alt düzeylerde yer alan öğrencilerden bazıları fonksiyonel ilişkiyi sadece kelimelerle bazıları da kelimelerin yanı sıra değişkenleri de kullanarak ifade etmişlerdir.

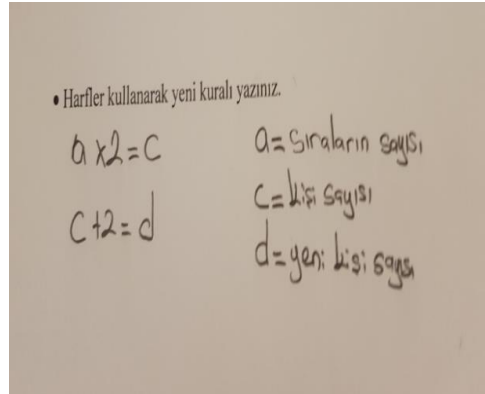
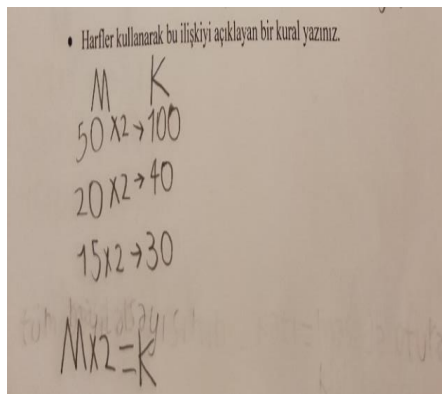
D6.1. Kelimelerle Ortaya Çıkan: Bu düzeydeki öğrenciler kelimeler kullanarak masa sayısı ile kişi sayısı arasında doğru bir fonksiyonel ilişkiyi belirlemişlerdir. Bu fonksiyonel ilişki iki nicelik arasında genelleştirilmiş ilişkiyi tanımlamaktadır. Bu ilişkide bir niceliğin dönüşümü ile diğer bir nicelik elde edilmektedir. Şekil 14’de sunulan dördüncü sınıf öğrencisinin yanıtı ve Şekil 15’te sunulan beşinci sınıf öğrencisinin yanıtı bu düzeye örnek olarak gösterilebilir



Şekil 14. Dördüncü Sınıf Öğrencisinin Çözümü **Şekil 15.** Beşinci Sınıf Öğrencisinin Çözümü

Şekil 14'te görüldüğü gibi, öğrenci genel kuralı $y=mx$ biçimindeki göreve ilişkin ifadeyi "masa sayısı ile kişi sayısı arasındaki ilişki şudur her bir masaya 2 kişi oturabileceği için kişi sayısı masa sayısının hep 2 katıdır" şeklinde kelimelerle ifade etmiştir. Bu açıklamadan öğrencinin masa sayısı ile kişi sayısı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi "hep" kelimesini kullanarak bütüne genellebileceği de görülmektedir. Şekil 15'te ise bir başka öğrenci genel kuralı $y=mx+n$ olan görevi "... kişi sayısı masa sayısının iki katının iki fazlası olur" şeklinde kelimelerle doğru bir şekilde ifade edebildiği görülmektedir.

D6.2. Değişkenlerle Ortaya Çıkan: Bu düzeydeki öğrenciler kelimelerin yanı sıra değişkenler kullanarak da doğru bir fonksiyonel ilişki belirlemişlerdir. Belirledikleri ilişkide nicelikler arasındaki dönüşümü ifade ederken eşitlik kullanmışlardır. Bu eşitlik iki nicelik arasındaki genelleştirilmiş ilişkiyi tanımlamakta, bir niceliğin dönüşümü aracılığı ile diğer bir nicelik elde edilmektedir. Şekil 16'te sunulan dördüncü sınıf öğrencisinin yanıtı ve Şekil 17'da sunulan beşinci sınıf öğrencisinin yanıtı bu düzeyde örnek olarak gösterilebilir.

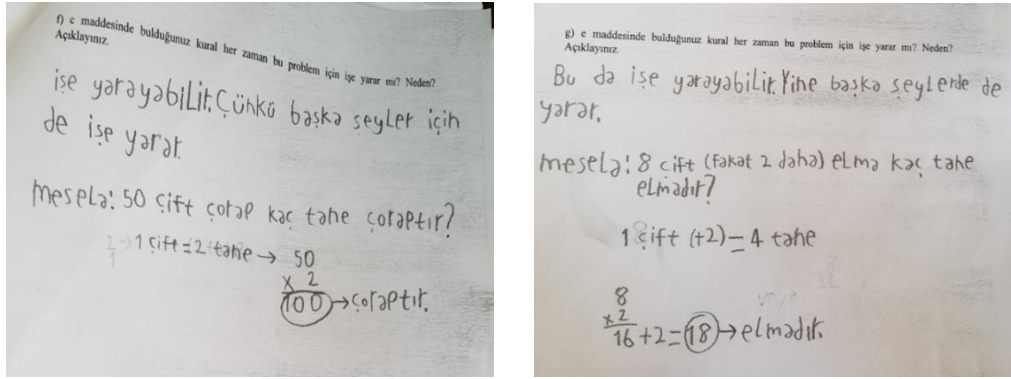


Şekil 16. Dördüncü Sınıf Öğrencisinin Çözümü **Şekil 17.** Beşinci Sınıf Öğrencisinin Çözümü

Şekil 16'da görüldüğü gibi, öğrenci masa sayısı ile kişi sayısı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi değişkenlerin etiket anlamını (masa sayısı için m harfi, kişi sayısı için k harfi) kullanarak doğru bir şekilde ifade etmiştir. Şekil 17'de ise bir başka öğrencinin fonksiyonel ilişkiyi ilginç bir şekilde iki eşitlik kullanarak ifade ettiği görülmektedir. Bu öğrenci önce sıra sayısına karşılık gelen değişkeni a harfi ile temsil etmiş ve kişi sayısını c ile temsil ederek $ax2=c$ eşitliğini oluşturmuştur. Daha sonra kişi

sayısına sabit terimi ekleyerek yeni oluşan kişi sayısını da d harfi ile temsil ederek “ $c+2=d$ ” şeklinde ikinci eşitliğini yazmıştır.

D7. Temel Düzeyde Nesne Olarak Fonksiyon: Bu düzeyde yer alan bir öğrenci belirlediği fonksiyonel ilişkiye yönelik oluşturduğu genel kuraldaki değişkenleri soyutlayarak o değişkenlerin yerine farklı nesnelerin gelebileceğini ifade etmiştir. Şekil 18’de sunulan dördüncü sınıf öğrencisinin yanıtları bu düzeye örnek olarak gösterilebilir.



Şekil 18. Dördüncü Sınıf Öğrencisinin Çözümleri

Şekil 18’de görüldüğü gibi, öğrenci genel kuralı $y=mx$ ve $y=mx+n$ olan görevlere ilişkin matematiksel ifadelerdeki değişkenleri soyutlayarak o değişkenlerin yerine başka nesnelere atamıştır. Diğer bir deyişle bu öğrenci öncelikle masa sayısı ile kişi sayısı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi değişkenler kullanarak doğru bir şekilde ifade etmiş yanı sıra bulduğu kuraldaki masa sayısı ile kişi sayısı şeklindeki nicelikler yerine çift ve çorap sayısı şeklinde farklı nesnelere kullanabilmiştir.

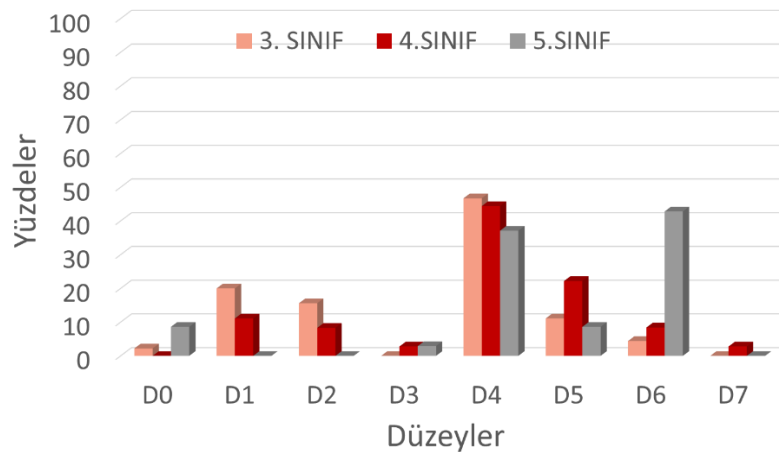
Üçüncü, Dördüncü ve Beşinci sınıf Öğrencilerinin Fonksiyonel Düşünme Düzeylerine İlişkin Betimsel Bulgular

Öğrenciler verdikleri yanıtlar doğrultusunda genel kuralı $y=mx$ olan matematiksel ifadeleri genelleme becerilerine göre (Görev 1), tanımlanan fonksiyonel düşünme düzeylerine atanmışlardır. Her bir fonksiyonel düşünme düzeylerinde yer alan öğrenci sayıları tüm sınıf düzeyleri için belirlenmiş daha sonra öğrencilerin düzeylerde yer alma yüzdeleri hesaplanmıştır. Hesaplanan yüzdeler tablo temsili ile Tablo 5’te, grafik temsili ile Şekil 19’da sunulmuştur.

Tablo 5.

Genel Kuralı $y=mx$ Olan Göreve İlişkin Öğrencilerin Fonksiyonel Düşünme Düzeylerinde Yer Alma Yüzdeleri

DÜZEYLER		y=mx			
		3. Sınıf	4. Sınıf	5. Sınıf	
Fonksiyonel Düşünme Yok	D0: Ön-Yapısal	%2.2	%0	%8.6	
Varyasyonel Düşünme	D1: Yinelemeli-Özel	%20	%11.1	%0	
	D2: Yinelemeli-Genel	%15.6	%8.3	%0	
Kovaryans Düşünme	D3: Karşılıklı Değişim	%0	%2.8	%2.9	
	D4: Fonksiyonel Özel	D4.1: Toplamsal İlişki	%0	%0	%2.9
		D4.2: Çarpımsal İlişki	%46.7	%44.4	%34.2
	Birebir Eşleyerek Düşünme	D5.1: Kelimelerle Ortaya Çıkan	%8.9	%19.4	%8.6
		D5.2: Değişkenlerle Ortaya Çıkan	%2.2	%0	%0
	D6: Gelişen Fonksiyonel	D6.1: Kelimelerle Ortaya Çıkan	%4.4	%8.3	%11.4
		D6.2: Değişkenlerle Ortaya Çıkan	%0	%2.8	%31.4
D7: Nesne Olarak Fonksiyon	D7: Nesne Olarak Fonksiyon	%0	%2.8	%0	



Şekil 19. Genel Kuralı $y=mx$ Olan Göreve İlişkin Öğrencilerin Fonksiyonel Düşünme Düzeylerinde Yer Alma Yüzdeleri

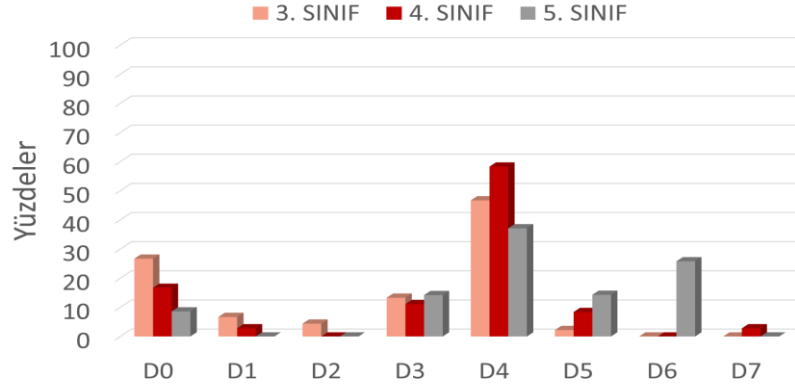
Tablo 5'te ve Şekil 19'da görüldüğü gibi, öğrencilerin genel kuralı $y=mx$ olan göreve ilişkin matematiksel ifadeleri genelleme becerilerine göre düzeylerde yer alma yüzdeleri incelendiğinde her üç sınıf düzeyi için de öğrencilerin büyük bir kısmının Fonksiyonel Özel-Çarpımsal İlişki düzeyinde yer aldığı görülmüştür. Üçüncü sınıf öğrencilerinin %4.4'ünün Temel Fonksiyonel-Kelimelerle Ortaya Çıkan düzeye kadar çıkabildiği gözlemlenmiştir. Aynı zamanda dördüncü sınıf öğrencilerinin %2.8'inin en üst düzey olan Nesne Olarak Fonksiyon düzeyine kadar çıkabildiği oldukça dikkat çekici bir bulgu olmuştur. Diğer yandan beşinci sınıf öğrencilerinin ise kayda değer bir çoğunluğunun (%31.4) Gelişen Fonksiyonel-Değişkenlerle Ortaya Çıkan düzeyde yer aldığı görülmüştür.

Benzer şekilde öğrenciler verdikleri yanıtlar doğrultusunda genel kuralı $y=mx+n$ olan göreve ilişkin matematiksel ifadeleri genelleme becerilerine göre tanımlanan fonksiyonel düşünme düzeylerine atanmışlardır. Her bir fonksiyonel düşünme düzeylerinde yer alan öğrenci sayıları tüm sınıf düzeyleri için belirlenmiş daha sonra öğrencilerin düzeylerde yer alma yüzdeleri hesaplanmıştır. Hesaplanan yüzdeler tablo temsili ile Tablo 6'da, grafik temsili ile Şekil 20'de sunulmuştur.

Tablo 6.

Genel Kuralı $y=mx+n$ Olan Göreve İlişkin Öğrencilerin Fonksiyonel Düşünme Düzeylerinde Yer Alma Yüzdeleri

DÜZEYLER		y=mx+n			
		3. Sınıf	4. Sınıf	5. Sınıf	
Fonksiyonel Düşünme Yok	D0: Ön-Yapısal	%26.7	%16.7	%8.6	
Varyasyonel Düşünme	D1: Yinelemeli-Özel	%6.7	%2.8	%0	
	D2: Yinelemeli-Genel	%4.4	%0	%0	
Kovaryans Düşünme	D3: Karşılıklı Değişim	%13.3	%11.1	%14.2	
	Birebir Eşleyerek Düşünme	D4: Fonksiyonel Özel			
		D4.1: Toplamsal İlişki	%0	%0	%0
		D4.2: Çarpımsal İlişki	%28.9	%33.3	%22.9
		y=mx+n	%17.8	%25	%14.2
	D5: Temel Fonksiyonel	D5.1: Kelimelerle Ortaya Çıkan	%2.2	%5.6	%8.6
	D5.2: Değişkenlerle Ortaya Çıkan	%0	%2.8	%5.7	
D6: Gelişen Fonksiyonel	D6.1: Kelimelerle Ortaya Çıkan	%0	%0	%2.9	
	D6.2: Değişkenlerle Ortaya Çıkan	%0	%0	%22.9	
	D7: Nesne Olarak Fonksiyon	%0	%2.8	%0	



Şekil 20. Genel Kuralı $y=mx+n$ Olan Göreve İlişkin Öğrencilerin Fonksiyonel Düşünme Düzeylerinde Yer Alma Yüzdeleri

Tablo 6’da ve Şekil 20’de görüldüğü gibi, öğrenciler genel kuralı $y=mx+n$ olan göreve ilişkin fonksiyonel ilişkileri genelleme becerilerine göre düzeylerde yer alma yüzdeleri incelendiğinde her üç sınıf düzeyi içinde öğrencilerin büyük bir kısmının Fonksiyonel Özel-Çarpımsal İlişki düzeyinde yer aldığı görülmüştür. Aynı zamanda üçüncü sınıf öğrencilerinin %2.2’sinin Temel Fonksiyonel-Kelimelerle Ortaya Çıkan düzeye kadar çıkabildiği gözlenmiştir. Dördüncü sınıf öğrencilerinin ise %2.8’inin en üst düzey olan Temel Düzeyde Nesne Olarak Fonksiyon düzeyine kadar çıkabildiği gözükmemektedir. Ancak bu durumun istisna olduğu genel olarak dördüncü sınıf öğrencilerinin Temel Fonksiyonel-Değişkenlerle Ortaya Çıkan düzeye (%2.8) kadar çıkabildiği söylenebilir. Beşinci sınıf öğrencilerinin ise yine kayda değer bir çoğunluğunun (%22.9) Gelişen Fonksiyonel-Değişkenlerle Ortaya Çıkan düzeye yer aldığı görülmüştür. Ayrıca Tablo 6’da görüldüğü gibi, üçüncü sınıf öğrencilerinin %28.9’u, dördüncü sınıf öğrencilerinin %33.3’ü ve beşinci sınıf öğrencilerinin %22.9’u $y=mx+n$ olan göreve ilişkin fonksiyonel ilişkiyi belirlerken “n” sabitini göz ardı ederek genelleme yapmışlardır. Öte yandan verilen örüntüde herhangi bir matematiksel ilişki kuramayarak her üç sınıf düzeyinde de D0’da yer alan öğrencilerin olduğu görülmüştür. Özellikle dördüncü ve beşinci sınıftaki bazı öğrencilerin bu düzeyde bulunmaları oldukça dikkat çekici olmuştur. D1 ve D2 düzeylerinde ise üçüncü ve dördüncü sınıftan öğrencilerin bulunduğu, beşinci sınıftan hiçbir öğrencinin bulunmadığı gözlenmiştir. Bu bağlamda D0’da bulunan beşinci sınıf öğrencilerinin istisna olduğu, beşinci sınıfların D3’ten itibaren düzeylerde yer aldığı söylenebilir.

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Cebir öncesi dönemde yer alan öğrencilerin fonksiyonel düşünme düzeylerinin belirlendiği bu araştırmanın önemli sonuçlarından biri alanyazında bulunan fonksiyonel düşünme düzeylerine ek olarak (Blanton vd., 2015; Stephens vd., 2017) bazı düzeylere ilişkin alt düzeylerin ve yeni bir düzeyin oluşturulmasıdır. Bu durum mevcut düzeyler ile bir karşılaştırmanın yapılması açısından önemlidir. Araştırmada elde edilen bir diğer önemli sonuç ise üçüncü sınıf öğrencilerinin yaklaşık yarısının, dördüncü ve beşinci sınıf öğrencilerin ise yarısından fazlasının fonksiyonel düşünmenin var olduğunu gösteren düzeylerde (D3, D4, D5, D6, D7) yer almalarıdır. Aynı zamanda kovaryans düşünme

kapsamında ele alınan düzeylerde yer alan bu öğrenciler her bir nicelikteki değişimi kendi içinde belirleyerek nicelikleri birbirleriyle koordine edebilmişlerdir (Confrey ve Smith, 1995). Bu durum Türkiye’de cebir öncesi dönemde yer alan bu öğrencilerin fonksiyonel düşünebildiğinin bir göstergesidir. Elde edilen sonuç bu öğrencilerin cebirin temel kavramlarını daha kolay edinebilmelerini sağlama açısından önemlidir. Alanyazındaki fonksiyonel düşünme üzerine gerçekleştirilen pek çok çalışmada da (Blanton ve Kaput, 2004; Blanton ve Kaput, 2011; Blanton vd.,2015; Miller, 2016; Warren ve Cooper, 2005; Warren, Cooper ve Lamb 2006) öğrencilerin erken yaşlardan itibaren fonksiyonel düşünme becerisine sahip olabildiğini göstermektedir. Bu çalışmalar da, küçük çocukların nicelik ve nicelikler arasındaki ilişkiyi tanımlayabildikleri ve gelişiminin de okulöncesinden itibaren başlaması gerektiği vurgulanmaktadır (Warren, Cooper ve Lamb, 2006). Bu bağlamda araştırmadan elde edilen bu sonuç Türkiye’de ilköğretim matematik dersi öğretim programının cebir öncesini desteklediğinin bir göstergesi olabilir.

Oluşturulan fonksiyonel düşünme düzeylerine göre araştırmada üçüncü ve dördüncü sınıf öğrencilerinden bazılarının yalnızca varyasyonel düşünme kapsamında yinelemeli örüntüye odaklandığı ve daha üst düzeylere çıkamadığı sonucuna ulaşılmıştır. Çeşitli araştırmalar da bu duruma benzer olarak öğrencilerin başlangıçta değişen nicelikler arasındaki ilişkilerden ziyade bağımlı değişkendeki yinelemeli örüntüye odaklanma eğiliminde oldukları öne sürülmektedir (Lannin vd. 2006; Carraher vd., 2008; Warren ve Cooper, 2008). Araştırmalar yinelemeli örüntülerin küçük yaştaki çocukların fonksiyonel düşünmelerinin gelişiminde nicelikler arasındaki ilişkileri anlamalarının ön koşulu olabileceğini ve bu ilişkiler hakkında düşünmelerini kolaylaştırabileceğini savunmalarına karşın (Blanton vd., 2015; Herbert ve Brown, 1997; Kabaal ve Tanışlı, 2010), Blanton ve Kaput (2011) erken yaşlarda yinelemeli örüntülere soyut bir şekilde vurgu yapılmasının öğrencilerin kovaryans ve birebir eşleyerek düşünmelerinin gelişimlerini engellediğini ileri sürmüştür. Bu nedenle öğrencilerin fonksiyonel düşünebilme gelişimlerini engellememesi amacı ile erken yaşlardan itibaren öğretimi başlanan örüntülerin iki ya da daha çok niceliğin birbirlerine göre nasıl değiştiğine vurgu yapılarak ele alınması gerektiği söylenebilir.

Araştırmadan çıkarılan bir başka sonuç ise hem genel formu $y=mx$ olan görev hem de genel formu $y=mx+n$ olan görev için her sınıf düzeyindeki öğrencilerin büyük bir çoğunluğu Fonksiyonel Özel-Çarpımsal İlişki düzeyinde yer almalarıdır. Öğretim programında çarpma işleminin üçüncü sınıftan itibaren başlaması ve dördüncü, beşinci sınıflarda da devam etmesi öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun Çarpımsal İlişki düzeyinde yer almasında etkisi olduğu düşünülebilir.

Araştırmada yanı sıra bazı öğrenciler fonksiyonel ilişkinin genel kuralını önce sözel olarak açıklamış, daha sonra değişken kullanarak ifade etmişlerdir. Ancak Stephens ve arkadaşlarının (2017) yapmış olduğu çalışmada ise bu durumun aksine bir durum gözlenmiş ve öğrencilerin ilişkilerin altında yatan genel ifadeleri önce sembol kullanarak tanımlayabilme eğiliminde oldukları ifade edilmiştir. Stephens ve arkadaşları çalışmalarında cebir öncesi dönemde yer alan öğrencilere değişken kavramının verilebileceğini savunmuşlar ve öğrencilere bu yönde bir öğretim vermişlerdir. Dolayısıyla değişken kullanma eğiliminin sözel açıklamadan önce ortaya çıkması verilen eğitimin bir sonucu olabilir. Diğer yandan araştırmada elde edilen diğer bir sonuç ise her iki göreve ilişkin temel fonksiyonel düzeyde sözel olarak ilişkiyi açıklama yüzdeleri beşinci sınıf öğrencilerinde en düşük iken, gelişen fonksiyonel düzeyde değişken kullanarak ilişkiyi açıklama yüzdeleri beşinci sınıf öğrencilerinde en yüksek olarak gözlenmiştir. Bu durum beşinci sınıf öğrencilerinin değişken kullanmaya daha hazır olduklarını ve değişken kullanmaya başladıklarında ise sözel açıklamalarının azaldığı şeklinde açıklanabilir. Nitekim Stephens ve arkadaşlarının gerçekleştirdikleri çalışmada bu düşünceyi desteklemektedir.

Araştırmada dördüncü ve beşinci sınıftaki bazı öğrencilerin genel kuralı $y=mx$ ve $y=mx+n$ olan ifadeleri doğru bir şekilde genellemesi, bu ifadeleri önce sözel daha sonra değişkenler yardımıyla temsil edebilmesi, yanı sıra üçüncü sınıftaki öğrencilerden bazılarının da tam olarak doğru olmasa da ifadeleri genellemeye çalışması da önemli sonuçlardan biridir. Türkiye’de matematik dersi öğretim programında değişken kavramının altıncı sınıfta başlaması ve araştırmadaki öğrencilerin harfli ifadelerle ilgili herhangi bir deneyimlerinin olmaması bu sonucun nedenini sorgulamaktadır. Her ne kadar araştırma kapsamındaki öğretmenlerden bu konuya ilişkin bilgi edinilmese de bu öğretmenlerin sınıf uygulamalarında değişken kullanımı yönünde bir çalışma yapmış olma ihtimalini akla getirmektedir. Son zamanlarda yapılan çalışmalar da elde edilen bu sonuçları destekleyecek biçimde erken yaştaki öğrencilerin matematiksel ilişkileri ve yapıları genellebildiklerini göstermiştir (Blanton vd.,2015; Carraher, Martinez ve Schliemann, 2008; Martinez ve Brizuela, 2006; Stephens vd., 2017; Warren, Cooper ve Lamb, 2006; Wilkie, 2016).

Araştırmada aynı zamanda her sınıf düzeyinde bazı öğrenciler genel kuralı $y=mx+n$ biçiminde verilen örüntüyü genellerken (genel kuralı $y=mx$ e göre) daha zorlanmışlar ve matematiksel ilişkiyi kuramamışlardır. Stephens ve arkadaşları (2015) ile Blanton ve arkadaşları (2015) tarafından gerçekleştirilen çalışmalarda da benzer bir sonuç elde edilmiştir. Öğrencilerin genel formu $y=mx+n$ olan örüntüde sabit terimi göz ardı etmelerinin ve problem bağlamı ile sabit terimi ilişkilendirememelerinin bu sonucu doğurduğu söylenebilir.

Araştırmanın bir başka sonucu ise dördüncü sınıf öğrencilerinden birinin ilginç bir şekilde fonksiyonel düşünme düzeylerinden en üst düzeye atanmasıdır. Öğrenci hem $y=mx$ formundaki hem de $y=mx+n$ formundaki ifadeleri genelleyerek doğru bir fonksiyonel kuralı hem sözel hem de değişkenlerin etiket anlamını yani kişi ve masa kelimelerinin baş harflerini kullanarak ifade etmiştir. Dahası yazdığı genel kuraldaki değişkenleri soyutlayarak temel düzeyde nesne olarak fonksiyon düzeyine kadar çıkmıştır. Öğrencinin bu düzeye kadar çıkabilmesinin nedenleri arasında öğrencinin sosyo-ekonomik düzeyi, ön deneyimi ya da öğretmen faktörü gösterilebilir. Benzer şekilde beşinci sınıf öğrencilerinin önemli bir çoğunluğu da her iki görev için de fonksiyonel ilişkiyi doğru bir şekilde hem sözel hem de değişkenlerle temsil etmişlerdir. Yazılan genel kurallarda bazı öğrenciler değişkenlerin etiket anlamının dışına çıkarak farklı harfleri ya da sembolleri kullanmışlardır. Bunun yanı sıra öğrencilerden bazıları ikinci görevin genel kuralını iki farklı eşitlikten yola çıkarak iki adımda yazmıştır. Bu sınıf düzeyindeki öğrencilerin henüz cebirsel ifadelerle karşılaşmamış olmasına karşın sahip oldukları fonksiyonel düşünebilme ve genelleme becerileri oldukça umut vericidir. Aynı zamanda bazı üçüncü sınıf öğrencilerinin de tam olarak doğru ifade etmemiş olsalar da eşitlik işareti kullanarak değişkenlerle fonksiyonel ilişkinin kuralını yazmaya çalışmaları önemlidir.

Öğretim programları incelendiğinde değişken kavramının yer aldığı kazanımların altıncı sınıftan itibaren başladığı dikkate alındığında öğrencilerin herhangi bir öğretim almadan harfli ifadeleri doğru bir şekilde kullanabilmesi oldukça sevindiricidir. Buradan hareketle öğretim programlarına cebirsel düşünmeyi, özel olarak fonksiyonel düşünmeyi, geliştirici etkinliklerin eklenmesi öğrencilerin daha sonra cebir ve ileri matematikte yaşayacakları problemlerin üstesinden daha kolay gelmelerini sağlayabilir. Aynı zamanda öğretmen faktörünün öğrencilerin fonksiyonel düşünme becerileri üzerinde önemli etkilerinin olduğu düşünülmektedir. Bu nedenle öğretmenlere eksik oldukları noktalarda hizmet içi, web destekli vb. eğitimler verilerek onların mesleki gelişimlerinin artırılması sağlanabilir. Yanı sıra daha büyük örneklemlili ve sosyo-ekonomik düzeyleri farklı okullarda öğrenim gören öğrencilerin fonksiyonel düşünceleri üzerine büyük çaplı çalışmalar yapılabilir.

Kaynaklar/References

- Akkan, Y., Baki, A., & Çakıroğlu, Ü. (2011). Aritmetik ile cebir arasındaki farklılıklar: Cebir öncesinin önemi. *İlköğretim Online*, 10(3), 812-823.
- Amit, M., & Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *The International Journal on Mathematics Education*, 40, 111-129.
- Blanton, M.L. (2008). Algebra and the elementary classroom. *Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary grade students' capacity for functional thinking. In M. J. Høines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Norway: PME.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Heidelberg, Germany: Springer.
- Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Gardiner, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(1), 34-63. doi:10.1080/10986065.2015.981939
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in six-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-558.
- Carraher, D.W., Martinez, M.V., & Schliemann, A.D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *The International Journal on Mathematics Education*, 40, 3-22.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Ernest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37, 87-115.
- Confrey, J. Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66-86.
- Garcia-Cruz, J.A., & Martinon, A. (1997). Actions and invariant schemata in linear generalizing problems. In E. Pehkonen (Ed.) *Proceeding of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 289-296. Universty of Helsinki.
- Herbert, K. & R. Brown. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 3, 340-344.
- Hoffkamp, A. (2011). The use of interactive visualizations to foster the understanding of concepts of calculus: design principles and empirical results. *The International Journal on Mathematics Education*, 43, 359-372.
- Kabael, U. T. & Tanışlı, D. (2010). Cebirsel düşünme sürecinde örüntüden fonksiyona öğretim. *İlköğretim Online*, 9(1), 213-228.
- Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In S. Fennel (Ed.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25-26). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.
- Kaput, J., Carraher, D., & Blanton, M. (2008). Algebra in the early grades. New York, NY: Erlbaum.
- Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.

- Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding?. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 299-317.
- Ley, A. F. (2005). A cross-sectional investigation of elementary school student's ability to work with linear generalizing patterns: The impact of format and age on accuracy and strategy choice. *Masters Abstract International*, 44(2), 124.
- Liamputtong, P. (2009). Qualitative data analysis: conceptual and practical considerations. *Health Promotion Journal of Australia*, 20(2), 133-139.
- Martinez, M., & Brizuela, B. M. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 285-298.
- Merriam, S. B. & Tisdell, E.J. (2016). *Qualitative research: A guide to design and implementation* (3rd ed). San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Miller, J. (2016, July). *Young indigenous students en route to generalising growing patterns*. Paper presented of the 39th Annual Meeting of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Adelaide, South Australia.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM Publications.
- Orton, A. & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (104-120). London and New York: Cassell.
- Rivera, F. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: understanding figural generalization. *Mathematics Teacher*, 101(1), 69-75.
- Sasman, M. C., Linchevski, L., & Olivier, A. (1999). The influence of different representations on children's generalisation thinking processes. In J. Kuiper (Eds.), *Proceedings of the Seventh Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics and Science Education* (pp. 406-415). Harare, Zimbabwe.
- Smith, E. (2003). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *The Development of Algebraic Reasoning in the Context of Elementary Mathematics*. ss. 95-132.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147-164.
- Stephens, A., Fonger, N. L., Blanton, M., & Knuth, E. (2016, April). *Elementary Students' Generalization and Representation of Functional Relationships: A Learning Progressions Approach*. Poster to be presented at the Annual Meeting of the American Education Research Association, Washington, DC.95-132
- Stephens, A. C., Fonger, N. L., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E., & Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(3), 143-166.
- Tanişlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *Journal of Mathematical Behavior*, 30(3), 206-223.
- Vollrath, H. J. (1986). Search strategies as indicators of functional thinking. *Educational Studies in Mathematics*. 17, 387-400.
- Warren, E. & Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 6 (2), 150-162.
- Warren, E., & Cooper, T. J. (2008). Patterns that support early algebraic thinking in the elementary school. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics. 70th yearbook of the national council of teachers of mathematics* (pp. 113-126). Reston, VA: NCTM.

- Warren, E. A., Cooper, T. J., & Lamb, J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 208–223.
- Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 93, 333–361.
- Yeşildere-İmre, S., Akkoç, H. ve Baştürk-Şahin, B. N. (2017). Ortaokul öğrencilerinin farklı temsil biçimlerini kullanarak matematiksel genelleme yapma becerileri. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 8(1), 103-129.

Yazarlar

İletişim

Dr. Dilek TANIŞLI, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi bölümünde öğretim üyesidir. Çalışma alanları arasında öğrenme ve öğretme, cebirsel düşünme ve cebir öğretimi, öğretmen eğitimi ve öğretmenlerin mesleki gelişimi yer almaktadır Türkiye, e-posta: dtanisli@anadolu.edu.tr

Doç. Dr. Dilek TANIŞLI, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Yunusemre Kampüsü, Tepebaşı, 26470, Eskişehir, e-mail: dtanisli@anadolu.edu.tr

Hnadegül TÜRKMEN, Anadolu Üniveristesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans öğrencisidir.

Handegül TÜRKMEN, Milli Eğitim Bakanlığı Celtik İsakuşağı Ortaokulu Celtik / Konya e-mail: handegulturkmen@gmail.com

Summary

Purpose and Significance. Early algebra focuses on two main areas: Arithmetic generalisation and functional thinking. Functional thinking, which is the main subject of this study, can be defined as the relationship between quantity and quantity of the most general cases (Smith, 2003). Functional thinking should be introduced gradually over a long period of time from an early age (Warren, Cooper, & Lamb, 2006). Most of the research studies revealed that students have functional thinking skill during the early ages (Blanton and Kaput, 2004; Warren, Cooper, Lamb, 2006), and that they might begin to use variable notation to represent relationships between quantities (Blanton et al., 2015), and that they might successfully represent functional relationships using symbolic expressions. (Wilkie, 2016). Blanton et al. (2015) have provided evidence that early algebraic thinking practices such as generalization, representation, proof, and reasoning of mathematical relations and structure can be successfully integrated into classes from an early age. As a result of the research experiments conducted by the students in the early algebra period, Stephens et al. (2017) have observed that the students have more and more ideas about the relationship between numbers, the ability to determine the general rules, and also an increase for the number of students, who can express the general rule of functional expression with symbols and words. The Turkish elementary mathematics curriculum emphasises the development of algebraic and functional thinking since 2005, although not in the manner proposed by the international mathematics education literature. In Turkey, unlike the international literature, it has attracted attention that very few studies (Tanışlı, 2011) about thinking of functional for early algebra students have been held. However, in addition to these activities in Turkey, it is still necessary to investigate functional thinking skills, which have a significant impact on the achievement of many concepts that students will encounter in different levels of class and different contexts in the pre-algebra period. In this context, the general purpose of the study is to determine the students' levels of generalisation of functional relationships in third, fourth and fifth grade. This research emphasizes the importance of early algebra on functional thinking skills and also it is thought that it will contribute to mathematics education literature, programs and their contents in order to overcome the difficulties in the concept of algebra and function.

Methodology. In this research, a basic qualitative research approach is adopted (Merriam ve Tisdell, 2016). Thus, the level of functional thinking of 116 students in early algebra period was examined by examining their answers to open-ended questions. The criterion sampling method, which is one of the purposive sampling methods, was used in the selection of the participants. In this context, a total of 116 volunteer students as 45 students of the third grade, 36 students from the fourth grade, and 35 from the fifth grade students has participated. Data were collected with open-ended questions. The analysis of the data was carried out in two stages. In the first stage, thematic analysis method was used to determine the functional thinking levels of third, fourth and fifth grade students (Liamputtong, 2009). In the analysis, functional thinking levels developed by Blanton et al. (2015) and Stephens et al. (2017) were taken into consideration and some of these levels were used in this research. In addition, some levels of lower levels were also adopted based on the the data obtained.

Results, Discussion and Recommendations. One of the important results of this study, in which the levels of functional thinking of the students in the early algebra period were determined, is to establish lower levels of some levels in addition to the levels of functional thinking found in the literature (Blanton et al., 2015; Stephens et al., 2017). This is important in terms of making a comparison with existing levels. Another important result of the study is that approximately half of the third year students and more than half of the fourth and fifth grade students take place at the levels (D3, D4, D5, D6, D7), which show that functional thinking exists. This case shows that these students involved in

early algebra period in Turkey can think functional. This is an indication of functional areas could think of students in early algebra in Turkey. The result is important for these students to make them easier to learn the basic concepts of algebra.

According to the level of functional thinking created, it was concluded that some of the third and fourth grade students focused only on the recursive pattern and could not reach higher levels. Similar to this, it is suggested that students tend to focus on the recursive pattern in the dependent variable rather than the relationships between the varying quantities at the beginning (Lannin et al. 2006; Carraher et al., 2008; Warren and Cooper, 2008). In the research, some students first explained the general rule of functional relationship by using words and then using variable. However, in a study by Stephens et al. (2017), an opposite situation was observed and it is stated that the students tend to be able to define the general expressions underlying the relationships first by using the symbol. On the other hand, as in the studies carried out by Stephens et al. (2015) and Blanton et al. (2015), some students at each grade level had more difficulty in generalizing and representing the general rule of expressions $y = mx + n$ and could not establish a mathematical relationship.

In the pattern with the general form $y=mx+n$, it can be said that ignoring the fixed term and failing to associate the fixed term with the problem context lead to this result. In addition, the third and fifth grade students in the research cannot establish any mathematical relationship with the general form of $y = mx$, and the percentage of fifth grade students, who cannot establish this relationship, is higher than the percentage of third and fourth grade students. It is thought that the class teachers and mathematics teachers play a role in this situation.

Another result of the research is the appointment of one of the fourth grade students from the level of functional thinking to the highest level. The reasons for the student to reach this level can be shown as socio-economic level, preliminary experience or teacher factor. Similarly, a significant majority of the fifth grade students represented the functional relationship with both words and variables accurately for both tasks. Although this class level students have not yet encountered algebraic expressions, their functional thinking and generalization skills are very promising. At the same time, it is important that some third-year students try to write the rule of the functional relationship with variables by using the equality sign, even if they have not fully stated correctly. When the curriculums are examined, considering that the gains from the concept of variable have started from the sixth grade, it is very pleasing that the students can use the letter expressions without any teaching.

From this point of view, it is possible to add functional thinking, algebraic thinking and developmental activities to the curriculum and to make it easier for the students to overcome the problems of algebra and advanced mathematics. At the same time, it was seen that the teacher factor had significant effects on the students' functional thinking skills. For this reason, teachers can be provided with in-service, web-supported and similar trainings at points where they are lacking and their professional development can be increased. In addition, large-scale studies can also be carried out on the functional thinking of students studying in different schools with larger samples and socio-economic levels.