EĞİTİMDE NİTEL ARAŞTIRMALAR DERGİSİ
Journal of Qualitative Research in Education *Volume 3 / Issue 3, 2015*
Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi - ENAD
Journal of Qualitative Research in Education - JOQRE

Öğrencilerin Çok Çözümlü Problemler ile İmtihanı: Çözümlerde Kullanılan Stratejilerin Belirlenmesi[6]

Students' Challenge with Multiple Solution Tasks: Determining the Strategies Used in Tasks

Tuğba Yulet Yılmaz
Nilüfer Yavuzsoy Köse[7]

To cite this article/Atıf için:
Yılmaz, T. Y. & Köse, N. Y. (2015). Öğrencilerin çok çözümlü problemler ile imtihanı: Çözümlerde kullanılan stratejilerin belirlenmesi. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi - Journal of Qualitative Research in Education,* 3(3), 78-101. http://dx.doi.org/10.14689/issn.21482624.1.3c3s4m [Online] www.enadonline.com

Makale Hakkında
Gönderim Tarihi: 13.07.2015
Düzeltme: 01.10.2015
Kabul Tarihi: 16.11.2015

Öz. Çok çözümlü problemler öğrenciye birbirinden farklı yöntemleri kullanarak aynı sonuca ulaşma imkânı veren, birden fazla yolla çözülebilen matematiksel görevler ya da birden fazla yolla kanıtlanabilen matematiksel durumlar olarak tanımlanmaktadır. Öğrencilerin sorgulama, muhakeme, araştırma ve düşüncelerini açıklama becerilerinin gelişimini destekleyen çok çözümlü problemlerin yaratıcılık ve matematiksel düşünme süreçleri ile yakından ilişkisi bulunmaktadır. Çok çözümlü problemlere odaklanan bu araştırmada amaç öğrencilerin çok çözümlü problemlerde kullandıkları farklı çözüm stratejilerinin belirlenmesidir. Araştırmanın katılımcılarını İlköğretim Matematik Öğretmenliği programındaki 76 birinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Veri toplama aracı olarak açık uçlu bir testten yararlanılmış, testte çok çözümlü iki probleme yer verilmiştir. Öğrencilerden, problemlerin her biri için verilen otuz dakikalık süre içinde her bir problemi bulabildikleri kadar çok çözüm yoluyla çözmeleri istenmiştir. Ardından öğrenciler arasından belirlenen altı öğrenci ile klinik görüşmeler gerçekleştirilmiş, veriler nitel olarak analiz edilmiştir. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun geometri probleminde örüntü problemine göre daha fazla çözüm yolu üretebilmelerine karşın problemlerin çözümlerinde çok/farklı çözüm yolu üretemedikleri belirlenmiştir.

Anahtar sözcükler: Matematik eğitimi, Problem çözme, Çok çözümlü problemler, Stratejiler

Abstract. Multiple solution tasks are defined as mathematical situations which can be proved in more than one way or as mathematical tasks that can be solved in more than one way so that students can reach the same result by using different methods. Multiple solution tasks, which support the development of students' skills related to interrogation, reasoning, research and making comments, have a close relationship with the processes of mathematical thinking and creativity. The purpose of this study, which focuses on multiple solution tasks, was to determine different solution strategies used by students for multiple solution tasks. The participants of the study were 76 freshman students attending the department of Elementary School Mathematics Teaching. As the data collection tool, an open-ended test made up of two multiple solution tasks was used. The students were asked to solve each task in thirty minutes in as many ways as they could. Following this, clinical interviews were held with six students selected among all the participants. The data collected were analyzed qualitatively. The results revealed that most of the students found more ways of solution to the geometry task than the pattern-related task and that they did not find many/different ways for individual solutions for the tasks, though.

Keywords: Mathematics education, Problem solving, Multiple solution tasks, strategies

[6] 2014 yılında Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak gerçekleştirilen bu çalışmanın bir bölümü 25-28 Ağustos 2014 tarihleri arasında Viyana'da düzenlenen 3. Uluslararası Avrasya Matematik Bilimleri ve Uygulamaları Konferansı'nda sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

[7] *Sorumlu Yazar*: Doç. Dr. Nilüfer Yavuzsoy Köse, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Eskişehir, Türkiye, eposta: nyavuzsoy@anadolu.edu.tr

Giriş

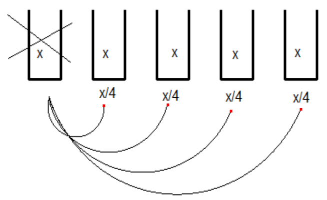
Matematiksel düşünmenin gelişiminde hiç şüphesiz problemler ve problem çözme süreci ayrı bir öneme sahiptir. Bu önem problemlerin doğasından ve problem çözme sürecinin bireydeki yansımalarından kaynaklanır. Sorgulayan, araştıran, inceleyen ve düşüncelerini nedenleriyle açıklayabilen bireylerin iyi birer problem çözücü olmaları tesadüfi değildir. Dewey'e göre düşünme, daima bireyin bir problemin varlığını gerçekten hissetmesiyle başlar (Philips & Soltis, 2005). Ardından birey, problemin daha açık bir ifadesini bulabilmek, olası çözümler için öneriler aramak, problem durumuyla ilgili olabilecek bileşenleri incelemek ve durumu daha iyi anlamlandırabilmek için ön bilgileri ile ilişkilendirmeler yapar. Bu ilişkilendirmelerde birey, problemin en iyi hangi biçimde çözülebileceğine ilişkin bir eylem planı oluşturmaya ya da bir hipotez kurmaya başlar. Eğer sınanan hipotez ile problemi çözebilirse, bireyde bir öğrenme sürecinin gerçekleştiği düşünülmektedir (Philips & Soltis, 2005). Öyleyse matematiksel düşünme ve öğrenme arasındaki bu karmaşık ilişkide problemlerin anahtar bir rol üstlendiği söylenebilir. Ancak problemlerin doğası bu anahtar rolün işlevinde son derece belirleyicidir. Yavan, tek düze, çözümü kolaylıkla tahmin edilebilen, ilgi çekici olmayan, öğrencilere deneyimsel gerçek (Gravemeijer, 1999) gelmeyen ve bu bağlamda onların entelektüel ufuklarını zorlamayan problemler yerine ilgi çekici, düşündürücü, öğrencilerin düşüncelerinde ufuk açıcı, fenomolojik deneyimleriyle sentez yapmalarına olanak tanıyan ve düşüncelerini genişletici/ilerletici problemler seçilmelidir. Böylesi bir problem ile bireyin karşılaşması ve problemi kendi başına çözebilmesi zihinsel süreçleri desteklediği gibi karakter ve zihin üzerinde ömür boyu iz de bırakabilmektedir (Polya, 1997). Bu tip problemlere çok çözümlü problemler de eklenebilir.

Çok çözümlü problemler, "birden fazla yolla çözülebilen matematiksel görevler ya da birden fazla yolla kanıtlanabilen matematiksel durumlar" olarak tanımlamaktadırlar (Levav-Waynberg & Leikin, 2012b, s.311). Matematik eğitimcileri bir problemin birden fazla yolla çözüldüğünde nasıl aynı sonucun elde edileceğinin derinlemesine anlaşılmasının matematiksel muhakemenin gelişiminin önemli bir bileşeni olduğunu, (NCTM, 2000; Polya, 1997, Schoenfeld, 1992; Sternberg, 1994; Silver, 1997) ve aynı zamanda bu sürecin matematiksel düşünmeyi hem gerektirdiğini hem de geliştirdiğini belirtmektedirler (Leikin, 2007). Bir problemi birden fazla yol ile çözme, problem çözücünün iyi bir matematiksel bilgiye sahip olmasını gerektirdiğinden onun deneyimli bir matematikçi olduğuna işaret ettiği gibi (Polya, 1997), bu süreç bireylerin matematiksel yaratıcılıkları ile de yakından ilişkilidir (Ervynck, 1991; Silver, 1997; Krutetskii, 1976; Leikin & Levav-Waynberg, 2008; Leikin & Lev, 2013). Yeni bir bilginin yapılandırılmasını sağlayan temel mekanizmalardan birinin yaratıcılık olduğu dikkate alındığında (Lev-Zamir & Leikin, 2011) problem çözücülerin matematiksel yaratıcığını destekleyen (Silver, 1997) çok çözümlü problemlerin kavramları keşfetmede, açıklamada, tanımlamada ve genellemede yardımcı bir araç olabileceği söylenebilir. Şekil 1'de çok çözümlü problemlere bir örnek sunulmuştur. Bu örnek Leikin ve Lev'in (2013) çalışmalarında kullandıkları reçel probleminden Türkçeye çevrilmiş, oluşturulan çözüm gruplarına örnekler ise Yılmaz'ın (2014) çalışmasından alınmıştır.

EĞİTİMDE NİTEL ARAŞTIRMALAR DERGİSİ
Journal of Qualitative Research in Education
Volume 3 / Issue 3, 2015
Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi - ENAD
Journal of Qualitative Research in Education - JOQRE

Marmelat Problemi:
"Şeyma her yıl kayısı marmelatı hazırlayıp marketlere kavanozlarla satmaktadır. Bu yıl da hazırladığı 80 litre marmelatı önce elindeki tüm kavanozlara eşit bir şekilde paylaştırmıştır. Daha sonra dört kavanozu başka bir iş için kullanmaya karar vermiş ve bu dört kavanozdaki marmelatı diğer kavanozlara eşit bir şekilde paylaştırmıştır. Dolu kavanozların her birindeki marmelat miktarı başlangıçtaki miktarlarının $\frac{1}{4}$'i kadar arttığına göre başlangıçta kaç tane kavanoz vardır?"

Çözüm grubu 1. Görsel temsil



Çözüm grubu 2. İki değişkenli denklem sistemi

Çözüm 2.1

$x.y = 80$

$x.y = \frac{5x}{4}.(y-4)$

Çözüm 2.2

$80 : y = 4x$

$80 : (y-4) = 5x$

Çözüm 2.3

$$\frac{x}{y-4} = \frac{\frac{5x}{4}}{y}$$

Çözüm grubu 3. Bir bilinmeyenli denklem

Çözüm 3.1.

$$1\frac{1}{4}y = y+4$$

Çözüm 3.2.

$$\frac{4}{y-4} = \frac{1}{4}$$

Çözüm grubu 4. İki bilinmeyenli denklem

$$4x = (y-4).\frac{x}{4}$$

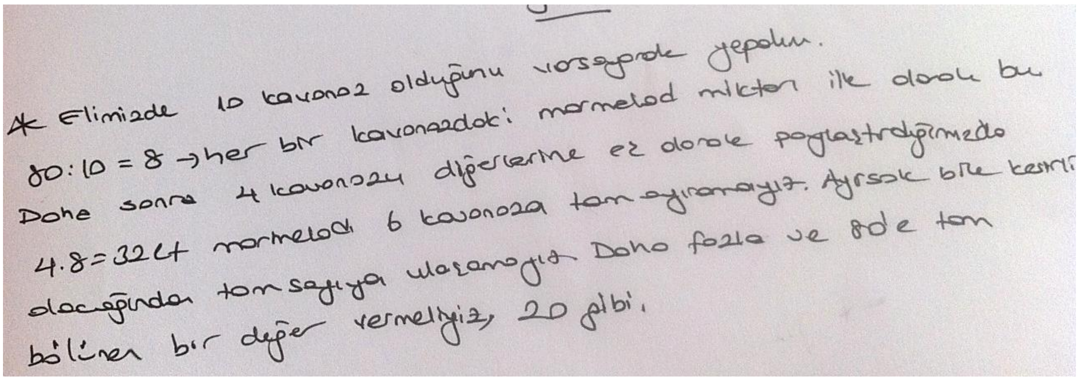
Çözüm grubu 5. Akıl Yürütme
Çözüm 5.1.

Kavanozların her birinde bulunan, başlangıçtaki marmelat miktarının 1/4 i yeni miktarın 1/5' i olduğu için 4 kavanoz tüm kavanozların 1/5'dir.

Çözüm 5.2

Dört kavanozdaki marmelat geriye kalanların 1/ 4 ine eşittir.

Çözüm grubu 6. Tahmin yapma



Şekil 1. Çok çözümlü marmelat problemi ve çözüm grupları ile öğrenci örnekleri

Şekil 1'de de görüldüğü gibi çok çözümlü problemlerden biri olan marmelat probleminin farklı çözüm yolları bulunmaktadır. Buradaki farklılık (a) matematiksel bir *kavrama ait farklı temsil* kullanımından, (b) belli bir alandaki matematiksel *kavramların farklı özelliklerinden* (tanımlar ya da teoremler) ya da (c) matematiğin farklı alanlarına ait *farklı teoremler ve farklı matematiksel araçlardan* kaynaklanır (Leikin & Levav-Waynberg, 2008; Leikin & Lev, 2013). Problem çözücünün birden fazla çözüm yolu üretebilmesi, bir çözümden diğer bir çözüme geçebilmesi, çözümlerde farklı temsilleri kullanabilmesi ve hatta temsiller arası geçiş yapabilmesi onun matematiksel kavramları ne derece içselleştirdiğinin ve bu kavramlar/konular arasındaki matematiksel ilişkileri ne derece kurabildiğinin bir göstergesidir. Öğrencilerin matematiğin farklı dalları arasındaki bu ilişkileri görmeye başlamaları ile (Leikin, 2008) matematiği bir bütün olarak görmeye başladıkları da söylenebilir. Bu bütünlüğün fark edilmesi matematiksel anlamanın da başlangıcını oluşturmaktadır.

Schoenfeld (1994) bir probleme çok çözüm yapabilme ihtimalinin problem çözücüyü çözüm sürecinde hangi yaklaşımı seçeceği konusunda özgür kıldığını da belirtmektedir. Bir probleme birden fazla çözüm yapma ya da bir önermeyi birden fazla yolla kanıtlama alışkanlığına sahip olan bireyler, problemi derinlemesine inceleme, farklı çözümler keşfetmeye çalışma, matematiksel örüntü ve ilişkileri farklı şekillerde açıklayabilme, varsayımlarda bulunma ve bunları kanıtlamak için uğraşma gibi üst düzey zihinsel işlemler yapma, çeşitli olasılıklar aracılığıyla kendi bilgilerini oluşturma ve kendi değerlendirmelerini yapma olanağı elde edebilirler. Ancak çoktan seçmeli sınavlar barındıran eğitim sistemlerinde bir probleme birden fazla çözüm yapmaya gerek duyulmadığı için böyle bir alışkanlık ve farkındalık kazanmak mümkün olmamaktadır. Türkiye'de matematik dersi öğretim programlarında problem çözmeye dayalı öğrenme ortamlarının tasarlanmasına ve problem çözmede farklı stratejilerin kullanılmasına vurgu yapılmasına karşın (MEB, 2013) uluslararası sınavlarda alınan sonuçlar (TIMSS ve PISA sınavları gibi) öğrencilerin problem çözme becerisi bakımından eksik olduklarını düşündürmektedir.

Alanyazın incelendiğinde öğrencilerin matematiksel düşünmelerini çok çözümlü problemler aracılığıyla değerlendiren çalışmalara (Leikin, 2007; Levav-Waynberg & Leikin, 2009; Levav-Waynberg & Leikin, 2012a; Levav-Waynberg & Leikin, 2012b; Tsamir, Tirosh, Tabach & Levenson 2010), çok çözümlü problemler, matematiksel yaratıcılık ve öğrenciler/üstün zekâlı öğrenciler arasındaki ilişkiyi araştıran çalışmalara (Leikin, 2009; Leikin & Lev, 2007; Leikin & Lev, 2013, Tabach & Friedlander, 2013), çok çözümlü problemler ve öğretmen bilgisini inceleyen çalışmalara (Leikin & Levav-Waynberg, 2007, 2008, 2009; Lev-Zamir & Leikin, 2011) rastlanmıştır. Bununla birlikte, ulusal alanyazında çok çözümlü problemler kullanılarak öğrencilerin ürettikleri stratejilerin incelendiği bir çalışma ile karşılaşılamamıştır. Problem çözmenin muhakeme, ilişkilendirme ve yaratıcılık ile ilişkisi göz önüne alındığında çok çözümlü problemler üzerinde yapılacak çalışmaların matematik eğitimi alanyazınına katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bu düşünce doğrultusunda, bu çalışmada çok çözümlü problemlere odaklanılmış, lise öğrenimlerini yeni tamamlamış olan üniversite birinci sınıf öğrencilerinin çok çözümlü problemlerin çözüm sürecinde kullandıkları farklı stratejilerin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Çalışma ile Türk öğrencilerinin çok çözümlü problemlerde kullandıkları farklı çözüm stratejilerinin belirlenmesi, yanı sıra çok çözümlü problemlerin bir değerlendirme aracı olarak öğretmenlere ve matematik eğitimcilerine tanıtılması da hedeflenmiştir.

Yöntem

Araştırmanın Deseni

Öğrencilerin çok çözümlü bir problemde kullandıkları farklı çözüm stratejilerinin belirlenmesinin amaçlandığı bu araştırma nitel bir araştırma olarak desenlenmiştir. Nitel araştırmalar, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırmalardır ve nitel araştırmalarda bir durumun derinlemesine betimlenmesine odaklanılır (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Bu araştırmada bu odak doğrultusunda öğrencilerin çok çözümlü bir problemi çözerken ürettikleri farklı stratejiler ile ilgilenildiğinden, verilerin toplanması, çözümlenmesi ve yorumlanmasında nitel araştırma yönteminin uygun olduğu düşünülmüştür.

Katılımcılar

Araştırmada yer alan katılımcıların belirlenmesinde, amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme kullanılmıştır. Ölçüt örnekleme, "önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan bütün durumların çalışılmasıdır" (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s.112). Araştırmanın amacına ulaşabilmek için katılımcıların çok çözümlü problemlerde kullanmaları gereken bilgi yapılarına sahip olmaları, bu kavramlarla lise döneminde tanışmış olmaları ölçüt olarak belirlenmiş ve zengin veri elde edebilmek için ilköğretim matematik öğretmenliği 1. sınıfa devam eden tüm öğrenciler (76 öğrenci) katılımcı olarak seçilmiştir. Katılımcı öğrencilerin tamamına açık uçlu çok çözümlü 4 problem uygulanmıştır. Bu katılımcılar arasından daha detaylı veriye ulaşabilmek amacıyla klinik görüşmeler gerçekleştirilmiş, bu görüşmeler için öğrenciler arasından gönüllü olan 6 öğrenci seçilmiştir. Öğrenci seçiminde tamamen gönüllülük esas alınmıştır. Gizliliğe dayalı olarak bulgularda öğrencilerin gerçek isimleri yerine numaralar kullanılmış, bu numaralar alt indis olarak verilmiştir.

Verilerin Toplanması

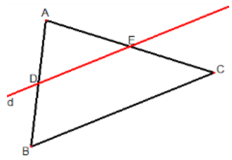
Açık uçlu test

Çok çözümlü problemlerden oluşan açık uçlu testin geçerlik ve güvenirlikleri, uzman görüşü alınarak ve pilot çalışma gerçekleştirilerek sağlanmıştır. Öncelikle alanyazın taraması yapılmış ve çok çözümlü olabilecek problemler belirlenmiştir. Problemlerden üçü geometrik olmak üzere altı problem üzerinde karar kılınmıştır. Bu problemlerden biri olan marmelat problemi Leikin ve Lev'in (2013) çalışmasından, örüntü problemi (Bilings, 2008) çalışmasından alınmış, diğer problemler ise araştırmacılar tarafından geometride öğrencilerin en aşina olduğu teoremlerin içerisinden seçilmiştir. Daha sonra problemlerin amacına hizmet edip etmediklerini belirlemek için problemler matematik eğitimi alanında iki uzmana ve iki matematik öğretmenine sunulmuştur. Önerilen değişiklikler doğrultusunda gerekli düzenlemeler yapılarak bir problem çıkarılmış ve kalan beş problemden oluşan testin pilot çalışması yapılmıştır. Pilot çalışma bulgularına göre, beş problemden biri öğrencilerin çoğunun çok çözüm üretememesi nedeniyle çıkarılarak araştırmanın amacına en iyi hizmet eden dört problemden oluşan ölçme aracı 76 öğrenciye 5 gün boyunca, her birinin çözümü için 30 dakika verilerek uygulanmıştır. Bu makalede dört çok çözümlü problemden Şekil 2'de sunulan ikisine yer verilmiştir. Geometri problemi olarak isimlendirilen ilk problem öğrencilerin ders ve yardımcı kitaplarda sıklıkla karşılaştıkları bir problem olup, pek çok farklı çözüm stratejisinin kullanılabileceği bir problemdir. Örüntü problemi olarak isimlendirilen diğer problem ise örüntünün 0. ve n. adımının sorulduğu, genel kuralı ikinci dereceden (n^2+2n+3) lineer olmayan/artarak genişleyen bir şekil örüntüsüdür.

Klinik görüşmeler

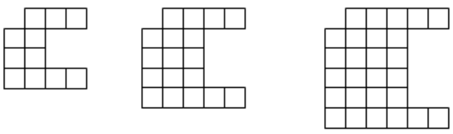
Araştırmayı desteklemesi ve daha detaylı veri elde etmek amacıyla öğrencilerle klinik görüşmeler de gerçekleştirilmiştir. Klinik görüşmelerde öğrencilere yaptıkları çözüm yolları gösterilerek kullandıkları çözüm stratejileri üzerine sorular sorulmuş, düşüncelerini detaylı olarak açıklamaları istenmiştir. Gerekli izinler alınarak gerçekleştirilen görüşmeler için öğrencilerin rahat hissedebilecekleri bir ortam oluşturulmuştur. Görüşmeler öğrencilerin kâğıtlarını görebilecek ve dikkatlerini dağıtmayacak şekilde yerleştirilmiş bir video kamera ile kaydedilmiştir. Gönüllü altı öğrenci ile gerçekleştirilen görüşmelerin her biri yaklaşık 30 dakika sürmüştür.

Problem 1:



Tepe noktası A olan bir ABC üçgeninde AB kenarının orta noktasından geçen ve BC kenarına paralel olan doğrunun AC kenarını da orta noktada kestiğini birden fazla yolla kanıtlayınız.

Problem 2:



2. adım 3. adım 4. adım

Yukarıda karolardan oluşan bir örüntü verilmiştir. Buna göre sıfırıncı adımdaki yapıyı çiziniz ve n. adımda kullanılması gereken karo sayısının nasıl bulunacağını birden fazla yolla açıklayınız.

Şekil 2. Açık uçlu test

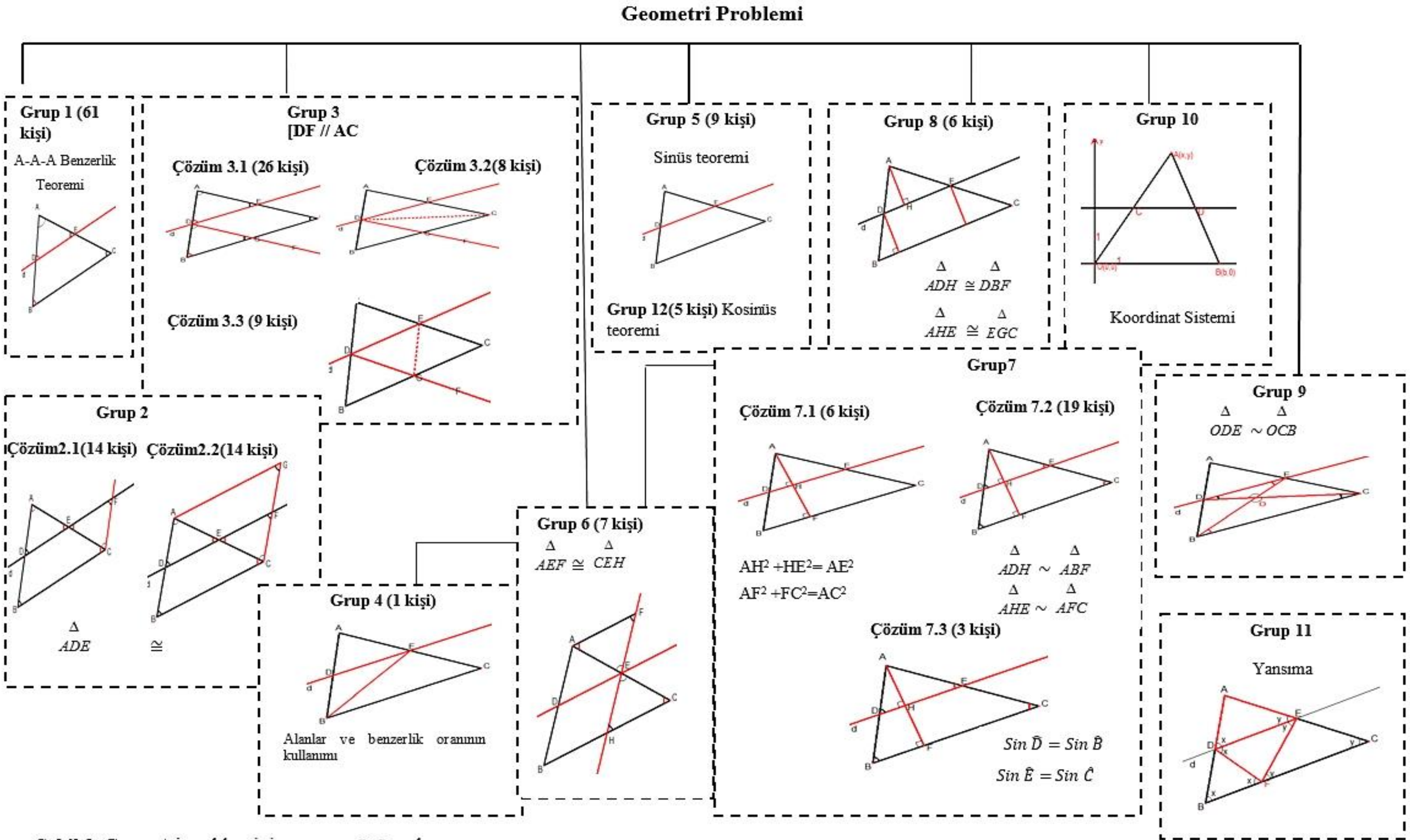
Veri Analizi

Araştırmada toplanan verilerin analizinde Miles ve Huberman'ın (1994) veri analizi sürecinde belirttiği "verinin işlenmesi", "verinin görsel hale getirilmesi" ve "sonuç çıkarma ve teyit etme" aşamaları temel alınmıştır. Verilerin işlenmesi/azaltılması nitel araştırma sonucunda elde edilen verilerin seçilmesi, özetlenmesi ve dönüştürülmesi işlemlerini ifade eder. Bu aşama verilerin düzenlenmesini sağlayarak araştırma sonuçlarının ortaya çıkmasına katkı sağlar (Miles & Huberman, s. 11). Bu doğrultuda bu araştırmada belirlenen çok çözümlü problemlere ilişkin yapılabilecek tüm çözüm stratejileri iki alan uzmanı tarafından belirlenmiş, problemlerin uzman çözüm alanları oluşturulmuştur. Bu alanın oluşturulmasında ders kitaplarındaki geleneksel çözümlerin yanı sıra farklı çözümler de dikkate alınmıştır. Ardından belirlenen çözüm stratejileri, farklı temsil, farklı özellik (kullanılan teorem, tanım ya da yardımcı yapı gibi) ya da matematiğin farklı branşlarına dayalı olarak, benzer çözümler aynı grup içinde olacak şekilde gruplandırılarak uzman çözüm alanına son hali verilmiştir. Uzman çözüm alanı oluşturulduktan sonra gruplar ve alt gruplar görsel hale getirilmiştir. Böylelikle öğrencilerden elde edilen veriler yoğun bir şekilde yansıtılmış ve araştırma sonuçları netlik kazanmıştır. Öğrencilerin her bir probleme ait çözüm stratejileri iki alan uzmanı tarafından incelenmiş ve uzman çözüm alanlarındaki grup ve alt gruplar altında kodlanmıştır. Araştırmada bulgular bölümünde verilerin kodlaması ve görsel hale getirilmesi aşamasında oluşturulan gruplar ve alt gruplar doğrudan alıntılarla desteklenerek yorumlanmış ve karşılaştırılmıştır.

Bulgular ve Yorum

Öğrencilerin Geometri Probleminde Kullandıkları Çözüm Stratejilerine İlişkin Bulgular

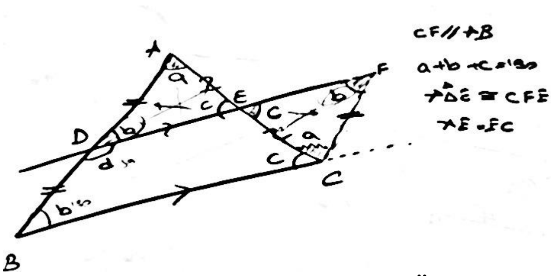
Şekil 3'te geometri problemi için oluşturulan uzman çözüm alanı, gruplar ve alt gruplar ile bu çözümlerin her birini yapan öğrenci sayısı verilmiştir.



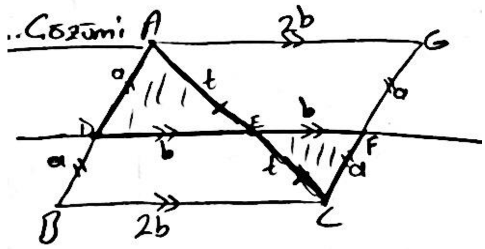
Şekil 3. Geometri probleminin uzman çözüm alanı

Şekil 3'te sunulduğu gibi geometri problemine uzman çözüm alanında 12 çözüm grubu, toplamda 17 farklı strateji belirlenmiş, öğrencilerin 3 grup (Grup 9, 10, 11) dışındaki diğer gruplarda yer alan tüm stratejileri kullandıkları görülmüştür. Öğrencilerin büyük bir çoğunluğu (61 öğrenci) geometri probleminin çözümünde en geleneksel çözüm olan ABC ile ADE üçgenlerine uygulanan Açı-Açı-Açı (AAA) Benzerlik Teoremine dayanan Grup 1 stratejisini kullanmışlardır.

Geometri probleminin çözümünde Grup 2 olarak isimlendirilen çözüm stratejisi AB kenarına üçgenin dışından çizilen paralel doğru parçası ile oluşturulan paralelkenara dayanmaktadır. Grup 2, paralelkenarın oluşturulmasındaki farklılık nedeni ile iki alt gruba alınarak incelenmiştir. Öğrencilerden 14'ü tarafından kullanılan Çözüm 2. 1. stratejisi C noktasından AB kenarına paralel olarak çizilen CF doğru parçası ile oluşturulan DFCB paralelkenarına dayanmaktadır. Bu stratejide öğrenciler üçgenin ve paralelkenarın içinde oluşan (ADE ile CFE) üçgenlerinin açı-kenar-açı eşliğini kullanarak AE ile EC doğru parçalarının eşliğini göstermişlerdir. Öğrencilerden 14'ü tarafından kullanılan Çözüm 2. 2. stratejisi ise C noktasından AB kenarına paralel olarak çizilen CG doğru parçası ile oluşturulan AGCB paralelkenarına dayanmaktadır. Şekil 4'de bu iki stratejiyi kullanan öğrencilerin çözüm stratejilerine örnekler sunulmuştur:



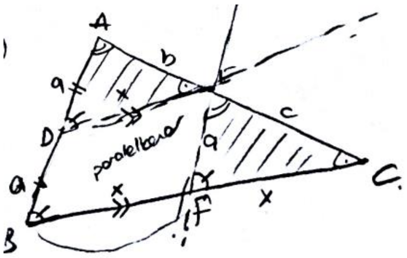
Çözüm 2. 1 stratejisi (Ö23)



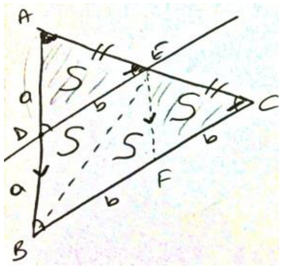
Çözüm 2. 2 stratejisi (Ö27)

Şekil 4. Grup 2'yi kullanan öğrenci çizimleri

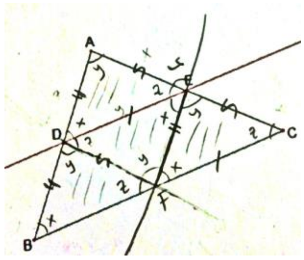
Geometri probleminin çözümünde Grup 2'deki stratejilere benzer ancak paralelkenarın üçgenin içinde oluşturulduğu Grup 3 çözüm stratejisi, üçgenin içinde oluşan paralelkenarın farklı özelliklerinin kullanılması nedeni ile üç alt gruba alınarak incelenmiştir. Her üç alt grupta da E noktasından AB kenarına üçgenin içinden paralel olarak çizilen doğru ile oluşturulan DEFB paralelkenarı esas alınmaktadır. Öğrencilerin 26'sının kullandığı Çözüm 3.1 stratejisinde paralelkenarın karşılıklı kenar uzunluklarının eşitliği ve ADE ile EFC üçgenleri arasında kurulan açı-kenar-açı eşliği ön plandadır. Sekiz öğrenci tarafından kullanılan Çözüm 3.2 stratejisinde öğrenciler DEFB paralelkenarının köşegenini çizmişler ve oluşan üçgenlerin alanlarının eşitliğini kullanarak AE ile EC doğru parçalarının eşit uzunlukta olduğunu belirtmişlerdir. Ancak öğrencilerin kullandıkları bu strateji hatalıdır. Öğrencilerin aynı taban ve yüksekliğe sahip üçgenlerin alanlarını karşılaştırırken F noktasını orta nokta olarak aldıkları yani kanıtlamaya çalıştıkları teoremin sonuçlarını kullandıkları görülmüştür. Çözüm 3.3 stratejisinde ise DEFB paralelkenarının diğer köşegenine odaklanılmaktadır. Öğrenciler bu stratejide temelde köşegen aracılığıyla oluşan diğer ADFE paralelkenarının özelliklerini kullanmaktadırlar (Şekil 5).



Çözüm 3.1 stratejisi ($Ö_{74}$)



Çözüm 3.2 stratejisi ($Ö_{60}$)



Çözüm 3.3 stratejisi ($Ö_{34}$)

Şekil 5. Grup 3'ü kullanan öğrenci çizimleri

Problemin çözümünde 1 öğrenci tarafından kullanılan Grup 4 çözüm stratejisinde [BE] çizilerek oluşturulan üçgenlerin alanlarının eşitliğine ve ADE ile ABC üçgenleri arasında kurulan AAA benzerliğine dayanmaktadır. Üçgenler arasında bu benzerliğin kullanıldığı bir diğer bir strateji Grup 5 çözüm stratejisidir. Daha ağırlıklı cebirsel bir yaklaşımın kullanıldığı, ABC ve ADE üçgenlerine Sinüs Teoreminin uygulanmasına dayanan bu stratejiyi öğrencilerden 9'u kullanmışlardır. Şekil 6'da bu stratejiyi kullanan öğrencilerden $Ö_{54}$'ün yaptığı çözüm örnek olarak sunulmuştur:

Benzerlik oranı = $\frac{1}{2}$ Alanlar oranı = $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$$\frac{\text{Alan } \widehat{ADE} = \cancel{\frac{1}{2}} a.c \sin \cancel{A}}{\text{Alan } \widehat{ABC} = \cancel{\frac{1}{2}} (a+b).(c+d).\sin \cancel{A}} = \frac{1}{4}$$

$$4ac = (a+b).(c+d) \qquad \underline{a=b}$$

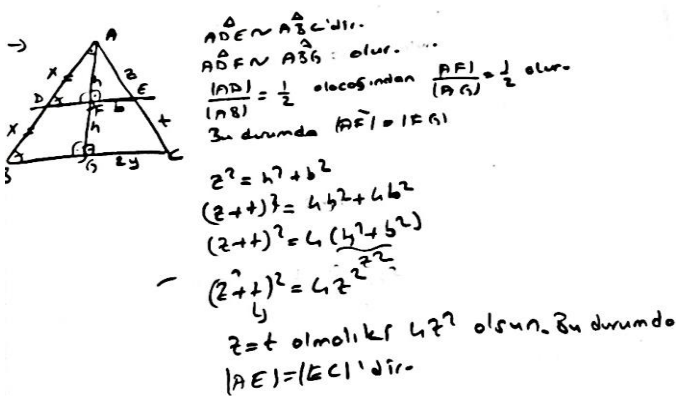
$$4\cancel{a}c = 2\cancel{a}.(c+d)$$

$$2c = c+d$$

$$\underline{\underline{d=c}}$$

Şekil 6. Grup 3'ü kullanan öğrenci çözümleri

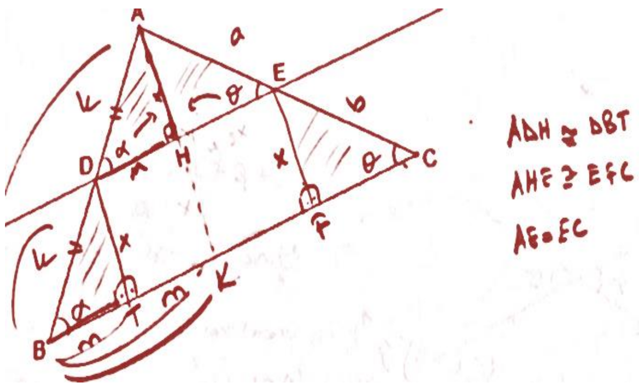
Öğrencilerin 7'si tarafından kullanılan Grup 6 çözüm stratejisi, AB kenarına paralel olarak çizilen FH doğrusu ve BC kenarına paralel olarak çizilen AF doğru parçası arasında oluşan üçgenlerin benzerliğine dayanmaktadır. Diğer bir strateji olan A noktasından BC kenarına çizilen dikmeye dayalı oluşturulan Grup 7 stratejisi ise, bu dikmeler aracılığıyla oluşan dik üçgenlerden farklı şekillerde yararlanılması nedeni ile üç alt gruba alınarak incelenmiştir. Şekil 7'de de görüldüğü gibi Çözüm 7.1 stratejisinde öncelikle ABC ve ADE ile ADF ve ABG üçgenleri arasında benzerlik ilişkisi kurularak kenar uzunlukları arasındaki ilişkiler belirlenmiş, ardından AFE ve AGC dik üçgenleri için Pisagor bağıntısı uygulanmıştır. Öğrencilerden 6'sının kullandığı bu çözüm stratejisine $Ö_{28}$'in yaptığı çözüm Şekil 7'de örnek olarak sunulmuştur:



Şekil 7. Çözüm 7.1 stratejisini kullanan bir öğrenci çözümü

Öğrencilerin 19'unun kullandığı Çözüm 7.2 stratejisinde ise BC kenarına çizilen dikmeyle oluşan dik üçgenler arasında benzerlik ilişkisi kurularak AE ve EC doğru parçalarının eşliği belirtilmiştir. Grup 7 içerisinde dikme aracılığıyla oluşturulan Çözüm 7.3 stratejisini kullanan 3 öğrenci ise oluşturulan dik üçgenler arasındaki trigonometrik oranları kullanmışlardır.

Geometri probleminin çözümünde 6 öğrenci tarafından kullanılan Grup 8 stratejisinde DE doğru parçasına A noktasından, BC kenarına D ve E noktalarından inilen dikmeler esas alınmış, oluşan dik üçgenler arasında eşlik ilişkisi aranmıştır. Ancak bu stratejide ADH ile DBT ve AHE ile EFC üçgenleri arasındaki eşliğin kurulmasında ciddi eksiklikler bulunmaktadır. Öğrenciler inilen dikmeleri eş kabul ederek işleme başlamışlar, öncelikle benzerlik ilişkisini kurmaları gerektiğini fark etmemişlerdir. Üstelik AHE ile EFC üçgenleri arasında nasıl bir eşlik kurdukları da net değildir. Şekil 8'de bu stratejiyi kullanan öğrencilerden Ö$_{39}$'un çözümü örnek olarak sunulmuştur:



Şekil 8. Grup 8 stratejisini kullanan bir öğrenci (Ö$_{39}$) çözümü

Geometri probleminde 5 öğrenci tarafından kullanılan son strateji ise Grup 12 olarak isimlendirilen ABC ve ADE üçgenlerine uygulanan Kosinüs Teoremine dayanmaktadır.

Öğrencilerin geometri problemine ilişkin 14 ayrı strateji kullandıkları belirlenmiş, Tablo 1'de öğrencilerin bu probleme ilişkin kaç farklı çözüm yaptıkları sunulmuştur.

Tablo 1.
Öğrencilerin Geometri Probleminde Kullandıkları Farklı Strateji Sayıları

Çözüm sayısı	Öğrenci sayısı
1	17
2	17
3	22
4	11
5	4
6	3
7	1
8	1

Tablo 1'den de görüldüğü gibi, geometri probleminde 17 öğrenci 1 çözüm, 17 öğrenci 2 çözüm, 22 öğrenci 3 çözüm, 20 öğrenci de 4 ve daha fazla çözüm yapabilmiştir. Problemin öğrenciler tarafından oldukça bilinen bir problem olmasına karşın çözümde sadece 20 öğrencinin 4 ve üzeri sayıda farklı strateji kullanabilmesi dikkat çekicidir.

Öğrencilerin Örüntü Probleminde Kullandıkları Çözüm Stratejilerine İlişkin Bulgular

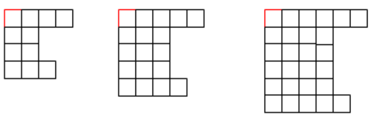
Tablo 2'de örüntü problemi için oluşturulan uzman çözüm alanı ile bu çözümlerin her birini yapan öğrenci sayısı verilmiştir. Tablo 2'den de görüldüğü üzere örüntü probleminin çözümünde bazı öğrenciler görsel yaklaşırken bazı öğrenciler sayısal yaklaşmışlardır. Problemin uzman çözüm alanı çerçevesinde; 5 çözüm grubu altında toplamda 11 farklı strateji belirlenmiştir. Öğrencilerin ağırlıklı olarak görsel stratejilerden yararlandıkları söylenebilir.

Tablo 2.

Örüntü Problemi Uzman Çözüm Alanı

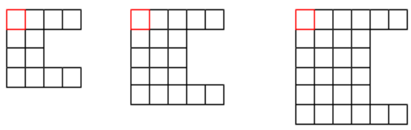
Grup 1. Görsel Strateji: Dikdörtgenden yararlanma

Çözüm 1.1(3 kişi)



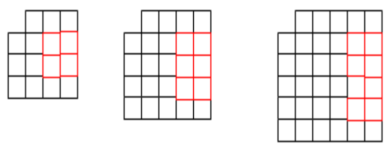
$(n+2).n+3$

Çözüm 1.2 (5 kişi)



$((n+2).n+4)-1$

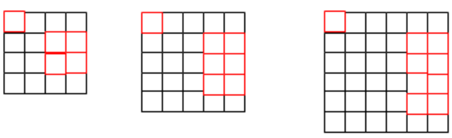
Çözüm 1.3 (6 kişi)



$(n+1)+(n+1).(n+2)-2n$

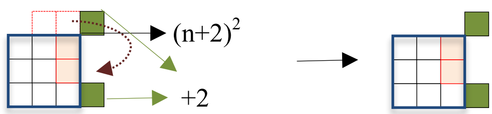
Grup 2. Görsel Strateji: Kareye tamamlama **(34 kişi)**

Çözüm 2.1. (34 kişi)



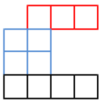
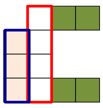
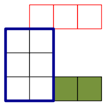
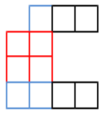
$(n+2)^2-(2n+1)$

Çözüm 2.2.

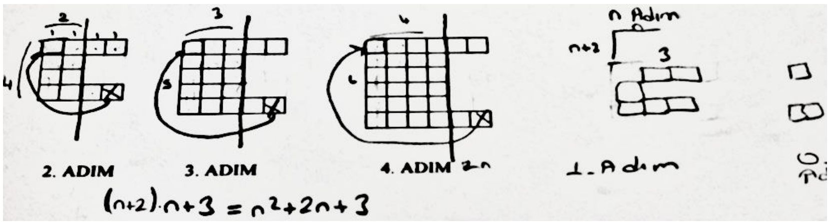


$(n+2)^2+2$

Grup 3. Görsel Strateji: Değişen karolara odaklanma

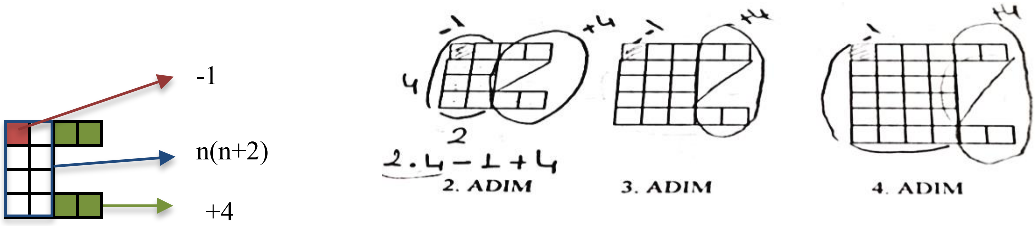
Çözüm 3.1. (38 kişi)	**Çözüm 3.2. (12 kişi)**	**Çözüm 3.3 (4 kişi)**	**Çözüm 3.4. (4 kişi)**
			
(*n*+*1*) +(*n* ^{2})+(*n*+2)	(*n*+*1*)+(*n*-*1*). (*n*+2)+ *4*	(*n*+*1*). *n*+(*n*+*1*)+ *2*	n^2 + (2*n*-*1*)+ *4*
Grup 4. Sayısal strateji: Farklılığı arama **(12 kişi)** $f(n)\ \ f(n\ \ 1)=g(n\ \ 1)$			
Grup 5. Sayısal strateji: Fonksiyonel ilişki bulma **(2 kişi)** $f(n)=an^2+bn+c$			

Görsel stratejiler kapsamında ele alınabilecek ilk grup karoların yerlerindeki değişim ile elde edilen dikdörtgenlere dayanmaktadır. Bu grup farklı şekillerde dikdörtgenlerin oluşturulması nedeniyle üç alt grupta incelenmiştir. Öğrencilerin 3'ü tarafından kullanılan Çözüm 1.1. stratejisi, alttaki 1 karonun en üst sol köşeye taşınmasıyla oluşan (2 4), (3 5), (4 6)'lık dikdörtgenlere dayanmaktadır. Öğrenciler oluşan bu dikdörtgenlerin kenar uzunluklarını adım sayısı ile ilişkilendirerek fonksiyonel bir ilişki aramışlar ve n. adımdaki karo sayısını bir kenarı n, diğer kenarı n+2 olan dikdörtgenin alanına sabit 3 karonun eklenmesiyle "n^2+2n+3" olarak bulunmuşlardır. Şekil 9'da bu stratejiyi kullanan öğrencilerden Ö$_{28}$'in yaptığı çözüm örnek olarak sunulmuştur:



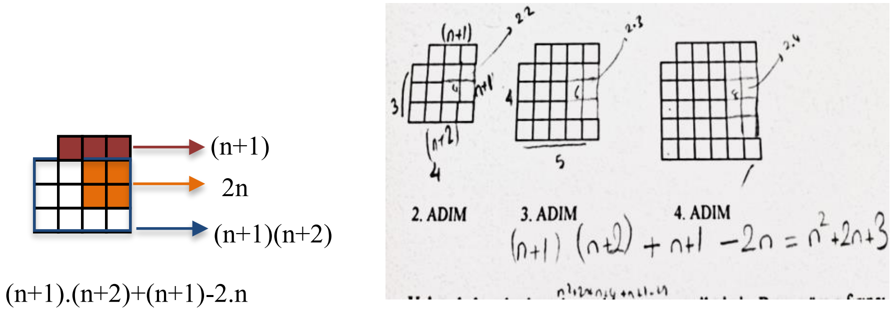
Şekil 9. Çözüm 1.1 stratejisini kullanan bir öğrenci çizimi

Dikdörtgene dayalı Çözüm 1.2. stratejisi, en üst sol köşeye bir karonun eklenmesiyle oluşan (2 4), (3 5), (4 6)'lık dikdörtgenlerin kenar uzunluklarının adım sayısı ile ilişkilendirilmesini kapsar. Öğrencilerden 5'i tarafından kullanılan bu stratejide n. adımdaki karo sayısı bir kenarı n, diğer kenarı n+2 olan dikdörtgenin kapsadığı karolara, uçlardaki sabit 4 karonun eklenmesi ve ilk eklenen 1 karonun çıkarılması ile n^2+2n+3 olarak bulunmuştur. Şekil 10'da bu stratejiyi kullanan öğrencilerden Ö$_{49}$'un yaptığı çözüm örnek olarak sunulmuştur:



Şekil 10. Çözüm 1.2 stratejisi ve bir öğrenci çizimi

Çözüm 1.3. stratejisi ise şeklin iç boşluklarına karoların eklenmesiyle oluşan (3 4), (4 5), (5 6)'lık bir kenarı (n+1) diğer kenarı (n+2) olan dikdörtgenlere dayanmaktadır. Böylelikle n. adım için genel kural dikdörtgendeki (n+1).(n+2) tane karo, bu dikdörtgene üst satırdaki n+1 tane karonun eklenmesi ve boşluklara eklenen 2n tane karonun çıkarılmasıyla n^2+2n+3 olarak bulunmuştur. Öğrencilerden 6'sı bu çözüm stratejisini kullanmışlardır. Şekil 11'de bu stratejiyi kullanan öğrencilerden $Ö_{33}$'ün yaptığı çözüm örnek olarak sunulmuştur:

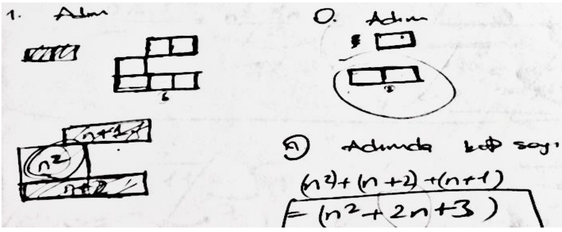


Şekil 11. Çözüm 1.3 stratejisi ve bir öğrenci çizimi

Örüntü problemine görsel yaklaşan öğrencilerin 34'ü Grup 2 olarak belirlenen kareye tamamlama çözüm stratejisini kullanmışlardır. Kareye tamamlama stratejisi karenin farklı oluşturulması nedeniyle iki alt başlığa ayrılmış ancak öğrencilerden hiç biri Çözüm 2.2. stratejisini kullanmamışlardır. Çözüm 2.1 stratejisi şeklin bütününe odaklanmaya ve boşluların doldurularak (4 4), (5 5), (6 6)'lık karelere tamamlanmasına dayanmaktadır. Böylelikle n. adımdaki karo sayısı bir kenarı (n+2) olan karenin alanından boşluklara eklenen 2n+1 tane karonun çıkarılmasıyla n^2+2n+3 olarak bulunmuştur. Öğrencilerin görsel stratejiler kapsamında adım sayısı ile şekilde değişen karoların ilişkilendirmesi Grup 3 olarak belirlenmiştir. Bu stratejide karoların farklı şekillerde parçalı gruplanması ve farklı şekillerde görsel içinde sayısaldan yararlanılması nedeni ile 4 alt gruba alınarak incelenmiştir. Çözüm 3.1. olarak isimlendirilen çözüm stratejisi şeklin, en üstte adım sayısının bir fazlası kadar karo (n+1), en altta adım sayısının iki fazlası kadar karo (n+2) ve ortada adım sayısının karesi kadar karo (n^2) şeklinde parçalanıp genel kuralının n^2+2n+3 olarak bulunmasına dayanmaktadır. Bu çözüm stratejisi örüntü problemine yapılan çözümler arasından en sık yapılan geleneksel bir çözüm olup 38 öğrenci tarafından kullanılmıştır. Bu stratejiyi kullanan öğrencilerden $Ö_{13}$'ün klinik görüşmesi örnek olarak sunulmuştur:

G(Görüşmeci) : Bana örüntü sorusunda ne yaptığını anlatabilir misin?

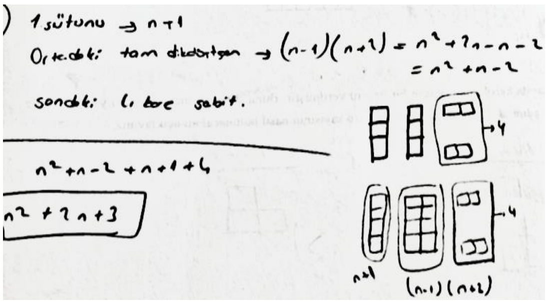
Ö :Önce örüntüleri izledim. 2. adımda üstte 2, 3. Adımda 3, 4. Adımda 4 olduğunu gördüm. Altta da aynı şekilde adım sayısı ile kareleri eşleştirdiğimde iki kare fazla kalıyordu. Birinci adımda şeklin böyle olacağını tahmin *ettim.0. adımı çizdim.0.adımda en üstte 1 kare, altta da 2 kare sabit. Ortadaki karelere gelirsek adım sayısının karesi kadar ortaya kare yerleştirilmiş. O zaman 1. adımda 1 tane olur,0.adımda orası boş olur.*



G :Çok güzel çözmüşsün çok da güzel anlattın, peki n. adımı nasıl yapın?

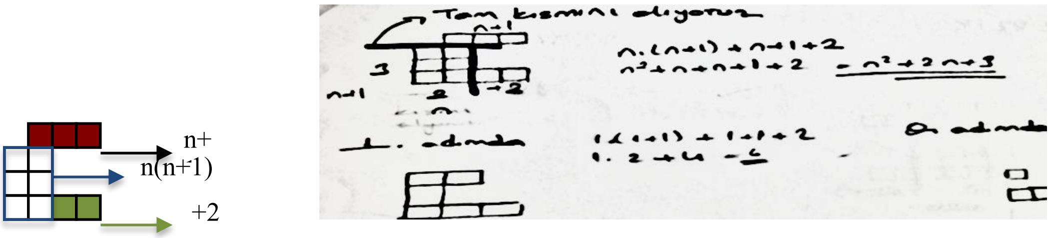
Ö :4. adıma kadar baktığımda üstte hep adım sayısının 1 fazlası kadar var. Altta da adım sayısının iki fazlası n+2 ortada ise adım sayısının karesi n^2 olduğu için bunların hepsini topladım n^2 +2n+3 oldu.

Değişen karolara odaklanmada öğrencilerin 12'si tarafından kullanılan Çözüm 3.2. stratejisi şekli sütunlarına göre parçalamaya dayanmaktadır. Şeklin en soldaki birinci sütununda adım sayısının bir fazlası kadar karo (n+1), ikinci ve üçüncü sütunun birleşmesiyle oluşan bir kenarı (n+2) diğer kenarı (n-1) olan dikdörtgenin içerdiği (n+2).(n-1) tane karo ve uçlarda sabit 4 karo bulunmaktadır. Şeklin böylesi bir parçalanma ile genel kuralı n^2+2n+3 olarak bulunmaktadır. Şekil 12'de öğrencilerden $Ö_7$'nin yaptığı çözüm örnek olarak sunulmuştur:



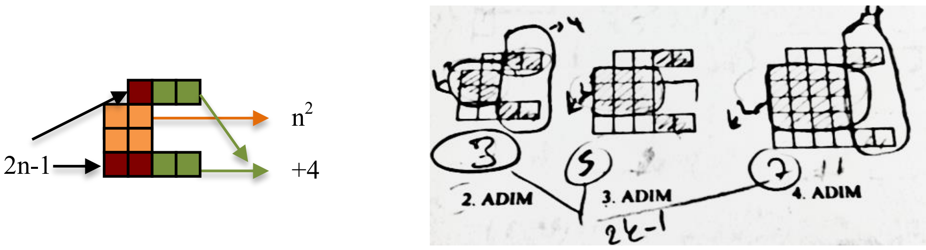
Şekil 12. Çözüm 3.2 stratejisini kullanan bir öğrenci çizimi

Değişen karolara odaklanma/Çözüm 3.3. stratejisi şeklin en üst ve en alt satırı ile arada kalan dikdörtgene dayalı bir çözümü içermektedir. Öğrencilerden 4'ünün kullandığı bu stratejide şeklin en üst satırı adım sayısı ile ilişkilendirilerek adım sayısının bir fazlası kadar karoya (n+1), en alt satırın sonundaki sabit 2 karo ve arada oluşan bir kenarı (n) diğer kenarı (n+1) olan dikdörtgenin kapsadığı karolar eklenerek genel terime ulaşılmaktadır. Şekil 13'de çözüm stratejisi ve örnek bir öğrenci ($Ö_{69}$) çizimi sunulmuştur:



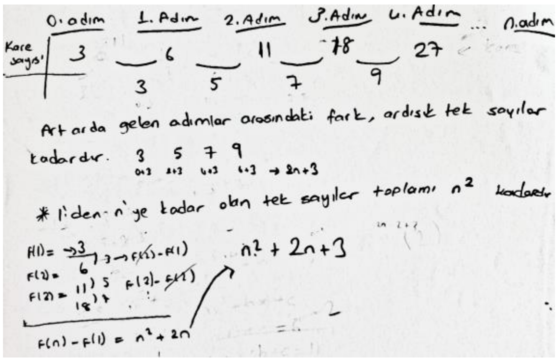
Şekil 13. Çözüm 3.3 stratejisi ve bir öğrenci çizimi

Değişen karolara odaklanmadaki son strateji olan Çözüm 3.4. ise sabit kalan karolar arasındaki kareye ve karenin dışında kalan karoların artışına dayanmaktadır. Öğrencilerden 4'ünün kullandığı bu stratejide şekildeki sabit 4 karo dışındaki karoların öncelikle bir kare olacak şekilde parçalanması ve kalan karoların adım sayısı ile ilişkilendirilmesi söz konusudur. Bu ilişkilendirmede geriye kalan karo sayılarının 3, 5, 7,... sayı örüntüsüne dayalı olarak devam ettiğini gören öğrenciler n. adımda 2n-1 tane karo sayısına ulaşılacağı hesaplanmıştır. Burada öğrencilerin görsel olarak başladıkları stratejiden sayısal stratejiye geçtiği de söylenebilir. Şekil 14'de bu çözüm stratejisi ve örnek bir öğrenci ($Ö_{22}$) çözümü sunulmuştur:



Şekil 14. Çözüm 3.4 stratejisi ve bir öğrenci çizimi

Örüntü probleminin çözümünde görsel stratejinin dışında sayısal stratejiler kullanan öğrenciler de bulunmaktadır. Bu öğrencilerden 12'si Grup 4/yinelemeli stratejileri kullanmışlardır. Sayısal strateji, verilen şekil örüntüsünün sayı örüntüsüne dönüştürülmesi ve örüntünün yakın/uzak adımını ve kuralını belirlemede oluşturulan bu sayı örüntüsünün kullanılması, yinelemeli strateji ardışık terimler arasındaki ilişkinin araştırılması olarak tanımlanabilir (Tanışlı ve Köse, 2011). Grup 2 çözüm stratejisini kullanan öğrenciler öncelikle şekildeki karo sayılarını belirleyerek 11, 18, 27, ... sayı örüntüsünü oluşturmuşlar, ardından terimler arasındaki farklılığa dayalı oluşan 7, 9, 11, ... örüntüsüne dayalı olarak genel kuralı ifade etmişlerdir.



Şekil 15. Grup 4 stratejisini kullanan bir öğrenci çözümü

Sayısal stratejilerden Grup 5 stratejisi ise adım sayısı ile karo sayıları arasında fonksiyonel bir ilişkinin bulunmasına dayanmaktadır. 2 öğrenci tarafından kullanılan bu stratejide öğrenciler terimleri adım sayıları ile ilişkilendirerek örüntünün kuralını belirlemişlerdir. 3, 6, 11, 18,.. sayı örüntüsünün terimlerini f(0)=3, f(1)=6, f(2)=11… olarak yazmışlar ve $f(n) = an^2 + bn + c$ genel formunda yerine koyarak genel kuralı bulmuşlardır.

Öğrencilerin örüntü problemine ilişkin uzman çözüm alanında belirtilen 11 stratejiden 10 tanesini kullandıkları belirlenmiştir. Tablo 3'de de öğrencilerin bu probleme ilişkin kaç farklı çözüm stratejisi kullandıkları sunulmuştur.

Tablo 3.
Öğrencilerin örüntü probleminde kullandıkları farklı strateji sayıları

Çözüm sayısı	Öğrenci sayısı
0	14
1	23
2	23
3	12
4	3
5	1

Tablo 3' den de görüldüğü gibi, örüntü problemini 14 öğrenci doğru yanıtlayamamış, 23 öğrenci 1 çözüm, 23 öğrenci 2 çözüm, 16 öğrenci ise 3 ve daha fazla çözüm yapabilmiştir.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Çok çözümlü problemler matematiksel muhakemenin ve ilişkilendirmenin geliştirilmesinde etkili bir araç (Leikin & Levav-Waynberg, 2008) olarak tanımlanmaktadır. Çok çözümlü problemle karşılaşan bir problem çözücü sadece problemi çözmekle kalmaz, daha farklı çözüm yolları arayışına da girer. Bu arayış ise onu probleme, cebirsel ise geometrik, geometrik ise sayısal, sayısal ise cebirsel olmak üzere farklı bakış açılarıyla yaklaşma, farklı matematiksel bilgilerini işe koşma, farklı temsilleri kullanma ve sonuç olarak yeni keşiflerde bulunma doğrultusunda yönlendirir.

Lise eğitimini tamamlayarak yükseköğrenimlerine yeni başlamış öğrencilerin çok çözümlü problemlerde kullandıkları farklı çözüm stratejilerinin belirlenmesinin amaçlandığı bu araştırmada ortaya çıkan ilk önemli sonuç öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun problemlere ilişkin bireysel çözümlerinde farklı ve çok sayıda çözüm yolu üretememeleridir. Bireysel çözümlerinde geometri probleminde öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun 3 ve daha az çözüm yolu, örüntü probleminde öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun 2 ve daha az çözüm yolu üretebildikleri belirlenmiştir. Bu durum ise öğrencilerin daha önceki öğrenim yaşantılarında çok çözümlü problemlerle karşılaşmadıklarını ya da problemlere birden çok çözüm yapma gereksinimi duymadıklarını düşündürmektedir. Öğrencilerin verilen probleme ilişkin farklı çözüm stratejileri üretebilmeleri için uzun soluklu çalışmalara gereksinim duyulmaktadır. Nitekim geometri derslerinde sistematik olarak çok çözümlü problemlerin 10. sınıflara bir öğretim yılı boyunca uygulandığı bir araştırmada (Levav-Waynberg & Leikin, 2012a) deney grubu öğrencilerinin kontrol grubu öğrencilerine göre problemleri çözerken daha çok sayıda strateji kullandıkları, bir çözümden diğer bir çözüme daha rahat geçebildikleri ve deney grubu öğrencilerinin geometri bilgilerini ilişkilendirme düzeylerinin arttığı görülmüştür. Araştırmacıların aynı sınıf düzeyindeki öğrenciler ile gerçekleştirdikleri bir diğer çalışmada (Levav-Waynberg & Leikin, 2012b) ise çok çözümlü problemler öğrencilerin geometri bilgilerini ve yaratıcılıklarını değerlendirmek için bir araştırma aracı olarak kullanılmıştır. Çalışma çok çözümlü problemlerin kullanılması ile geometri bilgisi ve yaratıcılığın değerlendirilmesi arasında bir ilişki olduğunu ortaya koymuştur. Ayrıca çalışmada geometri alanının öğrenenler için çok çözüm yolu içeren zengin çeşitlilikte problemleri kapsadığı da belirtilmektedir. Gerçekten de geometri problemleri çok çözüm yollarına açık problemlerdendir. Öğrencilerin genel olarak çok çözümlü geometri probleminde uzman çözüm alanı çerçevesinde belirlenen 17 farklı stratejiden 14'ünü kullanmaları bu durumu destekler niteliktedir. Üstelik örüntü probleminde de öğrencilerin belirlenen 11 farklı stratejiden 10'unu kullandıkları görülmüştür. Bu durum geometrik teoremlere dayanan problemlerin ve şekil örüntülerinin çok çözümlü problemler açısından zengin bir veri kaynağı olabileceği düşüncesini desteklemektedir.

Öğrencilere sunulan geometri problemi ders kitaplarında sıklıkla karşılaşılan problemlerden biri olarak nitelendirilebilir. Araştırmacılar tarafından öğrencilerin çok çözüm yapabilmeleri amacıyla özellikle seçilen bu problem çok farklı şekillerde çözülebilmektedir. Bununla birlikte öğrencilerin en çok kullandıkları çözüm stratejisi ders kitaplarında ve yardımcı kitaplarda sıklıkla karşılaşılan bir çözüm olan ve açı-açı-açı benzerliğine dayanan Grup 1 stratejisidir. Ayrıca öğrencilerin geometri probleminin çözümünde kullanmış oldukları stratejilerin bazılarında ciddi eksiklikler bulunmaktadır. Özellikle Grup 8 ve Grup 3.2. stratejilerinde öğrencilerin kanıtlamaya çalıştıkları teoremin sonuçlarını kullanarak ya da gerekli bazı adımları atlayarak bir sonuca ulaşmaya çalışmaları dikkat çekicidir.

Örüntü problemi ise içerisinde geriye doğru bir incelemeyi içeren, öğrencilerin farklı yollar aracılığıyla genellemeye ulaşabilecekleri bir problemdir. Böylesi sorular problem çözücülerin daha önce kullanmış oldukları stratejilerden, temsillerden ya da araçlardan farklı bir başlangıç noktasından yola çıkarak bir durumu analiz etmeye başlamalarını gerektirir (Bilings, 2008). Sunulan problem örüntünün 0. ve n. adımının sorulduğu, genel kuralı ikinci dereceden (n^2+2n+3) lineer olmayan/artarak genişleyen bir şekil örüntüsüdür. Artarak genişleyen şekil örüntüleri farklı stratejilerin üretilmesine, geometrik, sayısal ve cebirsel yapıların ilişkilendirilmesine, üretilen kuralın anlamının belirlenmesine ve varsayım üretmeye ve doğrulamaya olan gereksinimi fark etmeye katkı sağladığı gibi (Barbosa & Vale, 2015) öğrencilerdeki fonksiyonel düşünmenin gelişimini de destekler (Markworth, 2012). Lineer şekil örüntülerin aksine lineer olamayan bu şekil örüntüsünde terimler arasındaki ilişkiler kolaylıkla görülemediği için öğrenciler şeklin yapısına daha çok odaklanmışlar, görsel stratejileri sayısal stratejilere göre daha ağırlıklı olarak kullanmışlardır. Öğrencilerin şekil örüntüsünde uzman çözüm alanında belirlenen 11 stratejiden 10 stratejiyi kullanmaları ve bu 10 stratejiden 8'inin görsel stratejilerden olması öğrencilerin örüntüdeki şekilleri etkili bir temsil biçimi olarak kullandıklarının (Yeşildere & Akkoç, 2011) bir göstergesidir. Ayrıca öğrencilerin şekil örüntüsündeki ipuçlarını yakalayarak karo sayısı ile adım sayısını ilişkilendirdikleri ve cebirsel genelleyebildikleri de saptanmıştır. Bu süreçte öğrencilerin görselleştirme yoluyla şekil örüntülerindeki görsel ipuçlarını fark edebilmeleri ve şekilden cebirsel yapıyı görerek yapıyı genelleyebilmeleri sonucu sınıf öğretmeni adaylarının şekil örüntülerini genelleme stratejilerinin belirlendiği çalışma (Tanışlı & Köse, 2011) sonuçları ile de paralellik göstermektedir. Bununla birlikte öğrencilerin 14'ünün örüntü problemine ilişkin herhangi bir çözüm üretememeleri de dikkat çekicidir.

Sonuç olarak öğrencilerin çok çözümlü problemlerin bireysel çözümlerinde kullandıkları stratejilerin sınırlı kaldığı görülmüş, bazı stratejilerde hatalı muhakemeler yürüttükleri sonucuna ulaşılmıştır. Bununla birlikte lineer olmayan şekil örüntüsünün çözümünde öğrenciler her ne kadar çok çözüm yapamasalar da kullandıkları stratejilerin ağırlıklı olarak görsel olduğu, şekildeki yapıları çözdükleri ve fonksiyonel bir ilişki kurdukları da belirlenmiştir. Böylesi bir çıkarım doğrultusunda lineer olmayan şekil örüntülerinin çok çözümlü problemler kapsamında kullanılabileceği söylenebilir.

Öğrencilerin karşılaştıkları bir probleme çok çözüm üretebilmeleri en temelde matematiksel düşünmeyi geliştiren bir alışkanlık olarak ele alınabilir. Bu doğrultuda bu araştırma sonuçlarına dayalı olarak öğrencilere bir problemin birden fazla çözüm yolu ile çözülmesi alışkanlığı ilköğretimden başlayarak kazandırılmalıdır. Bu alışkanlığın kazandırılmasında ise öğretim programları ve öğretmenler baş aktörlerdir. Öğretim programlarında çok çözümlü problemlere yer verilmeli, öğretmenlere ise öğretim süreçlerinde çok çözümlü problemlerin önemi üzerine bilgilendirici hizmet içi eğitimler verilmelidir. Ayrıca her problemin çok çözümlü problem olarak nitelendirilemeyeceği dikkate alındığında çok çözüm içeren problemlere yönelik kaynaklar hazırlanmalıdır. Bu kaynaklarda problemlerin çözümünde farklı çözüm yolları ve stratejiler sunulmalı, geometri problemlerinin yanı sıra özellikle lineer olmayan şekil örüntülerini içeren problemlere de yer verilmelidir. Ayrıca öğrencilerin çok çözümlü problemler ile sistematik ve sürekli karşılaşmaları durumlarındaki bilişsel yapılarının uzun soluklu çalışmalar ile araştırıldığı çalışmalara da gereksinim duyulmaktadır.

Kaynakça

Barbosa, A., & Vale, I. (2015). Visualization in pattern generatization: Potential and challenges. *Journal of the European Teacher Education Network*, 10, 57-70.

Bilings, E.M.H. (2008). Exploring generalization through growth patterns, In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 279-293). Reston, VA: NCTM

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42–53). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155-177.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. *(J. Teller, Translated from Russian),* J. Kilpatrick and I. Wirszup (Eds.). Chicago: The University of Chicago Press.

Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.). *Proceedings of the CERME 5* (pp. 2330-2339),http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/WG14.pdf adresinden 14.02.2014 tarihinde edinilmiştir.

Leikin, R. (2008). Multiple Solution Connecting Tasks- Introduction. *Proceedings of the International Research Workshop of the Israel Science Foundation*. Tel Aviv: CET.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.). *Creavity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129-145). Rotterdam: Sense Publishers.

Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 161-168. Seoul: PME.

Leikin, R., & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference? *ZDM Mathematics Education*, *45*, 183–197, doi: 10.1007/s11858-012-0460-8

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 349–371, doi: 10.1007/s10649-006-9071-z

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2008). Solution spaces of multiple-solution connecting tasks as a mirror of the development of mathematics teachers' knowledge. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *8*(3), 233–251, doi: 10.1080/14926150802304464.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2009). Development of teachers' conceptions through learning and teaching: The meaning and potential of multiple-solution tasks. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *9*(4), 203-223, doi: 10.1080/14926150903314305.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2009). Multiple solutions for a problem: A tool for evaluation of mathematical thinking in geometry. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.). *Proceedings of the CERME 6 (January 28-February 1 2009), Lyon, France*. http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg5-11-levav-leikin.pdf adresinden 12.08.2013 tarihinde edinilmiştir.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012a). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 73– 90, doi: 10.1016/j.jmathb.2011.11.001

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012b). Using multiple solution tasks for the evaluation of students' problem-solving performance in geometry. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *12*(4), 311-333, doi: 10.1080/14926156.2012.732191.

Lev-Zamir, H., & Leikin, R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: Focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education*, *13*(1), 17-32, doi: 10.1080/14794802.2011.550715

Markworth, K. A. (2012). Growing patterns: Seeing beyond counting. *Teaching Children Mathematics*, *19* (4), 254-262.

Miles, M., & Huberman, M. (1994). *An expanded sourcebook qualitative data analysis*. (2. edition). California: Sage Publications.

Milli Eğitim Bakanlığı- MEB (2013). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı,* Ankara: MEB, http://ttkb.meb.gov.tr/program2.aspx adresinden alınmıştır.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).(2000). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* http://www.nctm.org/standards.htm adresinden 14.09.2005 tarihinde alınmıştır.

Philips, D.C., & Soltis, J. F. (2005). *Öğrenme: Perspektifler* (S. Durmuş, Çev.). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Polya, G. (1997). *Nasıl çözmeli? Matematikte yeni bir boyut* (F. Halatçı, Çev.). İstanbul: Sistem Yayıncılık.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13*(1), 55-80.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *The International Journal on Mathematical Education*, *29*(3), 75–80.

Sternberg, R. J. (1994). *Thinking and problem solving*. (2. edition). New York: Academic Press.

Tabach, M., & Friedlander, A. (2013). School mathematics and creativity at the elementary and middle-grade levels: How are they related? *ZDM Mathematics Education, 45*, 227-238.

Tanışlı, D., ve Köse, N. (2011). Lineer şekil örüntülerine ilişkin genelleme stratejileri: Görsel ve sayısal ipuçlarının etkisi. *Eğitim ve Bilim Dergisi*, *36* (160), 184-198.

Tsamir, P.,Tirosh, D. Tabach, M., & Levenson, E. (2010). Multiple solution methods and multiple out comes—is it a task for kinder garten children? *Educational Studies in Mathmematics*, *73*, 217-231.

Yeşildere, S., & Akkoç, H. (2011). Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *30*, 141-153.

Yıldırım, A., ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. (6.bs.)* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yılmaz, T.Y. (2014). *Öğrencilerin çok çözümlü problemlerde kullandıkları stratejilerinin belirlenmesi ve matematiksel yaratıcılıklarının değerlendirilmesi*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

Yazarlar

Tuğba Yulet YILMAZ, İlköğretim matematik öğretmenidir. İlgi alanları arasında matematiksel düşünme, matematiksel yaratıcılık ve çok çözümlü problemler yer almaktadır.

Dr. Nilüfer Yavuzsoy KÖSE, İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı öğretim üyesidir. İlgi alanları arasında teknolojinin matematik eğitiminde kullanımı, geometri öğretimi, öğretmen eğitimi ve öğretmenlerin mesleki gelişimi yer almaktadır.

İletişim

Tuğba Yulet YILMAZ
Hacı Nezire Sarıkamış Ortaokulu, Odunpazarı, Eskişehir, Türkiye.
e-posta: tugbayulet@gmail.com

Doç. Dr. Nilüfer Yavuzsoy KÖSE
Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı, Yunusemre Kampüsü, Tepebaşı, 26470, Eskişehir, Türkiye.
e-posta: nyavuzsoy@anadolu.edu.tr

ENAD ONLINE
EĞİTİMDE NİTEL ARAŞTIRMALAR DERGİSİ
Journal of Qualitative Research in Education *Volume 3 / Issue 3, 2015*
Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi - ENAD
Journal of Qualitative Research in Education - JOQRE

Summary

Purpose and Significance. Multiple solution tasks are defined as mathematical situations which can be proved in more than one way or as mathematical tasks that can be solved in more than one way so that students can reach the same result by using different methods (Levav-Waynberg & Leikin, 2012b). Mathematics trainers point out that understanding how to get the same result when a task is solved in more than one way is an important component of the development of mathematical reasoning (NCTM, 2000) and that this situation both develops and requires mathematical thinking as well (Leikin, 2007). Solving a problem in more than one way requires the problem solver to have a good level of mathematical knowledge, and this shows that the problem solver is an experienced mathematician (Polya, 1997). Also, this process has a close relationship with individuals' mathematical creativity as well (Ervynck, 1991).

Individuals with the habit of finding more than one solution to a task or proving one proposition in more than one way could have the opportunity to examine the task in detail, to try to find different solutions, to explain mathematical patterns and relationship in different ways, to go through upper-level mental processes to make assumptions and to prove these assumptions, to form their own knowledge with various possibilities and to do their own evaluations. However, since there is no need to find more than one solution to a task in education systems full of multiple-choice tests, it is not possible to develop such a habit or to raise such awareness. When the related literature is examined, it is seen that there are several studies which examine students' mathematical thinking via multiple solution tasks (Leikin, 2007, Levav-Waynberg & Leikin, 2009; Levav-Waynberg & Leikin, 2012a; Levav-Waynberg & Leikin, 2012b; Tsamir, Tirosh, Tabach & Levenson 2010), which investigate the relationship between students/gifted students, multiple solution tasks and mathematical creativity (Leikin, 2009; Leikin&Lev, 2007; Leikin&Lev, 2013, Tabach & Friedlander, 2013), and which focus on teacher's knowledge and multiple solution tasks (Leikin& Levav-Waynberg, 2007, 2008, 2009; Lev-Zamir&Leikin, 2011). In addition, in national literature, there is no research conducted to examine students' mathematical thinking by using multiple solution tasks. In this respect, the present study focused on multiple solution tasks and tried to determine different strategies used by university freshman students for multiple solution tasks.

Methodology. In order to determine the participants in n this qualitative study, criterion sampling method, one of purposeful sampling methods, was used. In line with the research purpose, the criterion was that the participants the participants would have the knowledge necessary for multiple solution tasks and that they had been introduced to these concepts during their high school education. For the purpose of collecting rich data, all the freshman students from the department of Elementary School Mathematics Teaching (76 students) participated in the study. The open-ended multiple solution tasks were applied to the participants. Among these participants, six students were selected to hold clinical interviews with them so that more detailed data could be gathered. In the study, the research data were collected via an open-ended test and clinical interviews. For the open-ended test made up of multiple solution tasks, first of all, the related literature was reviewed, and the multiple solution tasks were identified. A total of six tasks, three of which were related to geometry, were determined. One of these tasks, the Jam problem was taken from a study conducted by Leikin and Lev (2013); another task, the pattern problem, was taken from another study (Bilings, 2008); and the other problems were selected by the researchers among the theorems most familiar to the students in geometry. Following this, the problems were presented to two mathematics teachers and two experts in the field of mathematics teaching. In line with the changes suggested, the necessary changes were done by removing one of the problems. Lastly, the test made up of the remaining five problems was piloted. The open-ended test with four problems arranged in line with the results of the pilot study was applied to 76 students in five

days, and a period of 30 minutes was allocated to each of the problems. The present paper includes only two of the four multiple solution tasks. For the analysis of the data collected in the study, first, all the solution strategies to be applied for the multiple solution tasks were determined by two field experts, and the expert solution spaces for the problems were formed. Following this, the solution strategies were determined based on different representations, different features (such as supplementary structures, definitions or theorems used) and on different branches of mathematics, and the expert solution space was finalized by classifying similar solutions in a way to exist in the same group. Also, the individual solution strategies of the students for each problem were examined by two experts and coded under the groups and sub-groups in expert solution spaces.

Discussion and Conclusion. In the present study, which aimed at determining the different solution strategies used for the multiple solution tasks by the university freshman students from the department of Elementary School Mathematics Teaching, the primarily important result was that most of the students failed to produce different and numerous ways of solution to the problems in their individual solution spaces. In relation to their individual solutions, it was found that most of the students produced 3 or fewer ways for solution regarding the geometry problem and that most of them produced 2 or fewer ways for solution regarding the pattern problem. Depending on this situation, it could be stated that the students had not met any multiple solution tasks in their education lives before or that they did not need to find more than one solution to the problems. Regarding the geometry problem assigned to the students, the most frequent solution strategy applied by the students was the one based on AAA similarity, which is quite common in textbooks and supplementary sources. In addition, some of the strategies used by the students to solve the geometry problem included important limitations, and it was seen that the students used the results of the theorem they tried to prove or that they tried to find a solution by skipping some of the necessary steps. Asking “backward” questions requires students to reach generalizations in different ways. The pattern problem includes a non-linear figural growing pattern with a general rule of second degree (n^2+2n+3), in which the students were asked the steps of 0 and n. In contrast with linear figural patterns, in this type of non-linear figural pattern, relationships between the terms can not easily be seen; therefore, the students focused more on the structure of the figure and used visual strategies more than numerical strategies. The fact that the students used 10 of the 11 strategies determined in the expert solution space and that eight of these 10 strategies were visual indicated that the students used the figures in the pattern as an effective form of representation (Yeşildere & Akkoç, 2011). Also, it was seen that the students associated the number of tiles with the number of steps by finding the clues in the figural pattern and made algebraic generalizations. In addition, it was a striking result that 14 of the students did not produce and solution to the pattern problem.

Consequently, it was found that the strategies used by the students for personal solutions to the multiple solution tasks were limited and that they made wrong reasoning in relation to some of the strategies. Moreover, regarding solution to the non-linear figural pattern, the students mostly used visual strategies despite the low number of solutions they produced, and it was revealed that they solved the structures in the figure and established a functional relationship.