**KAOS KOŞULLARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER**

Hakan EMEK
Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Ağustos – 2007

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

**Hakan Emek**'in **" Kaos Koşulları Arasındaki İlişkiler"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 17.08.2007 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

| | | **Adı Soyadı** | **İmza** |
|---|---|---|---|
| **Üye (Tez Danışmanı)** | **:** | **Doç. Dr. NEDİM DEĞİRMENCİ** | .......... |
| **Üye** | **:** | **Prof. Dr. İDRİS DAĞ** | .......... |
| **Üye** | **:** | **Doç. Dr. BÜNYAMİN DEMİR** | .......... |

**Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ........ tarih ve ........ sayılı kararıyla onaylanmıştır.**

**Enstitü Müdürü**

## ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**KAOS KOŞULLARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER**


**Hakan EMEK**

**Anadolu Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ**
**2007, 56 sayfa**



Literatürde pek çok kaos tanımı vardır. Son yıllarda matematikçiler arasında yaygın olarak kabul gören kaos tanımlarından birisi de Devaney'in kaos tanımıdır. Devaney'in kaos tanımı metrik uzaylar üzerinde tanımlı fonksiyonlar için verilmiştir ve bu tanım kaos koşulları olarak bilinen üç tane koşul ile verilmektedir. Bu koşullar periyodik noktaların yoğunluğu, topolojik geçişkenlik ve başlangıç şartlarına hassas bağımlılıktır.

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde kaos koşulları tanıtılarak, iyi bilinen üç meşhur kaotik fonksiyon örneği incelenmiştir. İkinci bölümde kaos koşullarının bağımsız olduğunu gösteren örnekler verilmiştir. Üçüncü bölümde kaos koşuları arasındaki genel durumda ve aralık durumunda gerektirme ilişkileri incelenmiş ve kaos tanımına denk olan bir başka kavram incelenmiştir. Son bölümde kaos koşullarına alternatif bazı koşullara değinilmiştir.



**Anahtar Kelimeler :** Kaos koşulları, Topolojik geçişkenlik, Başlangıç şartlarına hassas bağımlılık, Periyodik noktalar

## ABSTRACT

**Master of Science Thesis**

**RELATIONSHIPS BETWEEN THE CHAOS CONDITIONS**


**Hakan EMEK**

**Anadolu University**
**Graduate School of Sciences**
**Mathematics Program**


**Supervisor**: **Assoc. Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ**
**2007, 56 pages**


There are lots of definitions of chaos in literature. In recent years the one given by Devaney widelly accepted among mathematicians. Devaney's definition of chaos is given for the functions which are defined on metric spaces. This definition includes three conditions, known as the chaos conditions. These conditions are density of periodical points, topological transitivity and sensitive dependence on initial conditions.

In the first part of the thesis the chaos conditions are introduced and there popular examples of chaotic function is investigated. In the second part of the thesis, it is given some examples of functions which show that chaos conditions are independent. In the third part of the thesis, some implications between chaos conditions are studied. Also an equivalent expression for the chaos is given. At the last part of the thesis some alternatives to chaos conditions are given.



**Keywords :** Chaos conditions, Topological transitivity, Sensitive dependence on initial conditions, Periodic points.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın başlangıcından bitimine kadar geçen süre içerisinde, bilgi, destek ve anlayışından istifade ettiğim başta Doç. Dr. Sayın Nedim Değirmenci olmak üzere tüm değerli hocalarıma, yazım aşamasında yardımlarını esirgemeyen Yard. Doç. Dr. Serkan Ali Düzce ve Araş. Gör. Mehmet Ergen'e, bana her zaman destek olan aileme, hiç bir fedakarlıktan çekinmeden yardımcı olan ve beni cesaretlendiren çok değerli Sercan Balçın'a teşekkürü bir borç bilirim.

Hakan EMEK

Ağustos 2007

## İÇİNDEKİLER

## ŞEKİLLER DİZİNİ

# 1 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde kaos koşulları ve kesikli dinamik sistemlerin bazı kavramları tanıtılmış, sonra da iyi bilinen üç kaotik fonksiyon örneği incelenmiştir.

## 1.1 Temel Tanımlar

Aşağıdaki tanımlamalarda $(X, d)$ bir metrik uzay ve $f : X \longrightarrow X$ bir fonksiyondur.

**Tanım 1.1.1.**

$$f^n = \ f \circ f \circ ... \circ f$$

*şeklinde tanımlanan $f^n$ ifadesine, $f$'nin **n defa bileşkesi** yada $f$'nin **n. iterasyonu** denir. Dikkat edilirse, $f^n$ fonksiyonu da $X$'ten $X$'e bir fonksiyondur. $n = 0$ için $f^0 = Id$ birim fonksiyon olarak alınır.*

**Örnek 1.1.2.** *$X = [0, 1]$ uzayı üzerinde $f(x) = x^2$ fonksiyonunu göz önüne alındığında, $f^n(x) = x^{2^n}$ olur.*

**Tanım 1.1.3.** *$x \in X$ noktası için,*

$$x, f(x), f^2(x), ..., f^n(x), ...$$

*şeklindeki noktalardan oluşan kümeye $x$ noktasının **yörüngesi** veya **orbiti** denir. Genellikle, $Orb(x) = \{f^n(x) : n = 0, 1, 2, ...\}$ gösterimi kullanılır.*

**Örnek 1.1.4.** *$X = \mathbb{R}$ üzerinde $f(x) = x^3$ fonksiyonu için $Orb(1) = \{1\}$ tek elemanlı bir kümedir. $Orb(-1) = \{-1\}$ olup, yine bir elemanlı bir kümedir. $Orb(2) = \{2, 2^3, 2^9, ..., 2^{3^n}, ...\}$, $Orb(\frac{1}{2}) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^9}, ..., \frac{1}{2^{3^n}}, ...\}$*

**Tanım 1.1.5.** *Bir $x \in X$ için $f(x) = x$ oluyorsa bu $x$ noktasına $f$'nin **sabit noktası** denir.*

**Tanım 1.1.6.** *$x \in X$ noktası ve $p > 0$ sayısı için, $f^p(x) = x$ oluyorsa, bu $x$ noktasına **periyodik nokta**, $p$'ye de $x$'in **periyodu** denir. Bu şartı sağlayan en küçük $p$ sayısına **asal periyot** denir.*

Buna göre sabit noktalar, periyodu 1 olan periyodik noktalardır.

**Tanım 1.1.7.** *Eğer $x \in X$ noktası periyodik olmayan bir nokta iken, tüm $i \geq m$ sayıları için*

$$f^{n+i}(x) = f^i(x)$$

*olacak şekilde bir $m > 0$ sayısı varsa bu $x$ noktasına **akibeti periyodik nokta** denir ve periyodu $n$ dir.*

**Örnek 1.1.8.** *$f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $f(x) = 4x(1-x)$ fonksiyonu alındığında; $x = 0$, $x = \frac{3}{4}$ sabit nokta, $x = \frac{1}{2}$ akibeti periyodik bir noktadır.*

Bu fonksiyon üzerinde daha sonra tekrar durulacaktır.

**Tanım 1.1.9.** *Her $U, V \subset X$ ($U, V$ boştan farklı) açık kümeleri için,*

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

*şartı sağlanacak şekilde bir $k > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, $f$'ye $X$ üzerinde **topolojik geçişken** bir fonksiyon denir.*

**Örnek 1.1.10.** *$X = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde ayrık metrik göz önüne alınsın. $f : X \longrightarrow X$, $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1$ olarak tanımlı $f$ fonksiyonu topolojik geçişkendir.*

Sonraki bölümlerde bu tanıma alternatif başka tanımlara da değinilecektir.

**Tanım 1.1.11.** *Boştan farklı ve açık her $U \subset X$ altkümesi için öyle bir $n_0 > 0$ sayısı varsa öyle ki her $n \geq n_0$ için,*

$$f^n(U) = X$$

*eşitliği gerçekleniyorsa, $f$ fonksiyonuna **leo özelliğine sahip bir fonksiyon** denir.*

**Tanım 1.1.12.** *$0 < \epsilon \leq 1$ sabit bir sayı olmak üzere, $\forall\, x \in X$ noktasının her $N$ komşuluğu için,*

$$d(f^k(x), f^k(y)) > \epsilon$$

*olacak şekilde bir $y \in N$ ve $k > 0$ varsa, $f$'ye **başlangıç şartlarına hassas bağımlı fonksiyon** denir.*

Dikkat edildiği takdirde; buradaki $\epsilon > 0$ sayısı $X$ uzayındaki tüm noktalar için geçerlidir. Bu nedenle bu özelliğe bazen $f$'nin $X$ üzerinde global hassas bağımlılığı ya da düzgün hassas bağımlılığı denir.

**Önerme 1.1.13.** *Eğer $f : X \longrightarrow X$ fonksiyonu bir izometri ise başlangıç şartlarına hassas bağımlı değildir.*

*Kanıt.* $f$ fonksiyonunun başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğu kabul edilsin. Bu durumda, öyle bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır ki, her bir $x \in X$ noktasının keyfi bir $N$ komşuluğunda, yörüngesi $x$'in yörüngesinden $\epsilon$ kadar ayrılan bir $y$ noktası vardır. Yani bir $k > 0$ sayısı ve bir $y \in N$ noktası

$$d(f^k(x), f^k(y)) > \epsilon$$

olacak şekilde vardır. Eğer özel olarak $N = B_\epsilon(x)$ şeklinde seçilirse başlangıç şartlarına bağımlılıktan dolayı $k > 0$ sayısı ve bir $y \in B_\epsilon(x)$ noktası

$$d(f^k(x), f^k(y)) > \epsilon$$

olacak şekilde bulunmuş olur. Diğer yandan $f$ bir izometri olduğundan

$$d(f^k(x), f^k(y)) = d(x, y) < \epsilon$$

ifadesi gerçeklenir. Bu ise bir çelişkidir, yani $f$ başlangıç şartlarına hassas bağımlı değildir. □

**Örnek 1.1.14.** *$f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, $f(x) = 2x$ fonksiyonu başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.*

Kesikli dinamik sistemlerin temel uğraşılarından birisi de $f : X \longrightarrow X$ fonksiyonun yörüngelerinin akibet davranışlarını incelemektir. Bir kesikli dinamik sistemin kaotik davranışa sahip oluşunun farklı tanımları vardır [6, 8, 13]. Bu çalışmada matematikçiler arasında yaygın kabül gören, üzerinde hala yoğun çalışmaların yapıldığı Devaney'in kaos tanımı esas alınacaktır.

**Tanım 1.1.15.** *$X$ bir metrik uzay olsun ve $f : X \longrightarrow X$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f$ fonksiyonu,*

*1. $f$, $X$ üzerinde topolojik geçişkendir.*

*2. $f$'nin periyodik noktaları $X$'de yoğun; yani keyfi bir $a \in X$ noktası ve bu noktayı merkez kabul eden $B_\delta(a)$ açık yuvarı verildiğinde, bu yuvara ait bir periyodik nokta vardır.*

*3. $f$, $X$ üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.*

*koşullarını sağlarsa bu $f$ fonksiyonuna **kaotik bir fonksiyon** denir.*

Kaotik bir fonksiyon; başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğu için önceden öngörülemez, topolojik geçişken olduğu için parçalara ayrılıp alt sistemler oluşturamaz, periyodik noktalarının kümesi $X$'de yoğun olduğu için de belirli bir düzen içindedir.

## 1.2 Kaos Örnekleri

Şimdi, üç temel kaotik fonksiyon örneği verilecektir, bunlardan birincisi çemberdeki katlama dönüşümüdür. Bu dönüşümün kaotik olduğunun gösterilmesi için aşağıdaki lemmadan yararlanılabilir.

**Lemma 1.2.1.**

$$\begin{aligned} A &= \{\frac{k}{2^{n-1}} \mid k = 0, 1, ...2^{n-1}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}, \\ D &= \{\frac{k}{2^n - 1} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 0 \leq k < 2^n - 1,\ k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

*kümeleri,* $[0, 1]$ *kapalı aralığında yoğundurlar.*

*Kanıt.* $D$'nin yoğun olduğunu gösterilsin. $A$'nın yoğun olduğu benzer şekilde görülür. $[0, 1]$ aralığındaki her $(a, b)$ açık aralığında $D$'nin en az bir elemanının bulunduğu gösterilmelidir. $n \to \infty$ iken $\frac{1}{2^n-1} \to 0$ olduğundan $n \geq N$ iken $\frac{1}{2^n-1} < b - a$ olacak şekilde $N$ doğal sayısı vardır. Diğer yandan,

$$[\frac{k-1}{2^n - 1}, \frac{k}{2^n - 1}], \quad k = 1, 2, ..., 2^n - 1$$

aralıkları $[0, 1]$'in bir örtüsüdür. Bu yüzden aralıklardan birisi $a$'yı içerir. Yani;

$$\frac{m-1}{2^n - 1} \leq a < \frac{m}{2^n - 1}$$

olacak şekilde $m \in N$ vardır.

$$\frac{1}{2^n - 1} < b - a \quad ve \quad \frac{m-1}{2^n - 1} \leq a$$

eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2^n-1} + a < b &\implies \tfrac{1}{2^n-1} + \tfrac{m-1}{2^n-1} < b \\ &\implies \tfrac{m}{2^n-1} < b \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$a < \frac{m}{2^n - 1} < b$$

elde edilir. $\square$

**Sonuç 1.2.2.**

$$\{\frac{2k\pi}{2^n-1} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 0 \leq k < 2^n - 1,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

*ve*

$$\{\frac{2k\pi}{2^{n-1}} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 0 \leq k < 2^n - 1,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

*kümeleri,* $[0, 2\pi]$*'de yoğundurlar.*

*Kanıt.*

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & [0,2\pi] \\ & x & \longmapsto & f(x) = 2\pi x \end{array}$$

şeklinde tanımlanan homeomorfizmi için $f(D)$ kümesi $[0, 2\pi]$ aralığının yoğun bir altkümesi olur. $U \subset [0, 2\pi]$ (boştan farklı) bir açık altküme olsun. $f^{-1}(U)$, $[0, 1]$'in açık altkümesidir. $D$, $[0, 1]$'de yoğun olduğundan $f(D)$ kümesi, yani

$$\{\frac{2k\pi}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 0 \leq k < 2^n - 1,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

kümesi $[0, 2\pi]$'nin yoğun bir altkümesidir.

Benzer şekilde;

$$\{\frac{2k\pi}{2^{n-1}} : k = 0, 1, ...2^{n-1}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

kümesinin de $[0, 2\pi]$'nin yoğun bir altkümesi olduğu gösterilebilir. □

**Örnek 1.2.3.** $S^1$*, kompleks düzlemdeki birim çember olsun.* $S^1$*'in noktaları* $\theta$ *argümanı ile belirlensin.* $0 \leq \theta < 2\pi$ *olmak üzere,*

$$\begin{array}{rccc} g: & S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & \theta & \longmapsto & g(\theta) = 2\theta \quad (mod\ 2\pi) \end{array}$$

*fonksiyonu göz önüne alınsın.*

*Öncelikle; g'nin periyodik noktalarının kümesinin yoğun olduğu gösterilsin. Eğer* $\theta \in S^1$ *periyodu* $n$ *olan periyodik bir nokta ise*

$$g^n(\theta) = 2^n\theta \qquad (mod 2\pi)$$

*olduğundan,*

$$2^n\theta = \theta + 2k\pi$$

*olarak yazılabilir. Bu durumda,* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*,* $k \in \mathbb{Z}$ *ve* $0 \leq k < 2^n - 1$ *olmak üzere,*

$$\theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1}$$

*olur. Yani, g'nin periyodik noktaları,*

$$\theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad 0 \leq k < 2^n - 1$$

*şeklindedir. Yukarıdaki lemmadan dolayı f'nin periyodik noktaları $S^1$'de yoğundur.*

*Şimdi de g'nin topolojik geçişken ve başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğu gösterilsin. Bunun için,*

$$A = \{\frac{2k\pi}{2^{n-1}} : k = 0, 1, ...2^{n-1}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset S^1$$

*şeklinde bir küme tanımlansın. Bu küme $S^1$'de yoğundur, üstelik bu kümeye ait her nokta akibeti sabit noktadır, çünkü belli bir adımdan sonra hepsi* 0 *sabit noktasına gitmektedirler.*

*Boş olmayan herhangi bir $U \subset S^1$ açık altkümesi verildiğinde, bu kümede A'ya ait $\theta_0$ gibi bir nokta vardır. U açık küme olduğundan, $\theta_0$ noktasını merkez kabul eden bir açık yuvar (açık yay parçası), tamamen U'da kalacak şekilde vardır. Bu nedenle; U'nun belli bir adım sonraki görüntüsü* 0 *sabit noktasını hatta, $0 < a < 2\pi$ olmak üzere, $H = [0, a]$ gibi bir yay parçasını içerir. Şimdide H kümesinin belli bir adım sonra $S^1$'i örttüğünü gösterilsin:*

*Gerçekten; $H = [0, a] \quad (0 < a < 2\pi)$ kümesi için,*

$$\begin{aligned} g(H) &= [0, 2a] \\ g^2(H) &= [0, 2^2 a] \\ &\vdots \\ g^n(H) &= [0, 2^n a] \\ &\vdots \end{aligned}$$

*şeklindedir. $n \to \infty$ iken $2^n a$ sayısı $2\pi$'yi geçer, bu yüzden belli bir $n > 0$ sayısından sonraki tüm iterasyonlar $S^1$'i örter. Yani; sıfırı içeren herhangi bir aralık $S^1$'i örter. Dolayısıyla $g^k(U) = S^1$ olacak şekilde bir $k > 0$ vardır. Artık elde edilen bu özellik yardımıyla g'nin topolojik geçişken ve başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğu kolayca görülebilir.*

*$U, V \subset S^1$ boş olmayan keyfi açık kümeler olsun. O zaman; yukarıdaki açıklamadan dolayı, $g^k(U) = S^1$ olacak şekilde $k > 0$ sayısı vardır. Buna göre;*

$$g^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

*olur, yani $g$ topolojik geçişkendir.*

*$x \in S^1$ keyfi bir nokta ve $N$'de $x$'in herhangi bir komşuluğu olsun. Yuıkarıdaki özellikten dolayı, $g^n(N) = S^1$ olacak şekilde $n > 0$ sayısı vardır. Bu durumda bir $y \in N$ noktası $d(x, y) > \frac{1}{2}$ koşulunu sağlayacak şekilde bulunabilir. Yani $g$ başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.*

*Sonuç olarak; $g(\theta) = 2\theta \pmod{2\pi}$ fonksiyonu $S^1$ üzerinde kaotiktir.*

Şimdi de, $[0, 1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı meşhur kaotik fonksiyonlardan biri olan çadır (tent) dönüşümü incelensin.

Bunun için ara değer teoreminden elde edilen bir lemma verilsin.

**Lemma 1.2.4.** *$f : [a, b] \longrightarrow R$, sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer*

$$f([a, b]) \subset [a, b]$$

*veya*

$$f([a, b]) \supset [a, b]$$

*ise $f$'nin bir sabit noktası vardır.*

*Kanıt.* $g(x) = f(x) - x$ olsun. $f([a, b]) \subset [a, b]$ ise,

$$g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$$

ve

$$g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$$

olur. $g$ fonksiyonu sürekli olduğundan öyle bir $c \in [a, b]$ vardır öyle ki, $g(c) = 0$ olur.

$f([a, b]) \supset [a, b]$ ise $f(x_0) \leq a$ ve $f(y_0) \geq b$ olacak şekilde $x_0$,$y_0 \in [a, b]$ vardır. Buradan,

$$g(x_0) = f(x_0) - x_0 \leq a - x_0 \leq 0$$

ve

$$g(y_0) = f(y_0) - y_0 \geq b - y_0 \geq 0$$

elde edilir. $g$ fonksiyonu sürekli olduğundan öyle bir $c \in [x_0, y_0]$ vardır öyle ki, $g(c) = 0$ olur. Her iki durumda da $c$ noktası $f$'nin sabit noktasıdır. □

**Önerme 1.2.5.** *Eğer her $I \subset [0, 1]$ için, $[0, 1] \subset f^n(I)$ olacak şekilde bir $n_0 > 0$ sayısı varsa, her $n > n_0$ için, $f$ fonksiyonu, $[0, 1]$'de kaotiktir.*

*Kanıt.* $f$'nin topolojik geçişken olduğunun gösterilmesi oldukça kolaydır. Çünkü; boştan farklı ve açık olacak şekilde her $I, J \subset [0,1]$ için, $f$ leo özelliğine sahip olduğundan $[0,1] \subset f^n(I)$ olacak şekilde bir $n > 0$ sayısı vardır. Buradan

$$f^n(I) \cap J = [0,1] \cap J \neq \emptyset$$

elde edilir.

Her $I \subset [0,1]$ için, $I \subset [0,1] \subset f^n(I)$ olacak şekilde bir $n > 0$ sayısı mevcut olduğundan ve $f^n$ fonksiyonu sürekli olduğundan dolayı $\exists\, x \in I$ için, $f^n(x) = x$ eşitliği gerçeklenir. Dolayısıyla; $f$'nin periyodik noktalarının kümesi $[0,1]$'de yoğundur.

Son olarak, her $I \subset [0,1]$ için, $I \subset [0,1] \subset f^n(I)$ olacak şekilde bir $n > 0$ sayısı mevcut olmasından, $\forall\, x \in I$ için,

$$| f^n(x) - f^n(y) | \geq \frac{1}{2}$$

olacak şekilde bir $y \in I$ vardır. O halde; $f$, başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır. □

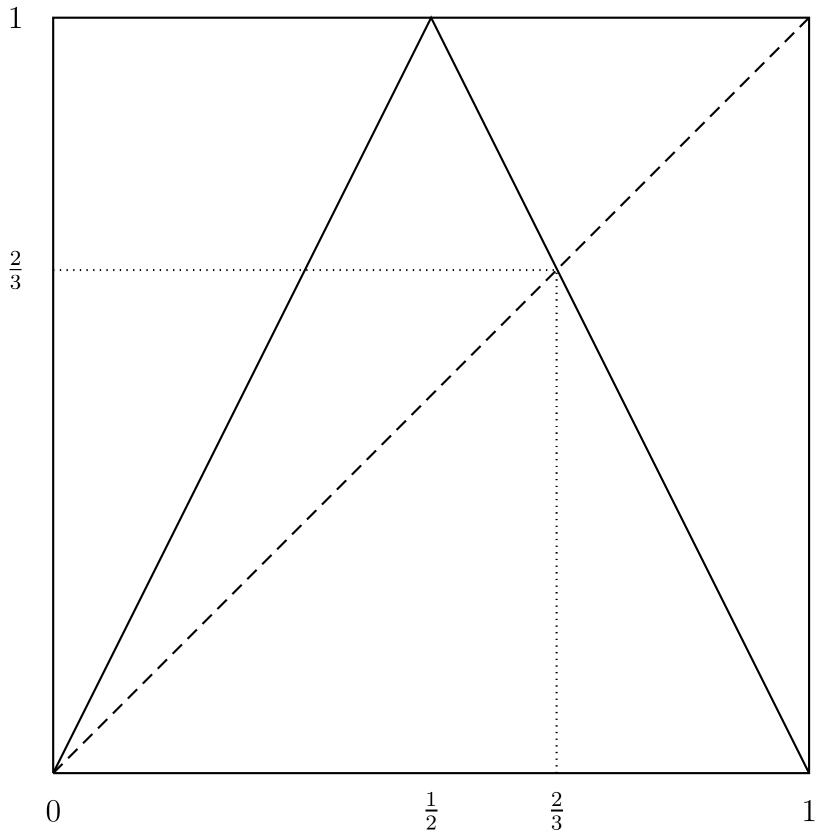
Şimdi yukarıdaki bilgiler kullanılarak çadır (tent) dönüşümünün kaotik olduğu gösterilsin.

**Örnek 1.2.6.** $T : [0,1] \to [0,1]$,

$$T(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*dönüşümüne çadır dönüşümü denir. Çadır dönüşümü kaotik bir fonksiyondur.*

*Kanıt.* $f$ fonksiyonunun leo özelliğine sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Bu fonksiyonun grafiği şekildeki gibidir:




Şekil 1.1: Çadır Dönüşümünün Grafiği

İspat birkaç adımda yapılacaktır. Öncelikle; $0 < t < \frac{1}{2}$ için, $I = [0, t]$ ise,

$$\begin{aligned} f(I) &= [0, 2t] \qquad (1.1)\\ f^2(I) &= [0, 2^2 t] \\ f^3(I) &= [0, 2^3 t] \\ &\vdots \\ f^k(I) &= [0, 2^k t] \\ &\vdots \end{aligned}$$

olur. Bu işlem, $2^k t \geq \frac{1}{2}$ oluncaya kadar sürdürülebilir. Bu durumda, $[0, \frac{1}{2}] \subset f^k(I)$ elde edilir. Buradan,

$$[0, 1] \subset f^{k+1}(I)$$

ifadesine ulaşılır.

$\frac{1}{2} < r < 1$ için, $t \in (0, \frac{1}{2})$ olacak şekilde, $I = [r, 1]$ ise,

$$f(I) = [0, t]$$

olur. Eşitlik (1.1)'den

$$[0, 1] \subset \ f^{k+2}(I)$$

ifadesi elde edilir.

$0 < a < \frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2} < b < 1$ için $I = [a, b]$ şeklinde ise, $r \in (0, 1)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f(I) &= [r, 1] \\ f^2(I) &= [0, t] \end{aligned} \tag{1.2}$$

olacak şekilde $t \in (0, 1)$ vardır. Dolayısıyla, (1.1) eşitliğinden,

$$[0, 1] \subset f^{k+3}(I)$$

olur.

Şimdi, bu üç özel durumun dışında, $I \subset (0, \frac{1}{2})$ ve $I \subset (\frac{1}{2}, 1)$ durumlarını ele alalım.

$I \subset (0, \frac{1}{2})$ ise, $I = [a, b]$ için, grafiğin sol kısmının eğimi 2 olduğundan,

$$| \ f(I) \ |= 2 \ | \ I \ |$$

olur. Aralığın boyu, $f$ fonksiyonu altında ikiye katlanır.

$I \subset (\frac{1}{2}, 1)$ ise, $I = [a, b]$ için, grafiğin sol kısmının eğimi $-2$ olduğundan,

$$\begin{aligned} | \ f(I) \ |&=| -2 \ || \ I \ | \\ | \ f(I) \ |&= 2 \ | \ I \ | \end{aligned}$$

olur. Aralığın boyu, $f$ fonksiyonu altında ikiye katlanır.

Bu durumda, ister $I \subset (0, \frac{1}{2})$ isterse $I \subset (\frac{1}{2}, 1)$ durumu söz konusu olsun aralık boylarının $f$ altındaki görüntüleri hep iki katına çıkar. Her iki durum için de $\frac{1}{2} \in \ f^{\,l}(I)$ olacak şekilde bir $l > 0$ sayısı bulunabilir. (1.2) eşitliğinden,

$$[0, 1] \subset f^{l+k+3}(I)$$

olur. Yani; her $I \subset [0, 1]$ için, $[0, 1] \subset f^n(I)$ olacak şekilde, her $n > n_0$ için bir $n_0 > 0$ sayısı vardır. O halde; çadır dönüşümü leo özelliğine sahiptir. $\square$

Üçüncü kaos örneğimiz daha soyut bir uzay üzerinde tanımlanmış olan ve yine iyi bilinen kaotik fonksiyonlardan birisi olan shift dönüşümüdür.

**Tanım 1.2.7.** $\sum_2 = \{s = s_0 s_1 s_2 ... \mid s_j = 0 \quad veya \quad s_j = 1\}$ *kümesine* ***dizi uzayı*** *denir.*

**Önerme 1.2.8.** $s, t \in \sum_2$ *için,*

$$d(s,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|s_j - t_j|}{2^j}$$

*şeklinde tanımlı*

$$d : \sum_2 \times \sum_2 \to \mathbb{R}$$

*fonksiyonu,* $\sum_2$ *üzerinde bir metriktir.*

*Kanıt.* $s, t \in \sum_2$ herhangi iki dizi ise, $d(s,t) \geq 0$ dır.

$d(s,t) = 0 \iff$ tüm $i$'ler için $s_i = t_i$ durumunda, $\mid s_i - t_i \mid = \mid t_i - s_i \mid$ olduğundan $d(s,t) = d(t,s)$'dir.

Son olarak, $r, s, t \in \sum_2$ iken üçgen eşitsizliğinden,

$$\mid r_i - s_i \mid + \mid s_i - t_i \mid \geq \mid r_i - t_i \mid$$

olur ki bu da,

$$d(r,s) + d(s,t) \geq d(r,t)$$

demektir. Dolayısıyla $d$, $\sum_2$ üzerinde bir metriktir, $(\sum_2, d)$ bir metrik uzaydır. □

Bu uzayda verilen iki noktanın yakınlığı aşağıdaki önerme ile karekterize edilir.

**Önerme 1.2.9.** $s, t \in \sum_2$ *ve* $i = 0, 1, ..., n$ *için* $s_i = t_i$ *olsun.* $s_i$ *ve* $t_i$ *dizilerine* ***yakın diziler*** *denir ve* $d(s,t) \leq \frac{1}{2^n}$ *dir. Tersine,* $d(s,t) < \frac{1}{2^n}$ *ise* $i = 0, 1, ..., n$ *için* $s_i = t_i$*'dir.*

*Kanıt.* $i = 0, 1, ..., n$ için $s_i = t_i$ ise

$$\begin{aligned} d(s,t) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{\mid s_i - s_i \mid}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\mid s_i - t_i \mid}{2^i} \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

olur. Eğer $j \leq n$ ler için $s_j \neq t_j$ ise

$$d(s,t) \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}$$

olur ki bu bir çelişkidir. O halde $i \leq n$ için $d[s,t] < \frac{1}{2^n}$ dir. □

Artık shift dönüşümünü tanımlanabilir.

**Örnek 1.2.10.** *$\sigma : \sum_2 \to \sum_2$ olmak üzere $\sigma(s_0s_1s_2...) = (s_1s_2s_3...)$ dönüşümüne **shift dönüşümü** denir. Bu dönüşüm kaotiktir.*

*Kanıt.* Öncelikle $\sigma$'nın periyodik noktalarının kümesinin yoğun olduğunu gösterelim. $s \in \sum_2$ periyodu $n$ olan bir periyodik nokta olsun. Yani; $\sigma^n(s) = s$ olsun. O zaman,

$$\sigma^n(s) = s_ns_{n+1}s_{n+2}...$$

şeklinde olduğu için,

$$s_ns_{n+1}s_{n+2}... = s_0s_1s_2...$$

eşitliğinden,

$$s = s_0s_1...s_{n-1}s_0s_1...s_{n-1}...$$

elde edilir. Demek ki; $\sigma$ dönüşümün periyodik noktaları tekrarlı dizilerden oluşmaktadır.

$x = x_0x_1x_2... \in \sum_2$ keyfi bir nokta ve $B_\delta(x)$ de bu noktayı içeren keyfi bir açık yuvar olsun. Acaba bu açık yuvar içinde bir periyodik nokta var mıdır? Yeterince büyük bir $n$ sayısı için $\frac{1}{2^n} < \delta$ olur. Bu durumda

$$y = x_0x_1x_2...x_nx_0x_1x_2...x_n....x_0x_1x_2...x_n...$$

noktası periyodiktir ve $d(x, y) \leq \frac{1}{2^n} < \delta$ olur. Yani periyodik noktaların kümesi yoğundur.

Şimdi de $\sigma$'nın topolojik geçişken ve başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğu gösterilsin. $a \in \sum_2$ olmak üzere $B_\delta(a)$ yuvarı göz önüne alınsın. Yeterince büyük bir $m$ sayısı için, $\sigma^m(B_\delta(a)) = \sum_2$ olduğu ispatlansın.

$x \in \sum_2$ keyfi noktası verilsin. Yeterince büyük bir $m$ sayısı için, $b = a_0a_1a_2...a_{m-1}x_0x_1x_2...$ noktası hem $B_\delta(a)$ yuvarına aittir, hem de $\sigma^m(b) = x$ olur. Yani; $\sigma$ dönüşümü leo özelliğine sahiptir.

$U, V \subset \sum_2$ boş olmayan keyfi açıklar olsun. Yukarıdaki özelliğin bir sonucu olarak $\sigma^m(U) = \sum_2$ olacak şekilde bir $m > 0$ sayısı vardır, bu yüzden $\sigma^m(U) \cap V \neq \emptyset$ olur. Bu da $\sigma$'nın topolojik geçişken olması demektir.

$x = x_0x_1x_2... \in \sum_2$ keyfi bir nokta ve bu noktanın keyfi $B_\delta(x)$ açık yuvarı verilsin. Yine yeterince büyük bir $n$ için $y = x_0x_1x_2...x_{n-1}y_ny_{n+2}... \in B_\delta(x)$ dir ve $k \geq n$ iken $y_k = 1 - x_k$ olarak alınırsa,

$$d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) = 1$$

olur. Buna göre $\epsilon = \frac{1}{2}$ alındığında, her $x$ noktasının yakınında öyle bir y noktası vardır ki;

$$d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) > \frac{1}{2}$$

olur. Yani; $\sigma$ başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır. $\square$

# 2 KAOS KOŞULLARININ BAĞIMSIZLIĞI

Kaotik bir fonksiyon olmanın üç temel şartı birbirinden bağımsızdır. Yani; bu temel şartların herhangi birisinin diğerlerini veya herhangi iki şartın diğerini gerektirmediği anlaşılmalıdır. Aşağıdaki yedi örnek tüm bu durumları içermektedir. Bu örneklerle ilgili daha detaylı açıklamayı [3]'de bulabilirsiniz.

**Örnek 2.0.11.** *(topolojik geçişken değil, periyodik noktaları yoğun değil, başlangıç şartlarına hassas bağımlı değil)* $t \in (0,1)$ *olmak üzere* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu,* $f(x) = tx$ *biçiminde tanımlansın.*

$f$*, topolojik geçişken değildir. Çünkü,* $U = (0,1)$ *ve* $V = (-5,-4)$ *açık altkümeleri göz önüne alındığında,* $\forall x \in U$ *ve* $\forall k > 0$ *için* $f^k(x) > 0$ *olduğundan,*

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

*olacak şekilde bir* $k > 0$ *sayısı bulunamaz.*

$x = 0$ *noktası,* $f$*'nin sabit noktasıdır, başka periyodik nokta yoktur. Dolayısıyla periyodik noktaların kümesi* $\mathbb{R}$*'de yoğun değildir.*

$f$ *başlangıç şartlarına hassas bağımlı da değildir.* $\mathbb{R}$*'deki her* $x$ *noktasının her* $N$ *komşuluğu için*

$$\left|f^k(x) - f^k(y)\right| > \epsilon$$

*olacak şekilde* $y \in N$ *ve* $k > 0$ *bulunması gerekirken,* $x = 0$ *noktası ele alındığında ve* $N$ *komşuluğunu* $N = (-\epsilon, \epsilon)$ *olarak seçildiğinde* $\forall\ y \in N$ *için* $f(y) \in N$ *olduğu görülür. Dolayısıyla her* $k > 0$ *için,* $f^k(y) \in N$ *olduğundan*

$$\left|f^k(0) - f^k(y)\right| > \epsilon$$

*olacak şekilde* $k > 0$ *sayısı bulunamaz.*

**Örnek 2.0.12.** *(topolojik geçişken değil, periyodik noktaları yoğun değil, başlangıç şartlarına hassas bağımlı)* $t > 1$ *olmak üzere* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu,* $f(x) = tx$ *biçiminde tanımlansın. Bu durumda;* $f$*, topolojik geçişken değildir. Çünkü,* $U = (0,1)$ *ve* $V = (-8,-7)$ *açık altkümeleri için,*

$$\begin{aligned} f(U) &= (0,k) \\ f^2(U) &= (0,k^2) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$f^n(U) \ = \ (0, k^n)$$

$$\vdots$$

*ifadeleri hiç bir zaman negatif bir sayı içermez. Dolayısıyla* $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ *olacak şekilde bir* $k > 0$ *sayısı bulunması mümkün değildir.*

$f$*'nin periyodik noktalarının kümesi* $\mathbb{R}$*'de yoğun değildir. Sadece* $x = 0$ *noktası periyodik noktadır.*

$f$*, başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır çünkü; keyfi bir* $x \in R$ *noktasının keyfi bir* $U$ *komşuluğundan* $x \neq y$ *olacak şekilde bir* $y \in U$ *seçilirse,* $x$ *ile* $y$ *arasındaki uzaklık* $\mid x - y \mid$ *iken,*

$$\mid f(x) - f(y) \mid = \mid tx - ty \mid = t \mid x - y \mid$$

*ve*

$$\mid f^n(x) - f^n(y) \mid = \mid t^n x - t^n y \mid = t^n \mid x - y \mid$$

$t > 1$ *olduğunda* $n$ *yeterince büyük seçildiğinde herhangi bir* $\epsilon > 0$ *sayısı için,*

$$\mid f^n(x) - f^n(y) \mid > \epsilon$$

*olur.*

**Örnek 2.0.13.** *(topolojik geçişken değil, periyodik noktaları yoğun, başlangıç şartlarına hassas bağımlı değil)* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu,* $f(x) = -x$ *biçiminde tanımlansın;*

$f$*, topolojik geçişken değildir.* $U = (0, 1)$*,* $V = (3, 4)$ *kümeleri için,*

$$f(U) \ = \ (-1, 0)$$

$$f^2(U) \ = \ U$$

$$f^3(U) \ = \ (-1, 0)$$

$$\vdots$$

$$f^{2n}(U) \ = \ U$$

$$f^{2n+1}(U) \;\; = \;\; (-1,0)$$

$$\vdots$$

*olup,*

$$f^k(U) \cap V \;\neq \emptyset$$

*olacak şekilde bir* $k > 0$ *sayısı bulunması mümkün değildir.*

$f$*'nin periyodik noktalarının kümesi* $\mathbb{R}$*'de yoğundur.* $\forall x \in \mathbb{R}$ *için,*

$$f(x) = -x \;\; ve \;\; f^2(x) = x$$

*olur ki bütün reel sayılar* $f$*'nin periyodu* $2$ *olan noktalardır.*

$f$*, başlangıç şartlarına hassas bağımlı değildir.* $x \in \mathbb{R}$ *keyfi bir nokta ve* $N$ *de bu* $x$*'in bir açık komşuluğu olsun. Bu komşuluğa ait her* $y$ *elemanı ile* $x$ *arasındaki uzaklık,* $\mid x - y \mid$*'dir. Görüntüleri arasındaki uzaklık ise,*

$$\mid f(x) - f(y) \mid = \mid x - y \mid$$

*olduğundan,* $f$ *uzaklık koruyan bir fonksiyondur.* $f$ *bir izometri olduğundan başlangıç şartlarına hassas bağımlı değildir.*

**Örnek 2.0.14.** *(topolojik geçişken değil, periyodik noktaları yoğun, başlangıç şartlarına hassas bağımlı)*

$$\begin{array}{rccl} f_1 = g: & S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & \theta & \longmapsto & g(\theta) = 2\theta \quad (mod 2\pi) \end{array}$$

*ve*

$$\begin{array}{rccl} f_2: & [-1,1] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & f_2(x) = x \end{array}$$

*fonksiyonları yardımıyla,* $X = S^1 \times [-1,1]$ *üzerinde,*

$$\begin{array}{rccl} F \;\; : & X & \longrightarrow & X \\ & (\theta, y) & \longmapsto & F(x,y) = (f_1(\theta),\; f_2(y)) \end{array}$$

*şeklinde tanımlanan* $F$ *fonksiyonunun özellikleri incelenmeden önce,* $f_1$ *ve* $f_2$ *fonksiyonlarının taşıdıkları özellikler incelenmelidir. Yukarıda* $f_1$*'in* $S^1$ *üzerinde kaos koşullarının üçünü de sağladığı gösterilmişti.*

*Şimdi de* $f_2$ *fonksiyonu incelensin.* $f_2$ *topolojik geçişken değildir.* $\forall x \in [-1,1]$ *için* $f_2(x) = x$ *olup bütün noktalar periyodiktir.* $f_2$*, başlangıç şartlarına hassas bağımlı da değildir.*

*$f_1$ ve $f_2$ yardımıyla tanımlanan $F$ fonksiyonu topolojik geçişken değildir.*

$$\begin{aligned} U &= (0, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}), \\ V &= (0, \frac{\pi}{2}) \times (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

*açık kümeleri için $F$'nin iterasyonları,*

$$\begin{aligned} F(x,y) &= (f_1(x), f_2(y)) &= (f_1(x), y), \\ F^2(x,y) &= (f_1^2(x), f\,{}_2^2(y)) &= (f_1^2(x), y), \\ &\vdots \\ F^k(x,y) &= (f_1^k(x), f_2^k(y)) &= (f_1^k(x), y), \\ &\vdots \end{aligned}$$

*şeklindedir. $\forall\ k \in N$ için*

$$f_1^k(x) \in S^1$$

*ve*

$$f_2^k(y) \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$$

*olduğundan*

$$F^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

*olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı bulunması mümkün değildir.*

*$F$'nin periyodik noktalarının kümesi $X$'de yoğundur. $N \subset X$ boştan farklı bir açık küme olsun.*

$$U \times V \subset N$$

*olacak şekilde $U \subset S^1$, $V \subset [-1,1]$ açık altkümeleri vardır. $f_1$'in periyodik noktaları $S^1$'de yoğun olduğundan*

$$f_1^n(x) = x$$

*olacak şekilde bir $x \in U$ noktası vardır. Herhangi bir $y \in V$ için*

$$f\,{}_2^n(y) = y$$

*olduğundan*

$$p = (x,y) \in N$$

*için,*

$$F^n(p) = p$$

*olur ki bu da F'nin N'ye ait periyodik noktasıdır.*

*F, başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.*

$$p = (x, y) \in X$$

*herhangi bir nokta ve N de p'nin herhangi bir komşuluğu olsun. Bu durumda, $S^1$'de x' in bir U komşuluğu ve y'nin bir V komşuluğu*

$$U \times V \subset N$$

*olacak şekilde seçilebilir. $f_1$, $S^1$ üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğundan,*

$$\left|f_1^k(x) - f_1^k(x')\right| > \frac{1}{2}$$

*olacak şekilde bir $x' \in U$ ve $k > 0$ sayısı vardır.*

$$p' = (x', y)$$

*denilirse,*

$$p' \in U \times V$$

*dir ve bu nokta için,*

$$\begin{aligned} d(F^k(p), F^k(p')) &= d((f_1^k(x), f_2^k(y)), (f_1^k(x'), f_2^k(y))) \\ &= \mid f_1^k(x) - f_1^k(x') \mid > \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

*elde edilir. Yani; F fonksiyonu başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.*

Sıradaki örnek için birim çember üzerindeki irrasyonel dönmeden yararlanılacaktır. Bunun için çemberin irrasyonel dönmelerinin yörüngelerini karekterize eden aşağıdaki teorem verilsin (bakınız [6]).

**Önerme 2.0.15.** *(JACOBI) $T_\lambda : S^1 \longrightarrow S^1$,*

$$T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda \quad (Mod 2\pi) \quad (\lambda \ irrasyonel)$$

*şekilde tanımlı $T_\lambda$ fonksiyonu altında her noktanın yörüngesi $S^1$'de yoğundur.*

**Örnek 2.0.16.** *(topolojik geçişken, periyodik noktaları yoğun değil, başlangıç şartlarına hassas bağımlı değil)*

$\lambda \in \mathbb{R}$ *irrasyonel bir sayı olmak üzere,*

$$T_\lambda : S^1 \longrightarrow S^1, \quad T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda \quad (Mod 2\pi)$$

*fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyonun kaos koşullarını sağlayıp sağlamadığı kontrol edilsin:*

$T_\lambda$ *fonksiyonu topolojik geçişkendir. Çünkü;* $U, V \subset S^1$ *boştan farklı herhangi iki açık küme ise Jacobi önermesinden dolayı;* $\theta \in U$*'nun yörüngesi* $S^1$*'de yoğun olduğundan öyle bir* $k > 0$ *sayısı vardır ki* $T_\lambda^k(\theta) \in V$ *olur. Bu ise* $T_\lambda^k(\theta) \cap V \neq \emptyset$ *ifadesini gerçekler.*

$T_\lambda$ *fonksiyonunun hiç periyodik noktası yoktur. Çünkü; Jacobi önermesinden, her* $\theta \in S^1$*'in yörüngesinin* $S^1$*'de yoğun olması söz konusu iken* $\theta$ *periyodik olamaz. Yani;* $\theta$*'nın yörüngesi belli bir adım sonra kapanamaz ve sonlu sayıda nokta kümesi* $S^1$*'de yoğun olamaz.*

$T_\lambda$ *fonksiyonu başlangıç şartlarına hassas bağımlı değildir. Çünkü; herhangi bir* $\theta \in S^1$ *ve* $N$ *de* $\theta$*'nın bir komşuluğu olsun. Her* $\theta' \in N$ *için*

$$| T_\lambda(\theta) - T_\lambda(\theta') | = | \theta + 2\pi\lambda - \theta' - 2\pi\lambda | = | \theta - \theta' |$$

*olur. Bu ise,* $T_\lambda$*'nın* $S^1$*'deki noktalar arasındaki uzaklığı koruduğunu gösterir.*

**Örnek 2.0.17.** *(Topolojik geçişken,periyodik noktaları yoğun değil,başlangıç şartlarına hassas bağımlı )*

$$\begin{array}{rccl} f: & S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & x & \longmapsto & f(x) = x + 1 \quad (mod 2\pi) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g: & S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & x & \longmapsto & g(x) = 2x \quad (mod 2\pi) \end{array}$$

*fonksiyonları yardımıyla* $T^2 = S^1 \times S^1$ *üzerinde,*

$$\begin{array}{rccl} F: & T^2 & \longrightarrow & T^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & F(x,y) = (f(x), g(y)) \end{array}$$

*şeklinde* $F$ *fonksiyonu tanımlansın.*

$F$*,*$T^2$ *üzerinde topolojik geçişkendir. Çünkü;* $U, V \subset T^2$ *boştan farklı herhangi iki açık küme olsunlar. Bu durumda,* $U_1 \times U_2 \subset U$ *ve* $V_1 \times V_2 \subset V$ *olacak şekilde* $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset S^1$ *açık altkümeleri vardır.*

*$g$, $S^1$ üzerinde topolojik geçişkendir. $k > 0$ sayısı $g^k(U_2)$, $S^1$'in tamamını örtecek şekilde bulunabilir ve her $n \geq k$ için $g^n(U_2)$, $S^1$'in tamamını örter. Her bir $x \in U_1$'in $f$ altındaki yörüngesi $S^1$'de yoğun olduğundan $f^{I_1}(x) \in V$ olacak şekilde bir en küçük $I_1 > 0$ sayısı vardır. Eğer $I \geq k$ ise, $g^{I_1}(U_2)$, $S^1$'i örttüğünden $g^{I_1}(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ olur ve bir $y \in U_2$ için $g^{I_1}(y) \in V$ olur. Böylece $(x, y) \in U_1 \times U_2 \subset U$ ve $F^{I_1}(x, y) \in V_1 \times V_2 \subset V$ olup, $F$ topolojik geçişken olur.*

*$I_1 < k$ ise, $x$ noktası $f$ altında $I_1$. iterasyonda $V_1$'e girer. Sonraki iterasyonlarda $V_1$'de kalırsa, uygun bir $y \in U_2$ için $F^k(x, y) \in V_1 \times V_2 \subset V$ olur. Aksi halde, $x$ noktası sonlu adım sonra $V_1$'den ayrılır. Bu sonlu adıma $s_1$ denilirse,*

$$f^{I_1}(x), f^{I_1+1}(x), ..., f^{I_1+s_1}(x) \in V \quad ve \quad f^{I_1+s_1+1}(x) \notin V$$

*olur.*

*Eğer, $I_1 + s_1 \geq k$ ise, yine aynı sebepten $F$, topolojik geçişken olur. Aksi taktirde, $1 \leq i \leq s$ olmak üzere, $f^{I_1+i}(x)$ lerden hiçbirini içermeyecek şekilde $V_{11} \subset V_1$ açık altkümesi bulunabilir. $x$'in yörüngesi $s_1$'de yoğun olduğundan $f^{I_2}(x) \in V_{11}$ olacak şekilde bir $I_2 > I_1$ sayısı vardır. Yani; $x$, $I_2$. adımda $V_{11}$'e dolayısıyla $V_1$'e girer. Eğer $I_2 \geq k$ ise $F$, aynı sebepten dolayı topolojik geçişken olur. Aksi taktirde, $x$'in yörüngesi sonlu adım $V_1$'de kalır ve sonra $V_1$'den ayrılır. Bu sonlu adım $s_2$ olsun. $I_2 + s_2 \geq k$ ise yine $F$ topolojik geçişken olur. $I_2 + s_2 < k$ ise, bu durumda $i \leq I_2 + s_2$ iken $f^i(x) \in V_{12}$ olacak şekilde $V_{12} \subset V_1$ açık altkümesi bulunabilir. Benzer şekilde devam edilirse $I_1 < I_2 < ... < I_t < ...$ şeklinde bir $I_1, I_2, ...$ tamsayı dizisi elde edilir. Uygun bir $i_0$ için $I_{i_0} \geq k$'dır. Bu durumda, $f^{I_{i_0}}(x) \in V_1$ ve $g^{I_{i_0}}(U_2) \supset V_2$ olduğundan uygun bir $y \in U$ için $F^{I_{i_0}}(x, y) \in V_1 \times V_2$ olur.*

*$F$'nin hiç bir periyodik noktası yoktur. Çünkü, $p = (x, y)$ noktası, $F$'nin $n$ periyotlu noktası olrak alındığında,*

$$F(p) = F(x, y) = (f(x), g(y)) = (x + 1, 2y)$$

*olduğundan ve $p = (x, y)$, $n$ periyotlu olduğundan,*

$$\begin{aligned} F^n(p) = p \quad &\Longrightarrow \quad F^n(x, y) = (x, y) \\ &\Longrightarrow \quad (f^n(x), g^n(y)) = (x, y) \\ &\Longrightarrow \quad f^n(x) = x \text{ ve } g^n(y) = y \end{aligned}$$

*olur. Ancak, Jacobi önermesinden $f^n(x) = x$ olacak şekilde $n > 0$ bulunması imkansızdır. Bu sebepten $F$'nin hiç bir periyodik noktası yoktur. Dolayısıyla, $F$'nin periyodik noktalarının kümesi, $T^2$'nin yoğun bir altkümesi değildir.*

*$F$, $T^2$ üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır. Çünkü; $p(x,y) \in T^2$ herhangi bir nokta ve $N$, $p$'nin bir komşuluğu olsun. Bu durumda; $U, V \subset S$, $p \in U \times V \subset N$ olacak şekilde boştan farklı açık altkümeleri vardır.*

*$g$, $S^1$ üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğundan $\epsilon = 1$ ve $y \in V$ için,*

$$\mid g^k(y) - g^k(y') \mid > 1$$

*olacak şekilde bir $y^{'} \in V$ ve $k > 0$ sayısı vardır. $p' = (x, y')$ dersek, $p' \in N$ olur ve*

$$d(F^k(p), F^k(p^{'})) \geq \mid g^k(y) - g^k(y') \mid > 1$$

*elde edilir.*

**Örnek 2.0.18.** *(Topolojik geçişken, periyodik noktaları yoğun, başlangıç şartları na hassas bağımlı değil)*

*$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ iken $x_i \neq x_j$ kümesi üzerinde ayrık metrik kondurulmuş olsun. $X$ üzerinde,*

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & X \\ & x_i & \longmapsto & f(x_i) = x_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ & & & f\ (x_n) = x_1 \end{array}$$

*şeklinde tanımlanan $f$ fonksiyonu topolojik geçişkendir. Boştan farklı $U, V \subset X$ keyfi açık altkümeleri için en az bir $x_i \in U$ ve en az bir $x_j \in V$ 'dir. $f$'nin tanımından dolayı $f^k(x_i) = x_j$ olacak şekilde bir $k \geq 0$ sayısı vardır. Aynı $k$ sayısı için $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olur.*

*$X$'deki her nokta $f$ fonksiyonunun periyodu $n$ olan periyodik noktalarıdır. Yani; $f$'nin periyodik noktalarının kümesi $X$'in yoğun bir altkümesidir.*

*$f$, başlangıç şartlarına hassas bağımlı değildir. $\forall x \in X$ noktasının $N = \{x\}$ komşuluğunda yörüngesi $x$'in yörüngesinden ayrılan bir $y$ elemanı bulunmamaktadır.*

Dikkat edilirse bu son örnek oldukca yapaydır, bu duruma uyan doğal bir örneğin bulunamamasının sebebi takib eden bölümün temel teoremidir.

# 3 KAOS KOŞULLARI ARASINDAKİ GEREKTİRMELER

Önceki bölümümün sonunda belirtildiği gibi, kaos koşullarının bağımsız olduğu gösterilirken periyodik noktaları yoğun ve topolojik geçişken olduğu halde başlangıç şartlarına hassas bağımlı olmayan örnek, sonlu bir küme üzerinde tek yörüngeli bir fonksiyon idi. Bu özelliklere sahip daha doğal bir fonsiyonun bulunamamasının nedeni oldukça makul sayılabilecek koşullar altında periyodik noktaları yoğun ve topolojik geçişken olan bir fonksiyonun başlangıç şartlarına hassas bağımlı olmasıdır. Bu 1992 de Banks, Brooks, Cairns, Davis and Stacy tarafından American Mathematical Monthly de yayınlanmıştır [1].

Bu teoremin [7] den alınan ispatı aşağıdaki şekildedir.

**Teorem 3.0.19.** *(Banks, Brooks, Cairns, Davis, Stacy) $f : X \longrightarrow X$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f$ topolojik geçişkense ve periyodik noktalarının kümesi $X$'de yoğunsa $f$, başlangıç şartlarına hassas bağımlı olur dolayısıyla kaotik olur.*

**Lemma 3.0.20.** *$f : X \longrightarrow X$ sürekli bir fonksiyon olsun ve $f$'nin en az iki periyodik noktası, üst üste binmiş olmayan yörüngelere ait olsun. O zaman öyle bir $\epsilon_0 > 0$ vardır öyle ki $\forall n \in Z^+$ olmak üzere, $\forall x \in X$ ve bir $p \in X$ periyodik nokta için $d(x, f^n(p)) \geq \epsilon_0$ şartı sağlanır.*

*Kanıt.* $Orb(p_0) \cap Orb(q_0) = \emptyset$ olacak şekilde $p_0$ ve $q_0$ gibi iki periyodik nokta alınsın. $Orb(p_0) = \{p_0, p_1, ...p_{n-1}\}$ ve $Orb(q_0) = \{q_0, q_1, ...q_{m-1}\}$ olsun.

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2}\min\{d(p_i, q_j) : i = 0, 1, ..., n-1, j = 0, 1, ..., m-1\}$$

olacak şekilde alınsın. $x \in X$ bir keyfi nokta olsun. Herhangi $r, s \in Z^+$ sayıları için üçgen eşitsizliği yardımıyla,

$$2\epsilon_0 \leq d(f^r(p_0), f^s(q_0)) \leq d(f^r(p_0), x) + d(x, f^s(q_0))$$

ifadesi yazılabilir.Eğer,

$$d(f^r(p_0), x) \leq \epsilon_0$$

ise

$$d(x, f^s(q_0)) \geq \epsilon_0$$

olur. (Tüm $s \in \mathbb{Z}^+$ için), eğer,

$$d(f^s(q_0), x) \leq \epsilon_0$$

ise $r \in \mathbb{Z}^+$ için

$$d(x, f^r(p_0)) \geq \epsilon_0$$

olur ve ispat biter. $\square$

*Kanıt.* $\epsilon = \frac{1}{4}\epsilon_0$ alınsın. Buradaki $\epsilon_0$ sayısı, yardımcı teoremde sözü edilen sayı olarak alınsın. $x \in X$ ve $\delta < \epsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı verlsin. Periyodik noktaların kümesinin yoğun olmasından dolayı öyle bir $k$-periyotlu $y \in X$ noktası vardır ki, öyle ki $d(x, y) < \delta$ olur. Yardımcı teoremden dolayı öyle bir $p$ periyodik noktası vardır ki öyle ki,

$$d(x, f^n(p)) \geq \epsilon_0 = 4\epsilon \tag{3.1}$$

($n \in \mathbb{Z}$ için) olur.

$$U = \bigcap_{i=0}^{k} f^{-i}(B_\epsilon(f^i(p)))$$

olsun. $U$'nun

$$U = \{z : d(f^i(z), f^i(p)) < \epsilon, 0 \leq i \leq k\}$$

olduğunun gösterilmesi kolaydır. $U$ açık ve boştan farklıdır; Çünkü en azından $p$ noktasını içerir. $f$ fonksiyonu geçişken olduğundan bir $z \in B_\delta(x)$ vardır öyle ki $f^m(z) \in U$. (Bazı $m \in \mathbb{Z}^+$ ler için). $r \in Z^+$ sayısı $\frac{m}{k} < r < \frac{m}{k} + 1$ veya $0 < kr - m \leq k$ olacak şekilde seçilsin. $f^m(z) \in U$ olacak şekilde bir $z \in B_\delta(x)$ vardır. Şimdi,

$$d(x, f^{kr-m}(p)) \leq d(x, y) + d(y, f^{kr}(z)) + d(f^{kr}(z), f^{kr-m}(p)) \tag{3.2}$$

ve $d(x, y) < \delta < \epsilon$ olduğundan,

$$f^{kr}(z) = f^{kr-m}(q) \in B_\epsilon(f^{kr-m}(p)),$$

buradan

$$d(f^{kr}(z), f^{kr-m}(p)) < \epsilon$$

(3.2) ifadesinden,

$$d(x, f^{\,kr-m}(p)) < 2\epsilon + d(y, f^{kr}(z))$$

olur. Ayrıca, (3.1) ifadesi,

$$d(y, f^{kr}(z)) > 2\epsilon \quad \text{veya} \quad d(f^{kr}(y), f^{kr}(z)) > 2\epsilon$$

olmasını gerektirir. $y$, $k$-periyotlu olduğundan ve üçgen eşitsizliğinden,

$$2\epsilon < d(f^{kr}(y), f^{kr}(z)) \leq d(f^{kr}(y), f^{kr}(x)) + d(f^{kr}(x), f^{kr}(z))$$

olur. Böylece, ya

$$d(f^{kr}(y), f^{kr}(x)) > \epsilon$$

ifadesi, yada

$$d(f^{kr}(x), f^{kr}(z)) > \epsilon$$

ifadesi gerçeklenir. Bu ise hassas bağımlılığı gerektirir. □

[14]'de $\mathbb{R}$'de bir aralık üzerinde sürekli bir fonksiyonun geçişkenliğinin kaosu gerektirdiği ispatlanmıştır. Burada, bu teoremin [5]'den uyarlanmış bir ispatı incelenecektir.

**Lemma 3.0.21.** *$I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to I$ sürekli fonksiyon olsun. Eğer $f$'nin $J \subset I$ aralığında periyodik nokta yoksa ve $0 < m < n$ olmak üzere $z, f^m(z), f^n(z) \in J$ ise ya $z < f^m(z) < f^n(z)$ ya da $z > f^m(z) > f^n(z)$'dir.*

*Kanıt.* $z \in J$ noktası için,

$$z < f^m(z) \quad \text{ve} \quad f^m(z) > f^n(z) \tag{i}$$

olsun. $g : I \to I$, $g(x) = f^m(x)$ fonksiyonu için, $z < g(z)$ olduğundan $k \geq 1$ doğal sayısı için,

$$z < g(z) < g^{k+1}(z)$$

dir. Aksi halde, eğer bu eşitsizliği sağlamayan en küçük doğal sayı $k_0$ ise,

$$\begin{array}{rccl} h: & [z, g(z)] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & h(x) = g^{k_0}(x) - x \end{array}$$

fonksiyonu için,

$$h(z) = g^{k_0}(z) - z > 0$$

ve

$$\begin{aligned} h(g(z)) &= g^{k_0}(g(z)) - g(z) \\ &= g^{k_0+1}(z) - g(z) < 0 \end{aligned}$$

olacaktır. Ara değer teoreminden en az bir $c \in (z, g(z))$ için $g^{k_0}(c) = c$ olur. Bu ise, $f$'nin $J$'de periyodik noktasının olmaması varsayımı ile çelişir.
O halde her $k \in N^+$ için $z < g^k(z)$ dir. Özel olarak $k = n - m > 0$ için,

$$z < f^{(n-m)m}(z) \tag{3.3}$$

yazılabilir.

$$f^n(z) = f^{(n-m)}(f^m(z)) < f^m(z)$$

olduğu kabul edilmişti. Bu durumda,

$$\begin{array}{rccl} g: & I & \longrightarrow & I \\ & x & \longmapsto & g(x) = f^{(n-m)}(x) \end{array}$$

fonksiyonu için $g(f^m(z)) < f^m(z)$'dir. Ayrıca her $k \geq 1$ doğal sayısı için,

$$g^{k+1}(f^m(z)) < g(f^m(z)) < f^m(z)$$

dir. Aksi halde bu eşitsizliği sağlamayan en küçük doğal sayı $k_1$ ise

$$\begin{array}{rccl} h: & [f^n(z) = g(f^m(z)), f^m(z)] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & h(x) = g^{k_1}(x) - x \end{array}$$

fonksiyonu için,

$$h(f^m(z)) = g^{k_1}(f^m(z)) - f^m(z) < 0,$$

ve

$$\begin{array}{rcl} h(g(f^m(z))) & = & g^{k_1}(g(f^m(z))) - g(f^m(z)) \\ & = & g^{k_1+1}((f^m(z)) - g(f^m(z)) > 0 \end{array}$$

olacaktır. Ara değer teoreminden en az bir $c \in (f^n(z), f^m(z))$ için, $g^{k_1}(c) = c$ olur. Bu ise $f$'nin $J$'de periyodik noktasının olmaması varsayımı ile çelişir. O halde, her $k \in N^+$ için, $g^k(f^m(z)) < f^m(z)$'dir. Özel olarak $k = m$ için,

$$f^{(n-m)m}(f^m(z)) < f^m(z) \tag{3.4}$$

dir. Diğer taraftan

$$h : [z, f^m(z)] \to \mathbb{R}, h(x) = f^{(n-m)m}(x) - x$$

fonksiyonu için (3.2) ve (3.4) eşitsizlikleri dikkate alındığında,

$$\begin{array}{l} h(z) = f^{(n-m)m}(z) - z > 0, h(f^m(z)) \\ \quad = f^{(n-m)m}(f^m(z)) - f^m(z) < 0, \end{array}$$

olur. Ara değer teoreminden en az bir $c \in (z, f^m(z))$ için

$$h(c) = f^{(n-m)m}(c) - c = 0$$

olur. Bu ise $f$'nin $J$'de periyodik noktasının olmaması varsayımı ile çelişir. O halde $z < f^m(z)$ ise $f^m(z) < f^n(z)$ 'dir.

$z \in J$ noktası için,

$$z > f^m(z) \quad ve \quad f^m(z) < f^n(z) \tag{ii}$$

olsun.

$$\begin{array}{rccl} g: & I & \longrightarrow & I \\ & x & \longmapsto & g(x) = f^m(x) \end{array}$$

fonksiyonu için, $z > g(z)$ olduğundan $k \geq 1$ doğal sayısı için,

$$z > g(z) > g^{k+1}(z)$$

dir.

Aksi halde, eğer bu eşitsizliği sağlamayan en küçük doğal sayı $k_2$ ise

$$\begin{array}{rccl} h: & [g(z), z] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & h(x) = g^{k_2}(x) - x \end{array}$$

fonksiyonu için,

$$\begin{array}{rcl} h(z) & = & g^{k_2}(z) - z < 0 \\ h(g(z)) & = & g^{k_2}(g(z)) - g(z) = g^{k_2+1}(z) - g(z) > 0 \end{array}$$

olacaktır. Ara değer teoreminden en az bir $c \in (g(z), z)$ için $g^{k_2}(c) = c$ olur. Bu ise $f$'nin $J$'de periyodik noktasının olmaması varsayımı ile çelişir.

O halde her $k \in N^+$ için, $z > g^k(z)$'dir. Özel olarak $k = n - m > 0$ için,

$$z > f^{(n-m)m}(z) \tag{3.5}$$

yazılabilir.

$$f^n(z) = f^{(n-m)}(f^m(z)) > f^m(z)$$

olduğu kabul edilmişti. Bu durumda,

$$\begin{array}{rccl} g: & I & \longrightarrow & I \\ & x & \longmapsto & g(x) = f^{(n-m)}(x) \end{array}$$

fonksiyonu için

$$g(f^m(z)) > f^m(z)$$

dir. Ayrıca her $k \geq 1$ doğal sayısı için,

$$g^{k+1}(f^m(z)) > g(f^m(z)) > f^m(z)$$

dir. Aksi halde bu eşitsizliği sağlamayan en küçük doğal sayı $k_3$ ise

$$\begin{array}{rccl} h: & [f^m(z), f^n(z) = g(f^m(z))] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & h(x) = g^{k_3}(x) - x \end{array}$$

fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} h(f^m(z)) &= g^{k_3}(f^m(z)) - f^m(z) > 0, \\ h(g(f^m(z))) &= g^{k_3}(g(f^m(z))) - g(f^m(z)) \\ &= g^{k_3+1}((f^m(z)) - g(f^m(z)) < 0 \end{aligned}$$

olacaktır.

Ara değer teoreminden en az bir $c \in (f^m(z), f^n(z))$ için

$$h(c) = g^{k_3}(c) - c = 0$$

olur. Bu ise $f$'nin $J$'de periyodik noktasının olmaması varsayımı ile çelişir.

O halde, her $k \in N^+$ için, $g^k(f^m(z)) > f^m(z)$ dir. Özel olarak $k = m$ için,

$$f^{(n-m)m}(f^m(z)) > f^m(z) \tag{3.6}$$

dir. Diğer taraftan,

$$\begin{array}{rccl} h: & [f^m(z), z] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & h(x) = f^{(n-m)m}(x) - x \end{array}$$

fonksiyonu için, (3.4) ve (3.6) eşitsizlikleri dikkate alındığında,

$$\begin{aligned} h(z) &= f^{(n-m)m}(z) - z < 0, \\ h(f^m(z)) &= f^{(n-m)m}(f^m(z)) - f^m(z) > 0 \end{aligned}$$

olur. Ara değer teoreminden en az bir $c \in (f^m(z), z)$ için $h(c) = f^{(n-m)m}(c) - c = 0$ olur. Bu ise $f$'nin $J$'de periyodik noktasının olmaması varsayımı ile çelişir. O halde $z > f^m(z)$ ise $f^m(z) > f^n(z)$ 'dir. □

Buna göre teorem aşağıdaki şekilde ispatlanır.

**Teorem 3.0.22.** *$I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \longrightarrow I$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f$, topolojik geçişken ise periyodik noktaları $I$'da yoğundur.*

*Kanıt.* : $f$'nin periyodik noktaları $I$'da yoğun olmasın. Bu durumda $J \subset I$ aralığında hiç periyodik nokta yoktur. $J$'nin bir iç noktası $x$, $x$'in bir açık çevresi $N \subset J$ ve $E \subset J \backslash N$ bir açık aralık olsun. $f$, $I$ üzerinde topolojik geçişken olduğundan,

$$f^m(N) \cap E \neq \emptyset$$

olacak şekilde bir $m > 0$ doğal sayısı vardır. Dolayısıyla en az bir $y \in N \subset J$ için, $f^m(y) \in E \subset J$'dir. $y \neq f^{\ m}(y)$ ve $f$ sürekli olduğundan $y$'nin bir $U$ açık çevresi,

$$f^m(U) \cap U \neq \emptyset$$

olacak şekilde bulunabilir. Topolojik geçişkenlik tekrar bir $V \subset f^m(U)$ açık kümesi ve $U$ açık kümesi için kullanılırsa,

$$f^k(V) \cap U \neq \emptyset$$

olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı vardır.

O halde, en az bir $z \in U$ vardır. $n = m + k$ dersek, $0 < m < n$ olmak üzere,

$$z, f^n(z), f^m(z) \in J$$

fakat; $z, f^n(z) \in U$ iken $f^m(z) \notin U$ olduğundan

$$z < f^m(z) < f^n(z)$$

ve

$$z > f^m(z) > f^n(z)$$

eşitsizlikleri sağlanmaz. Bu ise yardımcı teorem ile çelişir. □

Yukarıdaki temel teoremin önemli sonuçlarından birisi de; kaos tanımına denk olan başka bir tanıma daha imkan vermesidir [12].

**Tanım 3.0.23.** *$X$ bir metrik uzay ve $f : X \longrightarrow X$ fonksiyonu verilsin. Boş olmayan her $U, V \subset X$ açık altküme çifti için, $U$'ya ait bir periyodik nokta yörüngesi $V$'ye değecek şekilde mevcut ise $f$* ***fonksiyonu Touhey özelliğine sahiptir*** *denir.*

Bir $f$ fonksiyonu Touhey özelliğine sahip ise bu uzayda boş olmayan keyfi iki açık küme verildiğinde bu açıkların her ikisine de değen periyodik yörüngeler vardır.

**Teorem 3.0.24.** *$X$ sonsuz bir metrik uzay olmak üzere, $f : X \to X$, sürekli bir fonksiyon olsun. $f$'nin kaotik olması için gerek ve yeter koşul $f$'nin Touhey özelliğine sahip olmasıdır.*

*Kanıt.* ($\Rightarrow$) $f$ kaotik bir fonksiyon olsun ve $U, V$ boş olmayan açık altkümeler olsunlar. $f$ kaotik olduğundan topolojik geçişkendir. Bu yüzden $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde $\exists\ k > 0$ sayısı vardır. $V$ açık ve $f$ sürekli olduğundan, $f^{-k}(V)$ kümeside açıktır. Bu durumda;

$$f^{-k}(V) \cap U = \{x \in U : f^k(x) \in V\} \subset X$$

kümesi açık ve boştan farklıdır. Periyodik noktaların yoğunluğundan dolayı, $\exists y \in f^{-k}(V) \cap U$ için, $f^p(y) = y$ olacak şekilde periyodu $p$ olan bir periyodik nokta vardır. $y \in U$ periyodik noktası için, $f^k(y) \in V$ olur. $y$ periyodik noktasının yörüngesi hem $U$'ya hem de $V$'ye değdiği için, Touhey özelliği sağlanmış olur.

($\Leftarrow$) Şimdi de $f$ Touhey özelliğine sahip bir fonksiyon iken kaotik olduğu gösterilsin. Bunun için öncelikle periyodik noktaların kümesinin yoğun olduğu ispatlanacaktır. $U \subset X$ boş olmayan bir açık küme olsun. $U, V = X$ açık küme çifti gözönüne alındığında, $f$ Touhey özelliğine sahip olduğundan her iki kümeye değen bir periyodik yörünge vardır. Bu yüzden bir $x_0 \in U$ periyodik noktası mevcuttur.

Şimdi de topolojik geçişkenlik ispatlansın. $U, V \subset X$ boş olmayan açık altkümeler olsunlar. $f$ Touhey özelliğine sahip olduğundan dolayı bir $x \in X$ periyodik noktası ve bir $k > 0$ sayısı $f^k(x) \in V$ olacak şekilde vardır. Buna göre, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olur, yani topolojik geçişkenlik sağlanır. Aynı zamanda $f$ fonksiyonu sürekli olduğundan üçüncü şart olan hassas bağımlılık koşulu da gerçeklenir. Dolayısıyla $f$ fonksiyonu kaotiktir. $\square$

# 4 KAOS KOŞULLARININ ALTERNATİFLERİ

Bir $f : X \longrightarrow X$ kesikli dinamik sistemi için şu ana kadar incelenmiş olan kaos koşullarından farklı kavramlar da söz konusudur. Bu bölümde kaos koşullarına alternatif bu kavramlardan bazılarına değinilip, kaos koşulları ile olan ilişkilerine bakılacaktır.

## 4.1 Topolojik Geçişkenlik ve Yoğun Yörünge İlişkileri

Topolojik geçişkenlik koşulunun dinamik sistemler teorisi içerisinde pek çok alternatifi vardır (Bkz [10]). Burada topolojik geçişgenlik ve yoğun bir yörüngenin varlığı arasındaki ilişki üzerinde durulacaktır. Bu ilişkinin tam bir karekterizasyonu [4] de verilmiştir, burada da [4] de verilen yaklaşım ele alınacaktır.

Topolojik geçişkenlik ve yoğun yörünge kavramlarının birbirilerini gerektirdikleri düşünülebilir ancak; ikisinin de birbirilerini gerektirmediklerine dair iki örnek verilecektir. Daha sonra da hangi şartlar altında birbirilerini gerektirdikleri incelenecektir.

**Örnek 4.1.1.** *$X = \{a, b\}$ kümesi ve bu küme üzerinde ayrık topoloji verilsin.*

$$\begin{array}{rcl} f: X & \longrightarrow & X \\ a & \longmapsto & f(a) = a \\ b & \longmapsto & f(b) = a \end{array}$$

*şeklinde tanımlansın. b'nin yörüngesi yoğundur çünkü, $b = b$, $f(b) = a$ olur. Yani b, X'in bütün noktalarını taramış olur. Dolayısıyla b'nin yörüngesi, X'in yoğun bir altkümesidir. Ancak $U = \{a\}$ ve $V = \{b\}$ açık altkümeleri için,*

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

*olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı bulunması mümkün değildir. Bu sebepten f fonksiyonu X kümesi üzerinde topolojik geçişken değildir.*

**Örnek 4.1.2.** $X = \{\theta \in S^1 : \theta = \frac{2k\pi}{2^n-1},\ n \in N - \{0\},\ 0 \leq k < 2^n - 1\} \subset S^1$ *kümesi üzerinde,*

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & X \\ & \theta & \longmapsto & f(\theta) = 2\theta \end{array}$$

*şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Yani, $X$ kümesi,*

$$\begin{array}{rccc} g: & S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & \theta & \longmapsto & g(\theta) = 2\theta \end{array}$$

*dönüşümünün periyodik noktaları kümesidir ve $f$ fonksiyonu, $g$ fonksiyonunun $X$'e kısıtlanmışıdır. $U, V \subset X$ açık altkümeleri verilsin. Bu kümeler, $U', V' \subset S^1$ açık olacak şekilde,*

$$U = U' \cap X, V = V' \cap X$$

*formundadır. $g$ dönüşümü leo özelliğini sağladığından, $g^k(U') = S^1$ olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı vardır. Bu sebepten,*

$$U' \cap g^{-k}(V') \neq \emptyset$$

*dir ve $S^1$ açıktır. ($g$ sürekli olduğundan). $g$'nin periyodik noktalarının kümesi $S^1$'de yoğun olduğundan $g^k(x) \in V'$ olacak şekilde bir $x \in U'$ periyodik noktası vardır. $X$, $g$'nin periyodik noktalarının kümesi olduğundan, $x \in U$ ve*

$$f^k(x) = g^k(x) \in V$$

*dir. Dolayısıyla, $f$ topolojik geçişkendir ancak bütün yörüngelerin periyodik olması ve bu yörüngelerin $X$'de yoğun olmaması sebebiyle hiç bir yoğun yörünge yoktur.*

**Önerme 4.1.3.** *$X$ bir topolojik uzay olsun ve boş olmayan hiçbir $U \subset X$ açık kümesinin sonlu ve yoğun bir altkümesi olmasın. Bu taktirde, $f : X \longrightarrow X$, fonksiyonunun yoğun bir yörüngesi varsa $f$, $X$ üzerinde topolojik geçişkendir.*

*Kanıt.* $x \in X$ noktasının görüntüsü $X$'de yoğun olsun. $U, V \subset X$ açık ve boştan farklı olacak şekilde herhangi iki küme olsunlar. $x$'in yörüngesinin $X$'de yoğun olmasından dolayı, $x$ belirli bir adım sonra $U$'ya ve belirli bir adım sonra $V$'ye girer. $m$ ve $n$, $f^m(x) \in U$ ve $f^n(x) \in V$ olacak şekilde en küçük tamsayılar olsunlar. Eğer $m < n$ ise $k$ tamsayısı, $k = n - m$ olarak alınabilir ve açıktır ki,

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

olur. Burada $U$ ve $V$ keyfi olduğundan, her $U, V$ açık kümeleri için de ifade gerçeklenir.

$m > n$ ise, yani $x$'in yörüngesi belirli bir sayıda önce $V$'ye sonra $U$'ya giriyorsa ve bu sayıya $k$ denilirse , $n \leq I_i \leq k$ ve $1 \leq i \leq k$ olmak üzere,

$$f^{I_1}(x), f^{I_2}(x), ..., f^{I_k}(x)$$

noktalarının oluşturduğu küme, $V$'nin bir altkümesidir. Bu altküme, $V$'de yoğun olmadığından dolayı bir $V' \subset V$ açık altkümesi bu noktalardan hiçbirini içermeyecek şekilde bulunabilir. $x$'in yörüngesinin $X$'de yoğun olması sebebiyle, $f^p(x) \in V$ olacak şekilde bir $p > 0$ sayısı vardır. $p > m$ olduğundan, $t = p - m$ olarak alınırsa, $y \in U$ iken $f^t(y) \in V$ olur. Buradan,

$$f^t(U) \cap V \neq \emptyset$$

olur. $U, V$ açık altkümeleri keyfi olduğundan, bu durum her $U, V$ açık altküme çifti için doğru demektir.

$m = n$ olması durumunda, $f^m(x)$'i içermeyen bir $V' \subset V$ açık altkümesine aynı yöntem uygulanabilir. Dolayısıyla $f$ topolojik geçişkendir. $\square$

**Önerme 4.1.4.** *$X$, bir tam metrik uzay olsun ve $X$'in topolojisinin sayılabilir bir tabanı mevcut olsun. Bunun yanısıra $f : X \longrightarrow X$ fonksiyonu sürekli ve topolojik geçişken olsun. Bu taktirde, öyle bir $x \in X$ noktası vardır ki bu noktanın yörüngesi $X$'de yoğundur. Dahası, yörüngesi yoğun olan noktaların kümesi de $X$'de yoğundur.*

*Kanıt.* $(V_i)_{i \in I}$ $X$'in topolojisinin sayılabilir bir tabanı $i \in I$ olmak üzere, $f$ sürekli olduğundan

$$W_i = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(V_i)$$

kümesi $X$'de açıktır. Aynı zamanda, $W_i$ kümesi $X$'de yoğundur. Öncelikle bu gösterilmelidir. $U \subset X$ boştan farklı bir açık altküme olsun. $f$'nin topolojik geçişken olması münasebetiyle uygun bir $k > 0$ sayısı için,

$$V_i \cap f^k(U) \neq \emptyset$$

olur. Dolayısıyla,

$$f^{-k}(V_i) \cap U \neq \emptyset$$

elde edilir ve

$$W_i \cap U \neq \emptyset$$

dur. Yani; $W_i$ kümesi yoğundur. Baire Kategori Teoreminden dolayı,

$$B = \bigcap_{i \in I} W_i$$

kümesi $X$'de yoğundur. Herhangi bir $x \in B$ noktasının yörüngesi $X$'de yoğundur. Çünkü; $U \subset X$ herhangi bir açık ise en az bir $i \in I$ için, $V_i \subset U$ dur. $x$'in seçiminden dolayı en az bir $k > 0$ sayısı için,

$$x \in f^{-k}(V_i)$$

dir. Bu da

$$f^k(x) \in V_i \subset U$$

demektir. Yani $X$'e ait her açık kümede $x$'in yörüngesine ait olan noktalar vardır. O halde $x$'in yörüngesi $X$'de yoğundur. $\square$

(Yukarıdaki önermede homeomorfizm yerine süreklilik kullanılarak ifade biraz daha zayıflatılarak sunulmuştur.)

**Önerme 4.1.5.** *$X$ bir sayılabilir tabanlı, thick, tam metrik uzay olsun ve $f : X \longrightarrow X$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f$'nin topolojik geçişken olması için gerek ve yeter koşul $f$'nin yoğun bir yörüngeye sahip olmasıdır.*

## 4.2 Topolojik Geçişkenlik ve Blending İlişkisi

Topolojik geçişgenlikle ilintili bir diğer kavram topolojik blending özelliğidir.

**Tanım 4.2.1.** *$X, \mathbb{R}^n$'nin bir alt kümesi ve $f : X \longrightarrow X$, fonksiyon olsun. Eğer boştan farklı ve açık her $U, V \subset X$ için,*

$$f^k(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$$

*olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı varsa $f$'ye,* ***zayıf blending*** *denir.*

**Tanım 4.2.2.** *$X$, $\mathbb{R}^n$'nin bir alt kümesi ve $f : X \longrightarrow X$, fonksiyon olsun. Eğer boştan farklı ve açık her $U, V \subset X$ için,*

$$f^k(U) \cap f^k(V)$$

*ifadesi boştan farklı bir açık küme içerecek şekilde bir $k > 0$ sayısı varsa $f$'ye,* ***güçlü blending*** *denir.*

**Teorem 4.2.3.** *$X, \mathbb{R}^n$'nin bir alt kümesi ve $f : X \longrightarrow X$ periyodik noktaları yoğun ve sürekli bir fonksiyon olsun. $f$ güçlü blending ise $f$ geçişkendir.*

*Kanıt.* $f$ blending ve periyodik noktaları yoğun bir fonksiyon ve $U, V$ boştan farklı iki açık küme olsun. Blending özelliğinden; öyle bir $k > 0$ sayısı ve $N \subset X$ olacak şekilde boştan farklı $N$ açık kümesi vardır ki

$$N \subset f^k(U) \cap f^k(V)$$

olur.

$$\widetilde{V} = f^{-k}(N) \cap V$$

olsun. (Burada, $\widetilde{V}$, $U$ ile blend olan $V$'deki noktaların kümesidir.)

$f$ fonksiyonunun sürekli olmasından, $\widetilde{V}$ da açıktır. Bu yüzden, hipotezden dolayı, $\widetilde{V}$ içinde bir periyodik nokta alınabilir. $x \in \widetilde{V}$, $f$'nin periyodik bir noktası olsun ve $x$ noktasının periyodu $p > k$ olarak alınsın. $x \in \widetilde{V}$ seçilişinden dolayı,

$$f^k(x) \in N$$

dir. Bu nedenle, bazı $y \in U$ elemanları,

$$f^k(y) = f^k(x)$$

şartını sağlar. Buradan, basit bir hesaplama ile,

$$\begin{aligned} f^p(y) &= f^{p-k}(f^k(y)) \\ &= f^{p-k}(f^k(x)) \\ &= f^p(x) \\ &= x \end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde;

$$f^p(U) \cap V \neq \emptyset$$

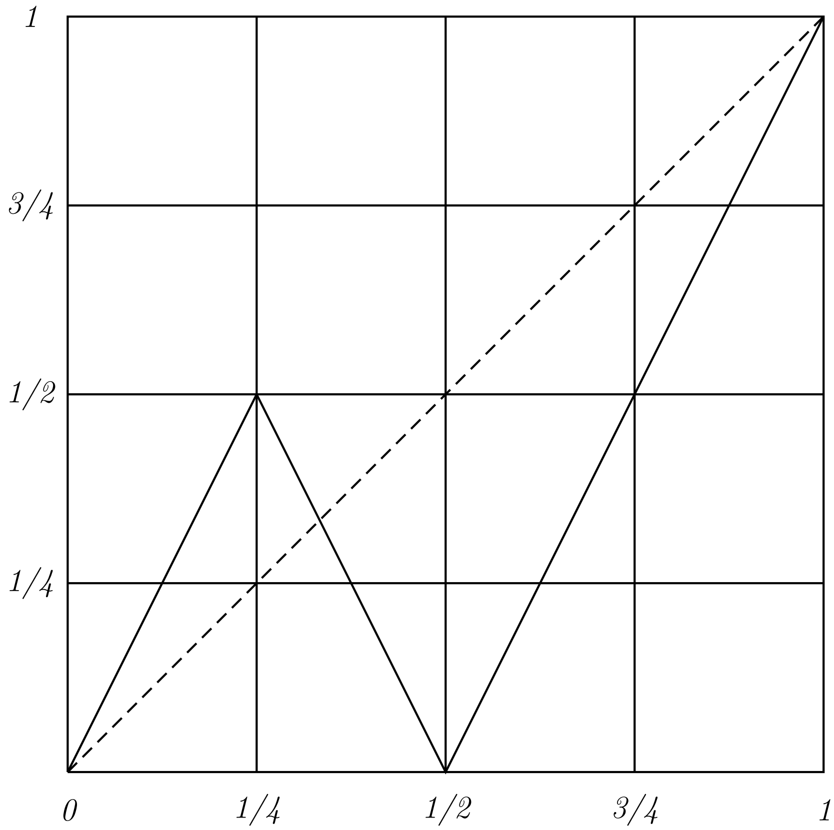
dir. Yani; $f$ geçişkendir. □

Şimdi güçlü blending olan fakat topolojik geçişken olmayan bir örnek verilsin.

**Örnek 4.2.4.** $t : [0,1] \longrightarrow [0,1]$,

$$t(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ -2x+1 & , \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1 & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*fonksiyonu blending özelliğini sağlar. Fakat topolojik geçişken değildir.*




Şekil 4.1: $t(x)$ fonksiyonunun grafiği

*$t$ fonksiyonunun $[0, \frac{1}{2}]$ üzerine kısıtlanmışı çadır dönüşümüne denk olduğundan, $t$ fonksiyonu bu bölgede leo özelliğine sahiptir. Bu nedenle, boştan farklı her $U, V \subset [0, \frac{1}{2}]$ açık altkümeleri için, $f^k(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı bulunabilir. Her $U, V \subset [\frac{1}{2}, 1]$ olacak şekilde boştan farklı açık altkümelerinin $f$ altındaki görüntüleri birkaç adım sonra $[0, \frac{1}{2}]$ aralığına gireceğinden aynı sebepten dolayı blending özelliğini sağlar. Diğer bir durumda ise, yani; her $U \subset [0, \frac{1}{2}]$ ve her $V \subset [\frac{1}{2}, 1]$ için, $V$'nin $f$ altındaki görüntüleri birkaç adım sonra $[0, \frac{1}{2}]$ aralığına gireceğinden $f^k(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı bulunabilir.*

*Ancak, $f$ fonksiyonu topolojik geçişken değildir, çünkü; $U = (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \subset [0, \frac{1}{2}]$ ve $V = (\frac{3}{4}, 1) \subset [\frac{1}{2}, 1]$ altkümeleri için, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı bulunması mümkün değildir.*

Topolojik geçişkenlik, blending özelliğini gerektirmez. Birim çemberin irrasyonel dönmesi geçişkendir, fakat blending değildir.

**Örnek 4.2.5.** *$\lambda$ irrasyonel olmak üzere,*

$$\begin{array}{rccl} T_\lambda : & S^1 & \longrightarrow & S^1, \\ & \theta & \longmapsto & T_{\ \lambda}(\theta) = \theta + 2\pi\lambda \quad (mod 2\pi) \end{array}$$

*fonksiyonu Jacobi önermesinden dolayı geçişkendir, ancak, $T_\lambda$ fonksiyonu uzaklı ğı koruduğundan, $\theta \in S^1$ ve $N$ de $\theta$'nın bir komşuluğu iken her bir $\theta' \in N$ için,*

$$\begin{aligned} \mid T_\lambda(\theta) - T_\lambda(\theta') \mid &= \mid \theta + 2\lambda\pi - \theta' - 2\pi\lambda \mid \\ &= \mid \theta - \theta' \mid \end{aligned}$$

*olduğundan, $T_\lambda$, $S^1$'deki noktalar arasındaki uzaklığı korur. Dolayısıyla, her $U, V \subset S^1$ boştan farklı açık kümeleri için,*

$$T_\lambda^k(U) \cap T_\lambda^k(V) \neq \emptyset$$

*olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı yoktur. O halde $T_\lambda$ fonksiyonu blending özelliğini sağlamaz.*

## 4.3 Total Geçişkenlik ve Leo Özelliği

Topolojik geçişkenlikle ilgili diğer bir kavram da total geçişkenlik kavramıdır.

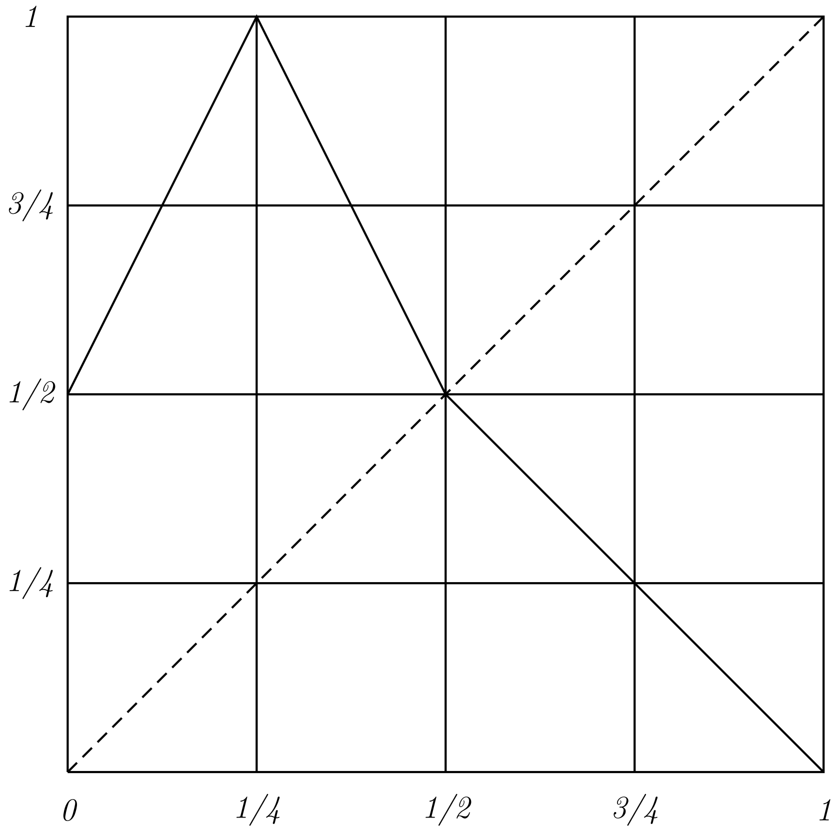
**Tanım 4.3.1.** *$f : X \to X$ fonksiyonu verilsin, eğer her bir $n > 0$ sayısı için $f^n : X \to X$ fonksiyonu topolojik geçişken ise $f$'ye **total geçişken** bir fonksiyon denir.*

Tanımdan anlaşılacağı üzere total geçişken bir fonksiyon topolojik geçişkendir. Ancak bunun tersi doğru değildir, yani topolojik geçişken bir fonksiyon total geçişken olmak zorunda değildir. Aşağıda buna dair bir örnek verilmektedir:

**Örnek 4.3.2.** *(Topolojik geçişken, total geçişken değil)*
*$f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu,*

$$f\ (x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2} & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ -2x + \frac{3}{2} & , \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -x + 1 & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon topolojik geçişkendir.*



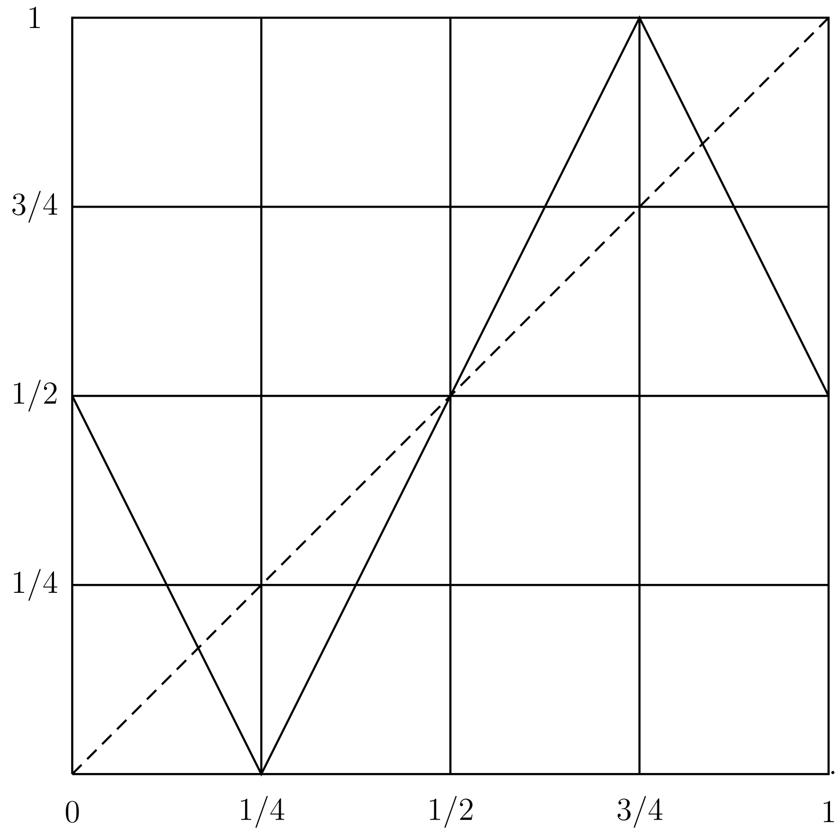

Şekil 4.2: $f(x)$ fonksiyonunun grafiği

Bunun için, $f^2 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$,

$$(fof)(x) = f^2(x) = \begin{cases} -2x + \frac{1}{2} & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 2x - \frac{1}{2} & , \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{1}{2} & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ -2x + \frac{5}{2} & , \quad \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonundan yararlanılacaktır.

Bu fonksiyonun grafiğide aşağıda verilmiştir.




Şekil 4.3: $f^2(x)$ fonksiyonunun grafiği

$$g_1 = f^2 \mid_{[0,1/2]} \quad ve \quad g_2 = f^2 \mid_{[1/2,1]}$$

olsun. Bu durumda, $g_1$ ve $g_2$ fonksiyonları birer çadır dönüşümü olduklarından topolojik geçişkendirler. Bu fonksiyonlar yardımıyla $f$'nin geçişken olduğunu gösterelim:

$U, V \subset [0, 1]$ boştan farklı ve açık kümeleri verilsin.

*i*) Eğer $U, V \subset [0, \frac{1}{2}]$ ise, $g_1$ fonksiyonunun geçişken olmasından dolayı bazı $k$'lar için,

$$g_1^k(U) \cap V \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad f^{2k}(U) \cap V \neq \emptyset$$

olur.

*ii*) Eğer $U, V \subset [\frac{1}{2}, 1]$ ise, $g_2$ fonksiyonunun geçişken olmasından dolayı bazı $k$'lar için,

$$g_2^k(U) \cap V \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad f^{2k}(U) \cap V \neq \emptyset$$

olur.

*iii*) Eğer $U \subset [0, \frac{1}{2}]$, $V \subset [\frac{1}{2}, 1]$ ise,

$$f^{-1}(V) \subset [0, 1/2]$$

olur ve $i$) den

$$f^k(U) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$$

elde edilir. Buradan

$$f^{2k+1}(U) \cap V \neq \emptyset$$

sonucuna ulaşılır.

*iv*) Eğer $U \subset [\frac{1}{2}, 1]$, $V \subset [0, \frac{1}{2}]$ ise,

$$f^{-1}(U) \subset [0, \frac{1}{2}]$$

olur ve $i$) den

$$f^k(f^{-1}(U)) \cap V \neq \emptyset$$

elde edilir. Buradan

$$f^{k-1}(U) \cap V \neq \emptyset$$

olur.

*v*) Eğer $1 \in U$ veya $1 \in V$ ise, $U' = U \cap (0, \frac{1}{2})$ ve $V' = V \cap (0, \frac{1}{2})$ alınır ve önceki durumlar uygulanırsa topolojik geçişkenlik kolayca görülebilir.

Şimdi $f$ 'in periyodik noktalarının yoğunluğu incelensin:

Verilen herhangi $(a, b) \subset [0, 1]$ aralığında en az bir periyodik nokta bulunması gerekmektedir. $1 \in (a, b)$ ise zaten 1 periyodik olduğundan yapılacak birşey yoktur. Aksi taktirde ya $(a, b) \subset [0, \frac{1}{2}]$ ya da $(a, b) \subset [\frac{1}{2}, 1]$ olur. Ilk durumda $g_1$'nin $(a, b)$'de bir periyodik noktası, diğer durumda ise $g_2$'nin $(a, b)$'de bir periyodik noktası olduğundan, bu noktalar aynı zamanda $f$'nin periyodik noktaları olur. O halde $f$ kaotiktir.

Ancak $f^2$ fonksiyonu topolojik geçişken değildir. Çünkü, $U \subset [0, \frac{1}{2}]$ ve $V \subset [\frac{1}{2}, 1]$ açık altkümeleri için,

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

olacak şekilde hiç bir $k > 0$ sayısı ve $U \subset [\frac{1}{2}, 1]$ ve $V \subset [0, \frac{1}{2}]$ açık altkümeleri için,

$$f^t(U) \cap V \neq \emptyset$$

olacak şekilde hiçbir $t > 0$ sayısı bulunamaz.

Dolayısıyla $f$'nin topolojik geçişken bir fonksiyon olması $f^2$'nin de topolojik geçişken bir fonksiyon olmasını gerektirmez.

Aynı örnek yardımıyla $f$'nin kaotik oluşunun $f^2$'nin kaotikliğini gerektirmediği söylenebilir.

Hem topolojik geçişkenlik hem de başlangıç şartlarına hassas bağımlılık ile ilişkili bir diğer özellikte Leo özelliğidir.

**Önerme 4.3.3.** *$X$ bir metrik uzay ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f$ leo özelliğine sahipse başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.*

*Kanıt.* $x, y \in X$ keyfi iki nokta olsun. $\epsilon < d(x, y)$ olacak şekilde seçilsin. Diğer yandan $f$ leo özelliğine sahip olduğundan, her $U \subset X$ boştan farklı açık altkümesi için

$$f^{\,n}(U) = X$$

olacak şekilde bir $n > 0$ sayısının varolduğu bilinmektedir. Aynı $n$ sayısı için $\exists x' \in U$ ve $\exists y' \in U$ vardır öyle ki

$$f^{\,n}(x') = x \text{ ve } f^{\,n}(y') = y$$

dir. Yani;

$$d(f^{\,n}(x'), f^{\,n}(y')) = d(x, y) > \epsilon$$

olur. □

**Önerme 4.3.4.** *$X$ bir metrik uzay ve $f : X \longrightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f$ leo özelliğine sahipse total geçişkendir.*

*Kanıt.* $f$ leo özelliğine sahip olduğundan her $U \subset X$ için, öyle bir $n_0 > 0$ sayısı vardır öyle ki tüm $n_1 > n_0$ sayıları için,

$$f^{n_1}(U) = X$$

şartı sağlanır. Bu sayılar,

$$\begin{array}{lll} f^2 & \text{için}, & (f^2)^{n_2}(U) = X \\ f^3 & \text{için}, & (f^3)^{n_3}(U) = X \\ & \vdots & \\ f^k & \text{için}, & (f^k)^{n_k}(U) = X \\ & \vdots & \end{array}$$

biçiminde olduğundan, $i = 1, 2, ..., k, ...$ olmak üzere her $f^i$ için bir $n_i > 0$ sayısı vardır. Her $U, V \subset X$ boştan farklı açık altkümeleri için, $i = 1, 2, ..., k, ...$ olmak üzere

$$(f^i)^{n_i}(U) \cap V \neq \emptyset$$

olur. Dolayısıyla $f$ total geçişkendir. $\square$

Leo özelliği oldukça güçlü bir koşul olmasına karşın kaosu gerektirmez, çünkü leo özelliğine sahip olduğu halde periyodik noktaları yoğun olmayan fonksiyonlar mevcuttur. Aşağıda böyle bir örnek inşa edilmiştir.

**Örnek 4.3.5.**

$$A = \sum\nolimits_2 - \{\sigma\text{'nın periyodik ve akibeti periyodik noktaları}\}$$

*şeklinde tanımlanmış bir küme olsun.* $\sigma : A \longrightarrow A$ *dönüşümünün, leo özelliğine sahip bir dönüşüm olduğu gösterilsin.* $a \in A$ *olsun ve*

$$a = a_0 a_1 ... a_n ...$$

*şeklinde olsun.* $B_\epsilon(a)$, $a$ *merkezli* $\epsilon$ *yarıçaplı bir disk olsun.*

$$x = x_0 x_1 ... x_m ...$$

*şeklinde keyfi bir* $x \in A$ *dizisi için,* $\exists b \in B_\epsilon(a)$ *vardır öyle ki*

$$b = a_0 a_1 ... a_n x_0 x_1 ... x_m ...$$

*şeklindedir. Yani;*

$$\sigma^{n+1}(b) = x$$

*olur. Bu da* $\sigma$*'nın* $A$ *üzerinde leo özelliğine sahip olduğu anlamına gelmektedir. Ancak*

$$\sigma : A \longrightarrow A,$$

*dönüşümü leo özelliğine sahip olmasına rağmen* $\sigma$*'nın periyodik noktalarının kümesi yoğun değildir, hatta hiç periyodik noktası yoktur.*

## 4.4 Topolojik Denklik ve Kaos Koşulları

Kesikli dinamik sistemlerin önemli kavramlarından biri de topolojik denklik (topolojik eşleniklik) kavramıdır. Topolojik denklik yardımıyla yeni kaotik fonksiyonlar elde edilebilir veya bir fonksiyonun kaotikliği bilinen fonksiyonlar yardımıyla irdelenebilir. Kaos koşularından ikisi topolojik denklik altında korunur, ancak başlangıç şartlarına hassas bağımlılık korunmaz.

**Tanım 4.4.1.** *$X, Y$ birer metrik uzay ve $f : X \longrightarrow X$, $g : Y \longrightarrow Y$ birer fonksiyon olsunlar. Her $x \in X$ için $(h \circ f)(x) = (g \circ h)(x)$ olacak şekilde, yani aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"'] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

*$h : X \to Y$ homeomorfizmi varsa $f$ ve $g$ fonksiyonlarına* ***topolojik denk (eşlenik) fonksiyonlar*** *denir.*

Ancak, bu fonksiyonların topolojik denk olmaları nedeniyle, $f$ fonksiyonunun başlangıç şartlarına hassas bağımlı olmasının $g$ fonksiyonunun da başlangıç şartlarına hassas bağımlı olmasını gerektirmediği bir örnekle gösterilecektir. Kaos olma şartının diğer koşulları için durum farklıdır. Yani, $f$ fonksiyonu için var olan özellikler $g$ fonksiyonu için de geçerlidir.

**Örnek 4.4.2.** *$X = (0, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$ uzayları ve*

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & f(x) = e.x \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g: & Y & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & g(x) = x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} h: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & h(x) = lnx \end{array}$$

*fonksiyonları göz önüne alınsın.*

$$\begin{tikzcd}
(0,\infty) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & (0,\infty) \arrow[d, "h"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

*$h : X \longrightarrow Y$ bir homeomorfizmdir, üstelik;*

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = lnx + 1$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = lnx + 1$$

*olduğundan $h \circ f = g \circ h$'dir. $f(x) = e.x$ fonksiyonu başlangıç şartlarına hassas bağımlı olmasına rağmen, $g(x) = x+1$ fonksiyonu $Y$ üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı değildir.*

**Önerme 4.4.3.** *$(X, d)$ ve $(Y, d')$ metrik uzaylarıile $f : X \longrightarrow X$, $g : Y \longrightarrow Y$, fonksiyonları, $h : X \longrightarrow Y$ homeomorfizmi aracılığıyla topolojik denk olsunlar. Ayrıca $\forall x_1, x_2 \in X$ için,*

$$d'(h(x_1), h(x_2)) \geq \alpha.d(x_1, x_2)$$

*olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sayısı mevcut olsun. Bu taktirde; $f$ kaotik ise $g$'de kaotiktir. Ayrıca, topolojik denkliğin dışında, $h \circ f = g \circ h$ koşulunu sağlayan sürekli ve örten bir $h$ fonksiyonu, $f$'nin kaotik olması halinde $g$ fonksiyonunun da kaotik olmasını sağlar. Yani;*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

*diyagramı için, her $x \in X$ için,*

$$h(f^n(x)) = g^n(h(x))$$

*dir. $x$'in $h$ altındaki görüntüsünün $g$ altındaki $n$. iterasyonudur.*

$$
\begin{array}{rcccc}
g^n(h(x)) & = & g^{n-1}(g\circ h)(x) & = & g^{n-1}(h\circ f)(x)\\
 & = & g^{n-1}(h(f(x))) & = & g^{n-2}(g\circ h)(f(x))\\
 & = & g^{n-2}(h\circ f)(f(x)) & = & g^{n-2}(h(f^2(x)))\\
 & & \vdots & & \\
 & = & g^2(h(f^{n-2}(x) & = & g^1(g\circ h)(f^{n-2}(x))\\
 & = & g(h\circ f)(f^{n-2}(x)) & = & g(h(f^{n-1}(x)))\\
 & = & (g\circ h)(f^{n-1}(x)) & = & (h\circ f)(f^{n-1}(x))\\
 & = & h\circ f^n(x) & &
\end{array}
$$

*Sonuç olarak;*

$$h(f^n(x)) = g^n(h(x)) \tag{4.1}$$

*eşitliği elde edilir. Eğer $x \in X$, $f$'nin sabit noktası ise,* (4.1) *eşitliğine göre $h(x)$, $g$'nin sabit noktası olur. Benzer şekilde $x$, $f$'nin $n$ periyotlu periyodik noktası ise, $h(x)$, $g$'nin $n$ periyotlu periyodik noktasıdır. ($n$, $x$'in asal periyodu olsa bile $h(x)$ noktasının asal periyodu $n$ olmak zorunda değildir.)*

*Şimdi, $g : Y \longrightarrow Y$ fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesinin $Y$'nin yoğun bir altkümesi olduğu gösterilsin: $V \subset Y$ herhangi bir açık küme olsun. Eğer $V$'ye ait en az bir periyodik nokta olduğu gösterilirse, periyodik noktalarının kümesinin, $Y$'de yoğun olduğu söylenebilir. $V$ açık ve $h$ fonksiyonu sürekli olduğundan $h^{-1}(V)$ $X$'in açık altkümesidir. $f$'nin periyodik noktalarının kümesinin $X$'de yoğun olmasından dolayı bir $x \in h^{-1}(V)$ elemanı ve $k > 0$ sayısı $f^k(x) = x$ olacak şekilde vardır. Bu durumda $h(x) \in V$ dir. Aynı zamanda* (4.1) *eşitliğinden,*

$$g^k(h(x)) = h(x)$$

*ifadesi, $g$'nin $V$'ye ait periyodik noktasının bulunduğunu gösterir. O halde, $g$'nin periyodik noktalarının kümesi, $Y$'nin yoğun bir altkümesidir.*

*Şimdi de $g : Y \longrightarrow Y$ fonksiyonunun topolojik geçişken olduğu gösterilecektir: $U, V \subset Y$ keyfi açık kümeler olsunlar. $h$ fonksiyonunun sürekli olmasından dolayı*

$$U' = h^{-1}(U), V' = h^{-1}(V) \subset X$$

*açık altkümelerdir. $f$, $X$ üzerinde topolojik geçişken olduğundan uygun bir $k > 0$ için,*

$$f^k(U') \cap V' \neq \emptyset$$

*olur. Yani, en az bir $x_1 \in U'$ için,*

$$f^k(x_1) = x_2 \in V'$$

*dir.* $x_1 \in U'$ *olduğundan,*

$$\begin{aligned} h(x_1) &= y_1 \in U \\ h(x_2) &= h(f^k(x_1)) = y_2 \in V \end{aligned}$$

*dir. Üstelik,* (4.1) *eşitliğinden,*

$$h(f^k(x_1)) = g^k(h(x_1))$$

*dir. Buradan* $y_1 \in U$ *için,*

$$g^k(y_1) \in V$$

*dir. Dolayısıyla,*

$$g^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

*olur ki, bu da* $g$ *fonksiyonunun* $Y$ *üzerinde topolojik geçişken olduğu anlamına gelmektedir.*

$y_1 \in Y$ *herhangi bir nokta ve* $N$ *de* $y_1$*'in herhangi bir komşuluğu olsun.*

$$h(x_1) = y_1$$

*olacak şekilde bir* $x_1 \in X$ *noktası seçilsin. Bu durumda* $h^{-1}(N)$, $x_1$*'in bir komşuluğu olur.* $f$, $X$ *üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğundan öyle bir* $\delta > 0$ *sayısı vardır ki,*

$$d(f^k(x_1), f^k(x_2)) > \delta$$

*olacak şekilde bir* $x_2 \in h^{-1}(N)$ *elemanı ve* $k > 0$ *sayısı bulunabilir.* $h(x_2) = y_2$ *denilirse,* $y_2 \in N$ *'dir.*

$$g \circ h = h \circ f$$

*olması nedeniyle,*

$$g^k \circ h = h \circ f^k$$

*olduğundan,*

$$\begin{aligned} d'(g^k(y_1), g^k(y_2)) &= d'(g^k(h(x_1)), g^k(h(x_2))) \\ &= d'(h(f^k(x_1)), h(f^k(x_1))) \end{aligned}$$

*yazılabilir. Buradan da hipoteze göre,*

$$d'(h(f^k(x_1)), h(f^k(x_1))) \ \geq \alpha.d(f^k(x_1), f^k(x_2)) > \alpha.\delta$$

*dolayısıyla,*

$$d'(g^k(y_1), g^k(y_2)) > \alpha.\delta$$

*olur. Yani;* $\epsilon = \delta$ *alındığında,* $g$ *fonksiyonunun da başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğu görülür.*

Topolojik denklik altında korunan bir başka özellikde leo özelliğidir.

**Önerme 4.4.4.** *$f : X \longrightarrow X$ ve $f$, leo özelliğine sahip bir fonksiyon olsun. $g : Y \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Ayrıca,*

$$h \circ f = g \circ h$$

*olacak şekilde bir $h : X \longrightarrow Y$ homeomorfizmi var olsun. Bu durumda $g$ fonksiyonu da leo özelliğine sahiptir.*

*Kanıt.* Boştan farklı ve açık $V \subset Y$ altkümesi için, $h$ homeomorfizma olduğundan,

$$h^{-1}(V) = U$$

olacak şekilde $X$'de boştan farklı ve açık bir $U \subset X$ altkümesi vardır. $f$ leo özelliğine sahip bir fonksiyon olduğundan,

$$f^n(U) = X$$

olacak şekilde bir $n > 0$ sayısı vardır. Aynı zamanda

$$f^n(U) = f^n(h^{-1}(V)) = X \tag{4.2}$$

olur. Yine $h$'nin homeomorfizma olmasını kullanarak,

$$h(X) = Y \tag{4.3}$$

olduğu söylenebilir. (4.2) ve (4.3) eşitlikleri dikkate alındığında,

$$h(f^n(h^{-1}(V))) = h(X) = Y$$

eşitlikleri elde edilir. $h$ homeomorfizma olduğundan sürekli ve örtendir. Dolayı sıyla, $\forall x \in Y$ için,

$$h(f^n(h^{-1}(x))) = g^n(h(h^{-1}(x)))$$

eşitliği doğrudur. Bu eşitlik yardımıyla,

$$h(f^n(h^{-1}(V))) = g^n(h(h^{-1}(V)))$$

yazılabilir. Yine (4.2) ve (4.3) eşitlikleri dikkate alınırsa,

$$h(f^n(h^{-1}(V))) = g^n(h(h^{-1}(V))) = h(X) = Y$$

olur ki; bu da

$$g^n(V) = Y$$

olması demektir. $Y$'de alınan boştan farklı herhangi bir $V \subset Y$ altkümesi ve uygun bir $n > 0$ sayısı için,

$$g^n(V) = Y$$

olduğundan $g$ fonksiyonu da leo özelliğine sahiptir. Dolayısıyla leo özelliği topolojik denklik altında korunur. □

**Önerme 4.4.5.** *$(X, d)$ ve $(Y, d')$ metrik uzaylarıile $f : X \longrightarrow X$, $g : Y \longrightarrow Y$, fonksiyonları, $h : X \longrightarrow Y$ homeomorfizmi aracılığıyla topolojik denk olsunlar. $f$, total geçişkense, $g$'de total geçişkendir.*

*Kanıt.* $f$, total geçişken olduğundan;

$$f, f^2, ..., f^k, ...$$

ifadelerinin hepsi topolojik geçişkendir. Ayrıca bilinmektedir ki topolojik geçişkenlik topolojik denklik altında korunur. Yani $g$ de topolojik geçişkendir. Şimdi

$$g^2, g^3, ..., g^k, ...$$

ifadelerinin de geçişken olduğu gösterilmelidir. Boştan farklı ve açık olacak şekilde $U_1, V_1 \subset Y$ altkümeleri için, $h$ homeomorfizma olduğundan,

$$\begin{aligned} h^{-1}(U_1) &= U_2 \subset X \text{ ve} \\ h^{-1}(V_1) &= V_2 \subset X \end{aligned}$$

boştan farklı açık altkümeleri vardır. $f^2$ geçişken olduğundan,

$$(f^2)^{n_2}(h^{-1}(U_1)) \cap (h^{-1}(V_1)) \neq \emptyset \tag{4.4}$$

olacak şekilde bir $n_2 > 0$ sayısı vardır ve (4.4) ifadesi açıktır. $f$ ile $g$ topolojik denk olduklarından,

$$h \circ f = g \circ h$$

ve hatta

$$h \circ f^n = g^n \circ h$$

eşitlikleri vardır.

$$h((f^2)^{n_2}(U_2)) = (g^2)^{n_2}(h(U_2))$$

ve

$$h(V_2) = V_1$$

olduğundan,

$$(g^2)^{n_2}(h(U_2)) \cap h(V_2) \;=\; (g^2)^{n_2}(U_1) \cap V_1 \tag{4.5}$$

olur. (4.4) ifadesi boştan farklı olduğundan ve $h$ homeomorfizma olduğundan (4.5) ifadesi de boştan farklıdır. Yani;

$$(g^2)^{n_2}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$$

dır. O halde $g^2$ de topolojik geçişkendir.

Aynı düşünceyle, $g^3$ için, bir $n_3 > 0$ sayısı vardır öyle ki,

$$(g^3)^{n_3}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset,$$
$$\vdots$$

$g^k$için bir $n_k > 0$ sayısı vardır öyle ki,

$$(g^k)^{n_k}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$$
$$\vdots$$

şeklinde olur. Bu ise $g$'nin de total geçişken olduğu anlamına gelmektedir. O halde; total geçişkenlik topolojik denklik altında korunur. □

**Örnek 4.4.6.** *Çadır ile $F_4$'"un Denkliği:*

$T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$,

$$T(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x+2 & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*olarak tanımlı çadır dönüşümünün kaotik olduğu gösterilmişti. Şimdi çadır dönüşümünden ve topolojik denklikten yararlanarak bir başka meşhur kaotik fonksiyon elde edilecektir.*

$$\begin{array}{rccl} F_4 : & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & F_4(x) = 4x(1-x) \end{array}$$

*fonksiyonu çadır dönüşümüne topolojik denktir. Bu denklik,*

$$\begin{array}{rccl} h : & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & h(x) = \sin^2(\frac{\pi}{2}x) \end{array}$$

*fonksiyonuyla verilir.*

## 4.5 Başlangıç Şartlarına Noktasal ve Global Bağımlılık İlişkisi

Birinci bölümde bir fonksiyonun başlangıç şartlarına hassas bağımlı oluşunun oldukça güçlü bir koşul olduğuna işaret edilmişti. Bu tanımın daha zayıf bir şekli de mevcuttur ve bu başlangıç şartlarına noktasal bağımlılık olarak bilinir. Bu bölümde noktasal ve Global bağımlılık ilişkisi incelenecektir.

**Tanım 4.5.1.** *$(X, d)$ metrik uzay, $f : X \longrightarrow X$ fonksiyonu verilsin. Her bir $x \in X$ noktası ve bu noktanın keyfi bir $N$ komşuluğu alındığında*

$$d(f^k(x), f^k(y)) > \epsilon_x$$

*olacak şekilde bir $y \in N$ noktası, bir $k > 0$ ve bir $\epsilon_x > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, $f$* ***fonksiyonu $X$ üzerinde noktasal olarak başlangıç şartlarına bağımlıdır*** *denir.*

Hassas Bağımlılık : $t : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$,

$$t(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ -2x + 1 & , \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu gözönüne alınsın.

Öncelikle topolojik geçişkenlik incelenecektir: $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için, $t^k([0, \frac{1}{2}]) \subset [0, \frac{1}{2}]$ olduğundan, $U = (0, \frac{1}{2})$, $V = (\frac{1}{2}, 1)$ açık altkümeleri için, $t^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $n$ pozitif tamsayısı bulmak mümkün değildir. Dolayısıyla, $t$ topolojik geçişken değildir.

$t(x)$ fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesinin $[0, 1]$ de yoğun olması için, keyfi bir $(a, b) \subset [0, 1]$ kümesinde en az bir periyodik nokta bulunabilmelidir. Ancak bu mümkün değildir, çünkü; $(\frac{1}{2}, 1) \subset [0, 1]$ kümesinde hiç bir periyodik nokta yoktur. $t(x)$ fonksiyonu ilk iterasyonda $t((\frac{1}{2}, 1)) \subset (0, \frac{1}{2})$ olduğundan ve bundan sonraki tüm iterasyonlarda $(0, \frac{1}{2})$ aralığında kaldığından $t^n(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ bulunması mümkün değildir.

$t(x)$, başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.

*i)* $[0, \frac{1}{2}]$ aralığında $t$, çadır dönüşümüne denk olduğundan ve çadır dönüşümü kaotik olduğundan başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır. Yani; $t_{|[0,1/2]}$, başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.

*ii)* $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ aralığında, $t[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]) \subset [0, \frac{1}{2}]$ olduğundan, $i$. durumundan dolayı $t_{|[1/2,3/4]}$, başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.

*iii)* $[\frac{3}{4}, 1]$ aralığında, belirli bir $m > 0$ sayısı için, $t^m([\frac{3}{4}, 1]) \subset [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ olduğundan, yani, $(\frac{3}{4}, 1)$ aralığının görüntüsü bir kaç adım sonra $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ aralığına girdiğinden, önce $ii$. sonra $i$. durumlarından dolayı $t_{|[3/4,1]}$, başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.

Şimdi yukarıdaki örnek herhangi bir $[a, b]$ aralığına genellensin:

$g : [a, b] \longrightarrow [a, b]$,

$$g(x) = \begin{cases} 2x - a & , \quad a \leq x \leq \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b \\ -2x + 2a + b & , \quad \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b \leq x \leq \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ 2x - b & , \quad \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \leq x \leq b \end{cases}$$

olsun. $g(x)$ dönüşümü, $t(x)$ dönüşümüne

$$\begin{aligned} h : \quad [0, 1] & \longrightarrow [a, b] \\ x & \longmapsto h(x) = (b - a)x + a \end{aligned}$$

dönüşümü yardımıyla topolojik denktir. Yani;

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "t"] \arrow[d, "h"'] & {[0,1]} \arrow[d, "h"] \\ {[a,b]} \arrow[r, "g"'] & {[a,b]} \end{tikzcd}$$

diyagramı $hot = goh$ şeklinde olup, değişmelidir. Şimdi bu ifade gösterilecektir.

$h : [0, 1] \to [a, b]$ , $h(x) = (b - a)x + a$ olduğundan,

$$\begin{array}{rccl} h^{-1}: & [a,b] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & h^{-1}(x)=\frac{x-a}{b-a} \end{array}$$

olur. Bu durumda,

$$g(x) = hotoh^{-1}(x)$$

$$t(h^{-1}(x)) = \begin{cases} 2(\frac{x-a}{b-a}) & , \ 0 \leq \frac{x-a}{b-a} \leq \frac{1}{4} \\ -2(\frac{x-a}{b-a})+1 & , \ \frac{1}{4} \leq \frac{x-a}{b-a} \leq \frac{1}{2} \\ 2(\frac{x-a}{b-a})-1 & , \ \frac{1}{2} \leq \frac{x-a}{b-a} \leq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = h(t(h^{-1}(x))) = \begin{cases} (b-a)2\frac{x-a}{b-a}+a & , \ 0 \leq x-a \leq \frac{b-a}{4} \\ (b-a)(-2\frac{x-a}{b-a}+1)+a & , \ \frac{b-a}{4} \leq x-a \leq \frac{b-a}{2} \\ (b-a)(2\frac{x-a}{b-a}-1)+a & , \ \frac{b-a}{2} \leq x-a \leq b-a \end{cases}$$

olur ve buradan,

$$g(x) = \begin{cases} 2x-a & , \quad a \leq x \leq 3.\frac{a}{4}+\frac{b}{4} \\ -2x+2a+b & , \ 3.\frac{a}{4}+\frac{b}{4} \leq x \leq \frac{a}{2}+\frac{b}{2} \\ 2x-b & , \quad \frac{a}{2}+\frac{b}{2} \leq x \leq b \end{cases}$$

olur ki; bu da başlangıçta iddia edilen $g$'ye eşittir.

$[0,1]$ aralığı; $[0,\frac{1}{2}]$ ve $[\frac{1}{2},1]$ olacak şekilde iki parçaya bölünsün. $[\frac{1}{2},1]$ aralığında,

$$f_{\ 1}: \ [\tfrac{1}{2},1] \rightarrow [\tfrac{1}{2},1] \ ,$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x-\frac{1}{2} & , \ \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}1 \\ -2x+2.\frac{1}{2}+1 & , \ \frac{3}{4}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.1 \leq x \leq (\frac{1}{2}+1)\frac{1}{2} \\ 2x-1 & , \ (\frac{1}{2}+1).\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlansın. Daha sonra; $[0,\frac{1}{2}]$ aralığı; $[0,\frac{1}{3}]$ ve $[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ olacak şekilde iki parçaya bölünsün. $[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ aralığında,

$$f_2: [\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}] \longrightarrow [\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}],$$

$$f_2(x)=\begin{cases} 2x-\frac{1}{3} & , \quad \frac{1}{3}\leq x\leq \frac{3}{4}.\frac{1}{3}+\frac{1}{4}.\frac{1}{2} \\ -2x+2.\frac{1}{3}+\frac{1}{2} & , \quad \frac{3}{4}.\frac{1}{3}+\frac{1}{4}.\frac{1}{2} \quad \leq x\leq (\frac{1}{3}+\frac{1}{2}).\frac{1}{2} \\ 2x-\frac{1}{2} & , \quad (\frac{1}{3}+\frac{1}{2}).\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

şeklinde bir fonksiyon daha tanımlansın ve daha sonra; $[0,\frac{1}{3}]$ aralığı ; $[0,\frac{1}{4}]$ ve $[\frac{1}{4},\frac{1}{3}]$ olacak şekilde iki parçaya bölünsün.

$[\frac{1}{4},\frac{1}{3}]$ aralığında, $f_3:[\frac{1}{4},\frac{1}{3}]\longrightarrow[\frac{1}{4},\frac{1}{3}]$, fonksiyonu tanımlansın. Bu fonksiyon için de yukarıdaki düşünceyi devam ettirmek suretiyle ve benzer şekilde, $n=1,2,3,...$ için, $f_n:[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]\longrightarrow[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$, olacak şekilde $f_1,f_2,f_3,...,f_n,...$ fonksiyonları elde edilir.

$f_n:[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]\longrightarrow[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$,

$$f_n(x)=\begin{cases} 2x-\frac{1}{n+1} & , \quad \frac{1}{n+1}\leq x\leq \frac{3}{4}.\frac{1}{n+1}+\frac{1}{4}.\frac{1}{n} \\ -2x+2.\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n} & , \quad \frac{3}{4}.\frac{1}{n+1}+\frac{1}{4}.\frac{1}{n}\leq x\leq (\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}).\frac{1}{2} \\ 2x-\frac{1}{n} & , \quad (\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}).\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

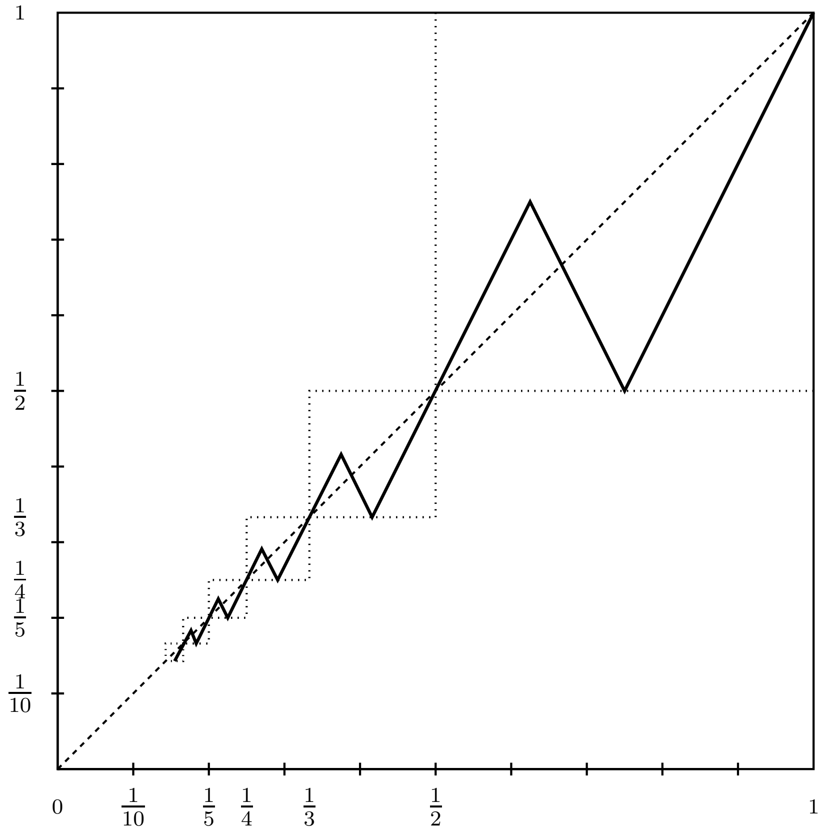
şeklindedir.

Oluşturulan bu fonksiyonların herbirinin, $t$ fonksiyonu yardımıyla, topolojik geçişkenliği sağlamayan, periyodik noktalarının kümesi yoğun olmayan ancak başlangıç şartlarına hassas bağımlı olan fonksiyonlar. oldukları söylenebilir.

Şimdi; $n=1,2,3,...$ olmak üzere oluşturulan $f_n$ fonksiyonlarının tek bir $f$ fonksiyonu gibi düşünülerek ifade edilmesi gerekirse bu $f$ fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & , \quad \frac{1}{2}\leq x\leq 1 \\ f_2(x) & , \quad \frac{1}{3}\leq x\leq \frac{1}{2} \\ f_3(x) & , \quad \frac{1}{4}\leq x\leq \frac{1}{3} \\ & \vdots \\ f_n(x) & , \quad \frac{1}{n+1}\leq x\leq \frac{1}{n} \\ & \vdots \end{cases}$$

şeklinde olur. Bu fonksiyonun grafiğide aşağıdaki gibidir.




Şekil 4.4 : $f(x)$ fonksiyonunun grafiği

Öncelikle topolojik geçişkenlik incelensin. $\forall k \in Z^+$ için, $f^k([\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]) \subset [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ olduğundan, $U = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $V = (\frac{3}{4}, 1)$ açık altkümeleri için, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $n$ pozitif tamsayısı bulmak mümkün değildir. Dolayısıyla $f$ topolojik geçişken değildir.

$f$ fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesinin $[0, 1]$'de yoğun olması için keyfi bir $(a, b) \subset [0, 1]$ kümesinde en az bir periyodik nokta bulunabilmelidir. Ancak bu mümkün değildir, çünkü; $(\frac{3}{4}, 1) \subset [0, 1]$ kümesinde hiç bir periyodik nokta yoktur. $f$ fonksiyonu ilk iterasyonda $f((\frac{3}{4}, 1)) \subset (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ olduğundan ve bundan sonraki tüm iterasyonlarda $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ aralığında kaldığından $f^n(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in (\frac{3}{4}, 1)$ bulmak mümkün değildir. O halde; $f$ fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesi $[0, 1]$'de yoğun değildir.

$f$ başlangıç şartlarına hassas bağımlı mıdır? $n = 1, 2, 3, ...$ olmak üzere $f_n$

fonksiyonlarının herbiri başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır ancak bu durumun $f$ için yeterli olmadığı gösterilecektir.

$n = 1, 2, 3, ...$ olmak üzere $f_n$ fonksiyonlarının hepsi başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduklarından herbiri için, bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır. Bunlar;

$$\begin{array}{lcl} f_1(x) & \text{için} & \epsilon_1 = (1 - \frac{1}{2}).(\frac{1}{4}) \\ f_2(x) & \text{için} & \epsilon_2 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}).(\frac{1}{4}) \\ f_3(x) & \text{için} & \epsilon_3 = \epsilon_3 = (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}).(\frac{1}{4}) \\ & \vdots & \\ f_n(x) & \text{için} & \epsilon_n = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}).(\frac{1}{4}) \\ & \vdots & \end{array}$$

şeklindedir.

$\epsilon_n = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}).(\frac{1}{4})$ olduğu bilinmektedir.

Ancak yukarıda parçalı olarak tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu noktasal olarak başlangıç şartlarına hassas bağımlı olmasına karşın, $[0, 1]$ üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı bir fonksiyon değildir. Çünkü $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde yeterince büyük bir $n$ sayısı $\frac{1}{n} < \epsilon$ olacak şekilde bulunabilir. Bu durumda; $x \in (0, \frac{1}{n}]$ noktası ve bu noktanın $N = (0, \frac{1}{n})$ komşuluğu gözönüne alındığında, her $y \in N$ ve her $k$ pozitif tamsayısı için, $f^k(x), f^k(y) \in [0, \frac{1}{n}]$ olduğundan $|f^k(x) - f^k(y)| \leq \frac{1}{n} < \epsilon$ olur ki bu $f$ fonksiyonunun başlangıç şartlarına hassas bağımlı olmaması demektir.

# KAYNAKLAR


[1] Banks, J.; Brooks, J.; Cairns, G.; Davis, G. ve Stacey P., *On Devaney's Definiton of Chaos*, American Math. Monthly, **99**, 332-334, (1992).

[2] Crannel, A., *The Role of Transitivity in Devaney's Definiton of Chaos* American Math. Monthly, (1995).

[3] Değirmenci, N., *Kaos Koşullarının İrdelenmesi* Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, (1992).

[4] Değirmenci, N. ve Koçak, Ş., *Topological Transivity and Existence of Dense Orbit* Acta Mathematica Hungarica, (2002).

[5] Demir, B., *Dinamik Sistemler ve Nöron Siklusları* Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, (1999).

[6] Devaney, R., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison Wesley, New York, A.B.D., (1989).

[7] Elaydi, S., *Discrete Chaos* Chapman-Hall/CRC, A.B.D., (1999).

[8] Gulick, D., *Encounters with Chaos* McGraw-Hill, New York, A.B.D., (1992).

[9] Holmgren, A. H., *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, Springer, A.B.D., (1996).

[10] Kolyada, S. ve Snoha, L., *Some Aspects of Topological Transitivity* Grazer Math., **334**, 3-35, (1997).

[11] Blanchard, F.; Glaner, E.;Kolyada, S. ve Maass, A., *On Li-Yorke Pairs* Journal für die Reine und Angewandte Mathematic, **547**, 51-68, (2002).

[12] Touhey, P., *Yet Another Definition of Chaos* , American Math. Mounthly, (1997).

[13] Li, T.Y. ve Yorke, J., *Period Three Implies Chaos*, American Math. Monthly, **82**, 985-992, (1975).

[14] Vellekoop, M. ve Berglund, R., *On Intervals, Transitivity=Chaos* , American Math. Monthly, **101**, (1994).