164...

TAM DEĞİŞİMİ SONLU VE MUTLAK SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Ömer Akdoğan

Yüksek Lisans Tezi

Mayıs - 2002

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Ömer AKDOĞAN ' ın " Tam Değişimi Sonlu ve Mutlak Sürekli Fonksiyonlar " başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki , Yüksek Lisans tezi .... tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim - Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı – Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Doç. Dr. Halik HÜSEYNOV	
Üye	:	Prof . Dr. Yalçın KÜÇÜK	
Üye	:	Prof . Dr. Orhan ÖZER	
Üye	:		
Üye	:		

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 15.05.2002. tarih ve ......16/1.......... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof . Dr. Orhan ÖZER
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TAM DEĞİŞİMİ SONLU
VE MUTLAK SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Ömer AKDOĞAN

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Halik HÜSEYNOV
2002, 82 Sayfa

Tez'de mutlak sürekli ve tam değişimleri sonlu olan fonksiyonların ve küme değerli dönüşümlerin özellikleri incelenmektedir. Tam değişimi sonlu olan fonksiyonun iki monoton artan fonksiyonun farkı formunda gösterilebilirliği araştırılmış, aralıkta tanımlı fonksiyonun Banach indikatrisinin özellikleri incelenmiştir. Sürekli fonksiyonun Banach indikatrisinin integralinin, bu fonksiyonun tam değişimine eşit olduğu ispatlanmıştır. Mutlak sürekli fonksiyonların sürekli, tam değişiminin sonlu ve N-özellikli olduğu kanıtlanmış, ve tersine, sürekli, tam değişimi sonlu ve N-özellikli fonksiyonun mutlak sürekli olduğu gösterilmiştir. Hausdorff metriğinden yararlanarak, aralıkta tanımlı ve kompakt değerli küme değerli dönüşümler için tam değişim ve mutlak süreklilik kavramları verilmiş ve bu tür küme değerli dönüşümlerin özellikleri araştırılmıştır. Lipschitz koşulunu sağlayan küme değerli dönüşümün mutlak sürekli, mutlak sürekli küme değerli dönüşümün sürekli ve tam değişiminin sonlu, tam değişimi sonlu olan küme değerli dönüşümün sınırlı olduğu ispatlanmıştır. Küme değerli dönüşümün tam değişiminin üst sınıra göre azalmayan fonksiyon olduğu kanıtlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Mutlak Sürekli Fonksiyon, Tam Değişim, Küme Değerli Dönüşüm, Hausdorff Uzaklığı, Mutlak Sürekli Küme Değerli Dönüşüm

ABSTRACT

Master of Science Thesis

ABSOLUTELY CONTINUOUS FUNCTIONS AND FUNCTIONS OF BOUNDED TOTAL VARIATIONS

Ömer AKDOĞAN

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Khalik GUSEINOV

2002, 82 Pages

In this thesis, the properties of the absolutely continuous functions and the functions of bounded total variations are considered. Representation possibility of the function of bounded total variation as the difference between two nondecreasing functions is studied and the properties of the Banach indicatrix of the given function are investigated. It is proved that integral of the Banach indicatrix of given continuous function is equal to total variation of this function. It is shown that every absolutely continuous function is continuous, has a bounded total variation and N-property, and vice versa, every continuous function, having a bounded total variation and N-property, is absolutely continuous. Using the Hausdorff metric, the absolutely continuity and total variation notions for compact valued set valued maps are introduced and properties of this set valued maps are studied. It is proved that a set valued map, satisfying the Lipschitz condition, is absolutely continuous, an absolutely continuous set valued map is continuous and has bounded total variation, a set valued map of bounded total variation is bounded. It is shown that the total variaton of a set valued map with respect to upper bound is nondecreasing function.

Keywords: Absolutely Continuous Function, Total Variation, Set Valued Map, Hausdorff Distance, Absolutely Continuous Set Valued Map

ÖNSÖZ

Tezde, tam değişimi sonlu ve mutlak sürekli fonksiyonların özellikleri incelenmektedir. Bellidir ki, verilen aralıkta tam değişimi sonlu olan fonksiyonlar uzayı, bu aralıkta tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı ile izometriktir (bkz. [1], [2], [3]). Tam değişimi sonlu olan fonksiyonlar, Stieltjes integralinin özelliklerinin incelenmesinde önemli bir yer tutmaktadır (bkz. [1], [3], [4]).

Verilen aralıkta tam değişimi sonlu ve mutlak sürekli fonksiyonların önemli özelliklerinden biri, bu fonksiyonların hemen hemen türevlenebilir olması ve türev fonksiyonlarının bu aralıkta Lebesgue integrallenebilir olmasıdır (bkz. [4], [5], [6], [7], [8]). Bu durum, mutlak sürekli fonksiyonları, diferansiyel denklemlerin ve diferansiyel içermelerin çözümleri olarak kullanılmasını mümkün kılar (bkz. [9], [10], [11], [12], [13], [14]). Mutlak sürekli fonksiyonların, diferansiyel denklemlerin ve diferansiyel içermelerin çözümleri olarak kullanılmasını ortaya çıkaran diğer durum, bu fonksiyonların, diğer bir fonksiyonun Lebesgue integraline eşit olmasıdır (bkz. [1] [3], [4], [6]). Ayrıca, eğer mutlak sürekli fonksiyonun türevi hemen hemen sıfır ise, o zaman bu fonksiyon sabit fonksiyondur. Fonksiyon mutlak sürekli olmadığı durumda bu hüküm doğru değil. Buna göre, diferansiyel denklemlerin çözümlerini tanımlarken, çözümün mutlak sürekli olmadığını kabul edersek, o zaman çok besit hallerde diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin çözümünün tek olmadığı ortaya çıkar. (bkz. [6], [14]).

Çokdeğişkenli tam değişimi sonlu ve mutlak sürekli fonksiyonların, tam değişimi sonlu ve mutlak sürekli küme değerli dönüşümlerin özellikleri halen incelenmektedir (bkz. [15], [16], [17], [18]).

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen Doç.Dr. Halik HÜSEYİNOV'a ve Arş.Gör. Serkan DÜZCE'ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

R	:	gerçel sayılar kümesi
R^n	:	n boyutlu Euclidean uzayı
$\| x \|$	:	n boyutlu x vektörünün Euclidean normu
$< x, y >$	:	n boyutlu x ve y vektörlerinin iç çarpımı
B	:	R^n uzayında merkezi orijinde olan birim küre
$B(x_*, r)$	:	R^n uzayında merkezi x_* noktasında, yarıçapı r olan küre
$\int_a^b f(x)\, dx$	:	f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki Lebesgue integrali
$\mu(A)$	:	A kümesinin Lebesgue ölçümü
$\mu^+(A)$	:	A kümesinin dış ölçümü
$f(A)$	:	A kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü
$N(y)$	:	Banach indikatrisi
$g \circ f$	:	f ve g fonksiyonlarının bileşkesi
$V_\Delta(f)$	:	f fonksiyonunun Δ bölüntüsü üzere değişimi
$V_a^b(f)$	:	f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında tam değişimi
$\lambda(\Delta)$	:	Δ bölüntüsünün çapı
$\omega_{[a,b]}(f)$	:	f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki osilasyonu
$comp\ (R^n)$	:	R^n uzayının boş olmayan kompakt alt kümeleri uzayı
$\alpha(E, D)$	:	kompakt $E,\ D \subset R^n$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı
$V_\Delta(F)$	:	F küme değerli dönüşümünün Δ bölüntüsü üzere değişimi
$V_a^b(F)$	:	F küme değerli dönüşümünün $[a, b]$ aralığında tam değişimi

1. TAM DEĞİŞİMİ SONLU FONKSİYONLAR

1.1. Bazı temel tanım ve teoremler

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri sunacağız.

$E \subset R$ için $\mu(E)$ ve $\mu^{+}(E)$ ile, uygun olarak E kümesinin Lebesgue ölçümünü ve dış ölçümünü göstereceğiz.

Teorem 1.1.1. *$E \subset R$ ölçülebilir küme, $\mu(E) > 0$ olsun. O zaman $B \subset A$ olmak üzere, ölçülebilir olmayan B kümesi vardır.*

Teorem 1.1.2. *$E \subset R$ ölçülebilir küme, $\mu(E) > 0$ olsun. O zaman keyfi sabitlenmiş $\varepsilon > 0$ için*

$$\mu(E) - \varepsilon < \mu(A) < \mu(E)$$

olacak biçimde kapalı $A \subset E$ kümesi vardır.

Tanım 1.1.1. *$E \subset R$, M uzunlukları sıfırdan farklı kapalı aralıkların oluşturduğu kümeler sistemi olsun. Eğer keyfi $\varepsilon > 0$ ve $x \in E$ için $x \in S$, $\mu(S) < \varepsilon$ olacak biçimde $S \in M$ bulunuyorsa, E kümesi M kapalı aralıklar sistemi ile Vitali anlamında örtülebilirdir denir.*

Teorem 1.1.3. (D.Vitale) *$E \subset R$ sınırlı küme olsun. Varsayalım E kümesi M kapalı aralıklar sistemi ile Vitali anlamında örtülebilirdir. O zaman keyfi $\varepsilon > 0$ için, M kapalı aralıklar sisteminin*

$$\mu^{+}(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} S_k) < \varepsilon$$

ve keyfi ikişer kesişimleri boş olacak biçimde sonlu sayıda $S_1,\ S_2,\ \ldots,S_n$ *aralıkarı vardır.*

Teorem 1.1.4. $f(\cdot):[a,b]\to R$ *monoton (artan veya azalan) fonksiyon olsun. O zaman*

a) $f(\cdot)$ *fonksiyonunun* $[a,b]$ *aralığında süreksiz olduğu noktalar sayılabilirdir ve bu fonksiyonun süreksiz olduğu* $x_* \in [a,b]$ *noktasında* $\lim\limits_{x\to x_*+0} f(x)$ *ve* $\lim\limits_{x\to x_*-0} f(x)$ *limitleri vardır.*

b) $f(\cdot)$ *fonksiyonu* $[a,b]$ *aralığında hemen hemen türevlenebilirdir.*

Teorem 1.1.5. (B.Levi) $E\subset R$ *ölçülebilir küme,* $f_i(\cdot):E\to R,\ (i=1,2,...)$, *ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Keyfi* $x\in E$ *için*

$$0\le f_1(x)\le f_2(x)\le f_3(x)\le\ \ldots$$

ve

$$\lim_{i\to+\infty} f_i(x)=\varphi(x).$$

olduğunu varsayalım. O zaman

$$\lim_{i\to+\infty}\int_E f_i(x)=\int_E \varphi(x).$$

olur.

Teorem 1.1.6. (H.Lebesgue) $f_n(\cdot)$, $n=1,2,...$ *fonksiyonları* $[a,b]$ *aralığında tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar, hemen hemen* $x\in[a,b]$ *için* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\varphi(x)$ *olsun. Varsayalım keyfi* $n=1,2,...$ *ve* $x\in[a,b]$ *için* $\mid f_n(x)\mid\le g(x)$ *olacak biçimde* $[a,b]$ *aralığında integrallenebilir* $g(\cdot)$ *fonksiyonu var. O zaman*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \varphi(x)dx$$

1.2. Sonlu değişimli fonksiyonlar

$f(\cdot) : [a,b] \to R$ olsun. $[a,b]$ aralığının $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ bölüntüsünü alalım.

$$V_\Delta(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid$$

olsun.

Tanım 1.2.1. *$V_\Delta(f)$-in $[a,b]$ aralığının tüm mümkün bölüntüleri üzere supremumuna $f(\cdot)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında tam değişimi denir ve $V_a^b(f)$ ile gösterilir. Yani*

$$V_a^b(f) = \sup_\Delta V_\Delta(f).$$

Eğer $V_a^b(f) < +\infty$ ise, $f(\cdot)$ fonksiyonuna sonlu değişimi olan fonksiyon denir.

Önerme 1.2.1. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ monoton fonksiyon olsun. O zaman $V_a^b(f) < +\infty$.*

Kanıt. Önermeyi $f(\cdot)$ artan fonksiyon olduğu durumda ispatlayalım. $[a,b]$ aralığının keyfi $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ bölüntüsünü alalım. $f(\cdot)$ artan fonksiyon olduğundan, keyfi $k = 0, 1, ..., n-1$ için $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$ olur. Buradan keyfi $k = 0, 1, ..., n-1$ için $f(x_{k+1}) - f(x_k) \geq 0$ ve $\mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid = f(x_{k+1}) - f(x_k)$ olduğunu elde ederiz. Bu durumda

$$V_\Delta(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] = f(b) - f(a)$$

olur. $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ bölüntüsü, $[a,b]$ aralığının keyfi bölüntüsü olduğundan dolayı

$$V_a^b(f) = \sup_\Delta V_\Delta(f) = f(b) - f(a) < +\infty$$

olur. $f(\cdot)$ azalan fonksiyon olduğu durumda ispat benzerdir.

Şimdi Lipcshitz koşulunu sağlayan fonksiyonun tam değişiminin sonlu olduğunu gösterelim.

Tanım 1.2.2. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ olsun. Keyfi $x \in [a,b]$, $y \in [a,b]$ için*

$$| f(x) - f(y) | \leq L \mid x - y \mid$$

olacak biçimde $L \geq 0$ sayısı varsa, o zaman $f(\cdot)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlar denir.

Önerme 1.2.2. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu, L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlasın. O zaman $f(\cdot)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında tam değişimi sonludur.*

Kanıt. $[a,b]$ aralığının keyfi $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ bölüntüsünü alalım. O zaman $k = 0, 1, ..., n-1$ için $| f(x_{k+1}) - f(x_k) | \leq L(x_{k+1} - x_k)$ olur. Buradan

$$V_\Delta(f) = \sum_{k=0}^{n-1} | f(x_{k+1}) - f(x_k) | \leq \sum_{k=0}^{n-1} L(x_{k+1} - x_k) = L(b-a)$$

olduğunu elde ederiz. Son eşitsizlikten ise

$$V_a^b(f) = \sup_\Delta V_\Delta(f) \leq L(b-a) < +\infty$$

olduğu bulunur.

Her sürekli fonksiyonun tam değişimi sonlu olmayabilir. Bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 1.2.1. $f(\cdot) : [0,1] \to R$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde verilsin. Açıktır ki, $f(\cdot)$ fonksiyonu keyfi $x \in (0,1)$ noktasında sürekli, $x = 1$ noktasında ise soldan süreklidir.

Şimdi $x = 0$ noktasında $f(\cdot)$ fonksiyonunun sağdan sürekli olduğunu gösterelim. Gerçekten, keyfi $x \in (0,1]$ için $| \cos \frac{\pi}{x} | \leq 1$ olduğundan, $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to +0} x \cdot \cos \dfrac{\pi}{x} = 0 = f(0)$ olur. Yani, $f(\cdot)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sağdan süreklidir.

Gösterelim ki, $f(\cdot)$ fonksiyonun $[0,1]$ aralığında tam değişimi sonlu değildir.

$[0,1]$ aralığının $\Delta^{(n)} = \{0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < ... < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1\}$ bölüntüsünü alalım. $x_0 = 0$, $x_i = \frac{1}{2n-i+1}$, $i = 1, 2, ..., 2n$, olsun. O zaman $\Delta^{(n)} = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = 1\}$ olur.

Şimdi

$$V_{\Delta^{(n)}} = \mid f(x_1) - f(x_0) \mid + \sum_{i=1}^{2n-1} \mid f(x_{i+1}) - f(x_i) \mid \tag{1.2.1}$$

değerini hesaplayalım. $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2n}$ olduğundan,

$$\mid f(x_1) - f(x_0) \mid = \mid \frac{1}{2n} \cos \frac{\pi}{\frac{1}{2n}} - 0 \mid = \frac{1}{2n} \cos 2n\pi = \frac{1}{2n} \tag{1.2.2}$$

olur.

Şimdi $i = 1, 2, ..., 2n$ için $\mid f(x_{i+1}) - f(x_i) \mid$'i hesaplayalım. Varsayalım i çift sayıdır, yani $i = 2k$, $(k = 1, 2, ..., n)$. O zaman $x_i = \frac{1}{2n-i+1} = \frac{1}{2n-2k+1}$, $x_{i+1} = \frac{1}{2n-(i+1)+1} = \frac{1}{2n-2k}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \mid f(x_{i+1}) - f(x_i) \mid &= \mid x_{i+1} \cos \tfrac{\pi}{x_{i+1}} - x_i \cos \tfrac{\pi}{x_i} \mid = \\ &= \mid \tfrac{1}{2n-2k} \cos \tfrac{\pi}{\frac{1}{2(n-k)}} - \tfrac{1}{2n-2k+1} \cos \tfrac{\pi}{\frac{1}{2(n-k)+1}} \mid = \\ &= \mid \tfrac{1}{2n-2k} \cos 2(n-k) \cdot \pi - \tfrac{1}{2n-2k+1} \cos(2(n-k) \cdot \pi + \pi) \mid = \\ &= \tfrac{1}{2n-2k} + \tfrac{1}{2n-2k+1} = \tfrac{1}{2n-i} + \tfrac{1}{2n-i+1} \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

olduğunu elde ederiz. Şimdi i'nin tek sayı olduğunu varsayalım, yani $i = 2k - 1$, $(k = 1, 2, ..., n)$, olsun. O zaman $x_i = \frac{1}{2n-i+1} = \frac{1}{2n-2k+2}$, $x_{i+1} = \frac{1}{2n-(i+1)+1} = \frac{1}{2n-2k+1}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \mid f(x_{i+1}) - f(x_i) \mid &= \mid x_{i+1} \cos \tfrac{\pi}{x_{i+1}} - x_i \cos \tfrac{\pi}{x_i} \mid = \\ &= \mid \tfrac{1}{2n-2k+1} \cos \tfrac{\pi}{\frac{1}{2(n-k)+1}} - \tfrac{1}{2n-2k+2} \cos \tfrac{\pi}{\frac{1}{2(n-k+1)}} \mid = \\ &= \mid \tfrac{1}{2n-2k+1} \cos(2(n-k) \cdot \pi + \pi) - \tfrac{1}{2n-2k+2} \cos 2(n-k+1) \cdot \pi \mid = \\ &= \mid -\tfrac{1}{2n-2k+1} - \tfrac{1}{2n-2k+2} \mid = \tfrac{1}{2n-2k+1} + \tfrac{1}{2n-2k+2} = \tfrac{1}{2n-i} + \tfrac{1}{2n-i+1} \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

olduğunu elde ederiz. O halde, (1.2.3) ve (1.2.4)'ten, keyfi $i = 1, 2, ..., 2n$ için

$$\mid f(x_{i+1}) - f(x_i) \mid = \frac{1}{2n-i} + \frac{1}{2n-i+1} \tag{1.2.5}$$

olduğu bulunur. Bu durumda, (1.2.1), (1.2.2) ve (1.2.5)'den

$$V_{\Delta^{(n)}} = \mid f(x_1) - f(x_0) \mid + \sum_{i=1}^{2n-1} \mid f(x_{i+1}) - f(x_i) \mid =$$

$$= \frac{1}{2n} + \sum_{i=1}^{2n-1} [\frac{1}{2n-i} + \frac{1}{2n-i+1}] > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

olur. Son eşitsizlikten,

$$V_0^1(f) = \sup_{\Delta} V_{\Delta}(f) \geq \sup_{n=1,2,...} V_{\Delta^{(n)}}(f) >$$

$$> \sup_{n=1,2,...} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

olduğunu elde ederiz. Böylece, sürekli $f(\cdot) : [0,1] \to R$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki tam değişiminin sonlu olmadığını gördük.

Önerme 1.2.3. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonun tam değişimi sonlu olsun. O zaman keyfi $x \in [a,b]$ için $| f(x) | \leq r$ olacak biçimde $r > 0$ sayısı vardır.*

Kanıt. $V_a^b(f) = m$ olsun. Keyfi $x \in (a,b]$ alalım ve sabitleyelim. Şimdi $[a,b]$ aralığının $\Delta = \{a < x \leq b\}$ bölüntüsünü alalım. O zaman

$$V_{\Delta}(f) = | f(x) - f(a) | + | f(b) - f(x) | \leq \sup_{\Delta} V_{\Delta}(f) = V_a^b(f) = m$$

olur. Yani

$$| f(x) - f(a) | + | f(b) - f(x) | \leq m.$$

Buradan $| f(x) - f(a) | \leq m$ ve $- | f(a) | - m \leq f(x) \leq | f(a) | + m$ elde edilir. $r = | f(a) | + m$ dersek, $| f(x) | \leq r$ olduğu bulunur. $x \in [a,b]$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, önerme ispatlanır.

Şimdi tam değişimi sonlu olan fonksiyonların, toplamlarının, farklarının ve çarpımlarının da tam değişimlerinin sonlu olduğunu görelim.

Önerme 1.2.4. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$, $g(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonlarının tam değişimi sonlu olsun. O zaman $f(\cdot) + g(\cdot)$, $f(\cdot) - g(\cdot)$, $f(\cdot) \cdot g(\cdot)$ fonksiyonlarının da tam değişimi sonludur.*

Kanıt. $V_a^b(f) = v_1 < +\infty$, $V_a^b(g) = v_2 < +\infty$ olsun.

$[a, b]$ aralığının keyfi $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ bölüntüsünü alalım. O zaman

$$V_\Delta(f+g) = \sum_{k=0}^{n-1} | f(x_{k+1}) + g(x_{k+1}) - f(x_k) - g(x_k) | \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} | f(x_{k+1}) - f(x_k) | + \sum_{k=0}^{n-1} | g(x_{k+1}) - g(x_k) | = V_\Delta(f) + V_\Delta(g)$$

Buradan

$$V_a^b(f+g) = \sup_\Delta V_\Delta(f+g) \leq \sup_\Delta V_\Delta(f) + \sup_\Delta V_\Delta(g) =$$

$$= V_a^b(f) + V_a^b(g) = v_1 + v_2 < +\infty$$

olur.

Şimdi $f(\cdot) - g(\cdot)$ fonksiyonunun tam değişiminin sonlu olduğunu ispatlayalım.

$[a, b]$ aralığının keyfi $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ bölüntüsünü alalım. O zaman

$$V_\Delta(f-g) = \sum_{k=0}^{n-1} | f(x_{k+1}) - g(x_{k+1}) - (f(x_k) - g(x_k)) | \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} | f(x_{k+1}) - f(x_k) | + \sum_{k=0}^{n-1} | g(x_{k+1}) - g(x_k) | = V_\Delta(f) + V_\Delta(g)$$

Buradan

$$V_a^b(f+g) = \sup_\Delta V_\Delta(f+g) \leq \sup_\Delta V_\Delta(f) + \sup_\Delta V_\Delta(g) =$$

$$= V_a^b(f) + V_a^b(g) = v_1 + v_2 < +\infty$$

olur.

Şimdi $f(\cdot) \cdot g(\cdot)$ fonksiyonunun tam değişiminin sonlu olduğunu ispatlayalım. $f(\cdot)$ ve $g(\cdot)$ fonksiyonlarının tam değişimleri sonlu olduğundan, önerme 1.2.3'ten keyfi $x \in [a, b]$ için $| f(x) | \leq r_1$, $| g(x) | \leq r_2$ olacak biçimde $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ sayıları bulunur.

$[a, b]$ aralığının keyfi $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ bölüntüsünü alalım. O zaman

$$V_\Delta(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n-1} | f(x_{k+1}) \cdot g(x_{k+1}) - f(x_k) \cdot g(x_k)) | =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \mid f(x_{k+1}) \cdot g(x_{k+1}) - f(x_k) \cdot g(x_{k+1}) + f(x_k) \cdot g(x_{k+1}) - f(x_k) \cdot g(x_k)) \mid \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \mid g(x_{k+1}) \mid \cdot \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid + \sum_{k=0}^{n-1} \mid f(x_k) \mid \cdot \mid g(x_{k+1}) - g(x_k) \mid \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} r_2 \cdot \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid + \sum_{k=0}^{n-1} r_1 \cdot \mid g(x_{k+1}) - g(x_k) \mid = r_2 \cdot V_\Delta(f) + r_1 \cdot V_\Delta(g)$$

Buradan

$$V_a^b(f \cdot g) = \sup_\Delta V_\Delta(f \cdot g) \leq r_2 \cdot \sup_\Delta V_\Delta(f) + r_1 \cdot \sup_\Delta V_\Delta(g) =$$

$$= r_2 \cdot V_a^b(f) + r_1 \cdot V_a^b(g) = r_2 \cdot v_1 + r_1 \cdot v_2 < +\infty$$

olur.

Önerme ispatlandı.

Önerme 1.2.5. *$f(\cdot) : [a, b] \to R$, $g(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonlarının tam değişimi sonlu, keyfi $x \in [a, b]$ için $g(x) \geq \alpha > 0$ olsun. O zaman $\frac{f(\cdot)}{g(\cdot)}$ fonksiyonunun da tam değişimi sonludur.*

Kanıt. $V_a^b(f) = v_1 < +\infty$, $V_a^b(g) = v_2 < +\infty$ olsun.

$f(\cdot)$ ve $g(\cdot)$ fonksiyonlarının tam değişimleri sonlu olduğundan, önerme 1.2.3'ten keyfi $x \in [a, b]$ için $\mid f(x) \mid \leq r_1$, $\mid g(x) \mid \leq r_2$ olacak biçimde $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ sayıları bulunur.

$[a, b]$ aralığının keyfi $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ bölüntüsünü alalım. Keyfi $x \in [a, b]$ için $g(x) \geq \alpha > 0$ olduğundan,

$$V_\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{f(x_{k+1})}{g(x_{k+1})} - \frac{f(x_k)}{g(x_k)} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{f(x_{k+1})g(x_k) - g(x_{k+1})f(x_k)}{g(x_{k+1})g(x_k)} \right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{f(x_{k+1})g(x_k) - f(x_k)g(x_k) + f(x_k)g(x_k) - g(x_{k+1})f(x_k)}{g(x_{k+1})g(x_k)} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mid g(x_k) \mid \cdot \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid + \mid f(x_k) \mid \cdot \mid g(x_{k+1}) - g(x_k) \mid}{\alpha^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha^2} r_2 \sum_{k=0}^{n-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid + \frac{1}{\alpha^2} r_1 \sum_{k=0}^{n-1} \mid g(x_{k+1}) - g(x_k) \mid =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} r_2 V_\Delta(f) + \frac{1}{\alpha^2} r_1 V_\Delta(g)$$

Buradan

$$V_a^b(\frac{f}{g}) = \sup_\Delta V_\Delta(\frac{f}{g}) \leq \frac{1}{\alpha^2} r_2 \cdot \sup_\Delta V_\Delta(f) + \frac{1}{\alpha^2} r_1 \cdot \sup_\Delta V_\Delta(g) =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} r_2 \cdot V_a^b(f) + \frac{1}{\alpha^2} r_1 \cdot V_a^b(g) = \frac{1}{\alpha^2} r_2 \cdot v_1 + \frac{1}{\alpha^2} r_1 \cdot v_2 < +\infty$$

olur. Önerme ispatlandı.

Önerme 1.2.6. *$f(\cdot) : [a, b] \to R$, $a < c < b$ olsun. O zaman*

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Kanıt. $[a, c]$ aralığının $\Delta_1 = \{a = y_0 < y_1 < ... < y_m = c\}$, $[c, b]$ aralığının $\Delta_2 = \{c = z_0 < z_1 < ... < z_n = b\}$ bölüntülerini alalım ve

$$V_{\Delta_1}^1(f) = \sum_{k=0}^{m-1} \mid f(y_{k+1}) - f(y_k) \mid, \quad V_{\Delta_2}^2(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \mid f(z_{k+1}) - f(z_k) \mid$$

toplamlarını oluşturalım. $[a, b]$ aralığının $\Delta_* = \{a = y_0 < y_1 < ... < y_m < z_1 < ... < z_n = b\}$ bölüntüsünü alalım. O halde

$$V_{\Delta_*}(f) = \sum_{k=0}^{m-1} \mid f(y_{k+1}) - f(y_k) \mid + \sum_{k=1}^{n-1} \mid f(z_{k+1}) - f(z_k) \mid +$$

$$+ \mid f(z_1) - f(y_m) \mid = V_{\Delta_1}^1(f) + V_{\Delta_2}^2(f)$$

olur. Buradan

$$V_{\Delta_1}^1(f) + V_{\Delta_2}^2(f) \leq \sup_\Delta V_\Delta(f) = V_a^b(f) \tag{1.2.6}$$

olduğunu elde ederiz. (1.2.6)'da supremum $[a, b]$ aralığının keyfi bölüntüleri üzeredir. Şimdi (1.2.6)'da, Δ_1 ve Δ_2 uygun olarak $[a, c]$ ve $[c, b]$ aralıklarının keyfi bölüntüleri olduğundan, (1.2.6)'dan

$$\sup_{\Delta_1} V_{\Delta_1}^1(f) + \sup_{\Delta_2} V_{\Delta_2}^2(f) \leq V_a^b(f) \tag{1.2.7}$$

bulunur. Burada Δ_1, $[a,c]$ aralığının keyfi bölüntüsü, Δ_2, $[c,b]$ aralığının keyfi bölüntüsüdür. (1.2.7)'den

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f) \tag{1.2.8}$$

olduğu elde edilir. Şimdi

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) \geq V_a^b(f) \tag{1.2.9}$$

olduğunu gösterelim. Herhangi bir $0 < m < n$ için $c = x_m$ olacak biçimde, $[a,b]$ aralığının bir keyfi $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ bölüntüsünü alalım. Yani c noktası, Δ bölüntüsünün bir bölüntü noktası olsun. O zaman

$$V_\Delta(f) = \sum_{k=0}^{m-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid + \sum_{k=m}^{n-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid \tag{1.2.10}$$

olur. $\Delta_1 = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_m = c\}$, $[a,c]$ aralığının, $\Delta_2 = \{c = x_m < x_{m+1} < ... < x_n = b\}$, $[c,b]$ aralığının bölüntüleridir. O zaman (1.2.10)'dan

$$V_\Delta(f) = V_{\Delta_1}^1(f) + V_{\Delta_2}^2(f)$$

olduğunu elde ederiz. Buradan ise

$$V_\Delta(f) \leq \sup_{\Delta_1^*} V_{\Delta_1^*}^1(f) + \sup_{\Delta_2^*} V_{\Delta_2^*}^2(f) \tag{1.2.11}$$

bulunur. Burada Δ_1^*, $[a,c]$ aralığının keyfi bölüntüsü, Δ_2^*, $[c,b]$ aralığının keyfi bölüntüsüdür. (1.2.11)'den

$$V_\Delta(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f) \tag{1.2.12}$$

olur.

Şimdi c noktasının, $[a,b]$ aralığının $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ bölüntüsünün bölüntü noktası olmadığını varsayalım. Yani bir m için $x_m < c < x_{m+1}$ olduğunu varsayalım. $[a,b]$ aralığının $\Delta^1 = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_m < c < x_{m+1} < ... < x_n = b\}$ bölüntüsünü alalım. O zaman

$$V_\Delta(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid = \sum_{k=0}^{m-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid +$$

$$+\mid f(x_{m+1})-f(x_m)\mid+\sum_{k=1}^{n-m-1}\mid f(x_{m+k+1})-f(x_{m+k})\mid\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{m-1}\mid f(x_{k+1})-f(x_k)\mid+\mid f(c)-f(x_m)\mid+$$

$$+\mid f(x_{m+1})-f(c)\mid+\sum_{k=1}^{n-m-1}\mid f(x_{m+k+1})-f(x_{m+k})\mid=V_{\Delta^1}(f)$$

Buradan

$$V_{\Delta}(f)\leq V_{\Delta^1}(f) \tag{1.2.13}$$

olur. c noktası, Δ^1 bölüntüsünün bölüntü noktası olduğundan dolayı, (1.2.12)'ye benzer olarak

$$V_{\Delta^1}(f)\leq V_a^c(f)+V_c^b(f) \tag{1.2.14}$$

olur. (1.2.13) ve (1.2.14)'ten

$$V_{\Delta}(f)\leq V_a^c(f)+V_c^b(f) \tag{1.2.15}$$

bulunur. (1.2.12) ve (1.2.15)'ten, $[a,b]$ aralığının keyfi Δ bölüntüsü için

$$V_{\Delta}(f)\leq V_a^c(f)+V_c^b(f) \tag{1.2.16}$$

olur. Δ bölüntüsü, $[a,b]$ aralığının keyfi Δ bölüntüsü olduğundan dolayı, (1.2.16)'dan

$$\sup_{\Delta} V_{\Delta}(f)\leq V_a^c(f)+V_c^b(f) \tag{1.2.17}$$

elde ederiz. $\sup\limits_{\Delta} V_{\Delta}(f)=V_a^b(f)$ olduğundan, (1.2.17)'den (1.2.9)'un doğruluğunu elde ederiz. (1.2.8) ve (1.2.9)'dan ise önerme ispatlanır.

Önerme 1.2.6'dan aşağıdaki sonuçlar bulunur.

Sonuç 1.2.1. $f(\cdot):[a,b]\to R$, $a<c<b$ *olsun. Eğer* $f(\cdot)$ *fonksiyonunun* $[a,b]$ *aralığıda tam değişimi sonlu ise, o zaman bu fonksiyonun* $[a,c]$ *ve* $[c,b]$ *aralıklarındaki tam değişimleri de sonludur. Ve tersine, eğer* $f(\cdot)$ *fonksiyonun* $[a,c]$ *ve* $[c,b]$ *aralıklarındaki tam değişimleri sonlu ise, o zaman bu fonksiyonunun* $[a,b]$ *aralığıdaki tam değişimi de sonludur.*

Sonuç 1.2.2. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$, $a = c_0 < c_1 < c_2 < ... < c_n = b$, $f(\cdot)$ fonksiyonu $[c_i, c_{i+1}]$ $(i = 0,1,...,n-1)$ aralıklarında monoton (artan veya azalan) fonksiyon olsun. O zaman $f(\cdot)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığıdaki tam değişimi sonludur.*

Kanıt. $f(\cdot)$ fonksiyonu $[c_i, c_{i+1}]$ $(i = 0,1,...,n-1)$ aralığında monoton olduğundan dolayı, önerme 1.2.1'e göre, keyfi $i = 0,1,...,n$ için

$$V_{c_i}^{c_{i+1}}(f) = \mid f(c_{i+1}) - f(c_i) \mid = r_i < +\infty$$

olur. Önerme 1.2.6.'ya göre $V_a^b(f) = \sum_{i=0}^{m-1} V_{c_i}^{c_{i+1}}(f)$. O zaman $V_a^b(f) = \sum_{i=0}^{m-1} r_i < +\infty$ elde ederiz.

Önerme 1.2.7. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$, $x \in [a,b]$ için $\varphi(x) = V_a^x(f)$ olsun. O zaman $\varphi(\cdot)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında monoton artan fonksiyondur.*

Kanıt. $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ olsun. Şimdi $[a, x_2]$ aralığının $\Delta = \{a = y_0 < y_1 < ... < y_k = x_1 < y_{k+1} < ... < y_n = x_2\}$ bölüntüsünü alalım. Yani x_1 noktası $[a, x_2]$ aralığının Δ bölüntüsünün bölüntü noktasıdır. Bu durumda $\Delta^1 = \{a = y_0 < y_1 < ... < y_k = x_1\}$, $[a, x_1]$ aralığının bölüntüsü olur. Açıktır ki

$$V_{\Delta_1}(f) = \sum_{i=0}^{k-1} \mid f(y_{i+1}) - f(y_i) \mid \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mid f(y_{i+1}) - f(y_i) \mid = V_\Delta(f)$$

Buradan

$$V_{\Delta_1}(f) \leq \sup_{\Delta} V_\Delta(f) = V_a^{x_2}(f)$$

Aynı zamanda Δ^1, $[a, x_1]$ aralığının keyfi bir bölüntüsü olduğundan, son eşitsizlikten

$$V_a^{x_1}(f) = \sup_{\Delta_1} V_{\Delta_1}(f) \leq V_a^{x_2}(f)$$

olur. Önerme ispatlandı.

Şimdi $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunun, $[a,b]$ aralığında tam değişiminin sonlu olması için gerek ve yeter koşul sunalım.

Teorem 1.2.1. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığıda tam değişiminin* *sonlu olması için gerek ve yeter koşul, $f(\cdot)$ fonksiyonunun iki monoton artan fonksiyonun farkı olarak yazılabilmesidir.*

Kanıt. Keyfi $x \in [a,b]$ için $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ ve $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ fonksiyonlarının $[a,b]$ aralığında monoton artan olduklarını varsayalım. $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında monoton artan olduklarından, önerme 1.2.1'e göre, bu fonksiyonların $[a,b]$ aralığındaki tam değişimleri sonludur. O zaman önerme 1.2.4'e göre $f(\cdot) = f_1(\cdot) - f_2(\cdot)$ fonksiyonunun da $[a,b]$ aralığındaki tam değişimi sonludur.

Şimdi $f(\cdot)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında tam değişiminin sonlu olduğunu varsayalım. $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında monoton artan olmak üzere, $f(\cdot) = f_1(\cdot) - f_2(\cdot)$ gibi gösterilebileceğini ispatlayalım.

$x \in [a,b]$ için

$$\pi(x) = \begin{cases} V_a^x(f) & x \in (a,b] \\ 0 & x = a \end{cases}$$

olmak üzere $\pi(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunu tanımlayalım. Önerme 1.2.7.'ye göre $\pi(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu monoton artan fonksiyondur.

Şimdi $x \in [a,b]$ için

$$v(x) = \pi(x) - f(x) \tag{1.2.18}$$

olmak üzere $v(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunu tanımlayalım. $v(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında monoton artan fonksiyon olduğunu gösterelim. $a \le x < y \le b$ olsun. O zaman (1.2.18) ve önerme 1.2.6'dan

$$v(y) = \pi(y) - f(y) = V_a^y(f) - f(y) =$$

$$= V_a^x(f) + V_x^y(f) - f(y) = \pi(x) + V_x^y(f) - f(y) =$$

$$= v(x) + V_x^y(f) + f(x) - f(y)$$

Buradan

$$v(y) - v(x) = V_x^y(f) - [f(y) - f(x)] \tag{1.2.19}$$

elde ederiz. $V_x^y(f) \ge f(y) - f(x)$ olduğundan, (1.2.19)'dan $v(y) - v(x) \ge 0$, yani $v(y) \ge v(x)$ olur. Böylece, $v(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında monoton artan fonksiyon olduğunu gördük. Şimdi (1.2.18)'den, $\pi(\cdot) : [a,b] \to R$ ve $v(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında monoton artan olmak üzere, $f(x) = \pi(x) - v(x)$ olur. Teorem ispatlandı.

Bu teoremden, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 1.2.3. $f(\cdot) : [a,b] \to R$ *fonksiyonunun* $[a,b]$ *aralığında tam değişimi sonlu olsun. O zaman hemen hemen her* $x \in [a,b]$ *için* $\frac{df(x)}{dx}$ *türevi vardır ve* $x \to \frac{df(x)}{dx}$ *fonksiyonu* $[a,b]$ *aralığında integrallenebilirdir.*

Kanıt. $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında tam değişimi sonlu olduğundan, teorem 1.2.1'e göre $\pi(\cdot) : [a,b] \to R$ ve $v(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında monoton artan olmak üzere, $f(\cdot) = \pi(\cdot) - v(\cdot)$ olur.

$\pi(\cdot) : [a,b] \to R$ ve $v(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında monoton artan olduğundan, teorem 1.1.4'e göre, bu fonksiyonlar $[a,b]$ aralığında hemen hemen türevlenebilirdirler ve $x \to \frac{d\pi(x)}{dx}$, $x \to \frac{dv(x)}{dx}$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdirler. O zaman $f(\cdot) = \pi(\cdot) - v(\cdot)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında hemen hemen türevlenebilirdir ve $x \to \frac{df(x)}{dx} = \frac{d\pi(x)}{dx} - \frac{dv(x)}{dx}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdir.

Sonuç 1.2.4. $f(\cdot) : [a,b] \to R$ *fonksiyonunun* $[a,b]$ *aralığında tam değişimi sonlu olsun. O zaman* $f(\cdot) : [a,b] \to R$ *fonksiyonunun* $[a,b]$ *aralığında süreksizlik noktaları sayılabilirdir ve* $f(\cdot)$ *fonksiyonunun sürekli olmadığı* $x_0 \in (a,b)$ *noktasında* $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ *ve* $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ *limitleri var.*

Kanıt. $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında tam değişimi sonlu olduğundan, teorem 1.2.1.'e göre $\pi(\cdot) : [a,b] \to R$ ve $v(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında monoton artan olmak üzere, $f(\cdot) = \pi(\cdot) - v(\cdot)$ olur.

$\pi(\cdot) : [a,b] \to R$ ve $v(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında monoton artan olduğundan, teorem 1.1.4'e göre, bu fonksiyonların $[a,b]$ aralığında süreksiz olabilecekleri noktalar sayılabilirdir. O zaman $f(\cdot) = \pi(\cdot) - v(\cdot)$ fonksiyonunun da $[a,b]$ aralığında süreksizlik noktaları sayılabilirdir.

$\pi(\cdot) : [a,b] \to R$ ve $v(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında monoton artan olduğundan, bu fonksiyonların $x_0 \in (a,b)$ noktasında sağ ve sol limitleri, yani $\lim_{x\to x_0+0}\pi(x)$, $\lim_{x\to x_0-0}\pi(x)$ ve $\lim_{x\to x_0+0}v(x)$, $\lim_{x\to x_0-0}v(x)$ limitleri var. O zaman

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0}\pi(x) - \lim_{x\to x_0+0}v(x),$$

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0}\pi(x) - \lim_{x\to x_0-0}v(x)$$

olur.

1.3. Helli prensipi

Bu bölümde, uygulamalarda önemli yer almakta olan Helli teoremini ispatlayacayız. Önce iki yardımcı önermeyi ispatlayalım.

Önerme 1.3.1. *$K > 0$, H kümesi keyfi $x \in [a,b]$ için $\mid f(x) \mid \leq K$ koşulunu sağlayan $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonlar ailesi, $E \subset [a,b]$ sayılabilir küme olsun. O zaman keyfi $n = 1,2,...$ için $g_n(\cdot) \in H$ ve keyfi $x \in E$ için $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi yakınsak olacak biçimde $\{g_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır.*

Kanıt. E kümesi sayılabilir olduğundan, $E = \{x_1, x_2, ..., x_k, ...\}$ olduğunu varsayalım. $H_1 = \{f(x_1) : f(\cdot) \in E\}$ olsun. O zaman keyfi $z \in H_1$ için $\mid z \mid \leq K$ olur. Bu durunda H_1 kümesinden yakınsak

$$f_1^{(1)}(x_1), f_2^{(1)}(x_1), ..., f_n^{(1)}(x_1), ...$$

alt dizi seçilebilir.

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(1)}(x_1) = A_1.$$

olduğunu varsayalım. Şimdi $x_2 \in E$ alalım ve

$$f_1^{(1)}(x_2), f_2^{(1)}(x_2), ..., f_n^{(1)}(x_2), ...$$

dizisine bakalım. Keyfi n için $f_n^{(1)}(\cdot) \in H$ olduğundan, $| f_n^{(1)}(x_2) | \leq K$ olur. O zaman $\{f_n^{(1)}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin yakınsak bir $\{f_n^{(2)}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ alt dizisi var.

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}(x_2) = A_2.$$

olduğunu varsayalım. Böylece bu prosedür devam ettirilerek $x_k \in E$ için yakınsak $\{f_n^{(k)}(x_k)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi bulunur.

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x_k) = A_k$$

olduğunu varsayalım. Açıktır ki keyfi k için $\{f_n^{(k)}(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi $\{f_n^{(k-1)}(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisinin, $\{f_n^{(k)}(x_{k-1})\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\{f_n^{(k-1)}(x_{k-1})\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin alt dizisidir ve

$$f_1^{(1)}(x_1), f_2^{(1)}(x_1), ..., f_n^{(1)}(x_1), ... \to A_1$$

$$f_1^{(2)}(x_2), f_2^{(2)}(x_2), ..., f_n^{(2)}(x_2), ... \to A_2$$

....

$$f_1^{(k)}(x_k), f_2^{(k)}(x_k), ..., f_n^{(k)}(x_k), ... \to A_k$$

....

olur. Şimdi $\{f_n^{(n)}(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ diagonal fonksiyonlar dizisi alalım. Açıktır ki keyfi $n = 1, 2, ...$ için $f_n^{(n)}(\cdot) \in H$.

Açıktır ki, keyfi k için $\{f_n^{(k)}(x_{k-1})\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\{f_n^{(k-1)}(x_{k-1})\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin alt dizisi olduğundan, keyfi $x_k \in E$ için $\{f_n^{(n)}(x_k)\}_{n=k}^{\infty}$ dizisi $\{f_n^{(k)}(x_k)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin alt dizisi olur. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(n)}(x_k) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x_k) = A_k$$

olur. $g_n(\cdot) = f_n^{(n)}(\cdot)$ dersek, önerme ispatlanır.

Önerme 1.3.2. *$K > 0$, F kümesi keyfi $x \in [a,b]$ icin $\mid f(x) \mid \leq K$ koşulunu sağlayan ve $[a,b]$ aralığında monoton artan $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonlar ailesi olsun. O zaman keyfi $n = 1, 2, ...$ için $f_n(\cdot) \in F$ olmak üzere, keyfi $x \in [a,b]$ için $n \to \infty$ iken $f_n(x) \to f_*(x)$ olacak biçimde $\{f_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ve monoton artan $f_*(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu vardır.*

Kanıt. F kümesine önerme 1.3.1'i uygulayalım. Sayılabilir $E \subset [a,b]$ kümesi olarak $[a,b]$ aralığındaki tüm rasyonel sayıları ve a'yı (eğer a irrasyonel ise) alalım. Önerme 1.3.1'e göre, keyfi $m = 1, 2, ...$ için $g_m(\cdot) \in F$, keyfi $x_k \in E$ için $\{g_m(x_k)\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi yakınsak olacak şekilde $\{g_m(\cdot)\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi vardır.

$$\varphi(x_k) = \lim_{m \to \infty} g_m(x_k)$$

olsun. Keyfi $x_k \in E$, $x_i \in E$ için $x_k \leq x_i$ iken,

$$\varphi(x_k) \leq \varphi(x_i)$$

olduğunu gösterelim.

Keyfi $m = 1, 2, ...$ için $g_m(\cdot) \in F$, $x_k \leq x_i$ iken

$$g_m(x_k) \leq g_m(x_i)$$

olduğu açıktır. Bu durumda

$$\varphi(x_k) = \lim_{m \to \infty} g_m(x_k) \leq \lim_{m \to \infty} g_m(x_i) = \varphi(x_i)$$

olur.

Şimdi $\varphi(\cdot)$ fonksiyonunu tüm $[a,b]$ aralığında tanımlayalım. İrrasyonel $x \in (a,b]$ noktası için

$$\varphi(x) = \sup_{x_k < x, x_k \in E} \varphi(x_k)$$

olsun. Bu durumda $\varphi(\cdot)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında artan fonksiyondur. Gerçekten, $x_* \in [a,b]$, $x^* \in [a,b]$ ve $x_* < x^*$ iken

$$\varphi(x_*) \leq \varphi(x^*) \tag{1.3.1}$$

olduğunu gösterelim.

Eğer x_* ve x^* noktalarının her ikisi de rasyonel ise, (1.3.1) eşitsizliğinin doğruluğunu gördük.

Şimdi x_* rasyonel, x^* irrasyonel olsun. O halde $y \in (x_*, x^*)$ olacak biçimde rasyonel y noktaları vardır ve x_*, y noktalarının her ikisi rasyonel, $x_* < y$ olduğundan, $\varphi(x_*) \leq \varphi(y)$ olur. $y \in (x_*, x^*)$ keyfi sabitlenmiş rasyonel sayı olduğundan, buradan

$$\varphi(x_*) \leq \sup_{x_k < x^*, x_k \in E} \varphi(x_k)$$

elde edilir. Buradan, $\varphi(\cdot)$ fonksiyonunun irrasyonel noktalardaki tanımından (1.3.1)'in doğruluğu bulunur.

Şimdi x_* irrasyonel, x^* rasyonel olsun. Eğer $x_* = a$ ise, o zaman $x_* = a \in E$ olduğundan, $\varphi(x_*) \leq \varphi(x^*)$ olur. $x_* > a$ olsun. $y < x_*$ olacak biçimde keyfi rasyonel y noktası alalım. O halde y, x^* rasyonel, $y < x^*$ olduğundan dolayı, $\varphi(y) \leq \varphi(x^*)$ elde ederiz. $y < x_*$ keyfi sabitlenmiş rasyonel nokta olduğundan, buradan

$$\sup_{x_k < x_*, x_k \in E} \varphi(x_k) \leq \varphi(x^*)$$

olduğu elde edilir. Buradan ise, $\varphi(\cdot)$ fonksiyonunun irrasyonel noktalardaki tanımından (1.3.1)'in doğruluğu bulunur.

Şimdi x_* ve x^* noktalarının her ikisinin irrasyonel olduğunu kabul edelim. Keyfi rasyonel $y \in (x_*, x^*)$ noktası alalım. O zaman keyfi rasyonel $x_k < x_*$ için $x_k < y$ olur ve buradan x_k ve y noktalarının her ikisi rasyonel olduğundan $\varphi(x_k) \leq \varphi(y)$ elde ederiz. $x_k < x_*$ keyfi sabitlenmiş rasyonel nokta olduğundan, buradan

$$\sup_{x_k < x_*, x_k \in E} \varphi(x_k) \leq \varphi(y)$$

olduğu elde edilir. Buradan ise, $\varphi(\cdot)$ fonksiyonunun irrasyonel noktalardaki tanımından

$$\varphi(x_*) \leq \varphi(y) \tag{1.3.2}$$

olduğu bulunur.

$y < x^*$ rasyonel nokta olduğundan keyvi rasyonel $x_k \in (y, x^*)$ rasyonel noktası için $\varphi(y) \leq \varphi(x_k)$ elde ederiz. Buradan

$$\varphi(y) \leq \sup_{x_k < x^*, x_k \in E} \varphi(x_k)$$

elde edilir. Buradan ise, $\varphi(\cdot)$ fonksiyonunun irrasyonel noktalardaki tanımından

$$\varphi(y) \leq \varphi(x^*) \tag{1.3.3}$$

olduğu bulunur. (1.3.2) ve (1.3.3) eşitsizliklerinden (1.3.1)'in doğruluğu elde edilir.

Böylece, $\varphi(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonunun monoton artan olduğunu gördük.

$\varphi(\cdot)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında monoton artan olduğundan, teorem 1.1.4'e göre, bu fonksiyonun $[a, b]$ aralığında süreksiz olduğu noktalar sayılabilirdir.

$x_* \in (a, b)$ noktası $\varphi(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonunun süreklilik noktası olsun.

$$\lim_{m \to \infty} g_m(x_*) = \varphi(x_*).$$

olduğunu gösterelim. $x_* \in (a, b)$, $\varphi(\cdot)$ fonksiyonu x_* noktasında sürekli olduğundan, E kümesi $[a, b]$ aralığındaki tüm rasyonel sayıları içerdiğinden dolayı, keyfi $\varepsilon > 0$ için $x_k < x_* < x_i$ ve

$$\begin{aligned} \varphi(x_*) - \tfrac{\varepsilon}{2} < \varphi(x_i) < \varphi(x_*) + \tfrac{\varepsilon}{2}, \\ \varphi(x_*) - \tfrac{\varepsilon}{2} < \varphi(x_k) < \varphi(x_*) + \tfrac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

olacak biçimde $x_k \in E$, $x_i \in E$ seçilebilir.

$x_k \in E$, $x_i \in E$ olduğundan dolayı

$$\lim_{m \to \infty} g_m(x_k) = \varphi(x_k), \quad \lim_{m \to \infty} g_m(x_i) = \varphi(x_i).$$

O zaman $\varepsilon > 0$ için, keyfi $m > N(\varepsilon)$ için

$$| g_m(x_k) - \varphi(x_k) | < \frac{\varepsilon}{2}, \quad | g_m(x_i) - \varphi(x_i) | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

olacak biçimde $N(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. Buradan $m > N(\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned} \varphi(x_k) - \tfrac{\varepsilon}{2} < g_m(x_k) < \varphi(x_k) + \tfrac{\varepsilon}{2}, \\ \varphi(x_i) - \tfrac{\varepsilon}{2} < g_m(x_i) < \varphi(x_i) + \tfrac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

olduğunu elde ederiz. (1.3.4) ve (1.3.5)'den keyfi $m > N(\varepsilon)$ için

$$\varphi(x_*) - \varepsilon < g_m(x_k), \quad g_m(x_i) < \varphi(x_*) + \varepsilon \tag{1.3.6}$$

olduğu bulunur.

$g_m(\cdot)$ fonksiyonları monoton artan, $x_k < x_i$ olduğundan, keyfi m için

$$g_m(x_k) \leq g_m(x_i). \tag{1.3.7}$$

O zaman (1.3.6) ve (1.3.7)'den $m > N(\varepsilon)$ için

$$\varphi(x_*) - \varepsilon < g_m(x_k) \leq g_m(x_i) < \varphi(x_*) + \varepsilon \tag{1.3.8}$$

olduğu elde edilir.

Keyfi m için $g_m(\cdot)$ fonksiyonları monoton artan, $x_k < x_* < x_i$ olduğundan, keyfi m için

$$g_m(x_k) \leq g_m(x_*) \leq g_m(x_i)$$

olur. O zaman buradan ve (1.3.8)'den $m > N(\varepsilon)$ için

$$\varphi(x_*) - \varepsilon < g_m(x_*) < \varphi(x_*) + \varepsilon \tag{1.3.9}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan, (1.3.9)'dan

$$\lim_{m \to \infty} g_m(x_*) = \varphi(x_*)$$

olduğu bulunur.

$x_* \in (a, b)$ noktası $\varphi(\cdot)$ fonksiyonunun sabitlenmiş keyfi süreklilik noktası olduğundan, $\varphi(\cdot)$ fonksiyonunun keyfi $x \in (a, b)$ süreklilik noktası için

$$\lim_{m \to \infty} g_m(x) = \varphi(x) \tag{1.3.10}$$

olduğu bulunur.

$\varphi(\cdot)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında monoton artan olduğundan, teorem 1.1.4'e göre, bu fonksiyonun $[a, b]$ aralığında süreksiz olduğu noktalar sayılabilirdir. a, b ve $\varphi(\cdot)$ fonksiyonunun (a, b) aralığında süreksiz olduğu noktaların oluşturduğu kümeyi P ile gösterelim. Açıktır ki, P kümesi sayılabilir kümedir ve (1.3.10) eşitliliği $x \in P$ noktaları için sağlanmayabilir.

$F_1 = \{g_m(\cdot) : [a, b] \to R : m = 1, 2, ...\}$ olsun. O zaman, keyfi $m = 1, 2, ...$, $x \in [a, b]$ için $| g_m(x) | \leq K$ ve $P \subset [a, b]$ kümesi sayılabilir küme olduğundan dolayı, önerme 1.2.1'i F_1 kümesine uygularsak, keyfi $x \in [a, b]$ için $| \psi(x) | \leq K$, keyfi $x \in P$ için $n \to \infty$ iken $g_{m_n}(x) \to \psi(x)$ olmak üzere, $\{g_m(\cdot)\}_{m=1}^{\infty}$ dizisinin $\{g_{m_n}(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ alt dizisi seçilebilir.

Şimdi $n = 1, 2, ...$ ve $x \in [a, b]$ için $f_n(x) = g_{m_n}(x)$,

$$f_*(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in [a, b] \setminus P \\ \psi(x) & x \in P \end{cases}$$

olsun. Açıktır ki $x \in [a, b]$ için $n \to \infty$ iken $f_n(x) \to f_*(x)$, $| f_*(x) | \leq K$.

$f_*(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonunun monoton artan olduğunun ispatı, $\varphi(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonunun monoton artan olduğunun ispatı ile benzerdir.

Önerme ispatlandı.

Teorem 1.3.1. (E.Helli) $K > 0$, *F kümesi keyfi $x \in [a, b]$ icin $| f(x) | \leq K$ ve $V_a^b(f) \leq K$ koşulunu sağlayan $f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonlar ailesi olsun. O zaman keyfi $i = 1, 2, ...$ için $f_i(\cdot) \in F$, keyfi $x \in [a, b]$ için $i \to \infty$ iken $f_i(x) \to \varphi(x)$ ve $V_a^b(\varphi) < +\infty$ olmak üzere $\{f_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi ve $\varphi(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonu vardır.*

Kanıt. Keyfi $f(\cdot) \in F$ alalım ve $x \in [a, b]$ için

$$\pi(x) = V_a^x(f), \quad v(x) = \pi(x) - f(x) \tag{1.3.11}$$

olsun. Önerme 1.2.7 ve teorem 1.2.1'e göre, $\pi(\cdot) : [a, b] \to R$ ve $v(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında monoton artan fonksiyonlardır.

Açıktır ki keyfi $x \in [a,b]$ için

$$0 \leq \pi(x) = V_a^x(f) \leq V_a^b(f) \leq K.$$

Keyfi $x \in [a,b]$ için $\mid f(x) \mid \leq K$ olduğundan, buradan

$$\mid v(x) \mid = \mid \pi(x) - f(x) \mid \leq 2K \tag{1.3.12}$$

olur.

Böylece her $f(\cdot) \in F$ fonksiyonuna (1.3.11) ile tanımlanan bir monoton artan $\pi(\cdot) : [a,b] \rightarrow R$ fonksiyonu karşılık gelir ve her $x \in [a,b]$ için

$$\mid \pi(x) \mid \leq K.$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi, $f(\cdot) \in F$ fonksiyonlarına karşılık gelen ve her $f(\cdot) \in F$ için (1.3.11) ile tanımlanan $\pi(\cdot) :\rightarrow R$ fonksiyonlar ailesini Φ ile gösterelim. Φ fonksiyonlar ailesi önerme 1.3.2'nin koşullarını sağladığından, keyfi $k = 1, 2, ...$ için $\pi_k(\cdot) \in \Phi$ ve keyfi $x \in [a,b]$ için

$$\lim_{k \to \infty} \pi_k(x) = \alpha(x) \tag{1.3.13}$$

olacak biçimde $\{\pi_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi ve $[a,b]$ aralığında monoton artan $\alpha(\cdot) : [a,b] \rightarrow R$ fonksiyonu vardır.

Şimdi $x \in [a,b]$ için

$$v_k(x) = \pi_k(x) - f(x)$$

olsun. (1.3.12)'den keyfi $k = 1, 2, ...$ için

$$\mid v_k(x) \mid \leq 2K$$

olur. Ayrıca (1.3.11) ve teorem 1.2.1'e göre keyfi $k = 1, 2, ...$ için, $v_k(\cdot) : [a,b] \rightarrow R$ fonksiyonları, $[a,b]$ aralığında monoton artan fonksiyonlardır. Eğer $Q = \{v_k(\cdot) : k = 1, 2, ...\}$ ile gösterirsek, Q kümesi önerme 1.3.2'nin koşullarını sağlar. O zaman yine önerme 1.3.2'ye göre, keyfi $i = 1, 2, ...$ için $v_{k_i}(\cdot) \in Q$, her $x \in [a,b]$ için

$$\lim_{i\to\infty} v_{k_i}(x) = \beta(x) \tag{1.3.14}$$

olacak biçimde $\{v_{k_i}(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi ve $[a,b]$ aralığında monoton artan $\beta(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu vardır.

$\{\pi_{k_i}(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi, $\{\pi_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisinin alt dizisi olduğundan, (1.3.13)'ten, her $x \in [a,b]$ için

$$\lim_{i\to\infty} \pi_{k_i}(x) = \alpha(x) \tag{1.3.15}$$

olur. $x \in [a,b]$ için

$$f_i(x) = \pi_{k_i}(x) - v_{k_i}(x)$$

olarak tanımlayalım. O zaman (1.3.14) ve (1.3.15)'ten keyfi $x \in [a,b]$ için

$$\lim_{i\to\infty} f_i(x) = \alpha(x) - \beta(x) \tag{1.3.16}$$

olur.

Her $x \in [a,b]$ için

$$\varphi(x) = \alpha(x) - \beta(x) \tag{1.3.17}$$

olmak üzere, $\varphi(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunu tanımlayalım. O zaman (1.3.16) ve (1.3.17)'den keyfi $x \in [a,b]$ için

$$\lim_{i\to\infty} f_i(x) = \varphi(x) \tag{1.3.18}$$

olur. $\alpha(\cdot) : [a,b] \to R$ ve $\beta(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonları, $[a,b]$ aralığında monoton artan olduklarından, önerme 1.2.1'e göre bu fonksiyonların $[a,b]$ aralığında tüm varyasyonu sonludur. O zaman önerme 1.2.4'e göre $\varphi(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunun da $[a,b]$ aralığındaki tüm varyasyonu sonludur, yani $V_a^b(\varphi) < +\infty$. Keyfi $i = 1, 2, ...$ için $f_i(\cdot) \in F$ olduğundan, (1.3.18)'den teorem ispatlanır.

1.4. Sonlu değişimli sürekli fonksiyonlar

Bu bölümde, tüm değişimi sonlu ve sürekli fonksiyonların özelliklerini inceleyeceğiz.

Teorem 1.4.1. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ sürekli ve $[a,b]$ aralığındaki tüm değişimi sonlu bir fonksiyon olsun. O zaman $x \in [a,b]$ için $\pi(x) = V_a^x(f)$ olmak üzere tanımlanan $\pi(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralğında süreklidir.*

Kanıt. $x_0 \in [a,b)$ alalım. $\pi(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonun $x_0 \in [a,b)$ noktasında sağdan sürekli olduğunu gösterelim. Keyfi $\varepsilon > 0$ alalım ve sabitleyelim. Şimdi $[x_0, b]$ aralığının

$$V_\Delta(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid > V_{x_0}^b(f) - \varepsilon \tag{1.4.1}$$

koşulunu sağlayacak biçimde $\Delta = \{x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$ bölüntüsünü alalım. Gerçekten $V_{x_0}^b(f) = \sup_\Delta V_\Delta(f)$ olduğundan, $\varepsilon > 0$ için $[x_0, b]$ aralığının (1.4.1)'i sağlayacak biçimde $\Delta = \{x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$ bölüntüsü seçilebilir.

Önerme 1.2.6'nın kanıtındaki (1.2.13) eşitsizliğinden, $[x_0, b]$ aralığının $\Delta = \{x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$ bölüntüsüne, yeni bir nokta eklenerek elde edilen $\Delta^1 = \{x_0 < y_1 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$ bölüntüsü için, $V_{\Delta^1}(f) \geq V_\Delta(f)$ olduğunu biliyoruz. O zaman (1.4.1)'den

$$V_{\Delta^1}(f) > V_{x_0}^b(f) - \varepsilon$$

bulunur. O zaman buradan, genelliği bozmadan, x_1 noktasını x_0 noktasına yeterli yakın seçebiliriz. $f(\cdot)$ fonksiyonu x_0 noktasında sürekli olduğundan, $\varepsilon > 0$ için x_1 noktasını

$$\mid f(x_1) - f(x_0) \mid < \varepsilon$$

olacak biçimde seçelim ve sabitleyelim. Bu durumda (1.4.1)'den

$$
\begin{aligned}
V_{x_0}^b(f) &< \varepsilon + V_\Delta(f) = \varepsilon + \sum_{k=0}^{n-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid = \\
&= \varepsilon + \mid f(x_1) - f(x_0) \mid + \sum_{k=1}^{n-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid < \\
&< 2\varepsilon + \sum_{k=1}^{n-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid < 2\varepsilon + V_{\Delta^*}(f) \le V_{x_1}^b(f)
\end{aligned}
\tag{1.4.2}
$$

olur. Burada $\Delta^* = \{x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$, $[x_1, b]$ aralığının bölüntüsüdür. Önerme 1.2.6'ya göre,

$$V_{x_0}^b(f) = V_{x_0}^{x_1}(f) + V_{x_1}^b(f)$$

olduğundan, (1.4.2)'den

$$V_{x_0}^{x_1}(f) < 2\varepsilon$$

olur. Buradan ve önerme 1.2.6'dan

$$\pi(x_1) - \pi(x_0) = V_a^{x_1} - V_a^{x_0} = V_a^{x_0} + V_{x_0}^{x_1} - V_a^{x_0} = V_{x_0}^{x_1} \le 2\varepsilon \tag{1.4.3}$$

olduğunu elde ederiz. Önerme 1.2.7'ye göre, $\pi(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında monoton artandır. $x_1 > x_0$ olduğundan, (1.4.3)'den, keyfi $x \in [x_0, x_1]$ için

$$0 \le \pi(x) - \pi(x_0) \le \pi(x_1) - \pi(x_0) \le 2\varepsilon$$

olduğu bulunur. Yani $\varepsilon > 0$ için $\delta(\varepsilon) = x_1 - x_0$ olmak üzere, keyfi $x \in [x_0, x_0 + \delta(\varepsilon)]$ için

$$\mid \pi(x) - \pi(x_0) \mid \le 2\varepsilon$$

olur. Bir başka deyişle

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \pi(x) = \pi(x_0) \tag{1.4.4}$$

olur.

Benzer olarak, $x_* \in (a, b]$ için

$$\lim_{x \to x_* - 0} \pi(x) = \pi(x_*) \tag{1.4.5}$$

olduğu ispatlanabilir. (1.4.4) ve (1.4.5)'ten, $\pi(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu (a,b) aralığında sürekliliği elde edilir. (1.4.4)'ten, b noktasında $\pi(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonun soldan sürekliliği, (1.4.5)'ten ise, a noktasında $\pi(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonun sağdan sürekliliği bulunur.

Teorem ispatlandı.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 1.4.1. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $V_a^b(f) < +\infty$ olsun. O zaman $f(\cdot)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında monoton artan ve sürekli iki fonksiyonun farkı olarak ifade edilebilir.*

Kanıt. $V_a^b(f) < +\infty$ olduğundan, teorem 1.2.1'e göre $f(\cdot)$ fonksiyonu, $\pi(\cdot) : [a,b] \to R$ ve $v(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında monoton artan olmak üzere, keyfi $x \in [a,b]$ için $f(x) = \pi(x) - v(x)$ gibi yazılabilir. Burada $x \in [a,b]$ için $\pi(x) = V_a^x(f)$. $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $V_a^b(f) < +\infty$ olduğundan, teorem 1.4.1'den, $\pi(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında süreklidir. O zaman, keyfi $x \in [a,b]$ için $v(x) = \pi(x) - f(x)$, $\pi(\cdot) : [a,b] \to R$ ve $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonları $[a,b]$ aralıgnda sürekli olduklarından dolayı, $v(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu da $[a,b]$ aralığında süreklidir. Böylece, $\pi(\cdot) : [a,b] \to R$ ve $v(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonları $[a,b]$ aralıgnda sürekli olmak üzere, $x \in [a,b]$ için $f(x) = \pi(x) - v(x)$ olur. Sonuç ispatlandı.

Şimdi $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonun $[a,b]$ aralığındaki osilasyonunu tanımlayalım.

Tanım 1.4.1. $f(\cdot) : [a,b] \to R$,

$$\omega_{[a,b]}(f) = \sup_{x_1 \in [a,b],\ x_2 \in [a,b]} | f(x_2) - f(x_1) |$$

olsun. $\omega_{[a,b]}(f)$'e, $f(\cdot)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki osilasyonu denir.

$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında sürekli olduğunu varsayalım.

$[a,b]$ aralığının $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$ bölüntüsünü alalım ve

$$\lambda(\Delta) = \max\{x_{i+1} - x_i : i = 0, 1, ..., n-1\}$$

$$\omega_i = \omega_{[x_i, x_{i+1}]}(f) \quad i = 0, 1, ..., n-1$$

$$V_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} | f(x_{i+1}) - f(x_i) |$$

$$\Omega_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i$$

olsun. Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 1.4.2. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, $\Delta^{(k)} = \{a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < x_2^{(k)} < ... < x_{n_k}^{(k)} = b\}$, $[a,b]$ aralığının bölüntüleri, $k \to \infty$ iken $\lambda(\Delta^{(k)}) \to 0$ olsun. O zaman*

$$\lim_{k\to\infty} \Omega_{\Delta^{(k)}}(f) = \lim_{k\to\infty} V_{\Delta^{(k)}}(f) = V_a^b(f)$$

olur.

Kanıt. Keyfi $A < V_a^b(f)$ alalım. $V_a^b(f) = \sup\limits_{\Delta} V_\Delta(f)$ olduğundan,

$$V^* = V_{\Delta^*}(f) = \sum_{i=0}^{m-1} | f(x_{i+1}^*) - f(x_i^*) | > A \tag{1.4.6}$$

olacak biçimde, $[a,b]$ aralığının $\Delta^* = \{a = x_0^* < x_1^* < x_2^* < ... < x_n^* = b\}$ bölüntüsü bulunabilir.

$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyon olduğundan, bu fonksiyon $[a,b]$ aralığında düzgün süreklidir. O zaman $\varepsilon = \frac{V^*-A}{4m}$ sayısına karşılık, $| x - y | \leq \delta$ koşulunu sağlayan keyfi $x \in [a,b]$ ve $y \in [a,b]$ için

$$| f(x) - f(y) | < \frac{V^* - A}{4m} \tag{1.4.7}$$

olacak şekilde $\delta = \delta(A) > 0$ sayısı bulunabilir.

Şimdi, $[a,b]$ aralığının $\lambda(\Delta) < \delta$ koşulunu sağlayan keyfi $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$ bölüntüsü için,

$$V_\Delta(f) > A \tag{1.4.8}$$

olduğunu gösterelim. Burada

$$V_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \mid f(x_{i+1}) - f(x_i) \mid .$$

Eğer Δ ve Δ^* bölüntüleri aynı ise, (1.4.8)'in doğruluğu (1.4.6)'dan elde edilir. Δ ve Δ^* bölüntülerinin farklı olduklarını varsayalım.

Şimdi $x_1^* \in \Delta^*$ bölüntü noktasını alalım ve x_1^* bölüntü noktasını Δ bölüntüsüne ekleyelim. Yeni bölüntüyü Δ_1 ile gösterelim. $x_1^* \notin \Delta$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$x_k < x_1^* < x_{k+1}$$

olacak biçimde $x_k \in \Delta$ ve $x_{k+1} \in \Delta$ bölüntü noktaları vardır. Bu durumda $\Delta_1 = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_k < x_1^* < x_{k+1} < ... < x_n = b\}$ olur.

$\lambda(\Delta) < \delta$ olduğundan,

$$\mid x_1^* - x_k \mid < \delta, \quad \mid x_{k+1} - x_1^* \mid < \delta$$

olur ve bu durumda (1.4.7)'den

$$\mid f(x_1^*) - f(x_k) \mid < \frac{V^* - A}{4m}, \quad \mid f(x_{k+1}) - f(x_1^*) \mid < \frac{V^* - A}{4m} \tag{1.4.9}$$

olduğunu elde ederiz. O zaman (1.4.9)'dan

$$V_{\Delta_1}(f) = \sum_{i=0}^{k-1} \mid f(x_{i+1}) - f(x_i) \mid + \mid f(x_1^*) - f(x_k) \mid + \mid f(x_{k+1}) - f(x_1^*) \mid +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n-1} \mid f(x_{i+1}) - f(x_i) \mid \leq V_\Delta(f) + \frac{V^* - A}{4m} + \frac{V^* - A}{4m} = V_\Delta(f) + \frac{V^* - A}{2m}$$

yani

$$V_{\Delta_1}(f) \leq V_\Delta(f) + \frac{V^* - A}{2m} \tag{1.4.10}$$

olduğu elde edilir.

Eğer $x_1^* \in \Delta^*$ bölüntü noktası için $x_1^* \in \Delta$ ise, o zaman $\Delta_1 = \Delta$, $V_{\Delta_1}(f) = V_\Delta(f)$ olur ve (1.4.10) eşitsizliği aşikar olarak sağlanır.

Şimdi $x_2^* \in \Delta^*$ bölüntü noktasını alalım ve x_2^* bölüntü noktasını, Δ_1 bölüntüsüne ekleyelim. Yeni bölüntüyü Δ_2 ile gösterelim. $x_2^* \notin \Delta$ olduğunu varsayalım. O zaman $x_2^* \notin \Delta_1$ olur. Bu durumda (1.4.10)'a benzer olarak

$$V_{\Delta_2}(f) \leq V_{\Delta_1}(f) + \frac{V^* - A}{2m} \tag{1.4.11}$$

olduğu ispatlanır. Eğer $x_2^* \in \Delta^*$ bölüntü noktası için $x_2^* \in \Delta$ ise, o zaman $x_2^* \in \Delta_1$ ve buradan $x_2^* \in \Delta_2$ olur. O halde $\Delta_1 = \Delta_2$, $V_{\Delta_1}(f) = V_{\Delta_2}(f)$ olur ve (1.4.11) eşitsizliği aşikar olarak sağlanır.

Bu prosedürü devam ettirerek, Δ^* bölüntüsünün noktalarını sıra ile Δ bölüntüsüne ekleriz ve böylece Δ_i bölüntüleri elde ederiz. Her Δ_i bölüntüsü için, (1.4.10) ve (1.4.11)'e benzer olarak

$$V_{\Delta_{i+1}}(f) \leq V_{\Delta_i}(f) + \frac{V^* - A}{2m} \tag{1.4.12}$$

olduğunu görürüz.

Δ^* bölüntüsünün noktalarınının sayısı $m+1$, $x_0 = a$ ve $x_m = b$ noktaları Δ bölüntüsünde olduklarından dolayı, (1.4.12) eşitsizliğinde $1 \leq i \leq m-1$ olur. O zaman buradan, (1.4.11) ve (1.4.12)'den

$$V_{\Delta_m}(f) \leq V_\Delta(f) + \frac{V^* - A}{2m} \cdot m = V_\Delta(f) + \frac{V^* - A}{2} \tag{1.4.13}$$

olur.

Açıktır ki, Δ_m bölüntüsü, Δ bölüntüsüne, Δ^* bölüntüsünün tüm bölüntü noktaları eklenerek elde edilmektedir. Aynı zamanda Δ_m bölüntüsü, Δ^* bölüntüsüne Δ bölüntüsünün tüm bölüntü noktaları eklenerek de elde edilir. Her hangi bir bölüntüye, yeni bölüntü noktası eklendiğinde, fonksiyonun değişimi arttığından

$$V^* = V_{\Delta^*}(f) \leq V_{\Delta_m}(f) \tag{1.4.14}$$

olur. O halde, (1.4.13) ve (1.4.14)'ten

$$V^* \leq V_\Delta(f) + \frac{V^* - A}{2}$$

olur. Buradan,

$$V_\Delta(f) \geq V^* - \frac{V^* - A}{2} = \frac{V^* + A}{2} \tag{1.4.15}$$

olduğunu elde ederiz. (1.4.6)'dan, $V^* > A$ olduğundan, (1.4.15)'den

$$V_\Delta(f) > \frac{A + A}{2} = A$$

olur.

(1.4.8)'in doğruluğu ispatlandı.

Böylece, keyfi $A < V_a^b(f)$ için, $[a,b]$ aralığının $\lambda(\Delta) < \delta$ koşulunu sağlayan keyfi Δ bölüntüsü için

$$V_\Delta(f) > A \tag{1.4.16}$$

olacak biçimde $\delta = \delta(A) > 0$ sayısı bulunabilir.

Şimdi keyfi $n = 1, 2, ...$ için $A_n < V_a^b(f)$ ve $\lim_{n\to\infty} A_n = V_a^b(f)$ olacak biçimde $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi alalım. O zaman (1.4.16)'dan, her $A_n < V_a^b(f)$ için, $[a,b]$ aralığının $\lambda(\Delta) < \delta_n$ koşulunu sağlayan keyfi Δ bölüntüsü için

$$V_\Delta(f) > A_n \tag{1.4.17}$$

olacak biçimde $\delta_n > 0$ sayısı var. Genelliği bozmadan $n \to \infty$ iken $\delta_n \to 0$ olduğunu varsayalım.

Teoremin koşuluna göre $[a,b]$ aralığının $\Delta^{(k)} = \{a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < x_2^{(k)} < ... < x_{n_k}^{(k)} = b\}$ bölüntüleri için, $k \to \infty$ iken $\lambda(\Delta^{(k)}) \to 0$ olur. O zaman, $\delta_n > 0$ için, keyfi $k > k_n$ için $\lambda(\Delta^{(k)}) < \delta_n$ olacak biçimde $k_n > 0$ bulunur. Bu durumda, (1.4.17)'den keyfi $k > k_n$ için

$$V_{\Delta^{(k)}}(f) > A_n \tag{1.4.18}$$

olur. Keyfi $\Delta^{(k)}$ $k = 1, 2, ...$ bölüntüsü için $V_{\Delta^{(k)}}(f) < V_a^b(f)$ olduğundan, buradan ve (1.4.18)'den, keyfi $k > k_n$ için

$$A_n < V_{\Delta^{(k)}}(f) < V_a^b(f) \tag{1.4.19}$$

olduğunu elde ederiz. $\lim_{n\to\infty} A_n = V_a^b(f)$ olduğundan, (1.4.19)'dan

$$\lim_{k\to\infty} V_{\Delta^{(k)}}(f) = V_a^b(f) \tag{1.4.20}$$

olduğu bulunur.

$[a,b]$ aralığının $\Delta^{(k)} = \{a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < x_2^{(k)} < ... < x_{n_k}^{(k)} = b\}$, $(k = 1, 2, ...)$, bölüntüleri için,

$$V_{\Delta^{(k)}}(f) = \sum_{i=0}^{n_k - 1} | f(x_{i+1}^{(k)}) - f(x_i^{(k)}) |, \tag{1.4.21}$$

$$\omega_i^{(k)} = \omega_{[x_i^k, x_{i+1}^k]}(f) = \sup_{x \in [x_i^{(k)}, x_{i+1}^k],\ y \in [x_i^{(k)}, x_{i+1}^k]} | f(x) - f(y) |, \tag{1.4.22}$$

$$\Omega_{\Delta^{(k)}}(f) = \sum_{i=0}^{n_k - 1} \omega_i^k \tag{1.4.23}$$

olsun. (1.4.22)'den

$$| f(x_{i+1}^{(k)}) - f(x_i^{(k)}) | \leq \omega_i^{(k)}. \tag{1.4.24}$$

olduğu açıktır. O halde, (1.4.21), (1.4.23) ve (1.4.24)'ten, keyfi $k = 1, 2, ...$ için

$$V_{\Delta^{(k)}}(f) \leq \Omega_{\Delta^{(k)}}(f) \tag{1.4.25}$$

olur. Bu durumda, (1.4.20) ve (1.4.25)'ten

$$V_a^b(f) = \lim_{k \to \infty} V_{\Delta^{(k)}} \leq \liminf_{k \to \infty} \Omega_{\Delta^{(k)}}(f) \tag{1.4.26}$$

olduğunu elde ederiz.

Yine de $\Delta^{(k)}$, $(k = 1, 2, ...)$, bolüntülerini alalım. $f(\cdot)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan

$$\omega_i^{(k)} = \sup_{x \in [x_i^{(k)}, x_{i+1}^k],\ y \in [x_i^{(k)}, x_{i+1}^k]} | f(x) - f(y) | = | f(y_{i+1}^{(k)}) - f(z_i^{(k)}) |$$

olacak biçimde $y_i^{(k)} \in [x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}]$, $z_i^{(k)} \in [x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}]$, $(i = 0, 1, ..., n_k - 1)$, noktaları vardır. Bu durumda

$$\Omega_{\Delta^{(k)}}(f) = \sum_{i=0}^{n_k - 1} | f(y_i^{(k)}) - f(z_i^{(k)}) | \tag{1.4.27}$$

olur. $y_i^{(k)}$ ve $z_i^{(k)}$, $(i = 0, 1, ..., n_k - 1)$, noktalarını $\Delta^{(k)}$ bölüntüsüne ekleyelim ve elde edilen yeni bölüntüyü $\Delta_*^{(k)}$ ile gösterelim. O zaman keyfi $i \neq j$ $(i = 0, 1, ..., n_k - 1)$, $(j = 0, 1, ..., n_k - 1)$, için $(x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}) \bigcap (x_j^{(k)}, x_{j+1}^{(k)}) = \emptyset$, $y_i^{(k)} \in [x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}]$, $z_i^{(k)} \in [x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}]$, $(i = 0, 1, ..., n_k - 1)$, olduğundan, (1.4.27)'den

$$\Omega_{\Delta^{(k)}}(f) \leq V_{\Delta_*^{(k)}}(f) \tag{1.4.28}$$

olur.

$$V_{\Delta_*^{(k)}}(f) \leq \sup_{\Delta} V_{\Delta}(f) = V_a^b(f)$$

olduğundan, (1.4.28)'den, keyfi $k = 1, 2, ...$ için

$$\Omega_{\Delta^{(k)}}(f) \leq V_a^b(f)$$

olur. Buradan ise

$$\limsup_{k\to\infty} \Omega_{\Delta^{(k)}}(f) \leq V_a^b(f) \tag{1.4.29}$$

olduğu bulunur. (1.4.26) ve (1.4.29)'dan $\lim_{k\to\infty} \Omega_{\Delta^{(k)}}(f)$ limiti vardır ve

$$\lim_{k\to\infty} \Omega_{\Delta^{(k)}}(f) = V_a^b(f). \tag{1.4.30}$$

olur. (1.4.20) ve (1.4.30)'dan teorem ispatlanır.

$f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli değilse, teoremin doğru olmadığını bir örnekle gösterelim.

Örnek 1.4.1. $[a, b] = [-1, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1, 1],\ x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

olsun. Açıktır ki $V_{-1}^1(f) = 2$. Şimdi $[-1, 1]$ aralığının, keyfi $k = 1, 2, ...$ için $0 \notin \Delta^{(k)}$ olacak biçimde $\Delta^{(k)}$, $(k = 1, 2, ...)$, bölüntülerini alalım. Bu durumda, keyfi $k = 1, 2, ...$ için $V_{\Delta^{(k)}}(f) = 0$, $\Omega_{\Delta^{(k)}}(f) = 1$ olur. O halde $\lim_{k\to\infty} V_{\Delta^{(k)}}(f) = 0$, $\lim_{k\to\infty} \Omega_{\Delta^{(k)}}(f) = 1$ bulunur. Yani teorem doğru değil.

1.5. Banach indikatrisi

Bu bölümde, sürekli fonksiyonların bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

$f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyon olsun. O zaman, $f(\cdot)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığnda maksimum ve minimum değerlerini alır.

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

olsun.

Şimdi $N(\cdot) : [m, M] \to R \bigcup \{+\infty\}$ fonksiyonunu tanımlayalım. $y \in [m, M]$ için $N(y)$ ile $f(x) = y$ denkleminin $[a, b]$ aralığındaki çözümlerinin sayısını gösterelim. Yani, $y \in [m, M]$ için $N(y)$, $f(x) = y$ eşitliliğini sağlayan $x \in [a, b]$'lerin sayısıdır. Eğer $y \in [m, M]$ için $f(x) = y$ eşitliliğini sağlayacak $x \in [a, b]$-ler sonsuz ise, o zaman $N(y) = +\infty$ olduğunu kabul edeceğiz. Açıktır ki, keyfi $y \in [m, M]$ için $N(y)$ doğal sayı veya $+\infty$ olur ve keyfi $y \in [m, M]$ için $N(y) \geq 1$.

$y \to N(y) : [m, M] \to R \bigcup \{+\infty\}$ fonksiyonuna, $f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonunun Banach indikatrisi denir.

Teorem 1.5.1. (S.Banach) *$f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyon,*

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x), \quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x),$$

$N(\cdot) : [m, M] \to R \bigcup \{+\infty\}$ fonksiyonu $f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonunun Banach indikatrisi olsun. O zaman $N(\cdot) : [m, M] \to R \bigcup \{+\infty\}$ fonksiyonu ölçülebilirdir ve

$$\int_m^M N(y)dy = V_a^b(f).$$

Kanıt. n doğal sayı olsun. Şimdi $[a, b]$ aralığını 2^n eş aralığa bölelim. O zaman her aralığın uzunluğu $h = \frac{b-a}{2^n}$ olur. Bu aralıkları d_1, d_2, $d_3, \ldots, d_{2^n}$ ile gösterelim, yani

$$d_1 = [a, a + \frac{b-a}{2^n}],$$
$$d_k = (a + (k-1) \cdot \frac{b-a}{2^n}, a + k \cdot \frac{b-a}{2^n}], \quad k = 2, 3, ..., 2^n$$

olsun.

Şimdi $k = 1, 2, ..., 2^n$ için $h_k(\cdot) : [m, M] \to R$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Eğer $y \in [m, M]$ için $f(x) = y$ denkleminin $x \in d_k$ olacak biçimde hiç olmazsa bir çözümü varsa $h_k(y) = 1$, eğer $y \in [m, M]$ için $f(x) = y$ denkleminin $x \in d_k$ olacak biçimde çözümü yoksa $h_k(y) = 0$ olduğunu kabul ediyoruz.

$$m_k = \inf_{x \in d_k} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in d_k} f(x)$$

olsun. O zaman, keyfi $y \in (m_k, M_k)$ için $h_k(y) = 1$, ve keyfi $y \notin [m_k, M_k]$ için $h_k(y) = 0$ olduğu açıktır. Buradan, $h_k(\cdot) : [m, M] \to R$ fonksiyonu yalnız $y = m_k$ ve $y = M_k$ noktalarında süreksiz olabilir. Böylece, her $k = 1, 2, ..., 2^n$ için $h_k(\cdot) : [m, M] \to R$ fonksiyonunun iki noktada süreksiz olabileceyini göstermiş olduk. O halde, her $k = 1, 2, ..., 2^n$ için $h_k(\cdot) : [m, M] \to R$ fonksiyonu ölçülebilir olur.

$$h_k(y) = \begin{cases} 1 & x \in (m_k, M_k) \\ 0 & x \notin [m_k, M_k] \end{cases}$$

olduğundan

$$\int_m^M h_k(y)dy = \int_{m_k}^{M_k} h_k(y)dy = \int_{m_k}^{M_k} dy = M_k - m_k. \tag{1.5.1}$$

olur. Burada integral Lebesgue anlamındadır.

$h_k(\cdot)$ fonksiyonun $d_k = (a + (k-1) \cdot \frac{b-a}{2^n}, a + k \cdot \frac{b-a}{2^n}]$ aralığındaki osilasyonunu ω_k ile gösterelim, yani

$$\omega_k = \sup_{x \in d_k,\ y \in d_k} \mid f(x) - f(y) \mid$$

olsun. O halde

$$M_k - m_k = \sup_{x \in d_k} f(x) - \inf_{y \in d_k} f(y) = \sup_{x \in d_k} f(x) + \sup_{y \in d_k} - f(y) =$$

$$= \sup_{x \in d_k,\ y \in d_k} [f(x) - f(y)] = \sup_{x \in d_k,\ y \in d_k} \mid f(x) - f(y) \mid = \omega_k$$

elde ederiz. Bu durumda, buradan ve (1.5.1)'den

$$\int_m^M h_k(y)dy = \omega_k \tag{1.5.2}$$

bulunur.

Şimdi $y \in [m, M]$ için $N_n(y) = h_1(y) + h_2(y) + ... + h_{2^n}(y)$, $(n = 1, 2, ...)$, olmak üzere, $N_n(\cdot) : [m, M] \to R$ fonksiyonunu tanımlayalım. O halde, (1.5.2)'den

$$\int_m^M N_n(y)dy = \sum_{k=1}^{2^n} \int_m^M h_k(y)dy = \sum_{k=1}^{2^n} \omega_k \tag{1.5.3}$$

olur. $[a, b]$ aralığının

$$\Delta^{(n)} = \{a < a + \frac{b-a}{2^n} < a + 2 \cdot \frac{b-a}{2^n} < ... < a + 2^n \cdot \frac{b-a}{2^n} = b\}$$

bölüntüsü için

$$\Omega_{\Delta^{(n)}} = \sum_{k=1}^{2^n} \omega_k$$

Açıktır ki, $n \to \infty$ iken $\lambda(\Delta^{(n)}) \to 0$. O zaman $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olduğundan, teorem 1.4.2'den

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \omega_k = \lim_{n\to\infty} \Omega_{\Delta^{(n)}}(f) = V_a^b(f)$$

elde ederiz. O halde buradan ve (1.5.3)'den

$$\lim_{n\to\infty} \int_m^M N_n(y)dy = V_a^b(f) \tag{1.5.4}$$

bulunur. $N_n(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından, keyfi $y \in [m, M]$ için,

$$0 \le N_1(y) \le N_2(y) \le N_3(y) \le N_4(y) \le \ \ldots \tag{1.5.5}$$

olur. Bu durumda keyfi $y \in [m, M]$ için, $\{N_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin sonlu veya sonsuz limiti var. Şimdi, keyfi $y \in [m, M]$ için

$$N_*(y) = \lim_{n\to\infty} N_n(y) \tag{1.5.6}$$

olsun. Keyfi $n = 1, 2, ...$ için $N_n(\cdot) : [m, M] \to R$ fonksiyonları ölçülebilir olduğundan, $N_*(\cdot) : [m, M] \to R \bigcup \{+\infty\}$ fonksiyonu ölçülebilir olur. O halde, (1.5.5), (1.5.6) ve teorem 1.1.5'ten,

$$\int_m^M N_*(y)dy = \lim_{n\to\infty} \int_m^M N_n(y)dy$$

bulunur. Buradan ve (1.5.4)'ten

$$\int_m^M N_*(y)dy = V_a^b(f)dy \tag{1.5.7}$$

olduğunu elde ederiz.

Eğer keyfi $y \in [m, M]$ için

$$N_*(y) = N(y) \tag{1.5.8}$$

olduğunu kanıtlarsak, teoremi ispatlamış oluruz.

Keyfi $y \in [m, M]$ alalım. $E_k(y)$ ile $f(x) = y$ denklemini sağlayan ve $x \in d_k$ olacak x'lerin sayısını gösterelim. O zaman açıktır ki, keyfi $k = 1, 2, ..., 2^n$ için

$$E_k(y) \geq h_k(y) \ \text{ ve } \ \sum_{k=1}^{2^n} E_k(y) = N(y) \tag{1.5.9}$$

olur. Bu durumda, $N_n(y) = \sum_{k=1}^{2^n} h_k(y)$ olduğundan, (1.5.9)'dan

$$N(y) = \sum_{k=1}^{2^n} E_k(y) \geq \sum_{k=1}^{2^n} h_k(y) = N_n(y) \tag{1.5.10}$$

olduğunu elde ederiz. (1.5.10) eşitsizliği keyfi $n = 1, 2, ...$ için doğru olduğundan, (1.5.5), (1.5.6) ve (1.5.10)'dan, keyfi $y \in [m, M]$ için

$$N(y) \geq N_*(y) \tag{1.5.11}$$

olur.

(1.5.11) eşitsizliğinin tersini gösterelim. Yani keyfi $y \in [m, M]$ için

$$N(y) \leq N_*(y) \tag{1.5.12}$$

olduğunu görelim. Açıktır ki, keyfi $y \in [a, b]$ için $N(y) \geq 1$. $y \in [m, M]$ olsun.

Eğer $N(y) = 1$ ise, yani $f(x) = y$ denkleminin $[a, b]$ aralığında tek çözümü bulunuyorsa, o zaman $N_*(y)$'nin tanımından, $N_*(y) = 1$ olur.

Böylece, $N(y) = 1$ iken, (1.5.12) eşitsizliğinin doğruluğunu gördük.

$N_*(y) \geq 2$ olduğunu varsayalım. $2 \leq q \leq N(y)$ olmak üzere keyfi q doğal sayısı alalım ve sabitleyelim. $N(y)$'nin tanımından, $f(x) = y$ denkleminin, $x_1 < x_2 < ... < x_q$ olacak biçimde q tane çözümü bulunur.

$$\lambda_q = \min \{x_{i+1} - x_i : i = 1, 2, ..., q - 1\}$$

olsun. Açıktır ki, $\lambda_q > 0$. O zaman keyfi $n > n_*$ için

$$\frac{b-a}{2^n} < \lambda_q$$

olacak biçimde $n_* > 0$ sayısı var. Bu durumda, d_k, $(k = 1, 2, ..., 2^n)$, aralıklarının uzunluğu $\frac{b-a}{2^n}$, keyfi $i \neq j$ için $d_i \bigcap d_j = \emptyset$ olduğundan, keyfi $n > n_*$ için her d_k,

$(k = 1, 2, ..., 2^n)$, aralığı, x_1, x_2 . . . x_q'lerden yalnız birini içerebilir. O zaman, $N_n(\cdot)$, $(n = 1, 2, ...)$, ve $h_k(\cdot)$, $(k = 1, 2, ..., 2^n)$, fonksiyonlarının tanımından, keyfi $n > n_*$ için

$$N_n(y) = \sum_{k=1}^{2^n} h_k(y) \geq q \tag{1.5.13}$$

olur. Keyfi $i = 1, 2, ...$ için $N_i(y) \leq N_{i+1}(y)$ olduğundan, (1.5.6) ve (1.5.13)'den

$$N_*(y) = \lim_{n \to \infty} N_n(y) \geq q \tag{1.5.14}$$

olduğunu elde ederiz. (1.5.14) eşitsizliği keyfi $2 \leq q \leq N(y)$ $(N_*(y) \geq 2)$ için sağlandığından, (1.5.14)'den (1.5.12)'nin doğruluğu bulunur.

$N(y) = +\infty$ ise, o zaman (1.5.14) eşitsizliği keyfi $q \geq 2$ doğal sayısı için doğru olur. Bu durumda $N_*(y) = +\infty$, yani $N(y) = N_*(y) = +\infty$ olur ve (1.5.12) eşitsizliği sağlanır.

(1.5.11) ve (1.5.12) eşitsizliklerinden, (1.5.8) eşitliğinin doğruluğu bulunur. (1.5.7) ve (1.5.8) eşitliliklerinden, teorem ispatlanır.

Bu teoremden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 1.5.1. *$f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyon,*

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x), \quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

olsun. $f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında tam değişiminin sonlu olması için gerek ve yeter koşul, $f(\cdot)$ fonksiyonunun $N(\cdot) : [m, M] \to R \bigcup \{+\infty\}$ Banach indikatrisinin, $[m, M]$ aralığında integrallenebilir olmasıdır.

Kanıt. $V_a^b(f) < +\infty$ olduğunu varayalım. Teorem 1.5.1'e göre

$$\int_m^M N(y)dy = V_a^b(f)$$

olduğundan, bu durumda $\int_m^M N(y)dy < +\infty$ bulunur, yani $f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonunun $N(\cdot) : [m, M] \to R \bigcup \{+\infty\}$ Banach indikatrisinin, $[m, M]$ aralığında sonlu integrali vardır.

$f(\cdot):[a,b]\to R$ fonksiyonunun $N(\cdot):[m,M]\to R\bigcup\{+\infty\}$ Banach indikatrisinin $[m,M]$ aralığında integrallenebilir olduğunu varsayalım, yani $\int_m^M N(y)dy < +\infty$ olsun. Teorem 1.5.1'e göre

$$\int_m^M N(y)dy = V_a^b(f)$$

olduğundan, bu durumda $V_a^b(f) < +\infty$ bulunur, yani $f(\cdot):[a,b]\to R$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında tam varyasyonu sonludur.

Sonuç 1.5.2. *$f(\cdot):[a,b]\to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, $V_a^b(f) < +\infty$,*

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x), \qquad M = \max_{x\in[a,b]} f(x),$$

$$A = \{y\in[m,M] : N(y) = +\infty\}$$

olsun. O zaman A kümesinin ölçümü sıfırdır.

Kanıt. Teorem 1.5.1'e göre

$$\int_m^M N(y)dy = V_a^b(f).$$

$0 \le V_a^b(f) < +\infty$ olduğundan, buradan

$$0 \le \int_m^M N(y)dy < +\infty \tag{1.5.15}$$

olur.

$f(\cdot):[a,b]\to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olduğundan, keyfi $y\in[m,M]$ için $f(x)=y$ olacak biçimde en az bir $x\in[a,b]$ bulunur. O zaman keyfi $y\in[m,M]$ için

$$N(y) \ge 1 \tag{1.5.16}$$

olur. (1.5.15) ve (1.5.16)'dan, $N(\cdot)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında sonlu olduğu bulunur, yani hemen hemen $y\in[m,M]$ için $N(y) < +\infty$ olur. O halde A kümesinin ölçümünün sıfır olduğunu elde ederiz.

2. MUTLAK SÜREKLİ FONKSİYONLAR

2.1. Mutlak sürekli fonksiyonların özellikleri

Mutlak sürekli fonksiyonlar, sürekli olmak üzere, tam değişimi sonlu olan fonksiyonlardır. Bu bölümde mutlak sürekli fonksiyonların özelliklerini inceleyeceğiz. Önce mutlak sürekli fonksiyonun tanımını sunalım.

Tanım 2.1.1. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ olsun. Keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_1,b_1), (a_2,b_2),...,(a_n,b_n) aralıkları için*

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \leq \delta$$

iken

$$| \sum_{k=1}^{n} [f(b_k) - f(a_k)] | \leq \varepsilon \tag{2.1.1}$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunuyorsa, $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir.

Açıktır ki, eğer $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon ise, o zaman $f(\cdot)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığnda süreklidir. Gerçekten, $x_* \in (a,b)$ için, tanım 2.1.1'de $n = 1$ ve (a_1,b_1) aralığını x_*'ı içeren aralık alırsak, tanım 2.1.1'den, $f(\cdot)$ fonksiyonun $x_* \in (a,b)$ noktasında sürekliliğini elde ederiz. $x_* = a$ iken tanım 2.1.1'de $n = 1$ ve $(a_1,b_1) = (a,x)$, $x \in (a,b)$, alırsak, $f(\cdot)$ fonksiyonunun $x_* = a$ noktasında sağdan sürekliliğini elde ederiz. Benzer olarak, $f(\cdot)$ fonksiyonunun $x_* = b$ noktasında soldan sürekliliğini gösterebiliriz.

Ancak, bunun tersi doğru olmayabilir, yani belli bir aralıkta sürekli olan fonksiyon, bu aralıkta mutlak sürekli olmayabilir. Bu durumu gösteren örneği, daha sonra inceleyeceğiz.

Kaydedelim ki, mutlak sürekli fonksiyonun tanımı başka formda verilebilir. Tanım 2.1.1'de, (2.1.1) eşitsizliğini

$$\sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) - f(a_k) \mid \leq \varepsilon$$

eşitsizliği ile değişebiliriz. Bu durumun doğruluğunu gösteren aşağıdakşi önerme doğrudur.

Önerme 2.1.1. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olması için gerek ve yeter koşul, keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_1,b_1), (a_2,b_2),...,(a_n,b_n) aralıkları için*

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \leq \delta \tag{2.1.2}$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) - f(a_k) \mid \leq \varepsilon \tag{2.1.3}$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısının var olmasıdır.

Kanıt. (2.1.2) ve (2.1.3) koşullarının sağlandığını varsayalım, yani keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_1,b_1), (a_2,b_2),...,(a_n,b_n) aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \leq \delta$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) - f(a_k) \mid \leq \varepsilon \tag{2.1.4}$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısının olduğunu varsayalım.

$$\mid \sum_{k=1}^{n} [f(b_k) - f(a_k)] \mid \leq \sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) - f(a_k) \mid$$

olduğundan, buradan ve (2.1.4)'ten, $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olduğunu elde ederiz.

Şimdi, $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunun, $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olduğunu varsayalım. Keyfi $\varepsilon > 0$ alalım. O zaman $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_1,b_1), (a_2,b_2),...,(a_n,b_n) aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\leq\delta \tag{2.1.5}$$

iken

$$\mid\sum_{k=1}^{n}[f(b_k)-f(a_k)]\mid\leq\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1.6}$$

olacak biçimde $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı var.

Şimdi (a_k,b_k), $(k=1,2,...,n)$ aralıklarını gruplarına ayıralım.

$$A=\{(a_k,b_k):f(b_k)-f(a_k)<0,\ k=1,2,...,n\},$$

$$B=\{(a_k,b_k):f(b_k)-f(a_k)\geq 0,\ k=1,2,...,n\}$$

olmak üzere A ve B gruplarına ayıralım.

$$\sum_{k\in A}(b_k-a_k)\leq\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\leq\delta,$$

$$\sum_{k\in B}(b_k-a_k)\leq\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\leq\delta$$

olduğundan, (2.1.5) ve (2.1.6)'dan

$$\mid\sum_{k\in A}[f(b_k)-f(a_k)]\mid\leq\frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.1.7}$$

$$\mid\sum_{k\in B}[f(b_k)-f(a_k)]\mid\leq\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1.8}$$

olduğu bulunur. A ve B kümelerinin tanımından,

$$\sum_{k\in A}\mid f(b_k)-f(a_k)\mid=\mid\sum_{k\in A}[f(b_k)-f(a_k)]\mid, \tag{2.1.9}$$

$$\sum_{k\in B}\mid f(b_k)-f(a_k)\mid=\mid\sum_{k\in B}[f(b_k)-f(a_k)]\mid \tag{2.1.10}$$

eşitlilikleri doğrudur. (2.1.7) - (2.1.10)'dan

$$\sum_{k=1}^{n}\mid f(b_k)-f(a_k)\mid=\sum_{k\in A}\mid f(b_k)-f(a_k)\mid+\sum_{k\in B}\mid f(b_k)-f(a_k)\mid=$$

$$= \mid \sum_{k\in A} [f(b_k) - f(a_k)] \mid + \mid \sum_{k\in B} [f(b_k) - f(a_k)] \mid \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olduğu bulunur. Yani, $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olduğu durumda, (2.1.2) ve (2.1.3) koşulları sağlanır.

Önerme ispatlandı.

Mutlak sürekli fonksiyonlara örnek olarak, Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonlar gösterilebilir.

Önerme 2.1.2. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlasın. O zaman $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir.*

Kanıt. $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağladığından, keyfi $x \in [a,b]$ ve $y \in [a,b]$ için

$$\mid f(x) - f(y) \mid \leq L \mid x - y \mid \tag{2.1.11}$$

olur.

Keyfi $\varepsilon > 0$ alalım. Şimdi $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L}$ ve

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \leq \delta = \frac{\varepsilon}{L} \tag{2.1.12}$$

olmak üzere, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_k, b_k), $(k = 1, 2, ..., n)$, aralıklarını alalım. (2.1.11) ve (2.1.12)'den

$$\mid \sum_{k=1}^{n} [f(b_k) - f(a_k)] \mid \leq \sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) - f(a_k) \mid \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} L \cdot (b_k - a_k) \leq L \cdot \delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

elde ederiz. Buradan, $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olduğu bulunur.

Şimdi mutlak sürekli fonksiyonların bazı özelliklerini inceleyelim.

Teorem 2.1.1. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ ve $g(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar olsunlar. O zaman*

$$f(\cdot)+g(\cdot), \quad f(\cdot)-g(\cdot), \quad f(\cdot)\cdot g(\cdot)$$

fonksiyonları da $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonlardır.

Ek olarak, eğer keyfi $x \in [a,b]$ için $g(x) \neq 0$ ise, $\frac{f(\cdot)}{g(\cdot)}$ fonksiyonu da $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyondur.

Kanıt. İlk olarak, $f(\cdot)+g(\cdot)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olduğunu gösterelim. $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olduğundan, keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak $(a_1^{(1)}, b_1^{(1)})$, $(a_2^{(1)}, b_2^{(1)})$,...,$(a_r^{(1)}, b_r^{(1)})$ aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{r}(b_k^{(1)} - a_k^{(1)}) \leq \delta_1$$

iken

$$\sum_{k=1}^{r} \mid f(b_k^{(1)}) - f(a_k^{(1)}) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1.13}$$

olacak biçimde $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ sayısı var.

$g(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olduğundan, keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak $(a_1^{(2)}, b_1^{(2)})$, $(a_2^{(2)}, b_2^{(2)})$,...,$(a_m^{(2)}, b_m^{(2)})$ aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{m}(b_k^{(2)} - a_k^{(2)}) \leq \delta_2$$

iken

$$\sum_{k=1}^{m} \mid g(b_k^{(2)}) - g(a_k^{(2)}) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1.14}$$

olacak biçimde $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ sayısı var.

Eğer $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ alırsak, o zaman (2.1.13) ve (2.1.14)'den, keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_1, b_1), (a_2, b_2),...,(a_n, b_n) aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \leq \delta$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) - f(a_k) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1.15}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mid g(b_k) - g(a_k) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1.16}$$

olur. O zaman (2.1.15) ve (2.1.16)'dan

$$\sum_{k=1}^{n} \mid (f(b_k) + g(b_k)) - (f(a_k) + g(a_k)) \mid \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) - f(a_k) \mid + \sum_{k=1}^{n} \mid g(b_k) - g(a_k) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur, yani, $f(\cdot) + g(\cdot)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir.

Şimdi $f(\cdot) - g(\cdot)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olduğunu gösterelim. $f(\cdot) : [a, b] \to R$ ve $g(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar olduğundan, (2.1.15) ve (2.1.16) eştsizlikleri doğrudur. Bu durumda, (2.1.15) ve (2.1.16)'dan

$$\sum_{k=1}^{n} \mid (f(b_k) - g(b_k)) - (f(a_k) - g(a_k)) \mid \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) - f(a_k) \mid + \sum_{k=1}^{n} \mid g(b_k) - g(a_k) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur, yani, $f(\cdot) - g(\cdot)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir.

Şimdi $f(\cdot) \cdot g(\cdot)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olduğunu gösterelim. $f(\cdot) : [a, b] \to R$ ve $g(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar olduğundan, bu fonksiyonlar $[a, b]$ aralığında süreklidirler. O zaman keyfi $x \in [a, b]$ için

$$\mid f(x) \mid \leq M_1, \quad \mid g(x) \mid \leq M_2 \tag{2.1.17}$$

olacak biçimde $M_1 > 0$ ve $M_2 > 0$ sayıları bulunabilir.

$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olduğundan, keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak $(a_1^{(1)}, b_1^{(1)})$, $(a_2^{(1)}, b_2^{(1)})$,...,$(a_r^{(1)}, b_r^{(1)})$ aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{r}(b_k^{(1)} - a_k^{(1)}) \leq \delta_1$$

iken

$$\sum_{k=1}^{r} \mid f(b_k^{(1)}) - f(a_k^{(1)}) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2M_2} \tag{2.1.18}$$

olacak biçimde $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$g(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olduğundan, keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak $(a_1^{(2)}, b_1^{(2)})$, $(a_2^{(2)}, b_2^{(2)})$,...,$(a_m^{(2)}, b_m^{(2)})$ aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{m}(b_k^{(2)} - a_k^{(2)}) \leq \delta_2$$

iken

$$\sum_{k=1}^{m} \mid g(b_k^{(2)}) - g(a_k^{(2)}) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2M_1} \tag{2.1.19}$$

olacak biçimde $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

Eğer $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ alırsak, o zaman (2.1.18) ve (2.1.19)'dan, keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_1, b_1), (a_2, b_2),...,(a_n, b_n) aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \leq \delta$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) - f(a_k) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2M_2} \tag{2.1.20}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mid g(b_k) - g(a_k) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2M_1} \tag{2.1.21}$$

olur. O zaman (2.1.17), (2.1.20) ve (2.1.21)'den

$$\sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) \cdot g(b_k) - f(a_k) \cdot g(a_k) \mid =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k)\cdot g(b_k) - f(b_k)\cdot g(a_k) + f(b_k)\cdot g(a_k) - f(a_k)\cdot g(a_k) \mid \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) \mid \cdot \mid g(b_k) - g(a_k) \mid + \mid g(a_k)) \mid \cdot \mid f(b_k) - f(a_k) \mid \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} M_1 \cdot \mid g(b_k) - g(a_k) \mid + M_2 \cdot \mid f(b_k) - f(a_k) \mid \leq$$

$$\leq M_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2M_1} + M_2 \cdot \frac{\varepsilon}{2M_2} = \varepsilon$$

olur, yani, $f(\cdot)\cdot g(\cdot)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir.

Şimdi, keyfi $x \in [a,b]$ için $g(x) \neq 0$ olduğu durumda, $\frac{f(\cdot)}{g(\cdot)}$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olduğunu gösterelim. $f(\cdot) : [a,b] \to R$ ve $g(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar olduğundan, (2.1.17) eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca, $g(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, keyfi $x \in [a,b]$ için $g(x) \neq 0$ olduğundan, keyfi $x \in [a,b]$ için

$$\mid g(x) \mid \geq M \tag{2.1.22}$$

olacak biçimde $M > 0$ sayısı bulunabilir.

$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olduğundan, keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak $(a_1^{(1)}, b_1^{(1)})$, $(a_2^{(1)}, b_2^{(1)})$,...,$(a_r^{(1)}, b_r^{(1)})$ aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{r}(b_k^{(1)} - a_k^{(1)}) \leq \delta_1$$

iken

$$\sum_{k=1}^{r} \mid f(b_k^{(1)}) - f(a_k^{(1)}) \mid \leq \frac{\varepsilon M^2}{2M_2} \tag{2.1.23}$$

olacak biçimde $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$g(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olduğundan, keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak $(a_1^{(2)}, b_1^{(2)})$,

$(a_2^{(2)}, b_2^{(2)}),\ldots,(a_m^{(2)}, b_m^{(2)})$ aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{m}(b_k^{(2)} - a_k^{(2)}) \leq \delta_2$$

iken

$$\sum_{k=1}^{m} \mid g(b_k^{(2)}) - g(a_k^{(2)}) \mid \leq \frac{\varepsilon M^2}{2M_1} \tag{2.1.24}$$

olacak biçimde $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

Eğer $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ alırsak, o zaman (2.1.23) ve (2.1.24)'den, keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[a, b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_1, b_1), $(a_2, b_2),\ldots,(a_n, b_{(n)})$ aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \leq \delta$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) - f(a_k) \mid \leq \frac{\varepsilon M^2}{2M_2} \tag{2.1.25}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mid g(b_k) - g(a_k) \mid \leq \frac{\varepsilon M^2}{2M_1} \tag{2.1.26}$$

olur. O zaman, (2.1.17), (2.1.22), (2.1.25) ve (2.1.26)'dan

$$\sum_{k=1}^{n} \mid \frac{f(b_k)}{g(b_k)} - \frac{f(a_k)}{g(a_k)} \mid = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mid f(b_k) \cdot g(a_k) - f(a_k) \cdot g(b_k) \mid}{\mid g(b_k) \cdot g(a_k) \mid} \leq$$

$$\leq \frac{1}{M^2} \cdot [\sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) \cdot g(a_k) - f(b_k) \cdot g(b_k) + f(b_k) \cdot g(b_k) - f(a_k) \cdot g(b_k) \mid] \leq$$

$$\leq \frac{1}{M^2} \cdot [\sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) \mid \cdot \mid g(b_k) - g(a_k) \mid + \sum_{k=1}^{n} \mid g(b_k) \mid \cdot \mid f(b_k) - f(a_k) \mid] \leq$$

$$\leq \frac{1}{M^2} \cdot [M_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} \mid g(b_k) - g(a_k) \mid + M_2 \sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) - f(a_k) \mid] \leq$$

$$\leq \frac{1}{M^2} \cdot [M_1 \cdot \frac{\varepsilon M^2}{2M_1} + M_2 \cdot \frac{\varepsilon M^2}{2M_2}] = \varepsilon$$

olur, yani $\frac{f(\cdot)}{g(\cdot)}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir.

Teorem ispatlandı.

İki mutlak sürekli fonksiyonunun bileşkesi mutlak sürekli olmayabilir. Ancak, bazı durumlarda mutlak sürekli fonksiyonların bileşke fonksiyonu mutlak süreklidir.

Teorem 2.1.2. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon ve bu fonksiyon, değerleri $[A,B]$ aralığında olan fonksiyon olsun, $g(\cdot) : [A,B] \to R$ fonksiyonu $L > 0$ sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlasın. O zaman*

$$g \circ f = g(f(\cdot)) : [a,b] \to R$$

bileşke fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyondur.

Kanıt. $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olduğundan, keyfi $\frac{\varepsilon}{L} > 0$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_1,b_1), (a_2,b_2),...,(a_n,b_n) aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \leq \delta$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) - f(a_k) \mid \leq \frac{\varepsilon}{L} \tag{2.1.27}$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonun değerleri $[A,B]$ aralığında olduğundan, keyfi $k = 1,2,...,n$ için $f(a_k) \in [A,B]$, $f(b_k) \in [A,B]$ olur. $g(\cdot) : [A,B] \to R$ fonksiyonu $L > 0$ sabiti ile Lipschitz koşulunu sağladığından, keyfi $k = 1,2,...,n$ için

$$\mid g(f(b_k)) - g(f(a_k)) \mid \leq L \mid f(b_k) - f(a_k) \mid \tag{2.1.28}$$

olduğu bulunur. O halde, (2.1.27) ve (2.1.28)'den

$$\sum_{k=1}^{n} \mid g(f(b_k)) - g(f(a_k)) \mid \leq L \cdot \sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) - f(a_k)] \mid \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

olur, yani, $g \circ f = g(f(\cdot)) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir.

Teorem 2.1.3. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli ve kesin artan fonksiyon, $g(\cdot) : [f(a), f(b)] \to R$ fonksiyonu $[f(a), f(b)]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olsun. O zaman*

$$g \circ f = g(f(\cdot)) : [a,b] \to R$$

bileşke fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyondur.

Kanıt. $g(\cdot) : [f(a), f(b)] \to R$ fonksiyonu $[f(a), f(b)]$ aralığında mutlak sürekli olduğundan, keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[f(a), f(b)]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (A_1, B_1), (A_2, B_2),...,(A_n, B_n) aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n}(B_k - A_k) \leq \eta \tag{2.1.29}$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n} \mid g(B_k) - g(A_k) \mid \leq \varepsilon \tag{2.1.30}$$

olacak biçimde $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

Keyfi $k = 1, 2, ..., n$ için $A_k \in [f(a), f(b)]$, $B_k \in [f(a), f(b)]$, olduğundan, her $k = 1, 2, ..., n$ için $A_k = f(a_k)$, $B_k = f(b_k)$ olacak biçimde $a_k \in [a, b]$, $b_k \in [a, b]$ bulunur. (A_1, B_1), (A_2, B_2),...,(A_n, B_n) aralıklarının keyfi ikişer kesişimleri boş, $f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında kesin artan fonksiyon olduğundan, (a_1, b_1), (a_2, b_2),...,(a_n, b_n) aralıklarının da keyfi ikişer kesişimi boş olur. $f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli olduğundan, $\eta > 0$ için, $[a, b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_1, b_1), (a_2, b_2),...,(a_n, b_n) aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \leq \delta \tag{2.1.31}$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n} (B_k - A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) - f(a_k) \mid \leq \eta \tag{2.1.32}$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\eta(\varepsilon)) > 0$ sayısı vardır.

Keyfi $k = 1, 2, ..., n$ için $g(A_k) = g(f(a_k))$, $g(B_k) = g(f(b_k))$ olduğundan, (2.1.29) - (2.1.32)'den, $\varepsilon > 0$ için, $[a, b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_1, b_1), (a_2, b_2),..., (a_n, b_n) aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \leq \delta$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n} \mid g(f(b_k)) - g(f(a_k)) \mid = \sum_{k=1}^{n} \mid g(B_k) - g(A_k) \mid \leq \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\eta(\varepsilon)) > 0$ sayısı vardır. Bu ise,$g \circ f = g(f(\cdot)) : [a,b] \to R$ bileşke fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olduğunu kanıtlıyor.

Teorem ispatlandı.

Şimdi mutlak süreklilik özelliğini karakterize eden bir teorem sunalım.

Teorem 2.1.4. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunun mutlak sürekli olması için gerek ve yeter koşul, keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_1,b_1), (a_2,b_2),...,(a_n,b_n) aralıkları için*

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \leq \delta$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \leq \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısının olmasıdır.

Burada

$$M_k = \sup_{x \in [a_k,b_k]} f(x), \quad m_k = \inf_{x \in [a_k,b_k]} f(x).$$

Kanıt. Keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olan (a_1,b_1), (a_2,b_2),...,(a_n,b_n) altaralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \leq \delta$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \leq \varepsilon \tag{2.1.33}$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısının olduğunu varsayalım.

$$m_k \leq f(b_k) \leq M_k, \quad m_k \leq f(a_k) \leq M_k$$

olduğundan,

$$f(b_k) - f(a_k) \leq M_k - m_k, \quad f(b_k) - f(a_k) \geq -(M_k - m_k)$$

yani,

$$| f(b_k) - f(a_k) | \leq M_k - m_k$$

olur. Bu durumda, buradan ve (2.1.33)'ten, keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_1,b_1), (a_2,b_2),...,(a_n,b_n) aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \leq \delta$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n} | f(b_k) - f(a_k) | \leq \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. O halde, önerme 2.1.1'den, $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olduğunu elde ederiz.

Şimdi, $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olduğunu varsayalım. O zaman, keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_1,b_1), (a_2,b_2),...,(a_n,b_n) aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \leq \delta \tag{2.1.34}$$

iken

$$| \sum_{k=1}^{n} [f(b_k) - f(a_k)] | \leq \varepsilon \tag{2.1.35}$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olduğundan, bu fonksiyon $[a,b]$ aralığında süreklidir. Bu durumda,

$$M_k = \max_{x\in[a_k,b_k]} f(x), \quad m_k = \min_{x\in[a_k,b_k]} f(x) \tag{2.1.36}$$

olur ve

$$M_k = f(c_k), \quad m_k = f(d_k) \tag{2.1.37}$$

olacak biçimde $c_k \in [a_k,b_k]$, $d_k \in [a_k,b_k]$ bulunabilir. Genelliği bozmadan, keyfi $k = 1,2,...,n$ için $c_k \leq d_k$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, keyfi $k = 1,2,...,n$ için $[c_k,d_k] \subset [a_k,b_k]$ olur. O zaman (a_1,b_1), (a_2,b_2),...,(a_n,b_n) aralıklarının keyfi ikişer kesişimi boş, $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \le \delta$ olduğundan, (c_1, d_1), (c_2, d_2),...,(c_n, d_n) aralıklarının da keyfi ikişer kesişimi boş ve $\sum_{k=1}^{n}(c_k - d_k) \le \delta$ olur. O halde, (2.1.34) ve (2.1.35)'den

$$\left| \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - f(d_k)] \right| \le \varepsilon$$

olur. O zaman buradan, (2.1.36) ve (2.1.37)'den

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \le \varepsilon$$

olur. Teorem ispatlandı.

2.2. Mutlak sürekli fonksiyonların diferansiyellenebilirlik özellikleri

Biliyoruz ki, genelde, sürekli fonksiyonlar diferansiyellenebilir olmayabilir. Bu bölümde, mutlak sürekli fonksiyonların hemen hemen diferansiyellenebilir olduğunu göreceğiz. Önce, mutlak sürekli fonksiyonun tam varyasyonunun sonlu olduğunu gösterelim.

Teorem 2.2.1. *$f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olsun. O zaman*

$$V_a^b(f) < +\infty$$

olur

Kanıt. $f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olduğundan, $\varepsilon = 1$ için, $[a, b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_1, b_1), (a_2, b_2),...,(a_n, b_n) aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \le \delta \tag{2.2.1}$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n} \mid f(b_k) - f(a_k) \mid \leq 1 \tag{2.2.2}$$

olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı vardır.

Şimdi $[a, b]$ aralığının, keyfi $i = 0, 1, ..., N-1$ için, $c_{i+1} - c_i < \delta$ olacak biçimde $\Delta = \{a = c_0 < c_1 < c_2 < ... < c_N = b\}$ bölüntüsünü alalım. Keyfi $i = 0, 1, ..., N-1$ alalım ve sabitleyelim. Şimdi ise, $[c_i, c_{i+1}]$ aralığının keyfi $\Delta_* = \{c_i = c_0^{(*)} < c_1^{(*)} < c_2^{(*)} < ... < c_m^{(*)} = c_{i+1}\}$ bölüntüsünü alalım. O zaman

$$\sum_{j=0}^{m-1} (c_{j+1}^{(*)} - c_j^{(*)}) = c_{i+1} - c_i \leq \delta$$

olduğundan, (2.2.1) ve (2.2.2)'den

$$V_{\Delta_*}(f) = \sum_{j=0}^{m-1} \mid f(c_{j+1}^{(*)}) - f(c_j^{(*)}) \mid \leq 1 \tag{2.2.3}$$

olduğunu elde ederiz. Δ_*, $[c_i, c_{i+1}]$ aralığının keyfi bölüntüsü olduğundan, (2.2.3)'den

$$V_{c_i}^{c_{i+1}}(f) = \sup_{\Delta_*} V_{\Delta_*}(f) \leq 1 \tag{2.2.4}$$

olduğu bulunur. $i = 0, 1, ..., N-1$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, (2.2.4) eşitsizliği keyfi $i = 0, 1, ..., N-1$ için doğrudur. O zaman (2.2.4) ve önerme 1.2.6'dan

$$V_a^b(f) = \sum_{k=0}^{N-1} V_{c_i}^{c_{i+1}}(f) \leq N$$

olduğunu elde ederiz.

Teorem ispatlandı.

Böylece, mutlak sürekli fonksiyonların tam değişiminin sonlu olduğunu gördük. Şimdi verilen aralıkta sürekli olan, ancak mutlak sürekli olmayan fonksiyonlara bir örnek verelim. Bunun için örnek 1.2.1'deki fonksiyonu kullanacağız.

Örnek 2.2.1. $x \in [0, 1]$ için

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{\pi}{x} & x \in (0, 1], \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{2.2.5}$$

olsun. $f(\cdot) : [0,1] \to R$ fonksiyonunu ele alalim. Açıktır ki, (2.2.5) ile tanımlanan $f(\cdot) : [0,1] \to R$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında süreklidir. Örnek 1.2.1'de (2.2.5) ile tanımlanan $f(\cdot) : [0,1] \to R$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki tam değişiminin sonlu olmadığını gördük. O zaman, teorem 2.2.1'e göre bu fonksiyon mutlak sürekli olamaz.

Teorem 2.2.1'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.1. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olsun. O zaman hemen hemen $x \in [a,b]$ için $\frac{df(x)}{dx}$ türevi var ve $x \to \frac{df(x)}{dx}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdir.*

Kanıt. $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olduğundan, teorem 2.2.1'e göre $f(\cdot)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki tam değişimi sonludur. O zaman sonuç 1.2.3'e göre hemen hemen her $x \in [a,b]$ için $\frac{df(x)}{dx}$ türevi vardır ve $x \to \frac{df(x)}{dx}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdir.

Teorem 2.2.2. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli, hemen hemen her $x \in [a,b]$ için $\frac{df(x)}{dx} = 0$ olsun. O zaman $f(\cdot)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sabit fonksiyondur.*

Kanıt. $\mu(A)$ ile A kümesinin Lebesgue ölçümünü, $\mu^+(A)$ ile A kümesinin dış ölçümününü göstereceğiz.

$E = \{x \in (a,b) : \frac{df(x)}{dx} = 0\}$ olsun. $\varepsilon > 0$ alalım ve sabitleyelim. $x \in E$ olduğunu varsayalım. O zaman $\frac{df(x)}{dx} = 0$ olduğundan, keyfi $h \in (0, h(x))$ için

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| < \varepsilon \tag{2.2.6}$$

olacak biçimde $h(x) > 0$ sayısı bulunabilir. Keyfi $\sigma > 0$ sayısı alalım. Keyfi $x \in E$ için $h(x) > 0$ sayısı yeterli küçük seçilebildiğinden, genelliği bozmadan, keyfi $x \in E$ için $h(x) < \sigma$ olduğunu varsayabiliriz. Bu durunda, $[x, x+h(x)]$, $x \in E$, aralıkları E kümesini Vitali anlamında örter. Keyfi $\delta > 0$ sayısı alalım ve sabitleyelim. O zaman teorem 1.1.3'e göre, $\delta > 0$ sayısı için, $[x, x+h(x)]$, $x \in E$, aralıklarından sonlu sayıda ve ikişer kesişmeyen

$$d_1 = [x_1, x_1 + h_1],\ d_2 = [x_2, x_2 + h_2],\ \ldots d_n = [x_n, x_n + h_n] \tag{2.2.7}$$

aralıkları seçilebilir öyle ki,

$$\mu^+(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, x_i + h_i]) < \delta \tag{2.2.8}$$

olur. Burada $i = 1, 2, ..., n$ için $h_i = h(x_i) > 0$ sayıları (2.2.6)'da $x = x_i$ noktaları için tanımlanmış sayılardır.

Hemen hemen her $x \in [a, b]$ için $\frac{df(x)}{dx} = 0$ olduğundan, $\mu(E) = b - a$ olur, yani E kümesi ölçülebilir kümedir ve ölçümü $b - a$'dır. Bu durumda, $E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, x_i + h_i]$ kümesi de ölçülebilir küme olur ve (2.2.8) eşitsizliği

$$\mu(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, x_i + h_i]) < \delta \tag{2.2.9}$$

gibi yazılabilir. $\mu(E) = b - a$ olduğundan, (2.2.7) ve (2.2.9)'dan

$$b - a = \mu(E) \leq \mu((E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, x_i + h_i]) \bigcup (\bigcup_{i=1}^{n} [x_i, x_i + h_i]\ )) =$$

$$= \mu((E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} d_i) \bigcup (\bigcup_{i=1}^{n} d_i\ )) \leq \mu(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} d_i) + \mu(\bigcup_{i=1}^{n} d_i\ ) <$$

$$< \delta + \mu(\bigcup_{i=1}^{n} d_i\ )$$

bulunur. Buradan ise

$$b - a - \mu(\bigcup_{i=1}^{n} d_i\ ) < \delta \tag{2.2.10}$$

olduğunu elde ederiz.

Genelliği bozmadan, keyfi $i = 1, 2, ..., n-1$ için $x_i < x_{i+1}$ olduğunu varsayalım. $d_1 = [x_1, x_1 + h_1]$, $d_2 = [x_2, x_2 + h_2]$, $\ldots$ $d_n = [x_n, x_n + h_n]$ aralıklarının keyfi ikişer kesişimleri boş olduğundan, $[a, x_1)$, $(x_1 + h_1, x_2)$, $\ldots$ $(x_{n-1} + h_{n-1}, x_n)$, $(x_n + h_n, b]$

aralıklarının da keyfi ikişer kesişimleri boştur. O zaman $[a,b] \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, x_i + h_i]$ kümesi, $[a, x_1)$, $(x_1 + h_1, x_2)$, ... $(x_{n-1} + h_{n-1}, x_n)$, $(x_n + h_n, b]$ aralıklarının bileşimi olur, yani

$$[a,b] \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, x_i + h_i] = [a, x_1) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (x_i + h_i, x_{i+1}) \right) \bigcup (x_n + h_n, b] \tag{2.2.11}$$

olur. Keyfi $i = 1, 2, ..., n$ için $[x_i, x_i + h_i] \subset [a, b]$ olduğundan, (2.2.10) ve (2.2.11)'den

$$\begin{aligned} &\mu([a, x_1) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (x_i + h_i, x_{i+1}) \right) \bigcup (x_n + h_n, b] \,) = \\ &= \mu([a,b] \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, x_i + h_i]) = \mu([a,b]) - \mu(\bigcup_{i=1}^{n} [x_i, x_i + h_i]) = \\ &= b - a - \mu(\bigcup_{i=1}^{n} [x_i, x_i + h_i]) < \delta \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

olduğunu elde ederiz.

Hatırlatalım ki, $\varepsilon > 0$ sayısı keyfı sabitlenmiş sayıdır ve bu sayı için (2.2.6) eşitsizliği sağlanır. $\delta > 0$ sayısı ise keyfi seçilmiş bir sayıdır. Şimdi $\delta > 0$ sayısının seçimini kesinleştirelim.

$f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon, $[a, x_1)$, $(x_1 + h_1, x_2)$, ... $(x_{n-1} + h_{n-1}, x_n)$, $(x_n + h_n, b]$ aralıklarının keyfi ikişer kesişimi boş olduğundan, $\varepsilon > 0$ için, $\delta = \delta(\varepsilon)$ olarak, $[a, x_1)$, $(x_1 + h_1, x_2)$, ... $(x_{n-1} + h_{n-1}, x_n)$, $(x_n + h_n, b]$ aralıkları (2.2.12) eşitsizliğini sağlarken,

$$| f(x_1) - f(a) | + \sum_{i=1}^{n-1} | f(x_{i+1}) - f(x_i + h_i) | + | f(b) - f(x_n + h_n) | < \varepsilon \tag{2.2.13}$$

olacak biçimde seçelim.

$h_i = h(x_i)$'lerin, $(i = 1, 2, ..., n)$, seçiminden, (2.2.6)'dan, keyfi $i = 1, 2, ..., n$ için

$$| f(x_i + h_i) - f(x_i) | < \varepsilon \cdot h_i$$

olduğu bulunur. (2.2.7)'den, keyfi $i = 1, 2, ..., n$ için $\mu(d_i) = h_i$ olduğundan, buradan

$$\sum_{i=1}^{n} | f(x_{i+1}) - f(x_i) | < \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu(d_i) \tag{2.2.14}$$

olur. Keyfi $i = 1,2,...,n$ için $d_i \subset [a,b]$ olduğundan, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} d_i \subset [a,b]$ olur. d_i aralıklarının keyfi ikişer kesişimi boş olduğundan,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(d_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} d_i\ ) \leq \mu([a,b]) = b-a$$

bulunur. O halde, buradan ve (2.2.14)'den

$$\sum_{i=1}^{n} \mid f(x_{i+1}) - f(x_i) \mid < \varepsilon \cdot (b-a) \tag{2.2.15}$$

olduğunu elde ederiz. O zaman (2.2.13) ve (2.2.15)'den

$$\begin{aligned} \mid f(b) - f(a) \mid = \mid [f(x_1) - f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i + h_i)] + \\ + f(b) - f(x_n + h_n)] + \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i+1} + h_i) - f(x_i)] \mid \leq \\ \leq [\mid f(x_1) - f(a) \mid + \sum_{i=1}^{n-1} \mid f(x_{i+1}) - f(x_i + h_i) \mid + \\ + \mid f(b) - f(x_n + h_n) \mid] + \sum_{i=1}^{n} \mid f(x_{i+1} + h_i) - f(x_i) \mid \leq \\ \leq \varepsilon + \varepsilon \cdot (b-a) = \varepsilon \cdot (1 + b - a) \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

bulunur. $\varepsilon > 0$ keyfi sabitlenmiş pozitif sayı olduğundan, (2.2.16)'dan $\mid f(b) - f(a) \mid = 0$ ve $f(b) = f(a)$ elde ederiz.

Şimdi keyfi $x \in (a,b]$ alırsak ve yaptığımız ispatı $[a,x]$ aralığı için tekrarlarsak, $f(x) = f(a)$ buluruz. Buradan keyfi $x \in [a,b]$ için $f(x) = f(a)$ olduğunu elde ederiz, yani $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sabit fonksiyondur.

Teorem ispatlandı.

Sonuç 2.2.2. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ ve $g(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar, hemen hemen her $x \in [a,b]$ için $\frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(x)}{dx}$ olsun. O zaman $f(\cdot)$ ve $g(\cdot)$ fonksiyonlarının farkı sabittir.*

Kanıt. Hemen hemen her $x \in [a,b]$ için $\frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(x)}{dx}$ olduğundan, hemen hemen her $x \in [a,b]$ için $\frac{d(f(x)-g(x))}{dx} = 0$ olur. O zaman, teorem 2.2.2'den, $f(\cdot) - g(\cdot)$ fonksiyonu sabit fonksiyondur.

2.3. Sürekli ve mutlak sürekli fonksiyonların ilişkisi

Biliyoruz ki, $f(\cdot) : [a, b] \to R$ sürekli fonksiyon, $A \subset [a, b]$ kapalı küme ise, $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ kümesi, yani A kümesinin $f(\cdot)$ fonksiyonu altındaki görüntüsü kapalı kümedir.

Şimdi F_σ-türü kümelerin tanımını verelim. Eğer E kümesi sayılabilir sayıda kapalı A_k, $k = 1, 2, ...$, kümelerinin bileşimi gibi verilebilirse, yani A_k, $k = 1, 2, ...$, kümeleri kapalı olmak üzere $E = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ ise, E kümesine F_σ-türü küme denir. Açıktır ki, eğer $f(\cdot) : [a, b] \to R$ sürekli fonksiyon, $E \subset [a, b]$ kümesi F_σ-türü küme ise, $f(E) = \{f(x) : x \in E\}$ kümesi de F_σ-türü kümedir.

$E \subset [a, b]$ kümesi ölçülebilir küme olsun. O zaman $f(\cdot) : [a, b] \to R$ sürekli fonksiyon olmak üzere ölçülebilir $E \subset [a, b]$ kümesinin $f(E) = \{f(x) : x \in E\}$ görüntüsü ölçülebilir olur mu? Bu bölümde, bu problemin araştırılması ile uğraşacağız.

$f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonu için N-özelliğin tanımını sunalım. Bu bölümde de, $E \subset [a, b]$ için $\mu(E)$ ile E kümesinin Lebesgue ölçümünü göstereceğiz.

Tanım 2.3.1. *$f(\cdot) : [a, b] \to R$ olsun. Eger $\mu(U) = 0$ olacak keyfi $U \subset [a, b]$ kümesi için*

$$\mu(f(U)) = 0$$

ise, $f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonuna N-özellikli fonksiyon denir.

Bir başka deyişle, ölçümü sıfır olan keyfi kümenin N-özellikli fonksiyon altındaki görüntüsünün de ölçümü sıfırdır.

Teorem 2.3.1. *$f(\cdot) : [a, b] \to R$ sürekli fonksiyon olsun. O zaman keyfi ölçülebilir $E \subset [a, b]$ kümesinin $f(\cdot)$ fonksiyonu altındaki $f(E) = \{f(x) : x \in E\}$ görüntüsünün ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul, $f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonunun N-özellikli olmasıdır.*

Kanıt. $E \subset [a, b]$ kümesinin ölçülebilir ve $f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonunun N-

özelliğine sahip olduğunu varsayalım. Eğer $\mu(E) = 0$ ise, o zaman $f(\cdot)$ fonksiyonu N-özellikli fonksiyon olduğundan, $\mu(f(E)) = 0$ ve dolayısıyla $f(E)$ kümesi ölçülebilir küme olur.

Şimdi $\mu(E) > 0$ olduğunu varsayalım. A kümesi F_σ-türü ve $\mu(U) = 0$ olmak üzere

$$E = A \bigcup U \tag{2.3.1}$$

gibi gösterilebileceğini kanıtlayalım.

$E \subset [a, b]$ kümesi ölçülebilir küme, $\mu(E) > 0$ olduğundan, teorem 1.1.2'den, keyfi $n > 0$ doğal sayısı için,

$$\mu(E) - \frac{1}{n} < \mu(A_n) < \mu(E) \tag{2.3.2}$$

olacak biçimde $A_n \subset E$ kapalı kümesi bulunabilir. Şimdi $A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$, $U = E \setminus A$ olsun. Keyfi $n = 1, 2, ...$ için $A_n \subset E$, A_n kümeleri kapalı küme olduğundan dolayı, A kümesi F_σ-türü kümedir ve $A \subset E$ olur. $U = E \setminus A$ olduğundan, $A \bigcup U = \emptyset$. Şimdi

$$\mu(U) = 0 \tag{2.3.3}$$

olduğunu gösterelim.

$A \subset E$ olduğundan, $\mu(A) \leq \mu(E)$'dır. Öte yandan, keyfi $n = 1, 2, ...$ için $A_n \subset A$ olduğundan, $\mu(A_n) \leq \mu(A)$ olur. Buradan ve (2.3.2)'den

$$\mu(E) - \frac{1}{n} < \mu(A_n) \leq \mu(A) \leq \mu(E)$$

olduğunu elde ederiz. Yani keyfi $n = 1, 2, ...$ için

$$\mu(E) - \frac{1}{n} < \mu(A) \leq \mu(E) \tag{2.3.4}$$

olduğu bulunur. (2.3.4) eşitsizliği keyfi $n = 1, 2, ...$ için sağlandığından, $\mu(A) = \mu(E)$ olur. $A \subset E$ olduğundan, $\mu(U) = \mu(E \setminus A) = \mu(E) - \mu(A) = 0$ olur, yani (2.3.3) doğrudur.

$A \subset E$, $U = E \setminus A$ olduğundan, $E = A \bigcup U$ olur. A kümesi F_σ-türü küme ve $\mu(U) = 0$ olduğundan, (2.3.1)'in doğruluğunu elde ederiz. Bu durumda (2.3.1)'den,

$$f(E) = f(A) \bigcup f(U) \tag{2.3.5}$$

olduğu bulunur.

$\mu(U) = 0$, $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu N-özellikli olduğundan, $\mu(f(U)) = 0$'dır, yani $f(U)$ kümesinin ölçümü sıfırdır, başka bir deyişle $f(U)$ kümesi ölçülebilirdir.

$A \subset E \subset [a,b]$ kümesi F_σ-türü küme, $f(\cdot) : [a,b] \to R$ sürekli fonksiyon olduğundan, A kümesinin $f(\cdot)$ fonksiyonu altındaki $f(A)$ görüntüsü de F_σ-türü kümedir. F_σ-türü kümeler ölçülebilir olduğundan, $f(A)$ kümesinin ölçülebilirliğini elde ederiz. (2.3.5)'ten, $f(E)$ kümesi ölçülebilir $f(A)$ ve $f(U)$ kümelerinin bileşimi olur. Bu durumda $f(E)$ kümesi de ölçülebilir küme olur.

Şimdi, keyfi ölçülebilir $E \subset [a,b]$ kümesinin, $f(\cdot)$ fonksiyonu altındaki $f(E) = \{f(x) : x \in E\}$ görüntüsünün de ölçülebilir olduğunu varsayalım. $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonunun N-özellikli olduğunu gösterelim.

Aksini varsayalım. Varsayımımızın tersine, $\mu(U_0) = 0$, $\mu(f(U_0)) > 0$ olacak biçimde bir $U_0 \subset [a,b]$ kümesinin olduğunu kabul edelim.

Teorem 1.1.1'den, ölçümü pozitif olan keyfi kümenin, ölçülebilir olmayan alt kümesi vardır. O zaman, $\mu(f(U_0)) > 0$ olduğundan, $B \subset f(U_0)$ olacak biçimde ölçülebilir olmayan B kümesi vardır. Eğer $f(U_0)$ kümesi ölçülebilir değilse, o zaman $B = f(U_0)$ alırız.

$$A = \{x \in U_0 : f(x) \in B\}$$

olsun. Açıktır ki,

$$A \subset U_0, \qquad \mu(U_0) = 0$$

olduğundan dolayı

$$\mu(A) = 0$$

olur.

Şimdi $f(A) = B$ olduğunu gösterelim. $f(A) \subset B$ olduğu açıktır. $B \subset f(A)$ olduğunu görelim. Keyfi $y \in B$ alalım. $B \subset f(U_0)$ olduğundan, $y \in f(U_0)$ olur. Bu durumda, $y = f(x)$ olacak biçimde $x \in U_0$ vardır. $y \in B$ için $x \in U_0$ olmak üzere $f(x) = y$ olduğundan, $x \in A$ olduğunu elde ederiz. $x \in A$, $f(x) = y$ olduğundan, $y \in f(A)$ olur. $y \in B$ keyfi eleman olduğundan, $B \subset f(A)$ bulunur. Böylece, $f(A) = B$ olduğunu gördük.

$\mu(A) = 0$ olduğundan, A kümesi ölçülebilirdir. O zaman koşulumuza göre, $f(A)$ kümesi de ölçülebilir kümedir. $B = f(A)$ olduğundan, B kümesi de ölçülebilir küme olur. Bu ise B kümesinin ölçülebilir olmaması ile çelişir. O zaman varsayımız doğru değil, yani $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu N-özelliğine sahiptir.

Teorem ispatlandı.

Sıradaki teoremde, mutlak sürekli fonksiyonların N-özelliğine sahip olduklarını göstereceğiz.

Teorem 2.3.2. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ mutlak sürekli fonksiyon olsun. O zaman $f(\cdot)$ fonksiyonu N-özelliğine sahiptir.*

Kanıt. $\mu(E) = 0$ olacak keyfi $E \subset [a,b]$ kümesi alalım.

$$\mu(f(E)) = 0. \tag{2.3.6}$$

olduğunu gösterelim.

Önce $a \notin E$, $b \notin E$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $E \subset (a,b)$ olur. $\varepsilon > 0$ alalım ve sabitleyelim. $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olduğundan, teorem 2.1.4'e göre, $\varepsilon = 1$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_1,b_1), (a_2,b_2),...,(a_n,b_n) aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \leq \delta \tag{2.3.7}$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \leq \varepsilon \tag{2.3.8}$$

olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı vardır. Burada

$$M_k = \max\, \{f(x) : x \in [a_k,b_k]\}, \quad m_k = \min\, \{f(x) : x \in [a_k,b_k]\}.$$

$\mu(E) = 0$ olduğundan, $\delta > 0$ için

$$E \subset G, \quad \mu(G) < \delta$$

olacak biçimde açık $G \subset (a,b)$ kümesi bulunur. $G \subset (a,b)$ açık küme olduğundan, $G = \bigcup_i (c_i, d_i)$ olacak biçimde ikişer kesişimleri boş olan (c_i, d_i) açık aralıkları var. O zaman, $\mu(G) < \delta$ olduğundan,

$$\sum_i (d_i - c_i) \leq \delta \tag{2.3.9}$$

olur. $E \subset G = \bigcup_i (c_i, d_i)$ olduğundan,

$$f(E) \subset f(G) = \bigcup_i f((c_i, d_i)) \subset \bigcup_i f([c_i, d_i])$$

olduğunu elde ederiz. Buradan

$$\mu^+(f(E)) \leq \sum_i \mu(f([c_i, d_i])) \tag{2.3.10}$$

olduğu bulunur. $\mu^+(f(E))$, $f(E)$ kümesinin dış ölçümüdür.

$$R_i = \max\{f(x) : x \in [c_i, d_i]\}, \quad r_i = \min\{f(x) : x \in [c_i, d_i]\}$$

olsun. O zaman

$$\mu(f([c_i, d_i])) \leq R_i - r_i$$

olur ve bu durumda (2.3.10)'dan

$$\mu^+(f(E)) \leq \sum_i (R_i - r_i) \tag{2.3.11}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olduğundan, (2.3.7), (2.3.8) ve (2.3.9)'dan

$$\sum_i (R_i - r_i) \leq \varepsilon$$

olduğu bulunur. Buradan ve (2.3.11)'den

$$\mu^+(f(E)) \leq \varepsilon \tag{2.3.12}$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfi sabitlenmiş sayı olduğundan, (2.3.12)'den $\mu^+(f(E)) = 0$ ve buradan $\mu(f(E)) = 0$ olduğunu elde ederiz. Böylece, $a \notin E$, $b \notin E$ olduğu durumda, $\mu(E) =$

0 olacak keyfi $E \subset [a,b]$ kümesi için (2.3.6)'nın doğru olduğunu, yani $\mu(f(E)) = 0$ olduğunu gördük.

Şimdi $E \subset [a,b]$, $\mu(E) = 0$ olmak üzere E kümesinin a ve b noktalarından herhangi birini veya her ikisini içerdiğini varsayalım. $E_* = E \setminus \{a,b\}$ olsun. O zaman $\mu(E_*) = 0$ olur. $E_* \subset [a,b]$, $\mu(E_*) = 0$, $a \notin E_*$, $b \notin E_*$ olduğundan, E_* kümesi için (2.3.6) eşitliliği doğrudur, yani $\mu(f(E_*)) = 0$. Buradan ise

$$\mu(f(E_*) \bigcup \{f(a), f(b)\}) = 0 \qquad (2.3.13)$$

olduğunu elde ederiz.

$E \subset (E_* \bigcup \{a,b\})$ olduğundan, $f(E) \subset f(E_*) \bigcup \{f(a), f(b)\})$ olur. Buradan

$$\mu(f(E)) \leq \mu(f(E_*) \bigcup \{f(a); f(b)\})$$

olduğu bulunur. Bu durumda buradan ve (2.3.13)'ten $\mu(f(E)) = 0$ olduğunu elde ederiz. Yani, $E \subset [a,b]$, $\mu(E) = 0$ olmak üzere E kümesi a ve b noktalarından herhangi birini veya her ikisini içerdiği durumda da (2.3.6) sağlanır, yani $\mu(f(E)) = 0$ olur.

Böylece, $\mu(E) = 0$ olacak keyfi $E \subset [a,b]$ kümesi için (2.3.6) sağlanır, yani $\mu(f(E)) = 0$ olur. Bu ise $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonun N-özelliğine sahip olması demektir.

Teorem ispatlandı.

Teorem 2.3.1 ve teorem 2.3.2'den, ölçülebilir kümenin, mutlak sürekli fonksiyon altındaki görüntüsünün de ölçülebilir olduğu sonucu elde edilir.

Sonuç 2.3.1. *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ mutlak sürekli fonksiyon olsun. O zaman ölçülebilir $E \subset [a,b]$ kümesinin $f(\cdot)$ fonksiyonu altındaki $f(E)$ görüntüsü de ölçülebilir kümedir.*

Kanıt. $f(\cdot) : [a,b] \to R$ mutlak sürekli fonksiyon olduğundan, teorem 2.3.2'ye göre N-özelliğine sahiptir. O zaman teorem 2.3.1'e göre keyfi ölçülebilir $E \subset [a,b]$ kümesinin $f(\cdot)$ fonksiyonu altındaki $f(E)$ görüntüsü de ölçülebilir kümedir.

Mutlak sürekli fonksiyonun tam değişiminin sonlu ve bu fonksiyonun N-özelliğine sahip olduğunu gördük. Bu iki özellik, yani fonksiyonun tam değişiminin sonlu ve N-özelliğine sahip olması, mutlak sürekliliği karakterize eden özelliklerdir.

Teorem 2.3.3. (S.Banach - M.A.Zaretsky) *$f(\cdot) : [a,b] \to R$ sürekli fonksiyon olsun. $f(\cdot)$ fonksiyonun $[a,b]$ aralığındaki tam değişiminin sonlu ve bu fonksiyonun N-özelliğine sahip olduğunu varsayalım. O zaman $f(\cdot)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir.*

Kanıt. Aksini varsayalım, yani $f(\cdot) : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olmasın. O zaman, teorem 2.1.4'den, $\delta_i = \frac{1}{2^i}$ $(i = 1,2,...)$ için,

$$\sum_{k=1}^{n_i}(b_k^{(i)} - a_k^{(i)}) \leq \delta_i = \frac{1}{2^i} \tag{2.3.14}$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n_i} (M_k^{(i)} - m_k^{(i)}) > \varepsilon_0 \tag{2.3.15}$$

olacak biçimde $\varepsilon_0 > 0$ sayısı ve keyfi ikişer kesişimleri boş olacak $(a_k^{(i)}, b_k^{(i)}) \subset [a,b]$ $(k = 1,2,...,n_i)$ aralıkları bulunabilir. Burada

$$M_k^{(i)} = \max\{f(x) : x \in [a_k^{(i)}, b_k^{(i)}]\}, \quad m_k^{(i)} = \min\{f(x) : x \in [a_k^{(i)}, b_k^{(i)}]\}.$$

$$E_i = \bigcup_{k=1}^{n_i} (a_k^{(i)}, b_k^{(i)}), \quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \tag{2.3.16}$$

olsun. (2.3.14) ve (2.3.16)'dan, keyfi $i = 1,2,...$ için $\mu(E_i) \leq \delta_i = \frac{1}{2^i}$ olur. O zaman buradan

$$\mu(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \mu(E_i) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \tag{2.3.17}$$

olduğunu elde ederiz. (2.3.16)'dan, keyfi $n = 1, 2, ...$ için $A \subset \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$ olur. O halde, buradan ve (2.3.17)'den

$$\mu(A) \leq \mu(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \tag{2.3.18}$$

olduğu bulunur. (2.3.18) eşitsizliği keyfi $n = 1, 2, ...$ için sağlandığından, $\mu(A) = 0$ olur.

Şimdi $y \to L_k^{(i)}(y) : R \to R$ fonksiyonunu tanımlayalım. Eğer $y \in R$ için $f(x) = y$ olacak biçimde hiç olmazsa bir $x \in (a_k^{(i)}, b_k^{(i)})$ varsa, $L_k^{(i)}(y) = 1$, aksi durumda ise, yani $(a_k^{(i)}, b_k^{(i)})$ aralığında $f(x) = y$ olacak biçimde hiçbir x yoksa, $L_k^{(i)}(y) = 0$ olsun.

Keyfi $y \in (m_k^{(i)}, M_k^{(i)})$ için $L_k^{(i)}(y) = 1$ ve $y \notin [m_k^{(i)}, M_k^{(i)}]$ için $L_k^{(i)}(y) = 0$ olduğu açıktır. Eğer

$$M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}, \quad m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

dersek, o zaman

$$\int_m^M L_k^{(i)}(y)dy = \int_{m_k(i)}^{M_k(i)} L_k^{(i)}(y)dy = M_k^{(i)} - m_k^{(i)} \tag{2.3.19}$$

olur.

$$N_i(y) = \sum_{k=1}^{n_i} L_k^{(i)}(y) \tag{2.3.20}$$

olsun. Açıktır ki, $y \to N_i(y)$ fonksiyonu ölçülebilir fonksiyondur, keyfi $y \in R$ için $N_i(y)$ doğal sayıdır ve $0 \leq N_i(y) \leq n_i$. Ayrıca, keyfi $y \in R$ için $N_i(y)$, $f(x) = y$ denkleminin x çözümlerinin bulunduğu $(a_k^{(i)}, b_k^{(i)})$ aralıklarının sayısıdır.

Şimdi $y \to N(y)$ ile $f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonun Banach indikatrisini gösterelim. Yani keyfi $y \in R$ için $N(y)$, $[a, b]$ aralığında $f(x) = y$ denklemini sağlayan x'lerin sayısıdır. O zaman, açıktır ki, keyfi $i = 1, 2, ...$ ve $y \in R$ için

$$0 \leq N_i(y) \leq N(y) \tag{2.3.21}$$

olur.

(2.3.19) ve (2.3.20)'den, keyfi $i = 1, 2, ...$ için

$$\int_m^M N_i(y)dy = \int_m^M \sum_{k=1}^{n_i} L_k^{(i)}(y)dy = \sum_{k=1}^{n_i} \int_m^M L_k^{(i)}(y)dy = \sum_{k=1}^{n_i}(M_k^{(i)} - m_k^{(i)}) \tag{2.3.22}$$

olduğunu elde ederiz. Bu durumda, (2.3.15) ve (2.3.22)'den

$$\int_m^M N_i(y)dy > \varepsilon_0 \tag{2.3.23}$$

olduğu bulunur.

Şimdi, hemen hemen her $y \in [m, M]$ için

$$\lim_{i \to +\infty} N_i(y) = 0 \tag{2.3.24}$$

olduğunu gösterelim.

$$B = \{y \in [m, M] : \limsup_{i \to +\infty} N_i(y) > 0\}, \tag{2.3.25}$$

$$C = \{y \in [m, M] : N(y) = +\infty\} \tag{2.3.26}$$

olsun. $f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki tam değişimi sonlu olduğundan, sonuç 1.5.1'e göre, $N(\cdot) : [m, M] \to R \bigcup \{+\infty\}$ fonksiyonu $[m, M]$ aralığında integrallenebilirdir ve $\int_m^M N(y)dy$ integrali sonludur. O zaman $\mu(C) = 0$ olur. Aksi durumda, yani $\mu(C) > 0$ olduğu durumda, keyfi $y \in [m, M]$ için $N(y) \geq 1$ olduğundan, $\int_m^M N(y)dy = +\infty$ olurdu. Bu ise olamaz, yani $\mu(C) = 0$. Şimdi

$$(B \setminus C) \subset f(A) \tag{2.3.27}$$

olduğunu gösterelim. Burada B kümesi (2.3.25), C kümesi (2.3.26), A kümesi (2.3.16) ile tanımlanan kümelerdir.

$y_0 \in B \setminus C$ alalım. O zaman $y_0 \in B$, $y_0 \notin C$ olur. Buradan

$$\limsup_{i \to +\infty} N_i(y_0) > 0, \quad N(y_0) < +\infty \tag{2.3.28}$$

olduğunu elde ederiz. Keyfi $i = 1, 2, ...$ için $N_i(y_0)$'ın değeri pozitif tamsayı veya sıfır olduğundan, (2.3.28)'den, $\{N_i(y_0)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisinin

$$\lim_{r \to +\infty} N_{i_r}(y_0) \geq 1 \tag{2.3.29}$$

olacak biçimde $\{N_{i_r}(y_0)\}_{r=1}^{\infty}$ alt dizisi bulunur. Yine de keyfi $r = 1, 2, ...$ için $N_{i_r}(y_0)$'ın değeri pozitif tamsayı veya sıfır olduğundan, (2.3.29)'dan, keyfi $r \geq r_*$

için

$$N_{i_r}(y_0) \geq 1 \tag{2.3.30}$$

olacak biçimde $r_* > 0$ sayısı bulunabilir. O zaman (2.3.30)'dan ve $N_{i_r}(y_0)$'ın tanımından, keyfi $r \geq r_*$ için, $f(x) = y_0$ denkleminin $(a_k^{(i_r)}, b_k^{(i_r)})$, $k = 1, 2, ..., n_{i_r}$ aralıklarında en az bir çözümünün olduğunu elde ederiz. O halde $E_{i_r} = \bigcup_{k=1}^{n_{i_r}} (a_k^{(i_r)}, b_k^{(i_r)})$ olduğundan, keyfi $r \geq r_*$ için, $f(x_{i_r}) = y_0$ olacak biçimde en az bir $x_{i_r} \in E_{i_r}$ bulunur. Öte yandan, (2.3.28)'den, $N(y_0) < +\infty$ olduğundan, $[a, b]$ aralığında, $f(x) = y_0$ denklemini sağlayacak x'ler sonlu sayıdadır. O halde $\{x_{i_r}\}_{r=r_*}^{\infty}$ dizisinin en az bir elemanı sonsuz kere tekrarlanır. Sonsuz tekrarlanan elemanlardan birini alalım ve bu elemanı x_* ile gösterelim. Yani x_* elemanı $\{x_{i_r}\}_{r=r_*}^{\infty}$ dizisinde sonsuz kere tekrarlanır. O zaman, $f(x_*) = y_0$ olmak üzere, keyfi $r > r_*$ için

$$x_* = x_{i_{r_1}} \in E_{i_{r_1}}$$

olacak biçimde $r_1 > r$ bulunur. Buradan, keyfi $n = 1, 2, ...$ için $x_* \in \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$ olduğunu elde ederiz. Bu durumda $x_* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i = A$ olur. $y_0 = f(x_*)$ olduğundan dolayı, $y_0 \in f(A)$ olduğunu elde ederiz.

Böylece, (2.3.27) içermesinin doğru olduğunu gördük.

$\mu(A) = 0$, $f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonu N-özelliğine sahip olduğundan, $\mu(f(A)) = 0$ olur. O zaman, (2.3.27)'den

$$\mu(B \setminus C) \leq \mu(f(A)) = 0 \tag{2.3.31}$$

olduğunu elde ederiz.

Açıktır ki $B \subset (B \setminus C) \cup C$. O zaman $\mu(B) \leq \mu((B \setminus C) \cup C) \leq \mu(B \setminus C) + \mu(C)$ olduğu bulunur. $\mu(C) = 0$ olduğundan, buradan ve (2.3.31)'den $\mu(B) = 0$ olduğunu elde ederiz. Keyfi $y \in [m, M]$ ve $i = 1, 2, ...$ için $N_i(y) \geq 0$ olduğundan, B kümesinin tanımından, hemen hemen her $y \in [m, M]$ için $\lim_{i \to +\infty} N_i(y) = 0$ olduğunu elde ederiz, yani (2.3.24) doğrudur.

(2.3.21)'e göre, keyfi $y \in [m, M]$ ve $i = 1, 2, ...$ için $0 \leq N_i(y) \leq N(y)$ olduğunu biliyoruz. Burada $N(\cdot) : [m, M] \to R \bigcup \{+\infty\}$ fonksiyonu, tam değişimi sonlu olan sürekli $f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonun Banach indikatrisidir. Bu durumda, sonuç 1.5.1'e göre, $N(\cdot)$ fonksiyonunun $[m, M]$ aralığındaki integrali sonludur. O zaman buradan, (2.3.21), (2.3.24) ve teorem 1.1.6'dan,

$$\lim_{i \to +\infty} \int_m^M N_i(y) dy = 0$$

olduğunu elde ederiz. O halde $\varepsilon_0 > 0$ için, keyfi $i > i_*$ için

$$\int_m^M N_i(y) dy < \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{2.3.32}$$

olacak biçimde i_* sayısı bulunabilir. (2.3.23) ve (2.3.32) çelişir. O zaman varsayımımız doğru değildir ve $f(\cdot) : [a, b] \to R$ fonksiyonu mutlak süreklidir.

Teorem ispatlandı.

Bazı bileşke fonksiyonların mutlak süreklilik özelliğini bölüm 2.1'de inceledik. Şimdi, iki mutlak sürekli fonksiyonun bileşke fonksiyonunun da mutlak sürekliliğini karakterize edecek başka bır teorem sunalım.

Teorem 2.3.4. (G.M.Fikhtengolts) *$f(\cdot) : [a, b] \to [c, d]$, $g(\cdot) : [c, d] \to R$ mutlak sürekli fonksiyonlar olsun. O zaman $g(f(\cdot)) : [a, b] \to R$ bileşke fonksiyonunun mutlak sürekli olması için gerek ve yeter koşul, $g(f(\cdot)) : [a, b] \to R$ fonksiyonunun tam değişiminin sonlu olmasıdır.*

Kanıt. Eger $g(f(\cdot)) : [a, b] \to R$ fonksiyonu mutlak sürekli ise, o zaman teorem 2.2.1'e göre bu fonksiyonun tam değişimi sonludur.

Şimdi, $g(f(\cdot)) : [a, b] \to R$ fonksiyonunun tam değişiminin sonlu olduğunu varsayalım. $\mu(E) = 0$ olacak biçimde keyfi $E \subset [a, b]$ kümesi alalım. $f(\cdot) : [a, b] \to [c, d]$ mutlak sürekli fonksiyon olduğundan, teorem 2.3.2'ye göre bu fonksiyon N-özelliğine sahiptir. O zaman $f(E) \subset [c, d]$ ve $\mu(f(E)) = 0$ olur.

$g(\cdot) : [c, d] \to R$ mutlak sürekli fonksiyon olduğundan, teorem 2.3.2'ye göre bu fonksiyon N-özelliğine sahiptir. O zaman $f(E) \subset [c, d]$ ve $\mu(f(E)) = 0$ olduğundan,

$\mu(g(f(E))) = 0$ olur.

Böylece, keyfi $E \subset [a,b]$ kümesi için $\mu(E) = 0$ iken, $\mu(g(f(E))) = 0$ olduğunu gördük, yani $g(f(\cdot)) : [a,b] \to R$ fonksiyonu N-özelliğine sahiptir.

$f(\cdot) : [a,b] \to [c,d]$, $g(\cdot) : [c,d] \to R$ mutlak sürekli fonksiyonlar olduğundan, bu fonksiyonlar uygun olarak $[a,b]$ ve $[c,d]$ aralıklarında sürekli fonksiyonlardır. O zaman $g(f(\cdot)) : [a,b] \to R$ bileşke fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyondur.

Ek olarak $g(f(\cdot)) : [a,b] \to R$ bileşke fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında tam değişimi sonlu olduğundan, teorem 2.3.3'ten $g(f(\cdot)) : [a,b] \to R$ bileşke fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olduğunu elde ederiz.

Teorem ispatlandı.

2.4. Tam değişimi sonlu ve mutlak sürekli küme değerli dönüşümler

n boyutlu Euclidean uzayını R^n olarak gösterelim. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ ve $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$ için $\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ ile x vektörünün normunu, $< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ ile x ve y vektörlerinin iç çarpımını gösterelim. Açıktır ki keyfi $x \in R^n$ için $\| x \| = \sqrt{< x, x >}$.

$x_* \in R^n$ ve $r \geq 0$ için

$$B(x_*, r) = \{x \in R^n : \| x - x_* \| \leq r\},$$

$$B = \{x \in R^n : \| x \| \leq 1\}$$

olsun.

comp (R^n) ile R^n uzayının tüm boş olmayan kompakt alt kümelerinin oluşturduğu uzayı gösterelim. $E \subset R^n$, $D \subset R^n$ kompakt kümeler, yani $E \in$ *comp* (R^n), $D \in$ *comp* (R^n) olmak üzere, E ve D kümeleri arasındaki uzaklığı

$$\alpha(E, D) = \max\{\max_{y \in D} d(y, E), \max_{x \in D} d(x, D)\}$$

olarak tanımlayalım. Burada $d\ (y, D) = \min\limits_{x \in D} \| y - x \|$, yani y noktası ile D kümesi arasındaki uzaklıktır.

Eğer $E \in comp\ (R^n)$, $D \in comp\ (R^n)$ için $\alpha(E, D) = r_*$ ise,

$$E \subset D + r_* B, \quad D \subset E + r_* B$$

olacağı açıktır (bkz. [10], [17], [18]).

Eğer $E = \{x\}$, $D = \{y\}$, ise, yani E ve D tek elemanlı kümeler ise, o zaman kolayca gösterilebilir ki, $\alpha(E, D) = \| x - y \|$.

$\alpha(E, D)$'ye E ve D kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı denir ve $(comp\ R^n,\ \alpha(\cdot, \cdot))$ metrik uzaydır (bkz. [10], [17], [18]). $\alpha(\cdot, \cdot)$ metrik olduğundan, keyfi $E \in comp\ (R^n)$, $D \in comp\ (R^n)$ ve $F \in comp\ (R^n)$ için

$$\alpha(E, D) \leq \alpha(E, F) + \alpha(F, D)$$

olur.

$[a, b] \subset R$ olsun. Her $x \in [a, b]$'ye bir $F(x) \subset R^n$ kümesini karsılık getiren $x \to F(x)$, $x \in [a, b]$, dönüşümüne, küme değerli dönüşüm denir.

Örneğin, $f_* \in R^n$ sabitlenmiş bir vektör olmak üzere, keyfi $x \in [a, b]$ için $F_*(x) = \{f \in R^n : \| f - f_* \| \leq x^2\}$ olarak tanımlarsak, $F_*(\cdot) : [a, b] \to comp\ (R^n)$ dönüşümü, bir küme değerli dönüşümdür.

Şimdi, $F(\cdot) : [a, b] \to comp\ (R^n)$ küme değerli dönüşümün $x_* \in [a, b)$ noktasında sağdan sürekliliğinin tanımını verelim.

Tanım 2.4.1. *Keyfi $\varepsilon > 0$ için $0 \leq x - x_* \leq \delta(\varepsilon)$ iken*

$$\alpha(F(x), F(x_*)) \leq \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ varsa, $F(\cdot) : [a, b] \to comp\ (R^n)$ küme değerli dönüşümü $x_* \in [a, b)$ noktasında sağdan süreklidir denir.

Şimdi, $F(\cdot) : [a, b] \to comp\ (R^n)$ küme değerli dönüşümün $x_* \in (a, b]$ noktasında soldan sürekliliğinin tanımını verelim.

Tanım 2.4.2. *Keyfi* $\varepsilon > 0$ *için* $-\delta(\varepsilon) \leq x - x_* \leq 0$ *iken*

$$\alpha(F(x), F(x_*)) \leq \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ *varsa,* $F(\cdot) : [a,b] \to comp\ (R^n)$ *küme değerli dönüşümü* $x_* \in (a,b]$ *noktasında soldan süreklidir denir.*

$F(\cdot) : [a,b] \to comp\ (R^n)$ küme değerli dönüşümün $x_* \in (a,b)$ noktasında sürekliliğinin tanımını verelim.

Tanım 2.4.3. *Keyfi* $\varepsilon > 0$ *için* $| x - x_* | \leq \delta(\varepsilon)$ *iken*

$$\alpha(F(x), F(x_*)) \leq \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ *varsa,* $F(\cdot) : [a,b] \to comp\ (R^n)$ *küme değerli dönüşümü* $x_* \in (a,b)$ *noktasında süreklidir denir.*

Açıktır ki, $F(\cdot) : [a,b] \to comp\ (R^n)$ küme değerli dönüşümü $x_* \in (a,b)$ noktasında sürekli ise, bu küme değerli dönüşüm $x_* \in (a,b)$ noktasında sağdan ve soldan süreklidir. Tersine, $F(\cdot) : [a,b] \to comp\ (R^n)$ küme değerli dönüşümü $x_* \in (a,b)$ noktasında sağdan ve soldan sürekli ise, bu küme değerli dönüşüm $x_* \in (a,b)$ noktasında süreklidir.

Tanım 2.4.4. $E \subset R^n$ *ve* $F(\cdot) : E \to comp\ (R^n)$ *olsun. Eğer keyfi* $x \in E$ *noktasında* $F(\cdot)$ *kümedeğerli dönüşümü sürekli ise,* $F(\cdot) : E \to comp\ (R^n)$ *küme değerli dönüşümü* E *kümesinde süreklidir denir.*

Küme değerli dünüşümün tam değişimi tanımını verelim.

$F(\cdot) : [a,b] \to comp\ (R^n)$ olsun. $[a,b]$ aralığının $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b\}$ bölüntüsünü alalım.

$$V_\Delta(F) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha(F(x_{k+1}), F(x_k))$$

olsun.

Tanım 2.4.5. *$V_\Delta(F)$'in $[a,b]$ aralığının tüm mümkün bölüntüleri üzere supremumuna, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $[a,b]$ aralığındaki tam değişimi denir ve $V_a^b(F)$ ile gösterilir. Yani*

$$V_a^b(F) = \sup_{\Delta} V_\Delta(F).$$

Eğer $V_a^b(F) < +\infty$ ise, $F(\cdot) : [a,b] \to comp\ (R^n)$ küme değerli dönüşümüne, tam değişimi sonlu olan küme değerli dönüşüm denir.

Şimdi Lipschitz koşulunu sağlayan küme değerli dönüşümün tam değişiminin sonlu olduğunu gösterelim.

Tanım 2.4.6. *$F(\cdot) : [a,b] \to comp\ (R^n)$ olsun. Keyfi $x \in [a,b]$, $y \in [a,b]$ için*

$$\alpha(F(x), F(y)) \leq L \mid x - y \mid$$

olacak biçimde $L \geq 0$ sayısı varsa, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü $[a,b]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlıyor denir.

Önerme 2.4.1. *$F(\cdot) : [a,b] \to comp\ (R^n)$ küme değerli dönüşümü, L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlasın. O zaman $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $[a,b]$ aralığında tam değişimi sonludur.*

Kanıt. $[a,b]$ aralığının keyfi $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b\}$ bölüntüsünü alalım. O zaman $k = 0, 1, ..., m-1$ için $\alpha(F(x_{k+1}), F(x_k)) \leq L(x_{k+1} - x_k)$ olur. Buradan

$$V_\Delta(F) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha(F(x_{k+1}), F(x_k)) \leq \sum_{k=0}^{n-1} L(x_{k+1} - x_k) = L(b-a)$$

olduğunu elde ederiz. Son eşitsizlikten ise

$$V_a^b(F) = \sup_{\Delta} V_\Delta(F) \leq L(b-a) < +\infty$$

olduğu bulunur.

Her sürekli küme değerli dönüşümün tam değişimi sonlu olmayabilir. Bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 2.4.1. $F(\cdot) : [0,1] \to comp\ (R)$ küme değerli dönüşümü, keyfi $x \in [a,b]$ için $F(x) = \{f(x)\}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

gibi olsun, yani her $x \in [0,1]$ için, $F(x)$ kümesi tek elemanlıdır. Örnek 1.2.1'den, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün keyfi $x \in (0,1)$ noktasında sürekli, $x = 1$ noktasında soldan sürekli, $x = 0$ noktasında sağdan sürekli olduğu bulunur. Yine, örnek 1.2.1'den, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $[0,1]$ aralığındaki tam değişiminin sonlu olmadığı bulunur.

Önerme 2.4.2. $F(\cdot) : [a,b] \to comp\ (R^n)$ *küme değerli dönüşümünün tam değişimi sonlu olsun. O zaman keyfi* $x \in [a,b]$ *için* $F(x) \subset B(0,r)$ *olacak biçimde* $r > 0$ *sayısı vardır.*

Kanıt. $V_a^b(F) = m$ olsun. Keyfi $x \in (a,b]$ alalım ve sabitleyelim. Şimdi $[a,b]$ aralığının $\Delta = \{a < x \leq b\}$ bölüntüsünü alalım. O zaman

$$V_\Delta(F) = \alpha(F(x), F(a)) + \alpha(F(b), F(x)) \leq \sup_\Delta V_\Delta(F) = V_a^b(F) = m$$

olur. Yani keyfi $x \in (a,b]$ için

$$\alpha(F(x), F(a)) + \alpha(F(b), F(x)) \leq m.$$

Buradan, keyfi $x \in (a,b]$ için $\alpha(F(x), F(a)) \leq m$ ve $F(x) \subset F(a) + mB$ olduğu elde edilir. $F(a) \in comp\ (R^n)$ olduğundan, $F(a) \subset r_* B = B(0, r_*)$ olacak biçimde $r_* > 0$ vardır. $r = r_* + m$ dersek, buradan keyfi $x \in [a,b]$ için $F(x) \subset mB + r_* B = (m + r_*)B = rB = B(0,r)$ olduğu bulunur. Önerme ispatlandı.

Önerme 2.4.3. $F(\cdot) : [a,b] \to comp\ (R^n)$, $a < c < b$ *olsun. O zaman*

$$V_a^b(F) = V_a^c(F) + V_c^b(F).$$

Kanıt. $[a,c]$ aralığının $\Delta_1 = \{a = y_0 < y_1 < ... < y_m = c\}$, $[c,b]$ aralığının $\Delta_2 = \{c = z_0 < z_1 < ... < z_s = b\}$ bölüntülerini alalım ve

$$V^1_{\Delta_1}(F) = \sum_{k=0}^{m-1}\alpha(F(y_{k+1}), F(y_k)), \quad V^2_{\Delta_2}(F) = \sum_{k=0}^{s-1}\alpha(F(z_{k+1}), F(z_k))$$

toplamlarını oluşturalım. $[a,b]$ aralığının $\Delta_* = \{a = y_0 < y_1 < ... < y_m < z_1 < ... < z_s = b\}$ bölüntüsünü alalım. O zaman

$$V_{\Delta_*}(F) = \sum_{k=0}^{m-1}\alpha(F(y_{k+1}), F(y_k)) + \sum_{k=1}^{s-1}\alpha(F(z_{k+1}), F(z_k)) +$$

$$+\alpha(F(z_1), F(y_m)) = V^1_{\Delta_1}(F) + V^2_{\Delta_2}(F)$$

olur. Buradan

$$V^1_{\Delta_1}(F) + V^2_{\Delta_2}(F) \le \sup_{\Delta} V_{\Delta}(F) = V^b_a(F) \qquad (2.4.1)$$

olduğunu elde ederiz. (2.4.1)'de supremum $[a,b]$ aralığının keyfi bölüntüleri üzeredir. (2.4.1)'de, Δ_1 ve Δ_2, sırasıyla, $[a,c]$ ve $[c,b]$ aralıklarının keyfi bölüntüleri olduğundan, (2.4.1)'den

$$\sup_{\Delta_1} V^1_{\Delta_1}(F) + \sup_{\Delta_2} V^2_{\Delta_2}(F) \le V^b_a(F) \qquad (2.4.2)$$

olduğu bulunur. Δ_1, $[a,c]$ aralığının keyfi bölüntüsü, Δ_2, $[c,b]$ aralığının keyfi bölüntüsü olduğundan, (2.4.2)'den

$$V^c_a(F) + V^b_c(F) \le V^b_a(F) \qquad (2.4.3)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi

$$V^c_a(F) + V^b_c(F) \ge V^b_a(F) \qquad (2.4.4)$$

olduğunu gösterelim. Herhangi bir m için $c = x_m$ olacak biçimde, $[a,b]$ aralığının bir keyfi $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_s = b\}$ bölüntüsünü alalım. Yani c noktası Δ bölüntüsünün bir bölüntü noktası olsun. O zaman

$$V_{\Delta}(f) = \sum_{k=0}^{m-1}\alpha(F(x_{k+1}), F(x_k)) + \sum_{k=m}^{s-1}\alpha(F(x_{k+1}), F(x_k)) \qquad (2.4.5)$$

olur. $\Delta_1 = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_m = c\}$, $[a,c]$ aralığının, $\Delta_2 = \{c = x_m < x_{m+1} < ... < x_s = b\}$, $[c,b]$ aralığının bölüntüleridir. O zaman (2.4.5)'den

$$V_\Delta(F) = V^1_{\Delta_1}(F) + V^2_{\Delta_2}(F)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan ise

$$V_\Delta(F) \leq \sup_{\Delta_1^*} V^1_{\Delta_1^*}(F) + \sup_{\Delta_2^*} V^2_{\Delta_2^*}(F) \tag{2.4.6}$$

olduğu bulunur. Burada Δ_1^*, $[a,c]$ aralığının keyfi bölüntüsü, Δ_2^*, $[c,b]$ aralığının keyfi bölüntüsüdür. (2.4.6)'dan

$$V_\Delta(F) \leq V_a^c(F) + V_c^b(F) \tag{2.4.7}$$

olur.

Şimdi c noktasının, $[a,b]$ aralığının $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_s = b\}$ bölüntüsünün bölüntü noktası olmadığını varsayalım. Yani bir m için $x_m < c < x_{m+1}$ olsun. $[a,b]$ aralığının $\Delta^1 = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_m < c < x_{m+1} < ... < x_s = b\}$ bölüntüsünü alalım. O zaman

$$V_\Delta(F) = \sum_{k=0}^{s-1} \alpha(F(x_{k+1}), F(x_k)) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha(F(x_{k+1}), F(x_k)) +$$

$$+\alpha(F(x_{m+1}), F(x_m)) + \sum_{k=1}^{s-m-1} \alpha(F(x_{m+k+1}), F(x_{m+k})) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} \alpha(F(x_{k+1}), F(x_k)) + \alpha(F(c), F(x_m)) +$$

$$+\alpha(F(x_{m+1}), F(c)) + \sum_{k=1}^{s-m-1} \alpha(F(x_{m+k+1}), F(x_{m+k})) = V_{\Delta^1}(F)$$

Buradan

$$V_\Delta(F) \leq V_{\Delta^1}(F) \tag{2.4.8}$$

olur. c noktası Δ^1 bölüntüsünün bölüntü noktası olduğundan dolayı, (2.4.7)'ye benzer olarak

$$V_{\Delta^1}(F) \leq V_a^c(F) + V_c^b(F) \tag{2.4.9}$$

olduğu gösterilebilir. (2.4.8) ve (2.4.9)'dan

$$V_\Delta(F) \le V_a^c(F) + V_c^b(F) \tag{2.4.10}$$

olduğu bulunur. (2.4.7) ve (2.4.10)'dan, $[a, b]$ aralığının keyfi Δ bölüntüsü için

$$V_\Delta(F) \le V_a^c(F) + V_c^b(F) \tag{2.4.11}$$

olur. Δ bölüntüsü, $[a, b]$ aralığının keyfi Δ bölüntüsü olduğundan dolayı, (2.4.11)'den

$$\sup_\Delta V_\Delta(F) \le V_a^c(F) + V_c^b(F) \tag{2.4.12}$$

elde ederiz. $\sup_\Delta V_\Delta(F) = V_a^b(F)$ olduğundan, (2.4.12)'den (2.4.4)'ün doğruluğunu elde ederiz. (2.4.3) ve (2.4.4)'den ise önerme ispatlanır.

Önerme 2.4.3'ten aşağıdaki sonuçlar bulunur.

Sonuç 2.4.1. *$F(\cdot) : [a, b] \to comp\ (R^n)$, $a < c < b$ olsun. Eğer $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $[a, b]$ aralığındaki tam değişimi sonlu ise, bu küme değerli dönüşümün $[a, c]$ ve $[c, b]$ aralıklarındaki tam değişimleri de sonludur. Ve tersine, eğer $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $[a, c]$ ve $[c, b]$ aralıklarındaki tam değişimleri sonlu ise, bu küme değerli dönüşümün $[a, b]$ aralığıdaki tam değişimi de sonludur.*

Önerme 2.4.4. *$F(\cdot) : [a, b] \to comp\ (R^n)$, $x \in [a, b]$ için $\varphi(x) = V_a^x(F)$ olsun. O zaman $\varphi(\cdot)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında monoton artan fonksiyondur.*

Kanıt. $a \le x_1 \le x_2 \le b$ olsun. Şimdi $[a, x_2]$ aralığının $\Delta = \{a = y_0 < y_1 < ... < y_k = x_1 < y_{k+1} < ... < y_s = x_2\}$ bölüntüsünü alalım. Yani x_1 noktası $[a, x_2]$ aralığının Δ bölüntüsünün bölüntü noktasıdır. Bu durumda $\Delta^1 = \{a = y_0 < y_1 < ... < y_k = x_1\}$, $[a, x_1]$ aralığının bölüntüsü olur. Açıktır ki

$$V_{\Delta_1}(F) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha(F(y_{i+1}), F(y_i)) \le \sum_{i=0}^{s-1} \alpha(F(y_{i+1}), F(y_i)) = V_\Delta(F)$$

Buradan

$$V_{\Delta_1}(F) \le \sup_\Delta V_\Delta(F) = V_a^{x_2}(F)$$

Aynı zamanda Δ^1, $[a, x_1]$ aralığının keyfi bir bölüntüsü olduğundan, son eşitsizlikten

$$V_a^{x_1}(F) = \sup_{\Delta_1} V_{\Delta_1}(F) \leq V_a^{x_2}(F)$$

olur. Önerme ispatlandı.

Mutlak sürekli küme değerli dönüşümler, tam değişimi sonlu ve sürekli küme değerli dönüşümlerdır. Mutlak sürekli küme değerli dönüşümüm tanımını verelim.

Tanım 2.4.7. *$F(\cdot) : [a, b] \to comp\ (R^n)$ olsun. Keyfi $\varepsilon > 0$ için, $[a, b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_1, b_1), (a_2, b_2),...,(a_m, b_m) aralıkları için*

$$\sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k) \leq \delta$$

iken

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha(F(b_k), F(a_k)) \leq \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunuyorsa, $F(\cdot) : [a, b] \to comp\ (R^n)$ küme değerli dönüşümüne $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli küme değerli dönüşüm denir.

Önerme 2.4.5. *$F(\cdot) : [a, b] \to comp\ (R^n)$ olsun. Eğer $F(\cdot) : [a, b] \to comp\ (R^n)$ küme değerli dönüşümü $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli küme değerli dönüşüm ise, o zaman $F(\cdot)$ küme değerli dönümüşümü $[a, b]$ aralığında süreklidir.*

Kanıt. $x_* \in (a, b)$ olsun. Tanım 2.4.7'de $m = 1$ ve (a_1, b_1) aralığını x_*'ı içeren aralık alırsak, tanım 2.4.7'den, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $x_* \in (a, b)$ noktasında sürekliliğini elde ederiz. $x_* = a$ iken tanım 2.4.7'de $m = 1$ ve $(a_1, b_1) = (a, x)$, $x \in (a, b)$, alırsak, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $x_* = a$ noktasında sağdan sürekliliğini elde ederiz. Benzer olarak, $x_* = b$ iken tanım 2.4.7'de $m = 1$ ve $(a_1, b_1) = (x, b)$, $x \in (a, b)$, alırsak, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $x_* = b$ noktasında soldan sürekliliğini elde ederiz. Önerme ispatlandı.

Ancak, bu hükmün tersi doğru olmayabilir, yani belli bir aralıkta sürekli olan küme değerli dönüşüm, bu aralıkta mutlak sürekli olmayabilir. Bu durumu gösteren örneği, daha sonra inceleyeceğiz.

Mutlak sürekli küme değerli dönüşümlere örnek olarak, Lipschitz koşulunu sağlayan küme değerli dönüşümler gösterilebilir.

Önerme 2.4.6. *$F(\cdot) : [a,b] \to comp\ (R^n)$ küme değerli dönüşümü $[a,b]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlasın. O zaman $F(\cdot) : [a,b] \to comp\ (R^n)$ küme değerli dönüşümü $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir.*

Kanıt. $F(\cdot) : [a,b] \to comp\ (R^n)$ küme değerli dönüşümü $[a,b]$ aralığında L sabiti ile Lipschitz koşulunu sağladığından, keyfi $x \in [a,b]$ ve $y \in [a,b]$ için

$$\alpha(F(x), F(y)) \le L \mid x - y \mid \tag{2.4.13}$$

olur.

Keyfi $\varepsilon > 0$ alalım. Şimdi $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L}$ ve

$$\sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k) \le \delta = \frac{\varepsilon}{L} \tag{2.4.14}$$

olmak üzere, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_k, b_k), $(k = 1, 2, ..., m)$, aralıklarını alalım. (2.4.13) ve (2.4.14)'ten

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha(F(b_k), F(a_k)) \le \sum_{k=1}^{m} L \cdot (b_k - a_k) \le L \cdot \delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

olduğunu elde ederiz. Buradan, $F(\cdot) : [a,b] \to comp\ (R^n)$ küme değerli dönüşümünün $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olduğu bulunur. Önerme ispatlandı.

Mutlak sürekli küme değerli dünüşümün tam değişiminin sonlu olduğunu gösterelim.

Teorem 2.4.1. *$F(\cdot) : [a,b] \to comp\ (R^n)$ küme değerli dönüşümü $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli küme değerli dönüşüm olsun. O zaman*

$$V_a^b(F) < +\infty$$

olur.

Kanıt. $F(\cdot) : [a,b] \to comp\ (R^n)$ küme değerli dönüşümü $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olduğundan, $\varepsilon = 1$ için, $[a,b]$ aralığının keyfi ikişer kesişimleri boş olacak (a_1,b_1), (a_2,b_2),...,(a_m,b_m) aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{m}(b_k - a_k) \leq \delta \tag{2.4.15}$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha(F(b_k), F(a_k)) \leq 1 \tag{2.4.16}$$

olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı vardır.

Şimdi $[a,b]$ aralığının, keyfi $i = 0,1,...,N-1$ için, $c_{i+1} - c_i < \delta$ olacak biçimde $\Delta = \{a = c_0 < c_1 < c_2 < ... < c_N = b\}$ bölüntüsünü alalım. Keyfi $i = 0,1,...,N-1$ alalım ve sabitleyelim. Şimdi ise, $[c_i, c_{i+1}]$ aralığının keyfi $\Delta_* = \{c_i = c_0^{(*)} < c_1^{(*)} < c_2^{(*)} < ... < c_s^{(*)} = c_{i+1}\}$ bölüntüsünü alalım. O zaman

$$\sum_{j=0}^{s-1}(c_{j+1}^{(*)} - c_j^{(*)}) = c_{i+1} - c_i \leq \delta$$

olduğundan, (2.4.15) ve (2.4.16)'dan

$$V_{\Delta_*}(F) = \sum_{j=0}^{s-1}\alpha(F(c_{j+1}^{(*)}), F(c_j^{(*)})) \leq 1 \tag{2.4.17}$$

olduğunu elde ederiz. Δ_*, $[c_i, c_{i+1}]$ aralığının keyfi bölüntüsü olduğundan, (2.4.17)'den

$$V_{c_i}^{c_{i+1}}(F) = \sup_{\Delta_*} V_{\Delta_*}(F)\ \leq 1 \tag{2.4.18}$$

olduğu bulunur. $i = 0,1,...,N-1$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, (2.4.18) eşitsizliği keyfi $i = 0,1,...,N-1$ için doğrudur. O zaman (2.4.18) ve önerme 2.4.3'den

$$V_a^b(F) = \sum_{k=0}^{N-1} V_{c_i}^{c_{i+1}}(F) \leq N$$

olduğunu elde ederiz.

Teorem ispatlandı.

Böylece, mutlak sürekli küme değerli dönüşümlerin tam değişiminin sonlu olduğunu gördük. Şimdi verilen aralıkta sürekli olan, ancak mutlak sürekli olmayan küme değerli dönüşümlere bir örnek verelim. Bunun için örnek 2.4.1'deki küme değerli dönüşümü kullanacağız.

Örnek 2.4.2. $x \in [0,1]$ için $F(x) = \{f(x)\}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\frac{\pi}{x} & x \in (0,1], \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{2.4.19}$$

olsun. $F(\cdot) : [0,1] \to comp\ (R)$ küme değerli dönüşümünü ele alalım. Açıktır ki, (2.2.19) ile tanımlanan $F(\cdot) : [0,1] \to comp\ (R)$ küme değerli dönüşümü $[0,1]$ aralığında süreklidir. Örnek 2.4.1'de (2.4.19) ile tanımlanan $F(\cdot) : [0,1] \to comp\ (R)$ küme değerli dönüşümünün $[0,1]$ aralığındaki tam değişiminin sonlu olmadığını gördük. O zaman, teorem 2.4.1'e göre bu küme değerli dönüşüm mutlak sürekli olamaz.

KAYNAKLAR

[1] KOLMOGOROV, A.N. ve FOMIN, S.V. *Introductory Real Analysis.* Dover Publications, New York (1975).

[2] LUSTERNIK, L.A. ve SOBOLEV, V.I. *Functional Analysis.* Mir, Moscow (1965).

[3] RIESZ, F. ve B.SZ.-NAGY. *Lectures on Functional Analysis.* Mir, Moscow (1979).

[4] NATANSON, I.P. *Theory of Functions with Real Variable.* Nauka, Moscow (1974).

[5] CALDERON, A.P. *On the Differentiability of Absolutely Continuous Functions.* Riv. Math. Univ. Parma. **2**, 203-213 (1951).

[6] MONROE, M.E. *Introduction to Measure and Integration.* Addison-Vesley, Cambridge, Massachusetts (1953).

[7] RADO, T. ve REICHELDERFER, P.V. *On Generalized Lipschitzian Transformations.* Riv. Math. Univ. Parma. **2**, 289-301 (1951).

[8] RADO, T. ve REICHELDERFER, P.V. *Continuous Transformations in Analysis.* Springer Verlag, New York (1955).

[9] AUBIN, J.P. ve CELLINA, A. *Differential Inclusions. Set Valued Maps and Viability Theory.* Springer Verlag, Berlin (1984).

[10] BLAGODATSKIKH, V.I. ve FILIPPOV, A.F. *Differential Inclusions and optimal Control.* Proc. Steklov Math. Inst. **169**, 199-259 (1986).

[11] DEIMLING, J.P. *Multivalued Differential Equations.* Walter de Gruyter, Berlin (1992).

[12] FILIPPOV, A.F. *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides.* Kluwer Academic Publishers, (1988).

[13] HARTMAN, P. *Ordinary Differential Equations.* Birkhauser, Boston (1982).

[14] WARGA, J. *Optimal Control of Differential and Functional Equations.* Academic Press, New York (1972).

[15] CSÖRNYEI, M. *Absolutely Continuous Functions of Rado, Reichelderfer and Maly.* J. Math. Anal. Appl. **252,** 147-166 (2000).

[16] MALY, J. *Absolutely Continuous Functions of Several Variables.* J. Math. Anal. Appl. **231,** 492-508 (1999).

[17] HU, S. ve PAPAGEORGIOU, N.S. *Handbook of Multivalued Analysis.* Vol.I. Theory. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands (1997).

[18] AUBIN, J.P. *Set Valued Analysis.* Birkhauser, Boston (1990).