

174051

**BİKUATERNİONLARIN  
MODERN FİZİĞE  
UYGULANMASI**

**Muhammer SOYDAŞ  
Yüksek Lisans Tezi**

**Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Anabilim Dalı  
Eylül-2003**

**Anadolu Üniversitesi  
Merkez Kütüphane**

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Muhammer SOYDAŞ'ın Bikuaternionların Modern Fiziğe Uygulanması başlıklı Fizik Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 22/09/2003 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmenliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Yard.Doç.Dr. Murat TANIŞLI	
Üye	: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ	
Üye	: Prof. Dr. Ertuğrul YÖRÜKOĞULI	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun  
24/09/2003. tarih ve 31/3... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

(ENSTİTÜ YÖNETMENLİĞİ)  
**Prof. Dr. Orhan ÖZER**  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
M ü d ü r ü

Anadolu Üniversitesi  
Merkez Kütüphane

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### BİKUATERNİONLARIN MODERN FİZİĞE UYGULANMASI

MUHAMMER SOYDAŞ

Anadolu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Murat TANIŞLI  
2003, 68 sayfa

Bu çalışmada, reel ve kompleks sayılar gibi bir sayı sistemi olan kuaternion, bikuaternion (kompleks kuaternion) ve bunları içine alan Clifford cebirlerinin tanımı yapılmıştır. Bu sayı sistemlerinin oluşturduğu cebirlerin genel özellikleri verilmiştir. Kuaternion, bikuaternion ve Clifford cebirlerinin birleşme özelliğine sahip olması nedeniyle bunların matris temsilleri verilmiştir. Kuaternionların  $2 \times 2$  kompleks ve  $4 \times 4$  reel matris temsili, bikuaternionların  $2 \times 2$  ile  $4 \times 4$  kompleks ve  $8 \times 8$  reel matris temsilleri verilmiştir.  $Cl_2$  Clifford cebirlerinin  $2 \times 2$  reel matrisleri ile,  $Cl_3$  Clifford cebirlerinin ise  $2 \times 2$  kompleks matrisleri ile benzerliği gösterilmiştir. Bikuaternionlar yardımıyla Maxwell'in dört temel denkleminin tek bir denkleme indirgenebileceği görülmüştür. Kuaternion, bikuaternion ve Clifford cebirleri fiziğin bir çok alanında başarıyla kullanılmaktadır. Son olarak bu çalışmada, geniş kapsamlı bir kaynak taraması yapıldıktan sonra bu sayı cebirlerinin özel relativite ve Lorentz dönüşümlerine uygulanması gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuaternion, Kompleks kuaternion, Bikuaternion,  
Clifford cebri, Özel Relativite, Lorentz dönüşümleri

## ABSTRACT

Master of Science Thesis

### AN APPLICATION TO MODERN PHYSICS OF BIQUATERNIONS

MUHAMMER SOYDAŞ

Anadolu University  
Graduate School of Natural and Applied Science  
Physics Program

Supervisor: Yard. Doç. Dr. Murat TANIŞLI  
2003, 68 pages

In this study, quaternion and biquaternion (complex quaternion) are the number systems like as real and complex numbers and Clifford algebra contains above mentioned have been introduced. The general properties of these algebras that was formed by these number systems have been given. Since quaternion, biquaternion and Clifford algebras are associated with each other their, the matrix representation of them has been also given. The  $2 \times 2$  complex and  $4 \times 4$  real matrix representations of quaternions and  $2 \times 2$  and  $4 \times 4$  complex and  $8 \times 8$  real matrix representations of biquaternions have been given. The similarity has been explained between  $Cl_2$  Clifford algebras, the  $2 \times 2$  real matrices and  $Cl_3$  Clifford algebras, the  $2 \times 2$  complex matrices. Maxwell's four equations could be reduced to one equation by biquaternions. Quaternion, biquaternion and Clifford algebras are successfully used in the various fields of physics. Finally, after extensive source researchs have been done, these algebras applications to the special relativity and the Lorentz transformations have been indicated.

**Keywords:** Quaternion, Complex quaternion, Biquaternion, Clifford algebra, Special relativity, Lorentz transformations

## TEŞEKKÜR

Bu alıŐma sırasında beni ynlendiren ve benden desteğini esirgemeyen değerli hocam Sayın Yard. Doç. Dr. Murat Tanışlı'ya ve bu çalışma esnasında bana yardımcı olan herkese teşekkür ederim.

MUHAMMER SOYDAŞ

# İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER .....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	vii

## 1. GİRİŞ.....1

## 2. KUATERNİONLAR.....8

2.1. Kuaternionun Tanımı .....	8
2.2. Sıfır, Skaler ve Vektör Kuaternion Kavramları.....	9
2.3. Kuaternionlar ile İlgili Temel İşlemler.....	10
2.3.1. Kuaternionlarda eşitlik ve skalerle çarpma .....	10
2.3.2. Kuaternionlarda toplama ve çıkarma işlemi .....	11
2.3.3. Kuaternionlarda çarpma işlemi .....	11
2.3.4. Bir kuaternionun eşleniği .....	12
2.3.5. Birim kuaternion ve norm .....	13
2.3.6. Kuaternionlarda ters eleman ve bölme işlemi.....	14
2.3.7. İki kuaternionun skaler çarpımı .....	15
2.3.8. İki vektör kuaternionun vektörel çarpımı.....	15
2.3.9. Kuaternionlar için paralellik ve diklik koşulu.....	15
2.4. Diferansiyel Vektör Operatörleri.....	16
2.4.1. Gradyent.....	16
2.4.2. Diverjans .....	17
2.4.3. Rotasyonel (curl).....	17
2.5. Kuaternionların Matris Temsili .....	17
2.5.1. Kuaternionların $2 \times 2$ matris temsili.....	17
2.5.2. Kuaternionların $4 \times 4$ matris temsili.....	18

<b>3. BİKUARTERNİONLAR.....</b>	<b>20</b>
3.1. Bikuaternionun Tanımı.....	20
3.2. Bikuaternionlar ile İlgili Temel İşlemler.....	21
3.2.1. Skaler birim eleman .....	21
3.2.2. İki bikuaternionun eşitliği .....	21
3.2.3. Bikuaternionlarda toplama ve çıkarma işlemi.....	21
3.2.4. Bikuaternionlarda çarpma işlemi .....	22
3.2.5. Bir bikuaternionun eşleniği.....	23
3.2.6. Bikuaternionun normu .....	24
3.2.7. Bir bikuaternionun tersi.....	24
3.2.8. Bikuaternionlarda bölme işlemi .....	25
3.2.9. Birim bikuaternion .....	27
3.3. Bikuaternionların Matris Temsili .....	28
3.3.1. Bikuaternionların $2 \times 2$ matris temsili .....	28
3.3.2. Bikuaternionların $4 \times 4$ matris temsili.....	28
3.3.3. Bikuaternionların $8 \times 8$ matris temsili.....	29
<b>4. CLIFFORD CEBİRLERİ .....</b>	<b>32</b>
4.1. Giriş .....	32
4.2. Vektörlerin Clifford Çarpımı.....	35
4.3. İki Vektörün Dış (Exterior), Wedge Çarpımı.....	36
4.4. Verilen Yönlerde Bir Vektörün Bileşenleri.....	38
4.5. Dik Gösterimler ve Yansımalar.....	38
4.6. $\mathbb{R}^2$ Öklid Uzayının $Cl_2$ Clifford Cebri .....	40
4.7. $Cl_2$ 'nin Matris Gösterimi .....	41
4.8. $\mathbb{R}^3$ Öklid Uzayının $Cl_3$ Clifford Cebri .....	42
4.9. $Cl_3$ 'ün Matris Gösterimi .....	43
<b>5. KUATERNİONLAR ve ÖZEL RELATİVİTE.....</b>	<b>44</b>
5.1. Giriş.....	44
5.2. Üç Boyutta Dönme ve Kuaternionlar.....	44
5.3. Özel Relativitenin Araçları.....	47

5.4. Kuaternionların Özel Relativitede Kullanımı.....	48
5.5. Kuaternionların Pratikte Kullanımı .....	49
<b>6. BİKUARTERNİONLAR ve ÖZEL RELATİVİTE.....</b>	<b>51</b>
<b>7. CLIFFORD CEBRİ ve LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİ.....</b>	<b>55</b>
7.1. Bir Boyutlu Uzayda Lorentz Dönüşümleri .....	55
7.2. Dört Boyutlu Uzayda Lorentz Dönüşümü .....	58
7.3. Dört Boyutlu Uzayın Değişmeyen Metriği .....	60
<b>8. SONUÇ.....</b>	<b>64</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>66</b>



## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$IR$	: Reel sayılar uzayı
$C$	: Kompleks sayılar uzayı
$H$	: Kuaternion uzayı
$a, b, p, q$	: Skalerlerin gösterimi
$a_i, b_i$	: Reel sayıların gösterimi
$c_i$	: Kompleks sayıların gösterimi
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	: Vektörlerin gösterimi
$i, j$	: Kompleks birimler
$p, q, r$	: Kuaternionların gösterimi
$p_i, q_i, r_i$	: Kuaternionların bileşenleri
$\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$	: Vektör kuaternionların gösterimi
$p^*, q^*, r^*$	: Kuaternionların kompleks eşleniği
$p^{-1}, q^{-1}, r^{-1}$	: Kuaternionların tersi
$N(p), N(q), N(r)$	: Kuaternionların normu
$\Gamma_i$	: Kuaternion taban elemanlarının $4 \times 4$ matris gösterimi
$\sigma_k$	: Pauli-spin matrisleri
$\nabla$	: Nabla operatörü
$e_i$	: Kuaternion ve bikuaternion birimleri
$P, Q, A, B$	: Bikuaternionların gösterimi
$P_i, Q_i, A_i, B_i$	: Bikuaternionların bileşenleri
$\bar{P}, \bar{Q}$	: Vektör bikuaternionların gösterimi
$P^*, Q^*$	: Bikuaternionların kompleks eşleniği
$\bar{P}, \bar{Q}$	: Bikuaternionların kuaternion eşleniği
$N(P), N(Q)$	: Bikuaternionların normu
$P^{-1}, Q^{-1}$	: Bikuaternionların tersi
$P^\dagger, Q^\dagger$	: Bikuaternionların hermityen eşleniği

$I$	: Birim matrisin gösterimi
$Cl_2$	: $IR^2$ Öklid uzayının Clifford cebri
$Cl_3$	: $IR^3$ Öklid uzayının Clifford cebri
$e_{ij}$	: Bivektörlerin gösterimi
$e_{ijk}$	: Trivektörlerin gösterimi
$p$	: Paravektörlerin gösterimi
$p_0, p_x, p_y, p_z$	: Para vektörün bileşenleri
$a_{\perp}, b_{\perp}, r_{\perp}$	: Dik vektörlerin gösterimi
$a_{\parallel}, b_{\parallel}, r_{\parallel}$	: Paralel vektörlerin gösterimi
$\tilde{u}$	: $u$ 'nun tersi
$\bar{u}$	: $u$ 'nun Clifford eşleniği
$u^*$	: $u$ 'nun kompleks eşleniği
$R$	: İşlemci
$\bar{R}$	: Ters işlemci
$M_{\text{metrik}}, g_{\mu}^{\nu}$	: Minkowski metriğinin gösterimi
$\gamma_m$	: Uzay-zamanın ortonormal baz vektörleri
$\Lambda_x$	: Dörtlü vektörün gösterimi
$\tau$	: Has zaman
$F$	: Lorentz Kuvveti
$L_{\nu}$	: Lorentz dönüşümünün bileşenleri
$\vec{p}$	: Momentum vektörü
$p_x, p_y, p_z$	: Momentum bileşenleri
$P$	: Momentumun uzaysal gösterimi
$L$	: Lagrangian fonksiyonu
$J$	: Akım-yük yoğunluğu
$\Phi$	: Dörtlü potansiyel
$\cdot$	: Skaler çarpım
$\times$	: Vektörel çarpım
$\wedge$	: Wedge(Exterior) çarpım

## 1. GİRİŞ

Bazı özellikleri bir kenara bırakırsak, kuadratik normu olan başka karmaşık sayı cebirleri bulunabilir mi? Bu soruya cevap arayanlar arasında Legendre, Gauss, Hamilton, Graves, Cayley, Hurwitz gibi matematikçiler bulunuyor. 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowan HAMILTON vektörleri bölmeye çalışırken böyle bir cebri, yani kuaternionları bulmuştur[1].

Hamilton 1830 yılından itibaren kompleks sayılar üzerine çalışmış ve nihayet 1833 yılında iki reel sayıdan oluşan kompleks sayıların bir cebir oluşturduğu sonucuna varmıştır. Bu sonuçtan yola çıkarak çalışmalarını iki kompleks ve bir reel bileşenden oluşan  $(q = a + ib + jc)$  üçlü sayı sistemi üzerinde yoğunlaştırmıştır. Vektör olarak adlandırdığı bu sistem üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabildiği halde bölme işlemi için ise bir metot geliştirememiştir. 1843 yılında bu sayı sisteminin çarpma işleminde değişme özelliğinin gerçekleşmediğini anladı ve çarpma işleminin bu özelliğinden vazgeçerek  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$  özelliğine sahip üç imajiner birim tanımladı. Böylece Hamilton'un kompleks sayısı  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $a + ib + jc + kd$  formunda oluştu ve buna kuaternion denildi[2].

Kuaternionlar aynı reel ve kompleks sayılar gibi bir sayı sistemidir. Reel sayılar bir, kompleks sayılar iki bileşen içerirken kuaternionlar dört bileşene sahiptir. Kompleks sayılar reel sayıların bir kombinasyonudur. Dolayısıyla da reel sayılar, kompleks sayıların bir alt kümesidir. Diğer taraftan kuaternionlarda iki kompleks sayının kombinasyonundan oluşmuştur. Buna göre kompleks sayılarda kuaternionların bir alt kümesi olmalıdır. Bu sonuç, kuaternionların hem reel sayıları hem de kompleks sayıları kapsayan daha geniş bir sayı sistemi olduğunu göstermektedir[3].

Fizikte ölçülebilen her şey reel olmak zorundadır. Bu nedenle reel sayılar bilimin doğuşundan itibaren kendilerine her alanda uygulama sahası bulmuştur. Öte yandan kompleks sayıların mekanik ve elektriksel uygulamalarda, özellikle devre analizlerinde kullanıldığı bilinmektedir. Ne yazık ki bu sayı sistemi uygulamalara sadece iki boyut getirir. 3-boyutlu uygulamalarda ise vektörler kullanılır. Fakat vektörlerin bazı uygulamalarda yetersiz kaldığı görülmektedir. Kuaternionlar vektörleri ifade etmede kullanılabilir. Bu sayı sistemi vektörleri

kapsadığı gibi, bunlara ilaveten bir de reel bileşen ortaya koyarak uygulamalara dördüncü bir boyut katar. Kuaternionlar bölüm cebrine sahiptir. Kuaternion cebri, birleşimli fakat değişimli olmayan  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  gibi dört elemandan oluşur ve bunlardan biri reel, diğer üçü sanaldır[2].

Kuaternion cebri keşfedildiği yıllarda A. Cayley, K. Clifford ve J. J. Sylvester gibi İngiliz matematikçiler ve elektromagnetik teoriyi yeniden inşa eden J. C. Maxwell ile P. G. Tait gibi fizikçiler bu konuya önemli katkıda bulunmuşlardır. 20. yüzyılın başlarında ise vektör ve tensör cebri geliştiren fizikçiler, fizikte vektör cebri kullanımını benimsetmişlerdir[5]. 1878 yıllarında Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa İngilizce olarak yazdığı Lineer Cebir adlı kitapta kompleks sayılarla ilgili teorisinde ileri sürdüğü çarpımın 3-boyutlu uzaya uygulamanın bir yolunu bulmuş ve özgün çalışma olarak kuaternionların çarpımının bizi 3-boyutlu uzayda çalışmaya zorladığını vurgulamıştır[4]. R. Kaya ve Ş. Koçak tarafından kuaternionlardan hareketle zayıf kuaternionların tanımı yapılarak  $R^3$ 'ün vektörleri zayıf kuaternion uzayına taşınmış ve bölme işleminin bu şekilde daha anlamlı olarak gerçekleştirilebileceği ispat edilmiştir[3].

Kuaternionların fizikte çok kullanılması ancak E. Schrödinger, W. Heisenberg, P.A.M. Dirac, M. Born ve daha pek çok ünlü fizikçi tarafından 1927 ile 1932 yılları arasında, neredeyse bugün kullandığımız kuantum mekaniğinin bulunuşundan sonra gerçekleşmiştir[5]. 20. yüzyılın başlarında Yale Üniversitesi profesörlerinden Gibbs uygun kuaternion için kullanım şeklini Hamilton'un çalışmalarını ve Rodrigues'e ait çalışmalarının anahtar noktalarını buna ilave ederek keşfetti ve çalışmalarını vektör nokta çarpımı ve bugün bildiğimiz vektörel çarpımla tamamladı[2]. Hemen hemen aynı zamanlarda Albert Einstein 4. boyut için bir kullanım keşfetti. Işık hızını tüm gözlemlerde sabitlemek için uzay ve zaman birimlendirilmeliydi. Burada sonuç, 4. boyut için şekillendirilmişti. Fakat Einstein bir matematik düşkünü olmadığı için sadece lokal olarak işe yarayan parçaları buldu. Einstein; Minkowski'nin uzay zamanını ve Lorentz'in dönüşümünü keşfetmiş ve problemlerin çözümünü gerektiren yardımcıların özel relativite içinde olduğunu göstermiştir[5].

Türk fizikçilerimizden Prof. Dr. Feza Gürsey de kuaternionik ve oktonionik yapılarının önemini 1950'li yıllarda sezip, bu yapıları ve ilgili istisnai

grup ve geometrileri çalışmaları ile fiziğe yerleştirmiştir. Kendisinin kuaternionlar üzerindeki çalışmaları konform grubu, genel relativitede bazı çözümler, Yang Mills teorisinde instanton çözümleri, kuaternionik analitisi ve Öklidiyen relativitede Kahler yapısı ve bu uzayda diffeomorfizmlerin kuaternionlarla kovaryant gösterimi gibi geniş bir yelpaze oluşturur. Kuaternionların temel fizik kanunlarının incelenmesinde oynadığı rolün önemi, özel relativite ve kuantum mekaniğinin keşfi ile daha iyi anlaşıldı. Feza Gürsey 1955 yılında özel relativiteyi kuaternionlar ile ifade etmeye çalıştığı bir yayın yaptı. Simetrik yapıları fark etmesindeki olağanüstü kolaylığı ile kuaternionların temel fizik kanunlarında önemli bir rol oynayacağını sezmişti.

Kuaternionların fizikte kullanım bulduğu konulardan birisi ve belki de en önemlisi Einstein'ın özel ve genel relativite teorileridir. Bu teorilerde zaman kavramı, 3-boyutlu uzaydan bağımsız olarak mutlak bir nitelik taşımaz. 4-boyutlu uzay-zamanın her bir noktası, belli bir anda belli bir noktada yer alan bir olguya karşı gelir. Tipik uzay-zaman noktası;  $(x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$  kartezyen koordinatları ile temsil edilebilir. Burada  $t$  zaman koordinatını,  $c$  ise boşlukta ışık hızını göstermektedir. Bu tanımlar yardımıyla uzay-zamanda hareket eden bir noktasal parçacığın konumu;  $X = ix^0 + \mathbf{e} \cdot \bar{x}$  ifadesiyle verilen bir kompleks kuaternion ile gösterilebilir. Bu ifadede kuaternion birimleri  $\mathbf{e} : (i, j, k)$  üçlüsü ile, uzay koordinatları ise  $\bar{x} : (x, y, z)$  vektörü ile verilmektedir.  $i^2 = -1$  kompleks sanal birim sayıdır.  $X$  kuaternionunun normu açık olarak yazılırsa;

$$N(X) = X\bar{X} = -(x^0)^2 + \bar{x} \cdot \bar{x}$$

bulunur. Kompleks kuaternion cebirinin norm koruyan izomorfizmleri;

$$X \rightarrow X' = UXU^\dagger$$

$X$  kuaternionunun karşı geldiği uzay-zaman vektörünün Lorentz dönüşümleridir. Böylece Einstein'ın relativite teorisinin temelini oluşturan Lorentz dönüşümleri kompleks kuaternion cebirinin norm koruyan izomorfizmleri ile özdeşleşmiş olmaktadır. İlk kez 1912'de A. W. Conway ve L. Silberstein[13] tarafından özel relativite teorisi için öne sürülen bu yaklaşım o sırada tensör cebirini yerleştirmeye çalışan fizikçiler arasında rağbet kazanmıştır[5].

Kuaternionlar, uzaysal dönmelerde ve fiziksel büyüklüklerin karakterlerinin belirlenmesinde çok işe yaramaktadır. Ayrıca kuaternionlar grup teorisinde ve elemanter parçacıkların sınıflandırılmasında kullanılmaktadır. Uzaysal dönmeler, grup teori uygulamaları, kontrol sistemleri ve robotik uygulamalarında bir çok araştırmacı için ilginç bir araçtır. Tanışlı[6] tarafından hazırlanan doktora tezinde endüstriyel robot kollarının hareketi kuaternionlar tarafından tanımlanmaktadır. Bu çalışmada ayrıca kuaternionlar arasındaki her türlü işlemi yapmak için bir algoritma geliştirilmiş ve bu amaçla bilgisayarda kullanılmak üzere Pascal 7.0'da bir paket program hazırlanmıştır. Sonlu dönmeleri ifade etmek için kuaternionlar kullanılabilir. Ayrıca, kuaternionlar fiziksel büyüklükleri ifade etmek için de kullanılabilir. 1989'da Özdaş[3] tarafından skaler ve vektörel büyüklüklerin kuaternion uzayına taşınarak birer kuaternion olarak nasıl ifade edileceği gösterilmiştir. Kuaternion çarpımından farklı olarak kuaternionlar için skaler(iç) ve vektörel(dış) çarpma işlemleri tanımlanmıştır. Bu işlemler yardımıyla "iş" ve "tork" gibi büyüklüklerin nasıl ifade edileceği gösterilmiştir. J. C. K. Chou; hız ivme ve momentum gibi vektörel büyüklükleri kuaternionlarla temsil ederek bunlara ilişkin kinematik ve dinamik diferansiyel denklemleri yazmıştır. Tanışlı[7] robot kinematik denklemlerini türetmek için genel kuaternion dönüşümlerini kullandı Böylece dönme matrisine göre avantaj sağlayan Euler parametreleri ve dönme matrisleri arasında bir bağıntı geliştirdi. Kuaternionlar, kısmi türevli diferansiyel denklemlerle tanımlanabilen dinamik sistemlerin ifade edilmesinde de kullanılabilir[3].

Kuaternionlar son yıllarda her alanda artan bir hızla kullanılmaktadır. Kuaternion cebri de kuaternionların kullanım alanlarının artmasına paralel olarak gelişme göstermektedir. Kompleks sayı ve kuaternion bileşiminden oluşan kompleks kuaternionlar(bikuaternionlar), fiziksel uygulamalarda son yıllarda artan bir hızla yer almaktadır. Bunun yanı sıra kuaternionlar teorik fizik araştırmalarında kullanılmaktadır. Örneğin; Gurlebeck ve Wolfgang kompleks kuaternionları yani bikuaternionları özel relativite teorisi, parçacık mekaniği ve elektromagnetizmaya uygulayarak kompleks kuaternionların kendine oldukça geniş bir uygulama alanı bulduğunu göstermişlerdir. Bugüne kadar fizikteki

birçok denklem çeşitli bilim adamları tarafından kuaternionlarla yeniden ifade edilmiştir. Bunlardan bazıları şöyledir: J. C. K. Chou kinematik ve dinamik diferansiyel denklemleri, Adler kuantum mekaniğini, D. C. Jolly matris ve kuaternionlar arasındaki izomorfizmi, Kugo-Townsend tarafından kuaternionların süpersimetrik modellerle olana bağlantısı, K. Morita tarafından kuaternionların Dirac teorisindeki rolü, Tanışlı ve Özdaş[7] robotik manipülatörlerin pozisyonunun kuaternion dönüşümünü, Tanışlı[8] akustik enerji korunum denklemini, yine Tanışlı ve Özgür[9] açısız momentum ve Dirac denklemlerini, Negi ve arkadaşları[10] tek kutup dyonslar gibi teorik varlıkları anlatmak için bu sayı cebirini kullanmışlardır.

Kuantum mekaniğinde elektron spinini tarif ederken kuaternion cebri kullanılmaktadır. Bir spinör üzerinde işlem yapan kuantum operatörleri, örneğin momentum operatörü  $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$  gibi,  $2 \times 2$  matrislerdir. Dolayısıyla kuantum operatörleri kuaternionlarla gösterilebilir. Bu yaklaşımla spinörlerin matematik formalizmi 1930'da B. L. van der Waerden tarafından geliştirildi. Daha sonra bu kavram E. Cartan ve H. Weyl tarafından daha yüksek boyutlu vektör uzayları üzerine genelleştirildi. Bugün spinörler fizikte vektörlerden daha temel rol oynamaktadırlar[5].

Kompleks kuaternionların fizikteki uygulamaları daha çok genel ve özel relativite ile kuantum mekaniği alanında olmuştur. Kompleks kuaternionlarla Dirac relativistik denklemlerinin çeşitli formülasyonlarının ilk öncüsü A. W. Conway olarak görülmekle birlikte bir çok bilim adamının yazılarında kompleks kuaternion ve kuantum mekaniğine ilişkin açıklamalar bulunur. Kompleks kuaternionlarla kuantum mekaniği K. Morita tarafından yeniden formüle edilmiştir. Leo[11]'nin de kuaternion ve kompleks kuaternionlarla ilgili çalışmaları vardır[2].

Fiziksel olarak, 1927'de Pauli ve 1938'de Dirac elektron spininin tanımı için spinör eşitliklerini gösterdi. 1930'da Juvet ve Saunter, sütun spinörlerini sadece ilk sütunu sıfır olmayan kare matris spinörleri ile yer değiştirdi. 1947'de Marcel Riesz spinörleri, Clifford cebirlerinin minimum küçük ideal elemanları olarak düşündü. 1958'de Riesz, homojen ve izotropik ortamın özel durumundaki Maxwell eşitliklerini,  $Cl_{1,3}$  Clifford cebirinde bivektörler ile basit bir eşitlikte

özetledi. 1956-58'de Gürsey, H(2) de  $2 \times 2$  kuaternion matrisleri ile Dirac eşitliğini yeniden yazdı. 1964'te Kustaanheimo, Kepler hareketinin spinör düzenini gösterdi. Bu KS-dönüşümü, spinörlerin operatör yönünü vurgular. 1983'te Y. Takahashi ve 1985'te J. Crawford bilineer eş dönüşümlerinden spinörleri tekrar elde etti[12].

1881'de Michelson farklı yönlerde ışığın hızını ölçtü. Michelson & Morley 1887'de deneyi tekrarladılar ve ışığın, ışık ortamına göre kaynağın hareketinden bağımsız aynı hızda hareket ettiği sonucuna vardılar. 1887 de Voight,

$$x' = x - vt$$

$$t' = t - \frac{vx}{c^2}$$

değişkenlerinin değişimine göre sabit kalan dalga denklemini  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$  olarak tanımladı. Voight'ın formülleri, direkt ve ters dönüşümler için aynı değildir. Daha sonra simetri için  $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$  oranı ile yeniden faktör tanımını yaptı. 1892'de FitzGerald ve Lorentz, bağımsız olarak hareket eden cisimlerin  $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$  oranı ile hareket yönünde kısalacağını varsayarak Michelson & Morley deneyinin bir açıklamasını verdiler[17].

Uzay-zaman olaylarının Lorentz dönüşümleri, 1900'de Larmor tarafından sunuldu, ancak relativistik Maxwell eşitliklerinin kovaryantları, 1903'te H. A. Lorentz tarafından kanıtlandı. 1905'te Einstein, ışık hızının bağımsızlığı ilkesi postülası ile relativite ilkesini tamamladı. Bu iki ilke, Einstein'ın zaman notasyonunu tekrar gözden geçirmesine sebep oldu ve Lorentz' in kinetiksel dönüşüm yasaları sonucunu çıkarmasını sağladı. Daha sonra Einstein, özel relativite ilkesini tekrar formüle etti. Böylece Einstein, sadece mekaniksel değil elektromagnetik olguyu da benimser:

*"Fizik yasaları, bütün referans çerçevelerinde aynı biçime sahiptir"*

Einstein'ın bu relativite ilkesi, Maxwell eşitliklerine uygulandığında, ışık hızının bütün referans çerçevelerinde aynı olacağı sonucunun çıkarılacağı ikna edicidir. Relativite ilkesi ve Maxwell eşitliklerinin bilinmesi, Lorentz'in dönüşüm yasalarının sonucunu çıkartmak için yeterlidir. Bugünlerde relativistik ve relativite terimleri hemen hemen Einstein ilkesi ile aynıdır[17]. Dirac'ın



relativistik dalga denklemlerinde kullandığı  $4 \times 4$  Gamma matrisleri birbirlerinden bağımsız iki takım kuaterniondan oluşan Clifford sayılarıdır. Clifford ters değişim  $xy = -yx$  gibi, bağıntısını sağlayan ve kareleri sıfır olan Grassmann sayılarının cebirlerinin yeterli sayıda kuaternion kullanarak nasıl inşa edileceğini 1876'da göstermişti. Bu sayılar süpergravitede kullanılmaktadır[1].

Matematikçiler açısından, Dirac matrisleri aslında Clifford cebirinin generatörlerinin temsilinden başka bir şey değildirler.  $2^4 = 16$  boyutlu Dirac-Clifford cebri  $4 \times 4$  total matris cebrine özdeştir. Kuaternion ve Dirac cebri Clifford cebirlerinin özel bir hali olarak görülmektedir. Nasıl iki elemanlı bir spinör kuaternion cebirinin elamanı olarak düşünülüyorsa dört elemanlı bir Dirac spinörü de aynen öyle Clifford cebirinin bir elamanı olarak düşünülebilir. Soyut Clifford cebirleri günümüzde elektron, nötrino v.b. iki değerli spin taşıyan ve bu nedenle Pauli dışarlama ilkesine uyan fermiyon adını verdiğimiz parçacıkların incelenmesinde, kuantizasyonunda ve süpersimetri kavramlarının geliştirilmesi alanlarında önemli rol oynamaktadır[5].

Bu çalışmada; kuaternion, bikuaternion(kompleks kuaternion) ve Clifford cebirleri tanımlandıktan sonra bu kavramların Modern Fiziğe uygulaması incelenecektir. Özel relativite teorisinin kuaternion ve bikuaternionlarla, Lorentz dönüşümlerinin de Clifford cebri ile ifadeleri verilecektir.

## 2. KUATERNİONLAR

Kuaternionlar, reel ve kompleks sayılar gibi bir sayı sistemidir. Reel sayılar bir, kompleks sayılar iki bileşen içerirken kuaternionlar dört tane bileşene sahiptir. Kuaternionlar iki kompleks sayının kombinasyonundan oluşur.

Kuaternionlar bölüm cebrine sahiptir. Kuaternion cebri, birleşme özelliği olan fakat değişme özelliği olmayan  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  gibi dört elemandan oluşur. Bunlardan biri reel diğer üçü sanaldır ve,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^2 &= -1 \quad (i = 1, 2, 3) \\ \mathbf{e}_0^2 &= 1 \quad (\mathbf{e}_0 : \text{birim eleman}) \\ \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j &= -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \quad (i, j = 1, 2, 3 \text{ ve } i \neq j) \end{aligned} \quad (2.1)$$

şartlarını sağlarlar. Böylece bir  $q$  kuaternionu;

$$\mathbf{q} = q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir[2].

### 2.1. Kuaternionun Tanımı

Bir  $q$  kuaternionu;

$$\mathbf{q} = \sum_{k=0}^3 q_k \mathbf{e}_k = q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.3)$$

veya

$$\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3] \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edilebilir[3]. Burada  $q_0, q_1, q_2, q_3$  reel sayılardır ve  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  ise;

$$\mathbf{e}_0 = 1 ; \quad \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = -1 \quad (2.5)$$

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 ; \quad \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 ; \quad \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \quad (2.6)$$

kuralına uyan birbirine dik sanal birimlerdir. Matematiksel olarak bir kuaternion,  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  baz elemanları ile 4-boyutlu reel vektör uzayını oluşturur.  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  sanal birimleri, 3-boyutlu vektör uzayının birbirine dik baz vektörleri olarak alınabilirler[14]. Bir  $q$  kuaternionunu matris formunda;

$$\mathbf{q} = (q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3)^T \quad (2.7)$$

şeklinde yazılabilir. Yani  $H$  kuaternionu,  $IR$  reel sayılar kümesinde, tabanı  $\{e_k; k = 0,1,2,3\}$  olan 4-boyutlu bir vektör uzayıdır. Bu uzayın vektörleri, yani kuaternionlar;

$$\forall q \in H, \quad q = \sum_{k=0}^3 q_k e_k \quad (2.8)$$

şeklinindedir. Kuaternionların kümesi üzerinde cebir yapısı;

$$\forall p, q \in H \xrightarrow{\sigma} r = \sigma(p \cdot q) \in H \quad (2.9)$$

şeklinde bir  $\sigma$  bilinear dönüşümü ile tanımlanır.  $H$  kuaternionlar cebirinin  $\{e_k; k = 0,1,2,3\}$  tabanına göre  $c_{kl}^m \in IR$  yapı sabitleri;

$$\sigma(e_k, e_l) = e_k e_l = c_{kl}^m e_m \quad (2.10)$$

$k, l, m \in \{0,1,2,3\}$ 'dir. Bu yapı sabitleri,

$$\begin{aligned} e_0 e_k &= e_k e_0 = e_k; & k &= 0,1,2,3 \\ e_i e_j &= -\delta_{ij} e_0 + \sum \varepsilon_{ijk} e_k & i, j, k &\in \{1,2,3\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

çarpımlarıyla tayin edilir.  $H$  cebirinin birim elemanı  $e_0 = 1$ 'dir. Buna göre;

$$e_0 \in H, \quad \forall q \in H \quad \text{için} \quad e_0 q = q e_0 = q \quad (2.12)$$

olarak tanımlanır.  $H$  cebri komütatif değildir[3]. Genel olarak,

$$p, q \in H \quad \text{iken} \quad pq \neq qp \quad (2.13)$$

olmaktadır. Fakat  $H$  cebri asosiyatifdir:

$$p, q, r \in H \quad \text{için} \quad (pq)r = p(qr) \quad (2.14)$$

O halde kuaternionlar komütatif olmayan fakat asosiyatif bir bölüm cebri oluşturmaktadır[13,15].

## 2.2. Sıfır, Skaler ve Vektör Kuaternion Kavramları

Bazı özelliklere sahip kuaternionlara özel adlar verilir. Sıfır kuaternion;

$$q = [0, 0, 0, 0] \quad (2.15)$$

şeklinde dört elemanı da sıfır olan kuaterniondur[14]. Skaler kuaternion ise kuaternionların  $q_0 e_0$  formundaki  $IR$  alt kümesidir. Yani;

$$q = [q_0, 0, 0, 0] \quad (2.16)$$

şeklinde vektör kısmı sıfır olan kuaterniondur.  $q_0 = 0$  ve  $q_1, q_2, q_3$ 'ten en az biri sıfırdan farklı olan kuaternionlara ise vektör kuaternionlar denilmektedir. Aynı zamanda saf kuaternion olarak da bilinir[15]. Genel olarak vektör kuaternionlar;

$$\mathbf{q} = [0, q_1, q_2, q_3] \quad (2.17)$$

olarak ifade edilirler.

$\mathbb{R}^3$ 'teki vektörleri, kuaternionlarla temsil etmek mümkündür. Bunun için  $\{\mathbf{e}_i : i = 1, 2, 3\}$  tabanının elemanlarına birer yön tahsis etmek gerekir. Bunlar sırasıyla kartezyen koordinat sisteminin  $x, y$  ve  $z$ -eksenlerinin pozitif yönlerini temsil etsinler. O zaman kartezyen bileşenleri  $r_1 = x, r_2 = y, r_3 = z$  olan  $\mathbb{R}^3$ 'teki bir  $\vec{r}$  vektörünü;

$$\mathbf{r} = [0, x, y, z] \quad (2.18)$$

şeklinde bir vektör kuaternionla temsil etmek mümkün olur.

Bilindiği gibi  $\mathbb{R}^3$ 'te bölme işlemi yoktur. Yani  $\mathbb{R}^3$ 'teki bir vektörü diğer bir vektöre bölmek mümkün değildir. Oysa  $\mathbb{R}^3$ 'ün vektörleri birer vektör kuaternionla temsil edilirse, vektör kuaternionlar için bölme işlemi tanımlı olduğundan bu eksiklik ortadan kaldırılacaktır[3,13].

## 2.3. Kuaternionlar ile İlgili Temel İşlemler

### 2.3.1. Kuaternionlarda eşitlik ve skalerle çarpma

Eğer  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  gibi iki kuaternionun elemanları,

$$p_0 = q_0, p_1 = q_1, p_2 = q_2, p_3 = q_3$$

şeklinde ise  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  kuaternionu birbirine eşittir denir.  $\mathbf{p} \in H$  ve  $\lambda \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{p} &= \lambda (p_0 + p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + p_3 \mathbf{e}_3) \\ \lambda \mathbf{p} &= \lambda p_0 + \lambda p_1 \mathbf{e}_1 + \lambda p_2 \mathbf{e}_2 + \lambda p_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.19)$$

şeklinde olup, burada  $\lambda$  =sabit ve  $\lambda \mathbf{p} \in H$  'dur.

### 2.3.2. Kuaternionlarda toplama ve çıkarma işlemi

$p$  ve  $q$  iki kuaternion olmak üzere; bu iki kuaternionun toplamı ve farkı, karşılıklı elemanlarının toplamı ve farkından oluşan bir diğer kuaterniondur. Yani;

$$\begin{aligned} p \pm q &= [p_0, p_1, p_2, p_3] \pm [q_0, q_1, q_2, q_3] \\ &= [p_0 \pm q_0, p_1 \pm q_1, p_2 \pm q_2, p_3 \pm q_3] \end{aligned} \quad (2.20)$$

olarak ifade edilir. Bu ifade matris formunda;

$$p \pm q = (p_0 \pm q_0 \quad p_1 \pm q_1 \quad p_2 \pm q_2 \quad p_3 \pm q_3)^T \quad (2.21)$$

şeklinde yazılabilir. Görüldüğü gibi iki kuaternionun toplamı veya farkı işlemi sonunda yine bir kuaternion elde edilir. Kuaternionlarda, toplama ve çıkarma işleminde asosiyatiflik ve komütatiflik vardır. Yani, kapalılık özelliği vardır.

### 2.3.3. Kuaternionlarda çarpma işlemi

$p$  ve  $q \in H$  olmak üzere, kuaternionun tanımından yola çıkarak  $p$  ve  $q$  kuaternionlarını;  $p = p_0 + \bar{p}$ ,  $q = q_0 + \bar{q}$  şeklinde skaler ve vektör bileşenler cinsinden de yazabiliriz. Bu tanımdan yola çıkarak  $p$  ve  $q$  gibi iki kuaternionun, kuaternion çarpımı şu şekilde olur:

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 + \bar{p})(q_0 + \bar{q}) \\ pq &= p_0q_0 + p_0\bar{q} + q_0\bar{p} - \bar{p} \cdot \bar{q} + \bar{p} \times \bar{q} \end{aligned} \quad (2.22)$$

dır. Burada ‘.’ ve ‘ $\times$ ’, sırasıyla vektör cebirindeki skaler ve vektörel çarpımları göstermektedir. Öyle ise kuaternion çarpımı, nokta çarpım ve vektör çarpımlarını içermektedir. Ya da aynı ifade:

$$\begin{aligned} pq &= [p_0, p_1, p_2, p_3][q_0, q_1, q_2, q_3] \\ pq &= [(p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3), (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2), \\ &\quad (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3), (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)] \end{aligned} \quad (2.23)$$

şeklindedir[3,13]. Genelde  $\bar{p} \times \bar{q} \neq \bar{q} \times \bar{p}$  olduğundan  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$ ’ya paralel veya  $p$  ve  $q$  kuaternionundan biri sıfır kısmına sahip olmadıkça, kuaternion cebirinde çarpma işlemi komütatif değildir. Yani;  $pq \neq qp$  olup,  $pq \in H$ ’dur.

Her ne kadar kuaternion çarpımı komütatif değilse de, birleşme özelliğine sahiptir.  $p, q, r$  üç kuaternion olsun.  $q(pr)$  çarpımı;

$$\begin{aligned}
q(\mathbf{pr}) &= (q_0 + \bar{q})[(p_0 + \bar{p})(r_0 + \bar{r})] \\
&= q_0 p_0 r_0 - \{q_0 \bar{p} \cdot \bar{r} + p_0 \bar{r} \cdot \bar{q} + r_0 \bar{q} \cdot \bar{p}\} + \{q_0 r_0 \bar{p} + r_0 p_0 \bar{q} + p_0 q_0 \bar{r}\} \\
&\quad + \{q_0 \bar{p} \times \bar{r} - p_0 \bar{r} \times \bar{q} + r_0 \bar{q} \times \bar{p}\} - (\bar{p} \cdot \bar{r}) \bar{q} + \bar{q} \times (\bar{p} \times \bar{r}) - \bar{q} \cdot (\bar{p} \times \bar{r})
\end{aligned} \quad (2.24)$$

ve  $(\mathbf{qp})\mathbf{r}$  çarpımı;

$$\begin{aligned}
(\mathbf{qp})\mathbf{r} &= q_0 p_0 r_0 - \{r_0 \bar{q} \cdot \bar{p} + q_0 \bar{p} \cdot \bar{r} + p_0 \bar{r} \cdot \bar{q}\} + \{q_0 p_0 \bar{r} + r_0 q_0 \bar{q} + p_0 r_0 \bar{p}\} \\
&\quad + \{q_0 \bar{p} \times \bar{r} + p_0 \bar{r} \times \bar{q} + r_0 \bar{q} \times \bar{p}\} - (\bar{q} \cdot \bar{p}) \bar{r} + (\bar{q} \times \bar{p}) \times \bar{r} - (\bar{r} \times \bar{p}) \cdot \bar{q}
\end{aligned} \quad (2.25)$$

olur. Burada  $q(\mathbf{pr}) = (\mathbf{qp})\mathbf{r}$  geçerli ise,

$$-(\bar{p} \cdot \bar{r}) \bar{q} + \bar{q} \times (\bar{p} \times \bar{r}) = -(\bar{q} \cdot \bar{p}) \bar{r} + (\bar{q} \times \bar{p}) \times \bar{r}$$

olduğunu göstermeliyiz. Standart vektör özdeşliklerini uygularsak bunun doğru olduğunu görebiliriz:

$$\begin{aligned}
a \times (b \times c) &= (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \\
(a \times b) \times c &= (a \cdot c)b - (b \cdot c)a
\end{aligned} \quad (2.26)$$

olduğundan,

$$q(\mathbf{pr}) = (\mathbf{qp})\mathbf{r} \quad (2.27)$$

olur. Kuaternion çarpımının toplamaya göre dağılma özelliğine sahip olduğunu aşağıdaki gibi doğrulayabiliriz:

$$\begin{aligned}
q(\mathbf{p+r}) &= (q_0 + \bar{q})[p_0 + r_0 + \bar{p} + \bar{r}] \\
&= q_0 p_0 + q_0 r_0 - \bar{q} \cdot (\bar{p} + \bar{r}) \\
&\quad + r_0 \bar{q} + p_0 \bar{q} + p_0 (\bar{p} + \bar{r}) + \bar{q} \times (\bar{p} \times \bar{r}) \\
&= \{q_0 p_0 - \bar{q} \cdot \bar{p} + p_0 \bar{q} + q_0 \bar{p} + \bar{q} \times \bar{p}\} \\
&\quad + \{q_0 r_0 - \bar{q} \cdot \bar{r} + q_0 \bar{r} + r_0 \bar{q} + \bar{q} \times \bar{r}\} \\
&= \mathbf{qp} + \mathbf{qr}
\end{aligned} \quad (2.28)$$

dır[14].

#### 2.3.4. Bir kuaternionun eşleniği

$\mathbf{p} \in H$  olmak üzere,  $\mathbf{p} = p_0 + p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + p_3 \mathbf{e}_3$  gibi bir kuaternionun eşleniği, bu kuaternionun başka bir imajiner bir başka deyişle vektörel kısmının işaretlerinin değişmesiyle elde edilen  $\mathbf{p}^*$  kuaternionudur. Ayrıca buna kompleks eşlenikte denir.  $\mathbf{p}$  kuaternionunun eşleniği;

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^* &= p_0 - p_1 \mathbf{e}_1 - p_2 \mathbf{e}_2 - p_3 \mathbf{e}_3 \\
&= [p_0, -p_1, -p_2, -p_3]
\end{aligned} \quad (2.29)$$

şeklinde tanımlanır[3,13,15]. Ayrıca eşlenik işleminde,

$$(p^*)^* = p \quad (2.30)$$

$$(qp)^* = p^* q^* \quad (2.31)$$

özellikleri vardır[1,15].

### 2.3.5. Birim kuaternion ve norm

$p, q \in H$  olmak üzere,  $p = [p_0, p_1, p_2, p_3]$  ve  $q = [1, 0, 0, 0]$  olsunlar.

Burada;

$$\begin{aligned} pq &= [p_0, p_1, p_2, p_3][1, 0, 0, 0] \\ &= [p_0, p_1, p_2, p_3] \end{aligned} \quad (2.32a)$$

veya

$$\begin{aligned} qp &= [1, 0, 0, 0][p_0, p_1, p_2, p_3] \\ &= [p_0, p_1, p_2, p_3] \end{aligned} \quad (2.32b)$$

şeklinde. Buradan görüleceği gibi  $q$ ,  $p$ 'nin değerini kuaternion çarpımı sonunda değiştirmemiştir. Bu yüzden  $q$ 'ya birim kuaternion diyebiliriz[7].

Ayrıca bir  $p$  kuaternionunun  $N$  ile göstereceğimiz normu,

$$N(p) = p p^* = p^* p \quad (2.33)$$

ve mutlak değeri,

$$|p| = \sqrt{pp^*} \quad (2.34)$$

olarak tanımlanır. Bir  $p$  kuaternionunun normunun;

$$\begin{aligned} N(p) &= p p^* \\ N(p) &= [(p_0)^2 + (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2, 0, 0, 0] \\ N(p) &= \sum_{k=0}^3 (p_k)^2 [1, 0, 0, 0] \\ N(p) &= \sum_{k=0}^3 (p_k)^2 e_0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

şeklinde pozitif bir skaler kuaternionun olduğu kolayca görülebilir[3,14]:

### 2.3.6. Kuaternionlarda ters eleman ve bölme işlemi

$p$  sıfır kuaternion olmamak koşuluyla;

$$pp^{-1} = p^{-1}p = [1, 0, 0, 0] \quad (2.36)$$

koşulunu sağlayan  $p^{-1}$  kuaternionuna,  $p$  kuaternionunun tersi denir.

Bir  $p$  kuaternionunun normu,

$$N(p) = pp^* = \sum_{k=0}^3 (p_k)^2 [1, 0, 0, 0]$$

şeklindeydi. Bu eşitliğin her iki yanını  $1 / \sum_{k=0}^3 (p_k)^2$  skaleriyle çarparsak

$$\frac{pp^*}{\sum_{k=0}^3 (p_k)^2} = [1, 0, 0, 0]$$

denklemini elde ederiz. Ters eleman tanımı uyarınca  $p$  kuaternionunun tersi,

$$p^{-1} = \frac{p^*}{\sum_{k=0}^3 (p_k)^2} \quad (2.37)$$

olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bir  $p$  kuaternionunu bir  $q$  kuaternionuna bölmek demek  $p$ 'yi  $q^{-1}$  ile çarpmak demektir. Ancak kuaternion çarpımı, değişme özelliğine sahip olmadığı için bölme işlemi iki şekilde gerçekleştirilmektedir[3].  $N(q) \neq 0$  olmak üzere;

$$pq^{-1} = p \frac{q^*}{\sum_{k=0}^3 (q_k)^2} \quad : \quad \text{Sağdan Bölme} \quad (2.38a)$$

$$q^{-1}p = \frac{q^*}{\sum_{k=0}^3 (q_k)^2} p \quad : \quad \text{Soldan Bölme} \quad (2.38b)$$

dir. Genelde  $pq^{-1} \neq q^{-1}p$  şeklindedir.  $q$ 'nun bir skaler kuaternion olması halinde sağdan bölme, soldan bölmeye eşittir. Eğer  $p$  bir birim kuaternion ise,

$$p^{-1} = p^* \quad (2.39)$$

olarak yazılabilir[13,14].



### 2.3.7. İki kuaternionun skaler çarpımı

$p$  ve  $q$  gibi iki kuaternionun nokta (skaler) çarpımı,

$$p \cdot q = [(p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3), 0, 0, 0] \quad (2.40a)$$

şeklindedir. Ya da,  $p = [0, p_1, p_2, p_3]$  ve  $q = [0, q_1, q_2, q_3]$  iki vektör kuaternion olsun.  $p$  ve  $q$ 'nin  $p \cdot q$  şeklindeki skaler çarpımını;

$$p \cdot q = -\frac{1}{2}(pq + (pq)^*) \quad (2.40b)$$

olarak da tanımlayabiliriz. Bu ifade diferansiyel vektör operatörlerinden gradyent ve diverjans ifadelerinin tanımlanabilmesine olanak sağlar. Yani,

$$p \cdot q = [(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3), 0, 0, 0] \quad (2.40c)$$

şeklinde bir skaler kuaterniondur. Kolayca ispatlanabileceği gibi iki vektör kuaternionun skaler çarpımı komütatiftir.

### 2.3.8. İki vektör kuaternionun vektörel çarpımı

$p = [0, p_1, p_2, p_3]$  ve  $q = [0, q_1, q_2, q_3]$  iki vektör kuaternion olsun.  $p$  ve  $q$ 'nin  $p \times q$  şeklinde göstereceğimiz vektörel çarpımı;

$$p \times q = \frac{1}{2}(pq - (pq)^*) \quad (2.41a)$$

olarak ifade edebiliriz[3]. Buna göre  $p \times q$  vektörel çarpımı;

$$p \times q = [0, (p_2q_3 - p_3q_2), (p_3q_1 - p_1q_3), (p_1q_2 - p_2q_1)] \quad (2.41b)$$

şeklinde yine bir vektör kuaterniondur. Kolayca ispatlanabileceği gibi iki vektör kuaternionun vektörel çarpımı;

$$p \times q = -(q \times p) \quad (2.42)$$

olup komütatif değildir[13].

### 2.3.9. Kuaternionlar için paralellik ve diklik koşulu

$p$  ve  $q$  iki vektör kuaternion olsun:  $p = [0, p_1, p_2, p_3]$  ve  $q = [0, q_1, q_2, q_3]$

Eğer;

$$p \times q = \frac{1}{2}(pq - qp)$$

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} = [0, (p_2q_3 - p_3q_2), (p_3q_1 - p_1q_3), (p_1q_2 - p_2q_1)] = 0 \quad (2.43)$$

ise  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  için paraleldir denir. Burada vektör kuaternionlar için,  $(\mathbf{pq})^* = \mathbf{qp}$  olduğu kolayca ispatlanabilir.

Aynı şekilde  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  gibi iki vektör kuaternion için diklik koşulu ise,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} &= -\frac{1}{2}(\mathbf{pq} + \mathbf{qp}) \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} &= [(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3), 0, 0, 0] = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  vektör kuaternionları birbirine diktir. Vektör kuaternionlar için, skaler çarpma tanımından yola çıkarak,  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  gibi iki vektör kuaternion arasındaki açı ise şu şekilde tanımlanabilir:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \sqrt{\mathbf{pp}^*} \sqrt{\mathbf{qq}^*} \cos \theta \quad (2.45)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^3 (p_k)^2 (q_k)^2}} [(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3), 0, 0, 0] \quad (2.46)$$

dır[3].

## 2.4. Diferansiyel Vektör Operatörleri

### 2.4.1. Gradyent

Bir Nabla operatörü;

$$\nabla = \left[ 0, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \quad (2.47)$$

şeklinde bir vektör kuaternion olarak tanımlansın.  $\mathbf{p}(x, y, z) = [p_0, 0, 0, 0]$  şeklinde; uzayın belirli bir bölgesinde her bir  $(x, y, z)$  noktasında türevlenebilir skaler bir kuaternion olsun:  $\mathbf{p}$  'nin gradyent'i;

$$\begin{aligned} \text{grad } \mathbf{p} &= \nabla \mathbf{p}(x, y, z) = \left[ 0, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] (p_0, 0, 0, 0) \\ &= \left[ 0, \frac{\partial p_0}{\partial x}, \frac{\partial p_0}{\partial y}, \frac{\partial p_0}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

şeklinde tanımlanan bir vektör kuaterniondur.

### 2.4.2 Diverjans

$\mathbf{p}(x, y, z) = [0, p_1, p_2, p_3]$  şeklinde uzayın belirli bir bölgesindeki her bir  $(x, y, z)$  noktasında türevlenebilir vektör kuaternion olsun.  $\mathbf{p}$  'nin diverjansı;

$$\operatorname{div} \mathbf{p} = \nabla \cdot \mathbf{p} = -\frac{1}{2} [\nabla \mathbf{p} + (\nabla \mathbf{p})^*] = \left[ \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} + \frac{\partial p_3}{\partial z}, 0, 0, 0 \right] \quad (2.49)$$

olarak tanımlı bir kuaterniondur. Burada  $\nabla = \left[ 0, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$  şeklinde bir vektör kuaternion operatörüdür.

### 2.4.3. Rotasyonel (curl)

Vektör hesabındaki rotasyonel(curl) operatörünü Hamilton'un gösterdiği şekilde kuaternionlarla ifade etmek mümkündür. Yine  $\nabla = \nabla \mathbf{e}$  vektör kuaternion olmak üzere ; bir  $\mathbf{F}$  vektör kuaternionuna etki ettirilirse;

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{F} &= -\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{e} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \\ \nabla \mathbf{F} &= -\operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{e} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.50)$$

olarak bulunur.  $N(\nabla) = \nabla \nabla$  Laplace operatörü olur.

## 2.5. Kuaternionların Matris Temsili

Kuaternion cebri birleşme özelliğine sahip olduğundan, kuaternionları matris formunda ifade etmek mümkündür[14].

### 2.5.1. Kuaternionların $2 \times 2$ matris temsili

Bir kuaternion  $2 \times 2$  matris formunda yazılabilir. Pauli-Spin matrisleri ve birim matrisin alışılmış gösterimleri aşağıdaki gibidir:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Buradan bir  $\mathbf{p}$  kuaternionunu;

$$\mathbf{p} = p_0 - ip_k \sigma_k = p_0 - ip_1 \sigma_1 - ip_2 \sigma_2 - ip_3 \sigma_3 \quad (2.52)$$

olarak matris formunda ifade edebiliriz. Bu ifade;

$$\mathbf{p} = p_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - ip_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - ip_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - ip_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_0 - ip_3 & -ip_1 - p_2 \\ -ip_1 + p_2 & p_0 + ip_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

şeklini alır. Burada  $\alpha = p_0 - ip_3$  ve  $\beta = -ip_1 - p_2$ 'dir. Böylece  $\mathbf{p}$  kuaternionu  $\alpha$  ve  $\beta$  gibi iki kompleks sayı ile  $2 \times 2$  matris şeklinde ifade edilmiş olur. Bu  $2 \times 2$ 'lik matristen,  $\mathbf{p}$  kuaternionunun determinantının;

$$\det(\mathbf{p}) = (p_0)^2 + (\bar{p})^2 = \mathbf{p}\mathbf{p}^* = \alpha\alpha^* + \beta\beta^* \quad (2.54)$$

olduğu açıkça görülebilir[13].

### 2.5.2. Kuaternionların $4 \times 4$ matris temsili

Kuaternionları  $4 \times 4$  matris formunda da temsil etmek mümkündür.  $i = \sqrt{-1}$  olmak üzere Pauli-Spin matrisleri ve birim matrisin  $4 \times 4$  matris formunda gösterimleri;

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.55a)$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.55b)$$

olur. Böylece  $\mathbf{p} = [p_0, p_1, p_2, p_3] = p_0\Gamma_0 - ip_k\Gamma_k$  gibi bir kuaternionu;

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix} \quad (2.56a)$$

veya,

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{pmatrix} \quad (2.56b)$$

şeklinde  $4 \times 4$  ortogonal matrisler cinsinden yazabiliriz. Burada  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  anti-simetrik matrisleri, birim kuaternionlarla aynı özelliklere sahiptir[10]. Eğer  $p$  kuaternionu vektör kuaternion ise,  $p$  ve  $\bar{p}$  matrisleri anti-simetriktir. Yani  $p^T = -p$  olduğu için  $\bar{p}^T = -\bar{p}$ 'dir.  $p$  ile başka bir  $q$  kuaternionunun çarpımı ise matris vektör formunda,

$$pq = qp$$

veya,

$$qp = \bar{p}q$$

olarak yazabiliriz. Yani  $p$  ve  $q$  gibi iki kuaternionun kuaternion çarpımı;

$$pq = \begin{pmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

şeklinde de ifade edilebilmektedir.

### 3. BİKUARTERNİONLAR

Bikuaternionlar bir hiperkompleks sayı çeşididir.  $Q$  gibi bir bikuaternion,

$$Q = Q_0e_0 + Q_1e_1 + Q_2e_2 + Q_3e_3 \quad (3.1)$$

şeklinde yazılır. Burada  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  incelersek;  $e_0 = 1$  skaler birim olarak tanımlanır ve  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ise komüte olmayan üçlüdür ve  $e_i^2 = -1$ 'dir. Burada çarpım;  $e_i e_j = -\delta_{ij}e_0 + \sum \varepsilon_{ijk}e_k$  kuralına uymaktadır. Bikuaternionlar aynı zamanda kompleks kuaternion olarak da adlandırılırlar[2,16].

#### 3.1. Bikuaternionun Tanımı

Bikuaternion, kuaternionun kompleks bileşenlisidir. Yani kompleks bir kuaterniondur.  $Q$  bir bikuaternion olmak üzere,

$$Q = Q_0e_0 + Q_1e_1 + Q_2e_2 + Q_3e_3$$

şeklinde yazılabilir.

$Q_m$  ( $m = 0, 1, 2, 3$ ) kompleks sayılar. Yani,

$$Q_m = a_m + ib_m \quad (m = 0, 1, 2, 3 \text{ ve } i^2 = -1) \quad (3.2)$$

dir[14].

Bu durumda;

$$\begin{aligned} Q &= (a_0 + ib_0)e_0 + (a_1 + ib_1)e_1 + (a_2 + ib_2)e_2 + (a_3 + ib_3)e_3 \\ &= (a_0 + ib_0, a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, a_3 + ib_3) \\ &= (a_0 + ib_0, \bar{a} + i\bar{b}) \\ &= (Q_0, \bar{Q}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

olur. Burada

$Q_0$  : Bikuaternionun Skaler Bileşeni

$\bar{Q} = Q_1e_1 + Q_2e_2 + Q_3e_3$  : Bikuaternionun Vektörel Bileşeni

dir.  $a_i$  ve  $b_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) ise reel sayılardır.  $e_0, e_1, e_2, e_3$  bikuaternionun baz elemanlarıdır[16].  $i$  ise,

$$i^2 = -1$$

olan kompleks bir sayıdır[2,10].

### 3.2.4. Bikuaternionlarda çarpma işlemi

$P$  ve  $Q$  gibi iki bikuaternionun çarpımının sonucu yine bir bikuaternion olmaktadır ve aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 PQ &= [(a_0 + ib_0)\mathbf{e}_0 + (a_1 + ib_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + ib_2)\mathbf{e}_2 + (a_3 + ib_3)\mathbf{e}_3][(c_0 + id_0)\mathbf{e}_0 + (c_1 + id_1)\mathbf{e}_1 \\
 &\quad + (c_2 + id_2)\mathbf{e}_2 + (c_3 + id_3)\mathbf{e}_3] \\
 &= (a_0c_0 - a_1c_1 - a_2c_2 - a_3c_3 - b_0d_0 + b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3)\mathbf{e}_0 \\
 &\quad + i(a_0d_0 - a_1d_1 - a_2d_2 - a_3d_3 + b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3)\mathbf{e}_0 \\
 &\quad + (a_0c_1 + a_1c_0 + a_2c_3 - a_3c_2 - b_0d_1 - b_1d_0 - b_2d_3 + b_3d_2)\mathbf{e}_1 \\
 &\quad + i(a_0d_1 + a_1d_0 + a_2d_3 - a_3d_2 + b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2)\mathbf{e}_1 \\
 &\quad + (a_0c_2 - a_1c_3 + a_2c_0 + a_3c_1 - b_0d_2 + b_1d_3 - b_2d_0 - b_3d_1)\mathbf{e}_2 \\
 &\quad + i(a_0d_2 - a_1d_3 + a_2d_0 + a_3d_1 + b_0c_2 - b_1c_3 + b_2c_0 + b_3c_1)\mathbf{e}_2 \\
 &\quad + (a_0c_3 + a_1c_2 - a_2c_1 + a_3c_0 - b_0d_3 - b_1d_2 + b_2d_1 - b_3d_0)\mathbf{e}_3 \\
 &\quad + i(a_0d_3 + a_1d_2 - a_2d_1 + a_3d_0 + b_0c_3 + b_1c_2 - b_2c_1 + b_3c_0)\mathbf{e}_3 \\
 &= P_0Q_0 - \bar{P}_0\bar{Q}_0 + P_0\bar{Q}_0 + \bar{P}_0Q_0 + i\bar{P} \times \bar{Q}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Görüldüğü gibi iki bikuaternionun çarpımı yine bir bikuaterniondur ve karşı gelen bileşenler cinsinden,  $PQ = A$  'dır ve

$$\begin{aligned}
 A &= A_0\mathbf{e}_0 + A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3 \quad A_i \in \mathbb{C} \quad (i = 0, 1, 2, 3) \\
 A_0\mathbf{e}_0 &= (a_0c_0 - a_1c_1 - a_2c_2 - a_3c_3 - b_0d_0 + b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3)\mathbf{e}_0 \\
 &\quad + i(a_0d_0 - a_1d_1 - a_2d_2 - a_3d_3 + b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3)\mathbf{e}_0 \\
 A_1\mathbf{e}_1 &= (a_0c_1 + a_1c_0 + a_2c_3 - a_3c_2 - b_0d_1 - b_1d_0 - b_2d_3 + b_3d_2)\mathbf{e}_1 \\
 &\quad + i(a_0d_1 + a_1d_0 + a_2d_3 - a_3d_2 + b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2)\mathbf{e}_1 \\
 A_2\mathbf{e}_2 &= (a_0c_2 - a_1c_3 + a_2c_0 + a_3c_1 - b_0d_2 + b_1d_3 - b_2d_0 - b_3d_1)\mathbf{e}_2 \\
 &\quad + i(a_0d_2 - a_1d_3 + a_2d_0 + a_3d_1 + b_0c_2 - b_1c_3 + b_2c_0 + b_3c_1)\mathbf{e}_2 \\
 A_3\mathbf{e}_3 &= (a_0c_3 + a_1c_2 - a_2c_1 + a_3c_0 - b_0d_3 - b_1d_2 + b_2d_1 - b_3d_0)\mathbf{e}_3 \\
 &\quad + i(a_0d_3 + a_1d_2 - a_2d_1 + a_3d_0 + b_0c_3 + b_1c_2 - b_2c_1 + b_3c_0)\mathbf{e}_3
 \end{aligned}$$

şeklinde[2].

#### ÖRNEK:

$P = ie_2 + e_3$  ve  $Q = 1 + e_1$  birer bikuaternion olmak üzere,  $PQ$  ve  $QP$  çarpımlarını bulalım ve bu çarpım sonucunda elde edilen sonuçların birer bikuaternion olup olmadığını inceleyelim.

**ÇÖZÜM:**

$$PQ = (ie_2 + e_3)(1 + e_1) = ie_2 - ie_3 + e_3 + e_2 = (1-i)e_3 + (1+i)e_2$$

olur.  $QP$  çarpımını ise,

$$QP = (1 + e_1)(ie_2 + e_3) = ie_2 + e_3 + ie_3 - e_2 = (1+i)e_3 + (-1+i)e_2$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi her iki çarpımında sonucu birer bikuaternion olmaktadır.

### 3.2.5. Bir bikuaternionun eşleniği

Bir bikuaternion için kuaternionik eşlenik ve kompleks eşlenik olmak üzere iki tür eşlenik tanımlanır. Kuaternion eşlenik; bikuaternionun vektörel kısmının işaretinin değiştirilmesiyle elde edilir.  $\bar{Q}$  ile gösterilir ve

$$\bar{Q} = Q_0e_0 - Q_1e_1 - Q_2e_2 - Q_3e_3 = [Q_0, -\bar{Q}] \quad (3.7)$$

şeklinde ifade edilir[16]. Daha net bir şekilde yazacak olursak;

$$Q = (a_0 + ib_0)e_0 + (a_1 + ib_1)e_1 + (a_2 + ib_2)e_2 + (a_3 + ib_3)e_3$$

ise

$$\bar{Q} = (a_0 + ib_0)e_0 - (a_1 + ib_1)e_1 - (a_2 + ib_2)e_2 - (a_3 + ib_3)e_3$$

olur.

Kompleks eşlenik; bir bikuaternionun kompleks katsayılarının eşlenikleri alınarak elde edilir ve

$$Q^* = Q_0^*e_0 + Q_1^*e_1 + Q_2^*e_2 + Q_3^*e_3 \quad (3.8)$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$Q_0^* = a_0 - ib_0$$

$$Q_1^* = a_1 - ib_1$$

$$Q_2^* = a_2 - ib_2$$

$$Q_3^* = a_3 - ib_3$$

dir. Bikuaternionun kompleks eşlenik ifadesini daha açık bir şekilde yazacak olursak;

$$\begin{aligned} Q^* &= (a_0 + ib_0)^*e_0 + (a_1 + ib_1)^*e_1 + (a_2 + ib_2)^*e_2 + (a_3 + ib_3)^*e_3 \\ &= (a_0 - ib_0)e_0 + (a_1 - ib_1)e_1 + (a_2 - ib_2)e_2 + (a_3 - ib_3)e_3 \end{aligned}$$



elde edilir.

$P$  ve  $Q$  iki bikuaternion olmak üzere,  $P$  ve  $Q$  çarpımlarının kuaternion eşleniği;

$$\overline{(PQ)} = \overline{QP} \quad (3.9)$$

olur ve  $P$  ve  $Q$  iki bikuaternionun kompleks eşleniği ise;

$$(PQ)^* = Q^* P^* \quad (3.10)$$

olarak verilir[2,10].

### 3.2.6. Bikuaternionun normu

Bir  $Q$  bikuaternionunun normu, kendisi ile kuaternion eşleniğinin çarpımına eşittir.

$$N(Q) = Q\overline{Q} = \overline{Q}Q = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 \quad (3.11)$$

Bu işlem sonucu elde edilen nicelik kompleks skalerdir[10]. Ama bir bikuaternionun normu  $N(Q) = 0$  olabileceğinden  $Q$  'ya bir sıfır bölen denir. Bikuaternion cebri bu nedenle bir bölüm cebri oluşturmaz.

İki bikuaternion çarpımının normu, normlarının çarpımına eşittir. Yani

$$N(PQ) = (PQ)(\overline{PQ}) = PQ\overline{Q}\overline{P} = N(P)N(Q) \quad (3.12)$$

olur[2,16].

### 3.2.7. Bir bikuaternionun tersi

Normu sıfırdan farklı her  $Q$  bikuaternionu için,  $Q^{-1}$  ile ifade edilen bir tersi mevcuttur.

$N(Q) = Q\overline{Q} = \overline{Q}Q$  olduğunu daha önce belirtmiştik. Eğer buradan  $Q^{-1}$ 'i elde edecek olursak, bikuaternionun tersi ifadesi,

$$Q^{-1} = \frac{\overline{Q}}{N(Q)} \quad (3.13)$$

ile verilir. Bir bikuaternionun tersi ile kendisinin çarpımı 1'e eşittir. Yani,

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = 1 \quad (3.14)$$

dir[2,14].

Bikuaternion cebri değişimli değildir, genel olarak  $Q$  ve  $P$  iki bikuaternion olmak üzere,

$$QP \neq PQ \quad (3.15)$$

dur. O halde bikuaternionlar değişimli olmayan fakat birleşimli bir cebir oluştururlar.

#### ÖRNEK:

$P = ie_2 + e_3$  ve  $Q = 1 + e_1$  birer bikuaternion olmak üzere  $QP \neq PQ$  olduğunu gösteriniz.

#### ÇÖZÜM:

$$PQ = (ie_2 + e_3)(1 + e_1) = ie_2 - ie_3 + e_3 + e_2 = (1-i)e_3 - (1-i)e_2$$

olur.  $QP$  çarpımı ise,

$$QP = (1 + e_1)(ie_2 + e_3) = ie_2 + e_3 + ie_3 - e_2 = (1+i)e_3 - (1-i)e_2$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi  $PQ \neq QP$

#### 3.2.8. Bikuaternionlarda bölme işlemi

$Q$ ;  $N(Q) \neq 0$  yani, normu sıfır olmayan bir bikuaternion olmak üzere,

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = 1$$

koşulunu sağlayan  $Q^{-1}$  bikuaternionunun  $Q$  bikuaternionunun tersi olduğunu daha önce belirtmiştik. Aynı zamanda  $Q$  gibi bir bikuaternionun normunu da;

$$N(Q) = Q\bar{Q} = \bar{Q}Q = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2$$

olduğunu göstermiştik. Buradan;

$$\frac{Q\bar{Q}}{N(Q)} = 1$$

yazabiliriz. O halde;

$$Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{N(Q)}$$

olduğu açıktır. Yani bir  $Q$  bikuaternionunun tersi, kendi kuaternion eşleniğinin normuna bölümüyle elde edilen bir bikuaternion olmaktadır.

Bir  $P$  bikuaternionunun bir  $Q$  bikuaternionuna bölmek demek  $P$ 'yi  $Q^{-1}$  ile çarpmak demektir. Ancak iki bikuaternionun çarpımı değişme özelliğine sahip olmadığından ( $Q^{-1}P \neq PQ^{-1}$ ),  $P$  bikuaternionunun bir  $Q$  bikuaternionuna farklı şekilde iki bölümü tanımlanabilir:

$$\frac{P}{Q} = \begin{cases} PQ^{-1} = P \frac{\bar{Q}}{N(Q)} : & \text{"Sağdan Bölme"} \\ Q^{-1}P = \frac{\bar{Q}}{N(Q)} P : & \text{"Soldan Bölme"} \end{cases} \quad (3.16)$$

şeklindedir[2].

**ÖRNEK:**

$$P = ie_0 + (2 + 3i)e_1 + (1 + i)e_2 + 2ie_3$$

ve

$$Q = (1 + i)e_0 + (3 + 2i)e_1 + (2 + 3i)e_2 + 3e_3$$

birer bikuaternion olmak üzere  $\frac{P}{Q}$ 'nin değerini, soldan ve sağdan bölerek tayin

edelim ve bunların eşit olmadığını gösterelim.

**ÇÖZÜM:**

$Q$ 'nin normu;

$$\begin{aligned} N(Q) &= Q\bar{Q} \\ &= [(1 + i)e_0 + (3 + 2i)e_1 + (2 + 3i)e_2 + 3e_3][\overline{(1 + i)e_0 - (3 + 2i)e_1 - (2 + 3i)e_2 - 3e_3}] \\ &= [(1 + i)^2 + (3 + 2i)^2 + (2 + 3i)^2 + 3^2] \\ &= (1 + 2i - 1 + 9 + 12i - 4 + 4 + 12i - 9 + 9) \\ &= 9 + 26i \end{aligned}$$

olduğundan soldan bölme;

$$\begin{aligned}
Q^{-1}P &= \frac{\bar{Q}}{N(Q)}P \\
&= \frac{1}{9+26i} \{[(1+i)e_0 - (3+2i)e_1 - (2+3i)e_2 - 3e_3][ie_0 + (2+3i)e_1 + (1+i)e_2 + 2ie_3]\} \\
&= \frac{1}{9+26i} [ie_0 + 2e_1 + 3ie_1 + e_2 + ie_2 + 2ie_3 - e_0 + 2ie_1 - 3e_1 + ie_2 - e_2 - 2e_3 \\
&\quad - 3ie_1 + 6e_0 + 9ie_0 - 3e_3 - 3ie_3 + 6ie_2 - 2e_1 - 4ie_0 + 6e_0 + 2ie_3 - 2e_3 + 4e_2 - 2ie_2 \\
&\quad + 4e_3 + 6ie_3 + 2e_0 + 2ie_0 - 4ie_1 + 3e_2 + 6ie_3 - 9e_3 + 3ie_0 - 3e_0 + 6e_1 - 3ie_3 - 6e_2 \\
&\quad - 9ie_2 + 3e_1 + 3ie_1 + 6ie_0] \\
&= \frac{1}{9+26i} [(-1+6+6+2-3)e_0 + i(1+9-4+2+3+6)e_0 \\
&\quad + (2-3+6+3)e_1 + i(3+2-3-2-4+3)e_1 \\
&\quad + (1-1+4+3-6)e_2 + i(1+1+6-2-9)e_2 \\
&\quad + (-2-3-2+4-9)e_3 + i(2-3+2+6+6-3)e_3]
\end{aligned}$$

$$Q^{-1}P = \frac{1}{9+26i} [(10+15i)e_0 + (8-i)e_1 + (1-3i)e_2 + (-12+10i)e_3]$$

değerine sahiptir. Sağdan bölme ise;

$$\begin{aligned}
PQ^{-1} &= P \frac{\bar{Q}}{N(Q)} \\
&= \frac{1}{9+26i} [ie_0 + (2+3i)e_1 + (1+i)e_2 + 2ie_3][(1+i)e_0 - (3+2i)e_1 - (2+3i)e_2 - 3e_3] \\
&= \frac{1}{9+26i} [e_0 - e_0 - 3ie_1 + 2e_1 - 2ie_2 + 3e_2 - 3ie_3 + 2e_1 + 2ie_1 + 6e_0 + 4ie_0 - 4e_3 \\
&\quad - 6ie_3 + 6e_2 + 3ie_1 - 3e_1 + 9ie_0 - 6e_0 - 6ie_3 + 9e_3 + 9ie_2 + e_2 + ie_2 + 3e_3 + 2ie_3 \\
&\quad + 2e_0 + 3ie_0 - 3e_1 + ie_2 - e_2 + 3ie_3 - 2e_3 + 2ie_0 - 3e_0 - 3ie_1 + 2ie_3 - 2e_3 - 6ie_2 \\
&\quad + 4e_2 + 4ie_1 - 6e_1 + 6ie_0]
\end{aligned}$$

$$PQ^{-1} = \frac{1}{9+26i} [(-2+25i)e_0 + (-8+3i)e_1 + (13+3i)e_2 + (4-8i)e_3]$$

şeklinde olmaktadır.

### 3.2.9. Birim bikuaternion

Normu bir olan bikuaterniona birim bikuaternion denir[10]. Yani,  $Q$ ; bir bikuaternion olmak üzere;

$$N(Q) = Q\bar{Q} = \bar{Q}Q = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = 1 \quad (3.17)$$

ise  $Q$  'ya birim bikuaternion denir.

### 3.3. Bikuaternionların Matris Temsili

#### 3.3.1. Bikuaternionların $2 \times 2$ matris temsili

$I$ :  $2 \times 2$  birim matris ve  $\sigma_k$ 'ler ( $k = 1, 2, 3$ ) Pauli spin matrisleri ve  $i = \sqrt{-1}$  olmak üzere  $I$  ve  $-i\sigma_k$  matrislerinin cebri bikuaternionun bazıları olan  $e_0$  ve  $e_i$ 'lerin cebri ile aynıdır. O halde  $e_0$  ve  $e_i$ 'ler;

$$e_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; e_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}; e_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; e_3 = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$2 \times 2$  matrisleri ile temsil edilirler[13].

Buna göre;

$$Q = Q_0 e_0 + Q_1 e_1 + Q_2 e_2 + Q_3 e_3 = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) \quad (3.19)$$

şeklindeki bikuaternion;

$$Q = Q_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + Q_1 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} + Q_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + Q_3 \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 - iQ_3 & -Q_2 - iQ_1 \\ Q_2 - iQ_1 & Q_0 + iQ_3 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$2 \times 2$  kompleks değerli bir matris olarak ifade edilebilir. Buradaki  $A_{11}$  elemanına  $a$  ve  $A_{21}$  elemanına  $b$  dersek;

$$a = Q_0 - iQ_3 \text{ ve } b = Q_2 - iQ_1$$

$A_{22}$  elemanı;  $Q_0 + iQ_3 = a^*$  ve  $A_{12}$  elemanı;  $-Q_2 - iQ_1 = -b^*$  olacaktır. Buna göre  $Q$  bikuaternionu  $a$  ve  $b$  kompleks sayıları cinsinden;

$$Q = \begin{bmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

olarak yazılır ve determinantı bize  $Q$  bikuaternionunun normunu verir:

$$\det Q = N(Q) \quad (3.22)$$

dir[25].

#### 3.3.2. Bikuaternionların $4 \times 4$ matris temsili

Bikuaternionlar  $4 \times 4$  matris formunda ifade edilebilirler. Bikuaternionun bazı elemanları ile  $i$  kompleks sayısının  $4 \times 4$  matris temsili,

$$\mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix}; i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ile verilir. Buna göre,

$$\mathbf{Q} = (a_0 + ib_0)\mathbf{e}_0 + (a_1 + ib_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + ib_2)\mathbf{e}_2 + (a_3 + ib_3)\mathbf{e}_3$$

şeklinde ifade edilir ve burada  $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2$  ve  $b_3$  reel sayılardır.  $\mathbf{Q}$  bikuaternionunun  $4 \times 4$  matris formundaki yazılışı,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a_0 - ia_3 & ia_1 + a_2 & ib_0 + b_3 & -b_1 + ib_2 \\ ia_1 - a_2 & a_0 + ia_3 & -b_1 - ib_2 & ib_0 - b_3 \\ ib_0 + b_3 & -b_1 + ib_2 & a_0 - ia_3 & ia_1 + a_2 \\ -b_1 - ib_2 & ib_0 - b_3 & ia_1 - a_2 & a_0 + ia_3 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

olarak elde edilir. Burada;

$$c_0 = a_0 - ia_3; c_1 = ia_1 - a_2; c_2 = ib_0 + b_3; c_3 = -b_1 - ib_2$$

olarak ifade edilirse, bir bikuaternionun  $4 \times 4$  matris temsili;

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c_0 & -c_1^* & c_2 & c_3^* \\ c_1 & c_0^* & c_3 & -c_2^* \\ c_2 & c_3^* & c_0 & -c_1^* \\ c_3 & -c_2^* & c_1 & c_0^* \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

ile gösterilir. Burada  $c_0, c_1, c_2$  ve  $c_3$  kompleks sayılardır. ( $*$ ) ise kompleks eşleniği ifade etmektedir[2].

### 3.3.3. Bikuaternionların $8 \times 8$ matris temsili

Sekiz bileşenli olan bikuaternion,  $8 \times 8$  reel matrisle de temsil edilir.  $\mathbf{Q}$  bikuaternionu için  $\mathbf{Q}$  matrisi;

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

olarak tanımlanır.  $A$  ve  $B$  reel kuaternionlardır ve

$$A = a_0\Gamma_0 + a_1\Gamma_1 + a_2\Gamma_2 + a_3\Gamma_3 \quad (3.27a)$$

$$B = b_0\Gamma_0 + b_1\Gamma_1 + b_2\Gamma_2 + b_3\Gamma_3 \quad (3.27b)$$

şeklinde anti-simetrik matrislerle ifade edilirler.

Eşitlik (3.26) ve eşitlik (3.27)'ye göre de bikuaternionun  $Q$  matris temsili;

$$Q = (a_0 + Jb_0)\alpha_0 + (a_1 + Jb_1)\alpha_1 + (a_2 + Jb_2)\alpha_2 + (a_3 + Jb_3)\alpha_3 \quad (3.28)$$

ile verilir. Burada;

$$J = \varepsilon \times I_4 = \begin{bmatrix} 0 & I_4 \\ -I_4 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29a)$$

$$\alpha_0 = I_2 \times I_4 = \begin{bmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & I_4 \end{bmatrix} \quad (3.29b)$$

$$\alpha_j = I_2 \times \Gamma_j = \begin{bmatrix} \Gamma_j & 0 \\ 0 & \Gamma_j \end{bmatrix} \quad (j=1,2,3) \quad (3.29c)$$

dir.  $\Gamma_j$  matrisleri ise ( $j=1,2,3$ ) için sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.30a)$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30b)$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30c)$$

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30d)$$

$I_2$  ve  $I_4$  sırasıyla  $2 \times 2$  ve  $4 \times 4$  birim matrislerdir.  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$  ve  $\Gamma_3$  matrisleri;

$$\Gamma_0^2 = 1; \quad \Gamma_j \Gamma_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkl} \Gamma_l \quad (3.31)$$

özelliklerine sahiptir[10]. Böylece (3.26) denklemi ile verilen bikuaternion  $\mathcal{Q}$ 'nin  $\alpha_0$  ve  $\alpha_j$  matrisleriyle  $8 \times 8$  matris formu elde edilir. Burada  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  ve  $\alpha_3$  ifadeleri aşağıdaki çarpım kurallarına uyar:

$$\alpha_0 \alpha_j = \alpha_j \alpha_0 = \alpha_j$$

$$\alpha_0^2 = -\alpha_j^2 = \mathbf{I}_8 = \alpha_0$$

$$\alpha_j \alpha_k = -\delta_{jk} \alpha_0 + \varepsilon_{jkl} \alpha_l$$

Denklem (3.28) de J matrisi imajiner nicelik ve  $i = \sqrt{-1}$ 'e kabulüne uygundur.

Böylece  $\mathcal{Q}$  bikuaternionunun  $8 \times 8$  matris temsili;

$$\mathcal{Q}_{ij} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 & -b_1 & b_0 & -b_3 & b_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 & -b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & -b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & -b_0 & b_3 & -b_2 & -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ b_2 & -b_3 & -b_0 & b_1 & -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & -b_0 & -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}_{(i,j=1,2,\dots,8)} \quad (3.32)$$

şeklinde gösterilir[2].  $\mathcal{Q}_{ij}$ 'nin trace(izi), köşegen elemanların toplamıdır:

$$\text{Tr} \mathcal{Q}_{ij} = 8a_0 \quad (3.33)$$

dir.  $\mathcal{Q}_{ij}$ 'nin hermityen eşleniği ise;

$$\mathcal{Q}^\dagger = (-a_0 + ib_0, a_1 - b_1i, a_2 - b_2i, a_3 - b_3i) = \begin{bmatrix} -a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ -a_1 & -a_0 & -a_3 & a_2 & b_1 & b_0 & b_3 & -b_2 \\ -a_2 & a_3 & -a_0 & -a_1 & b_2 & -b_3 & b_0 & b_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & -a_0 & b_3 & b_2 & -b_1 & b_0 \\ -b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & -a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -b_1 & -b_0 & -b_3 & b_2 & -a_1 & -a_0 & -a_3 & a_2 \\ -b_2 & b_3 & -b_0 & -b_1 & -a_2 & a_3 & -a_0 & -a_1 \\ -b_3 & -b_2 & b_1 & -b_0 & -a_3 & -a_2 & a_1 & -a_0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

şeklindedir[10].



## 4. CLIFFORD CEBİRLERİ

### 4.1. Giriş

Clifford(geometrik) cebirleri; reel sayı sistemini, vektörleri ( $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$ ) ve vektörlerin çarpımlarını ( $\mathbf{uv}, \mathbf{uvw}, \dots$ ), içerecek şekilde genişletir. Clifford cebirleri geometrik modeller için, yüzeyler ve yüksek boyutlu nesnelere temsil eden vektör çarpımları için, dönmeler, yansımalar ve diğer geometrik dönüşümlerin tanımları için oldukça yararlıdır. Clifford cebri ismi İngiliz matematikçi William Kingdon Clifford'un onuruna verilmiştir. Clifford, Alman yüksek-okul matematik öğretmeni Hermann Günther Grassmann tarafından ileri sürülen fikirlerin önemini farkına vardı. Clifford, Grassman'ın fikirlerini Clifford olarak adlandırdığı geometrik cebirler içinde geliştirdi. Kompleks sayılar ve kuaternionlar özellikle basit geometrik cebirlerin iki şeklidir.

Clifford cebirleri toplama ve çarpma işlemi altında kapalıdır ve üç veya daha fazla vektörün çarpımları birleşme özelliğine sahiptir.

$$\mathbf{u}(\mathbf{vw}) = (\mathbf{uv})\mathbf{w}$$

Clifford cebirlerinin temel aksiyomu, herhangi bir vektörün kendisi ile çarpımının kendi uzunluğunun karesine eşit olmasıdır:

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{vv} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 \quad (4.1)$$

burada  $\mathbf{v}$ , farklı iki vektörün toplamı olarak düşünülürse yani,  $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$  ise; (4.1) bağıntısından,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

olur. Bu eşitliğin açılımı,  $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$  ve  $\mathbf{b}^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ 'lerin elenmesiyle;

$$\mathbf{ab} + \mathbf{ba} = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (4.2)$$

şeklini alır. Eğer  $\mathbf{a}$  ve  $\mathbf{b}$  aynı yönde değilse,  $\mathbf{aab} = \mathbf{a}(\mathbf{ab}) = (\mathbf{aa})\mathbf{b}$  farklı yönlere yönelen vektörlere eşit olacağı için  $\mathbf{ab}$  skaler olmayabilir. Sonuç olarak  $\mathbf{a}$  ve  $\mathbf{b}$  düzenlenirse;

$$\mathbf{ab} - \mathbf{ba} = 2(\mathbf{ab} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (4.3)$$

olur. Bu nedenle skalerlerden farkı, vektör çarpımlar genellikle yer değiştirmezler:  $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$  fakat vektörler skalerler gibi artarlar. Özellikle, çarpımları lineerdir ve

toplama üzerinde dağılırlar. Vektörler için çarpım kuralları kare matrislerin çarpım kuralları ile aynıdır.

Fizikte genel bir ifadeyle Clifford cebri, 3-boyutlu Öklid uzayı  $IR^3$ 'teki vektörlerden oluşan Pauli cebri  $Cl_3$ 'tür. Genel bir gösterimde, kartezyen eksenler boyunca birim vektörleri temsil eden  $2 \times 2$  Pauli-Spin matrislerini kullanır.

Bu nedenle  $v_x, v_y, v_z$  şeklindeki kartezyen bileşenleri ile bir  $\mathbf{v}$  vektörü,  $v_x \sigma_1 + v_y \sigma_2 + v_z \sigma_3$  matrisi ile gösterilir. Sınırsız sayıda farklı matris gösterimleri kullanılabilir, fakat yalnızca çarpımlarının cebirleri fiziksel olarak anlamlıdır. (4.3) eşitliğinden, herhangi n-boyutlu iki reel vektörün Clifford çarpımı, nokta çarpımı ve wedge çarpımının toplamıdır:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (4.4)$$

ve wedge çarpımı ise;

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \quad (4.5)$$

şeklinde. Nokta çarpım  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  bir skalerdir, fakat  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  ne bir skaler, ne de bir vektördür; bivektör olarak adlandırılan yeni bir elemandır. 3-boyutta  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ , vektörlerin vektörel çarpımı  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ile ilişkilidir. Fakat vektörel çarpımların aksine, wedge çarpımlarında birleşme özelliği vardır ve bunun dışında yüksek boyutlu uzaylarda da tanımlanır.

3-boyutta  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1$  bivektörleri,  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  tarafından tanımlanan orijinal vektör uzayından farklı lineer bir uzayı tanımlar. Öklid uzayındaki birim vektörlerin karesi 1'dir. Fakat burada baz bivektörlerin karesi  $-1$ 'dir. Örneğin;  $(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)^2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 = -1$ 'dir.

$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ 'nin geometrik anlamı (4.2) denklemi ile gösterilir. Bu iki operatör,  $\mathbf{e}_1$  ve  $\mathbf{e}_2$ 'nin her ikisini de aynı açı ile döndürür.

$$\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 \quad (4.6)$$

$xy$  düzleminde bulunan herhangi bir  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_1 + v_y \mathbf{e}_2$  vektörü aynı şekilde döndürülür. Özdeşliğin lineer bileşenleri ve  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ , keyfi bir  $\theta$  açısı ile dönmelere neden olabilir:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}(\cos \theta + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \sin \theta) = \mathbf{v} \exp(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \theta) \quad (4.7)$$

dır. Bu eşitliği  $\theta$  açısının kuvvet açılımı ile doğrularız. Dönme düzlemine dik olan bir  $z$  bileşeni ile bir  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$  vektörünü döndürmek için;

$$\mathbf{r}' = \exp(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\theta/2)\mathbf{r}\exp(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\theta/2) \quad (4.8)$$

eşitliğini kullanabiliriz. Eğer  $\theta = \omega t$  ise, (4.7) ve (4.8) denklemleri  $\omega$  sabit açısal hızındaki dönmeleri ifade eder. Bivektörler, yansımalar içinde kullanılabilir.  $xy$  düzlemindeki  $\mathbf{r}$  'nin yansıması;

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{r}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 - z\mathbf{e}_3 \quad (4.9)$$

şeklindedir. Ayrıca  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  çarpımı, yönlendirilmiş birim hacmi temsil eden bir trivektördür.

$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \dots$  olduğu için  $\mathbb{R}^3$  de sadece bir tane lineer bağımsız trivektör vardır. Trivektörün karesi  $-1$  'dir ve bütün temel vektörler ile ve bundan dolayı cebirin bütün elemanları ile yer değiştirir. Trivektör imajiner birimi ile bir tutulabilir:

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = i \quad (4.10)$$

dir. (4.10) özdeşliği, düzlemin normaline yönlendirilmiş imajiner vektörler ile bivektörleri birleştirilir, örneğin;  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = i\mathbf{e}_3$  'tür.  $\mathbf{e}_3$  vektörü  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  bivektörü ile dual vektör olarak adlandırılır ve dönme düzleminin eksenidir. Daha genel olarak  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektör çarpımı,  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  bivektörü ile dual vektördür.

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = i\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (4.11)$$

Kendisi ile vektörel çarpımındaki gibi, vektörler ve bivektörler arasındaki dual ilişkisi yalnızca üç boyutta anlamlıdır. Fakat herhangi bir  $n \geq 2$  boyutlu uzaylardaki dönmeler ve yansımalar için bivektörler kullanılır.

$Cl_3$  'ün genel bir  $p$  elemanı, skaler  $S$ , vektör  $\mathbf{V}$ , bivektör  $\mathbf{B}$  ve trivektör  $T$  kısımlarının veya derecelerinin reel bir toplamı;

$$p = S + \mathbf{V} + \mathbf{B} + T \quad (4.12)$$

şeklindedir. (4.10) denkleminde dolayı, Pauli cebirindeki her  $p$  elemanı, 4-boyutlu uzayda kompleks skaler ve kompleks vektörün toplamı ve böylece kompleks lineer kombinasyon olarak ifade edilirler.  $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  vektörlerinin kompleks lineer kombinasyonu baz paravektör olarak adlandırılır. Burada kolaylık olması için  $\mathbf{e}_0 = 1$  olarak tanımlarız. Buna göre herhangi bir  $p$  elemanı;

$$\mathbf{p} = p_0 \mathbf{e}_0 + p_x \mathbf{e}_1 + p_y \mathbf{e}_2 + p_z \mathbf{e}_3 \quad (4.13)$$

şeklindedir.

Eğer  $p_0, p_x, p_y, p_z$  katsayıları reel ise,  $\mathbf{p}$  bir reel paravektördür ve bu elemanlar relativitede uzay-zaman vektörlerini gösterebilir. Hız dönüşümleri,  $\mathbf{e}_0$  zaman eksenini içeren uzay-zaman düzlemlerindeki basit dönüşümlerdir.

$$p\bar{p} = p_0^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 \quad (4.14)$$

Şeklinde skaler normda uzay-zaman metriği kurulur. Burada;

$$\bar{\mathbf{p}} = p_0 \mathbf{e}_0 - (p_x \mathbf{e}_1 + p_y \mathbf{e}_2 + p_z \mathbf{e}_3) \quad (4.15)$$

dir. Işık sinyallerinin momentumu, önemsiz normlara sahip  $\mathbf{p}$  uzay-zaman vektörleridir. Bunun için  $\mathbf{p}$ 'ler sıfır olmayan elemanlardır. Bu elemanların tersi olamaz. Çünkü  $IR$  ve  $C$  alanlarındaki değerlere sahip değildirler. Pauli cebirlerinin merkezi kompleks alandır, ve hatta sıfır ve iki reel vektörlerin yalnızca çarpımlarını içeren alt cebir ise, kuaternion cebridir[12].

#### 4.2. Vektörlerin Clifford Çarpımı

$Cl_3$  Clifford cebirini 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlayan  $\mathbf{e}_i (i=1, 2, 3)$  gibi üç tane ortogonal birim vektör vardır. Bu birim vektörler;

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = 2\delta_{i,j} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = 1, \quad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \quad (4.17)$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  ve  $\mathbf{e}_3$ 'den  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ 'in rankı 2,  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$ 'in rankı ise 3 tür. Ve bu terimlerin karelerinin  $\pm 1$  olduğu kolaylıkla gösterilebilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 &= 1 \\ (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = -1 \\ (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) &= -1 \end{aligned} \quad (4.18)$$

şeklindedir.  $IR^2$  vektör düzleminde  $\mathbf{e}_1$  ve  $\mathbf{e}_2$  iki ortogonal birim vektör olsun.

$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$  vektörünün uzunluğu ise,  $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$  olur. Eğer  $\mathbf{r}$  vektörü kendisi ile çarpılırsa,  $\mathbf{r}\mathbf{r} = \mathbf{r}^2$  olur. Bu çarpım  $\mathbf{r}$ 'nin uzunluğunun karesine eşit olur:  $\mathbf{r}^2 = |\mathbf{r}|^2$  olduğundan koordinat sisteminde vektörler için bir çarpım;

$$(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)^2 = x^2 + y^2 \quad (4.19)$$

şeklinde yazılabilir. Bu işlem dağılma kuralı, komütatiflik dikkate alınmadan uygulandığında ise,

$$x^2 \mathbf{e}_1^2 + y^2 \mathbf{e}_2^2 + xy(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) = x^2 + y^2 \quad (4.20)$$

olur. Burada;

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1 \\ \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \end{array}} \quad \text{bunlar} \quad \boxed{\begin{array}{l} |\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1 \\ \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2 \end{array}} \quad \text{'ye tekabül ederler.}$$

$(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)^2 = -\mathbf{e}_1^2 \mathbf{e}_2^2 = -1$  karesini hesaplamak için birleşme özelliğini kullanırız.  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$  çarpımının karesi negatif olduğu için  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$  ne bir skaler, ne de bir vektördür. Bu çarpım bivektör olarak adlandırılır. Bu bivektör, kenar uzunlukları  $\mathbf{e}_1$  ve  $\mathbf{e}_2$  olan karenin yönlendirilmiş düzlem alanını temsil eder. Böylece  $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$  olarak kısaca gösterebiliriz.

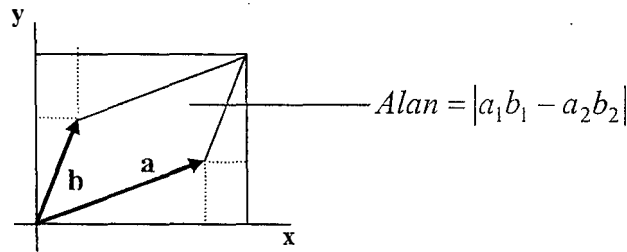
### 4.3. İki Vektörün Dış(Exterior), Wedge Çarpımı

Clifford çarpımının skaler ve bivektör kısımlarıyla ilgili özellikleri dikkate aldığımızda;  $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2$  ve  $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2$  şeklinde tanımlanan iki vektörün çarpımları:

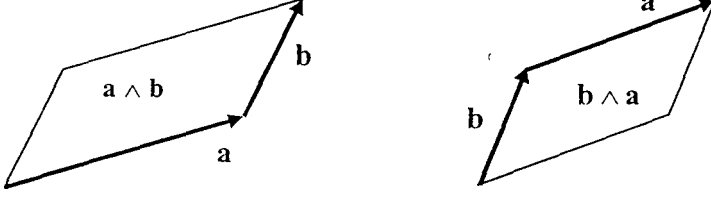
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad \text{skaler çarpım "a nokta b"}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_{12} \quad \text{dış çarpım "a wedge b"}$$

şeklinde olur.  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  bivektörü,  $\mathbf{a}$  ve  $\mathbf{b}$  kenarlı paralel kenarın yönlendirilmiş düzlem parçasını temsil eder. Bu paralel kenarın alanı  $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$  şeklinde olur ve bivektörün büyüklüğünü paralel kenarın alanı olarak alacağız.



Paralel kenara, kenarlarının geometrik çarpımı olarak dikkat edilebilir:



$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  ve  $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$  bivektörleri aynı büyüklüktedir, fakat yönleri zıttır. Bu basit bir şekilde,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \quad (4.21)$$

ile ifade edilebilir.  $Cl_2$  Clifford cebirinin çarpım tablosunu kullandığımızda,

$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$  ve  $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$  şeklinde tanımlanan vektörlerin Clifford çarpımı,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$  skaler ve  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_{12}$  bivektörün toplamı;

$$(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2)(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) = a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_{12} \quad (4.22)$$

şeklinde olur. Bir eşitlik olarak bu,

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (4.23a)$$

olur. Bu,  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$  ters yer değiştirme kuralı ve  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$  yer değiştirme kuralı ile beraber  $\mathbf{ab}$  ve  $\mathbf{ba}$  arasındaki ilişkiyi dolaylı olarak anlatır. Bu nedenle;

$$\mathbf{ba} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (4.23b)$$

olur. (4.23a) ve (4.23b) eşitliklerini topladığımızda ve çıkardığımızda,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \quad \text{ve} \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \quad (4.24)$$

ifadelerini elde ederiz.  $\mathbf{a}$  ve  $\mathbf{b}$  vektörleri yer değiştirdiğinde ( $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ ), bu iki vektör paraleldir ( $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ), yani  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$  veya  $a_1b_2 = a_2b_1$  olur.  $\mathbf{a}$  ve  $\mathbf{b}$  vektörleri ters yer değiştirdiğinde iki vektör diktir ( $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ), yani  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  olur. Bu nedenle;

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{ab} = -\mathbf{ba} \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{ab} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

şeklinde olur.

#### 4.4. Verilen Yönlere Bir Vektörün Bileşenleri

İki bileşeni olan bir  $\mathbf{r}$  vektörünün bileşenlerini düşünelim. Bunlardan biri  $\mathbf{a}$ 'ya paralel diğeri  $\mathbf{b}$ 'ye paraleldir ve  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ 'ye paralel değildir. Bu,  $\mathbf{r} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$  ayrışımında  $\alpha$  ve  $\beta$  katsayılarını tanımlama anlamına gelir.  $\alpha$  katsayısı,  $\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \wedge \mathbf{b}$  dış çarpımı ve  $\mathbf{b} \wedge \mathbf{b} = 0$  kullanımı ile elde edilebilir. Sonuçta,  $\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = \alpha\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  olur. Bu son eşitlikte her iki taraf  $\mathbf{e}_{12}$  ile çarpılırsa,

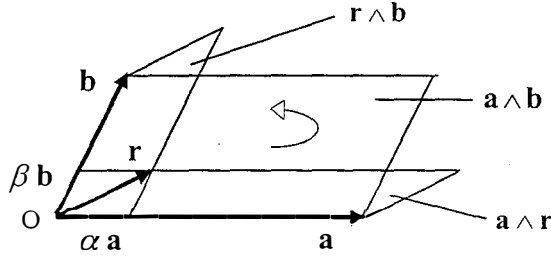
$$\alpha = \frac{\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} \quad (4.26)$$

eşitliğini yazabiliriz. Aynı şekilde  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$ 'nin değerlendirilmesi ile  $\beta$ 'yi atabiliriz:

$$\beta = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} \quad (4.27)$$

olur. Aşağıdaki şekilde yönlendirilmiş alanların karşılaştırılması ile  $\alpha$  ve  $\beta$  katsayıları görsel bir şekilde elde edilebilir.

$$\mathbf{r} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$$



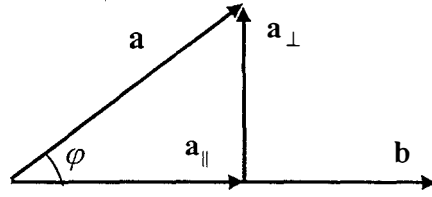
#### 4.5. Dik Gösterimler ve Yansımalar

$\mathbf{a}$  ve  $\mathbf{b}$  vektörlerinin arasındaki açı  $\varphi$  ( $0 < \varphi < 180^\circ$ ) olmak üzere,  $\mathbf{b}$  yönündeki  $\mathbf{a}$ 'nın bileşeni bulalım.  $\mathbf{a}_{\parallel}$  paralel bileşeni,  $\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$  birim vektörünün  $\mathbf{a}$  ile skaler çarpımı;

$$\mathbf{a}_{\parallel} = |\mathbf{a}| \cos \varphi \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \quad (4.28)$$

şeklindedir. Başka bir deyişle,  $\mathbf{a}_{\parallel}$  paralel bileşeni,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi$  skaler çarpımı ile  $\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|^2$  vektörünün çarpımıdır. Bu nedenle;

$$\begin{aligned} a_{\parallel} &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}^{-1} \end{aligned}$$



olur. Bu son ifade,  $\mathbf{b}$  yönündeki gösterimlerde  $\mathbf{b}$ 'nin uzunluğundan bağımsız olduğunu söyler.  $\mathbf{a}_{\perp}$  dik bileşeni,  $\mathbf{a} - \mathbf{a}_{\parallel}$  farkı ile verilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\perp} &= \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}^{-1} \\ &= (\mathbf{a} \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}^{-1} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{b}^{-1} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Burada  $\mathbf{e}_{12}$  bivektörü,  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$  düzlemindeki bütün vektörlerle ters yer değiştirdiğine dikkat edelim:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{b}^{-1} = -\mathbf{b}^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b}^{-1} (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) = -(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \mathbf{b}^{-1} \quad (4.30)$$

dır. Bu nedenle  $\mathbf{a}$  ve  $\mathbf{b}$  kenarlı paralel kenarın alanı,

$$|\mathbf{a}_{\perp} \mathbf{b}| = |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi \quad (4.31)$$

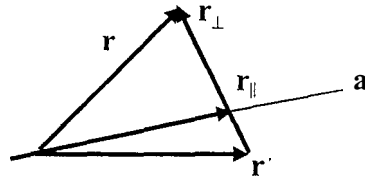
olduğu görülür. Burada  $0 < \varphi < 180^\circ$ 'dir.

$\mathbf{r}$  vektörünün  $\mathbf{a}$  vektörü doğrultusundaki yansıması;  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$  formülü ve  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r}_{\perp}$  ile elde edilir. Burada  $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}^{-1}$ 'dir.  $\mathbf{r}$  vektörünün  $\mathbf{a}$  vektörü doğrultudaki yansımasını  $\mathbf{r}'$  ile gösterirsek;

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}^{-1} - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{a}) \mathbf{a}^{-1} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{r} \wedge \mathbf{a}) \mathbf{a}^{-1} \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) \mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a} \mathbf{r} \mathbf{a}^{-1} \end{aligned} \quad (4.32)$$

ve işlemi ilerletirsek,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= (2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} \mathbf{a}) \mathbf{a}^{-1} \\ &= 2 \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{\mathbf{a}^2} \mathbf{a} - \mathbf{r} \end{aligned}$$

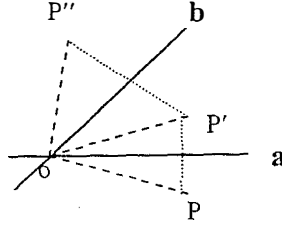


olur.  $\mathbf{r}' = \mathbf{a} \mathbf{r} \mathbf{a}^{-1}$  bağıntısını Clifford cebirinin sadece yer değiştirme özelliklerini kullanarak direkt elde edebiliriz:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$ 'dir. Burada;  $\mathbf{a} \mathbf{r}_{\perp} \mathbf{a}^{-1} = -\mathbf{r}_{\perp} \mathbf{a} \mathbf{a}^{-1} = -\mathbf{r}_{\perp}$  iken  $\mathbf{a} \mathbf{r}_{\parallel} \mathbf{a}^{-1} = \mathbf{r}_{\parallel} \mathbf{a} \mathbf{a}^{-1} = \mathbf{r}_{\parallel}$  dir. İlk önce  $\mathbf{a}$  vektörü doğrultusundaki ve sonra  $\mathbf{b}$  vektörü doğrultusundaki iki yansımanın bileşimi;

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = (\mathbf{a} \mathbf{r} \mathbf{a}^{-1}) \rightarrow \mathbf{r}'' = \mathbf{b} \mathbf{r}' \mathbf{b}^{-1} = \mathbf{b} (\mathbf{a} \mathbf{r} \mathbf{a}^{-1}) \mathbf{b}^{-1} = (\mathbf{b} \mathbf{a}) \mathbf{r} (\mathbf{b} \mathbf{a})^{-1} \quad (4.33)$$

ile verilir.

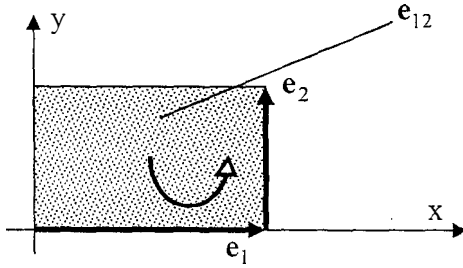




Bu iki yansımanın operasyonunun bileşimi,  $\mathbf{a}$  ve  $\mathbf{b}$  vektörleri arasındaki açının iki katı olan bir dönmeye eşittir.

#### 4.6. $\mathbb{R}^2$ Öklid Uzayının $Cl_2$ Clifford Cebri

$\mathbb{R}^2$  Öklid uzayının ortonormal baz vektörleri  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  olsun.



$Cl_2$  Clifford cebrinin dört elemanı;

1	skaler
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$	vektör
$\mathbf{e}_{12}$	bivektör

şeklinde. Bu dört eleman,  $\mathbb{R}^2$  vektör düzleminde  $Cl_2$  Clifford cebri bazlarını oluşturur, yani  $Cl_2$  'de keyfi bir eleman  $u = u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_{12}$  'dir.  $u_0$  skaler,  $u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$  vektörü ve  $u_{12}\mathbf{e}_{12}$  bivektörünün lineer kombinasyonudur.

$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^2 = -\mathbf{e}_1$ , ve  $\mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2$  eşitliklerini hesaplayalım.  $\mathbf{e}_{12}$ ,  $\mathbf{e}_1$  ve  $\mathbf{e}_2$  ile ters yer değiştirdiğine özellikle dikkat edelim.

$Cl_2$  Clifford cebri,

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_{12}$
$\mathbf{e}_1$	1	$\mathbf{e}_{12}$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_{12}$	1	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_{12}$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	-1

çarpım tablosuna sahip olup, 1,  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  ve  $\mathbf{e}_{12}$  baz elemanları ile 4-boyutlu reel lineer bir uzaydır. Özellikle,  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$  ve  $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$  vektörlerinin Clifford çarpımı;  $\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_{12}$  olarak görülür.

#### 4.7. $Cl_2$ 'nin Matris Gösterimi

$\mathbb{R}$  üzerinde 4-boyutlu reel bir cebir,  $Cl_2$  Clifford cebridir.  $\mathbb{R}(2)$  reel  $2 \times 2$  matrislerinin matris cebirleri izomorfiktir. Ortogonal birim vektörler  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  ve  $\mathbf{e}_{12}$  bivektörün matris gösterimi;

$$\begin{aligned}
 1 &\cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{e}_1 &\cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{e}_{12} &\cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

şeklindedir. Fakat  $Cl_2$  Clifford cebirinde,  $\mathbb{R}(2)$  matris cebirindekinden daha çok yapı vardır. Keyfi elemanlar için yukarıdaki benzerlikler;

$$u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_{12} \cong \begin{pmatrix} u_0 + u_1 & u_2 + u_{12} \\ u_2 - u_{12} & u_0 - u_1 \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

anlamına gelir ve

$$\frac{1}{2}[(a+d) + (a-d)\mathbf{e}_1 + (b+c)\mathbf{e}_2 + (b-c)\mathbf{e}_{12}] \cong \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

dir. Bu gösterimde, matrisin transpozu;

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

$Cl_2$  deki  $u = u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_{12}$  'nin tersine;

$$\tilde{u} = u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 - u_{12}\mathbf{e}_{12} \quad (4.38)$$

benzemektedir. Matrisin adjointi;

$$\text{Adj} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Clifford eşleniğine,

$$\bar{u} = u_0 - u_1\mathbf{e}_1 - u_2\mathbf{e}_2 - u_{12}\mathbf{e}_{12} \quad (4.40)$$

benzer.

#### 4.8. $IR^3$ Öklid Uzayının $Cl_3$ Clifford Cebri

3-boyutlu  $IR^3$  Öklid uzayı  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  gibi üç tane ortogonal birim vektöründen oluşmaktadır.  $IR^3$ 'ün  $Cl_3$  Clifford cebrinin reel asosiyatif cebri  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  birim vektörleriyle oluşturulur ve bu birim vektörler;

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^2 = 1, \quad \mathbf{e}_2^2 = 1, \quad \mathbf{e}_3^2 = 1, \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (4.41)$$

bağıntılarını sağlamaktadır.  $Cl_3$  Clifford cebri aşağıdaki bazlarla 8-boyutludur:

1	Skaler
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	Vektör
$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$	Bivektör
$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$	Bir hacim elemanı(trivektör)

Burada  $i \neq j$  olduğunda birim bivektörleri  $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$  ve yönlü birim hacim elemanını  $\mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  olarak kısaltabiliriz.  $Cl_3$  'teki keyfi bir elemanı bir skaler, bir vektör, bir bivektör ve bir hacim elemanının toplamı olarak;

$$\alpha + \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{e}_{123} + \beta\mathbf{e}_{123} \quad (4.42)$$

şeklinde yazabiliriz ve burada  $\alpha, \beta \in IR$  ve  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in IR^3$  'tür.

#### 4.9. $Cl_3$ 'ün Matris Gösterimi

Kompleks sayılarla oluşturulan  $2 \times 2$  matrislerinin kümesi  $C(2)$  ile gösterilir. Genellikle  $C$  kompleks alanlardaki bu kümeyi  $IR$ 'deki reel sayıların skaler çarpılmasıyla oluşan reel cebirde olduğu gibi dikkate almalıyız. Pauli matrisleri;

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I$$

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1$$

$$\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2 = -\sigma_1\sigma_3$$

$$\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1 = -\sigma_3\sigma_2$$

çarpım kurallarını sağlamaktadır. Bunlar  $C(2)$  reel cebirlerini de oluştururlar.

$e_1 \cong \sigma_1$ ,  $e_2 \cong \sigma_2$ ,  $e_3 \cong \sigma_3$  benzerlikleri ile reel cebirler arasında bir izomorfizm kurarlar yani,  $Cl_3 \cong C(2)$ 'dir. Baz elemanlarının benzerlikleri aşağıdaki gibidir:

$C(2)$	$Cl_3$
I	1
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$e_1, e_2, e_3$
$\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_3, \sigma_2\sigma_3$	$e_{12}, e_{13}, e_{23}$
$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$	$e_{123}$

Ayrıca  $i \neq j$  için  $e_{ij} = -e_{ji}$  olmaktadır.  $Cl_3$  Clifford cebri ve onun  $C(2)$  matris gösterimi arasındaki temel fark;  $Cl_3$  Clifford cebrinin tanımına göre  $IR^3$  vektör uzayında vektörün karesi uzunluğunun karesine eşit olduğunda ( $r^2 = |r|^2$ ), ayrı özel ayrı bir altuzayın tanımlanmasıdır.  $C(2)$  matris cebrinin tanımına göre böyle ayrı bir altuzay tanımlayamayız[17].

## 5. KUATERNİONLAR ve ÖZEL RELATİVİTE

### 5.1. Giriş

Fizikteki bir çok problem, matematiksel çözümler gerektiren diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Matematiğin temeli, alan özelliklerine bağlı olarak ifade edilirdi. Frobenius teoremine göre, sadece 3-boyutlu sınırlı alanlar mevcuttur: reel sayılar, kompleks sayılar ve kuaternionlar. Özel relativite, 4-boyutlu Minkowski uzayının önemini vurgular: uzay-zaman, enerji-momentum ve elektromagnetik potansiyel. Burada uzay-zamandaki olaylar, kuaternionların 4-boyutlu alanında incelenecektir. Referans sisteminin eksenleri boyunca artışlar içeren problemlerin bu yaklaşımla çözülebileceği gösterilecektir[20].

### 5.2. Üç Boyutta Dönme ve Kuaternionlar

3-boyutta yüksek dereceli multivektör çiftlerinin lineer kombinasyonu 3-boyutlu lineer bir uzay oluşturur. Buradaki  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  pseudovektörleri aynı zamanda bivektördür. Pseudovektörlerin baz elemanlarının karesi  $-1$ 'dir:

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -1 \quad (5.1)$$

Bunların her birinin ters-yer değiştirmeleri

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

şeklinde.  $R : \mathbf{a} \rightarrow R\mathbf{a}\bar{R}$  dönüşümünü,  $\mathbf{e}_1$  ve  $\mathbf{e}_2$  vektörleri oluşturur. Dönme eksenleri, dönme ile değişmez ve  $\mathbf{e}_1$  ile  $\mathbf{e}_2$  vektörlerinin dönmeleri;

$$e^{-i\theta/2} \mathbf{e}_1 e^{i\theta/2} = \mathbf{e}_1 \cos \theta + \mathbf{e}_2 \sin \theta \quad (5.3)$$

$$e^{-i\theta/2} \mathbf{e}_2 e^{i\theta/2} = \mathbf{e}_2 \cos \theta - \mathbf{e}_1 \sin \theta \quad (5.4)$$

ile gösterilir. Dönmeler  $\mathbf{e}_1$ 'den  $\mathbf{e}_2$ 'ye doğru  $\theta$  açısı ile,  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$  eksenine doğrultusunda olur. 3-boyuttaki  $\mathbf{n}$  birim vektörünün etrafında  $\theta$  açılı bir dönme ile oluşan  $R$  işlemcisinin kuaternion eşitliği;

$$R = \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \quad (5.5)$$

şeklinde verilir.  $\bar{R}$  ters işlemcisi ise;

$$\bar{R} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \quad (5.6)$$

$R$ 'nin kompleks eşleniğidir. 3-boyuttaki multivektörleri  $q = a + \mathbf{e} \cdot \mathbf{b}$  ile gösterirsek  $q = a + be_1 + ce_2 + de_3$  kuaternionu ile benzerlik gösterirler. Ayrıca burada  $\mathbf{e} \equiv (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  ve  $\mathbf{b} \equiv (b, c, d)$ 'dir. Kuaternionunun değişmeyen  $a$  skaler kısmı;

$$R : a \rightarrow R a \quad \bar{R} = a \quad (5.7)$$

dönüşümüyle tanımlanır. Kuaternion dönüşümünün  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}$  pseudovektör kısmını;

$$R : \mathbf{e} \cdot \mathbf{b} \rightarrow R \mathbf{e} \cdot \mathbf{b} \quad \bar{R} = \mathbf{e} \cdot \left[ \mathbf{b} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \times \left( \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{b} + \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{b} \right) \right] \quad (5.8)$$

denklemleriyle açıklayabiliriz. Denkleminin sağ tarafındaki, [ ] içindeki, vektör dönüşümünü,  $\mathbf{n}$ -ekseni etrafındaki  $\theta$  açılı bir dönme ile oluşan  $\mathbf{b}$  vektörüyle sağlayabiliriz.  $\mathbf{b} \equiv (b, c, d)$  vektörünün elemanlarını  $3 \times 3$  matris formunda yazabiliriz.  $R$  işlemcisinin kuaternionik elemanlarını  $(w, x, y, z)$  olarak alırsak;

$$R = e^{-\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} \theta / 2} = w + xe_1 + ye_2 + ze_3 \quad (5.9)$$

olur. (5.8) dönüşümünü;

$$R : \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w^2 + x^2 - y^2 - z^2 & 2(xy + wz) & 2(zx - wy) \\ 2(xy - wz) & w^2 - x^2 + y^2 - z^2 & 2(yz + wx) \\ 2(zx + wy) & 2(yz - wx) & w^2 - x^2 - y^2 + z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

şeklinde yazabiliriz.  $R \bar{R} = 1$  olan dönmeler,  $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$  eşitliğini sağlar. Bu durumda (5.10) denkleminin sağ tarafındaki matris, bir ortogonal matristir. Bu durum, bir dönme ve bir skala dönüşümünün bir kombinasyonuna benzemektedir. Bu kombinasyondaki skala dönüşümü,  $R \bar{R} = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$  eşitliği ile bir kuaternionun skaler ve vektör kısımlarının çarpımıdır[21].

Matematikteki en dikkate değer formül;

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (5.11)$$

denklemleriyle verilir ve bu bizim için önemlidir. Bir düzlemi gösteren kompleks sayıların cebri ile geometri arasındaki ilişkiyi

$$x + iy = r e^{i\theta} \quad (5.12)$$

denklemleriyle kurarız. Bu ifade cebir ve geometrinin birleşimidir. z-ekseni etrafındaki  $\alpha$  açılı bir dönme,  $e^{i(\theta+\alpha)}$  şeklinde gösterebiliriz. Gerçekte;

$$e^{i\alpha}(x+iy) = re^{i(\theta+\alpha)} \quad (5.13)$$

şeklindedir[11,28]. 1843'te Hamilton 3-boyutlu uzayda dönmeyi tanımlamak için kompleks alanları tanımlamaya çalışırken kuaternionları keşfetmiştir. Bir dönme için orijinden geçen eksen ve  $\mathbf{u} \equiv (u_x, u_y, u_z)$  birimsel vektörüne paralel  $\alpha$  açısı ile aşağıda verilen dönüşümü elde edebiliriz:

$$e^{\frac{\alpha}{2}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{u})} \mathbf{e}\cdot\mathbf{r} e^{-\frac{\alpha}{2}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{u})} = e^{\frac{(u_x\mathbf{e}_1+u_y\mathbf{e}_2+u_z\mathbf{e}_3)\cdot\alpha}{2}} (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) e^{-\frac{(u_x\mathbf{e}_1+u_y\mathbf{e}_2+u_z\mathbf{e}_3)\cdot\alpha}{2}} \quad (5.14)$$

dir. Burada  $\mathbf{e} \equiv (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  ve  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$  olarak tanımlanmıştır[22]. Bu yüzden 3-boyutlu uzaydaki dönmeleri veya "Cebir ve Geometri Birleşimi"ni tanımlamak istersek, kuaternionlara ihtiyaç duyarız[11].

$\mathbf{q}$  kuaternionunun kompleks gösterimi;

$$\mathbf{q} = z_1 + j z_2 \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad (5.15)$$

şeklindedir ve bu kuaternionun kompleks sütun matrisi ise;

$$\mathbf{q} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

şeklinde gösterilir. Şimdi yukarıdaki tanıma göre  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  ve  $\mathbf{e}_3$  baz vektörlerinin operatör gösterimlerini saptayalım:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_1 \quad ; \quad \mathbf{e}_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2 \\ \mathbf{e}_3 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\sigma_3 \quad ; \quad 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.17)$$

dir. Böylece tüm dönüşümler için dört serbestlik derecesine ihtiyaç duyarız. Herhangi bir kuaternionun  $2 \times 2$  kompleks matris operatörü için yazdığımızda;

$$\mathbf{q} = z_1 + j z_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

ifadesini elde ederiz. Burada  $z_1 = a + ib$  ve  $z_2 = c - id \in \mathbb{C}$  şeklinde tanımlanmıştır[23]. Birimsel normu olan bir kuaternion, determinanı 1 olan birimsel  $2 \times 2$  matrisiyle tanımlanır ve

$$\det(\mathbf{q}) = \mathbf{q}\mathbf{q}^* = z_1 z_1^* + z_2 z_2^* \quad (5.19)$$

dir.

### 5.3. Özel Relativitenin Araçları

Özel relativitede meydana gelen problemlerin çözümünde üç matematiksel araca ihtiyaç vardır. Olaylar, toplanıp çıkarılabilen veya bir skalerle çarpılabilen 4-vektörlerle gösterilir. İki vektör arasındaki iç çarpımı oluşturmak için aşağıdaki matris ile oluşturulan Minkowski metriğine ihtiyaç vardır:

$$\mathbf{M}_{metrik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{g}_\mu^\nu ; \quad (5.20)$$

$$q\{t, x, y, z\} \cdot \mathbf{g}_\mu^\nu \cdot q\{t, x, y, z\} = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (5.21)$$

şeklinde[18]. Lorentz grup, iki tane 4-vektörün iç çarpımını koruyan matris grupları gibi ifade edilebilir. Bu grubun üyeleri,  $x$ -ekseni boyunca olan artışlar için kolaylıkla ifade edilebilir:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

dir[29]. Burada  $\gamma_m$  ( $m = 0, 1, 2, 3$ )'ler uzay-zamanın ortonormal baz vektörleridir.  $\gamma_0$  zaman eksenini  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )'ler uzaysal eksenleri gösterir. Ayrıca  $\gamma_m$  baz vektörlerinin skaler çarpımı ( $\gamma_m \cdot \gamma_n$ ) Minkowski metriğini verir.  $\beta = v/c < 1$  ve  $c$  ışık hızıdır[21,23]. Buradan 4-vektör;

$$\Lambda_x \cdot \{t, x, y, z\} = \left\{ \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, y, z \right\} \quad (5.23)$$

şeklinde. Aralığın korunduğunu ispatlamak için, iç çarpımı hesaplarız:

$$\Lambda_x \cdot \{t, x, y, z\} \cdot \mathbf{g}_\mu^\nu \cdot \Lambda_x \cdot \{t, x, y, z\} = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (5.24)$$

dır. Bu 4-vektörden yola çıkmak, referans çerçevesinin  $x$ -ekseni boyunca diğer 4-vektöre doğru artırmasının ve iç çarpımı korumanın tek yoludur. Fakat neden 4-vektörden başlanması gerektiği açık değildir.



#### 5.4. Kuaternionların Özel Relativitede Kullanımı

Kuaternionlar ile incelenen olaylar gibi eğri alanları veya bölüm cebirleri 4-boyutludur. Bu yolla olaylar, operatörlerden farklı bir işlev alırlar ve aynı matematiksel yapıdan oluşurlar. Bir kuaternionun karesi;

$$\begin{aligned} & \left( \frac{q[t, x, y, z] \cdot q[t, x, y, z] + q[t, x, y, z] \cdot q[t, x, y, z]}{2} \right) \cdot \{1, 0, 0, 0\} \\ & = \{t^2 - x^2 - y^2 - z^2, 2tx, 2ty, 2tz\} \\ & (t, \bar{x})^2 = (t^2 - \bar{x} \cdot \bar{x}, 2t\bar{x}) \end{aligned} \quad (5.25)$$

şeklinde alınır. Burada kuaternionun ilk teriminin sabit aralıkta karesi alınmıştır ve kuaternion çarpım kuralının bir parçası olarak Minkowski metriğinin bir formu vardır. Vektör kısmının karesi alınamaz. Aralık değiştirilmeden kuaternion yapısı bulunabilirse, kuaternionlar Lorentz grubuyla aynı işlevi görür. Eğer  $x$  ve  $x'$  4-vektörlerinin aralıklarının aynı özelliğe sahip ise, karesi alınan birinci terimler  $q[x]$  ve  $q[x']$  aynıdır. Kuaternionlarda bölme işlemi tanımlı olduğundan;  $p = q[x'] q[x]^{-1}$  olduğunda,  $p$  kuaternionu  $p q[x] = q[x']$  olmalıdır. Kuaternionun tersi, normunun karesinin transpozudur. Bu yaklaşımla  $p$ 'yi  $x$ -ekseni boyunca artan 4-vektörler için hesaplayalım:

$$\begin{aligned} p & \equiv (yt - \beta \gamma x, -\beta \gamma t + \gamma x, y, z)(t, x, y, z)^{-1} \\ & = \{t^2 + x^2 - 2tx\beta + (y^2 + z^2)\sqrt{1 - \beta^2}, (-t^2 + x^2)\beta, \\ & -t(y + z\beta - y\sqrt{1 - \beta^2}) + x(z + y\beta - z\sqrt{1 - \beta^2}), \\ & x(z\beta + y(-1 + \sqrt{1 - \beta^2})) + t(y\beta + z(-1 + \sqrt{1 - \beta^2}))\} \\ & \quad \left/ (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{1 - \beta^2} \right. \end{aligned} \quad (5.26)$$

dir. Bu denklemi kullanarak  $x$ -ekseni boyunca  $p$  kuaternionunun Lorentz artışını ifade edebiliriz.  $p$  bağıl hız ve konumuna bağlıdır, buda onu anlam olarak "lokal" yapar.  $p q[x] = q[x']$  ise;

$$\begin{aligned} & (p[t, x, y, z, \beta] \cdot q[t, x, y, z]) \cdot \{1, 0, 0, 0\} \\ & = \{(t - x\beta) \gamma, (x - t\beta) \gamma, y, z\} \\ & p[t, x, y, z, \beta](t, x, y, z) = (\gamma t - \gamma \beta x, -\gamma \beta t + \gamma x, y, z) \end{aligned} \quad (5.27)$$

şeklinde 4-vektörden oluşmuş kuaternionudur. Bu noktada herhangi bir problem, 4-vektörler kullanılarak çözülebilir. Olay kuaternionları artırmak için Minkowski

metriği ve  $x$ -ekseni boyunca Lorentz artışı yukarıdaki kuaternionlar kullanılarak çözülebilir. Bu iki teknikte de aynı yapıda dört rakamın, aynı değişken beta kullanılarak yeni dört rakama dönüşmesinin nedenidir.

Aralığın değişmediğini kabul edelim;

$$\begin{aligned} & \mathbf{p}[t, x, y, z, \beta].\mathbf{q}[t, x, y, z].\mathbf{p}[t, x, y, z, \beta].\mathbf{q}[t, x, y, z].\{1, 0, 0, 0\} \\ & \{\mathbf{p}[t, x, y, z, \beta](t, x, y, z)\}^2 = \left\{t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \right. \\ & \left. \frac{2(t^2\beta + x^2\beta - tx(1 + \beta^2))}{-1 + \beta^2}, \frac{2y(t - x\beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{2z(t - x\beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right\} \end{aligned} \quad (5.28)$$

şeklinde. Birinci terim kabul edildiği gibi korunmuştur. Karesinin vektör kısmı yapıya bağlıdır.

### 5.5. Kuaternionların Pratikte Kullanımı

Burada  $\mathbf{p}$  kuaternionu, basit hesaplamalar için oldukça komplekstir. Özel relativitedeki bir çok problem, açılı momentum içermez;  $y = z = 0$  yapısına sahiptirler. Bu durum genelde  $t = 0$  veya  $x = 0$  yada Doppler değişim problemlerinde  $x = t$  olduğu durumdur. Bu nedenle  $\mathbf{p}$  kuaternionu, çok basit bir hal alır.

Eğer  $t = 0$  ise;

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{p}[0, x, 0, 0, \beta].\{1, 0, 0, 0\} \\ \mathbf{p} &= \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, 0, 0 \right) \\ \mathbf{p} &= \gamma(1, \beta, 0, 0) \\ q &\rightarrow q' = \mathbf{p}q \\ (0, x, 0, 0) &\rightarrow (t', x', 0, 0) = (-\gamma\beta x, \gamma x, 0, 0) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Eğer  $x = 0$  ise;

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{p}[0, x, 0, 0, \beta].\{1, 0, 0, 0\} \\ \mathbf{p} &= \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, -\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, 0, 0 \right) \\ \mathbf{p} &= \gamma(1, -\beta, 0, 0) \\ q &\rightarrow q' = \mathbf{p}q \\ (t, 0) &\rightarrow (t', x', 0, 0) = (\gamma t, -\gamma\beta t, 0, 0) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Eğer  $x = t$  ise;

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{p}[0, x, 0, 0, \beta]. \{1, 0, 0, 0\} \\ \mathbf{p} &= \left( \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, 0, 0, 0 \right) \\ \mathbf{p} &= \gamma(1-\beta, 0, 0, 0) \\ q &\rightarrow q' = \mathbf{p}q \\ (t, x, 0, 0) &\rightarrow (t', x', 0, 0) = \gamma(1-\beta)(t, x, 0, 0) \end{aligned} \tag{5.31}$$

şeklinde olmaktadır.

Özel relativitedeki problemler, ya 4-vektörü, Minkowski metriğini ve Lorentz grubunu kullanarak yada kuaternionları kullanarak çözülebilir. Oluşan iki metot arasında deneysel fark yoktur. Bu noktada fark matematiksel temelde yatmaktadır. Çalışmaların çok büyük kısmı metriklerin çalışması üzerine, genel relativite alanlarındaki parçacıklardır. En büyük çaba grup teorisi ve bunun parçacık fiziğine uygulanışı üzerine gösterilmektedir. Fakat çalışmaların bu iki alanı birleştirme girişimleri başarısız olmuştur.

Problemleri kuaternionlar kullanarak çözerken olaylar, metrikler ve operatörler arasında bir bölünme yoktur. Biri kuaternionları seçerken öncül olmalıdır; fiziğe özgü problem ile ilgili olmalı ve bu bakımdan becerisi bulunmalıdır. Kuaternionları kullanırken istenilen bu koşullar, metrikler ve grup dönüşümleri arasında farklılıklar meydana getirebilir[20].

## 6. BİKUARTERNİONLAR ve ÖZEL RELATİVİTE

Özel relativite teorisi, hareketli bir trene göre durgun platformdan geçen bir koordinat dönüşümü altında

$$t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad (6.1)$$

ifadesinin değişmezliğini ister. Trenin, uzay-zamandaki konumu;

$$\mathbf{X} = x_0 \mathbf{e}_0 + ix_1 \mathbf{e}_1 + ix_2 \mathbf{e}_2 + ix_3 \mathbf{e}_3 = t + i\mathbf{r} \quad (6.2)$$

bikuarternionu ile ifade edilir ve burada  $x_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 'ler reeldir ve konum vektörü  $\mathbf{r} \equiv (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3)$  olarak tanımlanmıştır[25]. Ayrıca  $i$  kompleks birimdir. Bu (6.2) denklemini;

$$\mathbf{X} = ict + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = ict + \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i \quad (6.3)$$

şeklinde de ifade edebiliriz ve burada  $\mathbf{e}_i (i = 0, 1, 2, 3)$  birim vektörlerdir. Aynı zamanda bu 4-boyutlu Minkowski uzayıdır. Burada  $x = 0$ ,  $y = ct$  ve  $y = 0$  olarak alınmıştır. Genelde bir bikuarternion 8-boyutlu uzayda gösterilir. Bu  $x = 0$  ve  $y = 0$  durumlarını kuaternionlarda yerine koyarsak 4-boyutlu Minkowski uzayını elde ederiz[26].  $\mathbf{X}$  bikuarternionunun büyüklüğü;

$$|\mathbf{X}| = \sqrt{(ict)^2 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2} \quad (6.4)$$

denklemleriyle verilir. Özel relativite teorisine göre eylemsiz sistemler arasındaki dönüşümler sabittir. Buradan diferansiyel  $d\mathbf{X}$ ;

$$d\mathbf{X} = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dt^2} \quad (6.5a)$$

olarak bulunur. Her iki taraf  $1/ic$  ile çarpılırsa;

$$\frac{1}{ic} d\mathbf{X} = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = d\tau \quad (6.5b)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada  $d\tau$ , relativitenin bilinen zaman genişlemesidir[29]. Buradan diferansiyel  $d\mathbf{X}$  ifadesini;

$$d\mathbf{X} = icdt + dx_1 \mathbf{e}_1 + dx_2 \mathbf{e}_2 + dx_3 \mathbf{e}_3 \quad (6.6)$$

şeklinde başka bir formda ifade edebiliriz[27]. Şimdide trenin uzay-zamandaki hızının bikuarternion formu;

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{d(ict)}{dt} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \mathbf{e}_i = ic + \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i \quad (6.7)$$

denklemleri verilir. Hızın büyüklüğü ise;

$$V = |V| = \sqrt{(ic)^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v^2 - c^2} \quad (6.8)$$

şeklinde. Ayrıca burada hızın büyüklüğü ifadesini  $|V| = ic\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  şeklinde de

yazabiliriz. Bu yazılım bize Lorentz dönüşümlerindeki  $\gamma$  çarpanını sağlamaktadır.

$V$  ve  $dt$ 'yi kullanarak  $d\tau$  relativistik diferansiyel zamanını;

$$d\tau = \frac{|V|}{ic} dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (6.9)$$

olarak ifade edebiliriz. Buradaki  $d\tau$ , has zaman olarak da bilinir. Relativistik hızın bikuaternion formu;

$$U = \frac{dX}{d\tau} = \frac{ic}{|V|} \frac{dX}{dt} = \frac{icV}{|V|} \quad (6.10)$$

ve buradan,

$$U = \frac{dX}{d\tau} = \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.11)$$

şeklinde verilir. Burada  $|U| = ic$ 'dir. Böylece 4-boyutlu  $V$  hız ve  $dt$  diferansiyel zaman veya 3-boyutlu  $\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$  hız ve  $d\tau$  zaman genişlemesi kavramları kullanılır.

Bir teoride bunlardan birini seçmek gerekir çünkü, 3-boyutlu ve 4-boyutlu özellikleri bir arada kullanamayız. Şimdide bikuaternion Nabla operatörünü tanımlayalım:

$$\nabla = \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{e}_i \quad (6.12)$$

dır. Burada  $\vec{\nabla} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ 'dir[26]. Bu bikuaternionlar  $x^* = x^\dagger$  özelliğiyle

karakterize edilirler ve hermityen bikuaternionlar olarak adlandırılırlar. Ayrıca

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial t} - i\vec{\nabla} \quad (6.13)$$

operatörü hermityen bikuaterniondur. Fakat  $\mathbf{F}^\dagger = -\mathbf{F}$  eşitliğini sağlayan,

$$\mathbf{F} = \mathbf{B} + i\mathbf{E} \quad (6.14)$$

denklemleri 6-vektör olarak adlandırılır ve anti-simetrik matrislerle gösterilir.

Einstein, kuaternionları kullanmadan  $p = m + imv$  kütle-momentumun  $x$  'e benzer dönüştüğünü fark ederek;

$$p = m_0 \frac{dx}{d\tau} = m_0 u \quad (6.15)$$

olarak bulmuştur[19]. Burada  $d\tau^2 = N(dx) = dx dx^* = -dx^2$ ,  $u = \frac{dx}{d\tau}$  ve  $m = \gamma m_0$  olarak tanımlanmıştır[29]. Buradan  $\gamma$  yerine  $dt/d\tau$  yazarsak;

$$m_0 = m \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^{-1} \quad (6.16)$$

hareketli parçacığın durgun kütleini buluruz ve değişmez olduğu varsayılır. Momentum korunumu, kütle korunumu ile birleştirilirse;

$$m = m_0 \frac{dt}{d\tau} = m_0 (1 - v^2)^{-1/2} \quad (6.17)$$

elde edilir ve burada  $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  'dir. Hareketli parçacığın  $v$  hızı, ışığın  $c = 1$  hızıyla kıyaslanırsa, daha küçük olduğu görülür. Buradan,

$$m = m_0 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \quad (6.18)$$

şeklinde olmaktadır. Ayrıca;

$$mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (6.19)$$

dir. Einstein bunu;  $\frac{1}{2} m_0 v^2$  kinetik enerjisini  $m_0 c^2$  atomik enerjisiyle toplayarak parçacığın toplam enerjisi olarak ele almıştır.

Yük-akım yoğunluğu bikuaternionik formda

$$J = \rho + i\mathbf{j} \quad (6.20)$$

şeklindedir. Bu  $J = \rho_0 \frac{dx}{d\tau}$  gibi düşünülebilir ve burada  $\rho_0 = \rho \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^{-1}$  sabit bir skalerdir.

Özetle, aşağıdaki hermityen bikuaternionlar,  $q(\ )q^{*+}$ ;

$$x = t + i\mathbf{r} \quad (\text{uzay-zamanda konum})$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial t} - i\vec{\nabla} \quad (\text{kısmi türev})$$

$$p = m + im\mathbf{v} \quad (\text{enerji-momentum})$$

$$J = p + i\mathbf{j} \quad (\text{yük-akım yoğunluğu})$$

$$\Phi = \varphi + i\mathbf{A} \quad (4\text{-potansiyel})$$

ile dönüştürülürler. Diğer bir deyişle, 6-vektör;

$$\mathbf{F} = \mathbf{B} + i\mathbf{E} \quad (\text{elektromagnetik alan})$$

olarak  $q(\ )^\dagger$  ile dönüştürülür. Maxwell denklemlerinin bikuaternion formu;

$$\frac{d}{dx}\mathbf{F} + J = 0 \quad (6.21)$$

şeklinde bir denkleme dönüşür.

Bu denklemi;  $\left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger\left(\frac{d\mathbf{F}}{dx}\right)$ 'in 6-vektör olduğuna dikkat ederek  $\left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger$  ile işleme tabi tutarsak  $\left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger J$ 'nin skaler kısmının sıfır olduğunu anlarız. Bu süreklilik denklemidir. Ayrıca  $\left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger\Phi + \mathbf{F}$ 'nin skaler olduğunu ve bazen de sıfıra eşit olduğunu gözlemleriz.

Maxwell denklemleri;  $J$  yük-akım bikuaternionu ile ifade edildiği gibi hareketli yükün sürekli dağılımıyla oluşturulan elektromagnetik alanı tanımlar. Tersine, verilen bir elektromagnetik alan hareketli bir yüke etki ederse; bu defa  $q_0(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  dış kuvvetinin etkisiyle  $\mathbf{v}$  hızı ile  $q_0$  farklı bir hareketli yük olarak görünür. Newton'a göre bu momentumun değişim hızıdır fakat, özel relativite  $\frac{d}{dt}$  ile değil  $\frac{d}{d\tau}$  ile ölçülmüş oran ister. Özel relativiteye göre bu  $q_0(\mathbf{v} \times \mathbf{E} + \mathbf{B})$  terimiyle artırılır ve enerjinin değişim hızı olarak ifade edilir. Böylece bir elektronun hareket denkleminin relativistik formunu  $q_0 = -e$  ile elde edebiliriz.

$$\frac{dp}{d\tau} = e \frac{dx}{d\tau} \mathbf{F} + ig \quad (6.22)$$

Burada  $g$ , bir hermyen bikuaterniondur. Burada bir kısıtlama var: Maxwell denkleminde sürekli dağılıma sahip yükü tanımladık fakat hareket denkleminde bu durum farklı olmaktadır[25].

## 7. CLIFFORD CEBRİ ve LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİ

Galile'nin relativite ilkesine göre, klasik mekaniğin yasaları bütün gözlemciler için aynıdır. Her biri diğerine göre sabit hızda hareket eder. Daha doğru olarak klasik mekaniğin yasaları,  $v$  hızında hareket eden  $(x, t)$  ve  $(x', t')$  iki referans sistemine göre Galile dönüşümleri altında değişmeden kalırlar.

$$\begin{array}{ll} \text{Direkt} & \text{Tersi} \\ x' = x - vt & x = x' + vt' \\ t' = t & t = t' \end{array} \quad (7.1)$$

Sol taraftaki denklemler, ikinci referans sisteminin orijini  $x' = 0$  olduğunda ilk referans sistemindeki  $x = vt$  uniform harekete uyduğunu gösterir. Burada referans sistemlerinin birbirlerine üstünlüğü yoktur. Yada hareket eden cisimler için mutlak değildirler, ancak zaman korunumludur.

Galile'nin ilkesi veya değişmezliği fiziğin tümüne hükmetmez; en dikkate değeri elektromagnetizma ve özellikle de ışıktır. Örneğin dalga denklemi;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (7.2)$$

şeklindedir. Burada  $(x, t) \rightarrow (x', t')$  değişkenlerinin değerleri Galile dönüşümünde korunmaz. Yinede dalga denklemi, H. A. Lorentz'ten adını alan başka bir dönüşüm altında değişmezdir. 1887'de Michelson & Morley; ışığın kaynağın hareketinden bağımsız bir şekilde hareket ettiğini gösteren bir deney yaptılar. 1905'te Einstein, ışığın hızının sabit olduğunu bir postüla olarak aldı ve relativite ilkesiyle beraber bu postülanın, Lorentz' in kinematiksel formüllerini türetmek için yeterli olduğunu gösterdi. Böyle yapmakla Einstein, zaman notasyonunu yeniden gözden geçirmek ve mutlak zaman kavramını değiştirmek zorunda kalmıştır.

### 7.1. Bir Boyutlu Uzayda Lorentz Dönüşümleri

$x' = 0 \Rightarrow x = vt$  lineerliğini koruyan Galile dönüşümlerinin en basit değişikliği, bir  $\gamma$  faktörü ile çarpılmasıyla elde edilir:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad x = \gamma(x' + vt') \quad (7.3)$$



Burada  $\gamma$ ,  $x$  ve  $t$ 'den bağımsızdır fakat  $v$ 'ye bağlı olabilir.  $\gamma$ 'nın, her iki eşitlikte de aynı olması gerekir, çünkü ters dönüşüm  $v$ 'in  $-v$ 'ye dönüşümü dışında direkt dönüşüm ile aynı olmalıdır.

$\gamma$ 'nın hesabında, ışığın hızına eşit gözlemi kullanırız. Her iki referans sisteminde  $c$  hızıyla hareket eden bir ışık sinyalinin düşünelim. Böylece (7.3) denkleminin sağ tarafına  $x = ct$  ve  $x' = ct'$  yerleştirilirse;

$$x' = \gamma(ct - vt), \quad x = \gamma(ct' + vt') \quad (7.4)$$

olur veya, denklemin sol tarafına  $x' = ct'$  ve  $x = ct$  yerleştirilirse;

$$ct' = \gamma(c - v), \quad ct = \gamma(c + v)t' \quad (7.5)$$

zamanın dönüşümlerini elde ederiz. İki denklemin bölümü,

$$\frac{c}{\gamma(c + v)} = \frac{\gamma(c - v)}{c} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7.6)$$

çarpanını verir. Sonra, olayların zaman koordinatının dönüşümü hesaplanır:

$x = \gamma(x' + vt')$  yerine  $x' = \gamma(x - vt)$  yerleştirildiğinde,

$$x^2 = \gamma^2(x - vt)^2 + \gamma^2 vt'^2 \quad (7.7)$$

olur.  $\gamma$ 'nın açık şeklini kullanır ve  $t'$  çözülürse;

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (7.8)$$

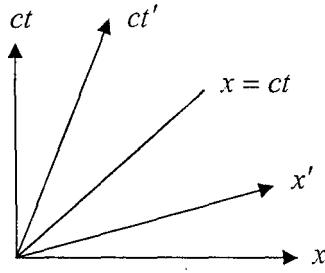
olur. Benzer bir şekilde, ters dönüşüm hesaplanırsa;

$$t = \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \quad (7.9)$$

zamanın da dönüştürülmesi, relativistik zaman olarak söz edilir. Özetle, Lorentz dönüşümleri olarak bilinen uzay ve zaman koordinatları için dönüşüm yasaları;

<u>Direkt</u>	<u>Tersi</u>	
$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	
$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	(7.10)

şeklindedir. Lorentz dönüşümlerinde  $x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$  kuadratik formu ve olayların ortogonalliği korunur; eğer  $x_1x_2 - x'^2 - c^2t'^2 = 0$  olursa,  $x_1, ct_1$  ve  $x_2, ct_2$  olaylarının ortogonal olduğunu söylenir. Özellikle zaman ve uzay ortogonaldır. Burada zaman ve uzayın,  $90^\circ$  ile birbirinden ayrılmadığına dikkat edilmeli yani dik veya dikdörtgensel değildir. Zaman eksenini uzaya dik olsun ve bir Lorentz dönüşümünü sağlasın diye  $x, ct$  uzay-zaman koordinatlarını çizerek;  $x', ct'$  dönüşüm eksenleri dik değildir, fakat tanım olarak ortogonaldır.



Lorentz dönüşümünü matris formunda;

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad (7.11a)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} x - vt \\ -\frac{v}{c}x + ct \end{pmatrix} \Rightarrow x' = \gamma (x - vt) \quad (7.11b)$$

$$ct' = \gamma \left( ct - \frac{v}{c}x \right)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu matris çarpımı, Lorentz dönüşümlerinin bileşenlerini hatırlatır:

$$L_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

$v_1$  ve  $v_2$  hızlarındaki iki Lorentz dönüşümünün bileşimi; paralel hızların relativite bileşimi olarak bilinen,

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (7.13)$$

hızı da  $L_v = L_{v_1} L_{v_2}$  Lorentz dönüşümüyle sonuçlanır[17].

## 7.2. Dört Boyutlu Uzayda Lorentz Dönüşümü

Clifford cebirinde yeni bir  $j$  sanal birimi tanımlanır ve  $j^2 = -1$ ,  $j \neq 1$ ,  $j^* = -j$  şeklinde hiperbolik sanal birim olarak adlandırılır. Hiperbolik kompleks uzay, Minkowski uzayına benzemektedir. Hiperbolik Minkowski uzayı lineer kuaternion ile

$$\mathbf{X} = ct + j\mathbf{r} = \sum_{n=1}^4 x_n \quad (7.14)$$

şeklinde özetlenebilir.

Burada  $ct = x_4$  ve  $t$  zamandır.  $j\mathbf{r} = \sum_{n=1}^3 x_n = jx_1\mathbf{e}_1 + jx_2\mathbf{e}_2 + jx_3\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{r}$  3-boyutlu

uzayın yer vektörü ve  $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ 'dir.  $\mathbf{X}$  kompleks sayı ve vektörler için benzer özelliğe sahiptir. İki boyutlu uzay zaman kompleks düzlemini  $H(ct, j\mathbf{r})$  olarak tanımlayabiliriz. Burada  $\mathbf{r}$ , kompleks sayının sanal kısmı ve  $ct$  ise reel kısmıdır.

$\mathbf{X}$  lineer kuaternionu,

$$\mathbf{X} = Re^{j\Psi} = R(\cos h\Psi + j \sin h\Psi) \quad (7.15)$$

olarak yazılabilir. Burada  $R = \sqrt{(c^2 t^2 - r^2)}$  hiperbolik kuaternionun modülü ve  $\Psi$ ,  $ct$  eksenine karşılık gelmektedir.

$$\Psi = \mathbf{r}_0 \Psi = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \arctan h \frac{r}{ct}, e^{j\Psi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\Psi)^n}{n!} = \cos h\Psi + j \sin h\Psi \quad (7.16)$$

Bu şartlarda lineer kuaternionların çarpımını tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = ct + j\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 &= \sum_{n,m=1}^4 x_n \cdot x_m \\ &= (ct_1 + j\mathbf{r}_1)(ct_2 + j\mathbf{r}_2) = (c^2 t_1 t_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + j(ct_1 \mathbf{r}_2 + ct_2 \mathbf{r}_1) \end{aligned} \quad (7.17)$$

şeklindedir. (7.17) denklemi özel bir durum olduğu için, birim kuaternion  $X_m = \cos h\Psi + j \sin h\Psi$  ile verilir ve

$$\mathbf{X}' = ct' + j\mathbf{r}' = X_m \cdot \mathbf{X} = (\cos h\Psi + j \sin h\Psi)(ct + jr) \quad (7.18)$$

şeklinde ifade edilebilir. (7.18) denklemini genişletirsek;

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = ct \sin h\Psi + \mathbf{r} \cos h\Psi \\ ct' = ct \cos h\Psi + \mathbf{r} \sin h\Psi \end{cases} \quad (7.19)$$

elde ederiz. Burada

$$\tan h\Psi = \frac{\sin h\Psi}{\cos h\Psi} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (7.20)$$

bağıntısını yerine yazarsak;

$$\cos h\Psi = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \quad (7.21)$$

ifadesine ulaşırız. (7.21) denklemini (7.19) denkleminde yerine yazarsak;

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \frac{1}{\gamma}(\mathbf{r} + \mathbf{v}t) \\ t' = \frac{1}{\gamma}\left(t + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right) \end{cases} \quad (7.22)$$

Lorentz dönüşümünü elde ederiz. (7.22) denklemi kuaternion formunda;

$$\mathbf{X}' = \frac{1}{c} \mathbf{V} \cdot \mathbf{X} \quad (7.23)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\mathbf{V} = \frac{1}{\gamma}(c + j\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{X}}{d\tau}$  genelleştirilmiş 4-boyutlu hızdır

ve  $\tau$  has zamandır. (7.23) denklemini matris formunda;

$$\mathbf{X}'_{\mu} = U_{\mu\nu} \cdot \mathbf{X}_{\nu} \quad (7.24)$$

ya da

$$\begin{bmatrix} j\mathbf{r}' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} & j\frac{v}{\gamma c} \\ j\frac{v}{\gamma c} & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} jr \\ ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh h\Psi & j \sin h\Psi \\ j \sin h\Psi & \cosh h\Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} jr \\ ct \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

şeklinde olmaktadır. Kuaternionun normunu alırsak;

$$R^2 = \mathbf{X}^* \cdot \mathbf{X} = \sum_{n,m=1}^4 x_n \cdot x_m = c^2 t^2 - r^2 \quad (7.26)$$

olur. Değişmeyen aralıklarda (7.24) matris denklemini sağlar ve

$$X_{\mu}^{\dagger} X'_{\mu} = X_{\mu}^{\dagger} X_{\mu} = R^2 \quad (7.27)$$

dir. Dönüşüm matrisi  $U_{\mu\nu}$  'ü sağlar.

$$U_{\mu\nu}^{\dagger} U_{\mu\nu} = U_{\mu\nu} U_{\mu\nu}^{\dagger} = I \quad (7.28)$$

Burada  $I$ ; birim matris,  $U_{\mu\nu}^{\dagger}$  ve  $U_{\mu\nu}$  birbirinin Hermityen eşleniğidir.

### 7.3. Dört Boyutlu Uzayın Değişmeyen Metriği

(7.24) denklemini matris formunda yeniden düzenlersek aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} jx' \\ jy' \\ jz' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} & 0 & 0 & \frac{jv_x}{\gamma c} \\ 0 & \frac{1}{\gamma} & 0 & \frac{jv_y}{\gamma c} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} & \frac{jv_z}{\gamma c} \\ \frac{jv_x}{\gamma c} & \frac{jv_y}{\gamma c} & \frac{jv_z}{\gamma c} & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} jx \\ jy \\ jz \\ ct \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

(7.29) denklemini, (7.27) denklemi formunda yazamayız. Çünkü (7.29) denkleminin dönüşüm matrisi  $U_{\mu\nu}$ , (7.28) denklemini sağlamaz. Bu  $(jr', ct')$  ve  $(jr, ct)$  iki koordinat sisteminde sadece  $\mathbf{r}$  ve  $\mathbf{v}$ 'ye paralel bağıl hareket yapar. (7.24) ve (7.29) denklemleri her koordinat sisteminde Lorentz dönüşümü için değişmeden kalmaz. Bu şartlarda  $\mathbf{r}$  ve  $\mathbf{v}$ 'nin yönü farklıdır.

Eğer  $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{r}_{\parallel}$  ve  $\mathbf{v}$  aynı yönde verilirse bu ifadeyi (7.22) denklemindeki gibi yazabiliriz:

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_{\parallel} = \frac{1}{\gamma}(\mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{v}t) \\ t' = \frac{1}{\gamma}\left(t + \frac{\mathbf{r}_{\parallel} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma}\left(t + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right) \end{cases} \quad (7.30)$$

şeklindedir ve buradan,

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2}, \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel} = \mathbf{r} - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} \quad (7.31)$$

(7.31) denklemini (7.22) denkleminde yerine konursa;

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} + \frac{\mathbf{v}}{\gamma} t \\ t' = \frac{1}{\gamma} \left(t + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right) \end{cases} \quad (7.32)$$

Lorentz dönüşümünü elde ederiz. Bu denklemi  $X'_\mu = U_{\mu\nu} X_\nu$  matris formunda;

$$\begin{bmatrix} jx' \\ jy' \\ jz' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_x^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_x v_y}{v^2} & \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_x v_z}{v^2} & \frac{jv_x}{\gamma c} \\ \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_x v_y}{v^2} & 1 + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_y^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_y v_z}{v^2} & \frac{jv_y}{\gamma c} \\ \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_x v_z}{v^2} & \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_y v_z}{v^2} & 1 + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_z^2}{v^2} & \frac{jv_z}{\gamma c} \\ \frac{jv_x}{\gamma c} & \frac{jv_y}{\gamma c} & \frac{jv_z}{\gamma c} & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} jx \\ jy \\ jz \\ ct \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

yazabiliriz. (7.33) denklemini Lorentz dönüşüm elemanları formunda yazabiliriz:

$$\begin{cases} x' = \left(1 + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_x^2}{v^2}\right)x + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_x v_y}{v^2} y + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_x v_z}{v^2} z + \frac{v_x}{\gamma} t \\ y' = \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_x v_y}{v^2} x + \left(1 + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_y^2}{v^2}\right)y + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_y v_z}{v^2} z + \frac{v_y}{\gamma} t \\ z' = \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_x v_z}{v^2} x + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_y v_z}{v^2} y + \left(1 + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{v_z^2}{v^2}\right)z + \frac{v_z}{\gamma} t \\ t' = \frac{jv_x}{\gamma c^2} x + \frac{jv_y}{\gamma c^2} y + \frac{jv_z}{\gamma c^2} z + \frac{1}{\gamma} t \end{cases} \quad (7.34)$$

(7.33) denklemi ile  $U_{\mu\nu}$  matris dönüşümü, (7.27) ve (7.28) denklemlerini ayrı ayrı sağlar. (7.33) ve (7.34) denklemleri ile 4-boyutlu hiperbolik Minkowski uzayının genel Lorentz dönüşümleridir.  $v_x = v$  ve  $v_y = v_z = 0$  olduğunda (7.34) denklemini özel Lorentz dönüşümüne sadeleştirebiliriz:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\gamma}(x + vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{1}{\gamma} \left(t + \frac{v}{c^2} x\right) \end{cases} \quad (7.35)$$

dir.  $\tau$  has zamanı verilirse;  $d\tau = \gamma dt$  'yi elde ederiz. 4-boyutlu hız ifadesi;

$$u_{\mu} = \frac{dX^{\mu}}{d\tau} = u_0 + j\mathbf{u} \quad (7.36)$$

olarak verilir. Burada  $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}$ ,  $u_0 = \frac{c}{\gamma}$  'dir. 4-boyutlu hızın uzaysal ifadesi;

$$u_{\mu}^* u_{\mu} = u_0^2 - u = c^2 \quad (7.37)$$

$$\mathbf{u} \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \quad (7.38)$$

denklemleriyle verilir. Uzaysal hızın Lorentz dönüşümünü;

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{u} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} - \frac{\mathbf{v}}{\gamma} u_0 \\ u_0' = \frac{1}{\gamma} \left(u_0 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right) \end{cases} \quad (7.39)$$

şeklinde yazabiliriz. (7.39) denklemini matris formunda;

$$u_{\mu}' = U_{\mu\nu} u_{\nu} \quad (7.40)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifade, dönüşüm matrisi  $U_{\mu\nu}$  'yü sağlar. 4-boyutlu momentum uzayında, momentum;

$$P_{\mu} = m_0 u_{\mu} = p_0 + j\mathbf{p} \quad (7.41)$$

olarak verilir. 4-boyutlu momentumun uzaysal ifadesi;

$$P_{\mu}^* P_{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 \quad (7.42)$$

$$\mathbf{p} \mathbf{v} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p} \wedge \mathbf{v} \quad (7.43)$$

denklemleriyle verilir. 4-boyutlu momentum uzayının Lorentz dönüşümünü;

$$\begin{cases} \mathbf{p}' = \mathbf{p} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} - \frac{\mathbf{p}}{\gamma} p_0 \\ p_0' = \frac{1}{\gamma} \left(p_0 - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right) \end{cases} \quad (7.44)$$

şeklinde yazabiliriz. (7.44) denkleminin 4-boyutlu matris formu;

$$P_{\mu}' = U_{\mu\nu} P_{\nu} \quad (7.45)$$

şeklinde dir. Dört boyutlu momentumun uzaysal ifadesi ise;

$$P_{\mu}^{\dagger} P_{\mu}' = P_{\mu}^{\dagger} P_{\mu} = m_0^2 c^2 \quad (7.46)$$

şeklindedir. Buradan 4-boyutlu enerji-momentum bağıntısı için

$$\mathbf{E}^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (7.47)$$

elde ederiz. Şimdi, Lagrangian fonksiyonunu ele alalım:

$$\mathbf{L} = -m_0 c^2 = u_\mu \mathbf{P}_\mu^* = u_\mu \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u_\mu} \quad (7.48)$$

olacaktır. Buradan 4-boyutlu,

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial X_\mu} = \mathbf{F}_\mu^*, \quad \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u_\mu} = \mathbf{P}_\mu^* \quad (7.49)$$

denklemlerini elde ederiz. 4-boyutlu Lagrangian denklemini;

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \left( \frac{dX_\mu}{d\tau} \right)} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial X_\mu} = 0 \quad (7.50)$$

şeklinde yazabiliriz. 4-boyutlu momentum operatörü;

$$\hat{\mathbf{P}}_\mu = \frac{\partial}{\partial X_\mu} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + j\nabla \quad (7.51)$$

şeklinde verilirse, (7.45) denklemindeki gibi 4-boyutlu operatörü matris formunda yazabiliriz:

$$\hat{\mathbf{P}}'_\mu = U_{\mu\nu} \hat{\mathbf{P}}_\nu \quad (7.52)$$

dır. 4-boyutlu momentum operatörünün uzaysal ifadesini;

$$\left( \frac{\partial}{\partial X'_\mu} \right)^\dagger \left( \frac{\partial}{\partial X'_\mu} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial X_\mu} \right)^\dagger \left( \frac{\partial}{\partial X_\mu} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (7.53)$$

şeklinde yazabiliriz. (7.53) denklemi ise Laplacian denklemdir[30].



## 8. SONUÇ

Kuaternionlar 1843'te Hamilton'un keşfinden bugüne kadar fizikte gerek fiziksel olayları ve denklemleri daha anlaşılır bir şekilde ifade etmek, gerekse çözmek için kullanılmıştır. Bunun için fiziksel nicelikleri 3-boyutlu uzaydan kuaternion uzayına taşımak gerekir. Fiziksel nicelikleri 3-boyutlu uzaydan 4-boyutlu uzaya taşıyarak kuaternionlarla temsil etmek bir üstünlük sağlayacaktır. Çünkü, 3-boyutlu uzayda bölme işlemi yokken kuaternionlarda bölme işlemi mevcuttur. Kuaternion cebri birleşimli, ancak değişimli olmayan dört elemandan oluşur. Kuaternionların kuantum fiziğine uygulanmasıyla yeni yaklaşımlar elde edilebilir.

Bikuaternionlar, kuaternionlar için gerekli olan özelliklerin bir çoğuna sahip olurken, sekiz bileşeni dört kompleks sayı ile ifade edildiğinde kuaternionlara yapı bakımından benzemektedirler. Kuaternionlarla ifade edilen tüm denklemleri bikuaternionlar da ifade etmek mümkündür. Bikuaternion cebrinin birleşme özelliği bulunmasına karşın değişme özelliği bulunmamaktadır.

Clifford cebirleri lineer bir uzayda kuadratik formda tanımlanmış geometrik cebirlerdir. Geometrik cebir, modern matematiksel fizikte, cisimlerin geniş bir bakış açısı ile ifade edilmesinde, matematiksel fiziğin bir çok bağıntısının yeniden düzenlenmesinde, yeni bir takım görüşler ve olanaklar ortaya koyar. Bu matematiksel gelişmeler fiziğin ilerlemesinde önemli rol oynamaktadır. Örneğin dönme hareketinin incelenmesinde, sanal sayıların exponansiyel formu oldukça kullanışlı olmaktadır.

Kuaternion cebri Clifford cebirlerinin özel bir hali olarak görülmektedir. Kuaternion cebri ters Öklid uzayın Clifford cebridir. 3-boyutlu uzayda kuaternionlar, Clifford cebrinin alt cebirleri için daha kullanışlı olduğu görünümündedir. Temel Clifford cebri doğrusal yada doğrusal olmayan uygulanabilir simetri operasyonlarından yansımalara kadar ilgilidir.

Günümüzde Clifford cebri, moleküler ve katıhal fiziği ile kristalografide, sistemlerin simetri özelliklerinin incelenmesinde, oldukça önemlidir. Katıhal fiziği ve kristal yapıların çok boyutlu uzaylarda incelenmesinde, yapıların simetri özelliklerinin bilinmesi ve bu özelliklerin uygun ve kullanışlı cebirlerle ifadesi daha da önemlidir. Clifford cebirleri; reel sayı sistemini, vektörleri ve bu

vektörlerin çarpımlarını içerecek şekilde geniştir. Clifford cebirleri geometrik modeller için, yüzeyler ve yüksek boyutlu nesnelere temsil eden vektör çarpımları için dönüşümler yansımalar ve diğer geometrik dönüşümler için oldukça yararlıdır. Kompleks sayılar ve kuaternionlar özellikle basit geometrik cebirlerin iki şeklidir.

Bu çalışmada kuaternion, bikuaternion ve Clifford cebirinin özellikleri belirtilerek, özel relativite teorisinin kuaternion ve bikuaternionlarla, Lorentz dönüşümlerinin de Clifford cebri ile ifadeleri verilmektedir. Özel relativite teorisinde zaman kavramı, içinde yaşadığımız 3-boyutlu uzaydan bağımsız olarak mutlak bir nicelik taşımaz. Ancak 4-boyutlu uzay-zamanın her bir noktası, belli bir anda belli bir noktada yer alan bir olguya karşılık gelir. Tipik uzay-zaman noktası ( $x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ) kartezyen koordinatları ile temsil edilebilir. Bu tanımlar yardımıyla uzay-zamanda hareket eden noktasal bir parçacığın konumunu kuaternion ve bikuaternionlarla gösterebiliriz. Relativistik mekaniksel uygulamalar incelendiğinde Lorentz dönüşümleri de bikuaternionlarla ifade edilebilmektedir. Bikuaternionların en önemli faydalarından biriside klasik Maxwell denklemlerinin temsilinde ortaya çıkmaktadır. Bikuaternionlar kullanılarak Maxwell'in dört temel denklemini tek bir bikuaternionik denklemde toplamak mümkün olmaktadır. Yani bikuaternionlar yardımıyla relativistik Maxwell denklemlerini bir dönüşümle elde edilebiliriz. Bikuaternion cebirinin izomorfizmleri uzay-zaman vektörünün Lorentz dönüşümlerine karşılık gelmektedir. Böylece Einstein'ın relativite teorisinin temelini oluşturan Lorentz dönüşümleri bikuaternion cebirinin izomorfizmleri ile özdeş olmaktadır.

## KAYNAKLAR

1. SERDAROĞLU M., *Fizikte Kuaternion ve Oktonion Yapılar*, Bilim ve Teknik Dergisi, 45-51, Ocak (1993).
2. ÖZGÜR G., *Bikuaternionların Alternatif Cebirlerinin Karşılaştırılması ve Bikuaternionik Dirac Denklemi*, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, (2002).
3. ÖZDAŞ K. ve ÖZDAŞ A., *Fiziksel Niceliklerin Kuaternionlarla Temsili*, Fen-Edebiyat Dergisi **I**, **2**, 101-113, (1989).
4. [http://www.bilimtarihi.gen.tr/kimkimdir/vidinli\\_huseyin\\_tevfik\\_pasa.html](http://www.bilimtarihi.gen.tr/kimkimdir/vidinli_huseyin_tevfik_pasa.html)
5. DERELİ T., *Soyut Cebirler ve Fizikteki Simetri Yasaları*, Bilim Ve Teknik Dergisi, 34-38, Aralık (1992).
6. TANIŞLI M., *Uzaysal Dönmelerin ve Robot Kollarının Pozisyonunun Kuaternion Dönüşümleri ile İncelenmesi*, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, (1995).
7. TANIŞLI M., ÖZDAŞ K. ve ÖZDAŞ A., *An Application of General Quaternion Transformation for a Robotics Position*, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi **3**, 55-68, (1997).
8. TANIŞLI M., *The Quaternionic Energy Conservation Equation for Acoustic*, Acta Physica Slovaca **53**, 253-258, June (2003).
9. TANIŞLI M. ve ÖZGÜR G., *Biquaternionic Representations of Angular Momentum and Dirac Equation*, Acta Physica Slovaca **53**, 243-252, June (2003).
10. NEGİ O. P. S., BISHT S. ve BISHT P. S., *Revisiting Quaternion Formulation and Electromagnetism*, Il Nuovo Cimento **113B**, 1449-1467, (1998).
11. DE LEO S., *Quaternions and Special Relativity*, arXiv:hep-th/9508011 v1 3 Aug (1995).
12. BAYLIS W. E., *Clifford(Geometric) Algebra with Applications in Physics, Mathematics, and Engineering*, Boston, (1996).
13. ÖZDAŞ K., *Bölüm Cebirleri ve Bunların Fiziksel Uygulamaları*, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Eskişehir, (1995).

14. CANDEMİR N., *Elektromagnetik Teorinin Kuaternionlarla İncelenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, (2001).
15. OUTSCHOORN V. M. ve REYES J., *Quaternions: A Fun and Easy Introduction*,  
[www.people.fas.harvard.edu/~jreyes/quaternions.pdf](http://www.people.fas.harvard.edu/~jreyes/quaternions.pdf)
16. CONTE E., *On a Generalization of Quantum Mechanics by Biquaternions*, Hadronic Journal **16**, 261-275, (1993).
17. LOUNESTO P., *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge University Press, New York, (1997).
18. SILBERFARB A., *Clifford Algebras and Their Applications to Physics*,  
[panda.unm.edu/Courses/finley/P495/TermPapers/clifford.pdf](http://panda.unm.edu/Courses/finley/P495/TermPapers/clifford.pdf)
19. SCOTT J., *Complex Four-vector Algebra*,  
[pws.prserve.net/jonathan\\_scott/physics/cfv.pdf](http://pws.prserve.net/jonathan_scott/physics/cfv.pdf)
20. SWEETSER D. B., *Solving Problems in Special Relativity with Quaternions*,  
[world.std.com/~sweetser/quaternions/ps/sr.pdf](http://world.std.com/~sweetser/quaternions/ps/sr.pdf)
21. HAMILTON A. J. S., *How to Program Lorentz Transformations on a Computer*,  
<http://casa.colorado.edu/~ajsh/phys5770/lorentz.ps.gz>
22. DE LEO S. ve DUCATÌ G., *Quaternionic Groups in Physics: A Panoramic Review*, International Journal of Theoretical Physics **38**, 2197-2220, (1999).
23. DE LEO S. ve ROTELLÌ P., *Translations between Quaternion and Complex Quantum Mechanics*, Progress Theoretical Physics **92**, 917-926, (1994).
24. SILBERSTEIN L., *Quaternionic Form of Relativity*, Philosophical Magazine **23**, 790-809, May (1912).
25. LAMBEK J., *If Hamilton Had Prevailed: Quaternions in Physics*, The Mathematical Intelligence, **17**, 7-15, (1995).
26. VLAENDEREN K. J. ve WASER A., *Electrodynamics with The Scalar Field*,  
[www.aw-verlag.ch/Documents/ElectrodynamicsWithTheScalarField03.pdf](http://www.aw-verlag.ch/Documents/ElectrodynamicsWithTheScalarField03.pdf)

27. WASER A., *Quaternions in Electrodynamics*,  
[www.aw-verlag.ch/Documents/QuaternionsInElectrodynamicsEN01.pdf](http://www.aw-verlag.ch/Documents/QuaternionsInElectrodynamicsEN01.pdf)
28. DE LEO S. ve ROTELLI P., *Quaternionic Electroweak Theory*, *Journal of Physics G* **22**, 1137-1150, (1996).
29. WEISSTEIN E. W., *Quaternions*,  
<http://mathworld.wolfram.com/Quaternion.html>
30. XUEGIAN Y., QIUNAN H. ve XUEGANG Y., *Clifford Algebra and The Four-Dimensional Lorentz Transformation*, *Advances in Applied Clifford Algebras* **12**, 13-19, (2002).