

**$SO(n)$ ÖZEL ORTOGONAL VE $SU(n)$ ÖZEL ÜNİTER
GRUPLARI VE BU GRUPLARIN KUANTUM
MEKANİĞİNE UYGULAMALARI**

Engin ATA

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

2001

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Engin ATA'nın $SO(n)$ Özel Ortogonal ve $SU(n)$ Özel Üniter Grupları ve Bu grupların Kuantum mekaniğine uygulamaları başlıklı Fizik Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 24.8.2001 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisans Üstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Adı Soyadı

İmza

Üye (Tez Danışmanı) : Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ.....

Üye :Doç. Dr. Mustafa ŞENYEL.....

Üye :Yrd. Doç.Dr. Murat TANIŞLI.....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun **03.09.2001.** tarih ve **26/2**.....sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ÖZET

Yüksek Lizans Tezi

$SO(n)$ ÖZEL ORTOGONAL VE $SU(n)$ ÖZEL ÜNİTER GRUPLARI VE BU GRUPLARIN KUANTUM MEKANİĞİNE UYGULAMALARI

Engin ATA

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ
2001, 142 sayfa

Bu tezde, temel matematiksel yapılar tanımlanmış, grup yapıları ve klasik sürekli gruplardan olan Lie gruplarının yerel ve global özellikleri örnekler verilerek açıklanmış, daha sonra fiziksel sistemin tanımlanması için gerekli olan temel varsayımlar ve kavramlar yazıldıktan sonra simetri ve invaryans kavramları açıklanmış, $SO(n)$ özel ortogonal ve $SU(n)$ özel üniter Lie gruplarının bu kavramların kuantum mekaniği uygulamaları için uygun oldukları gösterilmiştir. Son olarak serbest rijit dönücü klasik ve kuantum mekaniksel olarak tanımlanmış ve Hamiltonyen denklemi yazılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lie Grupları, Kuantum Mekaniği, Rijit Dönücü

ABSTRACT

Master of Science Thesis

$SO(n)$ SPECIAL ORTOGONAL AND $SU(n)$ SPECIAL UNITARY GROUPS AND THEIR APPLICATION IN QUANTUM MECHANICS

Engin ATA

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Physics Program

Supervisor : Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ

2001, 142 pages

In this thesis; after the basic hypothesis and concept which one essential to explain physical system in quantum mechanics are written, symmetry and invariance concepts have been expressed. In addition, it is shown that $SO(n)$ special ortogonal and $SU(n)$ special unitary Lie groups are suitable for the application of quantum mechanics. For last step, the definition of rigid rotatorclassical and quantum has taken place and the hamiltonian function has been written.

Keywords: Lie Groups, Quantum Mechanics, Rigid Rotator

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında beni sabır göstererek görüş ve önerilerini yönlendiren değerli hocam Sayın Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ' teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	
ÇİZELGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel yapılar	1
1.1.1. Küme	1
1.1.2. Grup	1
1.1.3. Cisim	3
1.1.4. Lineer Vektör Uzayı	4
1.1.5. Cebir	5
1.2. Bazlar	7
1.2.1. Grup için	8
1.2.2. Cisim için	8
1.2.3. Vektör uzayı için	8
1.2.4. Cebir için	9
1.3. Gönderimler, Gerçekleştirmeler, Temsiller	10
1.3.1. Kümeler	10
1.3.2. Gruplar	11
1.3.3. Cisimler	13
1.3.4. Vektör Uzayları	14
1.3.5. Cebirler	14
2. KLASİK GRUPLAR	16
2.1. Genel Lineer Gruplar	16
2.1.1. Baz değişimi	16
2.1.2. Kovaryans ve Kontravaryans	17
2.2. Hacim Koruyan Gruplar	17
2.2.1. Direkt Toplamlar	17
2.2.2. Direkt çarpımlar	19
2.2.3. Tensör Uzayında Simetrik İndirgeme	21
2.2.4. Tam Simetrik Uzaylar, Fonksiyonların Açılımı	23
2.2.5. Tam Antisimetrik Altuzaylar	27
2.3. Metrik Koruyan Gruplar	28
2.3.1. Metrik	28
2.3.2. Metrik çeşitleri	30
2.3.3. Üniter Weyl Hilesi	33
2.3.4. Fonksiyon Uzaylarında Metrikler	33
2.3.5. Metrik Korunumlu Gruplar	34
2.4. Klasik Grupların Özellikleri	37
2.4.1. Düzgün Matris Grupları	37
Genel Lineer Gruplar	39

Özel Lineer Gruplar	39
Üniter Gruplar	40
Özel Üniter Gruplar	40
Ortogonal Gruplar	41
Özel Ortogonal Gruplar	41
Simplektik gruplar	42
2.4.2. Lie Gruplarının Yerel Özellikleri	43
2.4.2.1. Grup Elemanlarının Parametrizasyonu	43
2.4.2.2. Bağlantılılık	44
2.4.2.3. Lie Gruplarının Kökeni	44
2.4.2.4. Sonsuz Küçük Grup Jeneratörleri	45
2.4.2.5. 2 boyutlu $SO(2)$ Dönme Grubu	47
2.4.2.6. Sonsuz Küçük Dönmeler	48
2.4.2.7. Bir Lie Grubunun Sonsuz Küçük Operatörleri	50
2.4.2.8. Sonsuz Küçük Operatörlere Örnekler	52
$SO(2)$ Dönme Grubu	52
$SO(3)$ Grubunun Sonsuz Küçük Operatörleri	53
2.4.2.9. Lie Gruplarının Yapı Sabitleri	54
2.4.2.10. Sonlu Grup Elemanlarının Oluşumu	56
2.4.2.11. Sonlu Dönüşümler	59
2.4.3. Klasik Gruplar Arasında Bağlantılar	60
2.4.4. Klasik Grupların Boyutları	62
2.4.5. Klasik Gruplar Arasında İzomorfizmler ve Homomorfizmler	66
3. KUANTUM MEKANİĞİNDE FİZİKSEL SİSTEMİN TANIMLANMASI VE SİMETRİ YASALARI	67
3.1. Temel Varsayımlar	67
3.2. Operatörler	67
3.2.1. Bir Operatörün Özdeğerleri ve Özfonksiyonları	68
3.2.2. Operatörlerin Komütasyon Bağlılıkları	69
3.2.3. Hilbert Uzayı	71
3.2.4. Bir Operatörün Eşleniği	74
3.3. Ölçülebilirdeğerler ve Durumlar	74
3.3.1. Dalga fonksiyonu	74
3.3.2. Dalga Fonksiyonunun konum Uzayındaki Temsili ve Onun Fourier Eşleniği Olan Momentum Uzayındaki Temsili	74
3.3.3. Dalga Fonksiyonunun Olasılık Yorumu	75
3.4. Beklenen Değerlerin Zaman İçinde Gelişimi	77
3.5. Kuantum Mekaniğinde Fiziksel Sistemin Tanımlanması	78
3.6. Kuantum Mekaniğinde Simetri Yasaları	81
3.6.1. Tanım	81
3.6.2. Wigner Teoremi	82
3.6.3. Simetri Gruplarının ve Temsillerinin Bir Faza Yükseltmesi	83
3.6.4. İnvaryans ve Korunum Yasaları	87
3.6.5. 3-boyutlu Dönme Grubuna Uygulama	89

4. $SU(n)$ VE $SO(n)$ GRUPLARININ KUANTUM MEKANİĞİNE UYGULAMALARI	90
4.1. Dönme Grubunun Kuantum Mekaniğinde Temsilleri	90
4.1.1. Spinsiz Parçacıklar	91
Ölçülebilirdeğerler ve durumlar	91
Dönme grubu temsillerinin kararlılığı	93
Dalga fonksiyonunun dönüşümü	94
E_3 Uzayı üzerinde ortonormal baz seçimi üzerinden bağlılık	95
Sonsuz küçük jeneratörler, E_3 uzayıyla Lie cebirinin tespit edilmesi	98
Standart baz, bir üçlü (Triad) üzerinden bağlılık	98
Çok parçacıklı sistemler	99
4.1.2. Spin-s Parçacıklar	100
Ölçülebilirdeğerler ve durumlar	100
Dönme grubu temsillerinin kararlılığı	101
Sonsuz küçük jeneratörler, standart baz, bir üçlü (Triad) üzerinden bağlılık	101
4.2. Ketler, Bralar, Dalga Fonksiyonları, Operatörler	105
4.2.1. Ketlerin, Braların, Dalga Fonksiyonlarının tensörel karakteri	106
Ketler	106
Bralar	106
Dalga fonksiyonları	107
4.2.2. İndirgenemez Tensörel Temsiller	107
4.2.2.1. Tanımlar ve özellikleri	107
4.2.2.2. Tensörel Operatörlere Örnekler	110
Vektör operatörler	110
$\hat{D}_{m_0}^{j*}, \hat{D}_{m_0}^j, \hat{Y}^l$ operatörlerinin çarpımı	111
Yaratma ve yoketme operatörleri	111
İzdüşüm operatörleri	113
İki cisim etkileşmelerine örnekler	115
4.3. Matris Elemanları	116
4.3.1. İndirgenmiş Matris Elemanının Tanımlanması	116
4.3.2. Herhangi Bir İndirgenemez Tensörün Açıklanması	117
4.3.3. İndirgenmiş Matris Elemanları	118
4.3.3.1. İndirgenmiş matris elemanının kompleks eşleniği	118
4.3.3.2. İndirgenmiş matris elemanlarına örnekler	118
Özdeşlik operatörü	118
Açısal momentum operatörünün karesi	119
Açısal momentum operatörü	119
Gradyent operatörü	120
‘3 dönme matris elemanı’nın indirgenmiş matris elemanı	120
‘3 küresel harmonikleri’nin indirgenmiş matris elemanı	121

Genelleştirilmiş, çiftlenmiş izdüşüm tensör operatörünün indirgenmiş matris elemanı	121
4.3.3.3. Operatörlerin tensör çarpımının indirgenmiş matris elemanları, Lande formülü	122
İki uzayın direkt çarpımında indirgenmiş matris elemanları	122
Benzer uzay üzerinde işleyen iki tensör operatörün tensörel çarpımının indirgenmiş matris elemanı	123
4.3.3.4. Lande formülü	124
4.4. Kuantum Mekaniğinde Rijit Dönücü	126
4.4.1. Bir Rijit Dönücünün Klasik Mekaniği	127
Kinematik	127
Dinamik	129
4.4.2. Kuantum Mekaniğinde Rijit Dönücünün Tanımlanması	131
Ölçülebilirdeğerler ve durumlar	131
Dönme grubu temsilinin karalılığı	133
Sonsuz küçük jeneratörler	134
Standart baz, bir üçlü (Triad) üzerinden bağlılık	136
4.4.3. Kuantum Mekaniğinde Serbest Rijit Dönücünün Dinamiği	138
5. SONUÇLAR	141
6. KAYNAKLAR	142

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Koordinat sistemi baz değişimi	16
Şekil 2.2	p noktasının değeri	24
Şekil 2.3	ϕ gönderimi	27
Şekil 2.4	x değişkenin değişimi	50
Şekil 4.1	Polarizasyon deneyi	103
Şekil 4.2	Bazın değişimi	105

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1	Grup işleminin baz vektörlere etkisi	22
Çizelge 2.2	Metrikler	36
Çizelge 2.3	Reel değerli klasik gruplar	60
Çizelge 2.4	Kompleks değerli klasik gruplar	61
Çizelge 2.5	Kuaterniyon değerli klasik gruplar	61
Çizelge 2.6	Küçük grupların boyutları	63
Çizelge 2.7	Küçük grupların boyutları (devamı)	64
Çizelge 4.1	Ketlerin ve braların tensörel karakterleri	115

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

R_N	Reel vektör uzayı
C_N	Kompleks vektör uzayı
Q_N	Kuaterniyon vektör uzayı
V_H	Hilbert uzayı
S_f	Fonksiyon kümesi
V_f	Fonksiyon uzayı
f	Fonksiyon
\mathfrak{I}	Birim matris
$Gl(N, r)$	Reel vektör uzayı için genel lineer grup
$Gl(N, c)$	Kompleks vektör uzayı için genel lineer grup
$Gl(N, q)$	Kuaterniyon vektör uzayı için genel lineer grup
$SL(N, r)$	Reel değerli özel lineer grup
$SL(N, c)$	Kompleks değerli özel lineer grup
$SL(N, q)$	Kuaterniyon değerli özel lineer grup
$U(n)$	n^2 parametrelili üniter grup
$SU(n)$	Özel üniter grup
$O(n, c)$	$n(n-1)$ parametrelili kompleks ortogonal grup
$O(n, r)$	$n(n-1)$ parametrelili ortogonal grup
$SO(n, r)$	Reel değerli özel ortogonal grup
$SO(n, c)$	Kompleks değerli özel ortogonal grup
$Sp(2n)$	$2n(2n+1)$ parametrelili simplektik grup
e_i	Bir vektör uzayının baz vektörleri
$\langle \hat{A} \rangle_\Psi$	Ψ durumunda olan \hat{A} operatörünün beklenen değeri
$\Psi(\vec{r}, t)$	Fiziksel sistemin dalga fonksiyonu
\hat{A}	Operatör

X_k	Birim eleman etrafındaki grup elemanlarının sonsuz küçük grup jeneratörleri
C_{kl}^m	Sonsuz küçük Lie gruplarının yapı sabitleri
\hat{X}_σ	Grubun sonsuz küçük operatörleri
σ	Pauli spin matrisleri
Γ	Bir vektör uzayının a_i bazını aynı boyutlu başka bir vektör uzayının b_i bazına gönderen Γ gönderimi
$V_N^1 \oplus V_N^2$	V_N^1 ve V_N^2 vektör uzaylarının direkt toplamı
$V_N^1 \otimes V_N^2$	V_N^1 ve V_N^2 vektör uzaylarının direkt çarpımı
$G_1 \otimes G_2$	Kronecer çarpımı veya tensör çarpım grubu
$(V_N)^r$	Tensör çarpım uzayı $V_N \otimes \dots \otimes V_N \equiv (V_N)^r$
$f_{ijk\dots}$	r . dereceden tam simetrik uzayların $x^i x^j x^k$ baz vektörlerinin çarpım koordinatları
g_{ij}	Metrik tensör
\vec{K}	Dinamik momentum vektörü
\vec{L}	Açısal momentum vektörü
\hat{J}^2	Casimir operatörü
\hat{J}	Açısal momentum operatörü
μ	Magnetik moment
I	Atalet tensörü
\vec{I}	Dönme eksenini boyunca atalet momenti

1. GİRİŞ

1872'de Klein'ın Erlanger programı yayınlandıktan sonra geometrik cisimleri veya uzayları belirleyen tutarlı bir çerçeveye kavuşuldu. Bir uzayı diğer uzaylardan ayıran bu uzaya uygulanan dönüşümlerin sonunda uzayın davranışları olduğu göz önüne alındı. Klein'ın verilen dönüşümler altında sabit kalan değişmeyen uzaylar hakkında ki önermeleri çok önemlidir. Bir uzay için tüm katı hareketlerin kümesi o uzayın dönüşüm grubunu oluşturur. Erlanger programı uzayların dönüşüm grubunun belirli altgrupları uygulandığında değişmeyen özellikleri olduğunu söyler. Bu nedenle bir uzayın karakteri dönüşüm grubunun özellikleriyle oluşur, uzayın elemanları değil de uygulanan dönüşüm grubunun elemanlarının uzay elemanlarına uygulanmasıyla nasıl değiştikleri önemli hale gelir[1].

İnvariant ve simetri kavramları bir çok yeni fiziksel olayın anlaşılmasına yardımcı olmuş ve bu kavramlar sayesinde yeni teoriler kurulmuştur. İnvariant ve simetri işlemleri fiziksel veya matematiksel yapılarda grup teorisi ile yapılır. Kesikli gruplar katı fizik ve kristalografide yaygın olarak kullanılırlarken, sürekli gruplar kuantum mekaniği ve uygulaması olan diğer fizik dallarında kullanılırlar. Sürekli gruplardan klasik Lie gruplar olarak bilinen özel ortogonal $SO(n)$, özel üniter $SU(n)$ grupları yerel ve global simetri uygulamalarında çok önemli rol oynarlar[2].

1.1. Temel Yapılar

1.1.1. Küme

Bir küme kesinlikle herhangi bir ek yapı ve özelliğe sahip olmayan nesnelerin bir koleksiyonudur. Örneğin, n tane portakal veya muz veya insan veya nokta koleksiyonu birer küme oluşturur. n tane sonsuz nesneyi kapsayan bir kümenin ilk örneği n tane noktanın oluşturduğu kümedir.

1.1.2. Grup

g_1, g_2, g_3, \dots elemanlarına sahip olan G kümesi grup çarpımı denilen \bullet işlemini;

$$\text{kapalılık } g_i, g_j \in G \Rightarrow g_i \bullet g_j \in G \quad 1.1$$

$$\text{birleşme } g_i \bullet (g_j \bullet g_k) = (g_i \bullet g_j) \bullet g_k \quad 1.2$$

$$\text{birim eleman } g_1 \bullet g_i = g_i \bullet g_1 = g_i \quad 1.3$$

$$\text{tek ters eleman } g_l = g_k^{-1}, g_k \bullet g_l = g_l \bullet g_k = g_1 \quad 1.4$$

özellikleriyle yerine getiriyorsa gruptur.

ÖRNEKLER

1. 1,2,3,4 noktalarının tüm olası permütasyonlarının koleksiyonu 4! tane elemanla veya P_4 denilen işlemle bir grup oluşturur.

önceki grup işlemi 1 2 3 4

sonraki grup işlemi 3 1 2 4

$$g = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3124 \end{pmatrix}$$

2. $\frac{2\pi}{n}$ radyanların multiplesi bir engelle karşılaşmadan çember içinde dönmelerinin kümesi n bağımsız işlemle bir grup oluşturur. Bir sonlu grup n sıralı olmalıdır denir.

3. Bir ϕ açısıyla $0 \leq \phi \leq 2\pi$ engellenmeden çember içinde dönmelerin koleksiyonu bir sürekli gruba örnektir. $g(\phi)$ grup işlemleri $0 \leq \phi \leq 2\pi$ aralıklı noktalar üzerinde birebir karşılık gelmeyle varolurlar.

4. Doğrusal bir çizginin içinde bir a aralığının katı dönmelerinin kümesi sürekli grupların diğer bir örneğidir. Grup işlemleri $-\infty < a < +\infty$ çizgisi üzerindeki noktalarla birebir karşılık gelmeyle varolurlar.

5. Sıfır dışarıda tutulduğunda reel sayılar kümesi çarpma işlemi altında bir grup biçimlendirirler. Sıfır dışarıda bırakıldığında kompleks sayılar kümesi de çarpma işlemi altında bir grup oluştururlar. Her grupta özdeşlik işlemi 1'dir. Fakat toplama işlemi altında reel ve kompleks sayılar 0 özdeşlik işlemi ortak olmak üzere ayrı ayrı grup biçimlendirirler.

Bir grubun $g_i, g_j \in G$ elemanları için $g_i \bullet g_j = g_j \bullet g_i$ şartı sağlanıyorsa bu grup abelyan veya komütatif gruptur denir.

1.1.3. Cisim

f_0, f_1, f_2, \dots elemanlarına sahip F kümesi + toplama ve \bullet skaler çarpım işlemlerini f_0 özdeşlik elemanı ile + işlemi altında abelyan grup ve

$$\text{kapalılık } f_i \bullet f_j \in F \quad 1.5$$

$$\text{birleşme } f_i \bullet (f_j \bullet f_k) = (f_i \bullet f_j) \bullet f_k \quad 1.6$$

$$\text{birim eleman } f_i \bullet 1 = 1 \bullet f_i = f_i \quad 1.7$$

$$f_0 \text{ birim elemanı hariç ters eleman } f_i \bullet f_i^{-1} = f_i^{-1} \bullet f_i = 1 \quad 1.8$$

$$\text{dağılma } f_i \bullet (f_j + f_k) = f_i \bullet f_j + f_i \bullet f_k \quad 1.9$$

$$(f_i + f_j) \bullet f_k = f_i \bullet f_k + f_j \bullet f_k \quad 1.10$$

$$\text{değişme } f_i \bullet f_j = f_j \bullet f_i \quad 1.11$$

bağıntılarına uyarsa bir cisimdir.

Fizikte genelde yalnızca üç cisim kullanılır. Bu cisimler reel sayılar, kompleks sayılar ve kuaterniyonlardır. Reel sayıların özellikleri genelde herkes tarafından bilindiğinden burada sadece kompleks ve kuaterniyon sayıların özellikleri özetlenecektir.

Her kompleks sayı,

$$c = 1a + ib \quad 1.12$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki 1 ve $i (= \sqrt{-1})$ birimleri,

$$1.1 = 1$$

$$i.1 = 1.i = i \quad 1.13$$

$$i.i = -1$$

koşullarına uyarlar ve a, b keyfi reel sayılardır ve her hangi iki kompleks sayı aşağıdaki toplama ve çarpma koşullarına uyar:

$$c_1 + c_2 = (1a_1 + ib_1) + (1a_2 + ib_2) = 1(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad 1.14$$

$$c_1 \cdot c_2 = (1a_1 + ib_1)(1a_2 + ib_2) = 1(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$$

Her kuaterniyon,

$$q = q_0 \cdot 1 + q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2 + q_3 \lambda_3 \quad 1.15$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $q_i (i = 0, 1, 2, 3)$ reel sayılardır ve λ_i sayıları,

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \lambda_i &= \lambda_i \lambda_0 = \lambda_i \\
\lambda_i \lambda_i &= -\lambda_0 \\
\lambda_1 \lambda_2 &= -\lambda_2 \lambda_1 = \lambda_3 \\
\lambda_2 \lambda_3 &= -\lambda_3 \lambda_2 = \lambda_1 \\
\lambda_3 \lambda_1 &= -\lambda_1 \lambda_3 = \lambda_2
\end{aligned} \tag{1.16}$$

eşitlikleri tarafından tanımlanmış çarpım özelliklerine sahiptir. p ve q kuaterniyonlarının toplama ve çarpımı

$$\begin{aligned}
p + q &= (p_0 + q_0)\lambda_0 + (p_1 + q_1)\lambda_1 + (p_2 + q_2)\lambda_2 + (p_3 + q_3)\lambda_3 \\
p \cdot q &= \lambda_0(p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + \lambda_1(p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2) + \\
&\quad \lambda_2(p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3) + \lambda_3(p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)
\end{aligned} \tag{1.17}$$

şeklinde tanımlanır. $\pm \lambda_i$ elemanlarının kümesi nonkomütatif bir grup oluşturur.

Kompleks eşlenik kompleks sayılar kuaterniyonlarında kompleks eşlenikleri tanımlanır:

$$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^* = (+\lambda_0, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3) \tag{1.18}$$

Bu tanım kompleks sayıların,

$$(1, i)^* = (+1, -i) \tag{1.19}$$

tanımına birebir benzerdir. Bir kuaterniyonun eşleniğiyle çarpımının,

$$q^* \cdot q = \lambda_0 \left(\sum_{i=0}^3 q_i^2 \right) \tag{1.20}$$

olduğu kolayca görülür. Bir kuaterniyonun kompleks eşleniğiyle çarpımı sıfır veya sıfırdan büyük bir sayıdır. Ayrıca $q \cdot q^* = 0$ ifadesi kompleks sayılara tam bir benzerlikle bu kuaterniyonun sıfır olduğunu gösterir.

1.1.4. Lineer Vektör Uzayı

$v_i \in V$ vektör elemanları ve $f_i \in F$ cisim elemanlarının bir koleksiyonu, + vektör toplama işlemi ve \bullet skaler çarpım işlemiyle aşağıdaki A ve B postülalarını sağlıyorsa V kümesi lineer vektör uzayıdır.

A. $(V, +)$ abelyan gruptur:

$$\text{kapalılık } v_i + v_j \in V \tag{1.21}$$

$$\text{birleşme } v_i + (v_j + v_k) = (v_i + v_j) + v_k \tag{1.22}$$

$$\text{özdeşlik elemanı } v_i + v_0 = v_0 + v_i = v_i \quad 1.23$$

$$\text{ters eleman } v_i + (-v_i) = v_0 = (-v_i) + v_i \quad 1.24$$

$$\text{değişme } v_i + v_j = v_j + v_i \quad 1.25$$

B.

$$\text{kapalılık } f_j \bullet v_j \in V \quad 1.26$$

$$\text{birleşme } f_i \bullet (f_j \bullet v_k) = (f_i \bullet f_j) \bullet v_k \quad 1.27$$

$$\text{özdeşlik elemanı } 1 \bullet v_i = v_i \bullet 1 = v_i \quad 1.28$$

$$\text{bilineerlik } \{f_i \bullet (v_k + v_l) = f_i \bullet v_k + f_i \bullet v_l \quad (f_i + f_j) \bullet v_k = f_i \bullet v_k + f_j \bullet v_k \quad 1.29$$

ÖRNEKLER

1. Bir vektörün bilinen eski örneği, e_i 3 boyutlu uzayın bazı ve x^i vektörün koordinat bileşenleri olmak üzere aynı yönlü noktalardır :

$$v = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 \quad 1.30$$

2. V ve F kümelerinin birleştirilmesiyle oluşan vektör uzayı tanımına reel sayıların, kompleks sayıların ve kuaterniyonların uyduklarını ve bunların da vektör uzayı oldukları görünüyor. Kompleks sayılar reel sayı veya kompleks sayı cismi üzerinde bir vektör uzayı oluştururlar. Benzer şekilde kuaterniyonlar reel sayı veya kuaterniyon cismi üzerinde bir vektör uzayı oluştururlar.

1.1.5. Cebir

$v_i \in V$ ve $f_j \in F$ koleksiyonları, + vektör toplaması, • skaler çarpım ve \times vektör çarpımı işlemleri aşağıdaki A, B, C postülalarını sağlıyorsa bir cebir oluştururlar.

A. $(V, +)$ bir gruptur.

B. Bu koleksiyonlar vektör uzayı özelliklerini taşıdıklarından bir vektör uzayı oluştururlar.

C.

$$\text{kapalılık } v_i \times v_j \in V \quad 1.31$$

$$\begin{aligned} \text{bilineerlik} \quad (v_1 + v_2) \times v_3 &= (v_1 \times v_3) + (v_2 \times v_3) \\ v_1 \times (v_2 + v_3) &= (v_1 \times v_2) + (v_1 \times v_3) \end{aligned} \quad 1.32$$

$$\text{birleşme} \quad (v_1 \times v_2) \times v_3 = v_1 \times (v_2 \times v_3) \quad 1.33$$

$$\times \text{ işleminin özdeşliği} \quad v_i \times 1 = v_i \quad 1.34$$

genelde bu özdeşlik + ve • işlemlerinin özdeşliklerinden farklıdır.

+ simetrik ve – antisimetrik ara değişim altında

$$v_i \times v_j = \pm v_j \times v_i \quad 1.35$$

$$\text{türev özelliği} \quad v_1 \times (v_2 \times v_3) = (v_1 \times v_2) \times v_3 + v_2 \times (v_1 \times v_3) \text{ 'dir.} \quad 1.36$$

ÖRNEKLER

1. $n \times n$ reel matrisleri kümesi reel sayıların skaler çarpımı ve matris toplamı altında bir n^2 boyutlu reel vektör uzayı oluştururlar.

$$(A \times B)_{ik} = \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{jk} \quad 1.37$$

matris çarpımı işlemini sadece toplama işleminin tanımlı olduğu bu vektör uzayına eklersek bu uzay birleşimli bir cebir olur. Her işlemin farklı özdeşliği vardır. + işleminin 0 (sıfır), • işleminin 1 ve \times işleminin

$$(\mathfrak{I})_{ik} = \delta_{ik} \quad 1.38$$

\mathfrak{I} birim matrisi özdeşlik elemanıdır.

$$2. (S_{ij})' = S_{ji} = +S_{ij} \quad 1.39$$

bağıntısına uyan $n \times n$ reel matris kümesi önceki vektör uzayının lineer altuzayıdır. İki simetrik matrisin,

$$\begin{aligned} (ST)' &= (T)'(S)' = TS \neq ST \\ (S_{ij}T_{jk})' &= T_{kj}S_{ji} \neq S_{kj}T_{ji} \end{aligned} \quad 1.40$$

matris çarpımı, \times işleminin C-1 ve C-2 postülalarını,

$$\begin{aligned} S \times T &= [S, T]_{+} = ST + TS \\ [S, \alpha T_1 + \beta T_2]_{+} &= \alpha [S, T_1]_{+} + \beta [S, T_2]_{+} \end{aligned} \quad 1.41$$

şeklinde sağlar. $n \times n$ reel simetrik matrisleri simetrikleştirme veya antikomütasyon altında bir cebir oluştururlar.

$$3. A' = -A \text{ ve } A_{ij} = -A_{ji} \quad 1.42$$

koşullarına uyan $n \times n$ reel matrislerinin kümesi matris çarpımı altında kapalı değildir. Fakat,

$$\begin{aligned} A \times B &= [A, B] = AB - BA \\ [A, \beta B + \gamma C] &= \beta [A, B] + \gamma [A, C] \end{aligned} \quad 1.43$$

şeklinde bir antisimetrikleştirmeye \times birleşik işlemi tanımlanırsa C-1 ve C-2 postülatları sağlanır ve bu sistem bir cebir oluşturur.

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C + B \times (A \times C) \quad 1.44$$

eşitliği ayrıca C-6 postülasını sağlarsa, komütasyon bağıntılarıyla antisimetrik çarpımla tanımlanmış bir cebre, Lie cebri denir.

Bu özellik bir tüevdir ve kolayca,

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]] \quad \text{veya} \quad 1.45$$

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0 \quad 1.46$$

şeklinde yazılabilir. Son yazılan eşitliğe Jacobi özdeşliği denir.

1.2. Bazlar

$N \times M$ matrislerinin kümesi matris çarpımı altında bir vektör uzayı oluştururlar. Özel olarak, $N \times 1$ ve $1 \times N$ matrislerinin kümeleri V_N ve $V_{N'}$ uzaylarını oluştururlar. Bu durum vektör uzaylarının özellikleri için kullanışlı olan çeşitli kavramları ortaya koymaya uygundur.

v_i vektörleri,

$$\sum_i \alpha^i v_i = 0 \quad \text{ve} \quad \alpha^i = 0 \quad 1.47$$

durumunda lineer bağımsızdırlar. Çember üzerinde tanımlı,

$$f(\phi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{im\phi} \quad 1.48$$

kümesi, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ve m bir tamsayı olmak üzere bir lineer vektör uzayı oluşturur.

$$f(\phi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{im\phi} = 0 \quad \text{ve} \quad a_m = 0 \quad 1.49$$

durumunda e^m vektörleri lineer bağımsız olurlar.

Vektör uzayındaki herhangi buna benzer maksimal kümeye koordinat sistemi veya baz denir. Her vektör bu baza göre,

$$\beta v + \sum_{i=1}^N \alpha^i v_i = 0 \quad 1.50$$

şeklinde açılabilir. Bu durumda vektörler için nontrivial çözüm vardır.

$\beta = 0$ durumunda trivial çözüm,

$$\alpha^i v_i = 0 \text{ ve } \alpha^i = 0 \quad 1.51$$

olur. $\beta \neq 0$ durumunda

$$v = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\alpha^i}{\beta} \right) v_i \quad 1.52$$

bağıntısı v vektörünün v_i bazına göre açılımıdır.

Bazlar sadece vektör uzayı yapısında değil diğer yapılarda da bulunmaktadır.

1.2.1. Grup için

Bir grubun g_1, g_2, g_3, \dots elemanlarının her biri,

$$g_k = g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n} \quad 1.53$$

şeklinde yazılabilir. Bir kısım kesikli grup işlemi tüm olası kombinasyonlar ve olanaklarla, tüm kesikli grup işlemlerini oluşturup bir grup için bir baz oluştururlar. Bu işlemlere grup jeneratörleri denir.

1.2.2. Cisim için

Fizikte ilgilenilen cisimler olan reel sayı, kompleks sayı ve kuaterniyon cisimlerinin bazıları vardır. Reel sayıların bazı (1); kompleks sayıların reel bazı (1, i), kompleks bazı (1); kuaterniyonların $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ reel bazı, (1) kuaterniyon bazı vardır.

1.2.3. Vektör Uzayı İçin

Benzer cisimler üzerinde tanımlı tüm N boyutlu vektör uzayları denk olduğundan herhangi bir vektör uzayı için kolayca bir baz seçilebilir.

1.2.4. Cebir için

Bir cebir bir vektör uzayı olduğundan seçili olan baz herhangi bir cebirin vektör uzayı için olabilir. Cebirsel işlem cebir üzerinde kapalı olduğundan herhangi iki e_i ve e_j bazı için,

$$e_i \times e_j = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k e_k \quad 1.54$$

yazılabilir. C_{ij}^k sabitleri vektör uzayının tanımlı olduğu cisimde yapı sabitleri denilen reel sayılardır. Herhangi bir cebirin tamamen kesikli yapısı için,

$$A = \sum \alpha^i e_i \text{ ve } B = \sum \beta^j e_j \in \text{Cebir} \quad 1.55$$

olmak üzere \times işlemi bilineer olduğundan

$$\begin{aligned} A \times B &= \left(\sum \alpha^i e_i \right) \times \left(\sum \beta^j e_j \right) \\ &= \sum_i \sum_j \alpha^i \beta^j (e_i \times e_j) = \sum_i \sum_j \alpha^i \beta^j C_{ij}^k e_k \end{aligned} \quad 1.56$$

eşitliğine sahip olunur.

$M_{ij}^{(n)}$ i . satır j . sütunu 1 diğer yerleri sıfır olan bir $n \times n$ matris olmak üzere

$M_{ij}^{(n)}$ sayıları cebirin bazıdır. Bu bazlar,

$$M_{ij}^{(n)} \times M_{kl}^{(n)} = M_{il}^{(n)} \delta_{jk} \quad 1.57$$

eşitliğine uyar. Yapı sabitleri ise,

$$C_{(ij),(kl)}^{(rs)} = \delta_{jk} \delta_{ir} \delta_l^s \quad 1.58$$

şeklinde tanımlıdır. $n \times n$ simetrik matrislerin cebri için baz,

$$S_{ij}^{(n)} = M_{ij}^{(n)} + M_{ji}^{(n)} = S_{ji}^{(n)} \quad 1.59$$

simetrik matrisleridir. Burada;

$$\left[S_{ij}^{(n)}, S_{kl}^{(n)} \right] = S_{il}^{(n)} \delta_{jk} + S_{jk}^{(n)} \delta_{il} + S_{ik}^{(n)} \delta_{jl} + S_{jl}^{(n)} \delta_{ik} \quad 1.60$$

eşitliğinden hesaplanmış yapı sabitleriyle $\frac{1}{2}n(n-1)$ tane baz vardır. $n \times n$ reel

antisimetrik matrislerin cebrinin $\frac{1}{2}n(n-1)$ tane,

$$A_{ij}^{(n)} = M_{ij}^{(n)} - M_{ji}^{(n)} = -A_{ji}^{(n)} \quad 1.61$$

bazına ve

$$\left[A_{ij}^{(n)}, A_{kl}^{(n)} \right] = A_{il}^{(n)} \delta_{jk} + A_{jk}^{(n)} \delta_{il} - A_{jl}^{(n)} \delta_{ik} - A_{ik}^{(n)} \delta_{jl} \quad 1.62$$

komütasyon bağıntılarıyla sahip olunur.

$2(n-1)$ tane $M_{i,i+1}^{(n)}$ ve $M_{i+1,i}^{(n)}$ matrislerinin matris toplamı ve çarpımı işlemleri altında $n \times n$ reel matris cebri bölünebilir ve bu gözlenebilir. Bu $2(n-1)$ tane matrise cebirin bazı veya jeneratörleri denir. Fakat $M_{ij}^{(n)}$ matrisleri toplama işlemi için tanımlandığından, önce cebir üzerinde tanımlanmış olan vektör uzayları için baz oluştururlar.

1.3. Gönderimler, Gerçekleştirmeler, Temsiller

Fizikte, matematiksel yapılarla çalışmak için yapıların açıkça yazılabilmesi ve yapılar üzerinde yapılan işlemlerin yapıların dışına taşınabilmesi tercih edilir. Böylece, N -boyutlu bir vektör uzayı ile karşılaştırılan bir yapı, kendisinden kanonik vektör uzayı içine gönderim yapılmasına ve ayırık matrisler üzerinde yapılan hesaplara uygundur.

Bir cebirsel yapı içinden bir başka cebirsel yapı içine olan gönderim cebirsel yapıya birleşik işlemleri koruyorsa bir homomorfizmdir. Bu gönderim toplama işlemine göre birebir ise kendisinin tersi olan bir gönderim vardır ve tam olarak tanımlıdır. Bu gönderim izomorfizmdir.

Gönderim bir cebirsel yapı içine ise, cebirsel yapı analitik tanımlı ve belirli olarak yazılabilir. Bu yazıma gerçekleştirme denir.

Gönderim bir matris kümesi içine ise bu gönderime temsil denir.

1.3.1. Kümeler

n obje içeren her küme genelde diğer bir n obje içeren kümeye, özelde n tane $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ noktasını içeren kümeye denktir. m_i mizlarını p_i noktalarına gönderen bir f gönderimi;

$$f(m_i) = p_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad 1.63$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu gönderim birebir olduğundan tersi,

$$f^{-1}(p_i) = m_i \quad 1.64$$

şeklinde olur. Gönderimi n nesne koleksiyonundan n nokta koleksiyonuna,

$$u(m_i) = p_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad 1.65$$

şeklinde güvenilir olmayan bir gönderim olarak tanımlamak mümkündür.

Bir küme, sayılabilir sonlu sayıda nesne içeren kümeler içeriyorsa, R_1 doğrusu üzerindeki tam sayı noktalarla birebir bağlantı içine konabilir. Küme içindeki nesnelere $1,2,3,\dots,n$ reel sürekli değişkenleriyle belirlenebildiğinde, R_1, R_2, \dots, R_n reel Ökliden uzaylarındaki noktaların bir altkümeleriyle birebir bağlantıya konulabilir. Bu gönderimler $N \times 1$ matris kümesinin içine olduğundan kümelerin temsillerini sağlarlar.

1.3.2. Gruplar

Pozitif reel sayılar çarpma işlemi altında bir grup oluştururlar;

$$r > 0 \quad +\infty > \lambda > -\infty \quad \lambda \in R_1 \quad 1.66$$

$$r = e^\lambda$$

şeklinin güvenilir 1×1 matris temsili elde edildiğinde,

$$r_1 r_2 = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad 1.67$$

$$\ln(r_1 r_2) = \ln r_1 + \ln r_2$$

şeklinde olan çarpım problemini yalınlaştırmak için kullanılabilir. Pozitif sayıların çarpım grubu 1-boyutlu reel R_1 lineer vektör uzayının eksponansiyellerine izomorfiktir.

Birim modülün kompleks sayıları,

$$c(\theta) \rightarrow e^{i\theta} \quad -\pi < \theta < +\pi \quad 1.68$$

kompleks 1×1 matrisi tarafından doğru olarak temsil edilebilirler.

Bu temsillerin doğruluğundan ve grup çarpım yasalarından,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \phi + i \sin \phi) = e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta + \phi)}$$

$$(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) + i(\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi) = \cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$$

$$\sin(\theta + \phi) = \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi \quad 1.69$$

trigonometrik özdeşlikleri çıkarılabilir.

Bir grup için matris temsili matris toplamı tanımlıdır. Toplama işlemi

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{e^{i\theta} e^{i\Delta\theta} - e^{i\theta}}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{e^{i\theta}(1 + i\Delta\theta) - e^{i\theta}}{\Delta\theta} \quad 1.70$$

koşullarını yerine getirebilir ve

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}(\cos \theta) &= -\sin \theta \\ \frac{d}{d\theta}(\sin \theta) &= \cos \theta\end{aligned}\tag{1.71}$$

özel fonksiyonlarının türevlerini hesaplayabilir.

Bu denklemler bazı özel fonksiyonları sağlayan global ve yerel özdeşliklerdir. Matematiksel fiziğin bütün özel fonksiyonları bazı özel grupların temsillerine bağlıdır. Tüm global ve yerel özdeşlikler bu özel grupların gerçekleştirmelerinin veya ayrık temsiller üzerine benzer süreçlerle bu yapılar dışına taşınarak bulunabilirler.

Yukarıda sözü edilen grubun R_1 uzayının bir alt kümesiyle birebir bağlantılıdır. Bir grup eksponansiyel fonksiyon yardımıyla bir tam vektör uzayı ile veya topolojik özellikler üzerine bağlı vektör uzayının bir alt kümesiyle birebir bağlantılı olup olmadığı önemlidir. Bu durum grup çarpım yapısı üzerindeki noktalar kümesinin özelliklerinin çalışmasına bağlı konum tanımlar.

Önceki örnek vektör uzaylarının elemanlarının eksponansiyeli grup elemanı bağıntılarına sahiptir. Bu genel bir özelliktir. Bir Lie cebri yapısı üzerindeki vektör uzayındaki bir elemanın eksponansiyeli benzer bir grubun elemanıdır.

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(X)^n}{n!}\tag{1.72}$$

tanımından, her $n \times n$ H üniter matrisi bir $n \times n$ hermityen matris ($H_{ij} = H_{ji}^*$) olmak üzere,

$$U = e^{iH}\tag{1.73}$$

olarak yazılabilir.

1.3.3. Cisim

Bir Γ gönderimi cismin,

$$\begin{aligned}\Gamma(c_1 + c_2) &= \Gamma(c_1) + \Gamma(c_2) \\ \Gamma(c_1 \bullet c_2) &= \Gamma(c_1) \bullet \Gamma(c_2)\end{aligned}\tag{1.74}$$

işlemlerini korur. Kompleks sayılar cismi için,

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Gamma(i) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.75}$$

temsilleri doğru temsillerdir. Bu temsillerden kompleks sayı cisminin çarpım yapısı hesaplanır:

$$\begin{aligned}(a1 + bi)(c1 + di) &= (ac - bd)1 + (ad + bc)i \\ \Gamma \downarrow \quad \Gamma \downarrow \quad \Gamma^{-1} \uparrow & \\ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.76}$$

Kuaterniyonlar için benzer bir temsil;

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix} \\ \Gamma(\lambda_j) &= -i\sigma_j\end{aligned}\tag{1.77}$$

olarak yapılabilir. Burada σ_i matrisleri,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\tag{1.78}$$

$$q = q_0 1 + q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2 + q_3 \lambda_3 \xrightarrow{\Gamma} \begin{pmatrix} q_0 - iq_3 & -iq_1 - q_2 \\ -iq_1 + q_2 & q_0 + iq_3 \end{pmatrix}\tag{1.79}$$

temsili altında Pauli spin matrisleridir. Kuaterniyonlar nonkomütatif cisimlere bir örnektir. q' ve q'' kuaterniyonlarının çarpımları genelde,

$$q'q'' \neq q''q'\tag{1.80}$$

olur. Komütatif cisimlere (reel ve kompleks sayılar) ait olan bir çok özelliğe kuaterniyonlarda sahip olsa da bazı özelliklerde kuaterniyonlar farklı davranırlar.

1.3.4. Vektör Uzayları

Vektör uzayları arasındaki homomorfizmler ve izomorfizmler vektör toplamı ve skaler çarpım işlemlerini korurlar :

$$\Gamma(\alpha V_1 + \beta V_2) = \alpha \Gamma(V_1) + \beta \Gamma(V_2)\tag{1.81}$$

Bu yüzden böyle bir gönderimin herhangi bir zamanda bazlar üzerindeki etkisi bilindiğinden gönderim tamamen belirlidir.

a_1, a_2, \dots, a_N ve b_1, b_2, \dots, b_N bazlarına sahip benzer cisimler üzerinde tanımlı A ve B , N -boyutlu vektör uzayları olmak üzere $a_i \longrightarrow \Gamma(a_i) = b_i$ gönderimi A_N ve B_N arasında bir izomorfizmi (denkliği) şart koşar. Bu durumda izomorfizm daima benzer cisim üzerinde tanımlı aynı boyutlu vektör uzayları arasında bir bulgu olur. F cisimi üzerinde tanımlı tüm N -boyutlu vektör uzayları, F üzerinde V_N uzayına denk olduklarından bu izomorfizm temel teoremi doğrular.

Γ gönderimi her $a \in A_N$ için $\Gamma(a) \in B_M$, A_N 'den B_M içine bir gönderimse bu gönderim injektiftir. B_M uzayının her b elemanı A_N uzayının bazı olan a elemanına görüntüsü ise,

$$b = \Gamma(a) \quad 1.82$$

eşitliği ile Γ gönderimi üzerinedir veya surjektiftir.

$$A_N \xrightarrow{\Gamma} B_M \quad 1.83$$

olarak tanımlanan Γ gönderimi doğruysa bu gönderim injektiftir ve $M \geq N$ dir. Γ gönderimi surjektif ve $M < N$ ise Γ doğru değildir.

1.3.5. Cebirler

$$A_{ij} = -A_{ji} \quad 1.84$$

özelliğine sahip A_{ij} bazlı bir lineer vektör uzayından kurulu cebirin yapısı,

$$[A_{ij}, A_{kl}] = A_{il}\delta_{jk} + A_{jk}\delta_{il} - A_{ik}\delta_{jl} - A_{jl}\delta_{ik} \quad 1.85$$

komütasyon bağıntılarıyla verilsin. $n \times n$ antisimetrik $A_{ij}^{(n)}$ matrislerine A_{ij} bazının,

$$A_{ij} \xrightarrow{\Gamma} A_{ij}^{(n)} \quad 1.86$$

gönderimi bu cebir için bir temsildir. A_{ij} bazından $X_{ij} = x^i \partial_j - x^j \partial_i$ somut operatörlerine R gönderimi,

$$A_{ij} \xrightarrow{R} X_{ij} \quad 1.87$$

bu cebir için bir gerçekleştirmenin varlığı şart koşar. Bu cebir toplamsal matris temsillerine ve operatör gerçekleştirmelerine sahiptir.

$$A^{(n)} \xrightarrow{\text{exp}} SO(n)$$

1.88

eksponansiyel gönderimi +1 determinanlı $n \times n$ ortogonal matris grubu üzerine $n \times n$ antisimetrik $A^{(n)}$ matris cebri gönderir[3].

2. KLASİK GRUPLAR

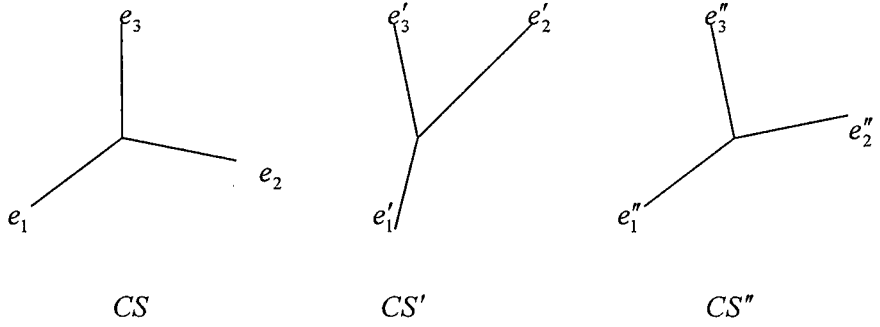
2.1. Genel Lineer Gruplar

2.1.1. Baz Değişimi

V_N vektör uzayındaki $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ baz vektörleri kümesinin seçimi zorunlu değildir. Baz vektörlerinin veya koordinat sistemlerinin

$$CS' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_N\} \quad CS'' = \{e''_1, e''_2, \dots, e''_N\} \quad 2.1$$

şeklinde diğer kümelerini seçmek olasıdır.



Şekil 2.1: Koordinat sistemi baz değişimi

Herhangi bir koordinat sistemi için baz vektörler diğer bir koordinat sistemindeki baz vektörlerinin lineer süperpozisi olarak gösterilebilir. CS koordinat sisteminden CS' koordinat sistemine dönüşümü izleyen CS' sisteminden CS'' sistemine dönüşümü,

$$e''_k = B_k^j e'_j = B_k^j A_j^i e_i = (BA)_k^i e_i \quad 2.2$$

eşitliklerinde görülen dönüşümlerle kolaylıkla hesaplanır. V_N uzayının baz vektörlerinin her kümesi tekil olmayan $N \times N$ matris tarafından bir diğer koordinat sistemine bağlanır:

$$e'_j = A_j^i e_i \quad e''_k = B_k^j e'_j \quad e''_k = C_k^i e_i. \quad 2.3$$

Bu tekil olmayan bir ters matrise sahip olmalıdır.

R_N, C_N, Q_N vektör uzaylarındaki baz değişimlerini içine alan $N \times N$ matris gruplarına reel sayılar için $Gl(N, r)$, kompleks sayılar için $Gl(N, c)$, kuarterniyonlar için $Gl(N, q)$ genel lineer grupları denir.

2.1.2. Kovaryans ve Kontravaryans

$\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ baz vektörleriyle CS koordinat sistemine göre $v \in V_N$ vektörünün temsili;

$$v = \sum v^i e_i \quad 2.4$$

şeklinde olur. Burada v^i ler V_N uzayının cismindeki skalerlerdir. v^i skalerleri CS koordinatlarına göre v vektörünün koordinatlarıdır.

$$e'_j = A_j^i e_i \quad 2.5$$

eşitliği orijinal baz vektörlerinin CS' koordinat sisteminin $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_N\}$ bazına bağlı gösterir. Yeni koordinat sisteminde v vektörünün temsili,

$$v = v'^j e'_j = v'^j A_j^i e_i = v^i e_i \quad 2.6$$

olur. Bu eşitlik;

$$(v'^j A_j^i - v^i) e_i = 0 \quad 2.7$$

olarak da ifade edilebilir. e_i baz vektörleri lineer bağımsız olduklarından eşitlikteki her bir e_i vektörü birbirlerini etkilemeden yok olurlar ve eşitlik,

$$v'^j A_j^i = v^i \quad 2.8$$

olur. Ters dönüşüm CS' koordinat sisteminin $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_N\}$ bazından CS koordinat sisteminin $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ bazına olur :

$$e' = Ae \quad v = v'A \quad v' = vA^{-1} \quad 2.9$$

Dönüşüm baz vektörlerine dayanarak yapıldığından, dönüşüm altında baz vektörleri kovaryans yolla değişirler. Herhangi bir vektörün koordinatları veya bileşenleri kontravaryant (veya kontragradyent) yolla dönüşürler. Genelde, $e' = Ae$, $v' = vA^{-1}$ gibi tersine dönüşen özelliklerinin herhangi bir parçası kovaryant veya kontravaryant yolla dönüşür.

2.2. Hacim Koruyan Gruplar

2.2.1. Direkt Toplamlar

Direkt toplam V_N^1 ve V_N^2 vektör uzaylarının yeni bir vektör uzayı oluşturmak üzere kullanılır. V_N^1 uzayı için baz vektörleri $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ ve V_N^2

uzayı için baz vektörleri $\{f_1, f_2, \dots, f_{N'}\}$, $V_N^1 \oplus V_{N'}^2$ direkt vektör uzayı toplamı için baz vektörleri $\{e_1, \dots, e_N; f_1, \dots, f_{N'}\}$ dir.

$u \in V_N^1$ ve $v \in V_{N'}^2$ vektörleri $\{e_i\}$ ve $\{f_j\}$ baz vektörlerine göre $\{u^i\}$ ve $\{v^j\}$ bileşenlerine sahip olduklarından u ve v vektörlerinin her biri $\{e_1, \dots, e_N; f_1, \dots, f_{N'}\}$ baz vektörlerine göre;

$$\begin{array}{ccc} u \in V_N^1 & v \in V_{N'}^2 & V_N^1 \oplus V_{N'}^2 \\ \{u^1, \dots, u^N\} & & \{u^1, \dots, u^N; 0, \dots, 0\} \end{array} \quad 2.10$$

$$\begin{array}{ccc} & \{v^1, \dots, v^{N'}\} & \{0, \dots, 0; v^1, \dots, v^{N'}\} \end{array} \quad 2.11$$

şeklinde verilen bileşenlerle $V_N^1 \oplus V_{N'}^2$ doğrudan toplam uzayında vektörler olarak kurulabilirler.

Her bir V_N^1 ve $V_{N'}^2$ vektör uzayının baz vektörlerinin

$$e'_i = A_i^r e_r \quad e' = Ae \quad 2.12$$

$$f'_j = B_j^s f_s \quad f' = Bf \quad 2.13$$

değişimi $V_N^1 \oplus V_{N'}^2$ vektör uzayı toplamındaki bazın değişimine neden olur.

$$\begin{array}{ccc} e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} i. \text{ satır} \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ - \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{array} & f_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} j. \text{ satır} \\ \cdot \\ 0 \\ - \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ j \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{array} & \end{array} \quad 2.14$$

kolon vektör bazlarının dönüşümü $V_N^1 \oplus V_{N'}^2$ vektör uzayı bazının dönüşümü

$$\begin{array}{c} \overbrace{N} \\ \underbrace{N'} \end{array} \left\{ \begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & B \end{array} \right\} \quad 2.15$$

matris yapısına sahiptir. Bu yapıya blok-köşegen yapı denir.

G_i grubu V^i uzayı bazının olası tüm dönüşümlerini içeren bir grupsa dönüşüm yasasıyla $V_N^1 \oplus V_{N'}^2$ vektör uzayı içindeki bazın genel dönüşümü $G_1 \oplus G_2$ doğrudan toplamının bir elemanıdır. Yukarıdaki blok-köşegen dönüşümü $V_N^1 \oplus V_{N'}^2$ vektör uzayı içindeki bazın olası tüm değişimleri grubunun bir altgrubudur.

İki vektör uzayı veya grubun direkt toplama tanımı üç veya daha fazla uzayın direkt toplamı formasyonuna bağlıdır.

Direkt toplam düşüncesi vektör uzayları için çok sık olarak kullanılsa da gruplar için kullanılmaz.

2.2.2. Direkt Çarpımlar

$V_N^1 \otimes V_{N'}^2$ direkt çarpım uzayı için NN' adet $\{e_i \otimes f_j\}$ ($i=1, \dots, N; j=1, \dots, N'$) baz vektörü vardır. $V_N^1 \otimes V_{N'}^2$ direkt çarpım vektör uzayındaki keyfi bir ξ vektörü $\{e_i \otimes f_j\}$ baz vektörlerine göre ξ^{ij} bileşenlerine,

$$\xi = \sum_i^N \sum_j^{N'} \xi^{ij} e_i \otimes f_j \quad 2.16$$

şeklinde sahip olur. Genelde, ξ vektörü bir $\xi^1 \in V_N^1$ vektörü ve bir $\xi^2 \in V_{N'}^2$ vektörünün,

$$\xi \neq \xi^1 \otimes \xi^2 \quad 2.17$$

çarpımı olarak kurulamaz. Bununla beraber, ξ vektörü hep direkt çarpımın bir süperpozisyonu olarak kurulabilir.

V_N^1 ve $V_{N'}^2$ vektör uzayları içindeki bazlarının $e' = Ae$ ve $f' = Bf$ değişimi direkt çarpım uzayının bazının değişimine neden olur:

$$e'_i \otimes f'_j = \left(\sum_r A_i^r e_r \right) \otimes \left(\sum_s B_j^s f_s \right) = \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^{N'} A_i^r B_j^s (e_r \otimes f_s) \quad 2.18$$

Bu dönüşümler NN' -boyutlu vektör uzayındaki tüm olası dönüşümler grubunun bir $G_1 \otimes G_2$ direkt çarpım altgrubunu oluşturur. $G_1 \otimes G_2$ grubu Kronecer çarpımı veya tensör çarpım grubu olarak da bilinir.

2. dereceden tensör bir vektördür. Bir tensör, bir doğrudan çarpım vektör uzayının bir elemanıdır. Tensör herhangi bir vektörün tüm özelliklerine sahiptir.

Bir spinör kompleks 2 – boyutlu vektör uzayında bir vektördür.

$$e'_i \otimes f'_j = \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^{N'} A_i^r B_j^s (e_r \otimes f_s) \quad 2.19$$

bazının değişimi bir tensör olan spinör bileşenlerini;

$$\xi^{rs} = \sum_i \sum_j \xi'^{ij} A_i^r B_j^s \quad 2.20$$

şeklinde değiştirir.

Çarpım uzayının dönüşümü sırasında $\{e_i \otimes f_j\}$ baz vektörleri kovaryant, ξ^{ij} bileşenleri ise kontravaryant yolla dönüşürler.

İki vektör uzayı veya grubun direkt çarpımıyla yeni vektör uzayı veya grupları oluşturma yöntemi, üç veya daha fazla vektör uzayı veya grubu içeren doğrudan çarpıma hemen genelleştirir. Fiziksel uygulamalarda sık sık bir vektör uzayının iki veya daha fazla kez kendisiyle doğrudan çarpımıyla ilgilenilir.

$$\{e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_r}\} \quad i_j = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, r \quad 2.21$$

N^r tane baz vektörü $V_N \otimes V_N \otimes \dots \otimes V_N$ doğrudan çarpım uzayının içindedir.

V_N uzayı içindeki,

$$e'_j = A_j^i e_i \quad e''_k = B_k^j e'_j \quad 2.22$$

bazılarının dönüşümü altında direkt çarpım uzayının bazının dönüşüm özellikleri,

$$\begin{aligned} e'_{j_1} \otimes \dots \otimes e'_{j_r} &= A_{j_1}^{i_1} \dots A_{j_r}^{i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \\ e''_{k_1} \otimes \dots \otimes e''_{k_r} &= B_{k_1}^{j_1} \dots B_{k_r}^{j_r} e'_{j_1} \otimes \dots \otimes e'_{j_r} = (BA)_{k_1}^{i_1} \dots (BA)_{k_r}^{i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \end{aligned} \quad 2.23$$

şeklinde olur. $V_N \otimes \dots \otimes V_N \equiv (V_N)^r$ tensör çarpım uzayında V_N üzerinde tabanlı bir elemana r . dereceden tensör denir. V_N uzayı bazının dönüşümü $(V_N)^r$ çarpım uzayı bazının dönüşümüne neden olur. V_N uzayının baz dönüşümlerinin grubu $(V_N)^r$ çarpım uzayı bazının $(G)^r$ dönüşüm grubuna kapalılıkla bağlantılıdır.

$$1. B \bullet A \rightarrow (B \bullet A)^r \quad 2.24$$

$$G \text{ injektif} \rightarrow G^r \text{ injektif}$$

$$V_N \text{ sürjektif} \rightarrow (V_N)^r \text{ sürjektif}$$

2. $(G)^r$ dönüşüm grubu içindeki dönüşümler $N^r \times N^r$ matris dönüşümleridir. Bu yüzden, $(G)^r$ dönüşüm grubu G grubunun bir temsili olur. $(V_N)^r$ tensör çarpım uzayının G grubunun r . dereceden tensör çarpım temsili $(G)^r$ dönüşüm grubu için taşıyıcı uzaydır. Basit kompakt Lie gruplarının geniş bir sınıfı için olası tüm temsiller $(G)^r$ dönüşüm grubu tensör çarpım temsillerinden kurulabilir.

2.2.3. Tensör Uzayında Simetrik İndirgeme

$V_N \otimes V_N \equiv (V_N)^2$ formunun 2. sınıf tensör uzayında,

$$s_{ij} = e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i \equiv e_i \vee e_j = +s_{ji} \quad 2.25$$

$$a_{ij} = e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i \equiv e_i \wedge e_j = -a_{ji}$$

baz vektörlerinin sıra değişimi altında simetrik veya antisimetrik olan $e_i \otimes e_j$ baz vektörlerinin lineer kombinasyonlarını oluşturabilir. $\frac{1}{2}N(N+1)$ adet s_{ij} ve

$\frac{1}{2}N(N-1)$ adet a_{ij} baz vektörü V_N uzayındaki $e'_j = A_j^i e_i$ baz dönüşümü altında;

$$s'_{ij} = A_i^m A_j^n s_{mn} \quad 2.26$$

$$a'_{ij} = A_i^m A_j^n a_{mn}$$

dönüşüm özelliklerine sahiplerdir. Birinci ve ikinci indislerin yerlerinin değişmesi grup işleminin (iki nesneli permütasyon grubunun P_2 işlemi) uygulanmasıyla simetrikleştirilmiş s_{ij} ve a_{ij} vektör bileşenleri ± 1 katsayılarıyla çarpılmışlardır. Bu özellik simetrikleştirilerek kurulmuş baz için prosedür olarak kullanılabilir. Özellikle, \mathfrak{S} matrisi P_2 işlemün özdeşliğini ve 2.25 denklemini değişim işlemini temsil ederse,

$$\acute{s}_{ij} = \{\mathfrak{S} + (+1)(12)\} e_i \otimes e_j = e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i \quad 2.27$$

$$a_{ij} = \{\mathfrak{S} + (-1)(12)\} e_i \otimes e_j = e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i \quad 2.28$$

eşitliklerine sahip olunur. Bu iki grup işleminin baz vektörlerine etkisi çizelgede görünüyor:

Grup işlemu		Baz vektörler	
		s_{ij}	a_{ij}
\mathfrak{S}	$\begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \downarrow & \downarrow \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$	+1	+1
(12)	$\begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \swarrow & \searrow \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$	+1	-1

Çizelge 2.1: Grup işleminin baz vektörlere etkisi

$e_i \vee e_j$ ve $e_i \wedge e_j$ simetrikleştirilmiş bazlarına göre $e'_i = B_i^r e_r$ dönüşümüyle oluşturulmuş $(V_N)^2$ vektör uzayı bazının,

$$B \rightarrow \Gamma(B) = \begin{pmatrix} S(B) & 0 \\ 0 & A(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_i \vee e_j \\ e_i \wedge e_j \end{pmatrix} \quad 2.29$$

dönüşümü bir doğrudan toplam yapısı olduğunu farz eder. Burada $S(B)$, B 'nin 2.dereceden simetrik matris temsili, $A(B)$, B 'nin 2.dereceden antisimetrik matris temsilidir.

r .dereceden $(V_N)^r$ tensör uzayındaki altuzayların simetrikleştirilme yöntemi P_r permütasyon grubu ve temsillerinin düşüncesiyle gözlenir. Bununla beraber, $(V_N)^r$ tensör uzayının iki belirli altuzay kolayca kurulur. Bu uzaylar $e_{i_1} \vee \dots \vee e_{i_r}$ baz vektörleriyle tam simetrik ve $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ baz vektörleriyle tam antisimetrikler.

Simetrikleştirilmiş baz vektörlerinin kurulması için;

$$\left. \begin{array}{l} e_{i_1} \vee \dots \vee e_{i_r} \\ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \end{array} \right\} = \sum_{\substack{P_r \text{deki} \\ \text{tüm elemanlar}}} \sigma(\pm 1)^\sigma e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \quad 2.30$$

yöntemi izlenir. Burada σ , P_r permütasyon grubunun bir grup işlemidir. σ , P_r permütasyon grubunun $P_{i,i+1} = (i, i+1)$ bitişik dönüşüm bazından yapılabilir. P_r permütasyon grubunun her bir bazına 1×1 matris temsiline (± 1) atanmasıyla $(V_N)^r$ tensör uzayının tam simetrik ve tam antisimetrik altuzayları kurulur. σ permütasyon işlemi olduğunda üzerindeki bağ komşu dönüşümlerin tek veya çift sayılardan yapılır, $(-)^{\sigma}$, $+1$ veya -1 'dir.

$e_i \otimes e_j \otimes e_k$ baz vektörlerine yukarıdaki denklemin uygulanmasıyla $(V_N)^3$ uzayının simetrik (antisimetrik) altuzayları için,
 $(e_i \otimes e_j \otimes e_k + e_j \otimes e_k \otimes e_i + e_k \otimes e_i \otimes e_j) \pm (e_i \otimes e_k \otimes e_j + e_j \otimes e_i \otimes e_k + e_k \otimes e_j \otimes e_i)$
lineer kombinasyonları bulunur.

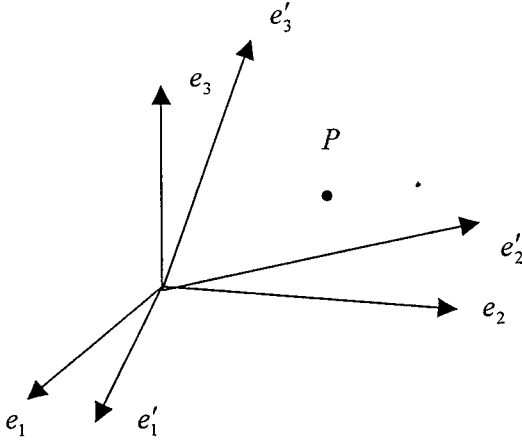
$(V_N)^r$ tensör uzayının tam simetrik ve tam antisimetrik altuzaylarında bir çok bağımsız baz vektörün olması, $(V_N)^r$ tensör uzayının baz grubunun genel dönüşümünün r . dereceden tam simetrik ve tam antisimetrik tensör çarpımı temsillerinin taşıyıcı uzaylar için boyutları nelerdir? sorusu, simetrik uzaylar için Bose-Einstein istatistiğine antisimetrik uzaylar için Fermi-Dirac istatistiğine denktir. Tam simetrik ve tam antisimetrik altuzaylar ve temsilleri çok ilginçtir.

2.2.4. Tam Simetrik Altuzaylar, Fonksiyonların Açılımı

$x = x^i e_i \in V_N$ vektörünün kendisiyle doğrudan çarpımı $x \otimes x$, $(V_N)^2$ uzayının tam simetrik altuzayı ile,

$$x \otimes x = \sum \frac{1}{(1 + \delta_{ij})!} x^i x^j e_i \vee e_j \quad 2.31$$

şeklinde açılımı tamamen yanlıştır. x vektörünün r .kati olan tensör $(V_N)^r$ tensör uzayının tam simetrik altuzayına açılımı yanlıştır. $e_{i_1} \vee \dots \vee e_{i_r}$ bazlarına göre $(x)^r$ tensörünün bileşenleri $j_1 + \dots + j_N = r$ olmak üzere $(x^1)^{j_1} (x^2)^{j_2} \dots (x^N)^{j_N}$ şeklindedir. Bu polinomlar V_N uzayı üzerinde tanımlanmış tüm analitik fonksiyonların kümesi için bir baz oluşturur.



Şekil 2.2: p noktasının konumu

R_N uzayının her p noktasında tanımlı f fonksiyonunun p noktasındaki değeri $f(p)$, fonksiyon analitik olduğunda s koordinat sistemindeki p noktasının koordinatlarının bir güç serisi olarak açılabilir:

$$f(p) = f^s[x(p)] \quad 2.32$$

p noktasının değeri, s koordinat sisteminden s' koordinat sistemine bir dönüşüm olduğunda değiştiğinden fonksiyonun değeri de değişmek zorundadır.

$$f(p) \equiv f^s[x(p)] \equiv f^{s'}[x'(p)] \equiv f(p) \quad 2.33$$

s koordinat sisteminde R_N uzayı üzerinde tanımlanmış reel-değerli analitik skaler $f(x^1, \dots, x^N)$ fonksiyonu p noktasının R_N uzayı koordinatları x^i olmak üzere e_i bazına göre açılımı;

$$f^s(x) = f_0^s + x^i f_i^s + \frac{1}{2} x^i x^j f_{ij}^s + \dots \quad 2.34$$

şeklindedir. x^i bileşenleri ve kuvvetleri, R_N uzayı üzerinde tanımlı reel-değerli analitik fonksiyon uzayı için baz oluşturur. $f_{ijk\dots}$ 'lar r .dereceden çeşitli tam simetrik uzaylardaki $x^i x^j x^k$ baz vektörlerinin çarpım koordinatlarıdır. $f_{ijk\dots}^s$ koordinatları ayrıca,

$$f_0^s \equiv f^s(0) \quad 2.35$$

$$f_{ijk\dots}^s \equiv \left. \frac{\partial^r f^s}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k \dots} \right|_{x=0}$$

olarak yazılabilir.

R_N uzayındaki baz değişiminin,

$$e'_i = A_i^r e_r \quad 2.36$$

bağıntısıyla yapıldığı farz edildiğinde f fonksiyonu tanımlı ve $p \in R_N$ noktasında belirli bir değere sahiptir, koordinat sistemini hesaba katmadan R_N uzayı içinde seçilebilir. S' koordinat sisteminde fonksiyonun yapısı p noktasında benzer değerlerin:

$$f^{S'}(p) = f_0^{S'} + x'^i f_i^{S'} + \frac{1}{2} x'^i x'^j f_{ij}^{S'} + \dots \quad 2.37$$

şeklinde olduğunu kabul eder.

x^i koordinatları e_i bazından kontravaryant, $f_{ij\dots}$ koordinatları $x^i x^j$ ye kontravaryant yolla dönüşürler ve böylece $e_i \vee e_j \vee \dots$ olarak kontravaryant ile benzer yolla,

$$\begin{aligned} x^i &= x'^j A_i^j \\ A_j^i &= \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \end{aligned} \quad 2.38$$

olduğundan fonksiyon için ayrıca,

$$f_{ij\dots}^{S'} = A_i^r A_j^s \dots f_{rs\dots}^S \quad 2.39$$

dönüşümüne sahip olunur. Bu durum genel bir formda,

$$\left. \frac{\partial^r f^{S'}}{\partial x'^i \partial x'^j \dots} \right|_0 = \frac{\partial x^r}{\partial x'^i} \frac{\partial x^s}{\partial x'^j} \dots \left. \frac{\partial^r f^S}{\partial x^r \partial x^s \dots} \right|_0 \quad 2.40$$

olarak yazılır. R_N uzayındaki bazın birbirini takip eden iki değişimi;

$$\begin{aligned} e'_j &= A_j^i e_i \quad x^i = x'^j A_j^i \quad A_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \\ e''_k &= B_k^j e'_j \quad x'^j = x''^k B_k^j \quad B_k^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x''^k} \end{aligned} \quad 2.41$$

şeklinde olur. Ayrıca fonksiyon için,

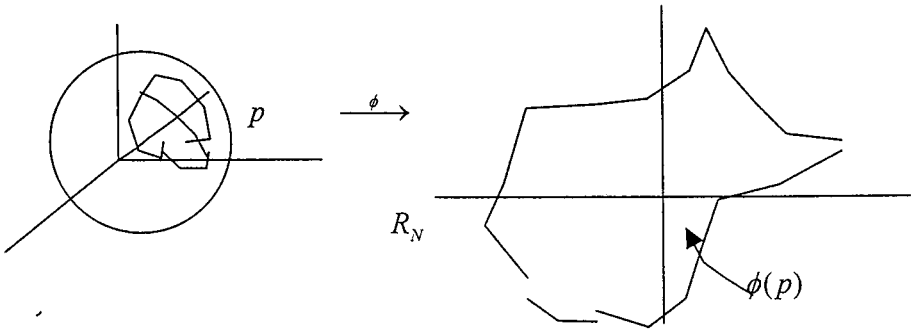
$$\begin{aligned} f_{ij\dots}^{S''} &= \left. \frac{\partial^r f^{S''}}{\partial x''^i \partial x''^j \dots} \right|_0 = \left(\frac{\partial x'^k}{\partial x''^i} \frac{\partial x^u}{\partial x''^j} \right) \left(\frac{\partial x'^l}{\partial x''^j} \frac{\partial x^v}{\partial x''^l} \right) \dots \left. \frac{\partial^r f^S}{\partial x^u \partial x^v \dots} \right|_0 \\ &\equiv \left. \frac{\partial x^u}{\partial x''^i} \frac{\partial x^v}{\partial x''^j} \dots \frac{\partial^r f^S}{\partial x^u \partial x^v \dots} \right|_0 \end{aligned} \quad 2.42$$

bağıntısı bulunur. Bu durum matematiksel analizde zincir kuralı olarak bilinir. Basitçe belirtilirse,

$$B_k^j A_j^i = C_k^i \Rightarrow \left. \frac{\partial x'^j}{\partial x''^k} \right|_0 \left. \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right|_0 = \left. \frac{\partial x^i}{\partial x''^k} \right|_0 \quad 2.43$$

bağıntısı yerine getirilmiştir. Buradaki sıfır S ve S' koordinat sistemlerinin orijini ve (x^1, x^2, \dots, x^N) ve $(x'^1, x'^2, \dots, x'^N)$ 'ler S ve S' koordinat sistemlerindeki tekil p noktasının koordinatlarıdır.

Bu durum Öklityen R_N uzayı üzerinde değil de 3 boyutlu uzaydaki kürenin 2 boyutlu yüzeyi gibi benzer başka çeşit uzaylar üzerinde tanımlanmış fonksiyonlarla çalışıldığında da oluşur. Standart yöntem bir nokta seçmek ve bu nokta ve komşuluğundaki tüm noktaları uygun boyuttaki R_N uzayının orijin bölgesindeki noktalar üzerine birebir göndermektir. e_i baz vektörleri R_N uzayında seçilebilir, $\phi(p')$ noktasının x^i koordinatları p noktasının komşuluğundaki p' noktasında tanımlanmış herhangi bir fonksiyon için bir ifade oluşturabilir. p noktasının yakın komşuluğunda $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 'lere R_N uzayındaki e_i baz vektörleri gibi benzer dönüşüm özelliklerine sahip olduklarından p' noktasındaki teğet vektör uzayı denir.



Şekil 2.3: ϕ gönderimi p noktasını ve yakın komşuluğunu R_N uzayı orjininin yakın komşuluğuna gönderir. ϕ gönderimi yakınlık düşüncesini korur. Bu durum yerel izomorfizmdir.

Matematiksel analizin iki temel teoremi, basit düşüncelerin Öklityen olmayan uzaylara bağlanmalarıdır. Lineer R_N ve V_N vektör uzayları için bunlarla karşılaşıldı.

$$\frac{\partial x'^j}{\partial x''^k} \frac{\partial x^i}{\partial x''^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x''^k} \quad 2.44$$

zincir kuralı birbirini takip eden tekil olmayan dönüşümlerin grup özelliklerinin bir ifadesidir. Ters fonksiyon veya kesin fonksiyon teoremi $x^i = x^i(x'^1, \dots, x'^N)$

ve $\left\| \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right\|_p \neq 0$, $x'^j = x'^j(x^1, \dots, x^N)$ ters dönüşümünün var olduğunu

(p noktasının komşuluğunda kurulmuş olabilir) ve her grup işleminin bir terse sahip olduğunu ifadesi olduğunu söyler.

2.2.5. Tam Simetrik Altuzaylar

$(V_N)^r$ uzayının tamamen antisimetrik altuzayı $\binom{N}{r} = \frac{N!}{r!(N-r)!}$ baz

vektörleri tarafından karışlanmıştır.

Özellikle $r = N$ için bu altuzayda yalnız bir

$$e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_N \quad 2.45$$

baz vektörü vardır. Bu vektör tam simetriktir: bu bazın iki komşu vektörünün değişimiyle (-1) multipleleri,

$$e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge \dots \wedge e_N = -e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_N \quad 2.46$$

şeklinde olur. 2.45 denkleminde verilen baza ayrıca V_N uzayındaki $\{e_1 \dots e_N\}$ bazıyla ortaklanmış hacim elemanı denir. Bazın keyfi,

$$e'_i = A_i^j e_j \quad 2.47$$

değişimi altında yeni $e'_1 \wedge \dots \wedge e'_N$ bazı, $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_N$ bazının;

$$e'_1 \wedge \dots \wedge e'_N = \det\|A\| e_1 \wedge \dots \wedge e_N \quad 2.48$$

şeklinde bir multiplesidir. $\det\|A\|$ faktörüne dönüşümün determinanı denir.

$$\det\|A\| = \sum_{\substack{\text{tüm} \\ \sigma \in P_N}} (\pm) \sigma A_1^{i_1} A_2^{i_2} \dots A_N^{i_N} \quad 2.49$$

Toplama tüm $\sigma \in P_N$ grup işlemleri üzerinden yapılır. σ 'lar kendileri arasındaki i_j 'leri değiş-tokuş ederler. (\pm) seçime bağlıysa da σ , P_N uzayının jeneratörleri veya bazlarının tek veya çift sayısından kurulmuştur.

$GL(N)$ grup elemanlarının altkümesi hacmi korur,

$$e'_1 \wedge \dots \wedge e'_N = e_1 \wedge \dots \wedge e_N \quad 2.50$$

bağıntısı $\det\|A\| = +1$ ile tanımlanmış bir grup biçimlendirir. R_N ve C_N uzaylarındaki dönüşümlerin hacim-koruyan gruplarına özel lineer gruplar denir ve $SL(N, r)$ ve $SL(N, c)$ olarak belirtilir.

$GL(N, c)$ grubu iki toplamsal altgruba sahiptir: reel determinantla $SL_1(N, c)$ ve birim modüllerinin kompleks determinantıyla $SL_2(N, c)$. $GL(N, q)$ grubu ünitlek modüllerinin determinantlı matrislerinin yalnız bir ünimodüler $SL(N, q)$ alt grubuna sahiptir. Bu durum kuaterniyon alanlarının nonkomütatifliğinden ileri gelir.

2.3. Metrik-Koruyan Gruplar

2.3.1. Metrik

Klasik (matris) gruplarının ayrıntılı olarak sınıflandırılması ve tanımlaması kesinlikle metrik toplam düşüncesini ortaya koyar.

V vektör uzayı üzerindeki metrik fonksiyonu, vektör uzayıyla birleşik F cisminin bir sayısı içindeki vektör çiftlerinin bir gönderimidir.

$$(v_1, v_2) = f \quad v_1, v_2 \in V; f \in F \quad 2.51$$

Bu gönderim,

$$(v_1, \alpha v_2 + \beta v_3) = \alpha(v_1, v_2) + \beta(v_1, v_3) \quad \text{ve} \quad 2.52$$

$$(\alpha v_1 + \beta v_2, v_3) = (v_1, v_3)\alpha + (v_2, v_3)\beta \quad \text{veya} \quad 2.53$$

$$(\alpha v_1 + \beta v_2, v_3) = (v_1, v_3)\alpha^* + (v_2, v_3)\beta^* \quad 2.54$$

koşullarına uyar. 2.52 ve 2.53 şartlarına uyan metrikler bilineer, 2.52 ve 2.54 şartlarına uyan metrikler sesquilineer metriklerdir. Metrik baz vektör çiftleri ve iççarpım işlemi üzerinde,

$$(e_i, e_j) = g_{ij}$$

$$(v, u) = (v^i e_i, u^j e_j) = u^j g_{ij} v^{i*} \quad 2.55$$

bağıntılarıyla tam olarak belirtilir. $e'_i = A_i^r e_r$ baz değişimi altında g_{ij} metrik fonksiyonunun dönüşüm özellikleri,

$$g'_{ij} = (e'_i, e'_j) = (A_i^r e_r, A_j^s e_s) = A_j^s g_{rs} A_i^{r*} \quad 2.56$$

şeklinde verilir.

Reel vektör uzayları için g_{ij} metrik fonksiyonu, $e'_i \otimes e'_j$ işlemiyle,

$$e'_i \otimes e'_j = A_i^r A_j^s e_r \otimes e_s$$

$$g'_{ij} = A_i^r A_j^s g_{rs} \quad 2.57$$

şeklinde özdeş dönüşüm özelliklerine sahiptir.

Reel vektör uzayları için metrik 2.dereceden tensördür. Kompleks vektör uzayları için bilineer metrik ayrıca 2.dereceden kovaryant tensör dönüşüm özelliklerine sahiptir. Metriğin diğer tanımları çoğu kez bir veya daha fazla toplama özelliğinin metrik fonksiyonunu sağlamak zorunda olmasıyla düzenlenmiştir. Bir simetri gerekliliği bazen,

$$(u, v) = \pm (v, u); \quad g_{ij} = \pm g_{ji} \quad 2.58$$

$$(u, v) = \pm (v, u)^*; \quad g_{ij} = \pm g_{ji}^* \quad 2.59$$

bağıntılarıyla düzenlenir.

$$(v, v) \geq 0 \quad (v, v) = 0 \Rightarrow v = 0 \quad 2.60$$

şeklinde verilen pozitif kesinlik vardır.

Bilineer metrikler indis indirmek veya indis kaldırmak için de kullanılır. e_i bazına sahip S koordinat sisteminde,

$$x_i = x^j g_{ij} \quad 2.61$$

özdeşliğini kurulduğunda. S koordinat sisteminin $e'_i = A_i^r e_r$ baz dönüşümüyle S' koordinat sistemine dönüşmesiyle, özdeşlik S' sisteminde,

$$x'_i = x'^j g'_{ij} = x^t A^{-1j}_t A_j^s g_{rs} A_i^r = (x^s g_{rs}) A_i^r \quad 2.62$$

şeklinde olur. x_i özdeşliği kovaryant dönüşüm özelliklerine sahiptir. g_{ij} metriği

$x_i = x^j g_{ij}$ kovaryant bileşenleri içindeki x^j kontravaryant vektör bileşenleriyle kullanılırlar.

$$\det \|g_{ij}\| \neq 0 \quad 2.63$$

olduğunda g_{ij} metriği tekil olmadığında yapı dışına taşınabilir ve bu durumda g_{ij} matrisi,

$$(g^{-1})_{ij} = g^{ij} \quad 2.64$$

şeklinde olan bir terse sahip olur. g^{-1} metriğinin g^{ij} matris elemanları üniksizliği sağlayarak kurulabilirler. Ters metrik, g metriğinin bir matris olarak $\|g\| \neq 0$ olması durumu fikriyle kolayca kurulur. g matrisi $GL(n, -)$ genel lineer gruplarının elemanıdır. Kovaryant x_i ve kontravaryant x^j bileşenleri,

$$x^j = g^{ij} x_i \quad 2.65$$

eşitliğiyle bağlı olduklarından bu durum kolayca görülür.

2.3.2. Metrik Çeşitleri

Toplamsal yapı, metriğin biçiminde, F cismi üzerindeki N – boyutlu vektör uzayı için zorlayıcı olmadığından F cismi üzerinde denk olan tüm N – boyutlu vektör uzayları için tamamıyla doğru değildir. Bir çok metrik çeşidinin olduğu gibi, F cismi üzerine tanımlı bir çok N – boyutlu vektör uzayı olacaktır.

Keyfi bir metrik, simetrik ve antisimetrik parçaların toplamı olarak yazılabilir:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \tilde{g}_{ij} + \hat{g}_{ij} \\ \tilde{g}_{ij} &= \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}^*) = g_{ji}^* \\ \hat{g}_{ij} &= \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji}^*) = -g_{ji}^* \end{aligned} \quad 2.66$$

Burada keyfi metrik kanonik bir biçim içine konulamayacağından, tüm tekil olmayan antisimetrik bilinear ve tüm simetrik sesquilineer metrikler için kanonik biçimler vardır.

1. Bu durum daima

$$\tilde{g}'_{ij} = S_j^s \tilde{g}_{rs} S_i^{r*} = \lambda_i \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad 2.67$$

köşegen biçimi içinde simetrik bir sesquilineer \tilde{g}_{ij} metriğini mecbur kılan $e'_i = S_i^r e_r$ dönüşümünün bulunmasıyla mümkündür. λ_i sayılarının hepsi reeldir. e'_i bazı

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{e'_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} & \lambda_i &\neq 0 \\ f_i &= e'_i & \lambda_i &= 0 \end{aligned} \quad 2.68$$

zorunluluğuyla renormalize edilmiştir. Metrik f_i 'ye göre I_d , $d \times d$ birim matris olmak üzere,

$$\tilde{g}_{kanoniksel} = \begin{pmatrix} +1I_{N_+} & & \\ & 0I_{N_0} & \\ & & -1I_{N_-} \end{pmatrix} \quad 2.69$$

kanonik biçimine sahiptir.

Burada $N_+ + N_0 + N_- = N$ ile (N_+, N_0, N_-) kanonik metriklerinin farklı seçimleri olduğu gibi bir F cismi üzerinde tanımlı sesquilineer metriklerle birçok farklı N -boyutlu vektör uzayları vardır. Bu metrik miktarı

$$\frac{(N+2)!}{N!2!} \quad 2.70$$

tane olur. Metriğin tekil olması isteniyorsa $N_0 = 0$ olmalıdır. Bu durumda $N+1$ farklı V_N vektör uzayı vardır. Metriğin pozitif tanımlı olması isteniyorsa $N_0 = N_- = 0$ olmalıdır. Bu durumda yalnızca bir V_N vektör uzayı olur.

2. \hat{g}_{ij} bilinear, antisimetrik ve tekil değilse bir kanonik formu kontrol eder. Fakat t indisir $(M^t)_{ij} = M_{ji}$ matris transpozunu belirtmek üzere,

$$\|g\| = \|g^t\| = \|-g\| = (-)^N \|g\| \quad 2.71$$

yazılır.

Bu nedenle \hat{g} yalnızca N ler için tekil değildir. Burada $düzN = 2M$ için,

$$e'_i = A_i^r e_r \quad 2.72$$

şeklinde tekil olmayan dönüşümü vardır. Bu dönüşüm \hat{g} metriğini,

$$\hat{g}'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & & \\ & & -\lambda_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & \lambda_M \\ & & & & & -\lambda_M & 0 \end{pmatrix} \quad 2.73$$

şeklinde blok köşegen biçimi içine getirir. Dönüşüm tekrarlanırsa metrik renormalize edilmiş baz vektörleri tarafından bir kanonik biçim içine getirebilir:

$$\begin{aligned} & (f_M, \dots, f_1, f_{-1}, \dots, f_{-M}) \\ & (f_r, f_{-r}) = \text{sign}(r); \quad r = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M \end{aligned} \quad 2.74$$

Diğer tüm iççarpımlar sıfıra eşitlenir.

Bu baza göre V_{2M} uzayının bilinear, tekil olmayan antisimetrik metriği için kanonik biçim,

$$\hat{g}_{kanonik} = \begin{pmatrix} 0 & +1\tilde{I}_M \\ -1\tilde{I}_M & 0 \end{pmatrix} \quad 2.75$$

şeklinde olur. Burada \tilde{I}_d minör köşegeni $+1$, diğer her yeri 0 olan bir $d \times d$ matrisidir:

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad 2.76$$

minör köşegen

majör köşegen

2.3.3. Üniter Weyl Hilesi

(N_+, N_-) izli bir lineer uzay

$$(e_1, \dots, e_{N_+}, e_{N_++1}, \dots, e_{N_++N_-}) \rightarrow (e_1, \dots, e_{N_+}, ie_{N_++1}, \dots, ie_{N_++N_-})$$

bazının yeni kümesinin seçimiyle $(N_+ + N_-, 0)$ metriklili bir uzaya çevrilebilir. Bu dönüşümün sağlanması için reel sayılar cisminin dışına çıkılması gereklidir. Örneğin özel relativitenin uzay-zamanı reel kontravaryant (x, y, z, ct) bazına göre $(+++ -)$ metriğine, (x, y, z, ict) bazına göre $(++++)$ metriğine sahiptir. Karışık bir metriktir pozitif bir metriğe dönüşüme Weyl üniter hilesi denir. Bu hile ilk kez Minkowski tarafından kullanılmıştır.

2.3.4. Fonksiyon Uzaylarındaki Metrikler

Kendi noktalarının kümesi veya uzayı üzerinde tanımlı fonksiyonların kümesi bir lineer vektör uzayı oluşturur. Bu yüzden uzay üzerinde metriğin tanımlama serbestliği vardır. f ve h , reel R_N uzayı üzerinde kompleks değerli fonksiyonlarsa, f ve h fonksiyonlarının iççarpımı için,

$$(f, h) = \iint dp dp' f^*(p) g(p, p') h(p') \quad 2.77$$

şeklinde olağan tanımı yapılır. Vektör uzayı sonsuz boyutlu olduğunda g metriğinin kesikli kullanımı yapılır.

$$e_p = \delta(x - p) \quad 2.78$$

delta fonksiyonları uygun bir baz kümesidir. Bu küme $g(p, p') = \delta(p, p')$ köşegen metriğinin seçiminde olağandır. R_N uzayındaki baz sistemlerine göre iççarpım,

$$(f, h) = \int \dots \int dx^1 \dots dx^N f^*(x) h(x) \quad 2.79$$

olur. Bundan başka küme için köşegen olmayan metrikler içinden bir simetrik metrik seçmekte çok olağandır.

$$g(x, y) = e^{-\sum_{i=1}^N \frac{(x^i - y^i)^2}{\lambda}} \quad 2.80$$

böyle bir metriğe örnektir.

Bu şartlar altında metrik fonksiyonu yerel değildir ve

$$(f, h) = \int d^N x \int d^N y f^*(x) e^{-\frac{(x-y)^2}{\lambda}} h(y) \quad 2.81$$

analitik yapısına sahiptir. Yerel olmayan metriklere biçim faktörleri denir ve bu metrikler kuantum teorisinde kullanılırlar.

2.3.5. Metrik Korunumlu Gruplar

V_N uzayı bazının dönüşümlerinin altkümesi matematiksel yapısı bir metrik tarafından oluşturulan $GL(N, -)$ grubunun bir alt grubunu korur. Bu altküme elemanlarının grup postülalarını sağladıklarını kontrol edildiğinde

a) kapalılık:

$$\begin{aligned} g'_{kl} &= A_l^j g_{ij} A_k^{*i} = g_{kl} \\ g''_{mn} &= B_n^l g'_{kl} B_m^{*k} = g'_{mn} = g_{mn} \\ g''_{mn} &= B_n^l g'_{kl} B_m^{*k} = g'_{mn} = B_n^l A_l^i g_{ij} A_k^{*i} B_m^{*k} = g_{mn} = (BA)_n^j g_{ij} (BA)_m^{*i} \end{aligned} \quad 2.82$$

b) birleşme: Birleşme orijinal grubu sabit tuttuğundan altküme de sabit tutar.

c) özdeşlik: Özdeşlik elemanı alt kümenin de elemanıdır.

d) ünik ters : A'nın metrik invaryantı sağladığı düşünülürse B diye bir terse sahiptir. Bu ayrıca metrik invaryantı sağlar:

$$g_{kl} = A_l^i g_{ij} A_k^{*i} \quad 2.83$$

$$B_s^l g_{kl} B_r^{*k} = B_s^l A_l^j g_{ij} A_k^{*i} B_r^{*k} = (BA)_s^j g_{ij} (BA)_r^{*i} = \delta_s^j g_{ij} \delta_r^i = g_{rs} \quad 2.84$$

şeklinde kontrol edildiğinde teorem tüm metrik korunumlu reel ve kompleks matris grupları için geçerlidir. Ayrıca, iki kuaterniyon,

$$(q'q'')^* = (q'')^*(q')^* \quad 2.85$$

eşitliğine uyduğundan teorem sesquilineer metrikleri koruyan kuaterniyon grupları içinde geçerlidir. İki kuaterniyon genellikle,

$$q'q'' \neq q''q' \quad 2.86$$

şeklinde komüt olmadıklarından teoremdeki,

$$A_k^i B_r^k \neq B_r^k A_k^i = (BA)_r^i \quad 2.87$$

eşitliği şeklinde olur. Kuaterniyonların komüt olmamaları bilineer metrikler ve kuaterniyon matrisleri geçerli değildir, fakat bilineer metrikleri koruyan gruplar $GL(N, q)$ grubunun birleşik altgruplarında geçerliliği olasıdır.

Bu teorem klasik toplamsal matris gruplarının zengin yapısını geliştirilmesine olanak tanır. Bu matris grupları, tekil olmayan metrikleri koruyan $GL(N, F)$ grubunun matris altgruplarıdır. Bilineer simetrik metrikleri koruyan gruplar ortogonal gruplardır. Bilineer antisimetrik metrikleri koruyan gruplar

simplektik gruplardır. Sesquilinear simetrik metrikleri koruyan gruplar üniter gruplardır.

R_N, C_N, Q_N ($N = N_+ + N_-$) uzayları içindeki (N_+, N_-) metriklerini koruyan ortogonal gruplar sırasıyla $O(N_+, N_-; r), O(N_+, N_-; c), O(N_+, N_-; q)$ gruplarıdır. R_{2N}, C_{2N}, Q_{2N} uzayları içindeki simplektik gruplar $Sp(2N, r), Sp(2N, c), Sp(N, q)$ gruplarıdır. R_N, C_N, Q_N ($N = N_+ + N_-$) uzayları içindeki (N_+, N_-) metriklerini koruyan üniter gruplar sırasıyla $U(N_+, N_-; r), U(N_+, N_-; c), U(N_+, N_-; q)$ gruplarıdır.

1. Reel vektör uzayında bilineer ve sesquilinear metrikler arasında fark olmadığından $U(N_+, N_-; r)$ ve $O(N_+, N_-; r)$ grupları özdeşler.

2. Üniter-simplektik gruplar benzer vektör uzayları üzerinde işleyen üniter ve simplektik grupların kesişimleridir:

$$USp(2N_+, 2N_-) = U(2N_+, 2N_-; c) \cap Sp(2N; c) \quad (N = N_+ + N_-)$$

Bu gruplar kuaterniyon uzayındaki üniter gruplara şeklinde $USp(2N_+, 2N_-) \cong U(N_+, N_-; q)$ izomorfiktirler. Her kuaterniyon sayısı bir 2×2 kompleks matrisiyle temsil edilebileceğinden her kuaterniyon değerli $N \times N$ matrisi kompleks değerli bir $2N \times 2N$ matrisi olur. Özellikle $U(N_+, N_-; q)$ grubu elemanları $U(2N_+, 2N_-; c)$ grubunun elemanları olurlar. 2×2 kompleks matris temsilli kuaterniyonlar keyfi değillerdir. Bu 2×2 kompleks alt matrislerin yapısı $2N \times 2N$ kompleks matrislerinin antisimetrik bilineer metriği koruduğunu ve ayrıca $Sp(2N = 2N_+ + 2N_-; c)$ grubunun elemanları olduğunu gösterir.

3. Pozitif tanımlı metriği koruyan gruplar,

$$1 = \sum_{r=1}^N A_i^r A_i^{*r} = \sum_{r=1}^N |A_i^r|^2$$

eşitliğine uyarlar. Her bir tek A_i^r matris elemanı,

$$0 \leq A_i^r \leq 1$$

şeklinde sınırlıdır. Grubun elemanları baz olarak sınırlı olduklarından bu gruplara kompakt grup denir.

4. Bilineer ve sesquilineer metriklerin simetri veya antisimetri özellikleri ve aralarındaki bağlantı bir tarafta ve klasik gruplar diğer tarafta çizelgede görünüyor.

Tüm basit klasik Lie grupları bir lineer veya sesquilineer metrik korurlar. Bu metrik simetrik veya antisimetriktir.

Metriğin simetri özellikleri	Metriğin fonksiyonel formu	
	Bilineer	Sesquilineer
simetrik	$g_{ij} = +g_{ji}$ ortogonal $O(N_+, N_-; r)$ $O(N_+, N_-; c)$ $O(N_+, N_-; q)$	$g_{ij} = +g^*_{ji}$ üniter $U(N_+, N_-; c)$ $U(N_+, N_-; q) =$ $USp(2N_+, 2N_-)$
antisimetrik	$g_{ij} = -g_{ji}$ simplektik $Sp(2N, r)$ $Sp(2N, c)$ $Sp(N, q)$	

Çizelge 2.2: Metrikler

5. Metrik koruyan gruplar,

$$SI(N, c) \cap U(N, c) = SU(N, c)$$

şeklinde belirtilen özel metrik koruyan gruplar denilen toplam hacim koruyan gruplardır.

6. Her bir $N \times N$ kuaterniyon matris grubuyla $2N \times 2N$ kompleks matris grupları birleşiktir:

$$SI(N, q) = SU^*(2N)$$

$$U(N, q) = USp(2N)$$

$$Sp(N, q) = USp(2N)$$

$$O(N, q) = SO^*(2N)$$

özelliklerine sahip olunur[3].

2.4. Klasik Grupların Özellikleri

2.4.1. Düzgün Matris Grupları

Dikkate alınan şartlar altında $n \times n$ kare matrislerinin grup postülalarını sağladıkları görülür.

Birim eleman,

$$\mathfrak{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$n \times n$ kare özdeşlik matrisidir.

A^{-1} ters elemanın varlığı tekil olmayan matrisler dikkate alınarak,

$$\det|A| \neq 0 \quad 2.88$$

şeklinde bir kısıtlama yapılmasıyla sağlanır.

Matris çarpım yasaları birleşme yasasından çıkarılır.

Bu şartlara uyan matris kümeleri kapalılık özelliğini sağlar.

Sonlu veya sonsuz, kesikli veya sürekli matrisler içeren gruplar reel, kompleks, kuaterniyon elemanlara sahip olabilirler. Reel R^n uzayındaki değişkenler $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kompleks C^n uzayındaki değişkenler $z \equiv (z_1, z_2, \dots, z_n)$ şeklinde oluşurlar. R^n veya C^n uzayında işleyen düzgün $n \times n$ kare matrisi $x \rightarrow x'$ veya $z \rightarrow z'$ dönüşümünü yapar. Fizikte x veya z nin bazı invaryant fonksiyonel formlarına izin veren dönüşüm sınıflarına ilgi duyulur. Örneğin izotropik 3-boyutlu Öklidyen uzayda invaryant olarak $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ formu, 4-boyutlu Lorentzian uzayda invaryant olarak $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ formunu dikkate alan dönüşümlere ilgi duyulur.

Bir A matrisi için sırasıyla ters, transpoze, kompleks eşlenik, Hermityen eşlenik A^{-1}, A', A^*, A^+ olarak belirtilir. Özel matrislerin birkaç özelliği

$$A = A' \quad \text{simetrik matris}$$

$A + A' = 0$	çarpık simetrik matris
$A' A = \mathfrak{S}$	ortogonal matris
$A = A^*$	reel matris
$A = -A^*$	sanal matris
$A = A^+$	Hermityen matris
$A + A^+ = 0$	çarpık Hermityen matris
$A^+ A = \mathfrak{S}$	üniter matris

şeklinde belirtilebilir.

Dikkate alınan bir grubun elemanları tüm düzgün, tekil olmayan 2 dereceli

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ reel matrislerini kapsar. Tekil olmamadan başka,

$$a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21} \quad 2.89$$

şartı sınırsız matrislerin elemanlarının sıralamasını kısıtlar. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matrisinin a_{ij} elemanları,

$$a_{ij} = \delta_{ij} + \alpha_{ij} \quad 2.90$$

şeklinde yeniden yazılabilirler. Buradaki tüm α_{ij} 'ler sıfırsa birim eleman kolayca,

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2.91$$

şeklinde bulunur. α_{ij} , α_{ij} 'nin sürekli bir değişkeni tarafından bağımsız reel parametreler gibi grubun tüm elemanlarını yaratabilir. Parametrelerin sınırsız sınırlaması ancak tekil olmama şartı tarafından genişletme talebiyle sınırlanır. Grubun herhangi bir elemanı α_{ij} parametrelerinin verilen birleşik değerleri tarafından yaratılabilir.

Reel veya kompleks elemanlar içeren düzenli, n dereceli, A matrislerinden oluşan grubun değişkenliği biçimlendirilebilir. Böylece bazı önemli sürekli matris gruplarının bir listesi yapılabilir.

Genel lineer gruplar

n dereceli, düzgün, tersi alınabilir kompleks matrislerin çok geniş bir grubu $GL(N, c)$ lineer kompleks gruptur. Belirli bir matris n^2 eleman tarafından

karakterize edilir. Her bir eleman bir reel ve sanal kısım içerebilir. $2n^2$ kısımların (n^2 reel, n^2 sanal kısım) sürekli değişimi eksiksiz bir matris grubu oluşturacağından grup $2n^2$ boyutlu olur ve $2n^2$ parametreleriyle karakterize edilebilir.

$GL(N, c)$ grubunun elemanları yalnızca reel değerlerle sınırlanırsa bu grubun bir altgrubu olan n^2 parametrelili $GL(N, r)$ grubu bulunur. Açıkça görülüyor ki $GL(N, c)$ grubunun daha başka bir çok altgrubu vardır.

Özel lineer gruplar

$GL(N, c)$ grubunun kompleks matrislerine $+1$ determinanlı olma şartı getirildiğinde $2(n^2 - 1)$ parametreyle karakterize edilen kompleks lineer $SL(N, c)$ grubu bulunur. Reel özel lineer $SL(N, r)$ grubu $(n^2 - 1)$ parametrelidir ve $+1$ determinanlı reel matrisler tarafından oluşturulmuştur. Bu gruplar için,

$$GL(N, c) \supset SL(N, c) \supset SL(N, r)$$

$$GL(N, r) \supset SL(N, r)$$

olduğu açıkça görülüyor. Bazen özel lineer gruplara özel ünimodüler gruplarda denir.

Üniter gruplar

n dereceli üniter A matrisleri,

$$\sum_{i=1}^n z_i z_i^*$$

şeklinde invaryant Hermityen formlarına müsaade eden n^2 parametrelili üniter $U(n)$ grubunun elemanlarını oluştururlar.

A matrislerinin üniterliği,

$$A^+ A = \mathfrak{I}$$

koşulunu gerektirdiğinden a_{ij} matris elemanlarının dizisi,

$$\sum_k a_{ik} a_{kj}^* = \delta_{ij}$$

koşuluyla kısıtlanmıştır ve bu nedenle,

$$|a_{ij}|^2 \leq 1$$

olur. Nitekim, n^2 parametreleri çerçevesinde bu kısıtlamayla sınırlıdır. Bu bir kompakt grup özelliğidir.

$GL(p+q, c)$ matris grubundan,

$$-z_1 z_1^* - \dots - z_p z_p^* + z_{p+1} z_{p+1}^* + \dots + z_{p+q} z_{p+q}^*$$

invariant Hermityen formunu ayırıp $U(p, q)$ şeklinde bir grup oluşturulabilir.

Burada $U(n, 0) \equiv U(0, n) \equiv U(n)$ olarak belirtilmelidir. Bu gruplar için,

$$GL(p+q, c) \supset U(p, q) \quad GL(N, c) \supset U(n)$$

olduğu açıkça görülür.

Özel üniter gruplar

Sadece +1 determinantlı üniter matrisler için bir sınırlama yapıldığında $(n^2 - 1)$ parametrelili özel üniter veya üniter ünimodüler $SU(n)$ grubunu elde edilir. $SU(n)$ grubu için,

$$SU(n) = U(n) \cap SL(N, c)$$

olduğu açıkça görülür. Benzer olarak,

$$SU(p, q) = U(p, q) \cap SL(p+q, c)$$

olur.

$$(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{2n}) \xrightarrow{\varphi} (z_{n+1}^*, \dots, z_{2n}^*, -z_1^*, \dots, z_n^*)$$

şeklinde verilen c^{2n} uzayının φ dönüşümüyle komüt olan $SL(2n, c)$ grubu matrisleri genellikle $SU^*(2n)$ grubu gibi oluşmuş bir grup biçimlendirirler.

Ortogonal gruplar

n dereceli kompleks ortogonal matrislerin grubu $n(n-1)$ parametrelili $O(n, c)$ grubunu biçimlendirirler. $A^t A = \mathfrak{I}$ olduğundan A matrisleri için $|A| = \pm 1$ koşuluna sahip olunur. Bu nedenle $O(n, c)$ grubu iki parça içinde ayrışır ve bir parçadan diğerine bir süreklilik olmaz. +1 determinantlı ortogonal matrisler $O(n, c)$ grubunun $n(n-1)$ parametrelili kompleks ortogonal $SO(n, c)$ alt grubunu oluştururlar. $SO(n, c)$ grubunun matrisleri,

$$\sum_{i=1}^n z_i^2$$

ayrık invariant kompleks kuadratik formunun önemli özelliklerine sahiptir. Bu gruplar için,

$$SO(n, c) = SL(n, c) \cap O(n, c)$$

olduğu açıktır.

Özel ortogonal gruplar

n dereceli reel ortogonal matrislerin kümesi $\frac{n(n-1)}{2}$ parametrelili reel ortogonal $O(n, r)$ grubunu oluşturur. n dereceli $+1$ determinantlı reel ortogonal matrislerin kümesi ise özel ortogonal $SO(n, r)$ grubunu oluşturur. $O(n, r)$ grubu da iki bağlantısız parça içerir ve parçalar arasında süreksizlik vardır. Bu parçalardan biri $SO(n, r)$ grubudur. Reel özel ortogonal matrisler,

$$\sum_{i=1}^n x_i^2$$

invariant reel kuadratik formuna ayrılırlar.

$$-\sum_{i=1}^p x_i^2 + \sum_{j=p+1}^q x_j^2$$

invariant kuadratik formuna ayrılan $SL(p+q, r)$ grubu matrisleri $SO(p, q)$ grubunun elemanları olan matrisleri oluştururlar.

Sonuç olarak,

$$-z_1 z_{n+1}^* + z_{n+1} z_1^* - \dots - z_n z_{2n}^* + z_{2n} z_n^*$$

çarpık Hermityen formuna ayrılan $SO(2n, c)$ grubu matrisleri $SO^*(2n)$ grubu elemanlarını oluştururlar.

Simplektik gruplar

Simplektik gruplar $x \equiv (x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n)$ ve $y \equiv (y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)$ vektörlerinin,

$$\sum_{i=1}^n (x_i y'_i - x'_i y_i)$$

dejenere olmayan invariant çarpık simetrik bilinear formuna ayrılan düzgün kompleks matrislerin $2n(2n+1)$ parametrelili grubudur.

$$Sp(2n) = U(2n) \cap Sp(2n, c)$$

Simplektik gruba üniter simplektik grupta denir. Bu grup $Sp(2n, r)$ grubuna benzer, $n(2n+1)$ parametrelili bir gruptur. Simplektik gruplar yalnızca çift boyutlu uzaylarda ortaya çıkarlar.

Kompleks düzenli A matrisinin eksponansiyel notasyonu sürekli grup teorisinin geliştirilmesinde önemli bir yer tutar. A matrisinin eksponansiyel fonksiyonu,

$$e^A = \mathfrak{I} + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \quad 2.92$$

serisi tarafından tanımlanır. Burada $A^0 = \mathfrak{I}$, n dereceli birim matristir.

A matrisinin eksponansiyel serisi yalnızca A matrisinin a_{ij} matris elemanlarının mutlak değerleri bir üst sınıra sahipse yaklaşık bir seridir. μ , A matrisinin bütün a_{ij} matris elemanları için $|a_{ij}| \leq \mu$ şeklinde bir üst sınır ve a_{ij}^p , A matrisinin elemanları olsun ($0 \leq p < \infty$).

$$|a_{ij}^p| \leq (n\mu)^p$$

olduğu ileri sürüldüğünde $p = 1$ için doğrudur. Ancak a_{ij} matris elemanları sınırlı iseler seri sınırlanmıştır. Bu durum kompakt grup için doğrudur. A ve B komüt iki matris ise;

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

olur. B , n dereceli düzgün bir matris ise;

$$B e^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}$$

olur. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, A matrisinin karakteristik kökleri ise, e^A 'nin karakteristik kökleri,

$$e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}$$

şeklinde olur. $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}$ ün eksponansiyel serisi,

$$e^{A^*} = (e^A)^*, \quad e^{A^t} = (e^A)^t, \quad e^{A^+} = (e^A)^+, \quad e^{-A} = (e^A)^{-1}$$

olağan eksponansiyel fonksiyon özelliklerinin koşullarını yerine getirir. e^A 'nin determinanı $e^{\text{tr}A}$ 'dır. A matrisi çarpık simetrikse, e^A ortogonal çarpık, hermityense e^A üniterdir.

2.4.2. Lie Gruplarının Yerel Özellikleri

2.4.2.1. Grup elemanlarının parametrizasyonu

n dereceli düzgün tekil olmayan tüm matris gruplarının elemanları,

$$A \equiv A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \quad 2.93$$

şeklinde r tane α_i parametresi durumu altında gösterilebilir. \mathfrak{S}_n özdeşlik matrisi ise parametre değerlerinin,

$$\mathfrak{S}_n = A(0,0,\dots,0) \quad 2.94$$

şeklinde değersiz kümesi tarafından karakterize edilir. r tane α_i parametresinin sürekli değişimiyle parçasız grup manifoldu oluşturulabilir.

$GL(N,c)$ grubunun durumunda n^2 boyutlu kompleks Öklityen uzayda etiketli noktalar olan A matrislerinin n^2 elemanları dikkate alınmalıdır. $2n^2$ boyutlu kompleks Öklityen uzayda etiketlenmiş noktalar olan matrislerin n^2 reel ve n^2 sanal bileşenleri dikkate alınır. Öklityen uzayda $2n^2$ tane parametrenin değişimleri bir noktadan diğer bir noktaya sürekli bir geçişi sağlar. $GL(N,c)$ grubunun r parametrelili altgrubunun değişimi $2n^2$ boyutlu Öklityen uzayın r boyutlu alt uzayı tarafından temsil edilir.

2.4.2.2. Bağlantılılık

Bir grubun r parametrelerinin sürekli değişimiyle \mathfrak{S} özdeşlik elemandan keyfi bir A elemanına ulaşıldığında bu elemanlar bağlanmış olurlar. Bağlantı grup parametrelerinin sürekli değişimiyle genelleştirilmiş bir arc fonksiyonu tarafından grup uzayındaki herhangi bir nokta çifti bağlanmasıyla varolur.

$SO(n)$ dönme grubu bağlantılıyken $O(n)$ grubu $+1$ determinantlı matrislerden -1 determinantlı matrislere geçiş sürekli olmadığından bağlantılı değildir. Bu nedenle $O(n)$ grubu iki ayrık parça içerir. Parçalar özdeşlik elemanı ile bağlantılı olarak grup (örneğin $SO(n)$ grubunu) biçimlendirirler.

Özdeşlik elemanına bağlanmış $O(2)$ grubunun $SO(2)$ ayrık grubunun $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ elemanları, -1 determinantlı $O(2)$ grubu elemanlarının tam bir kümesinin oluşturması $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ile $SO(2)$ elemanlarının çarpımıyla verilir.

$O(n)$ grubu karışık sürekli gruplara bir örnektir. Bu durumda grup elemanları ayrık parçaların miktarına kesikli etiketlerin denkliğinin kümesiyle birlikte sürekli r parametrelerinin kümesi tarafından etiketlenmiş olmak

zorundadır. Böylece $O(n, r)$ grubu içindeki bir elemanın determinantının imzasıyla birlikte sürekli $\frac{n(n+1)}{2}$ adet reel parametre tarafından gösterilebilir.

2.4.2.3. Lie gruplarının kökeni

Bir G grubunun A elemanlarının sürekli r parametrelerine göre ifade edilebildiği ve

$$A(\alpha) \equiv A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$$

şeklinde yazılabildiği varsayıldığında grubun $A(0)$ birim elemanı etkisiz parametre kümesini destekler.

Grup elemanlarının kapalılığı, iki grup elemanının çarpımına ihtiyaç duyar. Çarpılacak olan $A(\alpha)$ ve $A(\beta)$ elemanları çarpım sonunda,

$$A(\gamma) = A(\alpha)A(\beta) \equiv A(\gamma(\alpha, \beta)) \quad 2.95$$

şeklinde bir $A(\gamma)$ elemanı olurlar. Bu nedenle,

$$\gamma = f(\alpha, \beta) \quad 2.96$$

olur. γ grup parametrelerinin sürekliliği ancak α ve β parametreleri sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlarsa sağlanır. 2.96 denkleminde $A(0)$ birim elemanının,

$$\gamma = f(\gamma, 0) = f(0, \gamma) \quad 2.97$$

şeklinde olması gerektiği sonucu ortaya çıkar.

$A(\alpha)^{-1} = A(\alpha')$ ters elemanın varlığı α' parametrelerinin α parametrelerinin sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonları olmasına gerek duyar.

$$A(\alpha)(B(\beta)C(\gamma)) \equiv (A(\alpha)B(\beta))C(\gamma) \quad 2.98$$

birleşme postülası,

$$f[\alpha; f(\beta, \gamma)] = f[f(\alpha, \beta), \gamma] \quad 2.99$$

şeklinde parametre fonksiyonu eşitliğine gerek duyar. Bu anlatılan şartları yerine getiren gruplara Lie grupları denir.

2.4.2.4. Sonsuz küçük grup jeneratörleri

$A(0)$ birim elemanına ayrılmış etkisiz parametrelere sahip olduğunda bu elemanın yakın komşuluğundaki grup elemanlarının özellikleri incelenebilir. Oldukça küçük parametre değerleri için bir $A(\alpha)$ elemanı,

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= A(0) + \sum_{k=1}^r \alpha_k \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha=0} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_k \alpha_l \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha=0} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_l} \right)_{\alpha=0} \\ &\quad + O(\alpha^3) \end{aligned} \quad 2.100$$

$$= A(0) + \sum_{k=1}^r \alpha_k X_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_k \alpha_l X_k X_l + O(\alpha^3)$$

şeklinde bir Taylor serisine açılabilir. Bu denklemin son kısmında,

$$X_k = \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha=0} \quad 2.101$$

şeklinindedir. X_k büyüklükleri birim eleman etrafındaki grup elemanlarının sonsuz küçük grup jeneratörleridir. Ayrıca, $A(\alpha)^{-1}$ ters elemanı birim elemanın yakın komşuluğundaysa,

$$A(\alpha)^{-1} = A(0) - \sum_{k=1}^r \alpha_k X_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_k \alpha_l X_k X_l + O(\alpha^3) \quad 2.102$$

şeklinde yazılır. Bu iki denklemden,

$$A(\alpha)^{-1} A(\alpha) = A(0) + O(\alpha^2) \quad 2.103$$

sonucuna sahip olunur.

$A(\beta)^{-1} A(\gamma)^{-1} A(\beta) A(\gamma)$ şeklinde $A(0)$ birim elemanı yakınında bulunan $A(\beta)$ ve $A(\gamma)$ grup elemanlarının komütatörünün tanımlanması, $A(0)$ birim elemanı yakınında $A(\beta, \gamma)$ grup elemanının kapalı olarak bulunması, komütatörün üzerinde olmasıyla mümkündür. Grup parametrelerinin yeteri kadar küçük değerleri için 2.100 denklemlerinin kullanılmasıyla,

$$A(\beta)^{-1} A(\gamma)^{-1} A(\beta) A(\gamma) = A(0) + \sum \beta_k \gamma_l [X_k, X_l] \quad 2.104$$

şeklinde olduğu bulunur. Bu denklemde,

$$[X_k, X_l] = X_k X_l - X_l X_k \quad 2.105$$

şeklinde belirtilen X_k ve X_l grup jeneratörlerinin komütatörüdür. Fakat 2.100 denkleminde

$$A(\beta, \gamma) = A(\alpha) = A(0) + \sum \alpha_m X_m + \dots \quad 2.106$$

şeklinde olan denkleme sahip olduğundan, özdeş olan 2.104 ve 2.106 denklemlerinin terimlerinin kıyaslanmasıyla,

$$[X_k, X_l] = C_{kl}^m X_m \quad 2.107$$

denklemine sahip olunur. Bu denklemde,

$$\alpha_m = C_{kl}^m \beta_k \gamma_l \quad 2.108$$

şeklinde. C_{kl}^m nicelikleri sonsuz küçük Lie gruplarının yapı sabitleri terimleridir.

Sonsuz küçük Lie grubunun yapı sabitleri aşağıdaki önemli özelliklere sahiptir:

1) Yapı sabitleri kendilerinin alt indislerinde,

$$C_{kl}^m = -C_{lk}^m \quad 2.109$$

şeklinde antisimetriktir.

2) Sonsuz küçük jeneratörler,

$$[[X_k, X_l], X_m] + [[X_l, X_m], X_k] + [[X_m, X_k], X_l] = 0 \quad 2.110$$

şeklinde olan Jacobi özdeşliğine uyduklarından yapı sabitleri,

$$C_{kl}^n C_{mn}^p + C_{lm}^n C_{kn}^p + C_{mk}^n C_{ln}^p = 0 \quad 2.111$$

şartına uymak zorundadır.

2.107 ve 2.111 denklemleri Lie cebirlerinin geliştirilmesi için gerek duyulan bazı biçimlendirir.

2.4.2.5. 2-Boyutlu $SO(2)$ dönme grubu

xy düzleminde yatan ve (x, y) koordinatlarıyla verilen r vektörü, saat yönünün tersi yönde θ açısıyla döndürülerek (x', y') koordinatlarına sahip yeni bir r' vektörü elde edildiğinde bu yeni vektörün koordinatları,

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ &= f_{x'}(x, y; \theta) \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta \\ &= f_{y'}(x, y; \theta) \end{aligned} \quad 2.112$$

şeklinde verilir. Bu dönüşüm 2boyutlu +1 determinantlı,

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad 2.113$$

şeklinde bir ortogonal matris tarafından oluşturulur. $r^2 = x^2 + y^2$ uzunluğu sol invarianttır ve $A(\theta)$ dönüşüm matrisleri ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) olmak üzere tekil θ parametresinin fonksiyonudur. Bu matrisler 1-parametrelili kompakt Lie grubu biçimlendirirler. Matris içinde $\theta = 0$ konulduğunda \mathfrak{S} birim elemanı bulunur.

Ayrıca, $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix}$ elemanlarının,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix}$$

çarpımı grubun bir elemanıdır ve buna göre grup abelyan ve komütatifdir. Bununla beraber, yüksek boyutlu dönme grupları abelyan ve komütatif olmayabilirler.

2.4.2.6. Sonsuz küçük dönmeler

Dikkate alınan sonsuz küçük dönmenin etkisi her bir kümedeki yaklaşık benzer vektörlerin bileşenlerinin koordinat eksenlerinin ortogonal dönüşümüdür. Vektörler sonsuz küçük miktarlarla farklılaşırlar. Böylece pratikte n boyutlu \vec{r} vektörünün i . x'_i bileşeninin dönüşümü x_i bileşenine,

$$x'_i = x_i + \varepsilon_{i1}x_1 + \dots + \varepsilon_{in}x_n = x_i + \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}x_j \quad 2.114$$

şeklinde benzer. Bu denklemdeki ε_{ij} ler sonsuz küçüklüklere sahiptir. Örneğin $SO(n)$ grubunda $\theta \rightarrow 0$ olduğunda $\cos \theta \rightarrow 1$ ve $\sin \theta \rightarrow \delta\theta$ olduğundan,

$$\begin{aligned} x' &= x - y\delta\theta \\ y' &= x\delta\theta + y \end{aligned} \quad 2.115$$

denklemleri elde edilir. 2.114 denklemleri,

$$x'_i = \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} + \varepsilon_{ij})x_j \quad 2.116$$

şeklinde yazılabilir. Fakat δ_{ij} çok açık olarak \mathfrak{S} birim matrisi olduğundan matris notasyonunda,

$$x' = (\mathfrak{S} + \varepsilon)x \quad 2.117$$

şeklinde yazılabilir. Burada ε küçüklükler matrisidir.

n boyutlu uzaydaki $x \equiv x(x_1, \dots, x_n)$ noktasını $x' \equiv x'(x'_1, \dots, x'_n)$ noktasına taşıyan genel T_a dönüşümleri r tane,

$$a \equiv (a_1, \dots, a_r) \quad 2.118$$

parametresiyle belirtilebilir. Böylece,

$$x' = xT_a = f(x; a) \quad 2.119$$

şeklinde olur. Diğer dönüşüm ise,

$$x'' = x'T_b = f(x'; a) \quad 2.120$$

şeklinde olur. Dönüşümlerin ünük oldukları farz edildiğinde x noktasından x' noktasına götüren dönüşümün yalnız bir tane olduğu söylenmiştir.

$$x' = xT_a \quad 2.121$$

olduğunu yazarak,

$$x'' = x'T_b = xT_aT_b = xT_c \quad 2.122$$

şeklinde olduğu ortaya çıkar. Burada,

$$c^\nu = \varphi^\nu(a, b) \quad (\nu = 1, \dots, r) \quad 2.123$$

veya kısaca,

$$c = \varphi(a, b) \quad 2.124$$

şeklinde olur. Örneğin, $SO(2)$ grubu için,

$$\begin{aligned} x' &= xT_\theta = f(x, y; \theta) \\ x'' &= x'T_{\theta'} = f(x', y'; \theta') \\ &= xT_\theta T_{\theta'} = xT_{\theta+\theta'} = f(x, y; \theta + \theta') \end{aligned} \quad 2.125$$

olur. 2.122 ve 2.123 denklemlerinden dönüşüm,

$$xT_aT_b = xT_{\varphi(a,b)} \quad 2.126$$

ve

$$f[f(x; a); b] = f[x; \varphi(a; b)] \quad 2.127$$

şeklinde olur. $\varphi(a; b)$ ler tüm dizilere diferansiyellenebilir sürekli fonksiyonlar olarak dikkate alınırlar.

T_a dönüşümleri bir grup oluştururlarsa φ fonksiyonları şu şartlara uymak zorundadır:

$$1) a = \varphi(a_0; a) = \varphi(a; a_0) \quad 2.128$$

olan bir birim eleman vardır. Orijini a_0 olarak alırsak $a_0 = 0$ noktasına sahip olunur:

$$a = \varphi(a,0) = \varphi(0, a) \quad 2.129$$

$$2) T_a^{-1}T_a = T_aT_a^{-1} = \mathfrak{I} \quad 2.130$$

şeklinde olan ters dönüşüm vardır.

3) Çarpmanın birleşme yasasına,

$$T_a(T_bT_c) = (T_aT_b)T_c \quad 2.131$$

şeklinde uyarlar, bu yasa φ fonksiyonları için,

$$\varphi[a; \varphi(b; c)] = \varphi[\varphi(a; b); c] \quad 2.132$$

olduğunu ima eder. Böylece 2.123 denkleminin $\varphi(a, b)$ fonksiyonları tarafından tanımlanmış bu denklemlere sahip olunur.

2.4.2.7. Lie gruplarının sonsuz küçük jeneratörleri

Bir x değişkeninin 1-parametrelili grubunun basit durumu dikkate alındığında önceki nokta,

$$x_0 = f(x_0, 0) \quad 2.133$$

şeklinde verilir.

$$x = f(x_0, a) \quad 2.134$$

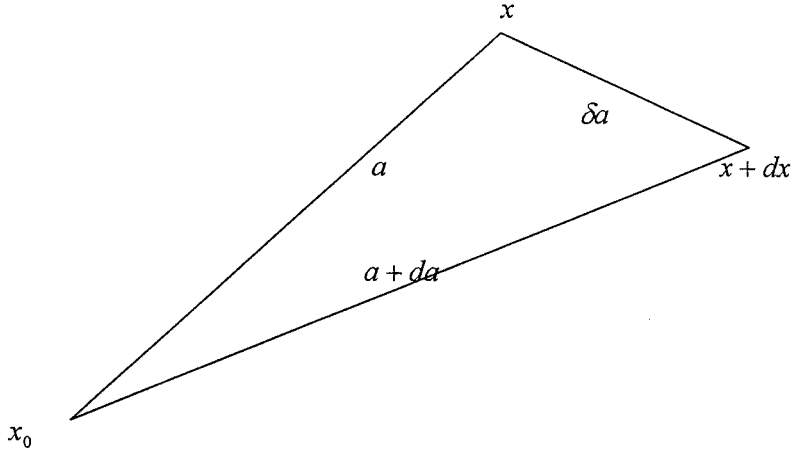
dönüşümünün yapılmasıyla x noktası bulunur. $x + dx$ noktasıysa,

$$x + dx = f(x_0, a + da) \quad 2.135$$

dönüşümü yapılarak bulunur. Bununla beraber sonsuz küçük δa parametre değişimiyle x noktasından $x + dx$ noktasına gidilir. Bu gidiş,

$$x + dx = f(x; \delta a) \quad 2.136$$

şeklinde olur.



Şekil 2.4: x değişkeninin değişimi

Bu sonucun açılımı,

$$dx = \left(\frac{\partial f(x; a)}{\partial a} \right)_{a=0} \delta a = U(x) \delta a \quad 2.137$$

olarak verilir. da ve δa arasındaki bağlantı,

$$a + da = \varphi(a, \delta a) \quad 2.138$$

olarak belirtilebilir ve ayrıca,

$$da = \left(\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b} \right)_{b=0} \delta a = U(a) \delta a \quad 2.139$$

şeklinde olur. Şimdi n değişkenlerinin ve r parametrelerinin genel durumları dikkate alınırsa 2.137 denkleminin benzeri,

$$dx^i = \sum_{\sigma} \left(\frac{\partial f^i(x, a)}{\partial a^{\sigma}} \right)_{a=0} \delta a^{\sigma} \quad (\sigma = 1, \dots, r; i = 1, \dots, n) \quad 2.140$$

veya

$$dx^i = U_{\sigma}^i(x) \delta a^{\sigma} \quad 2.141$$

şeklinde olur. Bu denklemde,

$$U_{\sigma}^i(x) = \left(\frac{\partial f^i(x, a)}{\partial a^{\sigma}} \right)_{a=0} \quad 2.142$$

olarak kısaltılmıştır. 2.139 denkleminin benzeri basit olarak,

$$da^{\sigma} = \left(\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b^{\rho}} \right)_{b=0} \delta a^{\rho} \quad 2.143$$

veya

$$da^\sigma = V_\rho^\sigma(a) \delta a^\rho \quad 2.144$$

şeklindedir. Burada,

$$V_\rho^\sigma(a) = \left(\frac{\partial \varphi^\sigma(a, b)}{\partial b^\rho} \right)_{b=0} \quad 2.145$$

olarak kısaltılmıştır. V_ρ^σ 'nin tersi λ_τ^ρ olur. Böylece, $\lambda_\tau^\rho V_\rho^\sigma = \delta_\tau^\sigma$ olur. 2.144 denkleminin verilen dönüşümün tersi,

$$\delta a^\rho = \lambda_\tau^\rho(a) da^\tau \quad 2.146$$

şeklinde olur. 2.141 denkleminin 2.146 denkleminin konmasıyla,

$$dx^i = U_\sigma^i(x) \lambda_\rho^\sigma(a) da^\rho \quad 2.147$$

veya

$$\frac{\partial x^i}{\partial a^\rho} = U_\sigma^i(x) \lambda_\rho^\sigma(a) \quad 2.148$$

olduğu bulunur. Sonsuz küçük $x \rightarrow x + dx$ dönüşümü $F(x) \rightarrow F(x) + dF(x)$ dönüşümüne neden olur. Böylece,

$$\begin{aligned} dF(x) &= \frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial F}{\partial x^i} U_\sigma^i \delta a^\sigma \quad (2.141 \text{ denkleminin}) \\ &= \delta a^\sigma U_\sigma^i \frac{\partial F}{\partial x^i} = \delta a^\sigma X_\sigma F \end{aligned} \quad 2.149$$

şeklinde olur.

$$\hat{X}_\sigma = U_\sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad 2.150$$

operatörlerine grubun sonsuz küçük operatörleri denir. Sonsuz küçük $F(x) \rightarrow F(x) + dF(x)$ dönüşümüne etkiyen \hat{S}_a operatörü,

$$\hat{S}_a = 1 + \delta a^\sigma \hat{X}_\sigma \quad 2.151$$

şeklinde tanımlıdır.

2.4.2.8. Sonsuz küçük operatörlere örnekler

$SO(2)$ Dönme grubu

Bir parametrelili $SO(2)$ grubunun sonsuz küçük operatörünün biçimini bulacağız. Sonsuz küçük dönüşüm

$$\begin{aligned}x' &= x - y\delta\theta & \delta x &= -y\delta\theta \\y' &= x\delta\theta + y & \delta y &= x\delta\theta\end{aligned}\tag{2.152}$$

şeklinde olduğundan ve 2.147 denkleminde operatörler,

$$U(x) = \frac{\delta x}{\delta\theta} = -y \text{ ve } U(y) = \frac{\delta y}{\delta\theta} = x\tag{2.153}$$

olurlar. 2.150 denklemindeki sonuçlar kullanıldığında $SO(2)$ grubunun sonsuz küçük \hat{X} operatörü,

$$\begin{aligned}\hat{X} &= U(x)\frac{\partial}{\partial x} + U(y)\frac{\partial}{\partial y} \\&= -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}\tag{2.154}$$

şeklinde bulunur. Kuantum teorisinde açısal momentumun 3.bileşeni,

$$\hat{J}_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\tag{2.155}$$

olduğundan,

$$\hat{J}_z = -i\hat{X}\tag{2.156}$$

olur ve operatör bu bileşen cinsinden,

$$\hat{X} = -i\hat{J}_z\tag{2.157}$$

ve \hat{S}_a operatörü

$$\hat{S}_\theta = 1 - i\delta\theta\hat{J}_z\tag{2.158}$$

şeklinde olur.

$SO(3)$ grubunun sonsuz küçük operatörleri

$SO(3)$ grubunun elemanları 3.dereceden +1 determinantlı ortogonal A matrisleri tarafından biçimlendirilirler. Ortogonallik gereği,

$$A' A = \mathfrak{I}$$

olduğundan sonsuz küçük dönmeler,

$$A = \mathfrak{I} + B$$

formunun matris dönüşümüne sahiptir. Burada B matrisi elemanlarının hepsi sifira komşu olan bir matristir. Ortogonallığı koruyan dönüşüm için,

$$\mathfrak{I} = A' A = (\mathfrak{I} + B')(\mathfrak{I} + B) \approx \mathfrak{I} + B' + B\tag{2.159}$$

denklemini geçerli olmalıdır. Denklik için,

$$B' + B = 0$$

koşulu sağlanmalıdır. Bu nedenle B matrisi 3 bağımsız elemanıyla,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix} \quad 2.160$$

şeklinde çarpık simetrik bir matris olmak zorundadır. Fakat $x' = (\mathfrak{J} + \varepsilon)x$ dönüşümü,

$$\begin{pmatrix} x + dx \\ y + dy \\ z + dz \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$dx = ay - bz$$

$$dy = ax + cz$$

$$dz = bx - cy$$

şeklinde olmalıdır. Böylece $SO(3)$ grubunun sonsuz küçük operatörleri,

$$X_1 = \frac{\partial(cz)}{\partial c} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial(-cy)}{\partial c} \frac{\partial}{\partial z} = z\partial_y - y\partial_z$$

$$X_2 = \frac{\partial(-bz)}{\partial b} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial(bx)}{\partial b} \frac{\partial}{\partial z} = x\partial_z - z\partial_x$$

$$X_3 = \frac{\partial(ay)}{\partial a} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial(ax)}{\partial a} \frac{\partial}{\partial y} = y\partial_x - x\partial_y$$

şeklinde olurlar. Sonsuz küçük $SO(3)$ grubu operatörleri,

$$[X_1, X_2] = X_3 \quad [X_2, X_3] = X_1 \quad [X_3, X_1] = X_2 \quad 2.170$$

komütasyonu altında kapalıdır. Açısız momentumun kuantum teorisinde birleşik normal operatörler $J_k = -iX_k$ şeklindedirler ve

$$[J_1, J_2] = -iJ_3 \quad [J_2, J_3] = -iJ_1 \quad [J_3, J_1] = -iJ_2$$

komütasyon bağıntılarına uyarlar.

2.4.2.9. Lie gruplarının yapı sabitleri

Sonsuz küçük grup jeneratörlerinin komütatörleri olan sonsuz küçük jeneratörlerin lineer kombinasyonu olarak ifadesi 2.107 denkleminde belirtilmişti. Bu denklem sonsuz küçük jeneratörler kümesinin komütasyon altında kapalı

olduğunu belirtir. Şimdi sonsuz küçük dönüşümlerin özelliklerine göre, sonsuz küçük jeneratörler için bu sonuç kurulacaktır. 2.148 denklemi,

$$\frac{\partial x^i}{\partial a^\rho} = U_\sigma^i(x) \lambda_\rho^\sigma(a) \quad i = 1, \dots, n \quad \rho = 1, \dots, r \quad 2.148$$

x noktasının $a = 0$ 'daki, önceki $x(0)$ noktasından sonsuz küçük yer değiştirmesiyle yapılan x noktasındaki değişimi tanımlar.

Bir sonlu yer değiştirmeyi bulma işlemi sırasında 2.148 denkleminin integrallenebilmesine ihtiyaç duyulur.

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial a^\tau \partial a^\rho} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial a^\rho \partial a^\tau} \quad 2.171$$

denklemi integrallenebilme şartıdır. 2.148 denklemi 2.171 denkleminde konursa;

$$U_\sigma^i(x) \frac{\partial \lambda_\rho^\sigma(a)}{\partial a^\tau} + \frac{\partial U_\sigma^i(x)}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial a^\tau} \lambda_\rho^\sigma(a) = U_\sigma^i(x) \frac{\partial \lambda_\tau^\sigma(a)}{\partial a^\rho} + \frac{\partial U_\sigma^i(x)}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial a^\rho} \lambda_\tau^\sigma(a) \quad 2.172$$

sonucu bulunur. Grup terimlerinin hepsi,

$$\left(U_\nu^j \frac{\partial U_\sigma^i}{\partial x^j} - U_\sigma^j \frac{\partial U_\nu^i}{\partial x^j} \right) \lambda_\tau^\nu \lambda_\rho^\sigma + U_\sigma^i \left(\frac{\partial \lambda_\rho^\sigma}{\partial a^\tau} - \frac{\partial \lambda_\tau^\sigma}{\partial a^\rho} \right) = 0 \quad 2.173$$

sonucunu verir.

τ ve ρ üzerinden toplamı ve $U_\xi^\tau \lambda_\tau^\nu$ üzerinden çarpımı,

$$U_\xi^\tau \lambda_\tau^\nu = \delta_\xi^\nu \quad 2.174$$

belirtmek üzere,

$$U_\xi^j \frac{\partial U_\eta^i}{\partial x^j} - U_\eta^j \frac{\partial U_\xi^i}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial \lambda_\tau^\sigma}{\partial a^\rho} - \frac{\partial \lambda_\xi^\sigma}{\partial a^\tau} \right) U_\xi^\tau U_\eta^\rho U_\sigma^i = C_{\xi\eta}^\sigma(a) U_\sigma^i \quad 2.175$$

denklemi bulunur. $U_\sigma^i(x)$ a dan bağımsızdır ve bu nedenle denklemin sol tarafı a 'ya göre diferansiyellenip sıfıra eşitlenirse,

$$U_\sigma^i \frac{\partial}{\partial a^\rho} (C_{\xi\eta}^\sigma(a)) = 0 \quad 2.176$$

olur ve böylece $C_{\xi\eta}^\sigma(a)$ yapısabitlelerinin a parametrelerinden bağımsız oldukları görülür. 2.150 denkleminin verilen tarifiyle,

$$\begin{aligned}
[X_\sigma, X_\rho] &= X_\sigma X_\rho - X_\rho X_\sigma \\
&= U_\sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i} U_\rho^j \frac{\partial}{\partial x^j} - U_\rho^j \frac{\partial}{\partial x^j} U_\sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \left(U_\sigma^i \frac{\partial U_\rho^j}{\partial x^i} - U_\rho^j \frac{\partial U_\sigma^i}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}
\end{aligned} \tag{2.177}$$

denkleminde sahip olunur. Bu denklemin 2.175 denklemiyle karşılaştırılmasıyla,

$$[X_\sigma, X_\rho] = C_{\sigma\rho}^\tau U_\tau^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.178}$$

denklemini bulunur. Bu sonuç daha önce,

$$[X_\sigma, X_\rho] = C_{\sigma\rho}^\tau X_\tau \tag{2.179}$$

2.107 denklemiyle bulunmuştu. 2.179 denklemi her bir sonsuz küçük operatör ve jeneratörler için geçerlidir. $C_{\sigma\rho}^\tau$ yapısabitlelerinin antisimetrikliğinden sonsuz küçük operatör ve jeneratörler $C_{\sigma\rho}^\tau = 0$ olduğunda kesinlikle kendileriyle komüt olurlar.

2.4.2.10. Sonlu grup elemanlarının oluşumu

r parametrelili Lie grubunun $A(0)$ özdeşlik elemanının komşuluğunda bulunan $A(\alpha)$ elemanları

$$X_k = \left(\frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha=0} \quad (k = 1, \dots, r) \tag{2.180}$$

sonsuz küçük grup jeneratörlerine göre tanımlanmış ve burada

$$A(\alpha) = A(0) + \sum_{k=1}^r \alpha_k X_k + O(\alpha^2) \tag{2.181}$$

şeklinde tanımlıdır.

Özellikle 1 parametrelili $SO(2)$ grubunda özdeşlikten sonsuz küçük kımıldayan $A(\delta\theta)$ elemanı için,

$$A(\delta\theta) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{I} + \delta\theta X_\theta \tag{2.182}$$

eşitliğine sahip olduğundan, keyfi büyük bir N sayısı için,

$$\delta\theta = \frac{\theta}{N} \tag{2.183}$$

sonsuz küçük açısı tanımlanarak 2.182 denkleminde yerine konursa özdeşlik elemanından kımıldama,

$$A(\delta\theta) \approx \mathfrak{I} + \frac{\theta}{N} X_\theta \quad 2.184$$

şeklinde olur. $A(\delta\theta)$ küçüklüğünün N defa uygulanmasıyla sonlu bir θ açısıyla birleşmiş $A(\theta)$ grup elemanı,

$$A(\theta) \approx \left(\mathfrak{I} + \frac{\theta}{N} X_\theta \right)^N \quad 2.185$$

şeklinde oluşturulabilir. $N \rightarrow \infty$ limitinde $A(\theta)$ grup elemanı için,

$$A(\theta) = e^{\theta X_\theta} \quad 2.186$$

tam sonucu bulunur. 2.92 denklemindeki gibi eksponansiyel sinüs ve kosinüs fonksiyonlarıyla seriye açılırsa, sonlu bir açı değeri için çok iyi bilinen,

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad 2.187$$

sonucu bulunur. Böylece sonsuz küçük grup jeneratörleriyle özdeşlik elemanına bağlanmış grup elemanlarının tam sürekli bir kümesi elde edilir.

r tane sonsuz küçük X_k grup jeneratörüyle oluşturulmuş bir Lie grubu için 2.186 denkleminin bir benzeri

$$A(\alpha) = e^{\alpha^k X_k} \quad k = 1, \dots, r \quad 2.188$$

şeklinde olur. Bu sonuç 2.101 denkleminin integrasyonu ile bulunacak olan sonuca denktir. 2.188 denklemi yalnızca özdeşlik elemanına bağlı grup elemanları için geçerlidir. Başka, özdeşlik elemanından ayrı kısımların elemanlarını bulmak bağlı grup elemanlarının kesikli grup elemanlarına uygulanmasıyla ortaya çıkar. Genelde sonsuz küçük X_k jeneratörleri komütatif olamayacaklarından jeneratörlerin herhangi bir ardışık uygulaması ön kabul olmak zorundadır.

Bu yapılan tartışma 3 boyutlu Öklityen uzayın 3 parametrelili $SO(3)$ dönme grubunun önemiyle tanımlıdır.

Önce,

$$A(\varphi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & -\cos \varphi \cos \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \cos \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad 2.189$$

şeklinde verilen Euler açılarına göre, $-\pi \leq \psi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ve $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ aralıklarına düşen parametrelere göre parametrize grup elemanları yerleştirilir. Bununla beraber bu parametrizasyon önemli sayıda kusur içerir. $\theta = 0$ olduğunda yalnız $\varphi - \psi$ kesindir ve parametrik uzaydaki tekil noktalarda φ ve ψ tekil olmayan ünük bir dönme matrisi tanımlar. $\theta = \pi$ durumunda yalnız $\varphi + \psi$ kesindir. Tekil noktalar, dönme matrislerinin herhangi bir parametrizasyon şemasında ortaya çıkar. Euler parametrizasyonu, grubun özdeşlik elemanı hakkında tekilliğin ortaya çıkmasıyla belirli iyi olmayan durumlar ortaya çıkarır. Bu parametrizasyon seçiminin 2.189 denkleminin diferansiyellenmesiyle bulunan,

$$X_\psi = X_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } X_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2.190$$

jeneratörleri felaket getiren sonuçlara neden olur. Bu jeneratörler kendileri arasında komütörler ve 2.170 denkleminde bulunmuş olan bilinen açısal momentum komütasyon kurallarını vermezler.

Alternatif ve daha uygun bir parametrizasyon x ekseninde α_1 , y ekseninde α_2 , z ekseninde α_3 dönmelerinin yapılmasıyla bulunur. Bu durumda,

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_3 & \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 \\ -\cos \alpha_2 \sin \alpha_3 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 & -\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ -\sin \alpha_2 & -\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \end{pmatrix} \quad 2.191$$

eşitliğine sahip olunur. Burada parametreler $-\pi \leq \alpha_1 \leq \pi$, $-\pi \leq \alpha_2 \leq \pi$ ve $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_3 \leq \frac{\pi}{2}$ aralıklarında değişirler. Uzun olmayan parametrik uzaydaki tekil noktalar özdeşlik elemanı etrafında,

$$\alpha_3 = \pm \frac{\pi}{2}$$

noktasında olurlar. Böylece sonsuz küçük grup jeneratörleri,

$$X_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X_{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2.192$$

şeklinde olurlar, ve iyi bilinen,

$$[X_{\alpha_i}, X_{\alpha_j}] = \varepsilon_{ijk} X_{\alpha_k} \quad 2.193$$

komütasyon bağıntısına uyarlar. Bu bağıntı 2.191 denkleminin 2.188 denklemi gibi,

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \exp(\alpha_1 X_{\alpha_1} + \alpha_2 X_{\alpha_2} + \alpha_3 X_{\alpha_3}) \quad 2.194$$

şeklinde yazılabilir. Sonsuz küçük grup jeneratörleri ünimodüler $SU(2)$ grubunda 2 boyutlu matrislere dayanarak tanımlanmak zorundadır.

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \exp(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3) \quad 2.195$$

yazıldığında X_k jeneratörleri i kez,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad 2.196$$

Pauli spin matrisleridir. Bu durumun 2.194 denkleminin parametrizasyonuna,

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + i \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) e^{i\alpha_3} & -\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + i \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + i \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - i \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) e^{-i\alpha_3} \end{pmatrix} \quad 2.197$$

şeklinde denk olduğunu görmek zor değildir. Burada parametreler $-\pi \leq \alpha_1 \leq \pi, -\pi \leq \alpha_2 \leq \pi, 0 \leq \alpha_3 \leq \pi$ aralıklarında değişirler. Şimdi sonsuz küçük grup jeneratörleri,

$$[X_i, X_j] = 2\varepsilon_{ijk} X_k \quad 2.198$$

komütasyon bağıntısına uyarlar. $\frac{i}{2}$ kez Pauli spin matrislerine sahip olunursa,

$SO(3)$ grubu için 2.193 denklemiyle verilen komütasyon kuralı özdeşliği bulunur.

Bu durumda 2.197 denkleminde görülen açılar iki eşit parçaya bölünmüştür.

2.4.2.11. Sonlu dönüşümler

$$S_a = 1 + \delta a^\sigma X_\sigma \quad 2.199$$

sonsuz küçük operatörüyle etkilenmiş sonsuz küçük,

$$F(x) \rightarrow F(x) + dF(x) \quad 2.200$$

dönüşümü 2.4.2.7. bölümünde anlatılmıştır. Özellikle, $SO(2)$ grubunun durumunda sonsuz küçük operatörü,

$$S_\theta = 1 + \delta \theta X_\theta \quad 2.201$$

şeklinde yazılabilir. Sonlu bir dönme için önceden yapılan işleme benzer bir işleme,

$$S_\theta(\theta) = e^{\theta X_\theta} \quad 2.202$$

denklemini bulunur. Burada bulunan X_θ operatörü 2.4.2.8 bölümünde bulunmuş olan sonsuz küçük operatördür. $e^{\theta X_\theta}$ sürekli bir yolla özdeşlik dönüşümüne bağlı herhangi bir sonlu dönüşüm oluşturacaktır.

r parametrelili, sonsuz küçük X_σ operatörleriyle karakterize edilmiş bir Lie grubu için 2.202 denkleminin benzeri,

$$S_a(a) = e^{a^\sigma X_\sigma} \quad \sigma = 1, \dots, r$$

şeklinde olur[4].

2.4.3. Klasik Gruplar Arasındaki Bağlantılar

Aşağıdaki klasik grupların ve boyutlarının farklı çeşitleri arasında bağlantılar çizelgelerinde gösteriliyor.

$GL(N, r)$			
N^2			
$O(N)$ $\frac{N(N-1)}{2}$		$Sp(N, r)$ $\frac{N(N+1)}{2}$	Metrik koruyan
	$SI(N, r)$ $N^2 - 1$		
$SO(N)$ $\frac{N(N-1)}{2}$ simetrik metrik	Metrik yok	$SSp(N, r)$ $\frac{N(N+1)}{2}$ çarpıksimetrik metrik	Hacim koruyan

Çizelge 2.3: Reel-değerli gruplar

$GL(N, c)$					
$2N^2$					
Metrik koruyan	$U(N, c)$ N^2			$Sp(N, c)$ $N(N+1)$	$O(N, c)$ $N(N-1)$
Hacim koruyan		$Sl_1(N, c)$ $2N^2 - 1$	$Sl_2(N, c)$ $2N^2 - 1$		
$SU(N, c)$ $N^2 - 1$		$Sl(N, c)$ $2(N^2 - 1)$ metrik yok		$SSp(N, c)$ $N(N+1)$	$SO(N, c)$ $N(N-1)$
simetrik metrik		$USp(N)$ $\frac{N(N+1)}{2}$		antisimetrik metrik	simetrik metrik

Çizelge 2.4: Kompleks değerli

$GL(N, q)$			
$4N^4$			
$U(N, q)$ $USp(2N)$ $N(2N+1)$ sesquilineer simetrik metrik	$Sl(N, q)$ $SU^*(2N)$ $4N^2 - 1$ metrik yok	$Sp(N, q)$ $USp(2N)$ $N(2N+1)$ antisimetrik bilinear metrik	$O(N; q)$ $SO^*(2N)$ $N(2N-1)$ simetrik bilinear metrik

Çizelge 2.5: Kuarterniyon değerli gruplar

$$\begin{array}{r}
Q \quad q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \\
\downarrow \quad \downarrow \\
C \quad q_0 + q_1 i \\
\downarrow \quad \downarrow \\
R \quad q_0
\end{array}$$

sınırlayıcı kuralı $GL(N, q), GL(N, c), GL(N, r)$ grupları içinde geçerlidir.

2.4.4. Klasik Grupların Boyutları

Bu grupların her biri matris çarpımı işlemiyle tanımlı matris olan noktaların bir kümesidir. Bu uzaylarda çalışma prosedürü şekil 2.3'te görülüyor. Özellikle η için R_η uzayının orijini etrafında bir birebir yöntemle her bir p noktasının komşuluğuna gönderilebilir. Matris grubunun her hangi iki noktası grup işlemuyla bağlı oldukları diğer bir noktaya yakınsa benzer komşuluktadır. A ve A' noktaları, $|A_i^j - A_i'^j|$ tüm i ve j indisleri üzerinden küçük oluyorsa birlikte kapalıdır.

Orijinin yakın komşuluğundaki herhangi bir p noktasının yakın komşuluğunda p^{-1} ile çarpımla hareket etmenin nedeni gruplar söz konusu olduğundandır. Orijin etrafında grup özelliklerinin detaylarına girilmesiyle grup hakkında çok önemli bilgiler edinilir.

Reel, kompleks, kuaterniyon sayılarının cisimlerinin boyutları $f = 1, 2, 4$ olduğundan bu sayılar reel cisim üzerine vektör uzayları olarak düşünülebilir. $N \times N$ matrislerinin genel lineer gruplarının N^2 matris elemanlarının her biri keyfi olduğundan genel lineer gruplarının boyutları fN^2 'dir.

REEL GRUPLAR				KOMPLEKS GRUPLAR								
$GL(N, r)$		$SI(N, r)$	$Sp(N, c)$ $SSp(N, c)$ N çift $N(N+1)$	$USp(N)$ N çift $\frac{N(N+1)}{2}$	$O(N, c)$ $SO(N, c)$ $N(N-1)$	$O(N, r)$ $SO(N, r)$ $\frac{N(N-1)}{2}$	$Sp(N, r)$ $SSp(N, r)$ N çift $\frac{N(N+1)}{2}$	$GL(N, c)$ $2N^2$	$SI_1(N, c)$ $SI_2(N, c)$ $2N^2 - 1$	$SI(N, c)$ $2N^2 - 2$	$U(N, c)$ N^2	$SU(N, c)$ $N^2 - 1$
N	N^2	$N^2 - 1$										
1	1								1		1	
2	4	6	3	2	3	1	3	8	7	6	4	3
3	9			6	8	3		18	17	16	9	8
4	16	20	10	12	15	6	10	32	31	30	16	15
5	25			20	24	10		50	49	48	25	24
6	36	42	21	30	35	15	21	72	71	70	36	35

Çizelge 2.6: Küçük grupların boyutları

KUATERNİYON GRUPLAR			
$GL(N, q)$	$SI(N, q)$	$U(N, q)$	$Sp(N, q)$
	$SU^*(2N)$	$USp(2N)$	$USp(2N)$
$4N^2$	$4N^2 - 1$	$N(2N + 1)$	$N(2N + 1)$
4	3	3	3
16	15	10	10
36	35	21	21
64	63	36	36
100	99	55	55
144	143	78	78

Çizelge 2.7: Küçük grupların boyutları

Çizelge 2.6 ve 2.7'de görülen tüm klasik gruplar genel lineer grupların altgrupları olarak oluşurlar. Altgrup kuralları, $GL(N, -)$ grup ailesinin N^2 matris elemanlarının olası değerlerinin yerlerinin belirleme denklemlerinin biçimini ortaya koyar. $\det\|A_i^j\|$ ünitlek modülü tarafından belirlenmiş özel lineer alt gruplar kendileri üzerinde kısıtlanmış yalnız bir tane modüle sahiptirler. $GL(N, c)$ grubunun $SL(N, c)$ altgrubu,

$$\det\|A_i^j\| = 1 + e.o$$

eşitliğine uyan $GL(N, c)$ grubundaki matrisleri içerir. Bu matrisler determinantın gerçek ve sanal kısımları üzerine yerleşmiş kısıtlamalara sahiptir. Bu matris grubunun boyutluluğu bu nedenle $2N^2 - 2$ 'dir.

Metrik koruyan gruplar,

$$g_{rs} = A_s^i g_{ij} A_r^s \quad g_{ij} = \pm g_{ji}$$

$$g_{rs} = A_s^j g_{ij} A_r^{*i} \quad g_{ij} = +g_{ji}^*$$

biçimlerinin kendileri üzerinde yerleşmiş kısıtlamalara sahiptir. Önceki bağıntılardaki her bir kapsanmış bağımsız denklem için sınırlamanın metrik koruyan grupların kümesi vardır. Küme simetri özelliklerinden $r < s$ ile denklemlerden bulunmuş olabilen $r > s$ seçiminden doğan denklemleri görebilir ve bu yüzden yeni bir bilgi içermez. $r > s$ seçimleri $\frac{N(N-1)}{2}$ tarafından A_i^j matris elemanları üzerinde yerleşmiş sınırlamaların sayısı,

$$f \frac{N(N-1)}{2}$$

olur. g_{rr} den doğan denklemlerden hesaplanan sınırlamaların toplam sayısına bakıldığında, komütatif cisim üzerinde tanımlı bilineer antisimetrik metriğin durumunda,

$$0 = g_{rr} = A_r^j A_r^i g_{ji}$$

şeklinde olduğu bulunur. Bu nedenle, cisim komütatifken, bilineer antisimetrik metriğin köşegen elemanlarından doğan denklemler aynı şekilde sağlanmalıdır. Komütatif olmayan kuaterniyon cismi için köşegen elemanlarından doğan her bir denklem yerleri matris elemanı üzerinde sınırlıdır ve bu halden geniş değildir. Bu nedenle simplektik gruplar,

$$Sp(N, r) \quad N^2 - \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$Sp(N, c) \quad 2N^2 - \frac{2N(N-1)}{2} = N(N+1)$$

$$Sp(N, q) \quad 4N^2 - \frac{4N(N-1)}{2} = N(2N+1)$$

boyutlarına sahiptir[3].

$O(N, r), O(N, c), O(N, q)$ grupları için, her bir köşegen denklem sırasıyla, 1,2,3 sınırlamalarını sağlar. Üniter ve ortogonal gruplar için denklemlerin benzer kümesi kesinlikle reeldir ve her bir denklem yalnız bir sınırlamayı sağlar. Üniter ve ortogonal grupların boyutları,

$$O(N, f) \quad fN^2 - \frac{fN(N-1)}{2} - fN = \frac{fN(N-1)}{2}$$

$$O(N, q) \quad 4N^2 - \frac{4N(N-1)}{2} - 3N = \frac{2N(2N-1)}{2}$$

$$U(N, f) \cong fN^2 - \frac{fN(N-1)}{2} - N = \frac{fN^2 + fN - 2N}{2}$$

2.4.3. Klasik Gruplar Arasında İzomorfizmler ve Homomorfizmler

Tüm klasik gruplar bağımsızdır. Aralarında bir çok izomorfizm ve homomorfizm vardır. Bu izomorfizm ve homomorfizmler düşük boyutlu gruplar arasında daha belirgindir. Farklı boyutlarda olan gruplar izomorfik olamazlar. Klasik gruplar arasında izomorfizm ve homomorfizmlerin bazıları şunlardır:

$$\dim = 3 : SU(2, c) \cong SO(3, r) \cong USp(2) \cong U(1, q) \cong SI(1, q) \\ SU(1, 1; c) \cong SO(2, 1; r) \cong Sp(2, r) \cong SI(2, r)$$

$$\dim = 6 : SO(4, r) \cong SU(2, c) \otimes SU(2, c) \\ SO^*(4) \cong SU(2, c) \otimes SI(2, r) \\ SO(3, 1; r) \cong SI(2, c) \\ SO(2, 2; r) \cong SI(2, r) \otimes SI(2, r)$$

$$\dim = 10 : SO(5, r) \cong USp(4) \\ SO(4, 1; r) \cong USp(2, 2) \\ SO(3, 2; r) \cong Sp(4, r)$$

$$\dim = 15 : SO(6, r) \cong SU(4, c) \\ SO(5, 1; r) \cong SU^*(4) \cong SI(2, q) \\ SO^*(6) \cong SU(3, 1; c)$$

3. KUANTUM MEKANİĞİNDE FİZİKSEL SİSTEMİN TANIMLANMASI VE SİMETRİ YASALARI

3.1. Kuantum Mekaniğinin Temel Varsayımları

1. Tam olarak tanımlanmış her fiziksel gözlenebilirliğe bir lineer Hermitsel operatör karşılık gelir.
2. A fiziksel gözlenebilirliğine karşılık gelen Hermitsel operatör \hat{A} olduğunda, ölçmenin sonucu \hat{A} operatörünün kesikli veya sürekli özdeğerlerinden biri olur. Fiziksel A gözlenebilirliğinin bir ölçümüyle \hat{A} operatörünün bir a_n özdeğeri bulunduğu, fiziksel sistem \hat{A} operatörünün a_n özdeğerine karşılık gelen u_n öz durumunda olur.
3. Fiziksel sistemin herhangi bir t anındaki durumu, durum veya dalga fonksiyonu denilen sürekli, türevlenebilir ve sanal değerli $\Psi(\vec{r}, t)$ fonksiyonuyla belirlenir. Bire normlandırılabilen $\Psi(\vec{r}, t)$ fonksiyonu fiziksel sistemin tüm bilgilerini içerir[5].
4. Dalga fonksiyonunun zaman içinde gelişimi nonrelativistik hallerde,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad 3.1$$

şeklinde olan Schrödinger denklemi tarafından, relativistik hallerde ise spinsiz parçacıklar için,

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \Psi = 0 \quad 3.2$$

Klein-Gordon denklemi tarafından, ve spinli parçacıklar için,

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m) \Psi = 0 \quad 3.3$$

Dirac denklemi tarafından belirlenir[6].

3.2. Operatörler

Bir operatör bir fonksiyona uygulandığında bu fonksiyonu bir başka fonksiyona dönüştüren bir gönderimdir. Operatörlerin toplanması, skaler sayılar ve kendi aralarında çarpılması,

$$\begin{aligned}
(\hat{A}_1 \pm \hat{A}_2)f &= \hat{A}_1f + \hat{A}_2f \\
(a\hat{A})f &= a(\hat{A}f) \\
\hat{A}_1\hat{A}_2f &= \hat{A}_1(\hat{A}_2f)
\end{aligned}
\tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır. Her f fonksiyonu için,

$$\hat{O}f = 0 \tag{3.5}$$

koşulunu sağlayan operatöre sıfır operatör,

$$\hat{S}f = f \tag{3.6}$$

koşulunu sağlayan operatöre birim operatör denir.

3.2.1. Bir Operatörün Özdeğerleri ve Özfonksiyonları

$$\hat{A}u_n = a_n u_n \tag{3.7}$$

denkleminde u_n fonksiyonu \hat{A} operatörünün a_n özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonudur. Bir operatörün her hangi bir fonksiyona uygulanmasıyla çok karmaşık bir başka fonksiyon elde edilebilirken, kendi özfonksiyonuna uygulanmasıyla bulunan sonuç özfonksiyonun bir özdeğerle çarpımıdır.

Bir lineer operatörün özfonksiyonları kümesi $\{u_n\}$ ve özdeğerler kümesi $\{a_n\}$ ile gösterilirler. $\{a_n\}$ özdeğerler kümesine operatörün spektrumu denir. Lineer operatörün spektrumu reel veya kompleks, kesikli veya sürekli olabilir.

Fizikte karşılaşılan operatörler belirli fiziksel boyutlara sahiptir. Bu operatörlerin özdeğerleri ve özfonksiyonları operatör ve içinde bulunduğu durum için var olan sınır koşullarıyla birlikte belirlenir.

Momentum operatörünün x bileşeni olan $\hat{p}_x = -i\hbar\partial_x$ operatörü için özdeğerler p_x ise,

$$-i\hbar\frac{du_{p_x}}{dx} = p_x u_{p_x} \tag{3.8}$$

özdeğer denkleminin çözümleri,

$$u_{p_x}(x) = Ne^{ix\frac{p_x}{\hbar}} \tag{3.9}$$

özfonksiyonlarıyla verilir. Burada N normalizasyon sabitidir. Başka bir şart olmadığında $\{p_x\}$ spektrumu $p_x \in \mathbb{C}$ şeklinde sürekli ve kompleksdir.

$$u_{p_x}(x+L) = u_{p_x}(x) \quad 3.10$$

periyodik sınır koşulunu sağlayan özfonksiyonlar için,

$$\frac{p_x L}{\hbar} = 2\pi n \quad 3.11$$

$$p_x = \frac{\hbar}{L} n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad 3.12$$

olur. Bu durumda $\{p_x\}$ spektrumu kesiklidir. $x \rightarrow \pm\infty$ limitinde sonlu u_{p_x} özfonksiyonları için $\{p_x\}$ spektrum reel olur: $p_x \in \mathbb{R}$.

3.2.2. Operatörlerin Komütasyon Bağlılıkları

1. Özfonksiyonları aynı olan iki hermitsel operatör komüttür.

Hermitsel olan \hat{A} ve \hat{B} operatörleri için,

$$\hat{A}u = au \text{ ve } \hat{B}u = bu \quad 3.13$$

ortak u özfonksiyonları varsa,

$$[\hat{A}, \hat{B}]u = 0 \quad 3.14$$

olur. Tek bir u özfonksiyona dayanarak \hat{A} ve \hat{B} operatörlerinin komüt oldukları söylenemez. Komütlik her f fonksiyonu için $[\hat{A}, \hat{B}]f = 0$ olmasını şart koşar. \hat{A} ve \hat{B} operatörleri ortak $\{u_n\}$ özfonksiyonlarına sahiplerse komüttürler ve Hermitsel olduklarından $\{u_n\}$ özfonksiyon kümesi tamdır. Böylece her f fonksiyonu bu kümeye,

$$f = c_n u_n \quad 3.15$$

şeklinde açılabilir. Bu açımdan yararlanarak,

$$[\hat{A}, \hat{B}]f = c_n [\hat{A}, \hat{B}]u_n = 0 \quad 3.16$$

olduğu görülür. Komüt olan operatörler için $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ olduğundan,

$$\hat{A}(\hat{B}u_n) = \hat{B}(\hat{A}u_n) = a_n (\hat{B}u_n) \quad 3.17$$

bağıntısının varlığı ortaya çıkar. Bu bağıntıdan $\hat{B}u_n$ fonksiyonunun \hat{A} operatörünün a_n özdeğerli bir özfonksiyonu olduğu ortaya çıkar.

2. Komüt olan iki Hermitsel operatör ortak özfonksiyonlara sahiptir.

\hat{A} operatörünün aynı a_n özdeğerine karşılık gelen birden çok özfonksiyon olması (dejenereliğin olması) veya olmaması (dejenereliğin olmaması) durumuna göre iki durum vardır.

i) \hat{A} operatörünün özdeğerleri dejenere değilse, \hat{A} operatörünün her bir a_n özdeğerine karşılık gelen tek bir u_n özfonksiyonu olduğundan $\hat{B}u_n$ fonksiyonu bu özfonksiyonun sabit bir katı olur ve

$$\hat{B}u_n = b_n u_n \quad 3.18$$

şeklinde yazılır.

ii) a_n özdeğerleri dejenere ise, her bir a_n özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız u_n^1 ve u_n^2 özfonksiyonları varsa, bu katlı durum,

$$\hat{A}u_n^1 = a_n u_n^1 \text{ ve } \hat{A}u_n^2 = a_n u_n^2 \quad 3.19$$

şeklinde gösterilir. $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ olduğundan $\hat{B}u_n^1$ ve $\hat{B}u_n^2$ fonksiyonları da \hat{A} operatörünün aynı a_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlarıdır. Bu özdeğer iki katlı dejenere olduğundan bu özfonksiyonlar u_n^1 ve u_n^2 özfonksiyonlarının,

$$\hat{B}u_n^1 = b_{11}u_n^1 + b_{12}u_n^2 \quad 3.20$$

$$\hat{B}u_n^2 = b_{21}u_n^1 + b_{22}u_n^2 \quad 3.21$$

şeklinde lineer toplamı olmak zorundadır. Bu denklemlerin,

$$\hat{B}v_n^1 = b_n^1 v_n^1 \text{ ve } \hat{B}v_n^2 = b_n^2 v_n^2 \quad 3.22$$

şeklinde lineer toplamaları bulunabilir. $v_n = u_n^1 + \lambda u_n^2$ olacak şekilde bu denklemler,

$$\begin{aligned} \hat{B}v_n &= \hat{B}(u_n^1 + \lambda u_n^2) = (b_{11} + \lambda b_{21})u_n^1 + (b_{12} + \lambda b_{22})u_n^2 \\ &= b_n^\pm (u_n^1 + \lambda u_n^2) \end{aligned} \quad 3.23$$

şeklinde olurlar. Bu sonuçlara göre,

$$\lambda = \frac{b_{12} + \lambda b_{22}}{b_{11} + \lambda b_{21}} \text{ ve } b_n^\pm = b_{11} + \lambda b_{21} \quad 3.24$$

olmalıdır. Buna göre,

$$v_n^1 = u_n^1 + \lambda_+ u_n^2 \text{ ve } v_n^2 = u_n^1 + \lambda_- u_n^2 \quad 3.25$$

özfonksiyonları $\lambda^2 b_{21} + \lambda(b_{11} - b_{22}) - b_{12} = 0$ olmak üzere \hat{A} operatörünün aynı a_n özdeğerine ve \hat{B} operatörünün b_n^+ ve b_n^- özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlardır.

\hat{A} operatörünün dejenere özfonksiyonları bu operatörle komüt bir başka \hat{B} operatörünün de özfonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar \hat{B} operatörünün dejenere olmayan özfonksiyonlarıysa ($b_n^+ = b_n^-$ hali) \hat{B} operatörü, \hat{A} operatörünün spektrumundaki dejenereliği kaldırmıştır. \hat{A} operatörünün spektrumundaki dejenerelikler \hat{B} operatörünün spektrumunda devam ederse bu dejenereliği kaldırmak için bu operatörlerle komüt olan bir başka \hat{C} operatörü olmalıdır. Bu durum spektrumunda hiç dejenerelik olmayan \hat{M} operatörüne kadar sürer.

Birbiriyle komüt olan $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \dots, \hat{M}$ Hermitsel operatörlerinin bir tam kümesi denir. Bu kümenin ortak özfonksiyonları kümesi $\{v_{abc\dots m}\}$ ve özdeğerleri a, b, c, \dots, m olarak gösterilebilir.

Bir fiziksel sistemle ilişkili komüt operatörler kümesi, sistemin kuantum durumlarını belirlemek için büyük öneme sahiptir.

3.2.3. Hilbert Uzayı

S_f fonksiyon kümesindeki reel veya kompleks bütün fonksiyonların toplama ve skaler sayılarla çarpımını,

$$\begin{aligned}
 f + g &= g + f \\
 (f + g) + h &= f + (g + h) \\
 (-1)f &= -f \\
 (0)f &= 0 \\
 a(f + g) &= af + ag
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

kurallarıyla tanımlayarak S_f fonksiyon kümesine sonsuz boyutlu lineer vektör uzayı kazandırılır. V_f ile gösterilen bu uzayda sonlu boyutlu alt vektör uzayları tanımlanabilir.

Bu uzayda sonucu bir skaler sayı olan iki fonksiyon arasındaki iç çarpım

$$\langle f | g \rangle \equiv \int_{\text{tümuzay}} f^*(\vec{r}) g(\vec{r}) d^3 r
 \tag{3.27}$$

olarak tanımlıdır. Denklem sağ tarafı iç çarpımın açık tanımı, sol tarafı ise Dirac braket notasyonudur. Bu iç çarpım Dirac notasyonuyla,

$$\begin{aligned}
 \langle af_1 + bf_2 | g \rangle &= a^* \langle f_1 | g \rangle + b^* \langle f_2 | g \rangle \\
 \langle f | ag_1 + bg_2 \rangle &= a \langle f | g_1 \rangle + b \langle f | g_2 \rangle \\
 \|f\|^2 &\equiv \langle f | f \rangle \geq 0 \\
 \|f\| = 0 &\Leftrightarrow f = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

özelliklerini sağlar. İç çarpım tanımının bir sonucu,

$$(\langle f | g \rangle)^* = \langle g | f \rangle
 \tag{3.29}$$

bağıntısıdır. İlk iki özellik iç çarpımın soldan antilineer, sağdan lineer bir işlem olduğunu gösterir. Bu özellikler 3-boyutlu vektörlerin skaler çarpımının özelliklerinden farklıdır. İç çarpımın sonucu reel sayı olmayabilir. Bu iç çarpım işlemi için açı kavramı tanımlanamazken norm ve ortogonalite kavramları tanımlanabilir. f fonksiyonunun boyu $\|f\|^2$ nin pozitif kökü olarak tanımlanır.

$\|f\|^2 = 1$ olan fonksiyonlar 1'e normlanmış fonksiyonlardır. Normu sonlu olan her fonksiyon sabit sayılarla çarpılarak 1'e normlanabilirler.

$$\langle f | g \rangle = 0 = \int_{\text{tümuzay}} f^*(\vec{r}) g(\vec{r}) d^3r
 \tag{3.30}$$

koşulunu sağlayan f ve g fonksiyonları birbirlerine ortogondur. $f=0$ fonksiyonu bu uzayda bir $\vec{0}$ vektörüdür ve normu sıfırdır ve böylece her fonksiyona dik bir fonksiyondur.

$$\|f\|^2 = \int_{\text{tümuzay}} |f(\vec{r})|^2 d^3r < \infty
 \tag{3.31}$$

koşulunu sağlayan normu sonlu her fonksiyona karesi integrallenebilir fonksiyon denir. Normu sonlu ve koordinatlar $\pm \infty$ limitine giderken “yeteri kadar hızlı” sıfıra giden fonksiyonların iç çarpım uzayına

$$V_H = \left\{ f \in V_f, \|f\|^2 < \infty, \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow 0 \right\}
 \tag{3.32}$$

şeklinde gösterilen Hilbert uzayı denir.

3.2.4. Bir Operatörün Eşleniği

Hilbert uzayındaki herhangi iki f ve g fonksiyonları için,

$$\langle f | \hat{A}^+ | g \rangle = \hat{A} \langle f | g \rangle = \langle \hat{A} f | g \rangle \quad 3.33$$

veya açık ifadeyle,

$$\int_{\text{tümuzay}} f^*(\vec{r}) (\hat{A}^+ g(\vec{r})) d^3 r = \int_{\text{tümuzay}} (\hat{A} f(\vec{r}))^* g(\vec{r}) d^3 r \quad 3.34$$

ile tanımlanır \hat{A}^+ operatörüne \hat{A} operatörünün Hermitsel eşleniği denir. Herhangi bir lineer \hat{A} operatörünün Hermitsel eşlenik operatörü \hat{A}^+ genel olarak \hat{A} dan farklı bir operatördür. Fakat Hermitsel eşlenikleri kendilerine eşit olan özel operatörler kuantum mekaniğinde önemli rol oynarlar. Bu operatörlere Hermitsel eşlenik operatörler denir.

$$\hat{A} = \hat{A}^+ \quad 3.35$$

Hermitsel operatörler olan \hat{A} ve \hat{B} operatörlerinin çarpımlarının da hermitsel olabilmesi için,

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \quad 3.36$$

koşulu vardır.

u_a ve $u_{a'}$, \hat{A} operatörünün,

$$\begin{aligned} \hat{A} | u_a \rangle &= a | u_a \rangle \\ \hat{A} | u_{a'} \rangle &= a' | u_{a'} \rangle \end{aligned} \quad 3.37$$

a ve a' özdeğerlerine sahip özfonksiyonları olsun. \hat{A} hermitsel olduğundan

$$\langle \hat{A} u_a | u_{a'} \rangle = \langle u_a | \hat{A} u_{a'} \rangle \quad 3.38$$

özellğine sahiptir ve bu özellikten,

$$\begin{aligned} a^* \langle u_a | u_{a'} \rangle &= a' \langle u_a | u_{a'} \rangle \\ (a^* - a') \langle u_a | u_{a'} \rangle &= 0 \end{aligned} \quad 3.39$$

olduğu görülür. $a' = a$ halinde eşitlik,

$$(a^* - a) \| u_a \|^2 = 0 \quad 3.40$$

olur. $\| u_a \|^2 \neq 0$ olduğundan $a^* = a$ sonucu bulunur. Buna göre Hermitsel operatörün tüm özdeğerleri reeldir.

$a' \neq a$ için $a' - a \neq 0$ ve $\langle u_a | u_{a'} \rangle = 0$ olduğu görülür[7].

3.3. Ölçülebilir değerler ve Durumlar

Kuantum mekaniğinde bir fiziksel gözlenebilirliği ölçmek, bu ölçme işlemine ait bir operatörle temsil edilir. Kuantum mekaniği varsayımları, ölçme işlemlerine karşılık gelen operatörleri lineer ve Hermitsel operatörlerle sınırlar. Kuantum mekaniğinde her fiziksel gözlenebilir büyüklük tıpkı klasik mekanikte olduğu gibi konum ve momentum büyüklükleri cinsinden, bunların bir fonksiyonu olarak ifade edilir. Fiziksel gözlenebilirliğe karşılık gelen lineer ve Hermitsel operatör \hat{r} konum ve \hat{p} momentum operatörlerinin, bu fiziksel gözlenebilirliğin ölçüm değerleri ise \hat{r} konum ve \hat{p} momentum operatörlerinin özdeğerleri olan r_n ve p_n in sırasıyla $\hat{A}(\hat{r}, \hat{p})$ ve $a_n(r_n, p_n)$ şeklinde fonksiyonu olur. Bir A fiziksel gözlenebilirliğinin ölçümü, kendisine karşılık gelen lineer Hermitsel \hat{A} operatörünün $\{a_n\}$ özdeğer spektrumu içinden bir değer alır[8].

3.3.1. Dalga Fonksiyonu

Fiziksel bir sistem kendisinin tüm davranışlarını karakterize eden bir Ψ dalga fonksiyonuyla tanımlanır. Dalga fonksiyonu klasik bir dalga değil konum uzayının sadece belirli bir bölgesinde yerleşmiş dalga paketidir. Böylece dalga fonksiyonunun genliği uzayın belirli bir bölgesinde sonlu bir değerde ve kalan uzayda sıfır olur ve bir çok farklı dalga boyuna sahip düzlem dalgaların süperpozisyonu olarak düşünülebilir. Farklı dalga boylu düzlem dalgalar uzayın belirli bir bölgesi dışında kalan tüm uzayda birbirlerini yok edecek şekilde üst üste gelirler.

3.3.2. Dalga Fonksiyonunun Konum Uzayındaki Temsili ve Onun Fourier Eşleniği Olan Momentum Uzayındaki Temsili

Her hangi bir $2a$ periyoduna sahip her fonksiyon Fourier serisine açılabilir:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi \frac{x}{a}} \quad 3.41$$

Fakat, dalga fonksiyonu uzayın belirli bir bölgesinde yerleşmiş olduğunda periyodik değildir:

$$\psi(x) \neq \psi(x + 2a) \quad 3.42$$

Bu zorluk $2a$ periyodunu sonsuza genişletip $k_n = n \frac{\pi}{a}$ dalga sayısı tanımlanarak

aşılır. $n=1,2,3\dots$ için ardışık k_n değerleri arasındaki fark $\delta k = \frac{\pi}{a}$ olur. Dalga

fonksiyonunun Fourier serisi,

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i n \pi \frac{x}{a}} \quad 3.43$$

şeklinde olur. c_n katsayıları içinde k_n ve δk değerleri ise,

$$c(k_n) = \frac{\delta k}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \psi(x') e^{-i k_n x'} dx' \quad 3.44$$

şeklinde oluşurlar. Bu sonuç dalga fonksiyonu için kullanılırsa,

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{i k x} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \psi(x') e^{-i k x'} \quad 3.45$$

bulunur. Bu bağıntı Fourier integral teoremidir. c_n katsayılarının yerine tanımlanan $\phi(k)$ genlik fonksiyonu,

$$\phi(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi(x) e^{-i k x} \quad 3.46$$

olarak tanımlandığında dalga fonksiyonu,

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \phi(k) e^{i k x} \quad 3.47$$

olur. Bu bağıntılar arasındaki simetriden $\phi(k)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları aralarında Fourier dönüşükleridirler. Bu bağıntıyla periyodik olmayan dalga fonksiyonu $e^{i k x}$ düzlem dalgalarının bir süperpozisyonu olarak yazılmıştır. Bu toplamın yazılabilmesi için $\phi(k)$ fonksiyonun bilinmesi gereklidir[5].

3.3.3. Dalga Fonksiyonunun Olasılık Yorumu

Fiziksel sistem $\Psi(\vec{r}, t)$ dalga fonksiyonuyla belirlenen durumdayken, bu fiziksel sisteme ait \hat{A} operatörünün incelenen durumdaki beklenen değeri,

$$\langle \hat{A} \rangle_{\Psi} = \int_{\tau U} \Psi^* \hat{A} \Psi d^3 r = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle \quad 3.48$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımda $\Psi(\vec{r}, t)$ dalga fonksiyonu,

$$\int_{\tau U} |\Psi|^2 d^3 r = 1 \quad 3.49$$

şeklinde bire normlandırılmıştır. \hat{A} operatörünün beklenen değeri integral tüm uzay koordinatları üzerinden alındığından sadece zamana bağlıdır.

Fiziksel sistem \hat{A} operatörünün bir a_n özdeğerine karşılık gelen u_n öz durumunda bulunuyorsa $\Psi = u_n$ ve $\langle \hat{A} \rangle_{\Psi} = a_n$ olur. Böyle bir durumda A fiziksel gözlenebilirliğinin ölçümü %100 kesinlikle a_n özdeğeri olarak bulunur. Fiziksel sistem $\Psi \neq u_n$ durumunda bulunuyorsa, $\Psi(\vec{r}, t)$ dalga fonksiyonu A fiziksel gözlenebilirliğinin $\{u_n\}$ özfonksiyonlarının,

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n(t) u_n(\vec{r}) \quad 3.50$$

şeklinde serisi olarak yazılabilir. \hat{A} operatörü hermitsel bir operatör olduğundan özfonksiyonları tam ortonormal bir küme oluştururlar. Hermitsel \hat{A} operatörünün beklenen değeri böylece,

$$\langle \hat{A} \rangle_{\Psi} = \sum_n |c_n|^2 a_n \quad 3.51$$

şeklinde olur. $\Psi(\vec{r}, t)$ dalga fonksiyonu bire normlandırılmış olduğundan,

$$\int_{\tau U} |\Psi|^2 d^3 r = \sum_n |c_n|^2 = 1 \quad 3.52$$

bulunur. Bulunan bu sonuçlara göre, fiziksel sistemin durumunu belirleyen $\Psi(\vec{r}, t)$ dalga fonksiyonunun hermitsel \hat{A} operatörünün özfonksiyonlarının seri olarak yazılması sırasında karşılaşılan c_n katsayılarının mutlak değer karesi, A fiziksel gözlenebilirliğinin ölçümünün \hat{A} operatörünün a_n özdeğeri olarak bulunma olasılığı olarak yorumlanabilir. 3.52 denklemini bu bulunma olasılıklarının toplamının bire eşit olduğunu belirtir. 3.51 denklemini ise, $\Psi(\vec{r}, t)$ dalga fonksiyonu durumunda olan A fiziksel gözlenebilirliğinin beklenen değerinin, fiziksel sistemin bulunduğu durumdaki ortalama değeri olduğunu belirtir.

Aynı $\Psi(\vec{r}, t)$ dalga fonksiyonuyla belirlenen birden çok sayıda özdeş fiziksel sistemler için A fiziksel gözlenebilirliği ölçümü sonucunun a_n özdeğeri bulunma olasılığı $P_\Psi(a_n)$ olarak tanımlandığında, A fiziksel gözlenebilirliğinin $\Psi(\vec{r}, t)$ dalga fonksiyonu durumunda ortalama değeri,

$$(A_\Psi)_{ort} = \sum_n a_n P_\Psi(a_n) = \sum_n a_n |c_n|^2 = \langle \hat{A} \rangle_\Psi \quad 3.53$$

şeklinde yazılabilir. Bu katsayılar,

$$c_n = \langle u_n | \Psi \rangle \quad 3.54$$

şeklinde $\Psi(\vec{r}, t)$ dalga fonksiyonunun u_n öz durum vektörleri üzerindeki izdüşümlerini gösterirler. Katsayılar sanal değerli olabileceklerinden olasılık genliği olarak,

$$P_\Psi(a_n) = |c_n|^2 = |\langle u_n | \Psi \rangle|^2 \quad 3.55$$

şeklinde yazılıp yorumlanabilirler.

\hat{r} konum operatörü, fiziksel sistem bir $\Psi(\vec{r}, t)$ dalga fonksiyonu durumundayken,

$$\langle \hat{r} \rangle_\Psi = \int_{TU} r |\Psi|^2 d^3r \quad 3.56$$

beklenen değerine sahiptir. Bu denklem konumun bileşenlerinin beklenen değerlerinin beklenen değerlerine eşdeğerdir. $|\Psi|^2 d^3r$ ifadesi, parçacığın t anında \vec{r} konumu etrafındaki sonsuz küçük d^3r hacim elemanında bulunma olasılığıdır ve reel değerli,

$$P(\vec{r}, t) \equiv |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \quad 3.57$$

ifadesi bu bölgede bulunma olasılığı yoğunluğudur. Bu sonuca göre, normalizasyon koşulu konum olasılık yoğunluklarının toplamının bire eşit olduğunu veya parçacığın uzay içinde bir noktada var olduğunu belirtir. Sıfırdan farklı değerlere sahip $P(\vec{r}, t)$ olasılık yoğunluklarına sahip bölgeler için parçacığın bu bölgelere yayılmış olduğu değil de parçacığın bulunabileceği yerlerin zamanla değiştiği yorumu yapılabilir.

3.4. Beklenen Değerlerin Zaman İçinde Gelişimi

Fiziksel sistem $\Psi(\vec{r}, t)$ durumdayken \hat{A} operatörünün beklenen değeri genellikle zamanın bir fonksiyonudur. Beklenen değerler zamanla,

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle_{\Psi} = \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} \left| \hat{A} \right| \Psi \right\rangle + \langle \Psi | \dot{\hat{A}} | \Psi \rangle + \langle \Psi | \hat{A} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle \quad 3.58$$

şeklinde değişir. Schrödinger denklemi,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle \quad 3.59$$

ve sanal eşleniği,

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \Psi| = \langle \Psi| \hat{H} \quad 3.60$$

olduğundan beklenen değerın zamana göre türevi,

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle_{\Psi} = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle_{\Psi} + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle_{\Psi} \quad 3.61$$

şeklinde olur. Bu sonuca göre, zamana bağlı olmayan bir operatör Hamiltonyen operatörüyle komüt olur ve beklenen değeri zamanla değişmez ve fiziksel sistemin Hamiltonyen operatörü zamana bağlı değilse kendisiyle komüt olduğundan fiziksel sistemin toplam enerjisinin beklenen değeri bir sabite eşit olur. Bu şekilde olan fiziksel sistemlere korunumlu sistemler denir[7].

3.5. Kuantum Mekaniğinde Fiziksel Sistemin Tanımlanması

Fiziksel bir sistemde ölçülebilir nicelikler yani ölçülebilir değerler, kompleks bir cisim üzerinde tanımlı A cebirine ait olan ve V_H Hilbert uzayında işleyen self-adjoint operatörlerle birleşmişlerdir. Fiziksel sistem için süperseleksiyon kuralları varolduğunda A cebirine ait olan operatörlerin içinden yalnız ölçülebilir değerle ortaklanmış olanları süperseleksiyon operatörleriyle komüt olurlar. V_H Hilbert uzayı süperseleksiyon sektörlerinin,

$$V_H = \sum_i V_{H_i} \quad 3.62$$

şeklinde direkt toplamıdır. Fiziksel sistemin her bir A ölçülebilir değeri V_{H_i} sektörü içinde bir A_i temsiline sahiptir. Bu durum V_{H_i} sektörleri üzerinde P_i izdüşümleriyle,

$$A = \sum_i P_i A_i P_i \quad 3.63$$

şeklinde gösterilir. Buradaki indis süperseleksiyon operatörlerinin spektrumunu sınıflandırır. A cebri,

$$[\hat{r}, \hat{p}] = i\hbar \hat{\mathfrak{S}} \quad 3.64$$

komütasyonuna sahip \hat{r} konum ve \hat{p} momentum operatörleri tarafından oluşturulmuştur. 1-boyutlu parçacığın durumu tanımlanırken Hilbert uzayı $L^2(R, dr)$ olur. Kuantum mekaniksel bir durum A cebri üzerinde tanımlı lineer L formudur. Bu nedenle L formu A cebri'nin \tilde{A} dual uzayının bir elemanıdır. A cebrine ait herhangi bir \hat{A} operatörünün L formundaki görüntüsü $L(\hat{A})$ kompleks sayısıdır. Bu sayı L formundaki operatörün,

$$\langle \hat{A} \rangle_L = L(\hat{A}) \quad 3.65$$

beklenen değeridir. L formu;

$$\tilde{A} \text{ dual uzayının } \hat{\mathfrak{S}} \text{ birim operatörü için } L(\hat{\mathfrak{S}}) = 1$$

$$\tilde{A} \text{ dual uzayının herhangi bir self-adjoint } \hat{A} \text{ operatörü için } L(\hat{A}) \in R$$

$$\tilde{A} \text{ dual uzayının herhangi bir reel self-adjoint } \hat{A} \text{ operatörü için } 0 \leq L(\hat{A}) \in R$$

Benzer parçacıklar için L formu kesin olarak simetri ilkesine uyduğunda fiziksel bir sistem tanımlar.

Olağan durumlar olan sayılabilir serbestlik derecelerinde lineer L formu bir $\hat{\rho}$ operatörü tarafından oluşturulabilir. A cebrine ait \hat{A} operatörünün beklenen değeri, Hilbert uzayı üzerinde tanımlı $\hat{\rho}$ operatörü cinsinden,

$$\langle \hat{A} \rangle_L = L(\hat{A}) = Tr(\hat{\rho} \hat{A}) \quad 3.66$$

şeklinde verilir. $Tr(\hat{\rho} \hat{A})$ Hilbert uzayında kompleks değerli bir sayı olur.

Fiziksel sistemin lineer L formu ve $\hat{\rho}$ operatörü tarafından tanımlanması için;

$$Tr \hat{\rho} = 1$$

$$\hat{\rho}^+ = \hat{\rho} \text{ self-adjoint operatör}$$

$|\varphi\rangle \in \mathcal{V}_H$ için $\langle \varphi | \hat{\rho} | \varphi \rangle \geq 0$ olduğundan $\hat{\rho}$ operatörü negatif değerli olamaz.

Benzer parçacıklar için $\hat{\rho}$ operatörü simetrikleştirme veya antisimetrikleştirme operatörleriyle komüttür.

Fiziksel sistemin bulunabileceği Hilbert uzayına ait olası durumlar $|\varphi\rangle$ vektör demeti üzerinde $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ izdüşümüne karşılık gelen, $\hat{\rho}$ operatörüyle tanımlanmış normalize $e^{i\theta}|\varphi\rangle$ vektörlerinin altkümesi olan saf durumlar vardır ($\theta \in \mathbb{R}$). Saf durumlar süperseleksiyon operatörlerinin öz durumları olmak ve süperseleksiyon operatörlerinin bir süperseleksiyon sektörüne ait olmak zorundadırlar. $|\psi\rangle\langle\psi|$ saf durumundan $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ saf durumuna geçiş olasılığı normalize edilmiş durumlar için $|\langle\varphi|\psi\rangle|^2$ eşitliğiyle verilir. Bir $|\varphi\rangle$ saf durumun verilen bir tam $|x\rangle$ ortonormal bazı içindeki bileşenleri ve $d\mu(x)$ ölçümüyle bir vektör uzayındaki herhangi bir vektör gibi,

$$|\varphi\rangle = \int d\mu(x) |x\rangle\langle x|\varphi\rangle \quad 3.67$$

şeklinde tanımlanabilir. Kovaryant bileşenler,

$$\varphi(x) = \langle x|\varphi\rangle \quad 3.68$$

şeklinindedir. Burada φ , $|x\rangle$ ortonormal bazına göre $|\varphi\rangle$ saf durumunun dalga fonksiyonudur. Bu dalga fonksiyonu, çarpım görünüş faktörüne göre tanımlıdır.

Fiziksel olarak yalnızca $\hat{\rho}$ operatörü ve A ölçülebilir değeri arasındaki $\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A)$ bağıntısı anlamlıdır. Denklemlerin zamanla değişimi, zamana bağımlılığı $\hat{\rho}$ operatörü ve A ölçülebilir değeri arasında nasıl paylaştırıldığına uygun olarak farklı biçimler alır. Zamana bağımlılık için şu iki temsili kullanacağız:

1. Schrödinger temsilinde operatör cebri, zamandan bağımsız $\hat{A}_{S,i}$ operatörleri tarafından oluşturulur. Bununla beraber cebir, zamana bağlı kompleks katsayılarıyla $\hat{A}_{S,i}$ operatörleri,

$$\hat{A}_S(t) = \sum_i a_i(t) \hat{A}_{S,i} \quad 3.69$$

lineer kombinasyonuna denktir. Dinamik tamamen $\hat{\rho}$ operatörünün,

$$\hat{\rho}_S(t) = U(t, t_0) \rho_S(t_0) U(t, t_0)^{-1} \quad 3.70$$

şeklinde olan zamanla gelişimi tarafından tanımlanır. Galilean referans çerçevesinde zaman içinde gelişim operatörü,

$$i\hbar \partial_t U(t, t_0) = \hat{H}_S(t) U(t, t_0), \quad U(t_0, t_0) = \mathfrak{I} \quad 3.71$$

olarak bilinen Schrödinger denklemini sağlar, burada $\hat{H}_S(t)$ Schrödinger temsilindeki Hamiltonyen operatörüdür. Korunumlu bir sistemde $\hat{H}_S(t)$ Hamiltonyen operatörü zamandan bağımsızdır.

2. Heisenberg temsilinde dinamik operatörlerinin zaman içinde değişimi,

$$\hat{A}_H(t, t_0) = U(t, t_0)^{-1} \hat{A}_S(t) U(t, t_0) \quad 3.72$$

şeklinde tanımlanır, $\hat{\rho}$ operatörü,

$$\hat{\rho}_H(t, t_0) = U(t, t_0)^{-1} \hat{\rho}_S(t) U(t, t_0) = \hat{\rho}_S(t_0)$$

şeklinde tanımlandığı halde zamandan bağımsızdır. Heisenberg temsili bir t_0 referans zamanına göre tanımlanır.

3.6. Kuantum Mekaniğinde Simetri Yasaları

3.6.1. Tanım

→ olarak belirtilen bir fiziksel sistemi dikkate alınsın, bu sistemin fiziksel ölçülebilirlikleri S ile sembolize edilen fiziksel sistemden ↓ olarak belirtilen ölçülebilir değerleri ise S' olarak sembolize edilen aynı fiziksel sistemi değiştiğinde ölçülebilir durumlarda benzer yolla değiştiğinde ölçümler benzer değerleri verdiklerinde, dönüşüm bir simetri yasasıdır.

Bir simetri yasası:

1. Ne fiziksel sistemlerin kendi simetrisi hakkında (yalnız mükemmel küresel cisimler dönme ile küresel simetrik olurlar.),
2. Ne de fiziksel sistemlerin dinamiği hakkında, zamanla değişimi hakkında bilgi vermez.

Kuantum mekaniği formalizminde fiziksel bir durum $\hat{\rho}$ operatörü tarafından, bir ölçülebilir değer bir self-adjoint \hat{A} operatörü tarafından, Hilbert

uzayı seçimiyle olası fiziksel sistem tanımlanır. $Tr(\hat{\rho}\hat{A})$ izi, beklenen değer ve $|\varphi\rangle$ saf durumu için $\langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle$ matris elemanıdır. Bunlar aşağıdaki tanımı şart koşar.

Ölçülebilir değerlerin kendileri üzerine gönderimlerinin kümesinin iki surjektif $A\rightarrow^S A$ uygulaması ve fiziksel durumların kendileri üzerine gönderimlerinin $\rho\rightarrow^S \rho$ kümesi varsa, simetri yasası,

$$Tr({}^S\hat{\rho}{}^S\hat{A}) = Tr({}^S\hat{\rho}{}^S\hat{A}) \quad 3.73$$

eşitliğini korur. Bir saf durum S' tarafından başka bir saf durum içine dönüştürülmüştür. $Tr\hat{\rho}^2 = 1$ eşitliği saf durumun karakteristiği olduğundan ve 14 denkleminde \hat{A} operatörü yerine $\hat{\rho}$ operatörü koyarak,

$$Tr{}^S\hat{\rho}^2 = 1 = Tr({}^S\hat{\rho})^2 \quad 3.74$$

eşitliği bulunur. Simetri şartı saf durumlar için,

$$\left|\langle\underline{\varphi}|\underline{\psi}\rangle\right|^2 = \left|\langle{}^S\underline{\varphi}|{}^S\underline{\psi}\rangle\right|^2 \quad 3.75$$

şeklindeki geçiş olasılığını koruyan $|\underline{\varphi}\rangle \rightarrow |{}^S\underline{\varphi}\rangle$ demetleri arasındaki bir surjektif gönderim varlığını ima eder.

3.6.2. Wigner Teoremi

Dönüşüm yasaları $\hat{\rho}$ operatörü üzerine veya Hilbert uzayında $|\varphi\rangle$ saf durumları üzerinde oluştuklarından ve $\hat{\rho}$ operatörleri veya $|\varphi\rangle$ saf durumları 16 denkleminin sınırlamasıyla uygun olup olmadıkları Wigner teoremiyle verilir.

Wigner teoremi:

Herhangi bir simetri yasası $|\underline{\varphi}\rangle \rightarrow |{}^S\underline{\varphi}\rangle$ surjektif gönderimiyle birleşmiş 3.75 denkleminin tarafından yapılır. Burada Hilbert uzayı üzerinde tanımlı bir $\hat{U}(S)$ operatörü vardır. Bu operatör üniter (lineer) veya antiüniter (antilineer) olur: $\hat{U}\hat{U}^+ = \hat{U}^+\hat{U} = \hat{\mathbb{I}}$. U^+ , üniter durumda $\langle\varphi|U^+|\psi\rangle = \langle U\varphi|\psi\rangle$ tarafından ve antiüniter durumda $\langle\varphi|(\hat{U}^+|\psi)\rangle = \langle\hat{U}\varphi|\psi\rangle^*$ tarafından tanımlanır. $|\varphi\rangle$ saf durumu

$|\underline{\varphi}\rangle$ demetine ait olduğunda, $\hat{U}(S)|\varphi\rangle$, $|\overset{s}{\varphi}\rangle$ demetine ait olur. $\hat{U}(S)$ operatörü bir çarpım görünüş faktörüne mükemmel olarak tanımlıdır.

A ölçülebilir değerinin dönüşümü bir saf durum için,

$$\langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle=\langle\overset{s}{\varphi}|\overset{s}{\hat{A}}|\overset{s}{\varphi}\rangle \quad 3.76$$

şeklinde tanımlanır. Wigner teoremi $|\overset{s}{\varphi}\rangle=\hat{U}(S)|\varphi\rangle$ olduğundan ve $\langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle$ matris elemanı reel olduğundan, antiüñiter $\hat{U}(S)$ operatörü için matris elemanı,

$$\langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle=[\langle\varphi|\hat{U}(S)^+]\overset{s}{\hat{A}}[\hat{U}(S)|\varphi\rangle]=\langle\varphi|[\hat{U}(S)^+\overset{s}{\hat{A}}\hat{U}(S)]|\varphi\rangle \quad 3.77$$

sonucunu verir. Bu sonuç tüm $|\varphi\rangle$ saf durumları için geçerli olduğundan self-adjoint \hat{A} operatörünün dönüşüm yasası,

$$\overset{s}{\hat{A}}=\hat{U}(S)\hat{A}\hat{U}(S)^{-1} \quad 3.78$$

şeklinde olur.

3.6.3. Simetri Gruplarının ve Temsillerinin Bir Faza Yükseltilmesi

Bir simetri yasasıyla uyumlu her G grubu; g , G grubunun herhangi bir elemanı olmak üzere simetri grubu olur.

Wigner teoremi, Hilbert uzayında işleyen ve bir çarpım faz faktörüyle mükemmel olarak tanımlanmış üniter veya antiüniter $U(g)$ operatörüyle uyumlu G grubunun herhangi bir g elemanının var olduğunu söyler. G grubunun herhangi bir g elemanına, operatörünün modülünün kompleks sayısı sabit $U(g)$ ve c varlığı için tüm $cU(g)$ operatörlerinin kümesi olan operatör demeti karşılık gelir. Bu kümenin içerdiği herhangi bir operatör, operatör demetinin bir temsilidir.

G grubunun birim elemanı e olarak belirtildiğinde bu elemana karşılık gelen operatör demetinin herhangi bir temsili,

$$U(e)=c\mathfrak{I}, \quad |c|=1 \quad 3.79$$

\mathfrak{I} temsillerinin karşılığı olduğundan şekilde belirtilir. $c=1$ seçmekle tüm temsillerin fazının genel değişimiyle,

$$\forall g \in G \quad U(g) \rightarrow c^*U(g) \quad 3.80$$

şeklinde olur. Bu seçim,

$$U(e) = \mathfrak{I} \quad 3.81$$

eşitliğinden yapılmıştır. G grubunun tüm g_1 ve g_2 elemanları için $w(g_1, g_2)$ faz faktörleri sistemi,

$$U(g_1)U(g_2) = w(g_1, g_2)U(g_1g_2) \quad 3.82$$

$$|w(g_1, g_2)| = 1 \quad 3.83$$

durumunu sağlar. $|\varphi\rangle$ durumu $|\underline{\varphi}\rangle$ demetine ait olduğunda, Wigner teoreminden $U(g_1g_2)|\varphi\rangle$ ve $U(g_1)U(g_2)|\varphi\rangle$ durumları $|\overset{g_1g_2}{\varphi}\rangle$ demetine ait olurlar. Bu nedenle,

$$U(g_1)U(g_2)|\varphi\rangle = w(g_1, g_2, |\varphi\rangle)U(g_1g_2)|\varphi\rangle \quad 3.84$$

$$|w(g_1, g_2, |\varphi\rangle)| = 1 \quad 3.85$$

olur. U operatörünün üniterliği veya antiüniterliği kullanıldığında,

$$\begin{aligned} U(g_1)U(g_2)(|\varphi\rangle + |\psi\rangle) &= w(g_1, g_2, |\varphi\rangle + |\psi\rangle)(|\varphi\rangle + |\psi\rangle) \\ &= w(g_1, g_2, |\varphi\rangle)U(g_1g_2)|\varphi\rangle + w(g_1, g_2, |\psi\rangle)U(g_1g_2)|\psi\rangle \end{aligned} \quad 3.86$$

olduğu görülür. $|\varphi\rangle$ ve $|\psi\rangle$ durumları lineer bağımsız olduklarında,

$$w(g_1, g_2, |\varphi\rangle + |\psi\rangle) = w(g_1, g_2, |\varphi\rangle) + w(g_1, g_2, |\psi\rangle) \quad 3.87$$

eşitliği geçerli olur. Yani $w(g_1, g_2, |\varphi\rangle)$ faz faktörleri $|\varphi\rangle$ durumundan bağımsız olamaz, $w(g_1, g_2)$ faz faktörüyle bu bağımlılık belirtilir.

Bu faz faktörü G grubu içindeki tüm g_1, g_2, g_3 elemanları için, operatörlerin çarpımı birleşme şartını,

$$[U(g_1)U(g_2)]U(g_3) = U(g_1)[U(g_2)U(g_3)] \quad 3.88$$

şeklinde yerine getirir. G grubu içindeki tüm elemanlar için 3.82 denklemini yerine getiren $U(g)$ operatörlerinin bir demet temsili veya bir faza yükseltme grubun temsili biçimlendirir.

$w(g_1, g_2)$ faz faktörü g_1, g_2 ve g_1g_2 'ye bağlı demet operatörleri için $U(g_1), U(g_2), U(g_1g_2)$ temsillerinin seçimine bağlıdır.

$$\forall g \in G \quad U'(g) = \theta(g)U(g) \quad 3.89$$

$$|\theta(g)| = 1 \quad 3.90$$

farklı seçimi dikkate alındığında ve $\varepsilon(g)$, $U(g)$ operatörünün üniter veya antiüniter olup olmadığına toplama ve çıkarmasına denk olduğunda, $U(g)$,

$$U(g_2) = \theta(g_2)^{-1} U'(g_2) \quad 3.91$$

$$U(g_1) = \theta(g_1)^{-1} U'(g_1) \quad 3.92$$

$$U(g_1)U(g_2) = \theta(g_1)^{-1} \theta(g_2)^{-\varepsilon(g_1)} U'(g_1)U'(g_2) \quad 3.93$$

$$U'(g_1 g_2) = \theta(g_1 g_2) U(g_1 g_2) = \theta(g_1 g_2) w(g_1, g_2) U(g_1) U(g_2) \quad 3.94$$

eşitliklerini yerine getirir. Böylece eski ve yeni faz faktörleri arasında,

$$U'(g_1 g_2) = w'(g_1, g_2) U'(g_1) U'(g_2) \quad 3.95$$

$$w'(g_1, g_2) = \theta(g_1 g_2) w(g_1, g_2) \theta^{-1}(g_1) \theta(g_2)^{-\varepsilon(g_1)} \quad 3.96$$

şeklinde bağlantı vardır. Bu şekilde bağlanmış u' ve w' faz faktörlerine benzer tipte veya denk denir. Gerçekten, benzer tiplerin varlığı faza yükseltilmiş G grubunun $U(g)$ temsillerinin kümesi arasında denklik bağıntısı tanımlar.

Sonuç olarak, simetri grubunun varlığı fiziksel sistemlerin sınıflamasını kontrol eder : bu sistemler simetri grubunun bir fazına yükselen temsilin Hilbert uzayında tanımlanmışlardır. Bu temsiller şu şekilde karakterize edilmiştir:

1- $\varepsilon(g) = \pm 1$, yani $U(g)$ operatörünün üniter veya antiüniter karakteri.

2- $w(g_1, g_2)$ faz faktörünün bir tipi, 3.96 denkleminin anlamında denk faz faktörlerinin sınıfı.

3- Verilen $\varepsilon(g)$ ve faz faktörünün tipi için, üniter denkleğe yükselen temsilin sınıfı, yani verilen $w(g_1, g_2)$ ve $\varepsilon(g)$ için $U'(g)$ ve $U(g)$ operatörleri,

$$\forall g \in G \quad U'(g) = AU(g)A^{-1} \quad 3.97$$

şeklinde tanımlı A operatörü varsa üniter denk temsiller tanımlar.

Genel olarak, operatör temsillerini karakterize eden önceki üç nokta sırasıyla daha spesifiktir:

1- Üniter yada antiüniter operatörler:

G bağlantılı Lie grubuysa, $U(g)$ operatörü tüm elemanlar için üniterdir. $\varepsilon(g)=1$. Gerçekten, daima G grubunun biriminin komşuluğundaki g elemanı $g = g_1 g_2$ ve bağlı $U(g)$ operatörü çarpım faz faktörüne denk $U(g_1)U(g_2)$

kesinlikle lineerdir. Üstelik, birimin komşuluğundaki herhangi bir eleman grup elemanlarının sonlu sayıda kısmının çarpımıdır ve böylece tüm elemanlar için $U(g)$ operatörü üniter operatörlerin sonlu sayıda bir miktarının çarpımı olarak üniterdir.

2-Faz faktörünün tipi:

k özdeşlik elemanını içeren G grubu için $U(k)$ operatörü antiüniterse faz faktörü,

$$U(k)U(k) = w(k, k)I \quad 3.98$$

eşitliğine sahiptir. Gerçekten, 3.81 denklemiyle tanımlanan fazın seçiminin kullanımı ve 3.88 denklemine,

$$g_1 = g_2 = g_3 = k \quad 3.99$$

ayarı yapılırsa,

$$\begin{aligned} U(k)U(k)U(k) &= U(k)w(k, k)I \\ &= w(k, k)^* U(k) \\ &= w(k, k)IU(k) \\ &= w(k, k)U(k) \end{aligned} \quad 3.100$$

eşitliği bulunur. Bu nedenle $w(k, k)$ reel olur ve toplaması veya çıkarılması denktir.

G Lie gruplarının geniş bir sınıfı için, G grubunun fazına yükselen sürekli temsiller yani diğerine özdeş olan faz faktörü için buna benzer tipin temsilleri G^* everensel kaplama grubunun gerçek temsilleridir. G^* everensel kaplama grubu, bağlantılı gruptan daha küçük ve basit-bağlantılıdır. G grubu kendisine yerel izomorfik olan G^* everensel grubu ve homomorfizm içindeki G^* everensel grubunun görüntüsüdür.

3.6.4. İnvaryans ve Korunum Yasaları

S bir simetri yasası olmak üzere bu simetri yasası altında invaryant olan bir A gözlenen değeri vardır. Burada Schrödinger temsilinde S_s self-adjoint operatörü,

$${}^s A_s = A_s \quad 3.101$$

olduğundan, S tarafından A gözlenen değerine sağlanan invaryans yasası vardır. Bu tanımın operatörün belirli bir temsili olan Schrödinger temsiline göre olduğunu vurgulanmalıdır. Böylece, yukarıdaki denklem, sistemin dinamikleri simetri yasası altında invaryant olduklarında başka temsiller için invaryantlığı ima etmez.

A gözlenebilir değeri için invaryansın ana sonuçları şunlardır:

1- Gözlenebilirdeğerin dönüşüm yasasından,

$$[A_S, U(S)] = 0 \quad 3.102$$

olduğu görülür. A gözlenen değeri sürekli simetri grubu altında invaryantsa, sonsuz küçük dönüşümler için yazılan yukarıda ki denklem grup temsili grup jeneratörlerinin Schrödinger temsiliyle A_S operatörünün komütasyonunu belirtir.

2- $|\varphi\rangle_S$, a özdeğeriyle A_S operatörünün bir özvektörüyseniz $|\varphi\rangle_S$ durumu ayrıca aynı özdeğerle A_S operatörünün bir özvektörüdür. Gerçekten, a özdeğeri reel olduğundan, üniter veya antiüniter $U(S)$ operatörü için,

$$\begin{aligned} A_S |\varphi\rangle_S &= U(S)U(S)^{-1} A_S U(S) |\varphi\rangle_S \\ &= U(S) A_S |\varphi\rangle_S \\ &= a |\varphi\rangle_S \end{aligned} \quad 3.103$$

eşitliğine sahip olunur. Böylece, A bir simetri yasası altında invaryantsa A_S operatörünün özdeğerleri dejeneredir.

Şu özel durumlar önemlidir:

1- \hat{A}_S operatörü, $\hat{\rho}_S(t)$ operatörü olarak alınıyorsa, fiziksel durum verilen t zamanında simetri yasası altında invaryant olur:

$$[\hat{\rho}(t), \hat{U}(S)] = 0. \quad 3.104$$

Bir $|\varphi t\rangle_S$ saf durumu için invaryantlık, w faz faktörü olmak üzere,

$$|\varphi t\rangle_S = w |\varphi t\rangle_S \quad 3.105$$

olduğunu ima eder. Bu özellikler, yalnız sistemin dinamikleri S tarafından invaryant kılınıyorsa, zaman içinde gelişimleri de korunurlar.

2- \hat{H} Hamiltonyeni bir S simetri yasası altında invaryantsa özellikle \hat{H}_S operatörünün dejenere spektrumu için yukarıdaki denklemleri sağlar. Bundan başka, $\hat{U}(t, t_0)$ gelişim operatörü,

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{\mathcal{I}} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_S(t') \hat{U}(t', t_0) \quad 3.106$$

integral denklemini sağlar ve $\hat{U}(S)$ operatörüyle komütür:

$$\forall t \text{ için } [\hat{U}(t, t_0), \hat{U}(S)] = 0 \quad 3.107$$

S simetri yasası tarafından gözlenen değerler veya durumlar üzerinde oluşturulmuş gönderimin zaman içinde gelişimi altında durgun olduğunu ima eder. Bu sonuç bir yoğunluk operatörü için,

$$\begin{array}{ccc} \rho_S(t_0) & \xrightarrow{U(t, t_0)} & \rho_S(t) \\ \downarrow S & & \downarrow S \\ {}^S \rho_S(t_0) & \xrightarrow{U(t, t_0)} & {}^S \rho_S(t) \end{array} \quad 3.108$$

olarak şematize edilebilir.

Komütasyon bağıntısı, $\hat{U}(S)$ operatörleri için korunum yasalarını verir. Grup temsilinin jeneratörleri için sürekli bir simetri grubu varsa bu jeneratörlerin tüm fonksiyonları için denklemler korunum yasalarını verir.

Bir S simetri yasası altında \hat{H} Hamiltonyeni ve verilen A gözlenen değeri invaryantlarsa, gözlenen değerın Heisenberg temsili S simetri yasası tarafından değiştirilemez:

$${}^S A_H(t, t_0) = U(S)U(t, t_0)^{-1} A_S(t)U(t, t_0)U(S)^{-1} = A_H(t, t_0) \quad 3.109$$

Benzer durumda, \hat{H} ve $\hat{\rho}$ operatörleri simetri yasası altında invaryantlarsa fiziksel durum herhangi bir zamanda simetri yasası altında invaryanttır. 3.104 denklemini tüm t zamanları için geçerlidir.

3.6.5. 3-boyutlu Dönme Grubuna Uygulama

3-boyutlu dönme grubunun bir simetri grubu olduğunu farz ederek, $SO(3)$ grubunun fazına yükselen kuantum mekaniği temsillerinin tanımlarına sahip olunur.

- 1- $SO(3)$ grubu bağlantılı bir Lie grubu olduğundan temsilleri üniterdir.
- 2- $SO(3)$ grubunun faza yükselen temsilleri $SO(3)$ grubunun evrensel kaplama grubunun gerçek yani 2×2 kompleks ünimodüler matrislerin kümesi olan $SU(2)$ grubunun temsilleridir. $SO(3)$ grubunun yerine $SU(2)$ grubunun düşüncesi, özellikle yarım tam sayı spin matrislerinin varlığının anlaşılması için önemlidir.
- 3- $\hat{D}'[SU(2)]$ temsillerinin tümü yalnız $SU(2)$ grubunun üniter ve indirgenemez temsilleriyle üniter denklik gösterler.

Yalnızca bir simetri grubunun varlığı ortaya konulabilirken asla sistemin Hamiltonyeni ve dinamiklerinin geneli için olası invaryansın tanımı mümkün değildir[9].

4. $SU(n)$ VE $SO(n)$ GRUPLARININ KUANTUM MEKANIĞİNE UYGULAMALARI

4.1. Dönme Grubunun Kuantum Mekaniğinde Temsilleri

Bir fiziksel sistemin kuantum mekaniği, A cebrinin ölçülebilir değerlerinin bir çok kesin dinamiklerini içerir. Aslında, çeşitli ölçülebilir değerler, sistemin dinamiklerinin bir altküme fonksiyonunu ifade edebilir. Sistemin dinamiklerinin bir altküme fonksiyonuna ölçülebilir değerlerin temel sistemi denir. A cebri, verilen temel ölçülebilir değerlerin komütasyon bağıntılarıyla tam olarak belirlenir. Ölçülebilir değerlerin tanımı, yalnız E uzayı, ölçülebilir değerlerin işlemlerinde açıkça belirtildiğinde tamdır. Bu tanım her bir ölçülebilirliğin tanımlı olduğu E uzayında bir baz seçilerek yapılabilir. Bu operatör temsillerinin dinamik değişkenleri, ölçülebilir değerlerin dışında dönüşümü bu işlemle garantiye alınır, işlem cebri komütasyon bağıntılarını karşılar. E uzayının herhangi bir bazı, komütlü ölçülebilir değerlerin bir tam kümesinin özbazı tarafından belirlenebilir, yani ölçülebilir değerlerin bir kümesi, diğerlerinin bir fonksiyonu olarak ifade edilebilir. Operatörlerin hepsi çiftler halinde komütürler ve tek tanımlı ortak bir baza sahiptirler. Yalnızca ölçülebilir değerlerin cebri bilgisi E uzayının kesin belirlenmesini yapmaya yeterlidir. Fiziksel durumlar Hilbert uzayı biçiminde olan E uzayındaki normalize edilebilir vektörlerle birleşmişlerdir.

Non-relativistik fiziğin nokta uzayı 3 – boyutlu Euclidyen E_3 uzayıdır. Bu uzayda varolan dönmelerin grubu olan 3 – boyutlu dönme grubu bir simetri grubudur. Bu grupta dikkate alınan E uzayı bu grubun bir fazına götürür. $a(O, e_i)$ ortonormal referans çerçevesi E_3 uzayı içinden seçilir. E_3 uzayında O noktası etrafındaki dönmelerin $R = (O; R)$ grubu ve $SO(3)$ grubu arasında birebir uygunluk vardır. $SO(3)$ grubunun fazının temsilleri kendisinin evrensel kat grubunun gerçek temsilleri, yani $SU(2)$ grubudur. $SU(2)$ grubunun indirgenemez ve üniter D^j temsilleri, $SO(3)$ grubu ve $SU(2)$ grubunun temsilleri arasındaki bağlantı da biliniyor. Herhangi bir $D[SU(2)]$ temsili

$D[SO(3)]$ temsiliyle uyumludur. Bu uygunluk bir gerçek temsil veya çift değerli bir temsille D 'ye uygun olduğunda D tek ($\varepsilon = +1$) veya çift ($\varepsilon = -1$) temsilidir:

$$\begin{aligned} \forall R \in SO(3) \leftrightarrow \exists U \in SU(2), \quad R(U) = R \\ D(R) = D[R(U)] = \hat{D}(U) \\ = D[R(-U)] = \hat{D}(-U) = \varepsilon \hat{D}(U) \quad \varepsilon = \pm 1 \end{aligned} \quad 4.1$$

Bu iki durum sırasıyla j 'nin tam ve yarım tamsayı değerlerine uygundur. Hilbert uzayındaki $|\underline{\varphi}\rangle$ demetiyle birleşmiş herhangi bir saf durumun bir $R = (O; R)$ dönmesi altında dönüşümü Wigner teoremiyle verilir. A cebri içindeki herhangi bir A ölçülebilir değeri $D(U)$ üniter operatörüyle realize edilmiştir:

$$\begin{aligned} \forall |\varphi\rangle \in |\underline{\varphi}\rangle \subset H \xrightarrow{R} |{}^R\varphi\rangle = D(U)|\varphi\rangle \in |{}^R\underline{\varphi}\rangle \subset H, \\ \forall A \in A \xrightarrow{R} {}^R A = \hat{D}(U) A \hat{D}(U)^{-1} \in A. \end{aligned} \quad 4.2$$

$\hat{D}(U)$ üniter operatörünün bir çarpım faz faktörüne eşit derecede tanımını hatırlatır. $\hat{D}(U)$ operatörü üniterdir ve matris elemanları,

$$\langle \varphi | A | \varphi \rangle = \langle {}^R\varphi | {}^R A | {}^R\varphi \rangle \quad 4.3$$

dönüşümü altında invarianttır. Ayrıca operatörlerin dönüşüm yasası A cebri içindeki komütasyon bağıntılarını korur. Burada, verilen fiziksel sistemin tanımıyla birleşik E vektör uzayı ve A cebri için dönme grubunun temsilleri üstünde kesinlik kalır. Üniter $\hat{D}(U)$ operatörü $SU(2)$ grubundaki tüm U elemanları için E uzayının bazında (örneğin komütlü ölçülebilir değerlerin bir tam kümesinin özbazında) işlemesiyle kesinlik kazanabilir. Buradan, yalnızca komütlü ölçülebilir değerlerin tam kümesi biçiminden ölçülebilir değerlerin her bir dönme altındaki dönüşüm yasasının belirlenmesi gereklidir.

4.1.1. Spinsiz Parçacıklar

Ölçülebilir değerler ve durumlar

E_3 nokta uzayındaki O referans noktası genellikle seçimin yapıldığı nokta olduğu varsayılır. Ayrıca, O referans noktası etrafında yalnız $R = (O, R)$ dönmeleri dikkate alınır. Bu nedenle, E_3 uzayındaki konum vektörleri yerine \vec{E}_3

uzayındaki M noktalarıyla ve \dot{E}_3 uzayındaki $R = (O, R)$ dönmeleri yerine E_3 uzayındaki R dönmeleri dikkate alındığından,

$$\forall M \in \dot{E}_3 \quad OM = \bar{r} \in E_3 \quad M' = \hat{R}M \quad OM' = \hat{R}OM \quad 4.4$$

olur. Bir spinsiz parçacık \hat{r} konum ve \hat{p} momentum operatörlerinin dinamik değişkenleriyle,

$$\bar{r} = x^i e_i \quad \bar{p} = p^i e_i \quad 4.5$$

Şeklinde karakterize edilir. Burada e_i , E_3 uzayında herhangi bir sabit ortonormal bazdır. Bu operatörlerin ölçülebilir değerleri,

$$[x^i, x^j] = 0 \quad [p^i, p^j] = 0 \quad [x^i, p^j] = i\hbar \delta_{ij} \mathfrak{S} \quad 4.6$$

komütasyon bağıntılarına uyarlar. Bu operatörlerin özvektörleri ortogonalite şartına uyduklarından, herhangi bir ölçülebilir değer bu operatörlerin temel ölçülebilir değerlerinin bir $A(a_r, a_p)$ fonksiyonu olur. Ölçülebilir değerler:

1. \hat{r} konum operatörü komütlü ölçülebilir değerlerin tam bir kümesini oluşturur.

2. \hat{r} konum vektörü operatörünün spektrumu sürekli ve nondejenere ve bu spektrum E_3 uzayında yayılır. Konum operatörünün özvektörleri sonsuz bir norma sahiptir ve bu özvektörler,

$$\hat{r}|r\rangle = a_r|r\rangle \quad \langle r'|r\rangle = \delta_3(\bar{r}' - \bar{r}) \quad 4.7$$

normalizasyon şartıyla tanımlanıp seçilirler. Böylece E_3 uzayı bu özvektörler tarafından gerildiğinden özvektörler bu uzayı kaplayan bir bağıntıya sahiptir:

$$\int_{E_3} d^3\bar{r} |r\rangle \langle r| = \mathfrak{S}. \quad 4.8$$

3. \hat{p} momentum operatörünün matris elemanları \hat{r} konum operatörünün özvektörlerinin oluşturduğu $|r\rangle$ bazında vektör notasyonunda sembolik olarak

$$\langle r|\hat{p}|r'\rangle = -i\hbar \delta'_3(\bar{r} - \bar{r}') \quad 4.9$$

şeklinde anlaşılırlar. \hat{p} momentum operatörü ayrıca, E_3 uzayında nondejenere olarak yayılan bir spektruma sahiptir. Momentum operatörünün özvektörleri ise

$$\hat{p}|p\rangle = a_p|p\rangle, \quad \langle r|p\rangle \propto \exp\left(\frac{i}{\hbar} \bar{r} \cdot \bar{p}\right) \quad 4.10$$

şeklinde bir sonsuz norma sahiptir. Normalize olan özvektörler,

$$\langle p' | p \rangle = \delta_3(\vec{p}' - \vec{p}) \quad \langle r | p \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{r} \cdot \vec{p}\right) \quad 4.11$$

bağıntılarıyla seçildiğinde \hat{p} momentum operatörünün spektrumu E_3 uzayında bir ölçülebilir değerler kümesi oluşturur. Bu nedenle,

$$\int d^3 \vec{p} |p\rangle \langle p| = \mathfrak{I} \quad 4.12$$

kapalılık bağıntısına sahiptir. Fiziksel durumlar E_3 uzayında bulunan normalize edilebilir $|\varphi\rangle$ vektörleriyle asosiyatifler. Örneğin, $|\varphi\rangle$ vektörleri konum operatörünün bazıyla,

$$|\varphi\rangle = \int d^3 \vec{r} |r\rangle \varphi(\vec{r}), \quad \langle \varphi | \varphi \rangle = \int d^3 \vec{r} |\varphi(\vec{r})|^2 < \infty \quad 4.13$$

şeklinde bağıntılara sahip olurlar. Buradaki $\varphi(\vec{r}) = \langle r | \varphi \rangle$ dalga fonksiyonu E_3 uzayında tanımlı integrallenebilir kare fonksiyonların $V_H = L^2(E_3, d^3 r)$ Hilbert uzayında tanımlıdır. Hilbert uzayında bulunan momentum operatörü $-i\hbar \vec{\nabla}$ biçimine denktir :

$$\begin{aligned} \langle r | \hat{p} | \varphi \rangle &= \int d^3 \vec{r}' \langle r | \hat{p} | r' \rangle \varphi(\vec{r}') \\ &= -i\hbar \int d^3 \vec{r}' \delta_3(\vec{r} - \vec{r}') \varphi(\vec{r}') \\ &= -i\hbar \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \end{aligned} \quad 4.14$$

Dönme grubu temsillerinin kararlılığı

Dönme grubu, konum operatörünün baz vektörlerinin dönüşüm yasalarını kesin olarak belirler. Konum operatörünün $|r\rangle$ özvektörü normalize edilemediğinden fiziksel durumların Hilbert uzayına ait değildir. Herhangi bir R dönmesi altında $|r\rangle$ özvektörünün dönüşüm yasası, E_3 uzayında dönme grubunun gerçek temsili,

$$|^R r\rangle = D(R) |r\rangle = |Rr\rangle \quad 4.15$$

olduğundan,

$$D(R) [D(R) |r\rangle] = D(R) |Rr\rangle = |RR'r\rangle = D(RR') |r\rangle \quad 4.16$$

şeklinde olur. $SU(2)$ grubu ve çift temsilleri indirgenemez temsillere bağlıdır. İndirgenmez temsiller tam sayı değerler alan l indisıyla \hat{D}^l operatörleridir. Konum operatörünün dönüşüm yasası,

$$\begin{aligned} {}^R\hat{r}|\bar{r}\rangle &= D(R)\hat{r}D(R)^{-1}|r\rangle = D(R)\hat{r}|R^{-1}r\rangle \\ &= D(R)R^{-1}\hat{r}|R^{-1}r\rangle = R^{-1}\hat{r}|r\rangle \end{aligned} \quad 4.17$$

şeklinde olur. Bu denklemdeki tüm $|r\rangle$ vektörleri elimine edildiğinde,

$${}^R\hat{r} = D(R)\hat{r}D(R)^{-1} = R^{-1}\hat{r} \quad 4.18$$

eşitliği bulunur. Böylece konumun dönüşümünün herhangi bir ortonormal bazla ilgisi,

$$\begin{aligned} \bar{r} &= x^i e_i, \quad {}^R\bar{r} = {}^R x^i e_i \\ {}^R x^i &= D(R)x^i D(R)^{-1} = x^j (R^{-1})_j^i = \sum_j x^j R_j^i \end{aligned} \quad 4.19$$

şeklinde olur. 4.13,18 denklemlerini ve $D(R)$ 'nin lineer karakterini kullanarak E_3 uzayında bulunan herhangi bir $|\varphi\rangle$ vektörünün dönüşüm yasası,

$$\begin{aligned} |{}^R\varphi\rangle &= D(R)|\varphi\rangle = \int d^3\bar{r} |Rr\rangle \varphi(\bar{r}) \\ &= \int d^3\bar{r} |r\rangle \varphi(R^{-1}\bar{r}) \end{aligned} \quad 4.20$$

olarak çıkarılır. Buradaki son eşitlik herhangi bir dönme altında ölçümün değişmezliğinden bulunmuştur. Özel bir durumda $|p\rangle$ vektörü için $R^{-1}\bar{r} \cdot \bar{p} = \bar{r} \cdot R\bar{p}$ olduğundan ve 4.11 denkleminde,

$$|{}^R p\rangle = D(R)|p\rangle = |Rp\rangle \quad 4.21$$

bulunur. Dönüşen ${}^R\hat{r}$ operatörünün tanımında türevin tekrarlanmasıyla momentum operatörünün dönüşüm yasası,

$${}^R\hat{p} = D(R)\hat{p}D(R)^{-1} = R^{-1}\hat{p} \quad 4.22$$

şeklinde bulunur. \hat{r} konum ve \hat{p} momentum vektör operatörlerinin R^{-1} dönmesi altındaki davranışları kadar R dönmesi altındaki davranışlarına da dikkat etmek gereklidir. \hat{x}^i ve \hat{p}^i operatörleri rankı bir olan tensörün kartezyen bileşenleri gibi davranırlar.

Dalga fonksiyonunun dönüşümü

Herhangi bir R dönmesi altında $\varphi(\vec{r})$ dalga fonksiyonu dönüşüm yasası, $\varphi(\vec{r})$ dalga fonksiyonu üzerine üniter $D(R)$ operatörü işlediğinden,

$$\varphi \rightarrow {}^R\varphi = D(R)\varphi, \quad {}^R\varphi(\vec{r}) = \langle r | {}^R\varphi \rangle = \varphi(R^{-1}\vec{r}) \quad 4.23$$

olur. Bu sonuç, $D(R)$ üniter operatörünün üniter karakterinden doğrudan,

$$\langle r | {}^R\varphi \rangle = \langle r | D(R)\varphi \rangle = \langle R^{-1}r | \varphi \rangle \quad 4.24$$

şeklinde çıkarılabilir.

E_3 Uzayı üzerinde ortonormal baz seçimi üzerinden bağlılık

1. Pratikte E_3 uzayı üzerinde bir parametrizasyon işlemi yapılması, yani kartezyen koordinat sisteminde bir $a = (e_i)$ ortonormal bazı seçilmesi zorunludur.

$$\vec{r} = x^i e_i, \quad x = (x^i), \quad |r\rangle = |a; x\rangle \quad 4.25$$

Notasyonları kullanıldığında $\varphi(\vec{r})$ dalga fonksiyonunun temsilinin φ_a ile yönlendirilmiş parametrelerinin seçimi,

$$\varphi_a(x) = \langle a; x | \varphi \rangle = \varphi(\vec{r}) \quad 4.26$$

şeklinde olur. E_3 uzayındaki R dönmesinin aktif ve pasif bakış noktaları;

$$Ra = (Re_i), \quad Rx = (R_j^i x^j) \quad 4.27$$

olmak üzere

$$\vec{r} = (a; x) = (Ra; R^{-1}x), \quad R\vec{r} = (a; Rx) = (Ra; x) \quad 4.28$$

konuma etkisi şeklinde olur. E_3 uzayında dönme grubunun temsilinin aktif bakış noktası,

$$D(R)|a; x\rangle = |a; Rx\rangle \quad 4.29$$

şeklinde tanımlanır. Bu durum, dalga fonksiyonları için,

$${}^R\varphi_a(x) = \varphi_a(R^{-1}x) \Leftrightarrow {}^R\varphi_a = D(R)\varphi_a \quad 4.30$$

şeklinde olur. R dönmesinin pasif bakış noktası yeni bir $Ra = (Re_i)$ bazı içindeki $a = (e_i)$ ortonormal baz değişimiyle olur. 4.28 denkleminde,

$$|r\rangle = |a; x\rangle = |Ra; R^{-1}x\rangle = D(R^{-1})|Ra; x\rangle \quad 4.31$$

sonucu ortaya çıkar.

$$\varphi_{Ra}(x) = \varphi_a(Rx) \Leftrightarrow \varphi_{Ra} = {}^{R^{-1}}\varphi_a = D(R^{-1})\varphi_a \quad 4.32$$

Bu denklem dikkate alınan temsilin aktif ve pasif bakış noktaları arasındaki denkliği gösterir. Küresel kutupsal koordinatlarda yazılmış olan konum vektörleriyle uyumlu $a = (e_i)$ ortonormal bazına,

$$|r\rangle = |a; r\theta\phi\rangle, \quad \varphi_a(r, \theta, \phi) = \langle a; r\theta\phi | \varphi \rangle = \varphi(\vec{r}) \quad 4.33$$

notasyonlarını kullanarak küresel kutupsal koordinatlar tarafından parametrize edilmişlerdir.

2. İntrinsic \hat{A} operatörlerinin $|\varphi\rangle$ vektörleri üzerine işlem yapmaları burada A_a operatörlerine bağlıdır. Yapılan işlem $a = (e_i)$ ortonormal bazıyla uyumlu φ_a dalgafonksiyonları üzerinedir. Bu operatörler,

$$(A_a \varphi_a)(x) = \langle a; x | \hat{A} | \varphi \rangle = \int d^3 x' A_a(x, x') \varphi_a(x') \quad 4.34$$

şeklinde tanımlanır. $A_a(x, x')$ operatörleri için,

$$A_a(x, x') = \langle a; x | \hat{A} | a; x' \rangle \quad 4.35$$

denkliği vardır. 4.31 denkleminde $a = (e_i)$ ortonormal bazının R dönmesi altında dönüşüm yasası,

$$\begin{aligned} A_{Ra}(x, x') &= \langle Ra; x | \hat{A} | Ra; x' \rangle = \langle a; x | D(R)^{-1} \hat{A} D(R) | a; x' \rangle \\ &= ({}^{R^{-1}}A)_a(x, x') = A_a(Rx, Rx') \end{aligned} \quad 4.36$$

şeklinde olur. Burada, dönüşüm yasasından dolayı,

$$A_{Ra} = ({}^{R^{-1}}A)_a = [D(R)^{-1} \hat{A} D(R)]_a \quad 4.37$$

şeklinde olur.

3. Üstteki sonuçların uygulaması olarak Schrödinger denkleminin çözülmesiyle bulunan dalgafonksiyonları $R(t)a$ bazıyla ilişkilidir. $R(t)a$ bazı Galilean a bazı yönünde sabit \vec{w} açısal hızıyla döner. Galilean a bazında Schrödinger denklemi,

$$\hat{H}_a \varphi_a = i\hbar \partial_t \varphi_a, \quad \varphi(x, t) = \langle a; x | \varphi t \rangle_S \quad 4.38$$

şeklinde olur. Dalga fonksiyonunun dönüşümü 4.32 denkleminde,

$$\varphi_a = D[R(t)] \varphi_{R(t)a} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{w} t \cdot \vec{L}\right) \varphi_{R(t)a} \quad 4.39$$

bağıntısıyla olur. Bu özellikten ve $\vec{w} t \cdot \vec{L}$ ile $\vec{w} \cdot \vec{L}$ nin komütülüğünden,

$$\partial_t \varphi_a = D[R(t)] \left(\partial_t - \frac{i}{\hbar} \vec{\omega} t \cdot \vec{L} \right) \varphi_{R(t)a} \quad 4.40$$

şeklinde olur. 4.32 denkleminin kullanılmasıyla,

$$\left(\hat{H}_{R(t)a} - \vec{\omega} \cdot \vec{L} \right) \varphi_{R(t)a} = i\hbar \partial_t \varphi_{R(t)a} \quad 4.41$$

eşitliği bulunur. Dikkate alınan Hamiltonyen invaryant olduğunda $\hat{H}'_{R(t)a} = \hat{H}_a$ olduğundan, etki altında olan veya hareket ettirilen Hamiltonyen,

$$\hat{H}'_{R(t)a} = \hat{H}_{R(t)a} - \vec{\omega} \cdot \vec{L} \quad 4.42$$

şeklinde olur. Galilean ekseninde yazılı olan Schrödinger denkleminin benzer bir denklem dönme ekseninde de yazılabilir. Ekstra olan $-\vec{\omega} \cdot \vec{L}$ terimi Coriolis pertürbasyonu veya düz Coriolis kuvveti olarak bilinir. Bu terim Coriolis ve merkezkaç kuvvetlerinin her ikisini de içerir.

$\hat{H}'_{R(t)a}$ ifadesi klasik mekanikte de geçerlidir. Dönme altında invaryant olan $V(r)$ potansiyelinde hareket eden m kütleli parçacık için $R(t)a$ ekseninde bulunan etkin \hat{H}' Hamiltonyeni,

$$\hat{H}' = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) - \vec{\omega} \cdot \vec{L} \quad 4.43$$

şeklinde olur. $-\vec{\omega} \cdot \vec{L}$ terimi $-\vec{\omega} \cdot \vec{L} = -\vec{\omega} \cdot \vec{r} \times \vec{p}$ şeklinde açıldığında Coriolis ve merkezkaç kuvvetlerini içerdiği görülür. Dönme eksenlerinde hareketin Hamiltonyen denklemleri,

$$\vec{r} = \vec{\nabla}_{\vec{p}} H' = \frac{\vec{p}}{m} - \vec{\omega} \times \vec{L} \quad 4.44$$

$$\vec{p} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} H' = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} V + \vec{p} \times \vec{\omega}$$

şeklinde olurlar. Burada konum ve momentumun zamana göre türevleri $R(t)a$ ekseninde tanımlıdır.

$$\vec{r} = x^i R(t) e_i \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{x}^i R(t) e_i \quad 4.45$$

dönme eksenini yönüyle parçacığın rölatif hızının ifadesi 4.44 denklemini sağlar.

Parçacık üzerine etkiyen \vec{F} kuvveti;

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{p}} - m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \\ &= \vec{\nabla}_{\vec{r}} V + \vec{p} \times \vec{\omega} - m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \\ &= -\vec{\nabla}_{\vec{r}} V - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad 4.46$$

eşitliklerinden birinin uygulanmasıyla bulunur. Bu denklemlerdeki 2. ve 3. terimler sırasıyla Coriolis ve merkezkaç kuvvetleridir.

Sonsuz küçük jeneratörler, E_3 uzayıyla Lie cebrinin tespit edilmesi

Küresel polar veya kartezyen koordinat bileşenlerinin terimlerindeki sonsuz küçük L_i jeneratörlerinin ifadesi $L_i = -i\varepsilon_{ijk}x^k\partial_{x^k}$ şeklindedir. Bu yolla sonsuz küçük $R(\varepsilon, \hat{n})$ dönmesinin ifadesi 2.100 denkleminin kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} {}^R\varphi(\vec{r}) &= \varphi[\vec{r} - \varepsilon\vec{n} \times \vec{r} + 0(\varepsilon^2)] = \varphi(\vec{r}) - \varepsilon\hat{n}.\vec{r} \times \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) + 0(\varepsilon^2) \\ &= [I - i\varepsilon\hat{n}.\vec{L} + 0(\varepsilon^2)]\varphi(\vec{r}) \end{aligned} \quad 4.47$$

şeklinde bulunur. Bu nedenle 4.14 denklemini dikkate alınarak,

$$\hat{n}.\vec{L} = n^i L_i = \hat{n}.\vec{r} \times (-i\vec{\nabla}) = \frac{1}{\hbar} \hat{n}.\vec{r} \times \vec{p} \quad 4.48$$

bulunur. Bu denklemde \hat{n} in n^i bileşenleri (e_i) ortonormal bazıyla yönlüdür. Şimdi dikkate alınan boyutsuz sonsuz küçük jeneratörlerinin yerine yazılmış bu hesaplama içinde E_3 uzayıyla dönme grubunun dikkate alınan temsili Lie cebrinin ne olduğunun söylenmesi \hbar 'la bölümlere ayrılmış \hat{L} açısal momentum operatörü ve formal \vec{L} açısal momentum vektörünü belirlemeye çalışılacaktır. Fiziksel uygulamalarda \vec{L} açısal momentum vektörü, dikkate alınan boyutsuz sonsuz küçük jeneratörlerin yerine yazılmış bu hesaplama içinde uygun olarak alınır. Bu durum şimdiye kadar yalnızca denklemlerdeki $\hbar^{-1}L_i$ içindeki L_i bileşenlerinin değişim miktarlarıyla türetilmiş ve $\hbar = 1$ olacak şekilde birimler seçilmiştir. Bu bölümümün kalanında bağıntılar açısal momentumun,

$$[L_i, L_j] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k, \quad D[R(\theta, \hat{n})] = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{n}.\vec{L}\right) \quad 4.49$$

bileşenlerinin terimlerinde ifade edilecektir.

Standart baz, bir üçlü (Triad) üzerinden bağlılık

E_3 uzayıyla Lie cebrinin belirlenmesi, E_3 uzayındaki $a = (e_i)$ ortonormal bazının seçimiyle sonsuz küçük jeneratörler,

$$\hat{L} = \sum_i L_i e_i \quad 4.50$$

olarak görülür. $\hat{r}, \hat{L}^2, \hat{L}_3$ operatörleri, komütlü ölçülebilir değerlerin bir tam kümesi formundadır. L_i sonsuz küçük jeneratörlerin seçimi üzerindeki sıralamada $|a; rlm\rangle$ standart baz vektörleriyle,

$$\begin{aligned} \hat{r}|a; rlm\rangle &= r|a; rlm\rangle, \quad \hat{L}^2|a; rlm\rangle = \hbar^2(l+1)|a; rlm\rangle \\ \hat{L}_\pm|a; rlm\rangle &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}|a; rlm\pm 1\rangle \\ \hat{L}_3|a; rlm\rangle &= \hbar m|a; rlm\rangle \end{aligned} \quad 4.51$$

şeklinde ifade edilirler. Bu notasyonun terimlerinde, bir dönmenin aktif bakış noktası, durumların değişimine,

$$D(R)|a; rlm\rangle = |a; rlm'\rangle \hat{D}'_{m'm}(R) \quad 4.52$$

şeklinde bağlıdır. $SU(2)$ grubunun tek gösterimleriyle ilgili olduğundan $D(U)e^j_{m;\mathfrak{S}} = e^j_{m;U}$ özelliği kullanılarak R dönmesinin pasif bakış noktası açısal momentum bileşenlerinin kuantize ekseninin değişimine,

$$D(R)|a; rlm\rangle = |Ra; rlm\rangle \quad 4.53$$

şeklinde bağlı olduğu bulunur. Burada Ra , U ölçüsüyle kesin olarak $R = R(U; a)$ şeklinde belirlenir. Ayrıca Ra ya da üçlü denir. Bazen, Ra yukarıdaki denklemlerdeki sonsuz küçük jeneratörlerle ve $|Ra; rlm\rangle$ vektörüyle belirlenen R dönmesiyle,

$$RL_i = L_j R_i^j \quad 4.54$$

standart baz formundaki bu vektörler nedeniyle olarak açıklanır. $SU(2)$ grubu elemanlarının dönüştürdüğü bazdan daha genel olarak,

$$|R'a; rlm\rangle = D(R'R^{-1})|Ra; rlm\rangle = |Ra; rlm'\rangle \hat{D}'_{m'm}(R^{-1}R') \quad 4.55$$

durumu ortaya çıkar. $|a; rlm\rangle$ vektörleri,

$$\langle a; r'\theta\phi | a; rlm\rangle = \delta(r' - r) Y_m^l(\theta, \phi) \quad 4.56$$

faz seçimi kullanarak küresel harmonikler tam olarak belirlenir.

Çok parçacıklı sistemler

Fiziksel sistem ölçülebilir değerlerin cebri ve uzayı üzerinde farklı spinsiz parçacıklardan oluşur. Bu parçacıkların işlemleri vektör uzayları ve cebirlerin tensörel çarpımıyla kurulurlar. Sistemin herhangi bir parçacığının ölçülebilir

değerleriyle diğer parçacıkların ölçülebilir değerlerinin komüt oldukları varsayılır. Böyle bir sistem için dönme grubunun temsili,

$$D(R)|\vec{r}_1\rangle \otimes \dots \otimes |\vec{r}_N\rangle = |R\vec{r}_1\rangle \otimes \dots \otimes |R\vec{r}_N\rangle \quad 4.57$$

4.1.2. Spin-s Parçacıklar

Ölçülebilir değerler ve durumlar

Parçacıkların klasik benzeri olmayan üç yeni spin veya iç momentum bileşenleri olduğunu dikkate alan bir tanımlamayla S_i ölçülebilir değerleri bu yeni değişkenlere uygun olur. Bu durum açısal momentum bileşenlerinin olağan komütasyonuyla,

$$[S_i, S_j] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} S_k \quad 4.58$$

şeklinde karşılır. S_i ölçülebilir değerlerinin \hat{r} konum ve \hat{p} momentum operatörleriyle komüt olduğu varsayılır. Sonuç olarak çok genel bir işlem uygulanarak vektör uzayının a_r ve a_p özdeğerlerinin bulunduğu E_3 uzayının tensörel çarpımıyla kurulur. S_i ölçülebilir değerlerinin işlediği E_s vektör uzayı üzerine kurulur. E_s spin uzayı standart baz formunda olan ortonormal $|a; sm\rangle$ baz vektörleriyle,

$$\begin{aligned} \sum_{m=-s}^{+s} |a; sm\rangle \langle a; sm| &= \mathfrak{S}_{E_s} \\ \langle a; sm | \langle a; sm' | &= \delta_{mm'} \end{aligned} \quad 4.59$$

şeklinde aralıklıdır, yani

$$\begin{aligned} S_{\pm} |a; sm\rangle &= \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} |a; sm \pm 1\rangle \\ S_3 |a; sm\rangle &= \hbar m |a; sm\rangle \\ S^2 &= \hbar^2 s(s+1) \mathfrak{S}_{E_s} \end{aligned} \quad 4.60$$

bağıntılarına uyar. s 'nin verilen bir değeri için $2s$ negatif olmayan tam sayıdır. Bu standart baz $SU(2)$ grubunun $W(2)$ Lie cebrine izomorfik Lie cebrinin bazıını şekillendiren S_i ölçülebilir değerlerinin seçimi üzerine bağlanır.

Dönme grubu temsillerinin kararlılığı

Dönmelerin simetri grubu $SU(2)$ grubunun gerçek üniter temsillerini hesaba katarak ilerlenecektir. Bu ayırım kuantum mekaniğindeki yarım tek sayı spinli parçacıkların anlaşılmasına yardımcı olur. Böylece E_3 uzayındaki $\hat{D}^s[SU(2)]$ temsilini,

$$\forall U \in SU(2) \quad \hat{D}(U)|a; sm\rangle = |a; sm'\rangle \hat{D}_{m'm}^s(U) \quad 4.61$$

şeklinde dikkate almak gereklidir $E_3 \otimes E_s$ uzayındaki herhangi bir $|\varphi\rangle$ vektörü,

$$|\varphi\rangle = \int d^3\vec{r} |r\rangle \otimes |a; sm'\rangle \varphi_{m;a}^s(\vec{r}) \quad 4.62$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu vektör 4.15 ve 4.60 denklemlerinden,

$$|\psi(\vec{r})\rangle = |a; sm\rangle \psi_{m;a}^s(\vec{r}) = \langle r | \psi \rangle \quad 4.63$$

vektörünü izler ve E_3 uzayında bir spinör alanı olarak dönme grubunun temsili altında hareket eder. Gerçekten vektör,

$$\begin{aligned} \forall U \in SU(2) \quad |^U \psi(\vec{r})\rangle &= \langle r | D[R(U)] \otimes \hat{D}^s(U) | \psi \rangle \\ &= \langle R(U)^{-1} r | \hat{D}^s(U) | \psi \rangle \\ &= \hat{D}^s(U) | \psi [R(U)^{-1} r] \rangle \end{aligned} \quad 4.64$$

eşitliklerine sahiptir. R^3 uzayı üzerinde tanımlı vektörel fonksiyon uzayındaki $SU(2)$ grubunun temsillerinin çalışmasının hepsi $|a; sm\rangle$ baz vektörleriyle e_m^s bazı üzerinde kimliği saptanır. Tek parçası a yönünde parametrize edilmiş kartezyen veya küresel polar koordinatlarla gösterilen \vec{r} vektörüyle $|\varphi(\vec{r})\rangle$ vektörü için tekrarlanabilen E_3 uzayındaki $a = (e_i)$ ortonormal bazı üzerinden bağıllığı korunur. Bu vektör,

$$|\psi_a(x)\rangle = \langle a; x | \psi \rangle \quad 4.65$$

eşitliğine sahiptir. 4.30,32 denklemlerine uygunlukla R dönmesinin aktif ve pasif bakış noktaları,

$$D(R) |\psi_a(x)\rangle = |\psi_a(R^{-1}x)\rangle = |\psi_{R^{-1}a}(x)\rangle \quad 4.66$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlikte görülen $D(R)$ yalnızca E_3 uzayı üzerinde işler.

Sonsuz küçük jeneratörler, standart baz, bir üçlü (Triad) üzerinden bağlılık

E_3 Öklityen vektör uzayıyla $SU(2)$ grubunun temsillerinin Lie cebirinin bir olarak tutulması üzerine düşünülmesiyle E_3 uzayında tanımlanmış formal vektörlere ulaşılır. Bu vektörler,

$$\vec{L} = \sum_i L_i e_i, \quad \vec{S} = \sum_i S_i e_i, \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \sum_i J_i e_i \quad 4.67$$

şeklinde olur. Bu denklemde $a = (e_i)$, E_3 Euclidyen vektör uzayındaki herhangi bir ortonormal bazı belirtir. $\vec{L}, \vec{S}, \vec{J}$ vektörleri parçacığın orbital, spin, toplam açısal momentumlarını belirtir. Standart baz vektörlerinin normalize edilen dalga fonksiyonlarıyla bulunan $n_l = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}$ denklemine uygunluğu, r , $\hbar^2 l(l+1)$, $\hbar^2 s(s+1)$, $\hbar j(j+1)$ ve $\hbar m$ özdeğerleriyle r, L^2, S^2, J^2, J_3 ölçülebilir değerlerinin komütlü tam kümesinin ortak özvektörleriyle belirlenir. Bu özvektörler,

$$|a; rlsjm\rangle = |a; rlm_l\rangle \otimes |a; sm_s\rangle \langle lsm_l m_s | jm\rangle \quad 4.68$$

şeklinde kararlı olur ve kutupsal koordinatlarda tam küme olma koşulunu,

$$\langle a; r' \theta \phi | a; rlsjm\rangle = \delta(r' - r) \hat{Y}_m^{lsj}(\theta, \phi) \quad 4.69$$

şeklinde sağlarlar. Bu denklemdeki spin küresel harmonikler spin harmoniklerine uyumun düzenlenmesi ve $e_m^s \equiv |a; sm\rangle$ tarafından tanımlanmıştır.

$R = R(\pm U; a)$ dönmesinin aktif bakış noktası durumların değişimine uğrar. Bundan,

$$\forall U \in SU(2) \quad \hat{D}(U) |a; rlsjm\rangle = |a; rlsjm'\rangle \hat{D}_{m'm}^j(U) \quad 4.70$$

olduğu anlaşılır. Diğer taraftan dönmenin pasif bakış noktası toplam açısal momentum bileşenlerinin kuantizasyon ekseninin dönmesine uyar. Pasif nokta koruma gerektirdiğinden, tek veya yarım tamsayı değerler alan s özdeğeriyle uyuşmayan $SU(2)$ grubunun tek veya çift temsillerine paylaştırılacaktır. Bazın $SU(2)$ grubu elemanlarınca dönüştürülmesi kullanarak pasif bakış noktası,

$$\forall U \in SU(2) \quad \hat{D}(U) |a; rlsjm\rangle = |Ua; rlsjm\rangle \quad 4.71$$

şeklinde ifade edilir. Ua üçlüsü aynı zamanda şunları belirtir:

1- $SU(2)$ grubu içindeki her bir U elemanı,

$$|-Ua; rlsjm\rangle = (-1)^{2j} |Ua; rlsjm\rangle \quad 4.72$$

denklemleriyle $|Ua; rlsjm\rangle$ vektörünü belirler.

2-Teklik sonsuz küçük jeneratörleri,

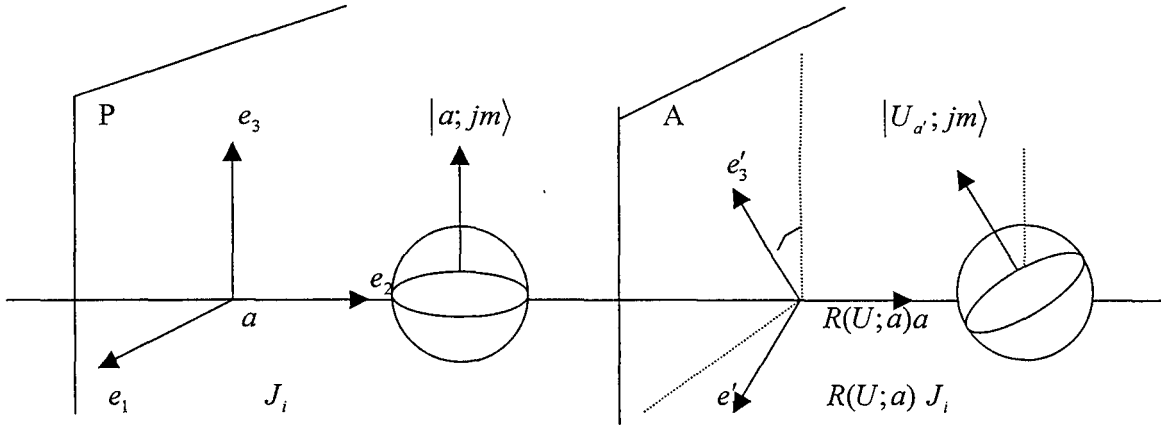
$$R(U; a)j_i = j_i R(U; a)' \quad 4.73$$

şeklinde tanımlanır. Bu jeneratörlerle yönlü $|Ua; rlsjm\rangle$ vektörleri bir standart baz oluştururlar. Daha genel olarak baz dönüşümü denklemlerinden üçlü üzerinde bağımlılık,

$$\begin{aligned} \forall U, U' \in SU(2) \quad |U'a; rlsjm\rangle &= \hat{D}(U'U^{-1})|Ua; rlsjm\rangle \\ &= |Ua; rlsjm'\rangle \hat{D}_{m'm}^j(U^{-1}U') \end{aligned} \quad 4.74$$

şeklinde yapılabilir.

Yukarıdaki bağıntıların uygulamaları :



Şekil 4.5: Polarizasyon deneyi

a. Şekilde polarizasyon deneyi görülüyor. Bir polarizerden geçen diğer kuantum sayıları ihmal edilmiş parçacıklar $|a; jm\rangle$ durumunda önceden hazırlanmıştır. Dedektör, bu parçacıkları $R(U; a)$ dönmesiyle polarizerle aynı yöne dönmüş analizer olarak kullanılan benzer aparattan geçtikten sonra gözlemler. Dedektörün

yapacağı gözlem 4.74 denkleminde $U' = \mathfrak{S}$ değişimi yapılarak bulunur. Bu nedenle, örneğin, $|Ua; jm'\rangle$ durumu gözleminin gözlenme olasılığı,

$$|\langle Ua; jm' | a; jm \rangle|^2 = |\hat{D}_{m'm}^j(U^{-1})|^2 = |\hat{D}_{mm'}^j(U)|^2 \quad 4.75$$

eşitliğiyle verilir.

P polarizeri ve A analizeri a ve $R(U;a)a$ ortogonal eksenlerini belirler. P ve A sırasıyla sonsuz küçük j_i jeneratörlerinin ve $R(U;a)j_i$ jeneratörlerinin standart baz vektörleri olan durumlar içindeki parçacıkları düzenlerler.

b. Helezonik formalizm. Keyfi a ortonormal bazındaki s-spinli parçacığın $|p\rangle \otimes |a; sm\rangle$ durumları yerin dışında hesaplamaya katılması, parçacığın \vec{p} momentumunu 3. eksen boyunca seçilmesine uygun olabilir. Bu yapılan olağan helezonik formalizmin miktarını ayarlar ve momentum yönü boyunca kurar. Benzer formalizm momentum yerine konum üzerinden gerçekleştirilebilir. Helezonik durumların tanımı aşağıdaki gibidir. Referans olarak E_3 uzayında verilen herhangi bir $a = (e_i)$ ortonormal bazı için $SU(2)$ grubu içindeki $U_{\vec{p}}$ matrisinin \vec{p} momentum vektörüyle tanım prosedürünün ortaklanmasının seçimi,

$$R(U_{\vec{p}})e_3 = \vec{p} = \frac{\vec{p}}{p} \quad 4.76$$

şeklinde gösterilir. Örneğin, p, θ, ϕ , a yönlü \vec{p} momentum vektörünün polar koordinatlarıysa, $U_{\vec{p}} = U(\phi, \theta, -\phi)$ seçilebilir ve $R(U_{\vec{p}}; a)$ dönmesi $R_{\vec{p}}$ dönmesidir. E_s spin uzayında 4.71 denkleminin uygulanması,

$$|U_{\vec{p}}a; sm\rangle = \hat{D}^s(U_{\vec{p}})|a; sm\rangle \quad 4.77$$

denklemini verir. Bir helezonik durum $E \otimes E_s$ uzayında,

$$|U_{\vec{p}}a; \vec{p}sm\rangle = |\vec{p}\rangle \otimes |U_{\vec{p}}a; sm\rangle \quad 4.78$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu durum \hat{p} operatörüyle a_p özdeğerinin bir öz durumu ve $S_j \hat{R}(U_{\vec{p}}; a)_i^j$ spin bileşenlerinin standart baz vektörleridir. $U_{\vec{p}}$ matrisinin seçimi bu helezonik durumlar için faz seçimi tanımlar. Herhangi bir $R = R(U; a)$ dönmesi altında helezonik durumun dönüşüm yasası 4.21, 4.74 denklemlerinden

$\forall U \in SU(2)$

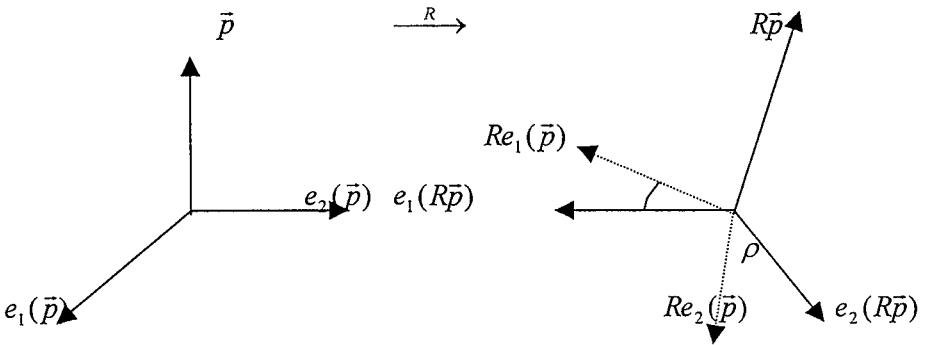
$$\begin{aligned} \hat{D}(U)|U_{\bar{p}}\alpha; \bar{p}sm\rangle &= D[R(U;a)]|\bar{p}\rangle \otimes \hat{D}^s(U)|U_{\bar{p}}\alpha; sm\rangle \\ &= |R(U;a)\bar{p}\rangle \otimes \hat{D}^s(U_{R(U;a)\bar{p}})\hat{D}^s(U_{R(U;a)\bar{p}}^{-1}UU_{\bar{p}})|\alpha; sm\rangle \\ &= |U_{R(U;a)\bar{p}}\alpha; R(U;a)\bar{p}sm'\rangle \hat{D}_{m'm}^s(U_{R(U;a)\bar{p}}^{-1}UU_{\bar{p}}) \end{aligned} \quad 4.79$$

şeklinde olur. Aslında $R(U_{R(U;a)\bar{p}}^{-1}UU_{\bar{p}}; a)$ dönmesi e_3 çerçevesinde bir dönmedir.

Bu nedenle, sonuç olarak,

$$\hat{D}(U)|U_{\bar{p}}\alpha; \bar{p}sm\rangle = |U_{R(U;a)\bar{p}}\alpha; R(U;a)\bar{p}sm\rangle \hat{D}_{mm}^s(U_{R(U;a)\bar{p}}^{-1}UU_{\bar{p}}) \quad 4.80$$

denklemini elde edilir. Burada m indisi üzerinden kısaltma yoktur ve \hat{D}_{mm}^s matris elemanı faz faktörüdür. $e_i(\bar{p})$ tarafından $R(U_{\bar{p}}; a)e_i$ ortonormal baz vektörleri gösterilir. $\hat{D}(U)|U_{\bar{p}}\alpha; \bar{p}sm\rangle$ durumu $e_3[R(U;a)\bar{p}]$ den farklı olan $R(U;a)e_3(\bar{p})$ bazı boyunca bir m spini ve bir $R(U;a)\bar{p}$ momentumuna sahiptir. Şekilde görülen ortonormal baza tutturulmuş her bir \bar{p} keyfi olarak seçilmiştir. $U_{R(U;a)\bar{p}}^{-1}UU_{\bar{p}}$ matrisi $SU(2)$ grubu içinde bir elemandır. 4.74 denkleminde uygun olarak $SU(2)$ grubu $U_{R(U;a)\bar{p}}\alpha$ üçlüsündeki durumların terimlerindeki $UU_{\bar{p}}\alpha$ üçlüsündeki durumun ifadesini ayırır.



Şekil 4.6: Bazın değişimi

$R(U_{R(U;a)\bar{p}}; a)\alpha$ ve $R(UU_{\bar{p}}; a)$ bazlarının rölatif konumları $UU_{\bar{p}}\alpha$ ve $U_{R(U;a)\bar{p}}\alpha$ ölçüleriyle, sırasıyla;

$$R\bar{p} \text{ etrafında } \rho = R(UU_{\bar{p}}U_{R(U;a)\bar{p}}^{-1}; a) \quad 4.81$$

şeklinde ortaklanırlar.

Bu durum Lorentz grubunun fiziksel temsillerinin çalışmasında görülür. $U_{\vec{p}}a$ üçlüsü p beşlisine yerleştirilmiştir ve $R(U_{R(U;a)\vec{p}}^{-1}UU_{\vec{p}};a)$ dönmesine Wigner dönmesi denir.

4.2. Ketler, Bralar, Dalga Fonksiyonları, Operatörler

Bu bölümde operatörler ve durumların özelliklerini gösterilip matris elemanlarının bilinen özelliklerine dağıtılacak, bazı nesnelerin kuantum mekaniğindeki tam karşılıkları bulunacaktır.

4.2.1. Ketlerin, Braların, Dalga Fonksiyonlarının Tensörel Karakteri

Ketler

Diğer kuantum sayıları ihmal edilerek, bir dönme altında E_3 uzayında $|jm\rangle$ ketlerinin dönüşüm yasası 4.52 ve 4.70 denklemlerinden j ranklı ve sıralı tensörün kovaryant küresel bileşenlerinden biriyle hemen hemen aynıdır. Tensörel karakter $|jm\rangle$ olarak belirtildiğinden,

$$|jm\rangle = c_j (-1)^{j+m} |j-m\rangle \quad 4.82$$

eşitliğine sahiptir. $|jm\rangle$ ve $|j\bar{m}\rangle$ ketlerinin $R(U;a)$ dönmesi altında dönüşüm yasası,

$$\forall U \in SU(2) \begin{cases} |^U jm\rangle = \hat{D}(U) |jm\rangle = |jm'\rangle \hat{D}_{m'm}^j(U) \\ |^U j\bar{m}\rangle = \hat{D}(U) |j\bar{m}\rangle = |j\bar{m}'\rangle \hat{D}_{m'm}^{j^*}(U) \end{cases} \quad 4.83$$

şeklinde olur.

Bralar

E^* dual vektör uzayında tanımlı $\langle\varphi|$ brasıyla E uzayında tanımlı $|\varphi\rangle$ keti,

$$\begin{aligned} \forall |\varphi\rangle \in E &\xrightarrow{d} \langle\varphi| \in E^* \\ \forall |\psi\rangle \in E &\longrightarrow \langle\varphi|\psi\rangle \in C \end{aligned} \quad 4.84$$

şeklinde ortaklanır. Belirlenmiş d gönderimi E uzayından E^* dual uzayına antilineer uygulamadır. d gönderimi E ve E^* uzayları arasında intrinsic izomorfizm oluşturur. E^{**} uzayı E^* uzayının dual vektör uzayı olmak üzere E

ve E^{**} uzayları üzerinde tanımlı d gönderimi $d^2 = \mathfrak{I}$ olan grifitliğin dışında dönüşür. $R(U; a)$ dönmesi altında braların dönüşüm yasası,

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle \xrightarrow{R(U;a)} |^U \varphi\rangle &= \hat{D}(U) |\varphi\rangle \\ d \downarrow \qquad \qquad \qquad d \downarrow & \\ \langle \varphi | \xrightarrow{R(U;a)} \langle^U \varphi | &= \langle \varphi | \hat{D}(U)^+ \end{aligned} \quad 4.85$$

şeklinde tanımlanır. Bu nedenle, ele alınan yapı tarafından d gönderimi $SU(2)$ grubunun dikkate alınan temsilleriyle komüttür. Burada + formal gönderimi d gönderimi uygulamasındadır. Ketlerin ve braların tensörel karakteri çizelge 4.1'de gösterilmiştir. Bir \hat{A} operatörünün yukarıdaki kompleks konjuge matris elemanı,

$$\langle jm | \hat{A} | jm' \rangle^* = (-1)^{2j} \langle j'm' | \hat{A}^+ | d jm \rangle = \langle j'm' | \hat{A}^+ | jm \rangle \quad 4.86$$

şeklinde olur.

Dalga fonksiyonları

Dalga fonksiyonlarının tensörel karakteri 4.56 ve 4.59 denklemlerinde açıkça belirtilmiştir. Tensörel bakış noktasından $f_m^{\bar{l}}$ tensörel karakteri dalgafonksiyonlarıyla uyumlu dağıtımdır. $f_m^{\bar{l}}$ dalgafonksiyonları f^l Hermityen tensörünün kontravaryant bileşenleridir. Bu durum ancak l indisinin tamsayı değerleri için olası ve gereklidir. Gerek ve yeter şartlar sağlandığında $Y_m^{l\bar{l}}$ küresel harmonikleri ve $Y_m^{\bar{l}}$ küresel harmonikleri $Y_m^l = (-ic)^l Y_{lm}$ şeklinde tanımlandıklarından $c = \pm 1$ seçimlerinde,

$$f_m^{\bar{l}*} = (-1)^{l+m} f_{-m}^{\bar{l}} \quad 4.87$$

şartına uyarlar.

4.2.2. İndirgenemez Tensörel Temsiller

4.2.2.1. Tanımlar ve özellikleri

İndirgenemez j ranklı bir \hat{A}^j tensör operatörü durumları, dikkate alınan E uzayında işleyen Schrödinger temsilindeki j ranklı operatörlerin $(2j+1)$ bileşenli düzen olarak bir tensör tanımlar. Bu nedenle \hat{A}^j tensör operatörünün kovaryant ve kontravaryant bileşenleri $R(U; a)$ dönmesi altında,

$$\begin{aligned}\forall U \in SU(2) \quad {}^U \hat{A}_m^{\bar{j}} &= \hat{D}(U) \hat{A}_m^{\bar{j}} \hat{D}(U)^{-1} = \hat{A}_{m'}^{\bar{j}} \hat{D}_{m'/m}^j(U) \\ {}^U \hat{A}_m^{\bar{j}} &= \hat{D}(U) \hat{A}_m^{\bar{j}} \hat{D}(U)^{-1} = \hat{A}_{m'}^{\bar{j}} \hat{D}_{m'/m}^{j*}(U)\end{aligned}\quad 4.88$$

dönüşüm yasalarıyla şekilde karakterize edilmiş operatörlerdir. Burada \hat{D} operatörü E uzayındaki $SU(2)$ grubunun üniter temsili anlamına gelir. Herhangi bir tensörel sıralamada olduğu gibi \hat{A}^j indirgenemez tensör operatörünün küresel bileşenleri bir üçlüye ihtiyaç duyar. Aşağıdaki aktif ve pasif bakış noktalarının denklemlerinde görülen sonsuz küçük jeneratörler için bu üçlü bazın seçimi karakterize edilir. Sonsuz küçük U yer değiştirmesi yukarıdaki denklemlerde yerine konup komütasyon bağıntıları takip edilerek,

$$\begin{aligned}\left[J_{\pm}, \hat{A}_m^{\bar{j}} \right] &= \hbar \sqrt{(j+1)j - m(m \pm 1)} \hat{A}_{m \pm 1}^{\bar{j}}, \left[J_3, \hat{A}_m^{\bar{j}} \right] = \hbar m \hat{A}_m^{\bar{j}} \\ \left[\bar{J}_{\pm}, \hat{A}_m^{\bar{j}} \right] &= \hbar \sqrt{(j+1)j - m(m \pm 1)} \hat{A}_{m \pm 1}^{\bar{j}}, \left[\bar{J}_3, \hat{A}_m^{\bar{j}} \right] = \hbar m \hat{A}_m^{\bar{j}}\end{aligned}\quad 4.89$$

sonucuna ulaşılır. Buradaki J_i, \bar{J}_i bileşenleri \bar{J}, \bar{J} açılmal momentumlarının E_3 uzayının $a = (e_i)$ ortonormal bazıyla,

$$\bar{J} = \sum_i J_i e_i \quad \bar{\bar{J}} = \sum_i \bar{J}_i e_i \quad 4.90$$

şeklinde uyumludurlar. Diğer bir deyişle önceki komütasyon bağıntılarının türevi olan ölçülebilir değerlerin cebirindeki $SU(2)$ grubunun temsilini belirleyen 4.1.2 denkleminle uyumlu herhangi bir A ölçülebilir değerinin dönüşüm yasaını kayıt eder. Bu cebir $\hat{D}[SU(2)]$ operatörünün adjoint temsilinin bir ekidir. Gerçekten $\hat{D}[SU(2)]$ operatörü,

$$\hat{D}[U(\theta, n^i)] = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \theta n^i J_i\right) \Rightarrow \hat{D}(U) A \hat{D}(U)^{-1} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \theta n^i \hat{J}_i\right) A \quad 4.91$$

şeklinde olur. Bu eşitlikteki \hat{J}_i 'ler J_i 'lere,

$$\hat{J}_i = \Delta_{J_i} = [J_i, \bullet] \quad 4.92$$

şeklinde adjoint operatörlerdir. İndirgenemez \hat{A}^j tensör operatörünün tanımı, $\hat{A}_m^{\bar{j}}$ 'lerin sonsuz küçük J_i jeneratörleriyle uyumlu standart baz vektörleri gibi davrandığını belirtir. Böylece 4.89 denklemin yeniden elde edilir. Bu formallığın tersi cebirdeki $2j+1$ adet operatörün herhangi bir kümesi 4.88 denkleminle

uyumlu sonlu $R(U; a)$ dönmesi altında 4.89 denklemindeki dönüşümlere uyarlar ve indirgenemez tensör operatör belirlerler.

s-spin durumları için bir üçlü üzerinde indirgenemez \hat{A}^j tensör operatörünün küresel bileşenlerinin bağımlılığında benzer notasyonlar kullanılması $T^j \rightarrow U' T^j$ tensör dönüşümü kullanılarak yapılabilir. $SU(2)$ grubunun tüm U ve U' elemanları için uygulama bakışın aktif ve pasif noktalarına göre,

$$\begin{aligned} U' \hat{A}_{m;Ua}^j &= \hat{A}_{m';Ua}^j \hat{D}_{m'm}^j (U^{-1} U' U) \\ &= \hat{A}_{m';U'Ua}^j \end{aligned} \quad 4.93$$

eşitliklerine sahiptir. Açıkça belirtilmemiş olan üçlü $\Im a$ olarak farz edilmiştir.

Bir skaler operatör rankı sıfır olan indirgenemez tensör operatördür. Ölçülebilir değerlerin Schrödinger temsili toplam açısal momentum bileşenleriyle,

$$U \hat{A} = \hat{A} \Leftrightarrow [J_i, \hat{A}] = 0 \quad 4.94$$

olduğundan skaler operatör dönmenin simetri grubu altında invaryant kalan ölçülebilir değere uygundur. $\vec{A} = \hat{A}'$ vektör operatörü rankı 1 olan indirgenemez tensör operatördür. Burada bu operatörün kovaryant \hat{A}_m^j ve kontravaryant $\hat{A}_m^{\bar{j}}$ küresel bileşenleri vektör operatörün kartezyen \hat{A}_i bileşenleriyle karakterize edilebilir. Bileşenlerin üç kümesi üçlü uyumuyla anlatılmıştır. Schrödinger temsiliinde R dönmesi altında kartezyen bileşenlerin dönüşümü,

$${}^R \hat{A}_i = \hat{D}(R) \hat{A}_i \hat{D}(R)^{-1} = A_j R_i^j \quad 4.95$$

şeklindedir. Bu dönüşüm, R^{-1} dönüşümü altında $\vec{A} = \sum_i A_i e_i$ vektörüne benzer yolla R dönmesi altında A vektör operatörünün dönüşüm bağıntısı takip edilerek,

$${}^R \vec{A} = R^{-1} \vec{A} \quad 4.96$$

şeklinde olur. Bir sonsuz küçük dönme için $J_i v_i = i \sum_j \varepsilon_{ijk} v_k$ denklemi

kullanılarak,

$$\begin{aligned} [J_i, A_j] &= i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} A_k \\ [J_i, \vec{A}] &= -i\hbar \vec{e}_i \times \vec{A} \end{aligned} \quad 4.97$$

bulunur.

Formal antilineer gönderim, operatörlerin hermityen konjugesidir. Hep aynı derecede, çerçevenin tensörelliğinden hermityen indirgenemez operatörlere uygunluğu göz önünde tutularak hermityen indirgenemez tensörler hermityen tensörler tarafından tanımlanmışlardır. Gönderim j indisinin l sadece olası tamsayı değerleri için tekrar isimlendirilir ve $J \rightarrow UJ$ dönüşümünden gerek ve yeter şart,

$$A^l = A^{+l} \Leftrightarrow A_m^{\tilde{l}+} = (-1)^{l+m} A_{-m}^{\tilde{l}} \quad 4.98$$

şeklinde olur. Ölçülebilir değerler hermityen operatörlerle ortaklandıklarından A^l vektör operatörünün A_i kartezyen bileşenleri hermityense, $J_i v_i = i \sum_j \varepsilon_{ijk} v_k$ denkleminde,

$$A_m^{\tilde{l}+} = \left| \frac{c^*}{c} \right| (-1)^{l+m} A_{-m}^{\tilde{l}} \quad 4.99$$

olduğu görülür. Bu nedenle $c = \pm 1$ seçiminde (genelde c reeldir) A^l hermityen vektör operatördür.

Daha genel olarak $A^{j_1 \dots j_n}$ tensör operatörlerin tanımı yapılabilir. Bu tensörler $j_1 \dots j_n$ ranklı ve n düzeninde tensörlerdir. Bu tensörlerin küresel bileşenleri Schrödinger temsiline operatördür. Bir örnek olarak $R(U; a)$ dönmesi altında iki dönüşümün sırasının tensör operatörün $A_{m_1 m_2}^{\tilde{j}_1 \tilde{j}_2}$ küresel bileşenleri,

$$\begin{aligned} {}^U A_{m_1 m_2}^{\tilde{j}_1 \tilde{j}_2} &= \hat{D}(U) A_{m_1 m_2}^{\tilde{j}_1 \tilde{j}_2} \hat{D}(U)^{-1} \\ &= A_{m_1' m_2'}^{\tilde{j}_1 \tilde{j}_2} \hat{D}_{m_1 m_2}^{j_1} \hat{D}(U) \hat{D}_{m_2' m_2}^{j_2*}(U) \end{aligned} \quad 4.100$$

şeklinde olur.

4.2.2.2. Tensörel Operatörlere Örnekler

Vektör operatörler

\hat{r} konum ve \hat{p} momentum operatörleri spinsiz parçacıklar için dönme grubu temsillerinin nitelendirilmesinden sırasıyla 4.18,22 denklemlerinin dönüşümüne uygun vektör operatörlerdir. 4.14 denklemiyle gradyent operatör dalga fonksiyonları uzayı üzerinde işlem yapan,

$$\bar{\nabla} = i\hbar^{-1}\hat{p} \quad 4.101$$

şeklinde tensör operatördür. Bu durum spinsiz parçacığın \bar{S} intrinsic açısal momentumu için gerçektir. \bar{L} orbital açısal momentumu ve \bar{J} toplam açısal momentumu için bu operatörler, $\hat{D}[SU(2)]$ 'nin adjoint temsili altında dönüşürler. $\hat{D}[SU(2)]$, $\hat{r}, \hat{p}, \hat{s}$ vektör operatörleri terimlerindeki ölçülebilir değerlerin temel sistemini biçimlendirdiklerinden herhangi bir ölçülebilir değer ifade edilebileceğini belirtir. Yalnız tamsayı rank değerlerine sahip indirgenemez tensör operatörler bu ölçülebilir değerlerin cebirinde kurulabilirler.

$\hat{D}_{m_0}^{j*}, \hat{D}_{m_0}^j, \hat{Y}^l$ operatörlerinin çarpımı

Bu çarpım fonksiyonel vektör uzayındaki $\hat{D}[SU(2)]$ temsili $f_m^{\bar{j}}$ standart baz fonksiyonunu $[J_{\pm}, \hat{f}_m^j] = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \hat{f}_{m \pm 1}^j$ denklemini takip eder. Burada $\hat{f}_m^{\bar{j}}$ çarpım operatörleri \hat{f}_m^j indirgenemez tensör operatörlerini belirler ve bu operatörlere bağlıdır.

$$\hat{D}_{m_0}^{j*} = \left(\hat{D}_{mm_0}^{j*} \right) \quad \hat{D}_{m_0}^j = \left(\hat{D}_{m_0m}^j \right) \quad 4.102$$

indirgenemez tensör operatörleri $SU(2)$ grubunun düzgün sol ve sağ temsillerinin standart bazıyla ortaklanmıştır. \hat{Y}^l indirgenemez tensör operatörleri $\hat{Y}_m^{\bar{l}}$ küresel harmoniklerinin standart bazına uyarlar. Küresel harmonikler,

$$\hat{Y}_m^{\bar{l}+} = \left(\frac{c^*}{c} \right)^l (-1)^{l+m} \hat{Y}_m^{\bar{l}} \quad 4.103$$

Hermitsel eşlenik eşitliğine sahiptir. Seçilen reel c sayıları \hat{Y}^l operatörlerinin indirgenemez operatörler olduğunu söyler.

Yaratma ve yoketme operatörleri

İkinci kuantizasyon formalizmini kısaca tekrar edelim. Bu formalizm $\{m\}$ durumlarının $\{N_m\}$ işgal sayılarıyla nitelendirilmiş $|N_1 \dots N_m \dots\rangle$ ortonormal baz vektörleriyle aralıklandırılmış Fock uzayını dikkate alır. Bu son söylenen, tek parçacıklı durumların tam kümesini biçimlendirir. N_m işgal sayıları fermiyonlar için 0 veya 1, bozonlar için herhangi bir pozitif tam sayı değerler alır. $|0\rangle$

durumu parçacığın vakum ortamında olduğunu belirtir. Durumlar a_m^+ yaratma ve a_m yok etme operatörleriyle,

$$\begin{aligned} a_m^+ |N_1 \dots N_m \dots\rangle &= \begin{cases} \sqrt{N_m + 1} |N_1 \dots N_m \dots\rangle & \text{bozonlar} \\ (-1)^{\hat{N}_m} N_m |N_1 \dots N_m \dots\rangle & \text{fermiyonlar} \end{cases} \\ a_m |N_1 \dots N_m \dots\rangle &= \begin{cases} \sqrt{N_m} |N_1 \dots N_m \dots\rangle & \text{bozonlar} \\ (-1)^{\hat{N}_m} N_m |N_1 \dots N_m \dots\rangle & \text{fermiyonlar} \end{cases} \end{aligned} \quad 4.104$$

şeklinde tanımlanırlar. Durumlar 1,2,3,... gibi keyfi olarak sıralanmıştır ve hepsi için bir kez ve $\hat{N}_m = \sum_{i=1}^m N_i$ önceki m durumlu tek parçacığın işgal sayılarının toplamıdır. Yukarıdaki bağıntılar takip edilerek \hat{a}_m^+ yaratma ve \hat{a}_m yok etme operatörlerinin konjuge hermityen operatörler olduğunu söylenebilir. Bu operatörlerin uyduğu komütasyon bağıntıları,

$$\begin{aligned} [\hat{a}_m, \hat{a}_n]_\varepsilon &= 0 \\ [\hat{a}_m^+, \hat{a}_n^+]_\varepsilon &= 0 \\ [\hat{a}_m, \hat{a}_n^+]_\varepsilon &= \delta_{mn} \mathfrak{I} \end{aligned} \quad 4.105$$

bağıntıları vardır. Burada $[\ ,]_\varepsilon, \varepsilon = 1$ komütatörünü veya $\varepsilon = -1$ antikomütatörünü fermiyon veya bozonlarla ilgilenilmesine göre belirtir. 4.104 denkleminin tekrarı vakumda işlem yapan yaratma operatörlerine dayanarak Fock uzayının herhangi bir durumunun,

$$|N_1 \dots N_m \dots\rangle = \left[\frac{1}{N_1! \dots N_m! \dots} \right]^\frac{1}{2} \hat{a}_1^{+N_1} \dots \hat{a}_m^{+N_m} \dots |0\rangle \quad 4.106$$

şeklinde açıklanmasına izin verir. Dikkate alınan tek parçacık durumları \hat{J}, \hat{J}_3 operatörlerinin ölçülebilir değerlerinin tam kümesinin özbaşıyla kararlıdır. Bu ortonormal durumlar α, j, m tarafından,

$$a_{\alpha jm}^+ |0\rangle = |\tilde{\alpha j m}\rangle \quad 4.107$$

şeklinde sınıflandırılır. Bu sınıflama $R(U; a)$ dönmesi altında $|\tilde{\alpha j m}\rangle$ ketinin dönüşüm yasası ve 4.83 denklemini kullanılarak,

$$\hat{D}(U) \hat{a}_{\alpha jm}^+ \hat{D}(U)^{-1} = \hat{a}_{\alpha jm}^+ \hat{D}_{m'm}^j(U) \quad 4.108$$

şeklinde bulunur. Bu yüzden $\hat{a}_{\alpha j m}^+$ operatörleri j ranklı indirgenemez tensörün kontravaryant küresel bileşenleridir. Açık hale getirilmiş tensörel karakter sıralamasında \hat{a}_{α}^{+j} tarafından,

$$\hat{a}_{\alpha m}^{+j} = \hat{a}_{\alpha j m}^+ \quad 4.109$$

operatörü belirtilir. Bu durumun $T_m^j \xrightarrow{+} T^{+j}, (T_m^{+j} = T_m^{j+})$ denkleminde uygunluğu \hat{a}_{α}^{+j} operatörünün indirgenemez \hat{a}_{α}^j tensör operatörünün hermityen konjugesi olduğunu gösterir. $\hat{a}_{\alpha j m}$ yok etme operatörü $\hat{a}_{\alpha j m}^+$ yaratma operatörünün hermityen konjugesi olduğundan $\hat{a}_{\alpha j m}$ yok etme operatörünün,

$$\hat{a}_{\alpha j m} = \hat{a}_{\alpha m}^{+j+} = \hat{a}_{\alpha m}^{++j} = (-1)^{2j} \hat{a}_{\alpha m}^j \quad 4.110$$

olduğu görülür. Bu sonuç 4.108 denkleminin her iki tarafının hermityen konjugesi alınarak kontrol edilebilir. $\hat{a}_{\alpha j m}$ yok etme operatörünün dönüşümü bir tensörün kovaryant küresel bileşenleri gibidir.

Yukarıdaki sonuçlar yaratma ve yok etme operatörlerine gerek duyulduğunda yararlı olur. Gerçekten, yalnızca küresel bileşenler benzer tensörel karaktere sahiptirler ve C.G. sabitlerinin anlamları kullanılarak çiftlenebilirler. Bir çiftlenmiş parçacık-boşluk çiftinin yaratma operatörüne,

$$\begin{aligned} A_{\alpha_p \alpha_n M}^{\{j_p j_n\} \bar{j}} &= \hat{a}_{\alpha_p m_p}^{+j_p} \hat{a}_{\alpha_n m_n}^{\bar{j}_n} \langle j_p j_n m_p m_n | JM \rangle \\ &= c_{j_n} (-1)^{j_n + m_n} \hat{a}_{\alpha_p j_p m_p}^+ \hat{a}_{\alpha_n j_n - m_n} \langle j_p j_n m_p m_n | JM \rangle \end{aligned} \quad 4.111$$

örneği verilebilir.

İzdüşüm operatörleri

4.107 denkleminde önceden verilen tek parçacık durumlarının tam $\{\alpha \bar{j} m\}$

ortonormal bazı,

$$\begin{aligned} \langle \alpha \bar{j} m | \alpha' \bar{j}' m' \rangle &= \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{j j'} \delta_{m m'} \\ \mathfrak{S} &= \sum_{\alpha, j, m} |\alpha \bar{j} m\rangle \langle \alpha \bar{j} m| \end{aligned} \quad 4.112$$

şeklinde yeniden düşünülebilir. Çizelge 4.1'deki ketlerin ve braların tensör karakterleri genelleştirilmiş $\hat{P}_{\alpha \alpha'}^{j j'}$ izdüşüm operatörünün tanımına izin verir.

İzdüşüm operatörü,

$$\hat{P}_{\alpha\alpha' mm'}^{\{j\bar{j}'\}} = |\alpha\tilde{j}m\rangle\langle\alpha'\tilde{j}'m'| \quad 4.113$$

şeklinde j, j' ranklarına sahip küresel bileşenlerle iki sıralı tensör operatördür.

$\hat{P}_{\alpha\alpha'}^{\{j\bar{j}'\}}$ izdüşüm operatöründen $\hat{P}_{\alpha\alpha'}^{\{j\bar{j}'\}}$ çiftlenmiş genelleştirilmiş izdüşüm operatörleri tanımlanır. İzdüşüm operatörü için,

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\alpha\alpha'}^{\{j\bar{j}'\}}|\alpha\tilde{j}''m''\rangle &= \langle jj'mm'|JM\rangle c_{j'}(-1)^{j'-m'}|\alpha\tilde{j}m\rangle\langle\alpha'\tilde{j}-m'|\alpha''\tilde{j}''m''\rangle \\ &= c_{j'}(-1)^{j+j'-j} \frac{j}{j} \langle Jj''Mm''|jm\rangle|\alpha\tilde{j}m\rangle\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{jj'} \end{aligned} \quad 4.114$$

örnek eşitliği çıkarılır. $|\alpha\tilde{j}m\rangle$ durumu üzerine etki eden izdüşüm operatörü,

$$\hat{P}_{\alpha mm}^{\{j\bar{j}\}} = |\alpha\tilde{j}m\rangle\langle\alpha\tilde{j}m| \quad 4.115$$

sonucunu verir. Küresel bileşenlerle tanımlı $\hat{P}_{\alpha}^{\{j\bar{j}\}}$ izdüşüm tensör operatörüne dayanarak $|\alpha\tilde{j}m\rangle$ durumu için kapalılık bağıntısı,

$$\mathfrak{S} = \sum_{\alpha, j, m} \hat{P}_{\alpha mm}^{\{j\bar{j}\}} = \sum_{\alpha, j, m} c_j(-1)^{j+m} \hat{P}_{\alpha m-m}^{\{j\bar{j}\}} = \sum_{\alpha, j} c_j(-1)^{2j} j \hat{P}_{\alpha}^{\{j\bar{j}\}} \quad 4.116$$

formunu kazanır.

$$\sum_{\alpha} \hat{P}_{\alpha mm'}^{\{j\bar{j}\}} = \frac{2j+1}{16\pi^2} \int_{SU(2)} d\mu(U) \hat{D}_{mm'}^{j*}(U) \hat{D}(U) \quad 4.117$$

Şimdi yukarıdaki ifadeyi kuralım. Kapatma bağıntısının formu altında özdeşlik operatörü ilk kez tanımlanıyor, bu bağıntı,

$$\hat{D}(U) = \sum_{\alpha, j, m} \hat{D}_{m'm}^j(U) |\alpha\tilde{j}m'\rangle\langle\alpha\tilde{j}m| \quad 4.118$$

eşitliğini sağlar. Ortogonalite ilişkisi,

$$\int_{SU(2)} d\mu(U) \hat{D}_{mn}^j(U) \hat{D}_{m'n'}^{j*}(U) = \frac{16\pi^2}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}$$

ile belirtilen sonuçları ima eder. Özel haller olarak, altuzaylar üzerinde karakterize edilmiş \hat{P}_{jm} ve \hat{P}_j izdüşüm operatörleri sırasıyla j, m ve j kuantum sayılarıyla,

$$\begin{aligned} \hat{P}_{jm} &= \frac{2j+1}{16\pi^2} \int_{SU(2)} d\mu(U) \hat{D}_{mm}^{j*}(U) \hat{D}(U) \\ \hat{P}_j &= \frac{2j+1}{16\pi^2} \int_{SU(2)} d\mu(U) \chi^j(U) \hat{D}(U) \end{aligned} \quad 4.119$$

şeklinde olurlar. Buradaki $\chi^j(U)$ karakteri, $SU(2)$ grubunun tek temsilini ve yalnızca j kuantum sayısının tam sayı değerlerini dikkate alınarak üstteki denklemlerdeki $16 \rightarrow 8$ faktör değişimiyle $SO(3)$ grubu üzerine taşınabilir.

$T^j = j\rangle$	$T_m^j = jm\rangle$ $\downarrow d$	$T_m^j = jm\rangle$ $\downarrow d$
$T^{dj} = \langle j $	$T_m^{dj} = \langle jm $ $\downarrow d$	$(-1)^{2j} T^{dj} = (-1)^{2j} \langle jm $
$T^{ddj} = dj\rangle =$ $(-1)^{2j} T^j = (-1)^{2j} j\rangle$	$(-1)^{2j} T_m^{ddj} = (-1)^{2j} djm\rangle$ $= jm\rangle$	$(-1)^{2j} T_m^{ddj} = (-1)^{2j} djm\rangle$ $= jm\rangle$

Çizelge 4.1: Ketlerin ve braların tensörel karakterleri

İki cisim etkileşmelerine örnekler

Spinli parçacıklar için iki-cisim etkileşmeleri genellikle,

$$V_1(\vec{r})\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \quad V_2(\vec{r})\vec{L} \cdot \vec{S} \quad V_3(\vec{r})T_{12} = V_3(\vec{r})[3(\vec{S}_1 \cdot \vec{r})(\vec{S}_2 \cdot \vec{r}) - \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2] \quad 4.120$$

örneklerine bağlı olarak verilir. Burada \vec{r} rölatif konum \vec{p} rölatif momentum ve

$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ rölatif yörünge açışal momentumu, \vec{S}_1, \vec{S}_2 her bir parçacığın

spini ve $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ olmak üzere $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ toplam açışal momentumdur.

Operatörlerin spinle olan ilişkileri,

$$\begin{aligned} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 &= \frac{1}{2}(\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2) = c^{-2} \sqrt{3} \{S_1^1 \otimes S_2^1\}^0, \\ \vec{L} \cdot \vec{S} &= \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2) = c^{-2} \sqrt{3} \{L^1 \otimes S^1\}^0, \\ T_{12} &= c^{-4} 9 \{ \{S_1^1 \otimes \hat{r}^1\}^0 \times \{S_2^1 \otimes \hat{r}^1\}^0 \}^0 - S_1 \cdot S_2 \\ &= c^{-4} 9 \sum_{l=0}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ l & l & 0 \end{pmatrix} \{ \{S_1^1 \otimes S_2^1\}^l \otimes \{ \hat{r}^1 \otimes \hat{r}^1 \}^l \}^0 - \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \\ &= c^{-4} 3\sqrt{4} \{ \{S_1^1 \otimes S_2^1\}^2 \otimes \{ \hat{r}^1 \otimes \hat{r}^1 \}^2 \}^0 \end{aligned} \quad 4.121$$

şeklinde olur. $V_3(\vec{r})T_{12}$ etkileşmesi tensör kuvveti olarak bilinir. Bu etkileşmelerin hepsi dönmeyle invaryanttır.

4.3. Matris Elemanları

4.3.1. İndirgenmiş Matris Elemanının Tanımlanması

Diğer kuantum sayıları ihmal edilerek $\langle \tilde{j}_1 m_1 |$ brasının, $|\tilde{j}_3 m_3 \rangle$ ketinin ve indirgenemez $\hat{A}_{m_2}^{\tilde{j}_2}$ tensör operatörünün $\hat{D}[SU(2)]$ temsili altında dönüşüm yasası $\langle \tilde{j}_1 m_1 | \hat{A}_{m_2}^{\tilde{j}_2} | \tilde{j}_3 m_3 \rangle$ matris elemanının,

$$T_{m_1 m_2 m_3}^{\tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \tilde{j}_3} = \langle \tilde{j}_1 m_1 | \hat{A}_{m_2}^{\tilde{j}_2} | \tilde{j}_3 m_3 \rangle \quad 4.122$$

tensörel karakteriyle $T^{j_1 j_2 j_3}$ tensörünün küresel bileşeni olduğunu ima eder. Dikkate alınan temsil üniter olduğundan bu tensör invaryanttır, $SU(2)$ grubu içindeki elemanlar için,

$$\begin{aligned} T_{m_1 m_2 m_3}^{\tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \tilde{j}_3} &= \langle \tilde{j}_1 m_1 | \hat{D}(U)^+ \left[\hat{D}(U) \hat{A}_{m_2}^{\tilde{j}_2} \hat{D}(U) \right] | \tilde{j}_3 m_3 \rangle \\ &=^U T_{m_1 m_2 m_3}^{\tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \tilde{j}_3} \end{aligned} \quad 4.123$$

bağıntısı vardır. Wigner-Eckart teoremi m_1, m_2, m_3 kuantum sayıları üzerinden matris elemanının bütün bağımlılığı C.G. katsayısı tarafından karşılanır. Tensör dönüşüm denkleminde,

$$\langle \tilde{j}_1 m_1 | \hat{A}_{m_2}^{\tilde{j}_2} | \tilde{j}_3 m_3 \rangle = c_{j_1} \frac{1}{\tilde{j}_1} \langle j_2 j_3 m_2 m_3 | j_1 m_1 \rangle T^{\{\{j_1 j_2\} j_3\}^0} \quad 4.124$$

eşitliği bulunur. $T^{\{\{j_1 j_2\} j_3\}^0}$ skalerine indirgenmiş matris elemanı denir ve

$$\left[j_1 \left\| \hat{A}^{j_2} \right\| j_3 \right] = T^{\{\{j_1 j_2\} j_3\}^0} = T^{\{j_1 \{j_2 j_3\} j_1\}^0} \quad 4.125$$

eşitliğiyle belirlenir. Kuantum mekaniğinde dönme grubu için Wigner-Eckart teoremi,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{j}_1 m_1 | \hat{A}_{m_2}^{\tilde{j}_2} | \tilde{j}_3 m_3 \rangle &= c_{j_1} \frac{1}{\tilde{j}_1} \langle j_2 j_3 m_2 m_3 | j_1 m_1 \rangle \left[j_1 \left\| \hat{A}^{j_2} \right\| j_3 \right] \\ &= c_{j_1} (-1)^{m_1 + j_2 - j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \left[j_1 \left\| \hat{A}^{j_2} \right\| j_3 \right] \end{aligned} \quad 4.126$$

şeklinde olur. Burada c_j , 1 veya $(-1)^{2j}$ 'ye denktir.

Yukarıda tanımlanmış olan indirgenmiş matris elemanları j_1 üzerinde bağlı ilgisiz faz faktörü eki olmayan $\{\{j_1 j_2\} j_3\}^0$ veya $\{j_1 \{j_2 j_3\} j_1\}^0$ çiftli şeması tarafından tanımlanmış skalere denk olduğu vurgulanmıştır. Tanımlamanın bu seçimi ayrı ayrı özelliklerini içeren hesaplamalarda:

1. Herhangi birleşik veya tekrar birleştirilmiş dönüşümün olasılıkla yapabileceği,

2. Dikkate alınan tensörlerin özelliğinin benzer zaman avantajında verir.

Böylece, tekrar birleşik dönüşüm matris elemanı yani invaryant tensörle ortaklanmış j_1, j_2, j_3 indisleri için $\{\{j_1 j_2\} k_1 j_3\} k_2$ veya $\{j_1 \{j_2 j_3\} k_3\} k_2$ birleşik şemasına götürürse, uygun nesne indirgenmiş $[j_1 \|\hat{A}^{j_2} \| j_3]$ matris elemanıdır ve bu eleman $k_2 = 0$, $k_1 = j_3$, $k_3 = j_1$ seçim kurallarına sahiptir.

İndirgenmiş matris elemanı $c_j = 1$ seçimiyle Wigner-Eckart teoremindeki gereksiz fazlalıkları temizlenir. Bu her zaman çok olası olan iz hatalarından kaçınmaya pratik uygulamalarda tamamen uyumludur.

4.3.2. Herhangi Bir İndirgenemez Tensörün Açıklanması

4.116 denklemlerle verilen son bağıntının tanımından, herhangi bir indirgenemez $\hat{A}_{m_2}^{j_2}$ tensör operatörünün küresel operatör bileşeni,

$$\hat{A}_{m_2}^{j_2} = \sum_{\alpha_1 j_1 \alpha_3 j_3} c_{j_1} c_{j_3} (-1)^{2j_1 + 2j_3} \hat{j}_1 \hat{j}_3 \hat{P}_{\alpha_1}^{j_1 j_1} \hat{A}_{m_2}^{j_2} \hat{P}_{\alpha_3}^{j_3 j_3} \quad 4.127$$

olduğu görülür. Dönüşüm matris elemanı ile ortaklanmış j_1, j_2, j_3 indislerini koyabilir ve böylece sıfıra çiftleyebilir. Dönüşüm böylece 6_j kare sembollerine dayanarak,

$$\hat{A}_{m_2}^{j_2} = \sum_{\alpha_1 j_1 \alpha_3 j_3} c_{j_1} c_{j_3} (-1)^{2j_1 + 2j_3} \hat{j}_1 \hat{j}_3 \begin{pmatrix} j_1 & j_1 & 0 \\ j_2 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ 0 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_3 & 0 \\ j_3 & j_3 & 0 \end{pmatrix} [\alpha_1 j_1 \|\hat{A}_{m_2}^{j_2} \|\alpha_3 j_3] \hat{P}_{\alpha_3 m_2}^{j_1 j_3 j_2} \quad 4.128$$

şeklinde bulunur. Burada genelleştirilmiş indirgenemez tensör operatörü 4.112 denkleminde tanımlanmıştır. İndirgenemez tensör operatör için,

$$\hat{A}^{j_2} = c_{j_2} \frac{1}{j_2} \sum_{\alpha_1 j_1 \alpha_3 j_3} (-1)^{j_1 - j_2 + j_3} [\alpha_1 j_1 \|\hat{A}^{j_2} \|\alpha_3 j_3] \hat{P}_{\alpha_3}^{j_1 j_3 j_2} \quad 4.129$$

ifadesi bulunur.

4.3.3. İndirgenmiş Matris Elemanları

4.3.3.1. İndirgenmiş matris elemanının kompleks eşleniği

Kompleks konjugasyon altında bir matris elemanının dönüşüm yasası, 4.86 denklemini ve indirgenmez tensör operatörün hermityen konjugesinin tanımı,

$$\langle \tilde{j}_1 m_1 | \hat{A}_{m_2}^{\tilde{j}_2} | j_3 m_3 \rangle^* = c_{j_2} (-1)^{j_2+m_2} \langle \tilde{j}_3 m_3 | \hat{A}_{-m_2}^{+\tilde{j}_2} | \tilde{j}_1 m_1 \rangle \quad 4.130$$

eşitliğini ima eder. Bu denklemin her iki tarafına Wigner-Eckart teoremini uygulamasıyla C.G. katsayıları tanımı içinde verilen,

$$c_{j_1} \frac{1}{\tilde{j}_1} \langle j_2 j_3 m_2 m_3 | j_1 m_1 \rangle \left[j_1 \left\| \hat{A}^{j_2} \right\| j_3 \right]^* = c_{j_2} c_{j_3} \frac{(-1)^{j_2+j_3}}{\tilde{j}_3} \langle j_2 j_1 - m_2 m_1 | j_3 m_3 \rangle \left[j_3 \left\| \hat{A}^{+j_2} \right\| j_1 \right] \quad 4.131$$

sonucunu verir. Simetri özelliklerinden, C.G. katsayıları,

$$\left[j_1 \left\| \hat{A}^{j_2} \right\| j_3 \right]^* = (-1)^{j_1-j_2-j_3} \left[j_3 \left\| \hat{A}^{+j_2} \right\| j_1 \right] \quad 4.132$$

bulunur. \hat{A}^{j_2} Hermityen bir tensörse,

$$\hat{A}^{j_2} = \hat{A}^{+j_2} \Rightarrow \left[j_1 \left\| \hat{A}^{j_2} \right\| j_3 \right]^* = (-1)^{j_1-j_2-j_3} \left[j_1 \left\| \hat{A}^{j_2} \right\| j_3 \right] \quad 4.133$$

eşitliğinde olduğu gibi davranır.

4.3.3.2. İndirgenmiş matris elemanlarına örnekler

Çok sık karşılaşılan matris elemanlarının hesaplanması yöntemi m_1, m_2, m_3 değerlerinin seçiminin olası sağ görüşüyle benzerdir, yani bu yöntem sıradan matris elemanına değer biçer. Yöntem, 4.126 denklemindeki Wigner-Eckart teoreminden,

$$\left[\alpha_1 j_1 \left\| \hat{A}^{j_2} \right\| \alpha_3 j_3 \right] = c_{j_1} \tilde{j}_1 \frac{\langle \alpha_1 \tilde{j}_1 m_1 | \hat{A}_{m_2}^{\tilde{j}_2} | \alpha_3 \tilde{j}_3 m_3 \rangle}{\langle j_2 j_3 m_2 m_3 | j_1 m_1 \rangle} \quad 4.134$$

şeklinde olur. Varsayılan C.G. katsayıları sıfırdan farklıdır. $\{ \alpha \tilde{j} a \}$ ile \hat{J}^2, \hat{J}_3 nin tüm özbaşı ve onunla komüt diğer operatörler ve α ile açıkça belirtilen özdeğerlerle belirtilir.

Özdeşlik operatörü

Bu operatör bir skaler operatördür. Bu operatörün matris elemanları dikkate alınana bazın metrik tensörüyle,

$$\langle \alpha \tilde{j} m | \hat{\mathcal{S}} | \alpha' \tilde{j}' m' \rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{j j'} \delta_{m m'} \quad 4.135$$

şeklinde verilirler. $\langle 0 j 0 m | j m \rangle = 1$ olduğundan operatör için,

$$\left[\alpha j \left\| \hat{\mathcal{S}} \right\| \alpha' j' \right] = c_j \hat{j} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{j j'} \quad . \quad 4.136$$

şeklinde olur.

Açısal momentum operatörünün karesi

\hat{J}^2 Casimir operatörü ayrıca bir skaler operatör olduğundan,

$$\hat{J}^2 = c^{-2} \sqrt{3} \{ J^1 \otimes J^1 \}^0 \quad 4.137$$

şeklinde yazılabilir.

$$\langle \alpha \tilde{j} m | \hat{J}^2 | \alpha' \tilde{j}' m' \rangle = j(j+1) \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{j j'} \delta_{m m'} \hbar^2 \quad 4.138$$

eşitliğinden,

$$\left[\alpha j \left\| \hat{J}^2 \right\| \alpha' j' \right] = c_j \hat{j} j(j+1) \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{j j'} \hbar^2 \quad 4.139$$

eşitliği bulunur.

Açısal momentum operatörü

Açısal momentum operatörü, \hat{J}^1 vektör operatörünün özel bir halidir.

Matris elemanının hesaplanması $J_0^{\tilde{1}}$ ile basitleştirilmiştir.

$$\langle \alpha \tilde{j} m | J_0^{\tilde{1}} | \alpha' \tilde{j}' m' \rangle = c(-i)m \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{j j'} \delta_{m m'} \hbar \quad 4.140$$

ve

$$\langle 1 j 0 m | j m \rangle = -\frac{m}{\sqrt{j(j+1)}} \quad 4.141$$

oldüğundan,

$$\left[\alpha j \left\| j' \right\| \alpha' j \right] = c c_j i \hat{j} \sqrt{j(j+1)} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{j j'} \hbar \quad 4.142$$

eşitliği elde edilir. Burada dikkate alınacak olan $\hat{\sigma} = \frac{2\hat{S}}{\hbar}$ operatörünün $\frac{1}{2}$ spin

için indirgenmiş matris elemanları,

$$\left[\alpha \frac{1}{2} \left\| \sigma^1 \right\| \alpha' \frac{1}{2} \right] = c c_{\frac{1}{2}} i \sqrt{6} \delta_{\alpha\alpha'} \quad 4.143$$

şeklinde olurlar.

\hat{J}^1 vektör operatörünün indirgenmiş matris elemanları standart bazın karakteristik denklemlerinin açıklanmasına imkan verirler. Gerçekten, \hat{J}_\pm ve \hat{J}_3 operatörlerinin matris elemanlarına Wigner-Eckart teoreminin uygulanmasıyla,

$$\begin{aligned}\langle \alpha \tilde{j} m | \hat{J}_\pm | \alpha' \tilde{j}' m' \rangle &= \pm \sqrt{2j(j+1)} \langle 1j' \pm 1m' | jm \rangle \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{jj'} \hbar \\ \langle \alpha \tilde{j} m | \hat{J}_3 | \alpha' \tilde{j}' m' \rangle &= -\sqrt{j(j+1)} \langle 1j' 0m' | jm \rangle \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{jj'} \hbar\end{aligned}\quad 4.144$$

denklemleri elde edilir. Bu nedenle operatörlerin ketlere uygulanması,

$$\begin{aligned}\hat{J}_\pm | \alpha \tilde{j} m \rangle &= \pm \sqrt{2j(j+1)} \langle 1j \pm 1m | jm \pm 1 \rangle | \alpha \tilde{j} m \pm 1 \rangle \hbar \\ \hat{J}_3 | \alpha \tilde{j} m \rangle &= -\sqrt{j(j+1)} \langle 1j 0m | jm \rangle | \alpha \tilde{j} m \rangle \hbar\end{aligned}\quad 4.145$$

şeklinde olur.

Gradyent operatörü

Bu operatör ∇^1 vektör operatörünün bir örneğidir. Operatörün indirgenmiş matris elemanları gradyent formülünden türetilir. Yani operatör,

$$\begin{aligned}\langle r \vec{l}' m' | \nabla_\mu^1 | g \vec{l} m \rangle &= \int_{S^2} d\theta d\varphi \sin \theta \hat{Y}_m^{\vec{l}'}(\theta, \varphi) \nabla_\mu^1 g(r) \hat{Y}_m^{\vec{l}}(\theta, \varphi) \\ &= \frac{1}{\hat{j}^1} \langle 1l \mu m | l' m \rangle [Y^{\vec{l}'} | \nabla^1 | g \vec{l}]\end{aligned}\quad 4.146$$

eşitliğine sahiptir.

3 boyutlu dönme matris elemanının indirgenmiş matris elemanı

$L^2(SU(2)d\mu)$ içindeki $\hat{D}_{mm'}^{j^*}$ fonksiyonlarının bazındaki $\hat{D}_{m_2 m_2'}^{j_2}$ çarpım operatörünün matris elemanları olduğunu dikkate alır. Matris elemanı,

$$\begin{aligned}\langle m_1' \tilde{j}_1 m_1 | \hat{D}_{m_2 m_2'}^{j_2^*} | m_3' \tilde{j}_3 m_3 \rangle &= \int_{SU(2)} d\mu \hat{D}_{mm'}^{j_1}(U) \hat{D}_{m_2 m_2'}^{j_2^*}(U) \hat{D}_{m_3 m_3'}^{j_3^*}(U) \\ &= \frac{16\pi^2}{2j_1 + 1} \langle j_2 j_3 m_2 m_3 | j_1 m_1 \rangle \langle j_2 j_3 m_2' m_3' | j_1 m_1' \rangle \\ &= \frac{c_{j_1}}{\hat{j}_1} \langle j_2 j_3 m_2 m_3 | j_1 m_1 \rangle [m_1' j_1 | D_{m_2}^{j_2^*} | m_3' j_3]\end{aligned}\quad 4.147$$

eşitliğine sahiptir. Bu nedenle,

$$[m_1' j_1 | \hat{D}_{m_1}^{j_3^*} | m_3' j_3] = c_{j_1} \frac{16\pi^2}{\hat{j}_1} \langle j_2 j_3 m_2' m_3' | j_1 m_1' \rangle \quad 4.148$$

olur.

3 boyutlu küresel harmoniklerin indirgenmiş matris elemanı

$L^2(S^2, d_2 \hat{n})$ içindeki $Y_m^{\tilde{l}}$ fonksiyonlarının bazındaki $\hat{Y}_{m_2}^{\tilde{l}_2}$ çarpım operatörlerinin,

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 \tilde{l}_1 m_1 | \hat{Y}_{m_2}^{\tilde{l}_2} | \alpha_3 \tilde{l}_3 m_3 \rangle &= \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \int_{S^2} d\theta d\varphi \sin \theta Y_{m_1}^{\tilde{l}_1*}(\theta, \varphi) Y_{m_2}^{\tilde{l}_2}(\theta, \varphi) Y_{m_3}^{\tilde{l}_3}(\theta, \varphi) \\ &= \frac{1}{\tilde{l}_1} \langle l_2 l_3 m_2 m_3 | l_1 m_1 \rangle \left[\alpha_1 l_1 \| Y^{l_2} \| \alpha_3 l_3 \right] \end{aligned} \quad 4.149$$

matris elemanlarını dikkate alır. Matris elemanı $Y_m^{\tilde{l}}$ ve D_{m0}^{l*} fonksiyonları arasındaki bağıntıyı izler, matris elemanı 3 boyutlu dönme matris elemanlarıyla,

$$\left[\alpha_1 l_1 \| \hat{Y}^{l_2} \| \alpha_3 l_3 \right] = (-ic)^{l_2+l_3-l_1} \frac{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \tilde{l}_3}{(4\pi)^{5/2}} \left[0 l_1 \| \hat{D}_0^{l_2*} \| 0 l_3 \right] \delta_{\alpha_1 \alpha_3} \quad 4.150$$

denklemleriyle ilişki kurar, bu nedenle,

$$\begin{aligned} \left[\alpha_1 l_1 \| \hat{Y}^{l_2} \| \alpha_3 l_3 \right] &= (-ic)^{l_2+l_3-l_1} \frac{\tilde{l}_2 \tilde{l}_3}{\sqrt{4\pi}} \langle l_2 l_3 00 | l_1 0 \rangle \delta_{\alpha_1} \delta_{\alpha_3} \\ &= (-ic)^{l_2+l_3-l_1} (-1)^{l_2+l_3} \frac{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \tilde{l}_3}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta_{\alpha_1 \alpha_3} \end{aligned} \quad 4.151$$

olur. Simetri özelliği C.G. katsayısının $l_1 + l_2 + l_3$ olması gerektiğini belirtir.

$\langle l_3 l_3 00 | l_1 0 \rangle$ C.G. katsayısının değeri özel değer tablolarından alınmıştır.

Genelleştirilmiş, çiftlenmiş izdüşüm tensör operatörünün indirgenmiş matris elemanı

4.113 denklemi veya 4.129 denklemi kullanılarak bu operatörün küresel bileşeninin hesaplanan matris elemanı ile sonuç sağlanır. Böylece operatörün matris elemanı,

$$\left[\alpha j \| P_{\alpha_1 \alpha_2}^{l_1 j_2} \| \alpha' j' \right] = c_j (-1)^{j+j'-j} \hat{j} \{ j_1 j_2 J \} \delta_{\alpha \alpha_1} \delta_{j j_1} \delta_{\alpha' \alpha_2} \delta_{j' j_2} \quad 4.152$$

şeklinde olur.

4.3.3.3. Operatörlerin tensör çarpımının indirgenmiş matris elemanları, Lande formülü

İki uzayın direkt çarpımında indirgenmiş matris elemanları

$$\text{Amaç} \quad M_1 = \left[\{j_1(1)j_2(2)\}j \left\| \left\{ A^{k_1}(1) \otimes A^{k_2}(2) \right\}^k \left\| \{j'_1(1)j'_2(2)\}j' \right. \right] \text{ tipinin}$$

indirgenmiş matris elemanı tipinin ifadesini elde etmektir. Burada (1) ve (2) iki farklı uzayı, bu uzayların her birinde tanımlı indirgenmiş matris elemanlarının çarpım terimlerini kapsar. Gözlemin tensörel noktasından M indirgenmiş matris elemanı 4.125 denklemi birleştirme şemasına,

$$\{ \{j_1 j_2\} j \{k_1 k_2\} k \} j' \{j'_1 j'_2\} j' \}^0 \quad 4.153$$

şeklinde bağlı olan bir skalerdir. Bu birleştirme şeması, benzer uzaya bağlı birleşik nesnelere yerleştirilmiş sıralamada 9_j sembolleri birleştirilmiş katsayıların anlamıyla değiştirilmiş olabilir. Böylece,

$$\sum_{l_1 l_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ k_1 & k_2 & k \\ l_1 & l_2 & j' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & j' \\ j'_1 & j'_2 & j' \\ l & l & 0 \end{pmatrix} \{ \{j_1 k_1\} j_1 j'_1 \}^l \{ \{j_2 k_2\} j_2 j'_2 \}^0 \} \quad 4.154$$

denklemi elde edilir. Bu düşünceler dikkate alınan tensörün doğasından bağımsızdır. Böylece, $\{ \{j_1 k_1\} j_1 j'_1 \}^l$, (1) uzayındaki bir matris elemanı ile ortaklanmıştır. Bu nedenle bu nesne invarianttır ve $l=0$ ve $l_1 = j'_1$ eşitliklerine sahip olmalıdır. Tekrar birleşmiş dönüşümlerin temsili grafik temsili anlamındadır ve böylece,

$$\begin{aligned} & \left[\{j_1(1)j_2(2)\}j \left\| \left\{ A^{k_1}(1) \otimes A^{k_2}(2) \right\}^k \left\| \{j'_1(1)j'_2(2)\}j' \right. \right] = \\ & \frac{\tilde{j}'}{\tilde{j}_1 \tilde{j}_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ k_1 & k_2 & k \\ j'_1 & j'_2 & j' \end{pmatrix} \left[j_1 \left\| A^{k_1} \right\| j'_1 \right] \left[j_2 \left\| A^{k_2} \right\| j'_2 \right] = \\ & \tilde{j} \tilde{k} \tilde{j}' \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ k_1 & k_2 & k \\ j'_1 & j'_2 & j' \end{pmatrix} \left[j_1 \left\| A^{k_1} \right\| j'_1 \right] \left[j_2 \left\| A^{k_2} \right\| j'_2 \right] \end{aligned} \quad 4.155$$

indirgeme formülü türetilir. Özel bir durumda 4.136 denklemi kullanılarak özdeş olan A^{k_1} ve A^{k_2} operatörlerinin özdeş indirgeme formülünden,

$$\begin{aligned}
& \left\{ j_1(1)j_2(2) \right\} j \left\| A^{k_2}(2) \right\| \left\{ j'_1(1)j'_2(2) \right\} j' = \\
& c_{j_1} \frac{\widehat{j}_1'}{\widehat{j}_2'} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ 0 & k_2 & k_2 \\ j_1 & j_2' & j' \end{pmatrix} \left[j_2 \left\| A^{k_2} \right\| j_2' \right]_{j_1 j_1'} \\
& = c_{j_1} (-1)^{j_1+j_2+k_2+j'} \widehat{j j'} \begin{pmatrix} j' & j_2' & j_1 \\ j_2 & j & k_2 \end{pmatrix} \left[j_2 \left\| A^{k_2} \right\| j_2' \right]_{j_1 j_1'} \\
& \left\{ j_1(1)j_2(2) \right\} j \left\| A^{k_1}(1) \right\| \left\{ j'_1(1)j'_2(2) \right\} j' = \\
& c_{j_2} \frac{\widehat{j}'_1}{\widehat{j}'_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ k_1 & 0 & k_1 \\ j_1' & j_2 & j' \end{pmatrix} \left[j_1 \left\| A^{k_1} \right\| j_1' \right]_{j_2 j_2'} \\
& = c_{j_2} (-1)^{j_1+k_1+j_2+j} \widehat{j j'} \begin{pmatrix} j' & j & j_2 \\ j_1 & j & k_1 \end{pmatrix} \left[j_1 \left\| A^{k_1} \right\| j_1' \right]_{j_2 j_2'}
\end{aligned} \tag{4.156}$$

denklemleri elde edilir. İkinci sonuç ayrıca 1 ve 2 alt yazımlarının ilk denklemde yerlerinin değiştirilmesiyle elde edilebilir. $(-1)^{j_1+j_2-j+j_1+j_2-j'}$ çoğalmadan sonra braket içinde birleşmenin sırasının değişmesi tanımında verilir.

Benzer uzay üzerinde işleyen iki tensör operatörün tensörel çarpımının indirgenmiş matris elemanı

A^{k_1} ve A^{k_2} operatörlerinin indirgenmiş matris elemanlarının çarpımlarıyla ilgili olarak $M_2 = \left[\alpha_{j_2} \left\| \left\{ A^{k_1} \otimes A^{k_2} \right\}^k \right\| \alpha'_{j'} \right]$ ifade edilir. 4.115 denklemiyle verilen son bağıntının formu altında bu iki operatör özdeşliği arasında önceden gösterilmiştir. M_2 indirgenmiş matris elemanı bir skalerdir ve

$$\left\{ \left\{ j \left\| k_1 \left\{ j'' j'' \right\}^0 k_2 \right\| k \right\} j' j' \right\}^0$$

birleşmiş şemasına bağlıdır. Aşağıdaki diyagramda görülen tekrar birleştirmeye dönüşüm j, k_1, j'' ve j'', k_2, j' indisleriyle birlikte koyulabilir. İndislerin bu iki grubu sırasıyla A^{k_1} ve A^{k_2} operatörlerinin indirgenmiş matris elemanlarıyla ortaklanmıştır ve bu nedenle sıfıra birleştirilmişlerdir. Kare 6_j sembollerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
M_2 &= \sum_{\alpha'' j''} c_{j'} (-1)^{2j''} \widehat{j}'' \begin{pmatrix} k_1 & j'' & j \\ j'' & k_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j'' & k_1 \\ k_2 & k & j' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & 0 \\ j' & j' & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & j' & j' \\ j' & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.156} \\
& \left[\alpha_j \left\| A^{k_1} \right\| \alpha''_{j''} \right] \left[\alpha''_{j''} \left\| A^{k_2} \right\| \alpha'_{j'} \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left[\alpha_j \left\| \left\{ A^{k_1} \otimes A^{k_2} \right\} \right\| \alpha'_{j'} \right] &= \sum_{\alpha'', j''} c_{j''} (-1)^{j'+k_1-k-j''} \frac{\widehat{k}}{\widehat{k}_1 \widehat{j}'} \begin{pmatrix} j & j'' & k_1 \\ k_2 & k & j' \end{pmatrix} \\
\left[\alpha_j \left\| A^{k_1} \right\| \alpha''_{j''} \right] \left[\alpha''_{j''} \left\| A^{k_2} \right\| \alpha'_{j'} \right] &= (-1)^{j'+k_1+k_2+j''} \widehat{k} \sum_{\alpha'', j''} c_{j''} \begin{Bmatrix} j & j'' & k_1 \\ k_2 & k & j' \end{Bmatrix} \\
\left[\alpha_j \left\| A^{k_1} \right\| \alpha''_{j''} \right] \left[\alpha''_{j''} \left\| A^{k_2} \right\| \alpha'_{j'} \right] &
\end{aligned} \tag{4.157}$$

denklemleri bulunur.

4.3.3.4. Lande formülü

Yukarıdaki indirgeme formülünde $k_1 = k_2$ ve $k = 0$ özel halinde 4.157 denklemini,

$$\begin{aligned}
\left[\alpha_j \left\| \left\{ A^k B^k \right\}^0 \right\| \alpha'_{j'} \right] &= \\
\delta_{jj'} \sum_{\alpha'', j''} c_{j''} (-1)^{j+k-j''} \frac{1}{\widehat{j} \widehat{k}} \left[\alpha_j \left\| A^k \right\| \alpha''_{j''} \right] \left[\alpha''_{j''} \left\| B^k \right\| \alpha'_{j'} \right] &
\end{aligned} \tag{4.158}$$

haline gelir. Bu sonuç herhangi bir A^1 vektör operatörü ve J^1 açısal momentum operatörüne uygulandığında J^1 açısal momentum operatörünün indirgenmiş matris elemanı değeri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\left[\alpha_j \left\| \bar{J} \cdot \bar{A} \right\| \alpha'_{j'} \right] &= c^{-2} \sqrt{3} \left[\alpha_j \left\| \left\{ J^1 \otimes A^1 \right\}^0 \right\| \alpha'_{j'} \right] = \\
c^{-1} (-1)^{\sqrt{j(j+1)}} \left[\alpha_j \left\| A^1 \right\| \alpha'_{j'} \right] \delta_{jj'} \hbar &
\end{aligned} \tag{4.159}$$

şeklinde bulunur. Bu denklemde $A^1 = J^1$ ayarı yapıldığında 4.139 denkleminde verilen \bar{J}^2 operatörünün indirgenmiş matris elemanı elde edilir.

4.159 denkleminin anlamı Lande formülünün türetilmesini sağlar. C.G. katsayısı benzer iki matris elemanı için Wigner-Eckart teoreminin içinde bulunduğundan,

$$\frac{\langle \alpha \bar{j} m | A_{\mu}^{\bar{1}} | \alpha' \bar{j} m' \rangle}{\langle \alpha \bar{j} m | J_{\mu}^{\bar{1}} | \alpha \bar{j} m \rangle} = \frac{\left[\alpha_j \left\| A^1 \right\| \alpha'_{j'} \right]}{\left[\alpha_j \left\| J^1 \right\| \alpha_j \right]} = \frac{1}{j(j+1)} \frac{c_j}{\widehat{j}} \left[\alpha_j \left\| \bar{J} \cdot \bar{A} \right\| \alpha'_{j'} \right] \tag{4.160}$$

şeklinde olur ve böylece Lande formülü bulunur:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \tilde{j} m | A_{\mu}^{\bar{1}} | \alpha' \tilde{j} m' \rangle &= \frac{1}{j(j+1)} \frac{c_j}{\tilde{j}} [\alpha j \| \bar{J} \cdot \bar{A} \| \alpha' j] \langle \alpha \tilde{j} m | J_{\mu}^{\bar{1}} | \alpha \tilde{j} m' \rangle \hbar^{-2} \\
&= \frac{\langle \alpha \tilde{j} m | \bar{J} \cdot \bar{A} | \alpha \tilde{j} m \rangle}{j(j+1)} \langle \alpha \tilde{j} m | J_{\mu}^{\bar{1}} | \alpha \tilde{j} m' \rangle \hbar^{-2}
\end{aligned} \tag{4.161}$$

Bu formül durumları verilen α ve j ile alt uzay içinde herhangi bir \bar{A} vektör operatörü, açısal momentum operatörü ve $\frac{1}{j(j+1)} \langle \alpha \tilde{j} m | \bar{J} \cdot \bar{A} | \alpha \tilde{j} m \rangle \hbar^{-2}$ orantı faktörünün bir multiplesidir.

$$\begin{aligned}
J^1(\bar{J} \cdot \bar{A}) \text{ özel vektör operatörüne Lande formülünün uygulanmasıyla,} \\
\langle \alpha \tilde{j} m | J_{\mu}^{\bar{1}}(\bar{J} \cdot \bar{A}) | \alpha' \tilde{j} m' \rangle &= \frac{\langle \alpha \tilde{j} m | \bar{J}^2(\bar{J} \cdot \bar{A}) | \alpha \tilde{j} m \rangle}{j(j+1)} \langle \alpha \tilde{j} m | J_{\mu}^{\bar{1}} | \alpha \tilde{j} m' \rangle \hbar^{-2} \\
&= \langle \alpha \tilde{j} m | \bar{J} \cdot \bar{A} | \alpha \tilde{j} m \rangle \langle \alpha \tilde{j} m | J_{\mu}^{\bar{1}} | \alpha \tilde{j} m' \rangle
\end{aligned} \tag{4.162}$$

eşitliği bulunur ve tekrar uygulanan Lande formülüyle,

$$\langle \alpha \tilde{j} m | A_{\mu}^{\bar{1}} | \alpha' \tilde{j} m' \rangle = \frac{\hbar^{-2}}{j(j+1)} \langle \alpha \tilde{j} m | J_{\mu}^{\bar{1}}(\bar{J} \cdot \bar{A}) | \alpha \tilde{j} m' \rangle \tag{4.163}$$

eşitliği bulunur. $\frac{\hbar^2}{j(j+1)} J_{\mu}^{\bar{1}}(\bar{J} \cdot \bar{A})$ operatörü, verilen j ile alt uzay içinde \bar{J} boyunca \bar{A} 'nın bileşenidir. \bar{A} 'nın bu bileşeni yalnızca 4.163 denklemi durumundan bu vektör operatörün beklenen değerine katkıda bulunur. Bu ortadan kalkmış \bar{J} 'ye dik \bar{A} 'nın bileşenlerinin ima edilen beklenen değeri \bar{A} 'nın yaklaşık \bar{J} yalpasına bağlıdır.

Lande formülünün uygulamasının örneği olarak $\bar{L}^2, \bar{J}^2, \bar{S}^2, J^3$ operatörlerinin bir $|l\tilde{j}m\rangle$ özvektöründeki magnetik momentin beklenen değerini hesaplamalıyız. Magnetik momentten,

$$\mu = \mu_0 (g_l \bar{L} + g_s \bar{S}) \tag{4.164}$$

anlaşılır. Burada μ_0 magnetonların birimidir ve g_l ve g_s magnetik oranlara bağlıdır. Magnetik moment özvektörle,

$$\langle l\tilde{j}m | \mu_m^{\bar{1}} | l\tilde{j}m \rangle = \frac{\langle l\tilde{j}m | \bar{J} \cdot \bar{\mu} | l\tilde{j}m \rangle}{j(j+1)} \langle l\tilde{j}m | J_m^{\bar{1}} | l\tilde{j}m \rangle \hbar^{-2} \tag{4.165}$$

eşitliğine sahiptir.

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \quad \vec{J} \cdot \vec{\mu} = \frac{\mu_0}{2} \left((g_l - g_s) \vec{L}^2 + (g_s - g_l) \vec{S}^2 + (g_l + g_s) \vec{J}^2 \right) \quad 4.166$$

$$\langle l\vec{s}j\vec{m} | J_m^\dagger | l\vec{s}j\vec{m} \rangle = c(-i)m\hbar \delta_{m'0} \quad 4.167$$

eşitliğinden magnetik moment,

$$\langle l\vec{s}j\vec{m} | \mu_m^\dagger | l\vec{s}j\vec{m} \rangle = -ic\mu_0\hbar m \left((g_l - g_s) \frac{l(l+1) - s(s+1)}{2j(j+1)} + \frac{1}{2}(g_l + g_s) \right) \delta_{m'0} \quad 4.168$$

şeklinde olur. Burada kare braketlerdeki nicelik Lande faktörü olarak bilinir.

4.4. Kuantum Mekanikte Rijit Dönücü

Bir rijit cisim kuantum mekaniğinde kesikli veya sürekli harekette baştan sona sabit kalan noktaların tüm çiftleri arasındaki mesafeler kısıtlamalara konu olan büyük noktaların sürekli kümesi olarak tanımlanmıştır. Rijit cisim tanım içine alınan sıralamada zorlamayla her bir serbestlik derecesiyle ortaklanmış genelleştirilmiş koordinatların ortaya konmasıyla takip eder. Rijit cismin konfigürasyonu tamamıyla rijit cisme bağlanmış ortonormal referans çerçevesi 3-boyutlu nokta uzayında yerleştirmeye tamamen belirlenmiştir ve gerçek veya sabitlenmiş cisim referans çerçevesi adıyla anılır. Herhangi bir sabitlenmiş ortonormal referans çerçevesine gelince, rijit cisim gerçek eksenin belirlenmiş orjininde 3 koordinata gerek duyar ve ayrıca sabitlenmiş cisme göre gerçek eksenin diğer 3 parametreyle açıkça belirtilir. Bu son 3 genelleştirilmiş koordinat parametreyle örnek olabilir, parametreler gerçek eksen üzerinde sabitlenmiş ortonormal bazın dönmelerini belirler. Rijit cismin yalnız kütle merkezi etrafında sürtünmesiz serbest dönme kuvvetini hesaba katacağız, bu kuvvet ayrıca “a la Painsot” hareketi olarak bilinir. Rijit dönücünün kuantum mekaniğinde tanımlanması, bu sistemin durumunun dönmeye yani Euler açılarıyla belirlendiğini hesaba katar.

4.4.1. Bir Rijit Dönücünün Klasik Mekanığı

Kinematik

\bar{w} , sabitlenmiş kütle merkezinin etrafında dönen rijit dönücünün a Galilean ortonormal bazına göre açısal hızı belirtir. Bu sistemin herhangi bir M noktasının \bar{v} hızı,

$$O\vec{M} = \vec{r}, \quad \bar{v} = \bar{w} \times \vec{r} \quad 4.169$$

şeklinde belirtilir. O noktası etrafında toplam açısal momentum,

$$\vec{L} = \int \delta m \vec{r} \times \bar{v} = \int \delta m \vec{r} \times (\bar{w} \times \vec{r}) = \int \delta m (\bar{w} r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \bar{w})) \quad 4.170$$

eşitliğiyle verilir. Burada Stieltjes integrali tek parça rijit cisim üzerinden alınır ve çift vektör çarpım ifadesi kullanılır. Bu nedenle açısal momentum,

$$\vec{L} = I\bar{w} \quad 4.171$$

şeklinde tanımlı bir lineer I gönderimi ve açısal hızla ilgilidir. I gönderimi atalet tensörü olarak bilinir ve dikkate alınan dönmenin bir özelliğidir. Herhangi bir (e_i) ortonormal bazına göre atalet tensörü,

$$\vec{r} = x^i e_i, \quad \bar{w} = w^j e_j, \quad \vec{L} = \sum_i L_i e_i, \quad L_i = I_{ij} w^j \quad 4.172$$

$$I_{ij} = \int \delta m (r^2 \delta_{ij} - x^i x^j)$$

şeklinde karardır. (I_{ij}) matrisinin reel simetrisi gerçek ortonormal baz yaratır. $a' = (e'_i)$ belirtilen baz atalet tensörünü köşegenleştirir. Bu özvektörler ataletin başlıca eksenlerini belirler ve özdeğerler ataletin başlıca momentleridir. Açısal momentum bileşenleri indis üzerinden toplanmadan,

$$L_i = I_i w'^i \quad 4.173$$

şeklinde olur. O noktası etrafında \vec{K} dinamik momentumu \vec{L} açısal momentumunun zamana göre türevinin iki teriminin işlemleri olarak

$$\vec{K} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{\text{int}} + \bar{w} \times \vec{L} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{\text{int}} + \bar{w} \times I\bar{w} \quad 4.174$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{\text{int}}$ gerçek bazdaki \vec{L} açısal momentumunun

bileşenlerinin zamana göre türevine karşılık gelen $a' = (e'_i)$ bazına göre

bileşenleri olarak vektör belirtir. Bu nedenle \vec{K} dinamik momentumunun bileşenleri $a' = (e'_i)$ bazında,

$$\begin{cases} K'_1 = \bar{I}_1 \dot{w}'^1 - w'^2 w'^3 (I_2 - I_3) \\ K'_2 = \bar{I}_2 \dot{w}'^2 - w'^3 w'^1 (I_3 - I_1) \\ K'_3 = \bar{I}_3 \dot{w}'^3 - w'^1 w'^2 (I_1 - I_2) \end{cases} \quad 4.175$$

şeklinde olur. 4.169,171 denklemlerinden O noktası etrafında, hareketin kinetik enerjisi,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int \delta m v^2 = \frac{1}{2} \int \delta m \vec{v} \cdot \vec{w} \times \vec{r} = \frac{1}{2} \vec{w} \cdot \int \delta m \vec{r} \times \vec{v} \\ &= \frac{1}{2} \vec{w} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \vec{w} \cdot \vec{I} \vec{w} = \frac{1}{2} \bar{I} w^2 \end{aligned} \quad 4.176$$

formunu kazanır. Burada \vec{I} dönme eksenini etrafında atalet momentidir. Gerçek $a' = (e'_i)$ bazında kinetik enerji,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \bar{I}_i (w'^i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i \frac{(L'_i)^2}{\bar{I}_i} \quad 4.177$$

özelliklerine sahiptir. $R(t)$ gerçek $a' = (e'_i)$ bazı üstüne Galilean $a = (e_i)$ ortonormal bazını getiren,

$$a' = R(t)a, \quad e'_i(t) = R(t)e_i \quad 4.178$$

zamandan bağımsız dönmesiyle herhangi bir M noktasının hareketi

$$OM = \vec{r} = R(t)\vec{r}_0 \quad 4.179$$

şeklinde olur. Burada \vec{r}_0 , M noktasının gerçek $a' = (e'_i)$ bazındaki ilk konumudur. Bir noktayla olağan zaman türevi belirtilmesi,

$$\vec{v} = \dot{R}(t)\vec{r}_0 = \dot{R}(t)R(t)^{-1}\vec{r} = \vec{w} \times \vec{r} \quad 4.180$$

şeklinde olur. Bu bağıntı dönücünün tüm noktaları için geçerli olduğundan lineer operatörler arasında eşitlik,

$$\dot{R}(t)R(t)^{-1} = \vec{w} \times \quad 4.181$$

denklemine sahip olmalıdır. φ, θ, ψ Euler açılarıyla,

$$R(t) = R(\varphi, \theta, \psi; a) \quad 4.182$$

yerleştirmesiyle açısal hızın gerçek $a' = (e'_i)$ bazına göre w'^i bileşenlerinin ifadesi elde edilmelidir. 4.178,179 denklemlerinden gerçek $a' = (e'_i)$ bazına göre

$\dot{R}(t)R(t)^{-1}$ dönmesinin matris temsili Galilean $a = (e_i)$ ortonormal bazına göre $R(t)\dot{R}(t)$ dönmesinin matris temsiline denklik,

$$\left(R(-\psi, -\theta, -\varphi; a)_k^i R(\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}; a)_j^k \right) = \begin{pmatrix} 0 & -w'^3 & w'^2 \\ w'^3 & 0 & -w'^1 \\ -w'^2 & w'^1 & 0 \end{pmatrix} \quad 4.183$$

matris denklemine sahiptir. Burada $(R(\varphi, \theta, \psi; a)_j^i)$ büyüklüğü $a = (e_i)$ bazına göre Euler açılarıyla verilmiştir. Böylece temsil bazdaki \bar{w} açısal hızın bileşenlerini,

$$\begin{cases} w'^1 = -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ w'^2 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ w'^3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases} \quad 4.184$$

şeklinde sağlar. Aslında dt kez w' bileşenleri $SO(3)$ grubunun aktif bakış noktasının sonsuz küçük yer değiştirmesinin akraba bileşenlerine denktir. Bu sonuç ilgili bileşenlerinin yorumunu takip eder.

Dinamik

Bir rijit cisim için Euler denklemleri ve 4.175 denkleminde ortaya çıkan hareketin sabit noktası O noktası etrafında \bar{K} dinamik momentumuna benzer nokta etrafında toplam torka eşittir. Herhangi bir uygulanan tork denklemlerinin yokluğunda,

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 \dot{w}'^1 &= w'^2 w'^3 (\bar{I}_2 - \bar{I}_3) \\ \bar{I}_2 \dot{w}'^2 &= w'^3 w'^1 (\bar{I}_3 - \bar{I}_1) \\ \bar{I}_3 \dot{w}'^3 &= w'^1 w'^2 (\bar{I}_1 - \bar{I}_2) \end{aligned} \quad 4.185$$

hareketin burada olan hazır iki denklemin toplam açısal momentum ve toplam enerji için korunum yasalarını izlemesinden yani T kinetik enerji ve \bar{L} toplam açısal momentum yasalarını izlemesinden bu denklemlere indirgenirler. Böylece herhangi bir Galilean $a = (e_i)$ ortonormal bazına göre \bar{L} toplam açısal momentumun bileşenleri zaman içinde sabit kalır. Hareketin yukarıdaki integrallerinin kullanımı ekliptik fonksiyonlarla ilgili olarak bütünlüğü 4.186 denklemini tanımlamaya yeterlidir.

$\bar{I}_1 = \bar{I}_2$ ile rijit dönücü simetrikse doruk olarak bilinir. 4.185 denkleminde, gerçek $a' = (e'_i)$ bazında \bar{L} toplam açısal momentumunun $\bar{I}_3 \omega^3$ bileşeni hareketin bir sabitidir. Benzer olarak, bileşen $\bar{I}_1 = \bar{I}_2 = \bar{I}_3$ olarak kabul edilirse, gerçek $a' = (e'_i)$ bazında \bar{L} toplam açısal momentumunun 3 bileşeni her durumda hareket sabitleridir.

Lagrangian ve Hamiltonyen formalizmlerinin kısa açıklamasıyla kuantizasyonun bu formalizmlere uygun olduğu görülür. Genelleştirilmiş φ, θ, ψ koordinatlarının terimlerinde serbest rijit dönücünün Lagrangianı 4.177,184 denklemlerinden,

$$\begin{aligned} L(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) &= \frac{1}{2} T \\ &= \frac{1}{2} (\bar{I}_1 \{ -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \}^2 \\ &+ \bar{I}_2 \{ \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \}^2 + \bar{I}_3 \{ \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \}^2) \end{aligned} \quad 4.186$$

şeklinde olur. φ, θ, ψ Euler açıları için hareketin önceden hazırlanmış denklemlerden Euler-Lagrange diferansiyel denklemleri,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \quad 4.187$$

şeklinde olur. İlk denklemde φ genelleştirilmiş koordinatı devirlidir, yani Lagrangian içinde görünmez. Genelleştirilmiş moment,

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}, \quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \quad 4.188$$

şeklinde olur. O noktası etrafında Galilean $a = (e_i)$ ortonormal bazının dönmesinin açısına genelleştirilmiş momentum çeker. Bu nedenle,

$$p_\varphi = \bar{L} \cdot e_3 \quad 4.189$$

ve ayrıca,

$$p_\psi = \bar{L} \cdot e'_3(t) \quad 4.190$$

özelliklerine sahip olunur. φ genelleştirilmiş koordinatı devirli olduğundan Euler-Lagrange diferansiyel denklemlerinden izlenen genelleştirilmiş p_φ momentumu korunumlu olur. Bu sonuç toplam açısal momentum korunumundan biliniyor.

Lagrangian $\phi, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ içinde kuadratik olduğundan genelleştirilmiş moment bu değişkenlerin lineer homojen fonksiyonudur. Bu açıklamaların tersine çevrilmesiyle Hamiltonyen,

$$H(\phi, \theta, \psi, p_\phi, p_\theta, p_\psi) = \frac{1}{2}T \quad 4.191$$

şeklinde ortaya çıkarılır. Hamiltonyen de genelleştirilmiş momentte kuadrattir.

Örneğin $\bar{I}_1 = \bar{I}_2$ olduğunu kabul ederek,

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\bar{I}_1 \sin^2 \theta} p_\phi^2 - \frac{2 \cos \theta}{\bar{I}_1 \sin^2 \theta} p_\phi p_\psi + \frac{1}{\bar{I}_1} p_\theta^2 + \left(\frac{1}{\bar{I}_1} \cot^2 \theta + \frac{1}{\bar{I}_3} \right) p_\psi^2 \right] \quad 4.192$$

denkleme ulaşılır. Her biri devirli değişken olan ϕ ve ψ ye dikkate alan momentum bileşeni p_ψ ve p_ϕ gibi sabittir. Nitekim 3. eksen boyunca toplam açısal momentum bileşenin korunum yasasını tekrar elde edilir.

4.4.2. Kuantum Mekaniğinde Rijit Dönücünün Tanımlanması

Ölçülebilir değerler ve durumlar

Temel ölçülebilir değerlerin E_3 uzayının ortonormal a bazına uygun olarak tanımlanmış $\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}$ açısal operatörleri ve genelleştirilmiş $\hat{p}_\phi, \hat{p}_\theta, \hat{p}_\psi$ momentum operatörleri kuantum mekaniğinde bir rijit dönücü tanımlar. Bu operatörler komütasyon bağıntılarına,

$$[\phi, p_\phi] = i\hbar\mathfrak{I}, \quad [\theta, p_\theta] = i\hbar\mathfrak{I}, \quad [\psi, p_\psi] = i\hbar\mathfrak{I} \quad 4.193$$

şeklinde uyarlar ve diğer tüm operatörler sıfır olurlar. Bu bağıntılar klasik kuantize sisteme kanoniksel işleminden takip edilir. Yani kuantum mekaniğindeki operatörlerin komütatörle $(i\hbar)^{-1}$ kez herhangi iki klasik değişkenin yerine geçmesiyle Poisson braketleri oluşur,

Komütlü ölçülebilir değerlerin tam kümesinden $\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}$ açısal operatörleri spektrumu tanımla $SU(2)$ grubu için sürekli ve nondejeneredir.

Euler açıları tüm parametre uzayını boydan boya kapsamına alır. Özvektörler sonsuz forma sahiptir ve normalizasyon şartıyla,

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\phi} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\psi} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{array} \right\} |a; \varphi\theta\psi\rangle = \theta \left\{ \begin{array}{l} a; \varphi\theta\psi \end{array} \right\},$$

$$\langle a; \varphi\theta\psi | a; \varphi'\theta'\psi' \rangle = \delta(\varphi - \varphi')\delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\psi - \psi') \quad - \quad 4.194$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \delta(\varphi - \varphi')\delta(\theta - \theta')\delta(\psi - \psi')$$

şeklinde tanımları seçilir. $\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}$ ve $\hat{p}_\varphi, \hat{p}_\theta, \hat{p}_\psi$ operatörleri üzerinde işledikleri F uzayına $|a; \varphi\theta\psi\rangle$ vektörleriyle bağlı olarak tanımlanırlar.

$$\int_{SU(2)} d\mu(\varphi, \theta, \psi) |a; \varphi\theta\psi\rangle \langle a; \varphi\theta\psi| = \mathfrak{I}_F \quad 4.195$$

kaplama kısım bağıntısına sahiptir. Burada $d\mu(\varphi, \theta, \psi)$ ölçüsü $SU(2)$ grubu üstünde invarianttır.

$$\langle a; \varphi\theta\psi | \hat{p}_\varphi | a; \varphi'\theta'\psi' \rangle = -i\hbar \frac{1}{\sin\theta} \delta'(\varphi - \varphi')\delta(\theta - \theta')\delta(\psi - \psi'),$$

$$\langle a; \varphi\theta\psi | \hat{p}_\theta | a; \varphi'\theta'\psi' \rangle = -i\hbar \frac{1}{\sin\theta} \delta(\varphi - \varphi')\delta'(\theta - \theta')\delta(\psi - \psi'), \quad 4.196$$

$$\langle a; \varphi\theta\psi | \hat{p}_\psi | a; \varphi'\theta'\psi' \rangle = -i\hbar \frac{1}{\sin\theta} \delta(\varphi - \varphi')\delta(\theta - \theta')\delta'(\psi - \psi')$$

şeklinde olurlar.

Fiziksel durumlar F uzayındaki normalize edilebilir $|f\rangle$ vektörleriyle ortaklanmışlardır. $\langle a; \varphi\theta\psi |$ bazına uyumuyla,

$$|f\rangle = \int_{SU(2)} d\mu(\varphi, \theta, \psi) |a; \varphi\theta\psi\rangle f_a(\varphi, \theta, \psi) \quad 4.197$$

$$\langle f | f \rangle = \int_{SU(2)} d\mu(\varphi, \theta, \psi) |f_a(\varphi, \theta, \psi)|^2 < \infty$$

bağıntısına sahiptir. Burada $f_a(\varphi, \theta, \psi) = \langle a; \varphi\theta\psi | f \rangle$ dalga fonksiyonları invariant $d\mu(\varphi, \theta, \psi)$ ölçüsüyle $SU(2)$ grubu üzerinde tanımlı integrallenebilir $L^2(SU(2), d\mu)$ kare fonksiyonlarının Hilbert uzayına aittirler. Bu fonksiyonlara

tam ortonormal baz $\left\{ \left(\frac{j}{4\pi} \right) \hat{D}_{mm}^j(\varphi, \theta, \psi) \right\}$ fonksiyonları formlarının kümesi de

denir. Dalga fonksiyonları uzayındaki genelleştirilmiş $\hat{p}_\varphi, \hat{p}_\theta, \hat{p}_\psi$ momentum operatörlerinin temsilleri sırasıyla $-i\hbar\partial_\varphi, -i\hbar\partial_\theta, -i\hbar\partial_\psi$ ye denktir. \hat{p}_φ operatörü için bu sonuç 4.197 denkleminde,

$$\begin{aligned} \langle a; \varphi\theta\psi | p_\varphi | f \rangle &= \int_{SU(2)} d\mu(\varphi, \theta, \psi) \langle a; \varphi\theta\psi | p_\varphi | a; \varphi'\theta'\psi' \rangle f_a(\varphi', \theta', \psi') \\ &= -i\hbar\partial_\varphi f_a(\varphi, \theta, \psi) \end{aligned} \quad 4.198$$

şeklinde olur.

Dönme grubu temsiliinin karahlığı

Kararlılık, $|a; \varphi\theta\psi\rangle$ baz vektörlerinin dönüşüm yasasını kesin olarak belirlemeye yeterlidir. Dönme grubunun fazına temsillerin kalkması durum tarifi içinde düzenli verilir, temsiller $SU(2)$ grubunun gerçek temsilleridirler. Euler açıları $SU(2)$ grubunun seçimine sahiptir. $SU(2)$ grubu yalnızca dönmenin Euler açıları olarak değişimini kısıtlar. Tamamen belirlenmiş bir kuantum sisteminin klasik mekanikteki benzeri rijit dönücüdür. Bu durumda $|a; \varphi\theta\psi\rangle$ vektörü normalize edilemediğinden fiziksel durumların Hilbert uzayına ait değildir. Sabitlenmiş a bazına uygun Euler açılarıyla vektörün belirlenmiş olan gerçek eksenli rijit dönücünün tanımı olarak yorumlanabilir. Böylece üniter $D[SU(2)]$ temsiliyle herhangi bir $R = R(U; a)$ dönmesi altında $|a; \varphi\theta\psi\rangle$ vektörünün dönüşüm yasası,

$$\forall U \in SU(2) \quad |{}^U a; \varphi\theta\psi\rangle = \hat{D}(U) |a; \varphi\theta\psi\rangle = |a; U\{\varphi, \theta, \psi\}\rangle \quad 4.199$$

şeklinde ayrılır. Bu denklemdeki $U\{\varphi, \theta, \psi\}$ $SU(2)$ grubu içindeki $U = U(\varphi, \theta, \psi)$ matrisinin Euler açılarını belirtir. Herhangi bir $|f\rangle$ durumu $SU(2)$ grubu içindeki tüm U elemanları için,

$$\begin{aligned} |{}^U f\rangle = \hat{D}(U) |f\rangle &= \int_{SU(2)} d\mu(\varphi, \theta, \psi) |{}^U a; \varphi\theta\psi\rangle f_a(\varphi, \theta, \psi) \\ &= \int_{SU(2)} d\mu(\varphi, \theta, \psi) |a; \varphi\theta\psi\rangle f_a(U^{-1}\{\varphi, \theta, \psi\}) \end{aligned} \quad 4.200$$

denklemine sahiptir. Bu denklemde ölçünün invaryansı kullanılmıştır. Bu şekilde $R = R(U; a)$ dönmesi altında f_a dalga fonksiyonlarının dönüşüm yasası,

$$f_a \rightarrow {}^U f_a = \hat{D}(U)f_a \quad 4.201$$

$${}^U f_a(\varphi, \theta, \psi) = f_a(U^{-1}\{\varphi, \theta, \psi\})$$

şeklinde bulunur. Bu sonuç ayrıca $\hat{D}(U)$ operatörünün üniter karakterinden,

$$\langle a; \varphi\theta\psi | \hat{D}(U) | f \rangle = \langle {}^{U^{-1}} a; \varphi\theta\psi | f \rangle \quad 4.202$$

şeklinde doğrudan çıkarılır. Nitekim, dalga fonksiyonları uzayındaki $SU(2)$ grubunun yukarıda temsilinde verilen baz için bu grubun sol kurallı temsiliyle aynı olur.

Sonsuz küçük jeneratörler

\hat{J}^2 Casimir ve \hat{J}_i, \hat{J}_\pm operatörlerinin ifadeleri,

$$\hat{J}_i = \hbar J_i^l, \quad \hat{J}_\pm = \hbar J_\pm^l, \quad \hat{J}^2 = \hbar^2 (J^l)^2 \quad 4.203$$

şeklinde olur. \hat{J}_3 operatörünün,

$$\hat{J}_3 = \hat{p}_\varphi = -i\hbar\partial_\varphi \quad 4.204$$

şeklinde \hat{p}_φ operatörüne özdeşliği klasik özelliklerle anlaşmasında dikkate alınır.

Euclidyen E_3 vektör uzayıyla $SU(2)$ grubunun dikkate alınan temsiline Lie cebirinin aynı olduğunu göstererek bu uzayın $a = (e_i)$ ortonormal bazıyla uyumlu

J_i bileşenlerine sahip bir vektör olarak \hat{J} açısal momentum operatörü,

$$\hat{J} = \sum_i J_i e_i \quad 4.205$$

şeklinde tanımlanır.

Gerçek sonsuz küçük I_i jeneratörleri $SU(2)$ grubunun sol düzenli temsiline I_i^l gerçek sonsuz küçük jeneratörlerinden,

$$I_i = \hbar I_i^l = -\hbar J_i^r \quad 4.206$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki J_i^r bileşenleri $SU(2)$ grubunun sağ düzenli temsiline sonsuz küçük jeneratörleridir. I_i jeneratörlerinin φ, θ, ψ açılarına uygulanmasının ifadesi I_3 jeneratörünün genelleştirilmiş \hat{p}_ψ momentumuna,

$$I_3 = \hat{p}_\psi = -i\hbar\partial_\psi \quad 4.207$$

şeklinde denk olduğunu göstermelidir. 4.189 denklemi I_i jeneratörlerinin klasik mekanikteki karşılıklarını belirtir. Örneğin 4.196 denkleminde,

$$\hat{J}^2 = I^2 \quad 4.208$$

eşitliğine sahiptir ve I_i jeneratörleri,

$$[\hat{J}_i, I_j] = 0 \quad [I_i, I_j] = -i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} I_k \quad 4.209$$

komütasyon bağıntılarına uyarlar. Bu komütasyon bağıntılarındaki işaretlerin değişimi \hat{J}_i operatörlerini I_i jeneratörlerine benzetir.

Kuantum mekaniğinde gerçek sonsuz küçük I_i jeneratörleri \hat{J} açısal momentum operatörünün izdüşümüne uygun operatörlerdir. Gerçek baz vektörlerin bir başka tanımlaması,

$$a' = (e'_i) \quad e'_i = R(U; a)e_i \quad 4.210$$

şeklinde yapılabilir. Öyle ki, I_i jeneratörleri \hat{e}_i ve \hat{R}_i^j çarpım operatörlerine göre

$$I_i = \hat{J} \cdot \hat{e}_i = J_j \hat{R}_i^j = \hat{R}_i^j J_j \quad 4.211$$

şeklinde olurlar.

Böylece,

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha I_i} = \hat{D}(U) \hat{D}[U(\alpha, e_i; a)] \hat{D}(U)^{-1} = \hat{D}[U(\alpha, e'_i; a)] \quad 4.212$$

sonucu çıkarılır, öyle ki, I_i jeneratörleri \hat{e}_i çarpım operatörleriyle kesinleştirilmiş gerçek eksen etrafında dönmelerin sonsuz küçük jeneratörleri olarak yorumlanabilirler. Böylece,

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha I_i} I_j e^{\frac{i}{\hbar} \alpha I_i} = I_k R(\alpha, -e'_i)_j^k \quad 4.213$$

bağıntısı kurulur. Burada,

$$R(\alpha, -e'_i)_j^k = e'_k R(\alpha, -e'_i)_j^k \quad 4.214$$

durumu vardır. I_i jeneratörlerinin yukarıdaki yorumundan, 4.213 denklemi gerçek e'_i baz vektörleri etrafında α açısıyla dönme halinde gerçek sonsuz küçük jeneratörlerin dönüşüm yasasını ifade eder. 4.213 denkleminin sol kısmı yalnızca I_i jeneratörlerinin komütasyon bağıntıları üzerinden bağlı olur. $-I_i$ operatörleri

4.209 denkleminde J_i 'ler gibi benzer komütasyon bağıntılarına sahip olurlar.

Ayrıca, J_i 'ler,

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_i} J_j e^{\frac{i}{\hbar}\alpha J_i} = J_k R(\alpha, e_i)_j^k \quad 4.215$$

eşitliğini doğrularlar. Burada,

$$R(\alpha, e_i) e_j = e_k R(\alpha, e_i)_j^k \quad 4.216$$

durumu vardır. Bundan dolayı,

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(-\alpha)(-I_i)} (-I_j) e^{\frac{i}{\hbar}(-\alpha)(-I_i)} = (-I_k) R(-\alpha, e_i)_j^k \quad 4.217$$

bağıntısıyla bildirilen sonuca sahiptir. Özellikle,

$$U_i = e^{-\frac{i}{\hbar}\pi I_i} \quad 4.218$$

notasyonu, $\alpha = \pi$ dönmesi için,

$$U_i I_j U_i^{-1} = (2\delta_{ij} - 1) I_j \quad 4.219$$

bulunur. Yukarıdaki bağıntıdan $\exp-\frac{i}{\hbar}\pi I_j$ serisinin gelişimi,

$$i \neq j \quad U_i U_j = U_j^{-1} U_i \quad 4.220$$

şeklinde olur.

Standart baz, bir üçlü (Triad) üzerinden bağıllık

Burada dönmenin bakışının aktif ve pasif noktalarıyla ilgili bir üçlü üzerinden standart baza bağlı olma tekrar edilecektir. Dikkate alınmış temsile spesifik olan özellikler aktarılacaktır.

$\hat{J}^2, \hat{J}_3, \hat{I}_3$ operatörleri komütlü ölçülebilir değerlerin bir tam kümesini biçimlendirir. Gerçekten,

$$\left| a; \tilde{j} m k \right\rangle = \int_{SU(2)} d\mu(\varphi, \theta, \psi) \left| a; \varphi \theta \psi \right\rangle \frac{\hat{j}}{4\pi} \hat{D}_{mk}^{j*}(\varphi, \theta, \psi) \quad 4.221$$

vektörleri bir yaygın standart bazı,

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} \hat{J}^2 \\ \hat{J}_3 \\ \hat{I}_3 \end{aligned} \right\} |a; \tilde{j}mk\rangle = \begin{cases} \hbar^2 j(j+1) \\ \hbar m \\ \hbar k \end{cases} |a; \tilde{j}mk\rangle \\
& \hat{J}_\pm |a; \tilde{j}mk\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |a; \tilde{j}m \pm 1k\rangle \\
& \hat{I}_\pm |a; \tilde{j}mk\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - k(k \mp 1)} |a; \tilde{j}mk \mp 1\rangle
\end{aligned} \tag{4.222}$$

şeklinde belirler. Ayrıca, $\left\{ \left(\frac{\hat{J}}{4\pi} \right) \hat{D}_{mk}^{j*} \right\}$ fonksiyonlarının kümesi

$L^2(SU(2), d\mu)$ 'nün bir tam ortonormal bazı olduğundan, bu vektörler fiziksel durumların Hilbert uzayının bir tam ortonormal bazını,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j,m,k} |a; \tilde{j}mk\rangle \langle a; \tilde{j}mk| = \mathfrak{S}_H \\
& \langle a; \tilde{j}mk | a; \tilde{j}'m'k' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{kk'}
\end{aligned} \tag{4.223}$$

şeklinde biçimlendirirler. 4.222 denklemlerinin karşılaştırılmasıyla m kuantum sayısı üzerine işleyen \hat{J}_\pm operatörlerine benzer olarak k kuantum sayısı üzerine işleyen \hat{I}_\pm operatörlerinin olduğu görülür. Bu nedenle, $\hat{J}_1, -\hat{J}_2, \hat{J}_3$ operatörlerinin m kuantum sayısı üzerine işlemeleri gibi $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3$ operatörleri k kuantum sayısı üzerine işlerler. Gerçek eksen etrafında α açısıyla dönme altında $|a; jmk\rangle$ vektörlerinin dönüşüm yasası,

$$\begin{aligned}
& e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \hat{I}_1} |a; \tilde{j}mk\rangle = |a; \tilde{j}mk'\rangle e^{\frac{i\pi}{2}(k'-k)} d_{k'k}^j(\alpha) \\
& e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \hat{I}_2} |a; \tilde{j}mk\rangle = d_{kk'}^j(\alpha) |a; \tilde{j}mk'\rangle \\
& e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \hat{I}_3} |a; \tilde{j}mk\rangle = e^{-i\alpha k} |a; \tilde{j}mk\rangle
\end{aligned} \tag{4.224}$$

şeklinde olduğu sonucu çıkarılır. Özellikle, $\alpha = \pi$ dönmesi için 4.219 denkleminde belirtilen notasyon kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& U_1 |a; \tilde{j}mk\rangle = e^{-i\pi} |a; \tilde{j}m - k\rangle \\
& U_2 |a; \tilde{j}mk\rangle = (-1)^{j+k} |a; \tilde{j}m - k\rangle \\
& U_3 |a; \tilde{j}mk\rangle = e^{-i\pi k} |a; \tilde{j}mk\rangle
\end{aligned} \tag{4.225}$$

sonuçları bulunur. Yukarıdaki bağıntılardan U_i operatörlerinin 1,2,3 'ün devirli permütasyonu i, j, k indisleriyle

$$U_i U_j = U_k^{-1} \quad 4.226$$

şeklinde olduğu kolayca doğrulanır. Bu bağıntı 4.220 denkleminin iki kez kullanılmasıyla

$$U_j U_i = U_k \quad 4.227$$

olduğunu ima eder. Ayrıca altuzay dahilinde verilen j indisi için U_i operatörlerinin

$$U_i^2 = (-1)^{2j} \mathfrak{I} \quad 4.228$$

olduğunu işaret etmelidir. Bundan dolayı, $SU(2)$ grubunun bir çift temsili ve böylece j indisinin tam sayı değerleri için, U_i operatörleri karışık ve üniter oluşlarından Hermityendirler.

4.4.3. Kuantum Mekanikte Serbest Rijit Dönücünün Dinamiği

Klasik mekanikteki gibi, aktif bakış noktasından rijit dönücü bir reel pozitif ve simetrik atalet tensörüyle karakterize edilerek tanımlanmıştır. Şimdi, atalet tensörü dikkate alınan ataletin ilk eksenini boyunca yatan gerçek e'_i vektörleridir. Ataletin ilk momentleri \vec{I}'_i 'lerdir.

Kuantum mekaniğinde klasik Hamiltonyenin yerini tutan serbest dönücünün Hamiltonyeni,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{(I_i)^2}{I_i} \quad 4.229$$

şeklinindedir. Bu ifade ayrıca asimmetrik zirve denklemi olarak da bilinir. Sorun, bu Hamiltonyenin öz durumlarını bulmaktır. Komütasyon bağıntılarının olduğu 4.207 denklemi Hamiltonyenin \hat{J}^2 ve \hat{J}_3 operatörleriyle komüt olduğunu belirtir. Bu sonuç dönme grubu altında Hamiltonyenin invaryansının olduğunu ve açısal momentumun korunacağını gösterir. Böylece, Klasik açısal momentumun Galilean bazına benzer bir uyumla kuantum mekaniksel açısal momentumun 3. bileşeni sabit kalır yani korunumludur. Hamiltonyenin özvektörleri,

$$\hat{H}|a; \tilde{E}j m\rangle = E_{jm}|a; \tilde{E}j m\rangle, \quad |a; \tilde{E}j m\rangle = c_{E_{jm}}^k |a; \tilde{j} m k\rangle \quad 4.230$$

formunda ifade edilirler. $c_{E_{jm}}^k$ katsayıları ve E_{jm} enerjileri,

$$\langle a; \tilde{j} m k | H | a; \tilde{j} m k' \rangle c_{E_{jm}}^{k'} = E_{jm} c_{E_{jm}}^k \quad 4.231$$

özdeğerler probleminin çözümüyle belirlenirler. Yalnızca sıfırdan farklı matris elemanlarına yol gösteren 4.222 denkleminde Hamiltonyenin yukarıdaki matris elemanları,

$$\begin{aligned} \langle a; \tilde{j} m k | (I_1)^2 | a; \tilde{j} m k \rangle &= \langle a; \tilde{j} m k | (I_2)^2 | a; \tilde{j} m k \rangle = \\ &= \hbar^2 \frac{1}{2} (j(j+1) - k^2) \\ \langle a; \tilde{j} m k \pm 2 | (I_1)^2 | a; \tilde{j} m k \rangle &= -\langle a; \tilde{j} m k \pm 2 | (I_2)^2 | a; \tilde{j} m k \rangle = \\ &= \hbar^2 \frac{1}{4} ((j \mp k)(j \mp k + 1)(j \mp k - 1)(j \mp k + 2))^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad 4.232$$

$$\langle a; \tilde{j} m k | (I_3)^2 | a; \tilde{j} m k \rangle = \hbar^2 k^2$$

şeklinde hesaplanırlar.

Matris elemanlarının uzayının boyutu gerçekteksen etrafında π dönmesi altında Hamiltonyenin simetri özelliklerinin avantajıyla düzenli olarak azaltılmasıyla özdeğer problemi çözülür. 4.219 denkleminde görüldüğü gibi gerçekten Hamiltonyen U_i operatörleriyle komütür. U_i operatörleri 4.226,227 denklemlerine bağlı olduklarından yalnızca ikisi bağımsızdır. Ayrıca U_i operatörleri Hermityendir ve yalnız j kuantum sayısının l tam sayı değerleri için ölçülebilir değerleri olabilir. Özdeğer probleminin bu son halinde,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |a; \tilde{l} m k\rangle + \varepsilon (-1)^{l+k} |a; \tilde{l} m - k\rangle, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad k \text{ tek veya çift} \quad 4.233$$

ortonormal fonksiyonları tarafından 4 uzayın her birinde çözülmüş olabilir. Bu fonksiyonlar $\lambda_i = \pm 1$ özdeğerleriyle U_i operatörlerinin öz durumları,

$$\lambda_1 = \lambda_2 \lambda_3, \quad \lambda_2 = \varepsilon, \quad \lambda_3 = (-1)^k \quad 4.234$$

şeklinde dirler.

4.208 denkleminin kullanılmasıyla $\bar{I}_1 = \bar{I}_2$ ile simetriksele zirve Hamiltonyeni,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left[\frac{\hat{J}^2}{\bar{I}_1} + \left(\frac{1}{\bar{I}_3} - \frac{1}{\bar{I}_1} \right) (\bar{I}_3)^2 \right] \quad 4.235$$

şeklinde olur. I_3 operatörünün Hamiltonyenle komüt olmasından dolayı klasik mekanikteki gibi açısız momentumun bu gerçek bileşenlerinin korunumlu olduğu ortaya çıkar. Böylece Hamiltonyenin öz durumları $\hat{J}^2, \hat{J}_3, I_3$ operatörlerinin komütü ölçülebilir değerlerinin tam kümesinin,

$$H|a; \tilde{j}mk\rangle = E_{jk}|a; \tilde{j}mk\rangle, \quad 4.236$$

$$E_{jk} = \hbar^2 \frac{1}{2} \left(\frac{j(j+1)}{\bar{I}_1} + \left(\frac{1}{\bar{I}_3} - \frac{1}{\bar{I}_1} \right) k^2 \right)$$

şeklinde baz vektörleridir. Bu bağıntı $\bar{I}_1 > \bar{I}_3$ durumu için (diğer durumda $\bar{I}_1 < \bar{I}_3$ olur) dönücü yumurta şeklinde (diğer durumda kutupları yassılaştırmış) küreseldir ve $k=0$ için j verilen düşük değerlidir (diğer durumda $k = \pm j$ olur). Bu nedenle, gerçek açısız momentum klasik durumdaki gibi geniş atalet momentleri yönü boyunca sıraya dizmeyi dener.

Hamiltonyen, $H(\varphi, \theta, \psi, p_\varphi, p_\theta, p_\psi)$ Hamiltonyeninin klasik ifadesinde, Euler açılarına göre I_i jeneratörlerini 4.222 denkleminde yerine koyarak,

$$\hat{p}_\varphi \rightarrow -i\hbar\partial_\varphi, \quad \hat{p}_\theta \rightarrow -i\hbar\partial_\theta, \quad \hat{p}_\psi \rightarrow -i\hbar\partial_\psi \quad 4.237$$

bulabilen $f_a(\varphi, \theta, \psi)$ dalga fonksiyonları uzayında örneğin simetrik zirve için 4.191 denklemi üzerinde işler[9].

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada önce temel matematiksel yapılar ve bu yapıların aralarındaki ilişkiler incelendi. Daha sonra klasik Lie gruplarının ve cebirlerinin özellikleri, ayrıntılı bir şekilde incelendi. Fiziksel sistemlerin veya parçacıkların iç simetrisi ve isotopik spin gibi özelliklerinin klasik Lie grupları ile açıklanması parçacık fiziğinde çok önemli bir yer tutar. Biz burada invaryant ve simetri kavramlarını, bu kavramların kuantum mekaniğindeki önemini araştırıp, fiziksel sistemi bu kavramlar altında inceledik. İnvaryant ve simetri için kuantum mekaniğinde birçok önemli matematiksel araç kullanılır. Bu araçların en önemlilerinden biri grup teoridir. Relativistik veya nonrelativistik durumlarda kuantum mekaniği, grup teorisine kendisine sağladığı olanaklardan yararlanır. Burada kısa bir bölüm altında özel üniter ve özel ortogonal gruplarının nonrelativistik kuantum mekaniğindeki uygulamaları özetlendi. Daha sonra rijit dönücü için klasik ve kuantum mekaniksel sistemler ayrı ayrı tanımlandı. Bu sistemler için Hamiltonyen denklemleri elde edildi. Burada bulduğumuz düz simetrik ve asimmetrik zirve olan Hamiltonyen denklemleri, molekül ve nükleonların dönme spektrumlarının teorilerinde büyük öneme sahiptir.

6. KAYNAKLAR

1. WESTENHOLZ, C., *Differential Forms in Mathematical Physics (Studies in Mathematics and its Applications ; v.3)*, Nort-Holland, Amsterdam, 1981
2. ÖZDAŞ, K., *SO(6), SU(6) ve SP(6) Lie Gruplarının Fermiyon Alanları Cinsinden Cebirsel Yapılarının İncelenmesi*, Anadolu Üniversitesi Fen Edebiyat Dergisi, 3, 1, 127-136, 1991
3. GILMORE, R., *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*, Willey, New York, 1974
4. WYBOURNE, B.G., *Classical Groups for Physicists*, Willey, New York, 1974
5. KARAOĞLU, B., *Kuantum Mekaniğine Giriş*, Bilgi Tek Yayıncılık, İstanbul, 1994
6. ÖZDAŞ, K., *Dirac Denklemi*, Eskişehir Devlet Mimarlık Mühendislik Akademisi, 4, 4, 272-277, 1980
7. DERELİ, T. ve VERÇİN A., *Kuantum Mekaniği 1*, Metu Press, Ankara, 1998
8. ROLNICK, W.B., *The Fundamental Particles and their Interactions*, Addison-Wesley, New York, 1993
9. NORMAND, J-M., *A Lie Group: Rotations in Quantum Mechanics*, Nort-Holland, Amsterdam, 1980