ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

ZAYIF EŞLENİK DUALLİK VE KONVEKS OLMAYAN OPTİMİZASYON

İlknur ATASEVER

Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Temmuz 2011

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

İlknur Atasever'in **"Zayıf Eşlenik Duallik ve Konveks Olmayan Optimizasyon"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki **Doktora** tezi 06.07.2011 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı - Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**Prof.Dr. Yalçın KÜÇÜK**	....
Üye	**Prof.Dr. Aladdin ŞAMİLOV**	....
Üye	**Prof.Dr. A. Duran TÜRKOĞLU**	....
Üye	**Doç.Dr. Nedim DEĞİRMENCİ**	....
Üye	**Yard.Doç.Dr.Taner BÜYÜKKÖROĞLU**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Rıdvan SAY
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

ZAYIF EŞLENİK DUALLİK VE KONVEKS OLMAYAN OPTİMİZASYON

İlknur ATASEVER

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK

2011, 92 Sayfa

Bu çalışmada, [13]'de tanımlanan zayıf eşlenik dönüşümler kullanılarak konveks olmayan kısıtlı gerçel optimizasyon problemleri için zayıf Fenchel (D_F^w) ve zayıf Fenchel-Lagrange (D_{FL}^w) dual problemleri oluşturulmuştur. Bu problemler için zayıf duallik teoremi ve güçlü duallik için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir. Daha sonra asıl problemin, (D_F^w) ve (D_{FL}^w) dual problemlerinin ve [14]'de oluşturulan Lagrange dual problemin (D_L^w) optimal değerleri karşılaştırılmıştır. (D_F^w), (D_{FL}^w) dual problemleri için gerekli ve yeterli optimallik koşulları verilmiştir. Bunlara ek olarak, [13]'de gerçel değerli fonksiyonlar için tanımlanan zayıf eşlenik, zayıf bieşlenik fonksiyonlar ile zayıf subdiferansiyel kavramları kümelerin supremum, infimum kavramları ve vektörel norm kavramı kullanılarak küme değerli dönüşümlere genelleştirilip tanımlanmış, aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca küme değerli dönüşümlerin zayıf subdiferansiyellenebilmesi için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir. Zayıf eşlenik dönüşüm yardımıyla kısıtsız vektör optimizasyon problemleri için zayıf dual problem oluşturulmuş, zayıf duallik ve güçlü duallik teoremleri verilmiştir. Son olarak, kısıtlı vektör optimizasyon problemi için özel bir sarsım fonksiyonu kullanılarak zayıf Fenchel dual problem oluşturulmuş ve Lagrange dual problem [28] yardımıyla çözülemeyip, zayıf Fenchel dual problem yardımıyla çözülebilen konveks olmayan kısıtlı bir vektör optimizasyon problemi örneği verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Vektör Optimizasyon, Zayıf Eşlenik Dönüşüm, Zayıf Subdiferansiyel, Eşlenik duallik, Konveks Olmayan Optimizasyon

ABSTRACT

PhD Thesis

WEAK CONJUGATE DUALITY AND NONCONVEX OPTIMIZATION

İlknur ATASEVER

Anadolu University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK

2011, 92 Pages

In this work, by using the notion weak conjugate function defined in [13] weak Fenchel (D_F^w) and weak Fenchel-Lagrange (D_{FL}^w) dual problems are constructed for nonconvex constrained scalar optimization problems. Weak duality theorem and necessary and sufficient conditions for strong duality of these problems are presented. Then, relationships among the optimal objective values of primal problem, (D_F^w), (D_{FL}^w) and Lagrange dual problem (D_L^w) constructed in [14] are examined and necessary and sufficient optimality conditions for optimality of (D_F^w) and (D_{FL}^w) are given. In addition, by using notions supremum, infimum of sets and vectorial norm, weak conjugate map, weak biconjugate map and weak subdifferential of a set valued map are defined, relationships between these notions are examined and necessary and sufficient conditions for weakly subdifferentiability of a set-valued map are given. By using weak conjugate maps, a dual problem is constructed for unconstrained vector optimization problems, weak duality and strong duality theorems are presented. At the end, by using a special perturbation function weak Fenchel dual problem for constrained vector optimization problem is constructed and an example of a nonconvex constrained vector optimization problem which can not be solved by using Lagrange dual problem [28] but can be solved by using weak Fenchel Conjugate dual problem is given.

Keywords: Vector Optimization, Weak Conjugate Map, Weak Subdifferential, Conjugate Duality, Nonconvex Optimization

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve üzerimde büyük emekleri olan değerli hocalarım Prof. Dr. Yalçın Küçük ve Prof. Dr. Mahide Küçük'e, tezin yazımında ve hazırlama aşamasında yardımlarını esirgemeyen Doç. Dr. Emrah Akyar, Derya Çelik, Didem Tozkan, Mustafa Soyertem ve Mehmet Ergen'e ve beni her zaman destekleyen sevgili aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İlknur Atasever

Temmuz 2011

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$f^w(\cdot,\cdot,\cdot)$	:	f fonksiyonunun zayıf eşlenik fonksiyonu
$f^{ww}(\cdot,\cdot,\cdot)$	:	f fonksiyonunun zayıf bieşlenik fonksiyonu
$F^w(\cdot,\cdot,\cdot)$	:	F küme değerli dönüşümünün zayıf eşlenik dönüşümü
$F^{ww}(\cdot,\cdot,\cdot)$	:	F küme değerli dönüşümünün zayıf bieşlenik dönüşümü
$\partial^w f(\bar{x})$	:	f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki zayıf subdiferansiyeli
$\partial^w F(\bar{x})$	:	F küme değerli dönüşümünün $\bar{x}$ noktasındaki zayıf subdiferansiyeli
$L(X,Y)$	:	X uzayından Y uzayına tanımlı sürekli, lineer dönüşümlerin uzayı
$\Vert \cdot \Vert$	:	Vektörel norm
$A(Z)$	:	Z kümesinin üst noktaları kümesi
$B(Z)$	:	Z kümesinin alt noktaları kümesi
$\mathrm{Inf}Z$	:	Z kümesinin infimumu
$\mathrm{Sup}Z$	:	Z kümesinin supremumu
$\mathbb{R}^p_+$	:	$\mathbb{R}^p$ uzayının tüm bileşenleri pozitif ya da 0 olan alt kümesi
X^*	:	X uzayının dual uzayı
$\underset{C}{\leq}$	:	C konisi ile belirlenen kısmi sıralama
$\mathcal{N}(\bar{x})$	:	$\bar{x}$ noktasının komşuluklar ailesi

1 GİRİŞ

Duallik teorisi optimizasyon problemlerinin çözümlerinde önemli bir yere sahiptir. Verilen optimizasyon problemlerinin duallerini elde etmek için farklı yaklaşımlar vardır. Bunların en önemlilerinden biri eşlenik (conjugate) fonksiyon kavramına dayanan yaklaşımdır. Bu yaklaşım, verilen bir optimizasyon probleminin özel sarsım (perturbation) fonksiyonlarının eşlenik fonksiyonları kullanılarak dual probleminin elde edilmesine dayanmaktadır. Bu tür yaklaşımlar ilk olarak Fenchel [1] ve Rockafellar [2] tarafından konveks optimizasyonda sonlu boyutlu durumlarda verilmiş daha sonra Moreau [3] tarafından sonsuz boyutlu durumlara genişletilmiştir. Bu konu Ekeland ve Temam'ın kitaplarında [4] ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir. Dual problem oluşturmak için başka bir yaklaşım da Lagrange fonksiyoneli yardımıyla elde edilen yaklaşımdır. Kuhn-Tucker'ın [5] verdikleri yaklaşımda elde edilen Kuhn-Tucker vektörü, yukarıda bahsedilen yaklaşımdaki sarsım fonksiyonunun eşleniğinin minimalleştiricisi aynı zamanda bu yaklaşımda ise optimal Lagrange çarpanını verir.

Lineer olmayan bir optimizasyon probleminin amaç ve kısıt fonksiyonlarının konveks olmadığı durumlarda, çözümün yukarıda bahsedilen yaklaşımlarla incelenmesi sonucunda duallikle fark (duality gap) oluşabilir. Bu durumun giderilmesi amacıyla araştırmacılar konveksliğin zayıflatılmış halleri olan genelleştirilmiş konvekslik kavramlarını tanımlamaya yönelmiştir. Kuhn-Tucker'ın yeterli optimallik koşulları Hanson [6] tarafından inveks fonksiyonlar sınıfı kullanılarak kanıtlanmıştır. Jeyakumar ve Wolkowicz [7] ise convex-like fonksiyonları içeren problemler için duallik teoremleri elde etmişlerdir. Rockafellar [8] bilinen Lagrange fonksiyonu kullanmak yerine bir augmented Lagrange fonksiyon kullanarak duallikle farkın ortadan kaldırılabileceğini göstermiştir. Buna ek olarak birinci dereceden optimallik koşullarını bir denklem sistemi olarak yazabilmek için Lagrange çarpanlarını kısıtlı minimizasyon problemlerinin yardımcı değişkenleri olarak kullanmıştır [8]. Li [9] amaç ve kısıt fonksiyonlarının p. kuvveti kullanılarak oluşturulan eşdeğer bir dönüşüm yardımıyla, konveks olmayan optimizasyon problemi için bir eyer noktasının elde edilebileceğini göstermiştir.

Bot ve Wanka [10, 11] sonlu boyutlu uzaylarda koni eşitsizlik kısıtlarına, bazı konvekslik ve regülerlik koşullarına sahip optimizasyon problemleri için herbiri farklı sarsım fonksiyonunun eşlenik dönüşümü kullanılarak elde edilen Fenchel, Lagrange ve bu ikisinin birleşimi niteliğindeki Fenchel-Lagrange dual problemlerle ilgilenmişlerdir. Bu dual problemler için zayıf dualliğin her zaman geçerli olduğunu kanıtlamışlar ve bu üç dual problem ile asıl problemin optimal değerleri arasındaki ilişkileri incelemişlerdir. Bu değerlerin eşitliğini sağlayacak kabullerin aynı zamanda güçlü dualliği de verdiğini göstermişlerdir.

Azimov ve Gasimov [12–14] konveks olmayan kümeleri desteklemek için destek konilerini kullanma fikrinden yola çıkarak gerçel değerli fonksiyonlar için zayıf subgradienti tanımlamışlardır. Bununla birlikte eşlenik dönüşüm kavramını zayıflatarak zayıf eşlenik dönüşümleri tanımlamışlardır. Bu kavramlar yardımıyla, sarsım fonksiyonunun zayıf eşlenik dönüşümünü kullanarak verilen bir konveks olmayan optimizasyon probleminin dualini elde etmişler ve zayıf dualliğin gerçeklendiğini kanıtlamışlardır. Normlu uzaylarda alttan yerel Lipschitz özelliğine sahip fonksiyonlar sınıfını göz önüne alarak zayıf subdiferansiyellenebilir fonksiyonlar ve optimizasyon problemlerinin amaç fonksiyonları sınıfını genişletmişlerdir. Sarsım fonksiyonu üzerindeki alttan Lipschitz özelliği koşulunun yanı sıra gerekli başka koşullar altında güçlü dualliğin gerçeklendiğini kanıtlamışlar ve optimallik koşulları vermişlerdir. Özel bir sarsım fonksiyonu alarak dual problem oluşturmuşlar ve yine alttan Lipschitz özelliği koşulları altında güçlü duallik için gerekli ve yeterli koşullar vermişlerdir.

Vektör optimizasyonda duallikle ilgili ilk çalışmalar Gale, Kuhn ve Tucker [15] tarafından 1951'de elde edilmiştir. Bu çalışmada amaç fonksiyonunun matris değerli lineer fonksiyon olduğu optimizasyon problemlerinde duallik için bazı teoremler verilmiştir. Lineer durumda duallik için daha fazla teori ise Kornbluth [16], Rödder [17] ve Issermann [18] tarafından geliştirilmiştir.

Lineer olmayan vektör optimizasyon problemlerinde duallik teorisi çok farklı yönlerden gelişme göstermiştir. Tanino ve Sawaragi [19] skaler optimizasyonda tamamen Rockafellar'ın [2] oluşturduğu teoriyi vektör değerli ya da küme değerli dönüşümler için yeni eşlenik ve subgradient kavramlarını oluşturarak vektör optimizasyon problemlerine genişletmişlerdir. Bu çalışma bir çok araştırmacıyı vektör optimizasyon problemlerinin genelleştirilmeleri olarak görülebilen küme değerli optimizasyon problemleri için farklı eşlenik duallik teorileri oluşturmaya teşvik etmiştir. Bu konuyla ilgili sonlu boyutlu durumlarda Brumelle [20], Kawasaki'nin [21] çalışmalarından, genel kısmi sıralı topolojik vektör uzaylarında ise Tanino [22] ve Corley'in [23] çalışmalarından sözedilebilir.

Sonlu boyutlu uzaylarda Nakayama'nın [24] duallik teorisi ile ilgili iki yaklaşımı bulunmaktadır. Bu yaklaşımlardan biri vektör değerli Lagrange fonksiyonlarının kullanıldığı Tanino ve Sawaragi [25] tarafından kurulan teoriyi temel almaktadır . Burada asıl problemin kuruluşunda yer alan kümelerin ve fonksiyonların konvekslik kabullerinin yanı sıra kompaktlık ve süreklilik şartları getirilmiştir. Nakayama'nın ikinci yaklaşımında sadece konvekslik şartı bulunduğundan bu yaklaşım daha geneldir. Bu yönde diğer iki önemli çalışma da vektör değerli Lagrange fonksiyonlarının kullanıldığı Luc'un [26], [27] çalışmalarıdır.

Bu konu ile ilgili bahsedeceğimiz son çalışma da Li, Chen ve Wu'nun [28] çalışmasıdır. Bu makalede yazarlar [22, 29–32] ışığında verilen kısıtlı küme değerli optimizasyon problemi için kısıt sarsım fonksiyonu ve kısıt ve amaç sarsım fonksiyonu kullanarak zayıf etkinlik kavramına dayanan iki dual problem oluşturmuşlardır. Daha sonra dual problemlerin görüntü kümelerinin arasındaki ilişkiyi vermişler, zayıf dualliğin ve küme değerli dönüşümler için bazı genelleştirilmiş konvekslik koşulları altında güçlü dualliğin gerçeklendiğini kanıtlamışlardır.

Bu çalışmada ilk olarak verilen skaler optimizasyon problemler için zayıf Fenchel ve zayıf Fenchel-Lagrange dual problemleri oluşturmada kullanılacak olan Azimov ve Gasimov'un [13]'de tanımladıkları zayıf dual dönüşümler, zayıf subdiferansiyel kavramlarından ve eşlenik dualliğin zayıf eşlenik dönüşümler yardımıyla nasıl kurulduğundan bahsedilmektedir. Buna ek olarak Azimov ve Gasimov'un kısıt sarsım fonksiyonu kullanarak oluşturdukları zayıf Lagrange dual probleme değinilmiştir. Daha sonra koni eşitsizlik kısıtlarına sahip bir optimizasyon probleminin farklı sarsım fonksiyonları kullanılarak, ki bunlar amaç sarsım fonksiyonu, kısıt ve amaç sarsım fonksiyonudur, zayıf Fenchel ve zayıf Fenchel-Lagrange olarak adlandırdığımız iki dual problem oluşturulmuştur. Bu duallerin oluşturulmasında kullanılan sarsım fonksiyonlarına göre asıl problemin kararlılığı tanımlanmış ve asıl problemin kararlılığının güçlü dualliği verdiği gösterilmiştir. Güçlü duallik asıl ve dual problemlerin optimal değerlerinin eşit olması ve dual problemin optimal çözüme sahip olması demektir. Bunlara ek olarak, zayıf Fenchel, zayıf Fenchel-Lagrange dual problemlerin ve Azimov ve Gasimov'un tanımladığı zayıf Lagrange dual problemin çözüm değerlerinin karşılaştırması yapılmış, bu değerlerin eşitliğini sağlayan koşulların güçlü dualliği verdiği kanıtlanmış ve bu dual problemlere göre optimallik koşulları verilmiştir.

Daha sonra vektör optimizasyonda eşlenik duallikten bahsedebilmek amacıyla Tanino'nun tanımladığı bir kümenin supremum ve infimum kavramları ve vektörel norm kavramını kullanılarak skaler durum için Azimov ve Gasimov'un verdiği zayıf eşlenik dönüşüm, zayıf bieşlenik dönüşüm ve zayıf subdiferansiyel kavramları görüntü kümesi kısmi sıralı topolojik vektör uzayı olan küme değerli dönüşümler için genelleştirilip tanımlanmıştır. Bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenmiş ve bir küme değerli dönüşümün zayıf subdiferansiyellenebilmesi için koşullar verilmiştir. Bu kavramlar yardımıyla öncelikle kısıtsız vektör optimizasyon problemleri için zayıf dual problem oluşturulmuş, zayıf duallik teoremi verilmiştir. Ayrıca verilen kısıtsız optimizasyon probleminin kararlılığı tanımlanarak, problemin kararlılığının güçlü dualliği verdiği gösterilmiştir. Bunlara ek olarak, konveks olmayan asıl problemin kararlılığı için koşullar verilmiş ve problemin kararlı olması durumunda sarsım fonksiyonunun hangi özelliklere sahip olduğu gösterilmiştir.

Son olarak, kısıtlı vektör optimizasyon problemi için özel bir sarsım fonksiyonu kullanılarak zayıf Fenchel dual problem oluşturulmuş ve [28]'de oluşturulan

Lagrange dual problem yardımıyla çözülemeyen fakat zayıf Fenchel dual problem yardımıyla çözülebilen konveks olmayan bir kısıtlı vektör optimizasyon problemi örneği verilmiştir.

2 ZAYIF EŞLENİK DÖNÜŞÜMLER, ZAYIF SUBDİFERANSİYEL ve KONVEKS OLMAYAN OPTİMİZASYON PROBLEMLERİNİN ZAYIF DUAL PROBLEMLERİ

2.1 Zayıf Eşlenik Dönüşümler ve Zayıf Subdiferansiyel

Bu kısımda zayıf Fenchel ve zayıf Fenchel-Lagrange dual problemleri oluşturmada kullanılacak olan Azimov ve Gasimov'un [13] tanımladıkları zayıf eşlenik dönüşümler ve zayıf subdiferansiyel kavramlarından bahsedilecektir.

İlk olarak konveks optimizasyondaki duallik teorisinde kullanılan, tanımları destek hiperdüzlem kavramına dayanan eşlenik fonksiyonlar ve subdiferansiyel kavramlarının tanımlarını hatırlatalım.

X bir topolojik vektör uzayı, X^* onun topolojik duali ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

$\forall\ x^* \in X^*$ için

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X}\{x^*(x) - f(x)\}$$

olarak tanımlanan $f^* : X^* \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna f'in eşlenik fonksiyonu adı verilir.

$\forall\ x \in X$ için

$$f^{**}(x) = \sup_{x^* \in X^*}\{x^*(x) - f^*(x^*)\}$$

olarak tanımlanan $f^{**} : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna f in bieşlenik fonksiyonu adı verilir.

$\bar{x} \in X$ olmak üzere

$$\partial f(\bar{x}) = \{x^* \in X^* \mid \forall\ x \in X \text{ için } x^*(x - \bar{x}) \leq f(x) - f(\bar{x})\}$$

olarak tanımlanan $\partial f(\bar{x})$ kümesine de f'in $\bar{x}$ noktasındaki subdiferansiyeli adı verilir.

Azimov ve Gasimov [13, 14] çalışmasında konveks optimizasyon için verilen klasik duallik teoremlerinin yukarıda verilen klasik eşlenik dönüşümler ve subdiferansiyel küme tanımında kullanılan lineer dönüşümler yerine konkav fonksiyonlar kullanarak konveks olmayan minimizasyon problemleri için de elde edilebileceğini göstermiştir. Azimov ve Gasimov'un dualliği konveks olmayan kümeleri konkav fonksiyonların grafikleri ile ayırma ilkesine dayanmaktadır.

Azimov ve Gasimov normlu uzaylarda zayıf eşlenik dönüşümleri ve zayıf subdiferansiyeli tanımlamak için X bir normlu uzay X^*, X'in dual uzayı, $c \geq 0$, $x_0 \in X$ ve $x^* \in X^*$ olmak üzere $\forall x \in X$ için

$$w(x) = -c\|x - x_0\| + c\|x_0\| + x^*(x)$$

olarak tanımlanan $w : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını kullanmışlardır. Bu tip fonksiyonların hipografları konveks konik yüzeylerdir ve bu konik yüzeyler bazı koşullar altında fonksiyonun epigrafını desteklerler. Azimov ve Gasimov, yukarıda bahsedilen tanımların yanı sıra bu tanımları kullanarak bir fonksiyonun zayıf subdiferansiyellenebilmesi için gerekli ve yeterli koşulları ve alttan Lipschitz özelliğine sahip fonksiyonların kullanıldığı optimizasyon problemleri için de gerekli ve yeterli optimallik koşulları vermişlerdir.

Şimdi yukarıda bahsedilen kavramların tanımlarını verelim.

Tanım 2.1.1. *X bir normlu uzay, X^*, X uzayının duali, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin.*

a) $\forall\ (x_0, x^*, c) \in X \times X^* \times \mathbb{R}_+$ *için*

$$f^w(x_0, x^*, c) = \sup_{x \in X}\{-c\|x - x_0\| + c\|x_0\| + x^*(x) - f(x)\}$$

olarak tanımlanan $f^w : X \times X^* \times \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna f'in zayıf eşlenik fonkiyonu denir.

b) $\forall\ x \in X$ *için*

$$f^{ww}(x) = \sup_{(x_0, x^*, c) \in X \times X^* \times \mathbb{R}_+}\{-c\|x - x_0\| + c\|x_0\| + x^*(x) - f^w(x_0, x^*, c)\}$$

olarak tanımlanan $f^{ww} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna f'in zayıf bieşlenik fonksiyonu denir.

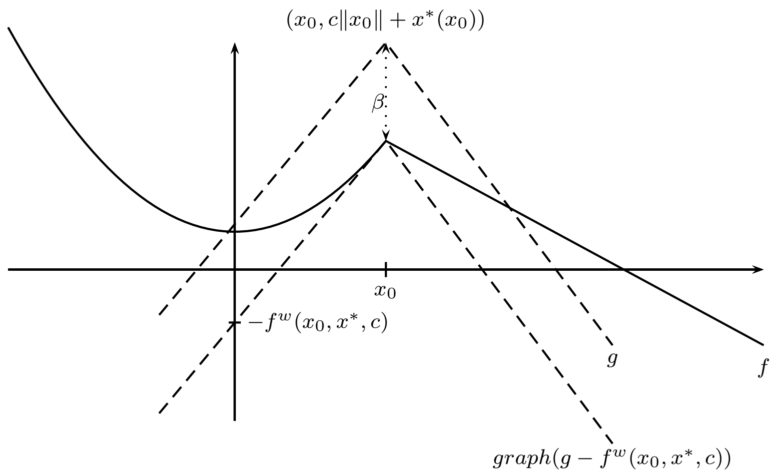
Zayıf eşlenik fonksiyon tanımında $c = 0$ alınırsa $f^w(x_0, x^*, 0) = f^*(x^*)$ olur.

Zayıf eşlenik fonksiyonun geometrik olarak ne anlama geldiğini inceleyelim. $(x_0, x^*, c) \in X \times X^* \times \mathbb{R}_+$ olmak üzere $g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall\ x \in \mathbb{R}$ için $g(x) = -c\|x - x_0\| + c\|x_0\| + x^*(x)$ olarak tanımlansın.

$$\begin{aligned} graph(g) - \{(x_0, c\|x_0\| + x^*(x_0))\} &= \{(x - x_0, \alpha - c\|x_0\| - x^*(x_0)) \in X \times \mathbb{R} \mid \\ &\quad -c\|x - x_0\| + c\|x_0\| + x^*(x) = \alpha\} \\ &= \{(y, \gamma) \in X \times \mathbb{R} \mid -c\|y\| + x^*(y) = \gamma\} \end{aligned}$$

olduğundan g'nin grafiği $X \times \mathbb{R}$ uzayında tepe noktası $(x_0, c\|x_0\| + x^*(x_0))$ olan kapalı bir konik yüzeydir. $f^w(x_0, x^*, c)$ değeri $graph(g - \beta)$ konik yüzeyi ve epi(f) kümesi kesişecek şekildeki β sayılarının supremumudur. Dolayısıyla $(x_0, c\|x_0\| + x^*(x_0) - f^w(x_0, x^*, c))$ tepe noktasına sahip $graph(g - f^w(x_0, x^*, c))$ konik yüzeyi epi$f$ için bir destek konik yüzeyidir. Yani

epi$(f) \subset$ epi$(g - f^w(x_0, x^*, c))$ ve $cl(\text{epi}f) \cap graph(g - f^w(x_0, x^*, c)) \neq \emptyset$ olur. $graph(g - f^w(x_0, x^*, c))$ kümesi y eksenini $-f^w(x_0, x^*, c)$ noktasında keser. Bu açıklamalar geometrik olarak Şekil 2.1'de de gösterilmiştir.



Şekil 2.1: Zayıf eşlenik dönüşümün geometrik olarak incelenmesi

Bir fonksiyonun zayıf bieşlenik fonksiyonu daha sade bir biçimde aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Yardımcı Teorem 2.1.2. *Her $x \in X$ için*

$$f^{ww}(x) = \sup_{(x^*, c) \in X^* \times \mathbb{R}_+} \{c\|x\| + x^*(x) - f^w(x, x^*, c)\}$$

olur.

Teorem 2.1.3. *$\forall\ x \in X$ için $f^{ww}(x) \leq f(x)$'dir.*

Şimdi, subdiferansiyel kavramından daha genel bir kavram olan zayıf subdiferansiyel kavramının tanımını hatırlatalım.

Tanım 2.1.4. *$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ noktası verilsin. Her $x \in X$ için*

$$-c\|x - x_0\| + x^*(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0)$$

olan $(x^*, c) \in X^* \times \mathbb{R}_+$ ikilisine f fonksiyonunun x_0 noktasındaki zayıf subgradienti denir. f'in x_0 noktasındaki zayıf subgradientlerinin kümesine f'in x_0 noktasındaki zayıf subdiferansiyeli denir ve bu küme $\partial^w f(x_0)$ olarak gösterilir. Yani

$$\partial^w f(x_0) = \{(x^*, c) \in X^* \times \mathbb{R}_+ | -c\|x - x_0\| + x^*(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0), \forall x \in X\}\text{'dir.}$$

$\partial^w f(x_0) \neq \emptyset$ ise f'e x_0 noktasında zayıf subdiferansiyelenebilirdir denir.

Uyarı 2.1.5. *$(x_0, x^*, c) \in X \times X^* \times \mathbb{R}_+$ seçildikten sonra sabitlenmiş bir elaman olmak üzere her $x \in X$ için*

$$g(x) = -c\|x - x_0\| + x^*(x - x_0) + f(x_0)$$

olarak tanımlanan $g : X \to \mathbb{R}$ sürekli konkav fonksiyonu $\forall\ x \in X$ için

$$g(x) \leq f(x) \text{ ve } g(x_0) = f(x_0)$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa $(x^*, c) \in X^* \times \mathbb{R}_+$ ikilisi f'in x_0 noktasındaki zayıf subgradientidir.

Zayıf subgradientin geometrik olarak ne anlama geldiğini inceleyelim.

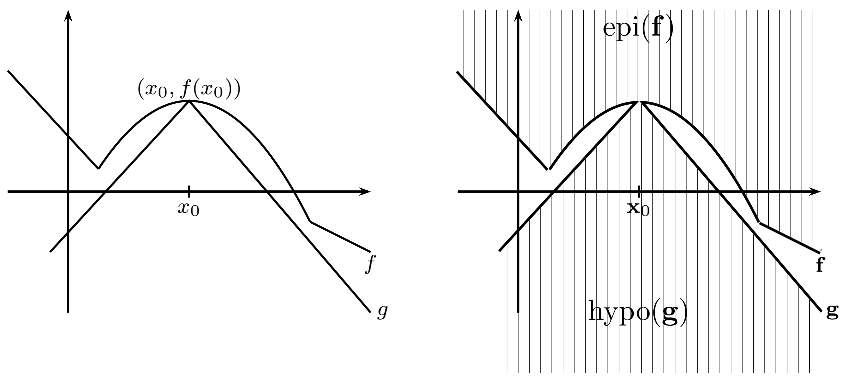
$$\begin{aligned} \mathrm{hypo}(g) - \{(x_0, f(x_0))\} &= \{(x - x_0, \alpha - f(x_0)) \in X \times \mathbb{R} \mid -c\|x - x_0\| \\ &\quad + x^*(x - x_0) \geq \alpha - f(x_0)\} \\ &= \{(u, \beta) \in X \times \mathbb{R} \mid -c\|u\| + x^*(u) \geq \beta\} \end{aligned}$$

olduğundan $\mathrm{hypo}(g) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid g(x) \geq \alpha\}$ *kümesi $X \times \mathbb{R}$ içinde tepe noktası $(x_0, f(x_0))$ olan kapalı bir konik yüzeydir. Ayrıca* $\mathrm{hypo}(g)$,

$\text{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\}$ *kümesini destekleyen bir konik yüzeydir. Bu destekleme*

$$\text{epi}(f) \subset (X \times \mathbb{R}) \backslash \text{hypo}(g) \ \textit{ve} \ cl(\text{epi}(f)) \cap graph(g) \neq \emptyset$$

anlamındadır. Bu geometrik yorum Şekil 2.2'de gösterilmiştir.



Şekil 2.2: Zayıf subdiferansiyelin geometrik yorumu

Uyarı 2.1.6. *f, x_0 noktasında bilinen anlamda subdiferansiyellenebiliyorsa aynı noktada zayıf subdiferansiyellenebilirdir. Gerçekten f fonksiyonu x_0 noktasında subdiferansiyellenebiliyorsa $\exists\ x^* \in \partial f(x_0)$ vardır. Buradan $\forall\ x \in X$ için*

$$f(x) - f(x_0) \geq x^*(x - x_0)$$

olur. O halde zayıf subdiferansiyelin tanımından her $c \geq 0$ için $(x^*, c) \in \partial^w f(x_0)$ olur. Dolayısıyla zayıf subdiferansiyel klasik subdiferansiyelden daha geniş bir kümedir.

Tanım 2.1.7. *$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ noktası verilsin. x_0'ın bir U komşuluğu ve $L > 0$ sayısı her $x \in U$ için*

$$f(x) - f(x_0) \geq -L\|x - x_0\|$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa f'e x_0 noktasında alttan yerel Lipschitz özelliğine sahiptir denir. $\forall\ x \in X$ için $f(x) - f(x_0) \geq -L\|x - x_0\|$ oluyorsa f'e x_0 noktasında alttan Lipschitz özelliğine sahiptir denir.

Teorem 2.1.8 bir fonksiyonun zayıf subdiferansiyellenebilirliği için gerekli ve yeterli koşullar vermektedir.

Teorem 2.1.8. *$f : X \to (-\infty, +\infty]$ fonksiyonu ve $f(x_0)$ sonlu olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

i) f, x_0 noktasında zayıf subdiferansiyellenebilirdir.

ii) f, x_0 noktasında alttan Lipschitz özelliğine sahiptir.

iii) f, x_0 noktasında alttan yerel Lipschitz özelliğine sahiptir ve $\forall\, x \in X$ için

$$f(x) \geq -p\|x\| + q$$

olacak şekilde $\exists\, p \geq 0$ ve $q \in \mathbb{R}$ vardır.

Teorem 2.1.9. *$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ noktası verilsin. $(x^*, c) \in \partial^w f(x_0)$ olması için gerek ve yeter koşul*

$$f(x_0) + f^w(x_0, x^*, c) = c\|x_0\| + x^*(x_0)$$

olmasıdır.

Uyarı 2.1.10. *Fenchel eşitliği adı verilen ve*

$$f^*(x^*) + f(x) = x^*(x)$$

olarak ifade edilen eşitlik sadece $x^* \in \partial f(x)$ olması durumunda geçerlidir. Teorem 2.1.9 ise Fenchel eşitliğinin zayıf eşlenik dönüşümler için de geçerli olduğunu göstermektedir.

Teorem 2.1.11 Teorem 2.1.3'deki eşitsizliğin zayıf subdiferansiyellenebilme koşulu altında eşitliğe dönüştüğünü göstermektedir.

Teorem 2.1.11. *X gerçel normlu uzay, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ has (proper) fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. $\partial^w f(x_0) \neq \emptyset$ ise $f(x_0) = f^{ww}(x_0)$ olur.*

2.2 Konveks Olmayan Optimizasyonda Zayıf Eşlenik Duallik

Bu bölümde Azimov ve Gasimov'un [13,14] konveks olmayan optimizasyon problemleri için zayıf eşlenik fonksiyonlar yardımıyla oluşturdukları zayıf dual problem kavramından bahsedilecektir.

X normlu uzay, X^*, X uzayının dual uzayı olsun. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin.

$$(P)\left\{\inf_{x\in X} f(x)\right.$$

problemi göz önüne alınsın. (P) problemine (primal) asıl problem adı verilir. (P) probleminin infimum değeri $\text{Inf}(P)$ ile gösterilir. $f(x_0) < +\infty$ olacak şekilde $x_0 \in X$ varsa (P) problemine aşikar olmayan (nontrivial) problem denir.

Z bir normlu uzay, Z^* da Z uzayının dual uzayı olsun. $\varphi : X \times Z \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu $\forall\ x \in X$ için $\varphi(x,0) = f(x)$ olacak şekilde seçilsin. Bu şekilde tanımlanan $\varphi(\cdot,\cdot)$ fonksiyonuna sarsım fonksiyonu denir.

$$\inf_{x\in X} \varphi(x,0) \equiv \inf_{x\in X} f(x)$$

olduğu açıktır. Zayıf dual problemi tanımlamak için

$$\varphi^w : X \times X^* \times \mathbb{R}_+ \times Z \times Z^* \times \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}$$

zayıf eşlenik fonksiyonunu belirleyelim.

$\forall\ (x_0, x^*, c, z_0, z^*, d) \in X \times X^* \times \mathbb{R}_+ \times Z \times Z^* \times \mathbb{R}_+$ için

$$\begin{aligned}\varphi^w(x_0, x^*, c, z_0, z^*, d) \quad = \quad & \sup_{(x,z)\in X\times Z} \{-c\|x - x_0\| - d\|z - z_0\| + c\|x_0\| \\ & +d\|z_0\| + x^*(x) + z^*(z) - \varphi(x,z)\}\end{aligned}$$

olur. $x_0 = 0,\ x^* = 0,\ c = 0$ ve $z_0 = 0$ olarak alınsın. Bu durumda

$$\varphi^w(0,0,0,0,z^*,d) = \varphi^w(\mathbf{0}, z^*, d) = \sup_{(x,z)\in X\times Z} \{-d\|z\| + z^*(z) - \varphi(x,z)\}$$

olur ve (P) probleminin duali

$$(P^*)\left\{\sup_{(z^*,d)\in Z^*\times\mathbb{R}_+} \{-\varphi^w(\mathbf{0}, z^*, d)\}\right.$$

olarak tanımlanır. (P^*) probleminin supremumu $\text{Sup}(P^*)$ olarak gösterilir. $-\varphi^w(\mathbf{0}, z^*, d) = \text{Sup}(P^*)$ olan $(z^*, d) \in Z^* \times \mathbb{R}_+$ ikilisine (P^*) probleminin çözümü denir.

Teorem 2.2.1 dual problemin supremumunun asıl problemin infimum değerinden her zaman küçük ya da eşit olduğunu göstermektedir.

Teorem 2.2.1. ***(Zayıf Duallik Teoremi)*** $\text{Sup}(P^*) \leq \text{Inf}(P)$*'dir.*

Tanım 2.2.2. $\forall\ z \in Z$ *için* $\phi(z) = \inf\limits_{x \in X} \varphi(x, z)$ *olarak tanımlanan* $\phi : Z \to \overline{\mathbb{R}}$ *fonksiyonuna değer fonksiyonu adı verilir.*

Dual problemin çözümü değer fonksiyonunun zayıf bieşleniğinin 0 noktasında aldığı değerle karakterize edilebilir.

Yardımcı Teorem 2.2.3. $\text{Sup}(P^*) = \phi^{ww}(0)$ *olur.*

Güçlü duallik teoremini verebilmek için (P) probleminin kararlılık tanımına ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 2.2.4. $\phi(\cdot)$ *değer fonksiyonu* $0 \in Z$ *noktasında zayıf subdiferansiyellenebilir ve* $\phi(0)$ *sonlu ise* (P) *problemine kararlıdır denir.*

Teorem 2.2.5. ***(Güçlü Duallik Teoremi)*** (P) *problemi kararlı ise*

i) $\text{Inf}(P) = \text{Sup}(P^*)$ *olur.*

ii) $\phi(\cdot)$ *fonksiyonunun* $0 \in Z$ *noktasındaki her zayıf subgradienti* (P^*) *probleminin bir çözümüdür.*

2.3 Zayıf Lagrange Dual Problem

Azimov ve Kasımbeyli, bir önceki bölümde verilen zayıf dual problemin inşasında özel bir sarsım fonksiyonu kullanarak konveks olmayan kısıtlı optimizasyon problemleri için yeni bir zayıf dual problem elde etmişlerdir [13, 14]. Buna ek olarak güçlü dualik teoremleri vermişlerdir. Bu bölümde bu zayıf dual problemin kuruluşundan bahsedilecektir.

İlk olarak kısıtlı optimizasyon problemini tanımlayalım. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay, $\emptyset \neq S \subset X$, Z gerçel normlu uzay, Z^*, Z uzayının duali olsun. K,

Z içinde kapalı, konveks, sivri (pointed) koni ($K \cap (-K) = \{0\}$) olsun ve Z üzerinde K konisi ile belirlenen $\underset{K}{\leq}$ sıralaması

$$z_1 \underset{K}{\leq} z_2 \iff z_2 - z_1 \in K$$

olarak tanımlansın. $f : S \to \mathbb{R}$ ve $g : S \to Z$ fonksiyonlar ve

$$G = \{x \in S \mid g(x) \underset{K}{\leq} 0\}$$

olmak üzere

$$(P) \ \inf_{x \in G} f(x) \tag{2.1}$$

problemini göz önüne alalım.

$\varphi_L : X \times Z \to \overline{\mathbb{R}}$ sarsım fonksiyonu $\forall\ (x, z) \in X \times Z$ için

$$\varphi_L(x, z) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in S \text{ ve } g(x) \underset{K}{\leq} z \\ +\infty & , \quad \quad \quad d.d. \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda (P) probleminin $\varphi_L(\cdot, \cdot)$ sarsım fonksiyonunun zayıf eşleniği alınarak oluşturulan dual problem

$$(D_L^w) \begin{cases} \mathrm{Sup}(D_L^w) = \sup\limits_{(z^*, d) \in V} \inf\limits_{x \in S} L(x, z^*, d) \end{cases}$$

olur. Burada

$$K^* = \{z^* \in Z \mid \forall\ k \in K \text{ için } z^*(k) \geq 0\}$$

kümesi K konisinin pozitif polar konisi, $B^* = \{e^* \in Z^* \mid \|e^*\| \leq 1\}$, $\tau : Z \times Z^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (z, z^*, d) \in Z \times Z^* \times \mathbb{R}_+$ için

$$\tau(z, z^*, d) := \sup\{de^*(z) \mid e^* \in B^* \text{ ve } de^* - z^* \in K^*\}$$

olarak tanımlanan fonksiyon ve

$$V := \{(z^*, d) \in Z^* \times \mathbb{R}_+ \mid \exists\ e^* \in B^* \text{ için } de^* - z^* \in K^*\}$$

olmak üzere $L : S \times V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall\ (x, z^*, d) \in S \times V$ için

$$L(x, z^*, d) = f(x) - z^*(g(x)) + \tau(g(x), z^*, d)$$

olarak tanımlanır.

2.4 Zayıf Fenchel Dual Problem

Bu kısımda konveks olmayan bir optimizasyon probleminin özel bir sarsım fonksiyonu kullanılarak verilen optimizasyon problemi için zayıf Fenchel dual problem oluşturulmuş ve (P) probleminin kararlılığı tanımlanarak, güçlü duallik için gerek ve yeter koşulun (P) probleminin kararlı olması olduğu gösterilmiştir. Bunlara ek olarak (P) probleminin kararlılığı için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir. Son olarak da klasik Fenchel dual ve Lagrange dual ile çözülemeyen fakat zayıf Fenchel dual problem oluşturularak çözülebilen konveks olmayan kısıtlı bir optimizasyon problemi örneği verilmiştir.

İlk olarak Fenchel sarsım fonksiyonu yardımıyla (2.1) ile verilen (P) kısıtlı optimizasyon probleminin zayıf Fenchel dual problemini oluşturalım.

$\forall\ (x,y) \in X \times X$ için

$$\varphi_F(x,y) = \begin{cases} f(x+y) & , \quad x \in G \\ +\infty & , \quad dd. \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\varphi_F : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna Fenchel sarsım fonksiyonu adı verilir.

Zayıf duallik teorisinde (P) problemi için Fenchel sarsım fonksiyonu yardımıyla oluşturulan dual problem

$$(D_F^w) \sup_{(y^*,d)\in X^*\times\mathbb{R}_+} \{-\varphi_F^w(0,0,0,0,y^*,d)\}$$

olur.

$\varphi_F^w : X \times X^* \times \mathbb{R}_+ \times X \times X^* \times \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ zayıf eşlenik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \varphi_F^w(x_0,x^*,c,y_0,y^*,d) &= \sup_{\substack{x\in X\\ y\in X}}\{x^*(x) - c\|x-x_0\| + c\|x_0\| + y^*(y) - \\ &\quad\ d\|y-y_0\| + d\|y_0\| - \varphi_F(x,y)\} \\ &= \sup_{\substack{x\in G\\ y\in X}}\{x^*(x) - c\|x-x_0\| + c\|x_0\| + y^*(y) \\ &\quad\ -d\|y-y_0\| + d\|y_0\| - f(x+y)\} \end{aligned}$$

dir. O zaman $\varphi_F^w(0,0,0,0,y^*,d) = \sup_{\substack{x\in G\\ y\in X}}\{y^*(y) - d\|y\| - f(x+y)\}$ olur. $x+y=r$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\varphi_F^w(0,0,0,0,y^*,d) &= \sup_{x\in G}\sup_{r\in X}\{-y^*(x)+y^*(r)-d\|r-x\|-f(r)\} \\
&= \sup_{x\in G}\sup_{r\in X}\{-y^*(x)-d\|x\|+y^*(r)+d\|x\|-d\|r-x\|-f(r)\} \\
&= \sup_{x\in G}\{-y^*(x)-d\|x\|+\sup_{r\in X}\{y^*(r)-d\|r-x\|+d\|x\|-f(r)\}\} \\
&= \sup_{x\in G}\{-y^*(x)-d\|x\|+f^w(x,y^*,d)\}
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$(D_F^w)\sup_{(y^*,d)\in X^*\times\mathbb{R}_+}\{-\varphi_F^w(0,0,0,0,y^*,d)\}=\sup_{(y^*,d)\in X^*\times\mathbb{R}_+}\inf_{x\in G}\{y^*(x)+d\|x\|-f^w(x,y^*,d)\}$$

elde edilir.

Tanım 2.4.1. *Her $y\in X$ için $\phi(y)=\inf_{x\in X}\varphi_F(x,y)$ olarak tanımlanan $\phi: X\to\overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna φ_F sarsım fonksiyonuna bağlı değer fonksiyonu denir.*

Tanım 2.4.2. *φ_F fonksiyonu yardımıyla tanımlanan ϕ değer fonksiyonu 0'da sonlu ve 0 noktasında zayıf subdiferansiyellenebiliyorsa (P) problemine φ_F'e göre kararlıdır denir.*

Teorem 2.4.3'de güçlü duallik için gerek ve yeter koşulun (P) probleminin φ_F'e göre kararlı olması gerektiği verilmektedir.

Teorem 2.4.3. ***(Güçlü Duallik Teoremi)*** *(P) problemi φ_F'e göre kararlı ise $\mathrm{Inf}(P)=\mathrm{Sup}(D_F^w)$'dir, bu değer sonludur ve ϕ'nin 0'daki her zayıf subgradienti (D_F^w) probleminin bir çözümüdür. Tersine $\mathrm{Inf}(P)=\mathrm{Sup}(D_F^w)$ ve $\phi(0)$ sonlu ise (D_F^w) probleminin herhangibir çözümü ϕ fonksiyonunun 0'daki zayıf subdiferansiyelinin bir elemanıdır.*

Kanıt. (P) problemi kararlı yani $\phi(0)$ sonlu ve $\partial^w\phi(0)\neq\emptyset$ olsun. ϕ fonksiyonunun tanımından ve $\phi(0)$ sonlu olduğundan $\phi(0)=\mathrm{Inf}(P)$ sonlu olur.
$\partial^w\phi(0)\neq\emptyset$ olduğundan $\exists\ (x^*,c)\in\partial^w\phi(0)$ vardır. Teorem 2.1.9'dan

$(x^*, c) \in \partial^w \phi(0) \iff \phi(0) + \phi^w(0, x^*, c) = 0$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\phi^w(0, x^*, c) &= \sup_{y\in X}\{x^*(y) - c\|y\| - \phi(y)\} \\
&= \sup_{y\in X}\{x^*(y) - c\|y\| - \inf_{x\in X} \varphi_F(x, y)\} \\
&= \sup_{y\in X}\{x^*(y) - c\|y\| + \sup_{x\in X} -\varphi_F(x, y)\} \\
&= \sup_{y\in X}\sup_{x\in X}\{x^*(y) - c\|y\| - \varphi_F(x, y)\} \\
&= \sup_{y\in X}\sup_{x\in G}\{x^*(y) - c\|y\| - f(x+y)\} \qquad x + y = v \text{ olarak alınırsa} \\
&= \sup_{v\in X}\sup_{x\in G}\{x^*(v) - x^*(x) - c\|v - x\| - f(v)\} \\
&= \sup_{x\in G}\{-x^*(x) - c\|x\| + \sup_{v\in X}\{x^*(v) - c\|v - x\| + c\|x\| - f(v)\}\} \\
&= \sup_{x\in G}\{-x^*(x) - c\|x\| + f^w(x, x^*, c)\} \\
&= -\inf_{x\in G}\{x^*(x) + c\|x\| - f^w(x, x^*, c)\}\text{'dir.}
\end{aligned}$$

$\phi(0) + \phi^w(0, x^*, c) = 0$ olduğundan

$$\mathrm{Inf}(P) = \phi(0) = -\phi^w(0, x^*, c)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\mathrm{Inf}(P) &= \inf_{x\in G}\{x^*(x) + c\|x\| - f^w(x, x^*, c)\} \\
&\leq \sup_{(y^*,d)\in X^*\times\mathbb{R}_+}\{\inf_{x\in G}\{y^*(x) + d\|x\| - f^w(x, y^*, d)\}\} \\
&= \mathrm{Sup}(D_F^w) \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Zayıf Duallik Teoreminden

$$\mathrm{Inf}(P) \geq \mathrm{Sup}(D_F^w) \qquad (2.3)$$

olur. O halde (2.2) ve (2.3)'den $\mathrm{Inf}(P) = \mathrm{Sup}(D_F^w)$'dir ve bu değer sonludur.

Tersine $\mathrm{Inf}(P) = \mathrm{Sup}(D_F^w)$ ve $\phi(0)$ sonlu olsun. (y^*, d) (D_F^w) probleminin bir çözümü olsun. $(y^*, d) \in \partial^w \phi(0)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\phi(0) = \mathrm{Inf}(P) = \mathrm{Sup}(D_F^w) &= \inf_{x\in G}\{y^*(x) + d\|x\| - f^w(x, y^*, d)\} \\
&= -\sup_{x\in G}\{-y^*(x) - d\|x\| + f^w(x, y^*, d)\} \\
&= -\phi^w(0, y^*, d)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $(y^*, d) \in \partial^w \phi(0)$ elde edilir. □

(P) probleminin φ_F'e göre kararlılığı için verilecek olan teoremlerden önce aşağıdaki kabulleri verelim.

Kabul A. $\exists\ L > 0$ sayısı, 0'ın bir $N(0) \subseteq X$ komşuluğu ve $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists\ x(\varepsilon) \in X$ elemanı her $x \in X$ ve her $y \in N(0)$ için

$$\varphi_F(x, y) - \varphi_F(x(\varepsilon), 0) + \varepsilon \geq -L\|y\| \tag{2.4}$$

olacak şekilde bulunsun.

Kabul B. $\exists\ L > 0$ sayısı ve $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists\ x(\varepsilon) \in X$ elemanı her $x,\ y \in X$ için

$$\varphi_F(x, y) - \varphi_F(x(\varepsilon), 0) + \varepsilon \geq -L\|y\| \tag{2.5}$$

olacak şekilde bulunsun.

Kabul C. $\exists\ p \geq 0$ ve $q \in \mathbb{R}$ sayıları her $x,\ y \in X$ için

$$\varphi_F(x, y) \geq -p\|y\| + q \tag{2.6}$$

olacak şekilde bulunsun.

Teorem 2.4.4. *(P) probleminin φ_F fonksiyonuna göre kararlı olması için gerek ve yeter koşul (P)'nin aşikar olmayan problem olması, Kabul A ve Kabul C'nin sağlanmasıdır.*

Kanıt. Kabul A, Kabul C sağlansın ve (P) aşikar olmayan problem olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ verilsin. Kabul A'dan $\exists\ L > 0$ sayısı, 0'ın bir $N(0)$ komşuluğu ve $x(\varepsilon) \in X$ vektörü $\forall\ x \in X$ ve $\forall\ y \in N(0)$ için

$$\varphi_F(x, y) - \varphi_F(x(\varepsilon), 0) + \varepsilon \geq -L\|y\| \tag{2.7}$$

olacak şekilde vardır. ϕ fonksiyonunun tanımından $\forall\ x \in X$ için

$$\phi(0) \leq \varphi_F(x, 0)$$

olur. Bu eşitsizlik özel olarak $x(\varepsilon)$ için de gerçeklenir. Yani

$$\phi(0) \leq \varphi_F(x(\varepsilon), 0) \tag{2.8}$$

olur. (2.7) ve (2.8) yardımıyla $\forall\ x \in X$ ve $\forall\ y \in N(0)$ için

$$\varphi_F(x, y) + \varepsilon \geq \varphi_F(x(\varepsilon), 0) - L\|y\| \geq \phi(0) - L\|y\|$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafında x üzerinden infimum alınırsa ϕ fonksiyonunun tanımından $\forall\ y \in N(0)$ için

$$\phi(y) - \phi(0) + \varepsilon \geq -L\|y\|$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\forall\ y \in N(0)$ için

$$\phi(y) - \phi(0) \geq -L\|y\|$$

elde edilir. Dolayısıyla ϕ fonksiyonu 0'da alttan yerel Lipschitz özelliğine sahiptir.

Kabul C'den $\forall\ x,\ y \in X$ için

$$\varphi_F(x, y) \geq -p\|y\| + q \tag{2.9}$$

olacak şekilde $p \geq 0$ ve $q \in \mathbb{R}$ vardır. (2.9) eşitsizliğinde x'ler üzerinden infimum alınırsa $\forall\ y \in X$ için

$$\phi(y) = \inf_{x \in X} \varphi_F(x, y) \geq -p\|y\| + q$$

olur. O halde Teorem 2.1.8 gereği ϕ fonksiyonu 0'da zayıf subdiferansiyellenebilirdir.

$\phi(0)$ sonludur. Çünkü (2.9) eşitsizliği $\forall\ y \in X$ için geçerli olduğundan özel olarak 0 için de geçerlidir. Yani $\forall\ x \in X$ için $\varphi_F(x, 0) \geq 0$ olur. Buradan

$$\inf_{x \in X} \varphi_F(x, 0) = \phi(0) \geq q \tag{2.10}$$

elde edilir. Bununla birlite (P) aşikar olmayan problem olduğundan

$$f(x_0) < +\infty$$

olacak şekilde $\exists\ x_0 \in X$ vardır. Değer dönüşümünün tanımından ve (2.10) eşitsizliğinden

$$q \leq \phi(0) \leq \varphi_F(x_0, 0) = f(x_0) < +\infty$$

elde edilir. Dolayısıyla $\phi(0)$ sonlu bir değerdir. $\phi(0)$'ın sonlu oluşu ve ϕ fonksiyonunun 0'da zayıf subdiferansiyelellenebilirliğinden (P) problemi φ_F'e göre kararlıdır.

Tersine (P) φ_F'e göre kararlı yani $\phi(0)$ sonlu ve ϕ fonksiyonu 0'da zayıf subdiferansiyellenebilir olsun. O halde $\phi(\cdot)$, 0'da alttan Lipschitz özelliğine sahiptir. Yani $\exists\ L > 0$ sayısı $\forall\ y \in X$ için

$$\phi(y) - \phi(0) \geq -L\|y\| \tag{2.11}$$

olacak şekilde vardır. ϕ fonksiyonunun tanımından $\forall\ \varepsilon > 0$ için

$$\varphi_F(x(\varepsilon), 0) < \phi(0) + \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists\ x(\varepsilon) \in X$ vardır. Buradan $\forall\ y \in X$ için

$$\phi(y) \geq \phi(0) - L\|y\| > \varphi_F(x(\varepsilon), 0) - \varepsilon - L\|y\|$$

olur. Dolayısıyla $\phi(y) - \varphi_F(x(\varepsilon), 0) + \varepsilon \geq -L\|y\|$ elde edilir. O halde ϕ fonksiyonunun tanımı kullanılarak $\forall\ x,\ y \in X$ için

$$\varphi_F(x, y) - \varphi_F(x(\varepsilon), 0) + \varepsilon \geq -L\|y\|$$

olur. Dolayısıyla Kabul A sağlanmış olur.

(2.11) eşitsizliğinden $\forall\ x,\ y \in X$ için

$$\varphi_F(x, y) \geq \phi(0) - L\|y\|$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $\phi(0) = q$ ve $p = L$ alınırsa $\forall\ x,\ y \in X$ için

$$\varphi_F(x, y) \geq -p\|y\| + q$$

olur. Bu Kabul C'nin sağlandığını gösterir. Kabul C sağlandığından ve $\phi(0)$ sonlu olduğundan (P) problemi aşikar problem değildir. □

Teorem 2.4.5. *(P) probleminin φ_F fonksiyonuna göre kararlı olması için gerek ve yeter koşul* Inf(P)*'nin sonlu ve Kabul B'nin geçerli olmasıdır.*

Kanıt. Kabul B sağlansın. Keyfi $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda $\forall\ x, y \in X$ için

$$\varphi_F(x, y) - \varphi_F(x(\varepsilon), 0) + \varepsilon \geq -L\|y\|$$

olacak şekilde $x(\varepsilon) \in X$ ve $L > 0$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} \varphi_F(x, y) &\geq \varphi_F(x(\varepsilon), 0) - \varepsilon - L\|y\| \\ &\geq \phi(0) - \varepsilon - L\|y\| \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlikte x'ler üzerinden infumum alınırsa $\forall\ y \in X$ için

$$\phi(y) - \phi(0) \geq -\varepsilon - L\|y\|$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafından $\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa $\phi(y)-\phi(0) \geq -L\|y\|$ elde edilir. Dolayısıyla ϕ fonksiyonu 0'da alttan Lipschitz özelliğine sahiptir. O halde ϕ fonksiyonu 0'da zayıf subdiferansiyellenebilirdir.

Tersine (P) problemi φ_F'e göre kararlı olsun. Yani ϕ 0'da zayıf subdiferansiyellenebilir ve $\phi(0)$ sonlu olsun. O halde $\forall\ y \in X$ için

$$\phi(y) - \phi(0) \geq -L\|y\| \tag{2.12}$$

olacak şekilde $L > 0$ vardır. $\phi(0) = \inf\limits_{x \in X} \varphi_F(x, 0)$ olduğundan $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\varphi_F(x(\varepsilon), 0) - \varepsilon < \phi(0)$ olacak şekilde $\exists\ x(\varepsilon) \in X$ vardır. Bu eşitsizlik, ϕ fonksiyonunun tanımı ve (2.12) eşitsizliği yardımıyla $\forall\ x, y \in X$ için

$$\varphi_F(x, y) - \varphi_F(x(\varepsilon), 0) + \varepsilon \geq -L\|y\|$$

elde edilir. O halde Kabul B sağlanmış olur. □

Örnek 2.4.6'da klasik Fenchel ve Lagrange dual problemler yardımıyla çözülemeyip zayıf Fenchel dual problem oluşturularak çözülebilen konveks olmayan kısıtlı bir optimizasyon problemi verilmiştir.

Örnek 2.4.6. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall\ x \in \mathbb{R}$ için*

$$f(x) = \begin{cases} -|x| & , \quad x \leq 1 \\ -1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanmak ve $S = \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(P) \qquad \begin{cases} \inf f(x) \\ g(x) = -x \leq 0 \\ x \in S \end{cases}$$

kısıtlı optimizasyon problemini göz önüne alalım.

$\mathrm{Inf}(P) = -1$ *olduğu açıktır. İlk olarak (P) probleminin klasik anlamda Fenchel dual problemi ile çözülemeyeceğini gösterelim. (P) probleminin Fenchel duali*

$$(D_F^s) \qquad \sup_{p^* \in \mathbb{R}} \{-f^*(p^*) + \inf_{x \in G} \{p^* x\}\}$$

şeklindedir. $f^*(p^*)$ *hesaplanırsa* $f^*(p^*) = +\infty$ *elde edilir. Buradan*

$$\mathrm{Sup}(D_F^s) = -\infty < \mathrm{Inf}(P) = -1$$

elde edilir. Dolayısıyla güçlü duallik gerçekleşmez.

Şimdi, problemin klasik anlamda Lagrange dual problem yardımıyla çözülemeyeceğini gösterelim. (P) *probleminin Lagrange dual problemi*

$$(D_L^s) \qquad \sup_{q^*\geq 0} \inf_{x\in\mathbb{R}} \{f(x) + q^* g(x)\}$$

olarak verilir.

$\forall\ q^* \geq 0$ *için* $\inf_{x\in\mathbb{R}} \{f(x) + q^* g(x)\} = -\infty$ *olduğundan*

$$-\infty = \mathrm{Sup}(D_L^s) < \mathrm{Inf}(P) = -1$$

olur. Bu ise problemin Lagrange dual problem ile çözülemediğini gösterir.

Son olarak problemin zayıf Fenchel dual problem yardımıyla çözülebileceğini gösterelim. (P) *probleminin zayıf Fenchel dual problemi*

$$(D_F^w) \qquad \sup_{(u,c)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \inf_{x\in G} \{ux + c|x| - f^w(x,u,c)\}\,\text{'dir}$$

Gerekli hesaplamalar sonucunda $\forall\ (x,u,c) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ *için*

$$f^w(x,u,c) = \begin{cases} +\infty & , \quad x \in \mathbb{R}\ ,\ u > c \text{ veya } u + c < 1, \\ -c + u + 1 + 2cx & , \quad 1 > x \geq 0,\ -1 \leq -c + u \leq 0 \text{ ve } c + u \geq 1 \\ (u + c + 1)x & , \quad 1 > x \geq 0,\ u + c \geq 1 \text{ ve } -c + u \leq -1 \\ (u + c)x + 1 & , \quad x \geq 1,\ -c + u \leq 0 \text{ ve } u + c \geq 1 \end{cases}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\inf_{x\geq 0} \{ux + cx - f^w(x,u,c)\} = \begin{cases} -\infty & , \quad u > c \text{ veya } u + c < 1 \\ -1 & , \quad u \leq c \text{ ve } u + c \geq 1 \end{cases}$$

olur. Sonuç olarak

$$\mathrm{Sup}(D_F^w) = \sup_{(u,c)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \inf_{x\geq 0} \{ux + cx - f^w(x,u,c)\} = -1 = \mathrm{Inf}(P)$$

elde edilir. Böylece problem zayıf Fenchel dual problem kullanılarak çözülmüş olur.

Şimdi (P) probleminin çözüm kümesinin değer dönüşümünün 0'daki zayıf subdiferansiyeli olduğunu gösterelim. Bunun için ilk önce Fenchel sarsım fonksiyonunu daha sonra da bu fonksiyona bağlı değer dönüşümünü bulalım. $\varphi_F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *Fenchel sarsım fonksiyonu* $\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}$ *için*

$$\varphi_F(x,y) = \begin{cases} f(x+y) & , \quad x \geq 0 \\ +\infty & , \quad d.d. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -|x+y| & , \quad x+y \leq 1,\ x \geq 0 \\ -1 & , \quad x+y > 1,\ x \geq 0 \\ +\infty & , \quad x < 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Bu fonksiyona göre oluşturulan değer fonksiyonu $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall\ y \in \mathbb{R}$ *için*

$$\phi(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \varphi_F(x,y) = \inf_{x \geq 0} \begin{cases} -|x+y| & , \quad x+y \leq 1, \\ -1 & , \quad x+y > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} y & , \quad y < -1 \\ -1 & , \quad y \geq -1 \end{cases}$$

olarak belirlenir.

$\phi(\cdot)$ *değer fonksiyonunun 0 noktasındaki zayıf subdiferansiyelini oluşturalım.*

$$\begin{aligned} \partial^w \phi(0) &= \{(u,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid uy - c|y| \leq \phi(y) - \phi(0), \forall\ y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(u,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid uy - c|y| \leq \phi(y) + 1, \forall\ y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Zayıf subdiferansiyel kümesini y'nin pozitif ve negatif olması durumlarına göre incelemeliyiz.

i) $y \geq 0$ *ise* $-1+1 \geq uy - cy \Rightarrow 0 \geq y(u-c)$ *olur. O halde* $u - c \leq 0$ *yani* $u \leq c$ *elde edilir.*

ii) $-1 \leq y \leq 0$ *ise* $-1+1 \geq uy + cy \Rightarrow 0 \geq y(u+c)$ *olur. O halde* $u + c \geq 0$ *elde edilir.*

iii) $y \leq -1$ *ise* $y + 1 \geq uy + cy \Rightarrow 1 \geq (u+c-1)y$ *olur. Buradan* $u + c - 1 \geq 0$ *elde edilir. Çünkü* $u + c - 1 < 0$ *olsaydı* $y = \dfrac{2}{u+c-1} < 0$

alınarak $1 \geq (u+c-1)\dfrac{2}{u+c-1} = 2$ *elde edilirdi. Bu da mümkün değildir.*

Dolayısıyla i, ii *ve* iii*'den*

$$\partial^w \phi(0) = \{(u,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid u \leq c \text{ ve } u + c \geq 1\}$$

olur. Bu küme ise (D_F^w) *dual probleminin çözüm kümesidir.*

2.5 Zayıf Fenchel-Lagrange Dual Problem

Bu kısımda Fenchel-Lagrange sarsım fonksiyonu adı verilen özel bir sarsım fonksiyonu kullanılarak (P) problemi için zayıf Fenchel-Lagrange dual problem tanımlanmış ve (P) probleminin Fenchel-Lagrange sarsım fonksiyonuna göre kararlılığı tanımı verilerek (P) probleminin kararlılığının güçlü dualliği gerektirdiği kanıtlanmıştır. Aynı zamanda (P) probleminin kararlılığı için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir.

İlk olarak Fenchel-Lagrange sarsım fonksiyonunu kullanarak (2.1) ile verilen (P) kısıtlı optimizasyon probleminin zayıf Fenchel-Lagrange dual problemini oluşturalım.

$\varphi_{FL} : X \times X \times Z \to \overline{\mathbb{R}}$ Fenchel-Lagrange sarsım fonksiyonu

$\forall\ (x,y,z) \in X \times X \times Z$ için

$$\varphi_{FL}(x,y,z) = \begin{cases} f(x+y) & , \quad g(x) \underset{K}{\leq} z,\ x \in S \\ +\infty & , \quad d.d. \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda φ_{FL}'nin zayıf eşlenik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \varphi_{FL}^w(x_0, \quad x^*, c, y_0, y^*, d, z_0, z^*, t) = \sup_{(x,y,z)\in X\times X\times Z} \{&x^*(x) - c\|x-x_0\| + c\|x_0\| + y^*(y) \\ &- d\|y-y_0\| + d\|y_0\| + z^*(z) - t\|z-z_0\| + t\|z_0\| - \varphi_{FL}(x,y,z)\} \end{aligned}$$

olur. Zayıf eşlenik fonksiyonda $x_0 = y_0 = 0,\ z_0 = 0,\ x^* = y^* = 0$ ve $t = d$ alınırsa

$$\varphi_{FL}^w(0,0,0,0,y^*,d,0,z^*,d) = \sup_{\substack{x\in S \\ g(x)\leq z \\ y\in X \\ z \in Z}} \{y^*(y) - d\|y\| + z^*(z) - d\|z\| - f(x+y)\}$$

elde edilir. Son eşitlikte $s = z - g(x)$, $r = x + y$ alınırsa $s \in K$ ve $r \in X$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\varphi^w_{FL}(0,0,0,0,y^*,d,0,z^*,d) = \\
= &\sup_{\substack{x\in S\\ s\in K\\ r\in X}}\{y^*(r) - y^*(x) - d\|r-x\| + z^*(s) + z^*(g(x)) - d\|s+g(x)\| - f(r)\} \\
= &\sup_{\substack{x\in S\\ s\in K}}\{-y^*(x) - d\|x\| + \sup_{r\in X}\{y^*(r) - d\|r-x\| + d\|x\| - f(r)\} + z^*(s) \\
&+z^*(g(x)) - d\|s+g(x)\|\} \\
= &\sup_{\substack{x\in S\\ s\in K}}\{-y^*(x) - d\|x\| + f^w(x,y^*,d) + z^*(g(x)) + z^*(s) - d\|s+g(x)\|\} \\
= &\sup_{x\in S}\{-y^*(x) - d\|x\| + f^w(x,y^*,d) + z^*(g(x)) + \sup_{s\in K}\{z^*(s) - d\|s+g(x)\|\}\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\|s+g(x)\| = \sup_{e\in B^*} e(s+g(x))$ olduğu da kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sup}(D^w_{FL}) &= \sup_{(y^*,z^*,d)\in X^*\times Z^*\times\mathbb{R}_+}\{-\varphi^w_{FL}(0,0,0,0,y^*,d,0,z^*,d)\} \\
&= \sup_{(y^*,z^*,d)}\inf_{x\in S}\{y^*(x) + d\|x\| - f^w(x,y^*,d) - z^*(g(x)) \\
&\quad + \inf_{s\in K}\{-z^*(s) + d\|s+g(x)\|\}\} \\
&= \sup_{(y^*,z^*,d)}\inf_{x\in S}\{y^*(x) + d\|x\| - f^w(x,y^*,d) - z^*(g(x)) \\
&\quad + \inf_{s\in K}\sup_{e\in B^*}\{de(s+g(x)) - z^*(s)\}\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $\inf_{s\in K}\sup_{e\in B^*}\{de(s+g(x)) - z^*(s)\}$ değerini incelersek

- $de - z^* \in K^*$ ise $s \in K$ olduğundan $(de - z^*)(s) \geq 0$ olur. Dolayısıyla

  $$\inf_{s\in K}\sup_{e\in B^*}\{de(g(x)) + (de - z^*)(s)\} = \sup_{e\in B^*}\{de(g(x))\}$$

  elde edilir,

- $de - z^* \notin K^*$ ise $(de - z^*)(s) < 0$ olduğundan

  $$\inf_{s\in K}\sup_{e\in B^*}\{de(g(x)) + (de - z^*)(s)\} = -\infty$$

  olur.

O halde

$$V = \{(z^*, d) \in Z^* \times \mathbb{R}_+ \mid \exists\, e \in B^* \text{ için } de - z^* \in K^*\}$$

ve

$$\tau(g(x), z^*, d) = \sup\{de(g(x)) \mid e \in B^*,\ de - z^* \in K^*\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{y^* \in X^* \\ (z^*, d) \in Z^* \times \mathbb{R}_+}} \{\inf_{x \in S}\{y^*(x) + d\|x\| - f^w(x, y^*, d) - z^*(g(x))\} \\
&= \sup_{(y^*, z^*, d) \in X^* \times V} \inf_{x \in S}\{y^*(x) + d\|x\| - f^w(x, y^*, d) - z^*(g(x)) + \tau(g(x), z^*, d)\}
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak zayıf Fenchel-Lagrange dual problem

$$(D^w_{FL}) \qquad \sup_{(y^*, z^*, d) \in X^* \times V} \inf_{x \in S}\{y^*(x) + d\|x\| - f^w(x, y^*, d) - z^*(g(x)) + \tau(g(x), z^*, d)\}$$

olur.

Tanım 2.5.1. *Her $(y, z) \in X \times Z$ için $\phi(y, z) = \inf_{x \in X} \varphi_{FL}(x, y, z)$ olarak tanımlanan $\phi : X \times Z \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna φ_{FL} sarsım fonksiyonuna bağlı değer fonksiyonu denir.*

Tanım 2.5.2. *φ_{FL} fonksiyonu yardımıyla tanımlanan ϕ değer fonksiyonu $(0, 0)$'da sonlu ve $(0, 0)$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebiliyorsa (P) problemine φ_{FL}'ye göre kararlıdır denir.*

Yardımcı Teorem 2.5.3. *(P) problemi için*

$$\begin{aligned}
&\inf\{\varphi_{FL}(x, y, z) - y^*(y) + d\|y\| + d\|z\| - z^*(z) \mid y \in X,\ z \in Z\} \\
&= \begin{cases} d\|x\| + y^*(x) - f^w(x, y^*, d) - z^*(g(x)) + \tau(g(x), z^*, d) & ,\ (z^*, d) \in V,\ x \in S \\ -\infty & ,\ (z^*, d) \notin V,\ x \in S \\ +\infty & ,\ x \notin S \end{cases}
\end{aligned}$$

dir.

Kanıt. Eşitliği göstermek için sırasıyla $x \notin S$ ve $x \in S$ durumlarını inceleyelim.

- $x \notin S$ olsun. Bu durumda $\varphi_{FL}(x, y, z) = +\infty$ olduğundan

  $$\inf\{\varphi_{FL}(x, y, z) - y^*(y) + d\|y\| + d\|z\| - z^*(z) \mid y \in X,\ z \in Z\} = +\infty$$

  olur.

- $x \in S$ ve $(z^*, d) \in Z^* \times \mathbb{R}_+$ olsun.

$$\begin{aligned}
&\inf\{\varphi_{FL}(x,y,z) - y^*(y) + d\|y\| + d\|z\| - z^*(z) \mid y \in X,\ z \in Z\} \\
&= \inf_{\substack{(x,y,z)\in S\times X\times Z \\ g(x)\leq_K z}} \{f(x+y) - y^*(y) + d\|y\| + d\|z\| - z^*(z)\}
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte $x + y = r$ ve $z - g(x) = s \in K$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\inf\{\varphi_{FL}(x,y,z) - y^*(y) + d\|y\| + d\|z\| - z^*(z) \mid y \in X,\ z \in Z\} \\
&= \inf_{\substack{r\in X \\ (x,s)\in S\times K}} \{f(r) - y^*(r) + y^*(x) + d\|r - x\| + d\|g(x) + s\| - z^*(g(x)) - z^*(s)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Zayıf Fenchel-Lagrange dual problem oluşturmak için kullanılan yöntem uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\inf\{\varphi_{FL}(x,y,z) - y^*(y) + d\|y\| + d\|z\| - z^*(z) \mid y \in X,\ z \in Z\} \\
&= \begin{cases} d\|x\| + y^*(x) - f^w(x, y^*, d) - z^*(g(x)) + \tau(g(x), z^*, d) &, \quad (z^*, d) \in V \\ -\infty &, \quad (z^*, d) \notin V \end{cases}
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla istenilen eşitsizlik $x \in S$ olması durumunda da sağlanır.

$\square$

Teorem 2.5.4, (P) probleminin φ_{FL}'ye göre kararlılık koşulu altında güçlü dualliğin sağlanacağını göstermektedir.

Teorem 2.5.4. *(P) problemi φ_{FL} sarsım fonksiyonuna göre kararlı ise $\mathrm{Inf}(P) = \mathrm{Sup}(D^w_{FL})$'dir, bu değer sonludur ve ϕ'nin $(0,0)$ noktasındaki her bir zayıf subgradienti (D^w_{FL}) probleminin bir çözümüdür. Tersine, $\mathrm{Inf}(P) = \mathrm{Sup}(D^w_{FL})$ ve bu değer sonlu ise (D^w_{FL}) probleminin her çözümü ϕ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki bir zayıf subgradientidir.*

Kanıt. (P) problemi φ_{FL}'ye göre kararlı olsun. Bu durumda $\phi(0,0)$ sonlu ve $\partial^w\phi(0,0) \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $\exists\ (y^*, z^*, d) \in \partial^w\phi(0,0)$ vardır. Zayıf subdiferansiyelin tanımından $\forall\ (y,z) \in X \times Z$ için

$$\phi(0,0) \leq \phi(y,z) + d\|y\| + d\|z\| - y^*(y) - z^*(z)$$

olur. Buradan $\forall\ (y,z) \in X \times Z$için

$$\begin{aligned}
\mathrm{Inf}(P) &= \phi(0,0) \\
&\leq \inf_{x\in X}\{\varphi_{FL}(x,y,z) + d\|y\| + d\|z\| - y^*(y) - z^*(z)\}
\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\mathrm{Inf}(P) \leq \inf_{x\in X} \inf_{(y,z)\in X\times Z} \{\varphi_{FL}(x,y,z) + d\|y\| + d\|z\| - y^*(y) - z^*(z)\} \quad (2.13)$$

elde edilir. $\mathrm{Inf}(P)$ sonlu olduğundan, (2.13) eşitsizliğinden ve Yardımcı Teorem 2.5.3'deki eşitlikten dolayı $(z^*, d) \in V$ ve $x \in S$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathrm{Inf}(P) &\leq \inf_{x\in S}\{d\|x\| + y^*(x) - f^w(x, y^*, d) - z^*(g(x)) + \tau(g(x), z^*, t)\} \\ &\leq \mathrm{Sup}(D^w_{FL}) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\mathrm{Inf}(P) = \mathrm{Sup}(D^w_{FL})$ eşitliği elde edilir.

Tersine $\mathrm{Inf}(P) = \mathrm{Sup}(D^w_{FL})$ ve bu değer sonlu olsun. (D^w_{FL}) probleminin bir $(y^*, z^*, d) \in X^* \times V$ çözümünü alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \phi(0,0) &= \mathrm{Inf}(P) \\ &= \mathrm{Sup}(D^w_{FL}) \\ &= \inf_{x\in S}\{y^*(x) + d\|x\| - f^w(x, y^*, d) - z^*(g(x)) + \tau(g(x), z^*, d)\} \\ &= -\sup_{x\in S}\{-y^*(x) - d\|x\| + f^w(x, y^*, d) + z^*(g(x)) - \tau(g(x), z^*, d)\} \\ &= -\phi^w(0, y^*, d, 0, z^*, d). \end{aligned}$$

olur. O halde Teorem 2.1.9'dan $(y^*, z^*, d) \in \partial^w\phi(0,0)$ elde edilir. □

(P) probleminin φ_{FL}'ye göre kararlılığını verecek teoremlerden önce aşağıdaki üç kabulü verelim.

Kabul D. $\exists\ L > 0$ sayısı, $(0,0)$'ın bir $N(0,0) \subseteq X \times Z$ komşuluğu ve $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists\ x(\varepsilon) \in X$ elemanı her $x \in X$ ve her $(y,z) \in N(0,0)$ için

$$\varphi_{FL}(x,y,z) - \varphi_{FL}(x(\varepsilon), 0, 0) + \varepsilon \geq -L\|y\| - L\|z\| \quad (2.14)$$

olacak şekilde bulunsun.

Kabul E. $\exists\ L > 0$ sayısı ve $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists\ x(\varepsilon) \in X$ elemanı her $x,\ y \in X$ ve her $z \in Z$ için

$$\varphi_{FL}(x,y,z) - \varphi_{FL}(x(\varepsilon), 0, 0) + \varepsilon \geq -L\|y\| - L\|z\| \quad (2.15)$$

olacak şekilde bulunsun.

Kabul F. $\exists\ p \geq 0$ ve $q \in \mathbb{R}$ sayıları her $x,\ y \in X$ ve her $z \in Z$ için

$$\varphi_{FL}(x, y, z) \geq -p\|y\| - p\|z\| + q \tag{2.16}$$

olacak şekilde bulunsun.

Teorem 2.5.5. *(P) probleminin φ_{FL} sarsım fonksiyonuna göre kararlı olması için gerek ve yeter koşul (P)'nin aşikar olmayan problem olması, Kabul D ve Kabul F koşullarının sağlanmasıdır.*

Kanıt. Kanıtı Teorem 2.4.4'e benzer olarak yapılır. □

Teorem 2.5.6. *(P) probleminin φ_{FL} sarsım fonksiyonuna göre kararlı olması için gerek ve yeter koşul* Inf(P)*'nin sonlu olması ve Kabul E koşulunun sağlanmasıdır.*

Kanıt. Kanıtı Teorem 2.4.5'e benzer olarak yapılır. □

2.6 Dual Problemlerin Değerlerinin Karşılaştırılması

Bu bölümde, bu çalışmada oluşturulan zayıf Fenchel dual problem (D_F^w), zayıf Fenchel-Lagrange dual problem (D_{FL}^w) ve Azimov ve Gasimov'un oluşturdukları zayıf Lagrange dual probleminin (D_L^w) optimal değerleri karşılaştırılmıştır. Buna ek olarak (P) probleminin ve üç dual problemin optimal değerlerinin birbirine (P) probleminin φ_{FL} sarsım fonksiyonuna göre kararlı olduğu zaman eşit olduğu gösterilmiştir.

Önerme 2.6.1 zayıf Fenchel-Lagrange dual problemin optimal değerinin her zaman zayıf Lagrange dual problemin optimal değerinden küçük ya da eşit olduğunu göstermektdir.

Önerme 2.6.1. $\text{Sup}(D_{FL}^w) \leq \text{Sup}(D_L^w)$ *olur.*

Kanıt. Keyfi bir $(y^*, z^*, d) \in X^* \times V$ seçelim. $\forall\ x \in X$ için

$$\begin{aligned} f^w(x, y^*, d) &= \sup_{y \in X}\{y^*(y) - d\|y - x\| + d\|x\| - f(y)\} \\ &\geq y^*(x) + d\|x\| - f(x) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlik yardımıyla

$$
\begin{aligned}
&\inf_{x\in S}\{y^*(x)+d\|x\|-z^*(g(x))-f^w(x,y^*,d)+\tau(g(x),z^*,d)\}\\
&\le \inf_{x\in S}\{y^*(x)+d\|x\|-z^*(g(x))-y^*(x)-d\|x\|+f(x)+\tau(g(x),z^*,d)\}\\
&= \inf_{x\in S}\{f(x)-z^*(g(x))+\tau(g(x),z^*,d)\}\\
&\le \mathrm{Sup}(D_L^w)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $(y^*,z^*,d)\in X^*\times V$ keyfi bir eleman olduğundan

$$
\begin{aligned}
\sup(D_{FL}^w) &= \sup_{(y^*z^*,d)}\inf_{x\in S}\{y^*(x)+d\|x\|-z^*(g(x))-f^w(x,y^*,d)+\tau(g(x),z^*,d)\}\\
&\le \mathrm{Sup}(D_L^w)
\end{aligned}
$$

olur. □

Önerme 2.6.2 (D_{FL}^w) probleminin (D_F^w) probleminin optimal değerinden küçük ya da eşit olduğunu göstermektedir.

Önerme 2.6.2. $\mathrm{Sup}(D_{FL}^w)\le \mathrm{Sup}(D_F^w)$ *olur.*

Kanıt. Keyfi $x\in S$ ve keyfi bir $(y^*,z^*,d)\in X^*\times V$ alalım.

$$
\begin{aligned}
\tau(g(x),z^*,d)-z^*(g(x)) &= \sup\{te(g(x))\mid e\in B^* \text{ ve } de-z^*\in K^*\}-z^*(g(x))\\
&= \sup\{\underbrace{\underbrace{(de-z^*)}_{\in K^*}\underbrace{g(x)}_{\in -K}}_{\le 0}\mid e\in B^* \text{ ve } de-z^*\in K^*\}\\
&\le 0
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
&\inf_{x\in S}\{y^*(x)+d\|x\|-z^*(g(x))-f^w(x,y^*,d)+\tau(g(x),z^*,d)\}\\
&\le \inf_{x\in G}\{y^*(x)+d\|x\|-f^w(x,y^*,d)\}\\
&\le \sup_{(y^*,d)\in X^*\times\mathbb{R}_+}\inf_{x\in G}\{y^*(x)+d\|x\|-f^w(x,y^*,d)\}\\
&= \mathrm{Sup}(D_F^w)
\end{aligned}
$$

olur. Eşitsizliğin her iki tarafında $(y^*,z^*,d)\in X^*\times V$ üzerinden supremum alınırsa

$$\mathrm{Sup}(D_{FL}^w)\le \mathrm{Sup}(D_F^w)$$

elde edilir. □

Önerme 2.6.3 ve Önerme 2.6.4 asıl problem ve dual problemlerin optimal değerlerinin eşitliği için bir koşul vermektedir.

Önerme 2.6.3. *Kabul D ve Kabul F koşulları geçerli ve* (P) *problemi aşikar olmayan problem olsun. Bu durumda*

$$\mathrm{Sup}(D^w_{FL}) = \mathrm{Sup}(D^w_L) = \mathrm{Sup}(D^w_F) = \mathrm{Inf}(P)$$

olur.

Kanıt. Kabul D ve Kabul F koşulları geçerli ve (P) aşikar olmayan problem ise Teorem 2.5.5 gereği (P) problemi φ_{FL} sarsım fonksiyonuna göre kararlıdır. Dolayısıyla

$$\mathrm{Inf}(P) = \mathrm{Sup}(D^w_{FL}) \geq \mathrm{Sup}(D^w_F) \tag{2.17}$$

ve

$$\mathrm{Inf}(P) = \mathrm{Sup}(D^w_{FL}) \geq \mathrm{Sup}(D^w_L) \tag{2.18}$$

olur. Önerme 2.6.1 ve Önerme 2.6.2 yardımıyla da

$$\mathrm{Sup}(D^w_{FL}) = \mathrm{Sup}(D^w_L) = \mathrm{Sup}(D^w_F) = \mathrm{Inf}(P)$$

elde edilir. □

Önerme 2.6.4. *Kabul E sağlansın ve* $\mathrm{Inf}(P)$ *sonlu olsun. Bu durumda*

$$\mathrm{Sup}(D^w_{FL}) = \mathrm{Sup}(D^w_L) = \mathrm{Sup}(D^w_F) = \mathrm{Inf}(P)$$

olur.

Kanıt. Kabul E sağlandığından ve $\mathrm{Inf}(P)$ sonlu olduğundan Teorem 2.5.6 gereği (P) problemi φ_{FL} fonksiyonuna göre kararlıdır. O halde Önerme 2.6.1 ve Önerme 2.6.2'deki eşitsizliklerden ve (P) probleminin φ_{FL}'ye göre kararlılığından

$$\mathrm{Sup}(D^w_{FL}) = \mathrm{Sup}(D^w_L) = \mathrm{Sup}(D^w_F) = \mathrm{Inf}(P)$$

elde edilir. □

2.7 Optimallik Koşulları

Bu kesimde zayıf Fenchel (D_F^w) ve zayıf Fenchel-Lagrange dual (D_{FL}^w) problemleri için optimallik koşulları verilmiştir.

Teorem 2.7.1. *(P) problemi φ_F fonksiyonuna göre kararlı olsun. Bu durumda*

a) $\bar{x}$, (P) probleminin bir çözümü ise (D_F^w) probleminin

(i) $f(\bar{x}) = \inf\limits_{x \in G} \{y_0^*(x) + d_0\|x\| - f^w(x, y_0^*, d_0)\}$

(ii) $(y_0^*, d_0) \in \partial^w f(\bar{x})$

olacak şekilde $\exists\ (y_0^*, d_0) \in X^* \times \mathbb{R}_+$ çözümü vardır.

b) Tersine $\bar{x} \in G$ ve $(y_0^*, d_0) \in X^* \times \mathbb{R}_+$ elemanları (i) koşulunu sağlıyorlarsa $\bar{x}$ (P) probleminin (y_0^*, d_0) da (D_F^w) probleminin bir çözümüdür.

Kanıt. a) (P) problemi kararlı ve $\bar{x}$, (P) probleminin bir çözümü olsun. (P) problemi kararlı olduğundan $\mathrm{Inf}(P) = \mathrm{Sup}(D_F^w)$ ve bu değer sonlu olur. O halde (D_F^w) probleminin en az bir $(y_0^*, d_0) \in X^* \times \mathbb{R}_+$ çözümü vardır. Bu çözümün (i) ve (ii)'yi sağladığını gösterelim.

$\mathrm{Inf}(P) = \mathrm{Sup}(D_F^w)$ olduğundan $f(\bar{x}) = \inf\limits_{x \in G} \{y_0^*(x) + d_0\|x\| - f^w(x, y_0^*, d_0)\}$ olur. Böylece (i) durumu sağlanır.

Öte yandan

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \inf_{x \in G} \{y_0^*(x) + d_0\|x\| - f^w(x, y_0^*, d_0)\} \\ &\leq y_0^*(\bar{x}) + d_0\|\bar{x}\| - f^w(\bar{x}, y_0^*, d_0) \end{aligned} \tag{2.19}$$

dır.

$$f(\bar{x}) \geq y_0^*(\bar{x}) + d_0\|\bar{x}\| - f^w(\bar{x}, y_0^*, d_0) \tag{2.20}$$

olduğunu biliyoruz. O halde (2.19) ve (2.20)'den

$$f(\bar{x}) = y_0^*(\bar{x}) + d_0\|\bar{x}\| - f^w(\bar{x}, y_0^*, d_0)$$

elde edilir. Bu $(y_0^*, d_0) \in \partial^w f(\bar{x})$ olması demektir. O halde (ii) de sağlanır.

b) (i) sağlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}\operatorname{Inf}(P) &\leq f(\bar{x}) \\ &= \inf_{x\in G}\{y_0^*(x)+d_0\|x\|-f^w(x,y_0^*,d_0)\} \\ &\leq \sup_{(y^*,d)\in X^*\times\mathbb{R}_+}\inf_{x\in G}\{y^*(x)+d\|x\|-f^w(x,y^*,d)\} \\ &= \operatorname{Sup}(D_F^w)\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\operatorname{Inf}(P)=\operatorname{Sup}(D_F^w)=f(\bar{x})=\inf_{x\in G}\{y_0^*(x)+d_0\|x\|-f^w(x,y_0^*,d_0)\}$$

elde edilir. Yani $\bar{x}$, (P) probleminin (y_0^*,d_0) da (D_F^w) probleminin bir çözümüdür.

□

(P) probleminin $\varphi_F(\cdot)$ fonksiyonuna göre kararlılık koşulları altında da Teorem 2.7.1 geçerli olur.

Sonuç 2.7.2. *(P) aşikar olmayan problem olsun, Kabul A ve Kabul C sağlansın. Bu durumda*

a) $\bar{x}$, (P) probleminin bir çözümü ise (D_F^w) probleminin

(i) $f(\bar{x})=\inf_{x\in G}\{y_0^*(x)+d_0\|x\|-f^w(x,y_0^*,d_0)\}$

(ii) $(y_0^*,d_0)\in\partial^w f(\bar{x})$

olacak biçimde $\exists\ (y_0^*,d_0)\in X^*\times\mathbb{R}_+$ çözümü vardır.

b) Tersine $\bar{x}\in G$ ve $(y_0^*,d_0)\in X^*\times\mathbb{R}_+$ elemanları (i) koşulunu sağlıyorlarsa $\bar{x}$ (P) probleminin (y_0^*,d_0) da (D_F^w) probleminin bir çözümüdür.

Kanıt. (P) aşikar olmayan problem iken ve Kabul A, Kabul C koşulları sağlandığında (P) problemi kararlı olduğundan Teorem 2.7.1'in koşulu sağlanır. O halde sonuç ispatlanmış olur. □

Sonuç 2.7.3. *Kabul B sağlansın ve* $\operatorname{Inf}(P)$ *sonlu olsun. Bu durumda*

a) $\bar{x}$, (P) probleminin bir çözümü ise (D_F^w) probleminin *(i)* $f(\bar{x}) = \inf\limits_{x\in G}\{y_0^*(x) + d_0\|x\| - f^w(x, y_0^*, d_0)\}$

(ii) $(y_0^*, d_0) \in \partial^w f(\bar{x})$

koşullarını sağlayan $\exists\ (y_0^*, d_0) \in X^* \times \mathbb{R}_+$ *çözümü vardır.*

b) Tersine $\bar{x} \in G$ *ve* $(y_0^*, d_0) \in X^* \times \mathbb{R}_+$ *elemanları (i) koşulunu sağlıyorlarsa* $\bar{x}$ (P) *probleminin* (y_0^*, d_0) *da* (D_F^w) *probleminin bir çözümüdür.*

Kanıt. $\text{Inf}(P)$ sonlu ve Kabul B geçerli olduğunda (P) problemi kararlıdır. O halde Teorem 2.7.1'in koşulu sağlanmış olur. □

Teorem 2.7.4. *a)* (P) *problemi* φ_{FL} *fonksiyonuna göre kararlı olsun. Bu durumda* $\bar{x}$, (P) *probleminin bir çözümü ise* (D_{FL}^w) *probleminin*

(i) $f(\bar{x}) = \inf\limits_{x\in S}\{y_0^*(x) + d_0\|x\| - z_0^*(g(x)) - f^w(x, y_0^*, d_0) + \tau(g(x), z_0^*, d_0)\}$

(ii) $(y_0^*, d_0) \in \partial^w f(\bar{x})$

(iii) $\tau(g(\bar{x}), z_0^*, d_0) = z_0^*(g(\bar{x}))$

koşullarını sağlayan en az bir $(y_0^*, z_0^*, d_0) \in X^* \times V$ *çözümü vardır.*

b) Tersine $\bar{x} \in G$ *ve* $(y_0^*, z_0^*, d_0) \in X^* \times V$ *(i) koşulunu sağlıyorlarsa* $\bar{x}$ *ve* (y_0^*, z_0^*, d_0) *noktaları sırasıyla* (P) *ve* (D_{FL}^w) *problemlerinin çözümleridir.*

Kanıt. a) (P) problemi kararlı olduğundan $\text{Inf}(P) = \text{Sup}(D_{FL}^w)$'dir ve (D_{FL}^w) probleminin en az bir (y_0^*, z_0^*, d_0) çözümü vardır. $\bar{x}$ ve (y_0^*, z_0^*, d_0) noktalarının (i), (ii) ve (iii)'ü sağladıklarını gösterelim.

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) = \text{Inf}(P) &= \text{Sup}(D_{FL}^w) \\ &= \inf_{x\in S}\{y_0^*(x) + d_0\|x\| - z_0^*(g(x)) \\ &\quad - f^w(x, y_0^*, d_0) + \tau(g(x), z_0^*, d_0)\} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla (i) durumu sağlanmış olur.

$\tau(g(\bar{x}), z_0^*, d_0) - z_0^*(g(\bar{x})) \leq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \inf_{x\in S}\{y_0^*(x) + d_0\|x\| - z_0^*(g(x)) - f^w(x, y_0^*, d_0) + \tau(g(x), z_0^*, d_0)\} \\ &\leq y_0^*(\bar{x}) + d_0\|\bar{x}\| - f^w(\bar{x}, y_0^*, d_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $f(\bar{x}) + f^w(\bar{x}, y_0^*, d_0) = y_0^*(\bar{x}) + d_0\|\bar{x}\|$ ve dolayısıyla $(y_0^*, d_0) \in \partial^w f(\bar{x})$ olur. Böylece (ii) durumu da sağlanmış olur.

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \inf_{x\in S}\{y_0^*(x) + d_0\|x\| - z_0^*(g(x)) - f^w(x, y_0^*, d_0) + \tau(g(x), z_0^*, d_0)\} \\ &\leq y_0^*(\bar{x}) + d_0\|\bar{x}\| - z_0^*(g(\bar{x})) - f^w(\bar{x}, y_0^*, d_0) + \tau(g(\bar{x}), z_0^*, d_0) \\ &\leq f(\bar{x}) - z_0^*(g(\bar{x})) + \tau(g(\bar{x}), z_0^*, d_0) \end{aligned}$$

olduğundan $0 \leq \tau(g(\bar{x}), z_0^*, d_0) - z_0^*(g(\bar{x}))$ olur.

$\tau(g(\bar{x}), z_0^*, d_0) - z_0^*(g(\bar{x})) \leq 0$ olduğunu biliyoruz. O halde bu iki eşitsizlikten $\tau(g(\bar{x}), z_0^*, d_0) = z_0^*(g(\bar{x}))$ elde edilir. Dolayısıyla (iii) de sağlanır.

b) Kanıtı açıktır.

□

(P) probleminin φ_{FL} fonksiyonuna göre kararlılık koşulları altında da Teorem 2.7.4 geçerli olur.

Sonuç 2.7.5. *Kabul D, Kabul F sağlansın ve (P) aşikar olmayan problem olsun. Bu durumda*

a) $\bar{x}$, (P) probleminin bir çözümü ise (D_{FL}^w) probleminin

(i) $f(\bar{x}) = \inf_{x\in S}\{y_0^*(x) + d_0\|x\| - z_0^*(g(x)) - f^w(x, y_0^*, d_0) + \tau(g(x), z_0^*, d_0)\}$

(ii) $(y_0^*, d_0) \in \partial^w f(\bar{x})$

(iii) $\tau(g(\bar{x}), z_0^*, d_0) = z_0^*(g(\bar{x}))$

olacak biçimde en az bir $(y_0^*, z_0^*, d_0) \in X^* \times V$ çözümü vardır.

b) Tersine $\bar{x} \in G$ ve $(y_0^*, z_0^*, d_0) \in X^* \times V$ (i) koşulunu sağlıyorlarsa $\bar{x}$ ve (y_0^*, z_0^*, d_0) noktaları sırasıyla (P) ve (D_{FL}^w) problemlerinin çözümleridir.

Kanıt. Kabul D, Kabul F sağlandığından ve (P) aşikar olmayan problem olduğundan (P) problemi φ_{FL}'ye göre kararlıdır. Dolayısıyla Teorem 2.7.4'ün koşulu sağlanmış olur. □

Sonuç 2.7.6. *Kabul E sağlansın ve* Inf(P) *sonlu olsun. Bu durumda*

a) $\bar{x}$, (P) probleminin bir çözümü ise (D_{FL}^w) probleminin *(i)* $f(\bar{x}) = \inf\limits_{x \in S} \{y_0^*(x) + d_0\|x\| - z_0^*(g(x)) - f^w(x, y_0^*, d_0) + \tau(g(x), z_0^*, d_0)\}$

(ii) $(y_0^*, d_0) \in \partial^w f(\bar{x})$

(iii) $\tau(g(\bar{x}), z_0^*, d_0) = z_0^*(g(\bar{x}))$

koşullarını sağlayan en az bir $(y_0^*, z_0^*, d_0) \in X^* \times V$ *çözümü vardır.*

b) Tersine $\bar{x} \in G$ *ve* $(y_0^*, z_0^*, d_0) \in X^* \times V$ *(i) koşulunu sağlıyorlarsa* $\bar{x}$ *ve* (y_0^*, z_0^*, d_0) *noktaları sırasıyla* (P) *ve* (D_{FL}^w) *problemlerinin çözümleridir.*

Kanıt. Kabul E sağlandığından ve $\mathrm{Inf}(P)$ sonlu olduğundan (P) problemi (D_{FL}^w) problemine göre kararlıdır. Dolayısıyla Teorem 2.7.4'ün hipotezi sağlanmış olur. □

3 KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN ZAYIF EŞLENİK DÖNÜŞÜMLERİ, ZAYIF SUBDİFERANSİYEL ve VEKTÖR OPTİMİZASYONDA ZAYIF EŞLENİK DUALLİK

Bu bölümde verilen bir vektör optimizasyon probleminin dual problemini oluşturmak için kullanılacak olan küme değerli dönüşümlerin zayıf eşlenik dönüşümleri ve zayıf subdiferansiyel kavramları tanımlanmış, daha sonra bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Vektör değerli fonksiyonlar küme değerli dönüşümlerin özel halleri olduklarından verilen tanımların hepsi vektör değerli fonksiyonlar için de geçerlidir. Bu yüzden bu kavramlar bir vektör optimizasyon probleminin dual problemini oluşturmak için de kullanılabilir.

3.1 Küme Değerli Dönüşümlerin Zayıf Eşlenik Dönüşümleri

Bu kısımda, kümeler için supremum, infimum ve vektörel norm kavramları kullanılarak, küme değerli dönüşümlerin zayıf eşlenik ve zayıf bieşlenik dönüşümleri verilmiş ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Skaler fonksiyonlar için tanımlanan zayıf eşlenik dönüşümler için bilinen önemli eşitlik ve eşitsizliklerin genellemeleri elde edilmiştir.

Yukarıda bahsedilen tanımların verilebilmesi için kısmi sıralı bir topolojik vektör uzayında, verilen bir kümenin zayıf minimumu, zayıf maksimumu, supremumu, infimumu ve vektörel norm kavramlarına ve bu kavramlarla ilgili özelliklere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle ilk olarak bu kavramların tanımları, küme değerli dönüşümler ve bu kümeler arasındaki ilişkiler verilecektir.

Y gerçel topolojik vektör uzayı, Y, C kapalı, konveks, sivri ve $intC \neq \emptyset$ olan C konisi ile kısmi sıralı olsun. Bu koni ile "$\underset{C}{\leq}$" kısmi sıralaması

$$y_1 \underset{C}{\leqq} y_2 \iff y_2 - y_1 \in C \; ve \; y_1 \underset{C}{<} y_2 \iff y_2 - y_1 \in intC$$

olarak tanımlanır. Y uzayına $+\infty$, $-\infty$ noktalarını ekleyerek oluşturulan genişletilmiş uzayı $\overline{Y}$ ile gösterilir. Bu iki noktanın $\forall \; y \in Y$ için

$$-\infty \underset{C}{<} y \underset{C}{<} +\infty, \qquad (\pm\infty) + y = y + (\pm\infty) = (\pm\infty)$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty), \qquad \forall\ \lambda > 0 \text{ için } \lambda(\pm\infty) = (\pm\infty)$$

ve

$$\forall\ \lambda < 0 \text{ için } \lambda(\pm\infty) = (\mp\infty)$$

özelliklerini sağladığı varsayılacaktır. Ek olarak $+\infty - \infty$ durumu gözardı edilecektir.

Tanım 3.1.1. *[33] $Z \subset \overline{Y}$ kümesi verilsin.*

$$A(Z) = \{y \in \overline{Y} \mid \exists\ y' \in Z \textit{ için } y \underset{C}{>} y'\}$$

kümesine Z kümesinin üst noktaları kümesi,

$$B(Z) = \{y \in \overline{Y} \mid \exists\ y' \in Z \textit{ için } y \underset{C}{<} y'\}$$

kümesine de Z kümesinin alt noktaları kümesi adı verilir.

Uyarı 3.1.2. *[33] $A(Z) \subset Y \cup \{+\infty\}$, $B(Z) \subset Y \cup \{-\infty\}$ ve $B(Z) = -A(-Z)$ olduğu açıktır.*

Tanım 3.1.3. *[33] $Z \subset \overline{Y}$ kümesi ve $\bar{y} \in \overline{Y}$ noktası verilsin.*

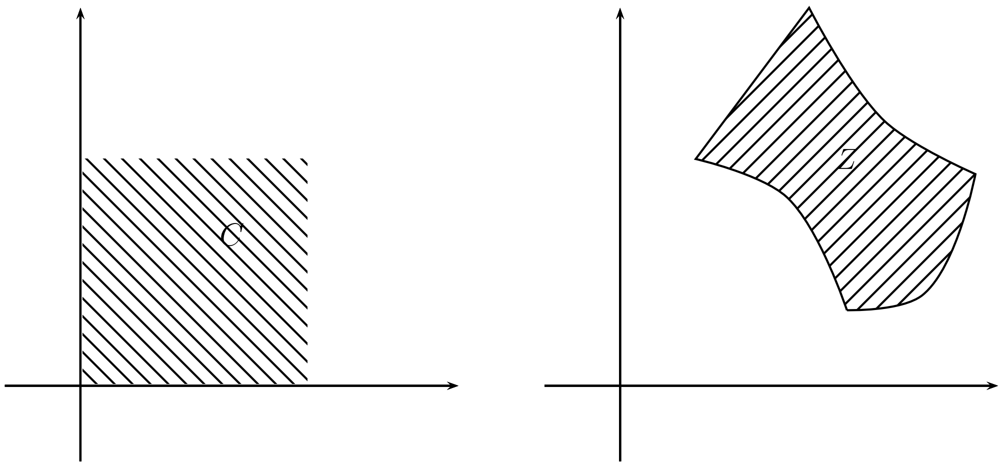
i) *$\bar{y} \in Z$ ve $\bar{y} \underset{C}{<} y'$ olacak şekilde hiçbir $y' \in Z$ yoksa $\bar{y}$ noktasına Z kümesinin zayıf maksimal elemanı denir. Z kümesinin tüm zayıf maksimal elemanlarının oluşturduğu kümeye Z kümesinin zayıf maksimumu denir ve* $\mathrm{wmaks}Z$ *ile gösterilir.*

ii) *$\bar{y} \in Z$ ve $y' \underset{C}{<} \bar{y}$ olacak şekilde hiçbir $y' \in Z$ yoksa $\bar{y}$ noktasına Z kümesinin zayıf minimal elemanı denir. Z kümesinin tüm zayıf minimal elemanlarının oluşturduğu kümeye Z kümesinin zayıf minimumu denir ve* $\mathrm{wmin}Z$ *ile gösterilir.*

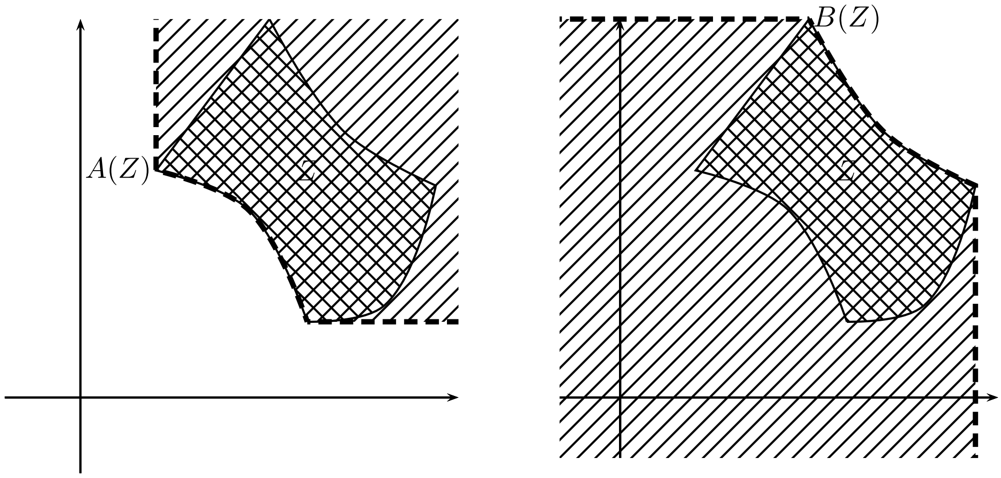
iii) *$\bar{y} \notin B(Z)$ ve $B(\bar{y}) \subset B(Z)$ yani , $\bar{y} \underset{C}{<} y$ olacak şekilde hiçbir $y \in Z$ yoksa ve $y' \underset{C}{<} \bar{y}$ iken $y' \underset{C}{<} y$ olacak şekilde $\exists\ y \in Z$ varsa $\bar{y}$ noktasına Z kümesinin bir supremal elemanı denir. Z kümesinin tüm supremal elamanlarının kümesine Z'nin supremumu denir ve* $\mathrm{Sup}Z$ *ile gösterilir.*

iv) $\bar{y} \notin A(Z)$ *ve* $A(\bar{y}) \subset A(Z)$ *yani ,* $y \underset{C}{<} \bar{y}$ *olacak şekilde hiçbir* $y \in Z$ *yoksa ve* $\bar{y} \underset{C}{<} y'$ *iken* $y \underset{C}{<} y'$ *olacak şekilde* $\exists\, y \in Z$ *varsa* $\bar{y}$ *noktasına* Z *kümesinin bir infimal elemanı denir.* Z *kümesinin tüm infimal elamanlarının kümesine* Z*'nin infimumu denir ve* $\mathrm{Inf} Z$ *ile gösterilir.*

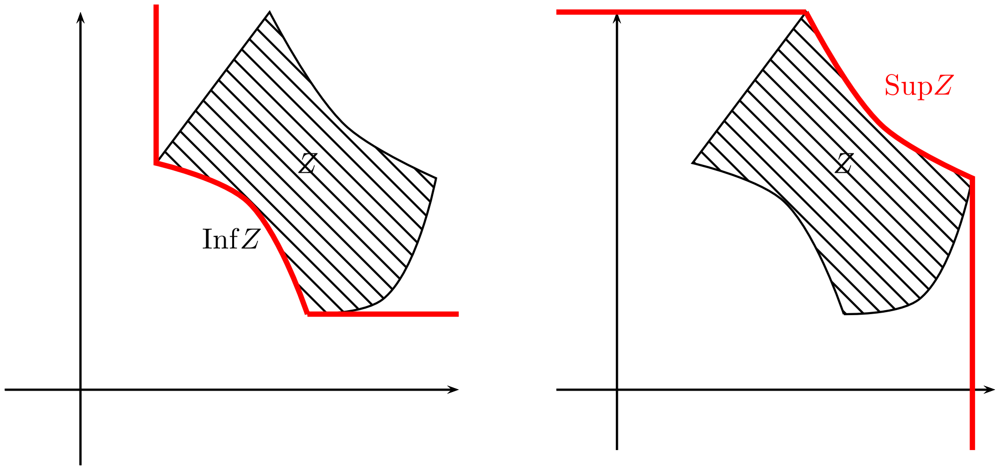
Örnek 3.1.4. $Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$ *ve* Z *kümesi Şekil 3.3'deki gibi olsun. Bu durumda* Z *kümesinin alt noktaları ve üst noktaları kümeleri Şekil 3.4'de ve infimumu ve supremumu ise Şekil 3.5'de gösterilmiştir.*



Şekil 3.3: $\mathbb{R}^2$'de verilen bir sıralama konisi ($\mathbb{R}^2_+$) ve Z kümesi



Şekil 3.4: Z kümesinin üst noktaları ve alt noktaları kümesi



Şekil 3.5: Z kümesinin infimum ve supremum kümeleri

Uyarı 3.1.5. *[33]*

i) $\text{wmaks}\,\emptyset = \emptyset$ *ve* $\text{Sup}\,\emptyset = \{-\infty\}$

ii) $-\text{wmaks}(-Z) = \text{wmin}Z, \;\; -\text{Sup}(-Z) = \text{Inf}Z$

olur.

Yardımcı Teorem 3.1.6, $\mathbb{R}$'de supremum ve infimum kavramları için verilen karakterizasyonların herhangi bir kısmi sıralı topolojik vektör uzayındaki supremum ve infimum kavramları için de geçerli olduğunu göstermektedir.

Yardımcı Teorem 3.1.6. *Y gerçel normlu uzayı C kapalı, sivri, konveks ve $intC \neq \emptyset$ olan C konisi ile kısmi sıralı olsun, $\emptyset \neq Z \subset Y$ kümesi ve $\bar{x} \in Y$ noktası verilsin. Bu durumda*

i) $\bar{x} \in \text{Inf}Z$ *olması için gerek ve yeter koşul* $z \underset{C}{<} \bar{x}$ *olacak şekilde hiçbir* $z \in Z$ *olmaması ve* $\forall\, \varepsilon \in intC$ *için* $x(\varepsilon) \underset{C}{<} \bar{x}+\varepsilon$ *olacak şekilde* $\exists\, x(\varepsilon) \in Z$ *olmasıdır.*

ii) $\bar{x} \in \text{Sup}Z$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\bar{x} \underset{C}{<} z$ *olacak şekilde hiçbir* $z \in Z$ *olmaması ve* $\forall\, \varepsilon \in intC$ *için* $\bar{x}-\varepsilon \underset{C}{<} x(\varepsilon)$ *olacak şekilde* $\exists\, x(\varepsilon) \in Z$ *olmasıdır.*

Önerme 3.1.7. *[33] $Z \subset \overline{Y}$ kümesi verilsin. Bu durumda*

$$\mathrm{wmaks}Z = Z \cap \mathrm{Sup}Z \text{ ve } \mathrm{wmin}Z = Z \cap \mathrm{Inf}Z$$

olur.

Önerme 3.1.8. *[33] $Z \subset \overline{Y}$ kümesi verilsin. Bu durumda*

i) $\mathrm{Sup}Z = \{-\infty\}$ *olması için gerek ve yeter koşul $B(Z) = \emptyset$ olmasıdır. Bu durum ise sadece $Z = \emptyset$ ya da $Z = \{-\infty\}$ olması durumunda mümkündür.*

ii) $\mathrm{Sup}Z = \{+\infty\}$ *olması için gerek ve yeter koşul $B(Z) = Y \cup \{+\infty\}$ olmasıdır.*

iii) Yukarıdaki durumlar haricinde $\mathrm{Sup}Z \subset Y$ *olur.*

Uyarı 3.1.9. *[33] $Z \subset \overline{Y}$ kümesi verilsin. $B(Z)$ kümesinin $\overline{Y}$ içindeki kapanışı Tanino tarafından*

$$cl(B(Z)) = \begin{cases} \{-\infty\} & , \quad B(Z) = \emptyset \\ \overline{Y} & , \quad B(Z) = Y \cup \{-\infty\} \\ cl(B(Z) \cap Y) \cup \{-\infty\} & , \quad d.d. \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır.

Önerme 3.1.10. *[33] $Z \subset \overline{Y}$ kümesi verilsin. Bu durumda*

$$\mathrm{Sup}Z = [clB(Z)] \backslash B(Z) = \mathrm{wmaks}[clB(Z)] \text{ olur.}$$

Önerme 3.1.11. *[33] $Z \subset \overline{Y}$ kümesi verilsin. Bu durumda $B(Z) = B(\mathrm{Sup}Z)$ ve $A(Z) = A(\mathrm{Inf}Z)$ olur.*

Önerme 3.1.12. *[33] $Z \subset \overline{Y}$ kümesi verilsin. Bu durumda*

$$Z \subset clB(Z) = \mathrm{Sup}Z \cup B(Z) = \mathrm{Sup}Z \cup B(\mathrm{Sup}Z) \text{ olur.}$$

Yardımcı Teorem 3.1.13 genişletilmiş uzayın, bir kümenin supremumu ve supremumunun alt ve üst kümelerinin birleşimi şeklinde yazılabildiğini söylemektedir.

Yardımcı Teorem 3.1.13. *[33] $Z \subset \overline{Y}$ kümesi verilsin. Bu durumda*

$$\overline{Y} = \text{Sup}Z \cup A(\text{Sup}Z) \cup B(\text{Sup}Z)$$

olur ve birleşime giren üç küme de ayrıktırlar.

Önerme 3.1.14 ve Sonuç 3.1.15 küme değerli dönüşümlerin supremumları arasındaki ilişkileri vermektedir.

Önerme 3.1.14. *[33] X herhangibir uzay, $F_1, F_2 : X \rightrightarrows \overline{Y}$ küme değerli dönüşüm olsunlar. Bu durumda*

$$\text{Sup} \bigcup_{x \in X} [F_1(x) + F_2(x)] = \text{Sup} \bigcup_{x \in X} [F_1(x) + \text{Sup}F_2(x)]$$

olur. Burada $+\infty - \infty$ durumu göz ardı edilmiştir.

Sonuç 3.1.15. *[33] X herhangibir uzay, $F : X \rightrightarrows \overline{Y}$ küme değerli dönüşümü verilsin. Bu durumda*

$$\text{Sup} \bigcup_{x \in X} F(x) = \text{Sup} \bigcup_{x \in X} \text{Sup}F(x)$$

olur.

Sonuç 3.1.16. *[33] $Z \subset \overline{Y}$ kümesi verilsin. Bu durumda* $\text{Sup}(\text{Sup}Z) = \text{Sup}Z$ *olur.*

Yardımcı Teorem 3.1.17 ve Yardımcı Teorem 3.1.18 bir küme değerli dönüşümün zayıf bieşlenik dönüşümünün daha sade bir ifadesini verebilmek için kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 3.1.17. *Y topolojik vektör uzayı, Y, kapalı, konveks, sivri ve $\text{int}C \neq \emptyset$ olan C konisi ile kısmi sıralı olsun. $D, E \subset Y$ kümeleri için*

$$\text{Sup}E \subseteq \text{Sup}D \cup A(\text{Sup}D) \tag{3.1}$$

$$\text{Sup}E \subseteq \text{Sup}D \cup B(\text{Sup}D) \tag{3.2}$$

ise $\text{Sup}D = \text{Sup}E$*'dir.*

Kanıt. (3.1), (3.2)'den ve $A(\mathrm{Sup}D) \cap B(\mathrm{Sup}D) = \emptyset$ olduğundan

$$\begin{aligned}\mathrm{Sup}E &\subseteq (\mathrm{Sup}D \cup A(\mathrm{Sup}D)) \cap (\mathrm{Sup}D \cup B(\mathrm{Sup}D)) \\ &= \mathrm{Sup}D \cup \emptyset \\ &= \mathrm{Sup}D \qquad (3.3)\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\mathrm{Sup}D \subseteq \mathrm{Sup}E$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $\exists\ \bar{y} \in \mathrm{Sup}D$ için $\bar{y} \notin \mathrm{Sup}E$ olsun. Bu durumda $\bar{y} \in A(\mathrm{Sup}E)$ ya da $\bar{y} \in B(\mathrm{Sup}E)$ olmalıdır. $\bar{y} \notin B(\mathrm{Sup}E)$'dir. Çünkü $\bar{y} \in B(\mathrm{Sup}E)$ olsaydı $\exists\ a \in SupE$ için $\bar{y} \underset{C}{<} a$ olurdu. $a \in \mathrm{Sup}E$ ve $\mathrm{Sup}E \subseteq SupD$ olduğundan $\bar{y} \in B(\mathrm{Sup}D)$ olur. Bu $\bar{y} \in \mathrm{Sup}D$ oluşu ile çelişir. O halde $\bar{y} \in A(\mathrm{Sup}E)$ olmalıdır. Dolayısıyla $a \underset{C}{<} \bar{y}$ olacak şekilde $\exists\ a \in \mathrm{Sup}E$ vardır. $a \in \mathrm{Sup}E$ ve $\mathrm{Sup}E \subseteq \mathrm{Sup}D$ olduğundan $a \in \mathrm{Sup}D$'dir. Buradan $\bar{y} \in A(\mathrm{Sup}D)$ elde edilir. Bu ise $\bar{y} \in \mathrm{Sup}D$ oluşu ile çelişir. O halde $\bar{y} \in \mathrm{Sup}E$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$\mathrm{Sup}D \subseteq \mathrm{Sup}E \qquad (3.4)$$

olur. (3.3) ve (3.4)'den $\mathrm{Sup}D = \mathrm{Sup}E$ elde edilir. □

Yardımcı Teorem 3.1.18. *X, Y, Z topolojik vektör uzayları, Y, kapalı, konveks, sivri ve $intC \neq \emptyset$ olan C konisi ile kısmi sıralı olsun. $F : X \rightrightarrows \overline{Y}$ küme değerli dönüşümü, $a, b : Z \times X \to \overline{Y}$ fonksiyonları verilsin. $\forall\ z \in Z$ ve $\forall\ x \in X$ için*

$$a(z,x) \underset{C}{\leq} b(z,x)$$

ise

$$\begin{aligned}\mathrm{Sup}\bigcup_{z\in Z}\mathrm{Inf}\bigcup_{x\in X}[b(z,x)+F(x)] \subset\ & \mathrm{Sup}\bigcup_{z\in Z}\mathrm{Inf}\bigcup_{x\in X}[a(z,x)+F(x)] \cup \\ & A(\mathrm{Sup}\bigcup_{z\in Z}\mathrm{Inf}\bigcup_{x\in X}[a(z,x)+F(x)])\end{aligned}$$

olur.

Kanıt. Varsayalım ki $\exists\ \bar{y} \in \mathrm{Sup}\bigcup_{z\in Z}\mathrm{Inf}\bigcup_{x\in X}[b(z,x)+F(x)]$ için $\bar{y} \notin \mathrm{Sup}\bigcup_{z\in Z}\mathrm{Inf}\bigcup_{x\in X}[a(z,x)+F(x)] \cup A(\mathrm{Sup}\bigcup_{z\in Z}\mathrm{Inf}\bigcup_{x\in X}[a(z,x)+F(x)])$ olsun.

O halde Yardımcı Teorem 3.1.13'den

$$\bar{y} \in B(\mathrm{Sup} \bigcup_{z\in Z} \mathrm{Inf} \bigcup_{x\in X} [a(z,x) + F(x)]) = B(\bigcup_{z\in Z} \mathrm{Inf} \bigcup_{x\in X} [a(z,x) + F(x)])$$

olmalıdır. Dolayısıyla $\exists\ \bar{z} \in Z$ ve $\exists\ y \in \mathrm{Inf} \bigcup_{x\in X} [a(\bar{z},x) + F(x)]$ için

$$\bar{y} \underset{C}{\leq} y \tag{3.5}$$

olur.

Şimdi, $y \in B(\bigcup_{z\in Z} \mathrm{Inf} \bigcup_{x\in X} [b(z,x) + F(x)])$ olduğunu kanıtlayalım. Varsayalım ki $y \notin B(\bigcup_{z\in Z} \mathrm{Inf} \bigcup_{x\in X} [b(z,x) + F(x)]))$ olsun. O halde $\forall\ z \in Z$ için

$$y \notin B(\mathrm{Inf} \bigcup_{x\in X} [b(z,x) + F(x)])$$

olur. Özel olarak $\bar{z}$ için de

$$y \notin B(\mathrm{Inf} \bigcup_{x\in X} [b(\bar{z},x) + F(x)])$$

olur. Dolayısıyla ya $y \in A(\mathrm{Inf} \bigcup_{x\in X} [b(\bar{z},x) + F(x)])$ ya da $y \in \mathrm{Inf} \bigcup_{x\in X} [b(\bar{z},x) + F(x)]$ olmalıdır.

- $y \in A(\mathrm{Inf} \bigcup_{x\in X} [b(\bar{z},x) + F(x)]) = A(\bigcup_{x\in X} [b(\bar{z},x) + F(x)])$ ise $\exists\ x \in X$ ve $\exists\ y' \in F(x)$ için $b(\bar{z},x) + y' \underset{C}{\leq} y$ olur. Buradan ve $a(\bar{z},x) \underset{C}{\leq} b(\bar{z},x)$ olduğundan

  $$a(\bar{z},x) + y' \underset{C}{\leq} b(\bar{z},x) + y' \underset{C}{\leq} y$$

  bulunur. Böylece

  $$y \in A(\bigcup_{x\in X} [a(\bar{z},x) + F(x)]) = A(\mathrm{Inf} \bigcup_{x\in X} [a(\bar{z},x) + F(x)])$$

  elde edilir. Bu ise $y \in \mathrm{Inf} \bigcup_{x\in X} [a(\bar{z},x) + F(x)]$ oluşu ile çelişir. O halde $y \notin A(\mathrm{Inf} \bigcup_{x\in X} [b(\bar{z},x) + F(x)])$ olmalıdır.

- $y \in \mathrm{Inf} \bigcup_{x\in X} [b(\bar{z},x) + F(x)]$ ise (3.5)'den $\bar{y} \in B(\bigcup_{z\in Z} \mathrm{Inf} \bigcup_{x\in X} [b(z,x) + F(x)])$ olur ki bu $\bar{y} \in \mathrm{Sup} \bigcup_{z\in Z} \mathrm{Inf} \bigcup_{x\in X} [b(z,x) + F(x)]$ oluşu ile çelişir. O halde $y \notin \mathrm{Inf} \bigcup_{x\in X} [b(\bar{z},x) + F(x)]$'dir.

Bu durumda $y \in B(\bigcup\limits_{z\in Z} \operatorname{Inf} \bigcup\limits_{x\in X} [b(z,x) + F(x)])$ olmalıdır.

$y \in B(\bigcup\limits_{z\in Z} \operatorname{Inf} \bigcup\limits_{x\in X} [b(z,x) + F(x)])$ olduğundan $\exists\, \tilde{y} \in \bigcup\limits_{z\in Z} \operatorname{Inf} \bigcup\limits_{x\in X} [b(z,x) + F(x)]$ için $y \underset{C}{\leq} \tilde{y}$ olur. (3.5)'den $\bar{y} \underset{C}{\leq} y \underset{C}{\leq} \tilde{y}$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\bar{y} \in B(\bigcup_{z\in Z} \operatorname{Inf} \bigcup_{x\in X} [b(z,x) + F(x)]) = B(\operatorname{Sup} \bigcup_{z\in Z} \operatorname{Inf} \bigcup_{x\in X} [b(z,x) + F(x)])$$

olur. Bu $\bar{y} \in \operatorname{Sup} \bigcup\limits_{z\in Z} \operatorname{Inf} \bigcup\limits_{x\in X} [b(z,x) + F(x)]$ oluşu ile çelişir. O halde

$$\bar{y} \notin B(\operatorname{Sup} \bigcup_{z\in Z} \operatorname{Inf} \bigcup_{x\in X} [a(z,x) + F(x)])$$

yani

$$\bar{y} \in (\operatorname{Sup} \bigcup_{z\in Z} \operatorname{Inf} \bigcup_{x\in X} [a(z,x) + F(x)]) \cup A(\operatorname{Sup} \bigcup_{z\in Z} \operatorname{Inf} \bigcup_{x\in X} [a(z,x) + F(x)])$$

elde edilir. $\square$

Şimdi vektörel norm kavramını hatırlatalım.

Tanım 3.1.19. *[34] X ve Y gerçel vektör uzayları, Y uzayı C konveks konisiyle sıralı olsun. $\forall\, x,\ z \in X$ ve $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ için*

(a) $\|x\| = 0_Y \Leftrightarrow x = 0_X$;

(b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

(c) $\|x + z\| \underset{C}{\leq} \|x\| + \|z\|$ *özelliklerini sağlayan* $\|\cdot\| : X \to C$ *dönüşümüne bir vektörel norm denir.*

Eğer $Y = \mathbb{R}$ ve $C = \mathbb{R}_+$ ise $\|\cdot\|$ dönüşümü X üzerinde bir norm olur.

Çalışmamızın bundan sonraki kısmında X, Y topolojik vektör uzaylar, Y uzayı kapalı, konveks, sivri ve $intC \neq \emptyset$ olan C konisi ile kısmi sıralı, $F : X \rightrightarrows \overline{Y}$ küme değerli dönüşüm ve $\|\cdot\| : X \to C$ vektörel norm olarak kabul edilecektir.

Tanım 3.1.20. *Yukarıdaki varsayımlar altında* *a) Her $(x_0, U, c) \in X \times L(X,Y) \times \mathbb{R}_+$ için*

$$F^w(x_0,U,c) = \mathrm{Sup} \bigcup_{x \in X} [-c\|x - x_0\| + c\|x_0\| + U(x) - F(x)]$$

olarak tanımlanan $F^w : X \times L(X,Y) \times \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \overline{Y}$ küme değerli dönüşümüne F'in zayıf eşlenik dönüşümü denir.

b) Her $x \in X$ için

$$F^{ww}(x) = \mathrm{Sup} \bigcup_{(x_0,U,c) \in X \times L(X,Y) \times \mathbb{R}_+} [-c\|x - x_0\| + c\|x_0\| + U(x) - F^w(x_0,U,c)]$$

olarak tanımlanan $F^{ww} : X \rightrightarrows \overline{Y}$ dönüşümüne F'in zayıf bieşlenik dönüşümü denir.

Zayıf bieşlenik dönüşüm aşağıdaki şekilde daha kısa ifade edilebilir.

Önerme 3.1.21. *$\forall\ x \in X$ için*

$$F^{ww}(x) = \mathrm{Sup} \bigcup_{(U,c) \in L(X,Y) \times \mathbb{R}_+} [c\|x\| + U(x) - F^w(x,U,c)]$$

olur.

Kanıt.

$$\bigcup_{\substack{c \in \mathbb{R}_+ \\ U \in L(X,Y)}} [c\|x\| + U(x) - F^w(x,U,c)] \subseteq \bigcup_{\substack{x_0 \in X \\ U \in L(X,Y) \\ c \in \mathbb{R}_+}} [-c\|x - x_0\| + c\|x_0\| + U(x) - F^w(x_0,U,c)]$$

ve $Y_1 \subseteq Y_2$ iken $\mathrm{Sup} Y_1 \subseteq \mathrm{Sup} Y_2 \cup B(\mathrm{Sup} Y_2)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sup} \bigcup_{\substack{c \in \mathbb{R}_+ \\ U \in L(X,Y)}} [c\|x\| + U(x) - F^w(x,U,c)] \\
&\subseteq \mathrm{Sup} \bigcup_{\substack{x_0 \in X \\ U \in L(X,Y) \\ c \in \mathbb{R}_+}} [-c\|x - x_0\| + c\|x_0\| + U(x) - F^w(x_0,U,c)] \\
&\cup B(\mathrm{Sup} \bigcup_{\substack{x_0 \in X \\ U \in L(X,Y) \\ c \in \mathbb{R}_+}} [-c\|x - x_0\| + c\|x_0\| + U(x) - F^w(x_0,U,c)]) \\
&= F^{ww}(x) \cup B(F^{ww}(x)) \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

elde edilir. F^w ve F^{ww}'nun tanımından

$$\begin{aligned}
F^{ww}(x) &= \operatorname{Sup} \bigcup_{\substack{x_0\in X\\ U\in L(X,Y)\\ c\in\mathbb{R}_+}} [-c\|x-x_0\| + c\|x_0\| + U(x) - F^w(x_0,U,c)] \\
&= \operatorname{Sup} \bigcup_{\substack{x_0\in X\\ U\in L(X,Y)\\ c\in\mathbb{R}_+}} [-c\|x-x_0\| + c\|x_0\| + U(x) - \\
&\quad \operatorname{Sup} \bigcup_{y\in X} [-c\|y-x_0\| + c\|x_0\| + U(y) - F(y)]] \\
&= \operatorname{Sup} \bigcup_{\substack{x_0\in X\\ U\in L(X,Y)\\ c\in\mathbb{R}_+}} \operatorname{Inf} \bigcup_{y\in X} [-c\|x-x_0\| + c\|y-x_0\| + U(x) - U(y) + F(y)]
\end{aligned}$$

olur. $a, b : X \times L(X,Y) \times \mathbb{R}_+ \times X \to Y$ fonksiyonlarını sırasıyla $\forall\ (x_0, U, c, y) \in X \times L(X,Y) \times \mathbb{R}_+ \times X$ için

$$\begin{aligned}
a(x_0,U,c,y) &= -c\|x-x_0\| + c\|y-x_0\| + U(x) - U(y) \\
b(x_0,U,c,y) &= c\|y-x\| + U(x) - U(y)
\end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. $(x_0, U, c) \in X \times L(X,Y) \times \mathbb{R}_+$ seçildikten sonra sabitlenen keyfi bir eleman olsun. Bu durumda $\forall\ y \in X$ için

$$-c\|x-x_0\| + c\|y-x_0\| \underset{C}{\leq} c\|y-x\|$$

olduğundan $a(x_0,U,c,y) \underset{C}{\leq} b(x_0,U,c,y)$ olur. O halde Yardımcı Teorem 3.1.18'den

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Sup} \bigcup_{\substack{x_0\in X\\ U\in L(X,Y)\\ c\in\mathbb{R}_+}} \operatorname{Inf} \bigcup_{y\in X} [+c\|y-x\| + U(x) - U(y) + F(y)] \subseteq \\
&\operatorname{Sup} \bigcup_{\substack{x_0\in X\\ U\in L(X,Y)\\ c\in\mathbb{R}_+}} \operatorname{Inf} \bigcup_{y\in X} [-c\|x-x_0\| + c\|y-x_0\| + U(x) - U(y) + F(y)] \\
&\cup A(\operatorname{Sup} \bigcup_{\substack{x_0\in X\\ U\in L(X,Y)\\ c\in\mathbb{R}_+}} \operatorname{Inf} \bigcup_{y\in X} [-c\|x-x_0\| + c\|y-x_0\| + U(x) - U(y) + F(y)]) \\
&= F^{ww}(x) \cup A(F^{ww}(x))
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna ek olarak

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Sup} \bigcup_{\substack{x_0\in X\\ U\in L(X,Y)\\ c\in\mathbb{R}_+}} \operatorname{Inf} \bigcup_{y\in X} [c\|y-x\| + U(x) - U(y) + F(y)]\\
&= \operatorname{Sup} \bigcup_{\substack{U\in L(X,Y)\\ c\in\mathbb{R}_+}} \operatorname{Inf} \bigcup_{y\in X} [c\|y-x\| - c\|x\| + c\|x\| + U(x) - U(y) + F(y)]\\
&= \operatorname{Sup} \bigcup_{\substack{U\in L(X,Y)\\ c\in\mathbb{R}_+}} [c\|x\| + U(x) - \operatorname{Sup} \bigcup_{y\in X} [-c\|y-x\| + c\|x\| + U(y) - F(y)]\\
&= \operatorname{Sup} \bigcup_{\substack{U\in L(X,Y)\\ c\in\mathbb{R}_+}} [c\|x\| + U(x) - F^w(x,U,c)]
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadeyi bir önceki kapsamda yerine yazarsak

$$\operatorname{Sup} \bigcup_{\substack{U\in L(X,Y)\\ c\in\mathbb{R}_+}} [c\|x\| + U(x) - F^w(x,U,c)] \subseteq F^{ww}(x) \cup A(F^{ww}(x)) \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.5), (3.6) kapsamları ve Yardımcı Teorem 3.1.17'den

$$\operatorname{Sup} \bigcup_{\substack{U\in L(X,Y)\\ c\in\mathbb{R}_+}} [c\|x\| + U(x) - F^w(x,U,c)] = F^{ww}(x)$$

elde edilir. □

Şimdi verilen bir küme değerli dönüşümün zayıf eşlenik ve zayıf bieşlenik dönüşümlerinin bulunuşuna bir örnek verelim.

Örnek 3.1.22. *$F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ küme değerli dönüşümü $\forall\ x \in \mathbb{R}$ için $F(x) = [-|x|, +\infty)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\forall\ (x_0, u, c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ ve $\forall\ x \in \mathbb{R}$ için*

$$F^w(x_0,u,c) = \begin{cases} \{(u-c-1)x_0\} & , \quad |u| \leq c-1 \\ +\infty & , \quad |u| > c-1 \end{cases}$$

ve

$$F^{ww}(x) = \{-|x|\}$$

elde edilir.

Önerme 3.1.23. *$F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşüm olsun. Bu durumda $\forall\ \bar{y} \in Y$ ve $\forall\ (x_0, U, c) \in X \times L(X,Y) \times \mathbb{R}_+$ için* *i)* $(F+\bar{y})^w(x_0,U,c) = F^w(x_0,U,c) - \bar{y}$

ii) $(F+\bar{y})^{ww}(x) = F^{ww}(x) + \bar{y}$

olur.

Kanıt. i) $\bar{y}$, X'nin keyfi bir elemanı olsun. Bu durumda zayıf eşlenik dönüşümün tanımından

$$\begin{aligned}(F+\bar{y})^w(x_0,U,c) &= \operatorname{Sup}\bigcup_{x\in X}[-c\|x-x_0\| + c\|x_0\| + U(x) - (F+\bar{y})(x)]\\ &= \operatorname{Sup}\bigcup_{x\in X}[-c\|x-x_0\| + c\|x_0\| + U(x) - F(x)] - \bar{y}\\ &= F^w(x_0,U,c) - \bar{y}\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Zayıf bieşlenik dönüşümün tanımından

$$\begin{aligned}(F+\bar{y})^{ww}(x) &= \operatorname{Sup}\bigcup_{\substack{x_0\in X, c\in\mathbb{R}_+\\ U\in L(X,Y)}}[-c\|x-x_0\| + c\|x_0\| + U(x) - (F+\bar{y})^w(x_0,U,c)]\\ &= \operatorname{Sup}\bigcup_{\substack{x_0\in X, c\in\mathbb{R}_+\\ U\in L(X,Y)}}[-c\|x-x_0\| + c\|x_0\| + U(x) - F^w(x_0,U,c) + \bar{y}]\\ &= \operatorname{Sup}\bigcup_{\substack{x_0\in X, c\in\mathbb{R}_+\\ U\in L(X,Y)}}[-c\|x-x_0\| + c\|x_0\| + U(x) - F^w(x_0,U,c)] + \bar{y}\\ &= F^{ww}(x) + \bar{y}\end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 3.1.24 gerçel değerli fonksiyonlar için verilen Fenchel eşitsizliğinin bir genellemesidir.

Önerme 3.1.24. *$\bar{x} \in X$ ve $(x_0,U,c) \in X \times L(X,Y) \times \mathbb{R}_+$ verilsin. Bu durumda*

$$(F(\bar{x}) - U(\bar{x}) + c\|\bar{x}-x_0\| - c\|x_0\|) \cap B(-F^w(x_0,U,c)) = \emptyset$$

olur.

Kanıt. $A(F^w(x_0,U,c))$ kümesinin tanımından ve

$$F^w(x_0,U,c) = \operatorname{Sup}\bigcup_{x\in X}[-c\|x-x_0\| + c\|x_0\| + U(x) - F(x)]$$

olduğundan

$$(-c\|\bar{x}-x_0\|+c\|x_0\|+U(\bar{x})-F(\bar{x}))\cap A(F^w(x_0,U,c))=\emptyset$$

olur. Buradan

$$(F(\bar{x})+c\|\bar{x}-x_0\|-c\|x_0\|-U(\bar{x}))\cap(-A(F^w(x_0,U,c)))=\emptyset$$

ve Z, Y uzayının keyfi bir alt kümesi olmak üzere $-A(-Z)=B(Z)$ olduğundan

$$(F(\bar{x})-U(\bar{x})+c\|\bar{x}-x_0\|-c\|x_0\|)\cap B(-F^w(x_0,U,c))=\emptyset$$

elde edilir. □

Önerme 3.1.24'de $\bar{x}=0$ alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.25. *$\bar{y}\in F(0)$ ve $(x_0,U,c)\in X\times L(X,Y)\times\mathbb{R}_+$ verilsin. Bu durumda $y'\in -F^w(x_0,U,c)$ ise $\bar{y}\underset{C}{\not<}y'$ olur.*

Sonuç 3.1.26 F'in bir gerçel değerli fonksiyon olması durumunda fonksiyon ve onun zayıf bieşlenik fonksiyonu arasındaki

$$F^{ww}(\bar{x})\leq F(\bar{x})$$

ilişkisini verir.

Sonuç 3.1.26. *$\bar{x}\in X$, $\bar{y}\in F(\bar{x})$ ve $y''\in F^{ww}(\bar{x})$ olsun. Bu durumda $\bar{y}\underset{C}{\not<}y''$ olur.*

Kanıt. Önerme 3.1.24'den $\forall\ (x_0,U,c)\in X\times L(X,Y)\times\mathbb{R}_+$ ve $\forall\ x\in X$ için

$$(F(x)-U(x)+c\|x-x_0\|-c\|x_0\|)\cap B(-F^w(x_0,U,c))=\emptyset$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\begin{aligned}\emptyset &= F(x)\cap(U(x)-c\|x-x_0\|+c\|x_0\|+B(-F^w(x_0,U,c)))\\ &= F(x)\cap B(-c\|x-x_0\|+c\|x_0\|+U(x)-F^w(x_0,U,c))\end{aligned}$$

olur. (x_0, U, c), $X \times L(X, Y) \times \mathbb{R}_+$ kümesinin keyfi bir elemanı olduğundan ve Önerme 3.1.11'den

$$\begin{aligned}
\emptyset &= F(x) \cap B(\bigcup_{(x_0,U,c)} [-c\|x - x_0\| + c\|x_0\| + U(x) - F^w(x_0, U, c)]) \\
&= F(x) \cap B(\mathrm{Sup} \bigcup_{(x_0,U,c)} [-c\|x - x_0\| + c\|x_0\| + U(x) - F^w(x_0, U, c)]) \\
&= F(x) \cap B(F^{ww}(x))
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\forall\ y \in F(x)$ için $y \notin B(F^{ww}(x))$ olur. Dolayısıyla $\bar{y} \underset{C}{\not<} y''$'dir. □

3.2 Küme Değerli Dönüşümlerin Zayıf Subdiferansiyeli

Bu bölümde kümeler için verilen zayıf maksimum kavramı ve vektörel norm kavramları kullanılarak küme değerli dönüşümler için zayıf subdiferansiyel kavramı tanımlanmış, bir küme değerli dönüşümün zayıf subdiferansiyellenebilmesi için gerekli ve yeterli koşullar verilmiş ve Lipschitz özelliğine sahip bir küme değerli dönüşümün bazı koşullar altında zayıf subdiferansiyellenebilir olduğu kanıtlanmıştır. Bunlara ek olarak zayıf subdiferansiyel ile zayıf eşlenik dönüşümler arasındaki ilişkiler incelenmiş ve zayıf subdiferansiyellenebilme yardımıyla bir küme değerli dönüşüm ile küme değerli dönüşümün zayıf bieşlenik dönüşümünün eşitliği için koşullar elde edilmiştir.

Tanım 3.2.1. *$\bar{x} \in X$ ve $\bar{y} \in F(\bar{x})$ verilsin.*

$$U(\bar{x}) - \bar{y} \in \mathrm{wmaks} \bigcup_{x \in X} [U(x) - c\|x - \bar{x}\| - F(x)] \tag{3.1}$$

koşulunu sağlayan $(U, c) \in L(X, Y) \times \mathbb{R}_+$ ikilisine F'in $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasındaki zayıf subgradienti denir. F'in $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasındaki tüm zayıf subgradientlerinin kümesine F'in $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasındaki zayıf subdiferansiyeli denir ve $\partial^w F(\bar{x}, \bar{y})$ şeklinde gösterilir. $\partial^w F(\bar{x}, \bar{y}) \neq \emptyset$ ise F'e $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilirdir denir. $\forall\ \bar{y} \in F(\bar{x})$ için $\partial^w F(\bar{x}, \bar{y}) \neq \emptyset$ oluyorsa F'e $\bar{x}$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilirdir denir F'in $\bar{x}$ noktasındaki zayıf subdiferansiyeli

$$\partial^w F(\bar{x}) = \bigcup_{\bar{y} \in F(\bar{x})} \partial^w F(\bar{x}, \bar{y})$$

olarak gösterilir.

Şimdi verilen bir küme değerli dönüşümün zayıf subdiferansiyelinin bulunuşuna bir örnek verelim.

Örnek 3.2.2. *$F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ küme değerli dönüşümü $\forall\, x \in \mathbb{R}$ için $F(x) = \{y : y \geq -|x|\} = [-|x|, \infty)$ olarak tanımlansın. Bu durumda F'in zayıf subdiferansiyeli $\forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}$ için*

$$\partial F^w(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} \{(u, c) : c \geq 1,\ |u| \leq c - 1\} & , \quad \bar{y} = -|\bar{x}| \\ \emptyset & , \quad \bar{y} > -|\bar{x}| \end{cases}$$

olur.

Önerme 3.2.3'de zayıf subdiferansiyel kullanılarak bir vektörün verilen bir optimizasyon probleminin optimal çözümü olması için gerekli ve yeterli bir koşul verilmektedir.

Önerme 3.2.3. *$\bar{x} \in X$ ve $\bar{y} \in F(\bar{x})$ olsun. Bu durumda $\bar{y} \in \mathrm{wmin} \bigcup_{x \in X} F(x)$ olması için gerek ve yeter koşul $(0, 0) \in \partial^w F(\bar{x}, \bar{y})$ olmasıdır.*

Kanıt.

$$\begin{aligned} \bar{y} \in \mathrm{wmin} \bigcup_{x \in X} F(x) \quad & \Longleftrightarrow \quad 0(\bar{x}) - \bar{y} \in \mathrm{wmaks} \bigcup_{x \in X} [-F(x)] \\ & \Longleftrightarrow \quad -\bar{y} \in \mathrm{wmaks} \bigcup_{x \in X} [0(x) - 0\|x - \bar{x}\| - F(x)] \\ & \Longleftrightarrow \quad (0, 0) \in \partial^w F(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

□

Önerme 3.2.4 bir küme değerli dönüşümün zayıf subdiferansiyeli ile zayıf eşlenik dönüşümü arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Önerme 3.2.4. *$\bar{x} \in X$ ve $\bar{y} \in F(\bar{x})$ olsun. $(U, c) \in L(X, Y) \times \mathbb{R}_+$ olmak üzere $(U, c) \in \partial^w F(\bar{x}, \bar{y})$ olması için gerek ve yeter koşul*

$$c\|\bar{x}\| + U(\bar{x}) - \bar{y} \in F^w(\bar{x}, U, c)$$

olmasıdır.

Kanıt. $(U,c) \in \partial^w F(\bar{x},\bar{y})$ olsun. Bu durumda zayıf subdiferansiyel tanımından

$$U(\bar{x}) - \bar{y} \in \text{wmaks} \bigcup_{x\in X} [U(x) - c\|x-\bar{x}\| - F(x)]$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} c\|\bar{x}\| + U(\bar{x}) - \bar{y} &\in \text{wmaks} \bigcup_{x\in X} [U(x) - c\|x-\bar{x}\| + c\|\bar{x}\| - F(x)] \\ &\subseteq \text{Sup} \bigcup_{x\in X} [U(x) - c\|x-\bar{x}\| + c\|\bar{x}\| - F(x)] \\ &= F^w(\bar{x},U,c) \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Tersine $c\|\bar{x}\| + U(\bar{x}) - \bar{y} \in F^w(\bar{x},U,c)$ olsun. Buradan ve zayıf eşlenik dönüşümün tanımından

$$U(\bar{x}) - \bar{y} \in \text{Sup} \bigcup_{x\in X} [U(x) - c\|x-\bar{x}\| - F(x)]$$

olur. Buna ek olarak

$$U(\bar{x}) - \bar{y} \in \bigcup_{x\in X} [U(x) - c\|x-\bar{x}\| - F(x)]$$

olduğundan

$$U(\bar{x}) - \bar{y} \in \text{wmaks} \bigcup_{x\in X} [U(x) - c\|x-\bar{x}\| - F(x)]$$

bulunur. Böylece $(U,c) \in \partial^w F(\bar{x},\bar{y})$ elde edilir. □

Teorem 3.2.5 bir küme değerli dönüşüm ile bu küme değerli dönüşümün zayıf bieşlenik dönüşümünün eşitliği için bir koşul vermektedir.

Teorem 3.2.5. *$\bar{x} \in X$ noktası verilsin. F, $\bar{x}$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebiliyorsa $F(\bar{x}) \subseteq F^{ww}(\bar{x})$'dir. Buna ek olarak* $\text{Inf} F(\bar{x}) = F(\bar{x})$ *ise*

$$F(\bar{x}) = F^{ww}(\bar{x})$$

olur.

Kanıt. F, $\bar{x}$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilir olsun. $\bar{y} \in F(\bar{x})$ alalım. Bu durumda $(U,c) \in \partial^w F(\bar{x},\bar{y})$ vardır. O halde Önerme 3.2.4'den

$$c\|\bar{x}\| + U(\bar{x}) - \bar{y} \in F^w(\bar{x},U,c)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \bar{y} &\in c\|\bar{x}\| + U(\bar{x}) - F^w(\bar{x}, U, c) \\ &\subseteq \bigcup_{(x_0,T,d)\in X\times L(X,Y)\times\mathbb{R}_+} [-d\|\bar{x}-x_0\|+d\|x_0\|+T(\bar{x})-F^w(x_0,T,d)] \quad (3.2) \end{aligned}$$

olur. Önerme 3.1.24'den $\forall\,(x_0,T,d)\in X\times L(X,Y)\times\mathbb{R}_+$ ve $\forall\, y'\in -F^w(x_0,T,d)$ için

$$\bar{y} \underset{C}{\not<} y' + T(\bar{x}) - d\|\bar{x}-x_0\| + d\|x_0\|$$

olur. (3.2) yardımıyla

$$\begin{aligned} \bar{y} &\in \text{wmaks} \bigcup_{(x_0,T,d)\in X\times L(X,Y)\times\mathbb{R}_+} [-d\|\bar{x}-x_0\|+d\|x_0\|+T(\bar{x})-F^w(x_0,T,d)] \\ &\subseteq \text{Sup} \bigcup_{(x_0,T,d)\in X\times L(X,Y)\times\mathbb{R}_+} [-d\|\bar{x}-x_0\|+d\|x_0\|+T(\bar{x})-F^w(x_0,T,d)] \\ &= F^{ww}(\bar{x}) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $F(\bar{x})\subseteq F^{ww}(\bar{x})$ olur.

$\text{Inf}F(\bar{x}) = F(\bar{x})$ ve F, $\bar{x}$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilir olsun. Keyfi bir $\bar{y}\in F^{ww}(\bar{x})$ alalım. Yardımcı Teorem 3.1.13'den

$$\begin{aligned} \overline{Y} &= \text{Inf}F(\bar{x}) \cup A(\text{Inf}F(\bar{x})) \cup B(\text{Inf}F(\bar{x})) \\ &= F(\bar{x}) \cup A(F(\bar{x})) \cup B(F(\bar{x})) \end{aligned}$$

ve bu üç kümenin ayrık olduğunu biliyoruz. Sonuç 3.1.26'dan $\forall\; y\in F(\bar{x})$ için $y \underset{C}{\not<} \bar{y}$ olur. O halde $\bar{y}\notin A(F(\bar{x}))$ olur. Dolayısıyla $\bar{y}\in F(\bar{x})$ ya da $\bar{y}\in B(F(\bar{x}))$ olmalıdır.

$\bar{y}\notin B(F(\bar{x}))$ olur. Çünkü $\bar{y}\in B(F(\bar{x}))$ olsaydı $\exists\; y'\in F(\bar{x})$ için $\bar{y} \underset{C}{<} y'$ olurdu. $y'\in F(\bar{x})$ ve F, $\bar{x}$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilir olduğundan F, $(\bar{x},y')$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilir olur. O halde
$\exists\;(T,c)\in\partial^w F(\bar{x},y')$ vardır. Önerme 3.2.4'den

$$-c\|\bar{x}\| - T(\bar{x}) + y' \in -F^w(\bar{x},T,c)$$

olur. $y' \underset{C}{>} \bar{y}$ olduğundan

$$\bar{y}\in B(c\|\bar{x}\| + T(\bar{x}) - F^w(\bar{x},T,c))$$

olur. Bu ise

$$\bar{y} \in \operatorname{Sup} \bigcup_{(x_0,U,d)\in X\times L(X,Y)\times \mathbb{R}_+} [-d\|\bar{x}-x_0\| + d\|x_0\| + U(\bar{x}) - F^w(x_0,U,d)]$$

oluşuyla çelişir. Böylece $\bar{y} \notin B(F(\bar{x}))$ olur. Dolayısıyla $\bar{y} \in F(\bar{x})$ elde edilir. Buradan $F^{ww}(\bar{x}) \subseteq F(\bar{x})$ olur. Sonuç olarak $F(\bar{x}) = F^{ww}(\bar{x})$ elde edilir. □

Önerme 3.2.6'da küme değerli dönüşümlerin zayıf subdiferansiyellenebilmesi için gerekli koşullar verilmektedir.

Önerme 3.2.6. $\bar{x} \in X$ *noktası verilsin.* $\forall\, x \in X$ *için*

$$F(\bar{x}) \not\subset F(x) + L\|x-\bar{x}\| + intC$$

olacak şekilde $\exists L > 0$ *var ve* $\text{wmin}F(\bar{x}) \neq \emptyset$ *olsun. Bu durumda* $\forall\, \bar{y} \in F(\bar{x}) \setminus \bigcup_{x\in X} [F(x) + L\|x-\bar{x}\| + intC]$ *için* F, $(\bar{x},\bar{y})$ *noktasında zayıf subdiferansiyellenebilirdir.*

Kanıt. $\bar{y} \in F(\bar{x}) \setminus \bigcup_{x\in X} [F(x) + L\|x-\bar{x}\| + intC]$ alalım. Bu durumda $\bar{y} \in F(\bar{x})$ ve $\bar{y} \notin \bigcup_{x\in X} [F(x) + L\|x-\bar{x}\| + intC]$ olur. Yani $\forall\, x \in X$ için $\bar{y} \notin F(x) + L\|x-\bar{x}\| + intC$ elde edilir. O halde $\forall\, y \in F(x)$ için

$$\bar{y} \notin y + L\|x-\bar{x}\| + intC$$

dolayısıyla $-\bar{y} + y + L\|x-\bar{x}\| \notin -intC$ olur. Buradan

$$(F(x) + L\|x-\bar{x}\| - \bar{y}) \cap (-intC) = \emptyset$$

olur. Böylece $\bar{y} \in \text{wmin} \bigcup_{x\in X} [F(x) + L\|x-\bar{x}\|]$ yani

$$-\bar{y} \in \text{wmaks} \bigcup_{x\in X} [-F(x) - L\|x-\bar{x}\|]$$

elde edilir. Dolayısıyla $(0,L) \in \partial^w F(\bar{x},\bar{y})$ olur.

□

Önerme 3.2.7'de tanım ve görüntü kümesi sonlu boyutlu uzay olan küme değerli dönüşümlerin zayıf subdiferansiyellenebilmesi için verilen ön koşulun varlığını veren bir koşul ifade edilmiştir.

Önerme 3.2.7. *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ küme değerli dönüşüm, $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^p_+$ konisiyle kısmi sıralı uzay,*

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p_+$$

vektörel normu, $\| \cdot \|$ $\mathbb{R}^n$ üzerinde norm olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\|x\| = (\underbrace{\|x\|, ..., \|x\|}_{p})$ olarak tanımlansın ve $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ verilsin. $\mathrm{wmin}F(\bar{x}) \neq \emptyset$, *$F(\bar{x})$, $\mathbb{R}^p_+$-sınırlı (yani $\forall\ y \in F(\bar{x})$ için $a \underset{\mathbb{R}^p_+}{\leq} y$ olacak şekilde $\exists a \in \mathbb{R}^p$ var) olsun ve $\exists L > 0$ sayısı ve $U \in \mathcal{N}(\bar{x})$ kümesi $\forall\ x \in U$ için*

$$F(\bar{x}) \not\subset F(x) + L\|x - \bar{x}\| + int\mathbb{R}^p_+$$

olacak şekilde bulunsun. Bunlara ek olarak $p \geq 0$ ve $q \in \mathbb{R}^p$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için

$$-p\|x\| + q \notin F(x) + int\mathbb{R}^p_+$$

olacak şekilde bulunsun. Bu durumda $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için

$$F(\bar{x}) \not\subset F(x) + M\|x - \bar{x}\| + int\mathbb{R}^p_+$$

olacak şekilde $M > 0$ vardır.

Kanıt. Varsayalım ki $\forall\ k \in \mathbb{N}$ için $\exists\ x_k \in \mathbb{R}^n$

$$F(\bar{x}) \subset F(x_k) + k\|x_k - \bar{x}\| + int\mathbb{R}^p_+$$

olacak şekilde bulunsun. Bu durumda $\forall\ k \in \mathbb{N}$ ve $\forall\ y \in F(\bar{x})$ için

$$y - \bar{y}_k - k\|x_k - \bar{x}\| \in int\mathbb{R}^p_+$$

olacak biçimde $\exists\ \bar{y}_k \in F(x_k)$ vardır. Dolayısıyla $\forall\ j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ için

$$y^j - \bar{y}^j_k - k\|x_k - \bar{x}\| > 0 \tag{3.3}$$

olur. $\forall\ x \in X$ için $-p\|x\| + q \notin F(x) + int\mathbb{R}^p_+$ olduğundan özel olarak $x_k \in \mathbb{R}^n$ için de

$$-p\|x_k\| + q \notin F(x_k) + int\mathbb{R}^p_+$$

olur. O halde $\forall\ y_k \in F(x_k)$ için

$$-p\|x_k\| + q - y_k \notin int\mathbb{R}^p_+$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliği yardımıyla $\forall\ y_k \in F(x_k)$ için

$$-p\|x_k - \bar{x}\| - p\|\bar{x}\| + q - y_k \notin int\mathbb{R}^p_+$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$-p\|x_k - \bar{x}\| - p\|\bar{x}\| + q^{i_k} - y_k^{i_k} \leq 0$$

olacak şekilde bir $i_k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ indisi vardır. Bu eşitsizlik özel olarak (3.3) eşitsizliğindeki $\bar{y}_k$ için de geçerlidir. Yani,

$$-p\|x_k - \bar{x}\| - p\|\bar{x}\| + q^{i_k} - \bar{y}_k^{i_k} \leq 0 \tag{3.4}$$

olur. (3.3) özel olarak i_k için de sağlanır. Yani

$$y^{i_k} - \bar{y}_k^{i_k} - k\|x_k - \bar{x}\| > 0 \tag{3.5}$$

olur. O halde (3.4) ve (3.5) eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned} 0 &> -p\|x_k - \bar{x}\| - p\|\bar{x}\| + q^{i_k} - \bar{y}_k^{i_k} - y^{i_k} + \bar{y}_k^{i_k} + k\|x_k - \bar{x}\| \\ &= (k-p)\|x_k - \bar{x}\| - p\|\bar{x}\| + q^{i_k} - y^{i_k} \end{aligned}$$

dolayısıyla

$$(k-p)\|x_k - \bar{x}\| < p\|\bar{x}\| - q^{i_k} + y^{i_k}$$

elde edilir. Yeterince büyük k doğal sayıları için $k - p > 0$ olur. O halde yeterince büyük k lar için eşitsizliğin her iki tarafı $k-p$'ye bölünürse ve $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\|x_k - \bar{x}\| < \frac{p\|\bar{x}\| - q^{i_k} + y^{i_k}}{k-p} \to 0$$

olur. Dolayısıyla $x_k \to \bar{x}$'dir.

$U \in \mathcal{N}(\bar{x})$ ve $x_k \to \bar{x}$ olduğundan $\forall\ k \geq k_0$ için $x_k \in U$ olacak şekilde $\exists\ k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Hipotezden $\forall\ k \geq k_0$ için

$$F(\bar{x}) \not\subset F(x_k) + L\|x_k - \bar{x}\| + int\mathbb{R}^p_+$$

olur. Yani $\forall\ y_k \in F(x_k)$ için

$$z_k - y_k - L\|x_k - \bar{x}\| \notin int\mathbb{R}^p_+$$

olacak şekilde $\exists\ z_k \in F(\bar{x})$ yani

$$z_k^{j_k} - y_k^{j_k} - L\|x_k - \bar{x}\| \leq 0$$

olan $\exists\ j_k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ vardır. Özel olarak $\bar{y}_k^{j_k}$ için de

$$\bar{z}_k^{j_k} - \bar{y}_k^{j_k} - L\|x_k - \bar{x}\| \leq 0 \tag{3.6}$$

olacak şekilde $\exists\ \bar{z}_k^{j_k}$ vardır. (3.3) eşitsizliği yardımıyla

$$y^{j_k} - \bar{y}_k^{j_k} - k\|x_k - \bar{x}\| > 0 \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.6) ve (3.7) eşitsizliklerinden

$$\bar{z}_k^{j_k} - y^{j_k} + k\|x_k - \bar{x}\| - L\|x_k - \bar{x}\| < 0$$

olur. $F(\bar{x})$, $\mathbb{R}^p_+$-sınırlı olduğundan $\bar{z}_k^{j_k} - y^{j_k}$ alttan sınırlıdır. b bu dizi için bir alt sınır olsun. Bu durumda yeterince büyük k doğal sayıları için

$$b + (k - L)\|x_k - \bar{x}\| < 0$$

olur. Bu bir çelişkidir. O halde $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için

$$F(\bar{x}) \not\subset F(x) + M|||x - \bar{x}||| + int\mathbb{R}^p_+$$

olacak şekilde $M > 0$ vardır.

□

Sonuç 3.2.8. *Önerme 3.2.7'nin koşulları altında* $\forall\ \bar{y} \in F(\bar{x}) \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} [F(x) + M|||x - \bar{x}||| + int\mathbb{R}^p_+]$ *için F küme değerli dönüşümü $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilirdir. (Burada M Önerme 3.2.7'nin kanıtından elde edilen pozitif sayıdır.)*

Önerme 3.2.9. *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ küme değerli dönüşüm, $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^p_+$ konisiyle kısmi sıralı uzay,*

$$|||\cdot||| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p_+$$

vektörel normu, $\|\cdot\|$ $\mathbb{R}^n$ üzerinde norm olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$|||x||| = (\underbrace{\|x\|, ..., \|x\|}_{p})$$

olarak tanımlansın. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in F(\bar{x})$ *verilsin ve* $\text{wmin}F(\bar{x}) \neq \emptyset$ *olsun.* F, $(\bar{x}, \bar{y})$ *noktasında zayıf subdiferansiyellenebiliyorsa* $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$F(\bar{x}) \not\subset F(x) + L\|x - \bar{x}\| + int\mathbb{R}^p_+$$

olacak şekilde $\exists L > 0$ *sayısı vardır.*

Kanıt. F, $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebildiğinden

$$\bar{y} - U(\bar{x}) \in \text{wmin} \bigcup_{x \in X} [F(x) - U(x) + c\|x - \bar{x}\|]$$

olacak şekilde $\exists\ (U, c) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \times \mathbb{R}_+$ vardır. Buradan $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için

$$(F(x) - U(x) + c\|x - \bar{x}\| - \bar{y} + U(\bar{x})) \cap (-int\mathbb{R}^p_+) = \emptyset \tag{3.8}$$

olur. $U = (U_1, U_2, \ldots, U_p)$ olmak üzere $\forall\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ve $\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ için

$$\|U\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}} \frac{\|U(x)\|}{\|x\|} \geq \frac{|U_i(x)|}{\|x\|} \geq \frac{U_i(x)}{\|x\|}$$

dolayısıyla, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ için $\|U\|\|x\| \geq U_i(x)$ olur. O halde özel olarak $\bar{x} - x$ için de $\|U\|\|x - \bar{x}\| \geq U_i(\bar{x} - x)$ olur. Dolayısıyla $\|U\|\|x - \bar{x}\| \underset{\mathbb{R}^p_+}{\geq} U(\bar{x} - x)$ elde edilir. (3.8)'den $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} \emptyset &= (F(x) + \|U\|\|x - \bar{x}\| + c\|x - \bar{x}\| - \bar{y}) \cap (-int\mathbb{R}^p_+) \\ &= (F(x) + (\|U\| + c)\|x - \bar{x}\| - \bar{y}) \cap (-int\mathbb{R}^p_+) \end{aligned}$$

olur. Buradan $\forall\ y \in F(x)$ için $y + (\|U\| + c)\|x - \bar{x}\| - \bar{y} \notin -int\mathbb{R}^p_+$ dolayısıyla

$$\bar{y} \notin y + (\|U\| + c)\|x - \bar{x}\| + int\mathbb{R}^p_+$$

elde edilir. $y \in F(x)$ keyfi olduğundan

$$\bar{y} \notin F(x) + (\|U\| + c)\|x - \bar{x}\| + int\mathbb{R}^p_+$$

olur. Dolayısıyla

$$F(\bar{x}) \not\subset F(x) + (\|U\| + c)\|x - \bar{x}\| + int\mathbb{R}^p_+$$

bulunur. Son ifadede $\|U\| + c = L$ alınırsa istenen elde edilmiş olur. $\square$

Sonuç 3.2.10'da tanım ve görüntü kümesi sonlu boyutlu uzay olan bir küme değerli dönüşümün zayıf subdiferansiyellenebilmesi için gerekli ve yeterli bir koşul verilmektedir.

Sonuç 3.2.10. *Önerme 3.2.9'un koşulları geçerli olsun. Bu durumda F'in $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ için $F(\bar{x}) \not\subset F(x) + L\|x - \bar{x}\| + int\mathbb{R}^p_+$ olacak şekilde $L > 0$ sayısının var ve $\bar{y} \in F(\bar{x}) \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} [F(x) + L\|x - \bar{x}\| + int\mathbb{R}^p_+]$ olmasıdır.*

Önerme 3.2.11. *X, Y gerçel normlu uzaylar, Y uzayı C kapalı, konveks, sivri ve $intC \neq \emptyset$ olan C konisi ile kısmi sıralı, $\|\cdot\| : X \to C$ vektörel norm ve $F : X \rightrightarrows \overline{Y}$ küme değerli dönüşüm olsun. $\bar{x} \in X$ verilsin.* $\mathrm{wmin}F(\bar{x}) \neq \emptyset$ *ve $\forall\, x \in X$ için*

$$F(\bar{x}) \not\subset F(x) + L\|x - \bar{x}\| + intC$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı var ise $\forall\, x \in X$ için

$$-p\|x\| + q \notin F(x) + intC$$

olacak şekilde $p \geq 0$ ve $q \in Y$ vardır.

Kanıt. $\forall\, x \in X$ için $F(\bar{x}) - L\|x - \bar{x}\| \not\subset F(x) + intC$ olduğundan

$$F(\bar{x}) - L\|x\| - L\|\bar{x}\| \not\subset F(x) + intC$$

olur. Eğer $F(\bar{x}) - L\|x\| - L\|\bar{x}\| \subset F(x) + intC$ olsaydı $\forall\, \bar{y} \in F(\bar{x})$ için $\bar{y} - L\|x\| - L\|\bar{x}\| \in y + intC$ olan $\exists\, y \in F(x)$ var olurdu. Buradan

$$y \underset{C}{<} \bar{y} - L\|x\| - L\|\bar{x}\| \underset{C}{\leq} \bar{y} - L\|x - \bar{x}\|$$

dolayısıyla

$$F(\bar{x}) - L\|x - \bar{x}\| \subset F(x) + intC$$

olurdu ki bu varsayımımızla çelişirdi. O halde

$$F(\bar{x}) - L\|x\| - L\|\bar{x}\| \not\subset F(x) + intC\text{'dir.}$$

Dolayısıyla $\bar{y} - L\|x\| - L\|\bar{x}\| \notin F(x) + intC$ olan $\exists\ \bar{y} \in F(\bar{x})$ vardır. Burada $p = L$ ve $q = \bar{y} - L\|\bar{x}\|$ alınırsa $\forall\ x \in X$ için

$$-p\|x\| + q \notin F(x) + intC$$

elde edilir. $\square$

Sonuç 3.2.12'de, Sonuç 3.2.10 ve Önerme 3.2.11 yardımıyla bir küme değerli dönüşümün zayıf subdiferansiyellenebilirliği için iki karakterizasyon verilmektedir.

Sonuç 3.2.12. *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ küme değerli dönüşüm, $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^p_+$ konisiyle kısmi sıralı uzay,*

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p_+$$

vektörel normu, $\|\cdot\|$ $\mathbb{R}^n$ üzerinde norm olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\|x\| = (\underbrace{\|x\|, ..., \|x\|}_{p})$ olarak tanımlansın ve $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ verilsin. $\mathrm{wmin}F(\bar{x}) \neq \emptyset$, *$F(\bar{x})$, $\mathbb{R}^p_+$-sınırlı olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktirler;*

i) $\exists\ L > 0$ sayısı ve $U \in \mathcal{N}(\bar{x})$ kümesi $\forall\ x \in U$ için

$$F(\bar{x}) \not\subset F(x) + L\|x - \bar{x}\| + int\mathbb{R}^p_+$$

olacak şekilde var, buna ek olarak $p \geq 0$ ve $q \in \mathbb{R}^p$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için

$$-p\|x\| + q \notin F(x) + int\mathbb{R}^p_+$$

olacak şekilde vardır ve $\bar{y} \in F(\bar{x})\setminus \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} [F(x) + M\|x - \bar{x}\| + int\mathbb{R}^p_+]$'dir. (Burada M Önerme 3.2.7'nin kanıtından elde edilen pozitif sayıdır.)

ii) $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için $F(\bar{x}) \not\subset F(x) + L\|x - \bar{x}\| + int\mathbb{R}^p_+$ olacak şekilde $\exists\ L > 0$ sayısı vardır ve $\bar{y} \in F(\bar{x})\setminus \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} [F(x) + L\|x - \bar{x}\| + int\mathbb{R}^p_+]$'dir

iii) F, $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilirdir.

Lipschitz özelliğine sahip küme değerli dönüşümlerin zayıf subdiferansiyellenebilmelerinden bahsetmeden önce Lipschitz küme değerli dönüşümün tanımını verelim.

Tanım 3.2.13. *[35] X, Y gerçel normlu uzaylar $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü ve $\bar{x} \in X$ noktası verilsin. $\forall\ x_1, x_2 \in U$ için*

$$F(x_1) \subset F(x_2) + L\|x_1 - x_2\|\overline{B}$$

olacak şekilde $\bar{x}$ noktasının bir $U \subset Dom(F)$ komşuluğu ve $L > 0$ sayısı varsa F küme değerli dönüşümüne $\bar{x}$ noktasında yerel Lipschitzdir ya da F, U üzerinde Lipschitzdir denir. Burada $\overline{B}$ olarak gösterilen küme Y de kapalı birim yuvardır.

Önerme 3.2.14. *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ küme değerli dönüşüm, $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^p_+$ konisiyle kısmi sıralı uzay,*

$$\|\!|\cdot|\!\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p_+$$

vektörel normu, $\|\cdot\|$ $\mathbb{R}^n$ üzerinde norm olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\|\!|x|\!\| = (\underbrace{\|x\|, ..., \|x\|}_{p})$ olarak tanımlansın ve $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ noktası verilsin. F, $\bar{x}$ noktasının bir U komşuluğunda L sabiti ile Lipschitz özelliğine sahip olsun. Bu durumda $\forall\ x \in U \backslash \{\bar{x}\}$ için

$$F(\bar{x}) \not\subset F(x) + L\|\!|x - \bar{x}|\!\| + int\mathbb{R}^p_+$$

olur.

Kanıt. F, U kümesi üzerinde Lipschitz özelliğine sahip olduğundan $\forall\ x \in U \backslash \{\bar{x}\}$ için $F(x) \subset F(\bar{x}) + L\|x - \bar{x}\|\overline{B}$ olur. Dolayısıyla $\forall\ y \in F(x)$ için $\exists\ \bar{y} \in F(\bar{x})$ ve $\exists\ e \in \overline{B}$ vektörleri $y = \bar{y} + L\|x - \bar{x}\|e$ olacak şekilde vardır. O halde $e = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\bar{y} - y - L\|\!|x - \bar{x}|\!\| &= -L\|x - \bar{x}\|e - L\|\!|x - \bar{x}|\!\| \\
&= (-L\|x - \bar{x}\|e_1, \cdots, -L\|x - \bar{x}\|e_p) - (L\|x - \bar{x}\|, \cdots, L\|x - \bar{x}\|) \\
&= (-L\|x - \bar{x}\|(\underbrace{e_1 + 1}_{\geq 0}), \cdots, -L\|x - \bar{x}\|(\underbrace{e_p + 1}_{\geq 0})) \\
&\in -\mathbb{R}^p_+.
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\bar{y} - y - L\|\!|x - \bar{x}|\!\| \notin int\mathbb{R}^p_+$ olur. Bu

$$\bar{y} \notin F(x) + L\|\!|x - \bar{x}|\!\| + int\mathbb{R}^p_+$$

olması demektir. Sonuç olarak $\forall\ x \in U \backslash \{\bar{x}\}$ için

$$F(\bar{x}) \not\subset F(x) + L\|x - \bar{x}\| + int\mathbb{R}^p_+$$

elde edilir. $\square$

Sonuç 3.2.15 yerel Lipschitz özelliğine sahip küme değerli dönüşümlerin bazı koşullar altında zayıf subdiferansiyellenebilir olduğunu göstermektedir.

Sonuç 3.2.15. *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ küme değerli dönüşüm, $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^p_+$ konisiyle kısmi sıralı uzay,*

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p_+$$

vektörel normu, $\|\cdot\|$ $\mathbb{R}^n$ üzerinde norm olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|x\| = (\underbrace{\|x\|, ..., \|x\|}_{p})$$

olarak tanımlansın. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{wmin}F(\bar{x}) \neq \emptyset$, F, $\bar{x}$ noktasının bir $U \subset domF$ komşuluğunda L sabiti ile Lipschitz özelliğine sahip ve $F(\bar{x})$ kümesi $\mathbb{R}^p_+$-sınırlı olsun. Bunlara ek olarak $p \geq 0$ ve $q \in \mathbb{R}^p$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için

$$-p\|x\| + q \notin F(x) + int\mathbb{R}^p_+$$

olacak şekilde bulunsun. Bu durumda $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için

$$F(\bar{x}) \not\subset F(x) + M\|x - \bar{x}\| + int\mathbb{R}^p_+$$

olacak şekilde $M > 0$ vardır. Üstelik
$\forall\ \bar{y} \in F(\bar{x}) \backslash \bigcup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \{F(x) + M\|x - \bar{x}\| + int\mathbb{R}^p_+\}$ için F, $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilirdir.

3.3 Vektör Optimizasyonda Zayıf Eşlenik Duallik

Bu bölümde, sarsım fonksiyonu ve bu fonksiyonun zayıf eşlenik ve zayıf bieşlenik dönüşümü kavramları kullanılarak verilen bir kısıtsız vektör optimizasyon problemi için zayıf dual problem tanımlanmış, zayıf duallik teoremi verilmiştir. Problemin sarsım fonksiyonuna göre kararlılığı tanımlanmış ve problemin kararlılığının güçlü dualliği verdiği gösterilmiş, aynı zamanda kararlılık için yeterli koşullar verilmiştir.

Öncelikle kısıtsız vektör optimizasyon problemini tanımlayalım. X, Y gerçel normlu uzaylar Y uzayı kapalı, konveks, sivri ve $intC \neq \emptyset$ olan C konisi ile kısmi sıralı uzay , $\overline{Y}$, Y uzayının genişletilmişi olsun ve $f : X \to \overline{Y}$ fonksiyonunu alalım. Kısıtsız vektör optimizasyon problemini

$$(VOP)\left\{ \underset{x\in X}{minimize}\ f(x) \right.$$

biçiminde ifade edelim. Bu problemi çözmek

$$\text{Inf}(VOP) = \text{Inf}\{f(x) \mid x \in X\}$$

kümesini bulmak anlamına gelmektedir.

Z gerçel normlu uzay olmak üzere $\varphi : X \times Z \to Y \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu (VOP) problemi için sarsım fonksiyonu olsun.

Şimdi sarsım fonksiyonunun zayıf eşleniğini oluşturup asıl problem için zayıf dual problemi oluşturalım.

$\|\cdot\|_X : X \to C$ ve $\|\cdot\|_Z : Z \to C$ vektörel normlar olmak üzere her $\forall\ (x_0, U, c, z_0, V, d) \in X \times L(X, Y) \times \mathbb{R}_+ \times Z \times L(Z, Y) \times \mathbb{R}_+$ için

$$\begin{aligned}\varphi^w(x_0, U, c, z_0, V, d) = \text{Sup} \bigcup_{(x,z)\in X\times Z} & \{-c\|x - x_0\|_X + c\|x_0\|_X + U(x) \\ & -d\|z - z_0\|_Z + d\|z_0\|_Z + V(z) - \varphi(x, z)\}\end{aligned}$$

olarak tanımlanan $\varphi^w : X\times L(X, Y)\times\mathbb{R}_+\times Z\times L(Z, Y)\times\mathbb{R}_+ \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü $\varphi(\cdot, \cdot)$ fonksiyonunun zayıf eşlenik dönüşümüdür. Zayıf eşlenik dönüşümde $x_0 = 0,\ z_0 = 0,\ U = 0,\ c = 0$ alınırsa,
$\varphi^w(0, 0, 0, 0, V, d) = \varphi^w(\mathbf{0}, V, d)$ olmak üzere

$$\varphi^w(\mathbf{0}, V, d) = \text{Sup} \bigcup_{(x,z)\in X\times Z} [-d\|z\|_Z + V(z) - \varphi(x, z)]$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}-\varphi^w(\mathbf{0}, V, d) &= -\text{Sup} \bigcup_{(x,z)\in X\times Z} [-d\|z\|_Z + V(z) - \varphi(x, z)] \\ &= \text{Inf} \bigcup_{(x,z)\in X\times Z} [d\|z\|_Z - V(z) + \varphi(x, z)].\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu dönüşüm yardımıyla (VOP) probleminin zayıf eşlenik dual problemi

$$(D^w)\begin{cases}\text{Sup} \bigcup_{(V,d)\in L(Z,Y)\times\mathbb{R}_+} [-\varphi^w(\mathbf{0},V,d)]\end{cases}$$

olarak tanımlanır. Amacımız

$$\text{Sup}(D^w) = \text{Sup} \bigcup_{(V,d)\in L(Z,Y)\times\mathbb{R}_+} [-\varphi^w(\mathbf{0},V,d)]$$

kümesini elde etmektir.

Aşağıdaki teorem asıl problemin uygun çözümlerinin dual problemin hiçbir uygun çözümünün alt noktaları kümesine ait olamayacağını göstermektedir.

Teorem 3.3.1. ***(Zayıf Duallik Toeremi)****Herbir $x \in X$ ve $(V,d) \in L(Z,Y)\times\mathbb{R}_+$ için*

$$\varphi(x,0) \notin B(-\varphi^w(\mathbf{0},V,d)) \text{ olur.}$$

Dolayısıyla

$$\text{Inf}(VOP) \cap B(\text{Sup}(D^w)) = \emptyset\text{'dir.}$$

Kanıt. Önerme 3.1.24'den $\forall\, x \in X$ ve $\forall\, (V,d) \in L(Z,Y)\times\mathbb{R}_+$ için

$$\varphi(x,0)-0(x)-V(0)+0\|x-0\|-0\|0\|+d\|0-0\|-d\|0\| = \varphi(x,0) \notin B(-\varphi^w(\mathbf{0},V,d))$$

elde edilir. Buradan $\forall\, x \in X$ ve $\forall\, (V,d) \in L(X,Y)\times\mathbb{R}_+$ için $f(x) \notin B(-\varphi^w(\mathbf{0},V,d))$ ve dolayısıyla

$$\bigcup_{x\in X} f(x) \cap B(\bigcup_{(V,d)\in L(Z,Y)\times\mathbb{R}_+} [-\varphi^w(\mathbf{0},V,d)]) = \emptyset$$

olur. Buradan

$$A(\bigcup_{x\in X} f(x)) \cap B(\bigcup_{(V,d)\in L(Z,Y)\times\mathbb{R}_+} [-\varphi^w(\mathbf{0},V,d)]) = \emptyset$$

bulunur. $A(\bigcup_{x\in X} f(x))$ kümesinin kapanışı alındığında da eşitlik bozulmaz yani

$$\begin{aligned}\emptyset &= cl(A(\bigcup_{x\in X} f(x))) \cap B(\bigcup_{(V,d)\in L(Z,Y)\times\mathbb{R}_+} [-\varphi^w(\mathbf{0},V,d)])\\ &= cl(A(\bigcup_{x\in X} f(x))) \cap B(\text{Sup}(D^w))\end{aligned}$$

olur. wmin $cl(A(\bigcup_{x\in X} f(x))) \subset cl(A(\bigcup_{x\in X} f(x)))$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\emptyset &= \text{wmin } cl(A(\bigcup_{x\in X} f(x))) \cap B(\text{Sup}(D^w)) \\
&= \text{Inf}(\bigcup_{x\in X} f(x)) \cap B(\text{Sup}(D^w)) \\
&= \text{Inf}(VOP) \cap B(\text{Sup}(D^w))
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 3.3.2. *Her $a \in \text{Inf}(VOP)$ ve her $b \in \text{Sup}(D^w)$ için $a \underset{C}{\not<} b$ olur.*

Asıl problemin kararlılık tanımı verilmeden önce değer dönüşümünün tanımına ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 3.3.3. *Her $z \in Z$ için $\phi(z) = \text{Inf}\{\varphi(x,z) \mid x \in X\}$ olarak tanımlanan*

$$\phi : Z \rightrightarrows \overline{Y}$$

küme değerli dönüşümüne (VOP) probleminin değer dönüşümü denir.

$\text{Inf}(VOP) = \phi(0)$ olduğu açıktır.

Yardımcı Teorem 3.3.4. *Her $(V,d) \in L(Z,Y) \times \mathbb{R}_+$ için*

$$\phi^w(0,V,d) = \varphi^w(\mathbf{0},V,d)$$

olur.

Kanıt. Sarsım fonksiyonu, değer dönüşümü tanımlarından ve Önerme 3.1.14'den

$$\begin{aligned}
\phi^w(0,V,d) &= \text{Sup}\bigcup_{z\in Z}[-d\|z-0\| + d\|0\| + V(z) - \phi(z)] \\
&= \text{Sup}\bigcup_{z\in Z}[-d\|z\| + V(z) - \text{Inf}\{\varphi(x,z) \mid x \in X\}] \\
&= \text{Sup}\bigcup_{z\in Z}[-d\|z\| + V(z) + \text{Sup}\{-\varphi(x,z) \mid x \in X\}] \\
&= \text{Sup}\bigcup_{z\in Z}[-d\|z\| + V(z) - \bigcup_{x\in X}\varphi(x,z)] \\
&= \text{Sup}\bigcup_{(x,z)\in X\times Z}[-d\|z\| + V(z) - \varphi(x,z)] \\
&= \varphi^w(\mathbf{0},V,d)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.3.5 dual problemin supremumunun değer dönüşümünün zayıf bieşlenik dönüşümünün 0 noktasındaki değeri ile karakterize edilebildiğini göstermektedir.

Teorem 3.3.5.

$$\phi^{ww}(0) = \text{Sup}(D^w) \ \textit{olur.}$$

Kanıt. Zayıf bieşlenik dönüşüm tanımından ve Lemma 3.3.4'den

$$\begin{aligned}
\phi^{ww}(0) &= \text{Sup} \bigcup_{(V,d)\in L(Z,Y)\times\mathbb{R}_+} [d\|0\| + V(0) - \phi^w(0,V,d)] \\
&= \text{Sup} \bigcup_{(V,d)\in L(Z,Y)\times\mathbb{R}_+} [-\phi^w(0,V,d)] \\
&= \text{Sup} \bigcup_{(V,d)\in L(Z,Y)\times\mathbb{R}_+} [-\varphi^w(\mathbf{0},V,d)] \\
&= \text{Sup}(D^w)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Tanım 3.3.6. *Değer dönüşümü ϕ, $0 \in Z$'de zayıf subdiferansiyellenebiliyorsa (VOP) problemine kararlıdır denir.*

Teorem 3.3.7, (VOP) probleminin kararlılığının güçlü dualliği verdiğini göstermektedir.

Teorem 3.3.7. ***(Güçlü Duallik Teoremi)*** *(VOP) problemi kararlı ise*

$$\text{Inf}(VOP) = \text{Sup}(D^w)$$

olur.

Kanıt.

$$\begin{aligned}
\phi(0) &= \text{Inf}\{\varphi(x,0) \mid x \in X\} \\
&= \text{Inf}\{\text{Inf}\{\varphi(x,0) \mid x \in X\}\} \\
&= \text{Inf}\phi(0)
\end{aligned}$$

ve ϕ, 0'da zayıf subdiferansiyellenebilir olduğundan Teorem 3.2.5 ve Teorem 3.3.5'den

$$\text{Inf}(VOP) = \phi(0) = \phi^{ww}(0) = \text{Sup}(D^w)$$

elde edilir. □

Önerme 3.3.8, (VOP) probleminin kararlılığı için yeterli bir koşul vermektedir.

Önerme 3.3.8. *$\exists\ L > 0$ sayısı ve $\forall\ \varepsilon \in intC$ için $\exists\ x(\varepsilon) \in X$ elemanı $\forall\ (x,z) \in X \times Z$ için*

$$-L\|z\| \leq_C \varphi(x,z) - \varphi(x(\varepsilon),0) + \varepsilon$$

olacak şekilde bulunsun ve $\mathrm{Inf}(VOP) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda ϕ, 0'da zayıf subdiferansiyellenebilirdir.

Kanıt. $\forall\ y \in \phi(0) = \mathrm{Inf}\bigcup_{x\in X}\varphi(x,0)$ alalım ve $\forall\ z \in Z$ alıp sabitleyelim. Bu durumda $y \notin A(\bigcup_{x\in X}\varphi(x,0))$ yani $\forall\ x \in X$ için $\varphi(x,0) \not\leq_C y$ olur. Özel olarak $x(\varepsilon) \in X$ için de $\varphi(x(\varepsilon),0) \not\leq_C y$ olur. $-L\|z\| \leq_C \varphi(x,z) - \varphi(x(\varepsilon),0) + \varepsilon$ olduğundan

$$\varphi(x,z) + L\|z\| + \varepsilon \not\leq_C y \tag{3.1}$$

olur. Buradan $\forall\ x \in X$ için

$$y - \varepsilon \notin \varphi(x,z) + L\|z\| + intC$$

elde edilir. O halde

$$y - \varepsilon \notin \bigcup_{x\in X}[\varphi(x,z)] + L\|z\| + intC\text{'dir.}$$

Şimdi de

$$y - \varepsilon \notin \mathrm{Inf}\bigcup_{x\in X}[\varphi(x,z)] + L\|z\| + intC$$

olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki

$$y - \varepsilon \in \mathrm{Inf}\bigcup_{x\in X}[\varphi(x,z)] + L\|z\| + intC$$

olsun. Bu durumda $y-\varepsilon = a(\varepsilon)+L\|z\|+c(\varepsilon)$ olacak şekilde $a(\varepsilon) \in \mathrm{Inf}\bigcup_{x\in X}\varphi(x,z)$ ve $c(\varepsilon) \in intC$ vardır. O zaman $a(\varepsilon) \in \mathrm{Inf}\bigcup_{x\in X}\varphi(x,z)$ olduğundan

$$A(a(\varepsilon)) \subseteq A(\bigcup_{x\in X}\varphi(x,z))$$

olur. Yani $a(\varepsilon) \underset{C}{<} a$ olan her a elemanı için $\varphi(x,z) \underset{C}{<} a$ olacak şekilde $\exists\, x \in X$ vardır. $y - \varepsilon - L\|z\| - c(\varepsilon) = a(\varepsilon)$ olduğundan $a(\varepsilon) \underset{C}{<} y - \varepsilon - L\|z\|$'dir. Sonuç olarak $\varphi(\bar{x},z) \underset{C}{<} y - \varepsilon - L\|z\|$ olacak şekilde $\exists\, \bar{x} \in X$ vardır. Bu ise (3.1) ile çelişir. Dolayısıyla

$$y - \varepsilon \notin \operatorname{Inf} \bigcup_{x \in X} [\varphi(x,z)] + L\|z\| + intC$$

olur. Bu ifadede $\varepsilon \to 0$ limit alınırsa

$$y \notin \operatorname{Inf} \bigcup_{x \in X} [\varphi(x,z)] + L\|z\| + intC = \phi(z) + L\|z\| + intC$$

olur. $y \in \phi(0)$ keyfi bir eleman olduğundan $\forall\, z \in Z$ için

$$\phi(0) \cap (\phi(z) + L\|z\| + intC) = \emptyset$$

elde edilir. Buna ek olarak $\text{wmin}\phi(0) = \operatorname{Inf}(VOP) \neq \emptyset$ olduğundan Önerme 3.2.6 gereği ϕ dönüşümü $(0,y)$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilirdir. $y \in \phi(0)$ keyfi bir eleman olduğundan ϕ, 0'da zayıf subdiferansiyellenebilirdir.

$\square$

Önerme 3.3.9'da , (VOP) probleminin kararlı olması durumunda sarsım fonksiyonunun hangi özelliğe sahip olacağı gösterilmektedir.

Önerme 3.3.9. $\mathbb{R}^p$ *uzayı* $\mathbb{R}^p_+$ *konisiyle kısmi sıralı olsun,* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p_+$ *vektörel normu,* $\|\cdot\|$ $\mathbb{R}^m$*'de norm olmak üzere* $\forall\, x \in \mathbb{R}^m$ *için* $\|x\| = (\underbrace{\|x\|, \ldots, \|x\|}_{p})$ *olarak tanımlansın ve* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *fonksiyonu verilsin. Verilen* (VOP) *problemine bağlı sarsım fonksiyonu* $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p_+$ *olarak seçilsin.* ϕ, φ*'ye bağlı değer dönüşümü olmak üzere* $\phi(0)$,$\mathbb{R}^p_+$*-sınırlı* ,$\text{wmin}\phi(0) = \operatorname{Inf}(VOP) \neq \emptyset$ *olsun. Bu durumda* (VOP) *problemi kararlı ise* $\exists\, L > 0$ *ve* $\forall\, \varepsilon \in int\mathbb{R}^p_+$ *için*

$$\varphi(x,z) - \varphi(x(\varepsilon),0) + \varepsilon \underset{\mathbb{R}^p_+}{\not<} -L\|z\| \quad (\forall\, z \in \mathbb{R}^m)$$

olacak şekilde $\exists\, x(\varepsilon) \in X$ *vardır.*

Kanıt. (VOP) problemi kararlı ve $\varepsilon \in int\mathbb{R}^p_+$ olsun. (VOP) kararlı olduğundan ϕ, 0'da zayıf subdiferansiyellenebilirdir. O halde Önerme 3.2.9 gereği $\forall\ z \in \mathbb{R}^m$ için

$$\phi(0) \not\subset \phi(z) + L\|z\| + int\mathbb{R}^p_+$$

olacak şekilde $L > 0$ vardır. $y \in \phi(0)$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} y &\notin \phi(z) + L\|z\| + int\mathbb{R}^p_+ \\ &= \mathrm{Inf} \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} [\varphi(x,z)] + L\|z\| + int\mathbb{R}^p_+ \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için

$$y \notin \varphi(x,z) + L\|z\| + int\mathbb{R}^p_+ \tag{3.2}$$

olmalıdır. $y \in \mathrm{Inf} \bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x,0)$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.1.6 gereği verilen $\varepsilon \in int\mathbb{R}^p_+$ için

$$\varphi(x(\varepsilon),0) \underset{\mathbb{R}^p_+}{\leq} y + \varepsilon \tag{3.3}$$

olacak şekilde $\exists\ x(\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ vardır. Buradan $-y + \varphi(x(\varepsilon),0) - \varepsilon \in -int\mathbb{R}^p_+$ elde edilir. (3.2) yardımıyla da

$$\varphi(x(\varepsilon),0) - \varepsilon - \varphi(x,z) - L\|z\| \notin int\mathbb{R}^p_+$$

olduğu görülebilir. Bu bize $\forall\ z \in \mathbb{R}^m$ için

$$\varphi(x,z) - \varphi(x(\varepsilon),0) + \varepsilon \underset{\mathbb{R}^p_+}{\not<} -L\|z\|$$

olduğunu verir. $\square$

Önerme 3.3.10'da (VOP) probleminin kararlılığı için başka bir yeterli koşul verilmektedir.

Önerme 3.3.10. *Önerme 3.3.9'daki kabuller geçerli ve* $\exists\ L > 0$ *sayısı,* $\exists\ N(0) \subset \mathbb{R}^m$ *komşuluğu ve* $\forall\ \varepsilon \in int\mathbb{R}^p_+$ *için* $\exists\ x(\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ *elemanı* $\forall\ z \in N(0)$ *ve* $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$-L\|z\| \underset{\mathbb{R}^p_+}{\leq} \varphi(x,z) - \varphi(x(\varepsilon),0) + \varepsilon$$

olacak şekilde bulunsun. Bunlara ek olarak $\exists\ p \geq 0$ *sayısı ve* $q \in \mathbb{R}^p$ *vektörü* $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ *ve* $\forall\ z \in \mathbb{R}^m$ *için*

$$-p\|z\| + q \notin \varphi(x,z) + int\mathbb{R}^p_+$$

olacak şekilde bulunsun. Bu durumda ϕ*, 0'da zayıf subdiferansiyellenebilirdir.*

Kanıt. $y \in \phi(0) = \mathrm{Inf} \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x,0)$ alalım ve keyfi $z \in \mathbb{R}^m$ alıp sabitleyelim. Bu durumda $y \notin A(\bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x,0))$ olur. Dolayısıyla $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için $\varphi(x,0) \underset{\mathbb{R}^p_+}{\not<} y$ olur. Özel olarak $\varphi(x(\varepsilon),0) \underset{\mathbb{R}^p_+}{\not<} y$ olur. Varsayımımızdan $\forall\ x \in X$ için

$$-L\|z\| \underset{\mathbb{R}^p_+}{\leq} \varphi(x,z) - \varphi(x(\varepsilon),0) + \varepsilon\text{'dur.}$$

Buradan $\varphi(x,z) + \varepsilon + L\|z\| \underset{\mathbb{R}^p_+}{\not<} y$ ve dolayısıyla $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için $y - \varepsilon \notin \varphi(x,z) + L\|z\| + int\mathbb{R}^p_+$ olur. O halde

$$y - \varepsilon \notin \mathrm{Inf} \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} [\varphi(x,z)] + L\|z\| + int\mathbb{R}^p_+$$

elde edilir. Burada $\varepsilon \to 0$ limit alınırsa

$$\begin{aligned} y &\notin \mathrm{Inf} \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} [\varphi(x,z)] + L\|z\| + int\mathbb{R}^p_+ \\ &= \phi(z) + L\|z\| + int\mathbb{R}^p_+ \end{aligned}$$

olur. Bu ise

$$\phi(0) \cap (\phi(z) + L\|z\| + int\mathbb{R}^p_+) = \emptyset$$

olması demektir.

$\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall\ z \in \mathbb{R}^m$ için

$$-p\|z\| + q \notin \varphi(x,z) + int\mathbb{R}^p_+$$

olduğundan

$$-p\|z\| + q \notin \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x,z) + int\mathbb{R}^p_+,$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} -p\|z\| + q &\notin \mathrm{Inf} \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x,z) + int\mathbb{R}^p_+ \\ &= \phi(z) + int\mathbb{R}^p_+ \end{aligned}$$

elde edilir. O halde Önerme 3.2.7 gereği ϕ değer dönüşümü 0 noktasında zayıf subdiferansiyellenebilirdir. □

Önerme 3.3.11'de (VOP) probleminin kararlı olması durumunda sarsım fonksiyonunun hangi özelliği sağlayacağı gösterilmektedir.

Önerme 3.3.11. *Önerme 3.3.9'un koşulları geçerli ve (VOP) problemi kararlı olsun. Bu durumda $\exists\ L > 0$ sayısı ve $\forall\ \varepsilon \in intC$ için $\exists\ x(\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ vektörü , $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall\ z \in \mathbb{R}^m$ için*

$$\varphi(x,z) - \varphi(x(\varepsilon),0) + \varepsilon \underset{\mathbb{R}^p_+}{\not<} -L\|z\|$$

olacak şekilde, $\exists\ p \geq 0$ sayısı ve $\exists\ q \in \mathbb{R}^p$ vektörü

$$-p\|z\| + q \notin \phi(z) + int\mathbb{R}^p_+$$

olacak şekilde vardır.

Kanıt. (VOP) probleminin kararlı olması durumunda $\exists\ L > 0$ sayısının ve $\forall\ \varepsilon \in int\mathbb{R}^p_+$ için $\exists\ x(\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ vektörünün $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall\ z \in \mathbb{R}^m$ için

$$\varphi(x,z) - \varphi(x(\varepsilon),0) + \varepsilon \underset{\mathbb{R}^p_+}{\not<} -L\|z\|$$

koşulunu sağlayacak şekilde varolduğu Önerme 3.3.9'da gösterildi.

Şimdi yukarıdaki koşulu sağlayan $p \geq 0$ sayısının ve $q \in \mathbb{R}^p$ vektörünün varlığını gösterelim.

(VOP) problemi kararlı olduğundan ϕ, 0'da zayıf subdiferansiyellenebilidir. O halde Önerme 3.2.9'dan $\forall\ z \in \mathbb{R}^m$ için

$$\phi(0) \not\subset \phi(z) + L\|z\| + int\mathbb{R}^p_+$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı vardır. Dolayısıyla Önerme 3.2.11'den $\forall\ z \in \mathbb{R}^m$ için

$$-p\|z\| + q \notin \phi(z) + int\mathbb{R}^p_+$$

olacak şekilde $p \geq 0$ ve $q \in \mathbb{R}^p$ vardır.

$\square$

3.4 Zayıf Fenchel Dual Problem

Bu bölümde, sonlu boyutlu uzaylarda verilen kısıtlı vektör optimizasyon problemleri için özel bir sarsım fonksiyonu kullanılarak zayıf Fenchel dual problem oluşturulmuştur. Son olarak [28]'de oluşturulan Lagrange dual problem yardımıyla çözülemeyen fakat zayıf Fenchel dual problem yardımıyla çözülebilen konveks olmayan kısıtlı bir optimizasyon problemi örneği verilmiştir.

Öncelikle kısıtlı vektör optimizasyon problemini verelim.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ve $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vektör değerli fonksiyonlar, $\mathbb{R}^p$ ve $\mathbb{R}^m$ uzayları sırasıyla $\mathbb{R}^p_+$ ve $\mathbb{R}^m_+$ konileri ile kısmi sıralı olsun. S, $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun ve $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p_+$ vektörel normu, $\|\cdot\|$ $\mathbb{R}^n$'de norm olmak üzere $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ için $\|x\| = (\|x\|, \dots, \|x\|)$ olarak tanımlansın. Bu kısıtlı vektör optimizasyon problemini $G = \{x \in S \mid g(x) \underset{\mathbb{R}^m_+}{\leq} 0\}$ olmak üzere

$$(VOP) \quad \operatorname{Inf}\{f(x) \mid x \in G\}$$

biçiminde ifade edelim.

$\forall\, x, z \in \mathbb{R}^n$ için

$$\varphi_F(x,z) = \begin{cases} f(x+z) & , \quad x \in G \\ +\infty & , \quad d.d. \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\varphi_F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \cup \{+\infty\}$ Fenchel sarsım fonksiyonunu kullanarak (VOP) probleminin zayıf Fenchel dual problemini oluşturalım.

Bu fonksiyonun zayıf eşlenik dönüşümü

$\varphi^w_F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}^p$, $\forall\, (x_0, U, c, z_0, V, d)$ için

$$\begin{aligned} \varphi^w_F(x_0, U, c, z_0, V, d) &= \operatorname{Sup} \bigcup_{(x,z) \in G \times \mathbb{R}^n} [-c\|x - x_0\| + c\|x_0\| + U(x) \\ &\qquad -d\|z - z_0\| + d\|z_0\| + V(z) - f(x+z)]. \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Burada $x_0 = z_0 = 0$, $U = 0$, $c = 0$ ve $x + z = r$ alınırsa

Önerme 3.1.14 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\varphi^w(\mathbf{0},V,d) &= \operatorname{Sup} \bigcup_{(x,z)\in G\times\mathbb{R}^n} [-d\|z\| + V(z) - f(x+z)] \\
&= \operatorname{Sup} \bigcup_{x\in G} \bigcup_{r\in\mathbb{R}^n} [-d\|r-x\| + V(r) - V(x) - f(r)] \\
&= \operatorname{Sup} \bigcup_{x\in G} [-V(x) - d\|x\| + \bigcup_{r\in\mathbb{R}^n} [V(r) + d\|x\| - d\|r-x\| - f(r)]]. \\
&= \operatorname{Sup} \bigcup_{x\in G} [-V(x) - d\|x\| + \operatorname{Sup} \bigcup_{r\in\mathbb{R}^n} [V(r) + d\|x\| - d\|r-x\| - f(r)]]. \\
&= \operatorname{Sup} \bigcup_{x\in G} [-V(x) - d\|x\| + f^w(x,V,d)]
\end{aligned}$$

olur.

Buradan

$$(D_F^w) \qquad \operatorname{Sup} \bigcup_{(V,d)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} [-\varphi_F^w(\mathbf{0},V,d)]$$

zayıf dual problemi, bulunan zayıf eşlenik dönüşüm değeri yerine yazılarak

$$(D_F^w) \qquad \operatorname{Sup} \bigcup_{(V,d)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} \operatorname{Inf} \bigcup_{x\in G} [V(x) + d\|x\| - f^w(x,V,d)]$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.4.1'de Lagrange dual problem [28] ile çözülemeyip bu çalışmada oluşturulan zayıf Fenchel dual problem yardımıyla çözülen konveks olmayan bir vektör optimizasyon problemi örneği verilmiştir.

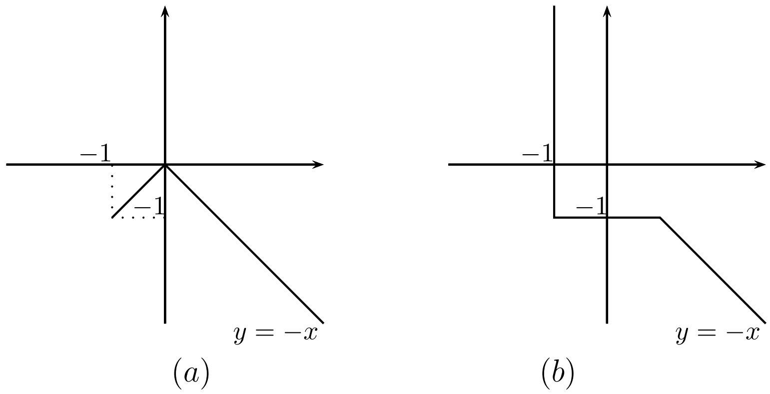
Örnek 3.4.1. *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları sırasıyla $\forall\ x\in\mathbb{R}$ için $f(x)=(x,-|x|)$ ve $g(x)=-x-1\le 0$ olarak tanımlansın. $S=\mathbb{R}$ olsun ve $\|\cdot\|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^2$ vektörel normu $\forall\ x\in\mathbb{R}$ için $\|x\|=(|x|,|x|)$ olarak tanımlansın.*

$$(VOP)\begin{cases} \inf\ f(x) \\ g(x) = -x-1 \le 0 \end{cases}$$

yani

$$(VOP)\begin{cases} \inf\ (x,-|x|) \\ x \ge -1,\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

problemini göz önüne alalım. Problemde bulunmak istenen infimum kümesi geometrik olarak Şekil 3.6(a) kümesinin infimumu yani Şekil 3.6(b)'de verilen kümedir.



Şekil 3.6: (a) (VOP) probleminin değer kümesi (b) (VOP) probleminin çözüm kümesi

İlk olarak bu problemin [28] çalışmasında tanımlanan Lagrange dual problem ile çözülemeyeceğini gösterelim. (VOP) *problemi için Lagrange dual problem*

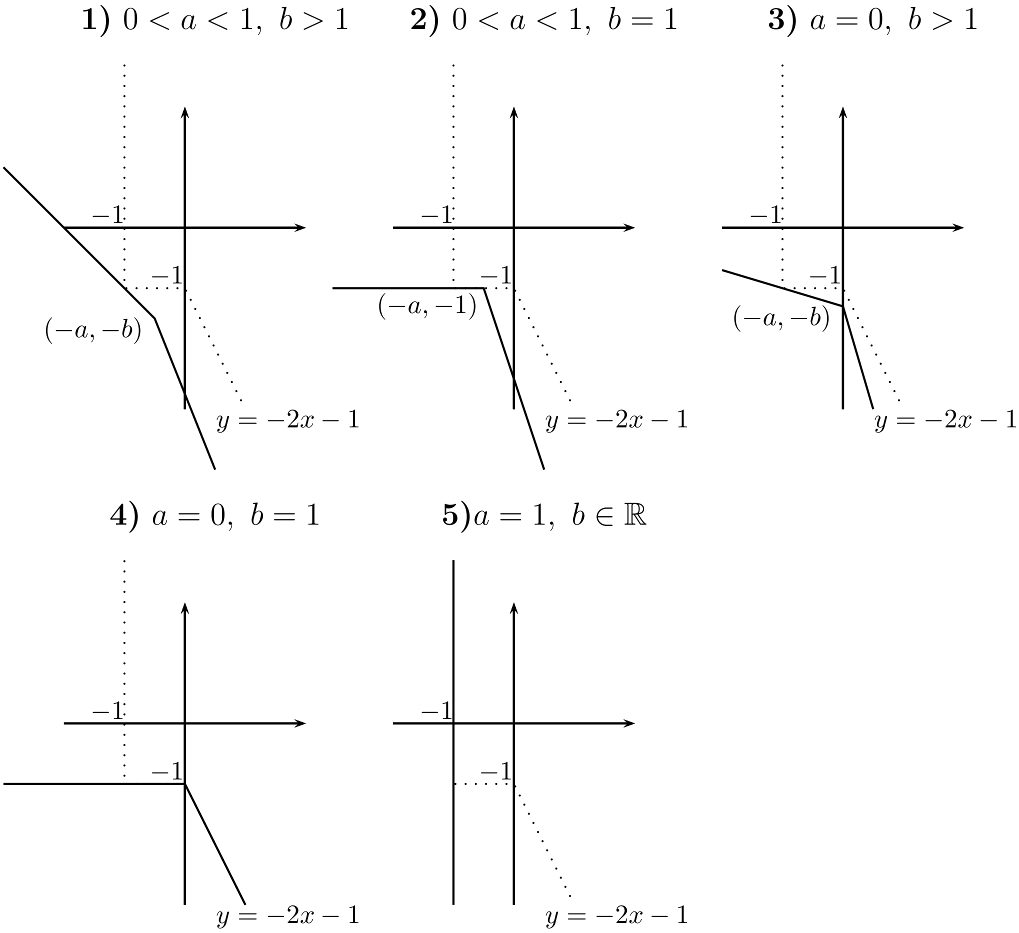
$$\begin{aligned} L^+(\mathbb{R},\mathbb{R}^2) &= \{\Lambda \mid \Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \text{ lineer dönüşüm ve } \forall\ z \geq 0 \text{ için } \Lambda(z) \underset{\mathbb{R}^2_+}{\geq} 0\} \\ &= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall\ z \geq 0 \text{ için } az \geq 0, bz \geq 0\} \\ &= \mathbb{R}^2_+ \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathrm{Sup}(D_L) &= \mathrm{Sup} \bigcup_{\Lambda \in L^+(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)} \mathrm{Inf} \bigcup_{x \in \mathbb{R}} [f(x) + \Lambda(g(x))] \\ &= \mathrm{Sup} \bigcup_{(a,b) \in \mathbb{R}^2_+} \mathrm{Inf} \bigcup_{x \in \mathbb{R}} [(x, -|x|) + (a,b)(-x-1))] \\ &= \mathrm{Sup} \bigcup_{(a,b) \in \mathbb{R}^2_+} \mathrm{Inf} \bigcup_{x \in \mathbb{R}} [(x - ax - a, -|x| - bx - b)] \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Gerekli işlemler yapılırsa $\mathrm{Inf} \bigcup_{x \in \mathbb{R}} [(x - ax - a, -|x| - bx - b)]$ *kümesinin* $0 \leq a \leq 1$ *ve* $b \geq 1$ *olması durumlarında Şekil 3.7'deki gibi ve diğer durumlarda da* $\{-\infty\}$ *olduğu görülür.*



Şekil 3.7: $\operatorname{Inf} \bigcup_{x \in \mathbb{R}} (x - ax - a, -|x| - bx - b)$ kümeleri

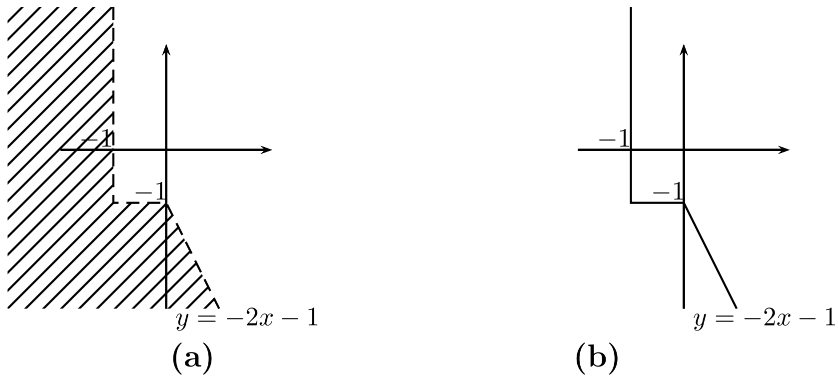
Şekil 3.7'den de görüldüğü gibi bu kümelerin tüm $(a, b) \in \mathbb{R}^2_+$ için birleşimleri alınırsa oluşan kümenin alt noktaları kümesi

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -1,\ y \geq -1\} \cup [-1, 0] \times \{-1\} \cup \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y = -2x - 1\}$$

kümesinin alt noktaları kümesidir. Bu küme ve Lagrange dual problemin çözümü olan

$$\operatorname{Sup} \bigcup_{(a,b) \in \mathbb{R}^2_+} \operatorname{Inf} \bigcup_{x \in \mathbb{R}} [(x - ax - a, -|x| - bx - b)]$$

kümesi Şekil 3.8'de gösterilmiştir. Bu çözüm ise (VOP) probleminin çözümü değildir.



Şekil 3.8: **(a)**Sup(D_L) kümesinin alt noktaları kümesi**(b)**Sup(D_L) kümesi

Şimdi problemin zayıf Fenchel dual problemle çözülebileceğini gösterelim. Problemin zayıf Fenchel dual problem yardımıyla bir çözümünün olduğunu göstermek için problemin değer dönüşümünün 0'da zayıf subdiferansiyellenebilir olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için ilk olarak, verilen optimizasyon probleminin sarsım fonksiyonunu ve değer dönüşümünü oluşturalım. $\varphi_F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \cup \{+\infty\}$ *Fenchel sarsım fonksiyonu* $\forall\ (x,u) \in \mathbb{R}^2$ *için*

$$\varphi_F(x,u) = \begin{cases} f(x+u) & , \quad x \geq -1 \\ +\infty & , \quad d.d. \end{cases} = \begin{cases} (x+u, -|x+u|) & , \quad x \geq -1 \\ +\infty & , \quad d.d. \end{cases}$$

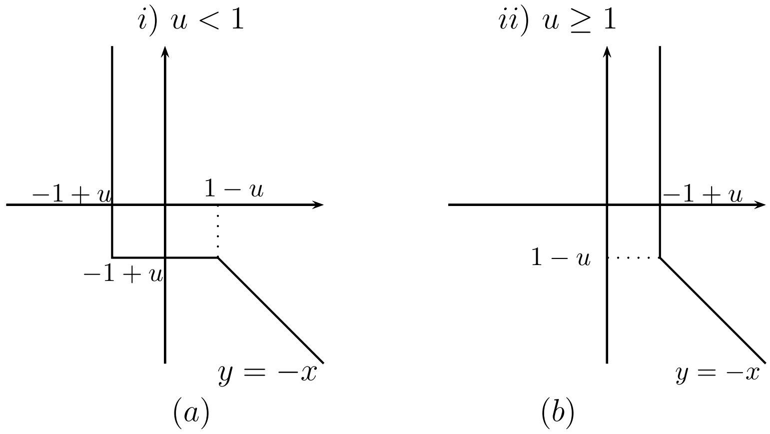
şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyona bağlı $\phi(\cdot)$ *değer dönüşümü ise*

$$\phi(u) = \mathrm{Inf}\{\varphi_F(x,u) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Inf}\{\varphi_F(x,u) \mid x \geq -1\}$$

olarak tanımlanır. Gerekli işlemler yapılırsa bu küme değerli dönüşümün $\forall\ u \in \mathbb{R}$ *için*

$$\phi(u) = \begin{cases} \{(x,y) \mid x = -1+u,\ y \geq -1+u\} \cup & \\ \{(x,y) \mid y = -1+u,\ -1+u \leq x \leq 1-u\} \cup & , \quad u < 1 \\ \{(x,y) \mid x \geq 1-u,\ y = -x\} & \\ & \\ \{(x,y) \mid x = -1+u,\ y \geq 1-u\} \cup & , \quad u \geq 1 \\ \{(x,y) \mid x \geq -1+u,\ y = -x\} & \end{cases}$$

olduğu görülür. Değer dönüşümünün görüntü kümesi Şekil 3.9 (a) ve (b)'de gösterildiği gibidir.



Şekil 3.9: (a) $u < 1$ iken değer dönüşümünün görüntü kümesi (b) $u \geq 1$ iken değer dönüşümünün görüntü kümesi

ϕ'nin 0 'da zayıf subdiferansiyellenebilir olduğunu göstermek için $\forall\ u \in \mathbb{R}$ için $\phi(0) \not\subset \phi(u) + L\|u\| + int\mathbb{R}^2_+$ olacak şekilde $L > 0$ sayısının varlığını gösterelim.

$\phi(0) = \mathrm{Inf}(VOP)$ olduğu açıktır. $L = 1$ seçilirse $u < 1$ ve $u \neq 0$ iken $\forall\ (x,y) \in \{(x,y) \mid x \geq 1-u,\ y = -x\} \subset \phi(u)$ için

$$(x,y) + L\|u\| = (x+|u|, y+|u|) = (x+|u|, -x+|u|) \in \{(x,y) \mid y > -x\}$$

olduğundan

$$\phi(0) \not\subset \phi(u) + L\|u\| + int\mathbb{R}^2_+$$

olur. $u = 0$ ve $u \geq 1$ için de

$$\phi(0) \not\subset \phi(u) + L\|u\| + int\mathbb{R}^2_+$$

olduğu açıktır. O halde $\forall\ u \in \mathbb{R}$ için

$$\phi(0) \not\subset \phi(u) + L\|u\| + int\mathbb{R}^2_+$$

elde edilir. O halde ϕ dönüşümü $\forall\ y \in \phi(0) \setminus \bigcup_{u \in \mathbb{R}} \phi(u) + L\|u\| + int\mathbb{R}^2_+ = \phi(0)$ için $(0,y)$'de dolayısıyla 0 noktasında zayıf subdiferansiyellenebilirdir. O halde Güçlü Duallik Teoremi gereği $\mathrm{Inf}(VOP) = \mathrm{Sup}(D_F^w)$ olur.

Şimdi (VOP) probleminin zayıf Fenchel dual problemini oluşturalım.

(VOP) probleminin zayıf Fenchel dual problemi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$(D_F^w) \qquad \text{Sup} \bigcup_{(a,b,d)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+} \text{Inf} \bigcup_{x_0\geq -1} [(ax_0, bx_0) + (d|x_0|, d|x_0|) - f^w(x_0, a, b, d)]$$

Gerekli hesaplamalar yapılırsa $\forall\ x_0 \geq 0$ *için*

$$
f^w(x_0,a,b,d) = \begin{cases}
+\infty & , \begin{array}{l} d > \text{maks}\{-a+1, 1-b\}\ \textit{veya} \\ d < \min\{-a+1, 1-b\} \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l} \{(x,y) \mid x \leq (d+a-1)x_0, y = (d+b+1)x_0\} \cup \\ \{(x,y) \mid x \geq (d+a-1)x_0, y = (x-2dx_0)\dfrac{-d+b+1}{-d+a-1} + 2dx_0\} \end{array} & , -b+1 \leq d \leq a-1,\ b+1 < d \\[4ex]
\begin{array}{l} \{(x,y) \mid x \leq (d+a-1)x_0, y = (x-2dx_0)\dfrac{-d+b+1}{-d+a-1} + 2dx_0\} \cup \\ \{(x,y) \mid x = (d+a-1)x_0, y \leq (d+b+1)x_0\} \end{array} & , |a-1| < d \leq b+1,\ -b+1 \leq d \\[4ex]
\begin{array}{l} \{(x,y) \mid x \leq (d+a-1)x_0, y = (d+b+1)x_0\} \cup \\ \{(x,y) \mid x \geq (d+a-1)x_0, y \leq (d+b+1)x_0\} \end{array} & , \begin{array}{l} \text{maks}\{-b+1, b+1, a-1\} \leq d, \\ -a+1 < d \end{array} \\[4ex]
\{0\} \times \mathbb{R} & , \begin{array}{l} a = 1, d = 0, b \in \mathbb{R}\ \textit{veya} \\ -b+1 < d = -a+1\ \textit{veya} \\ b+1 < d = -a+1 < -b+1 \end{array} \\[4ex]
\begin{array}{l} \{(x,y) \mid x \leq 0, y = \dfrac{d+b-1}{d+a-1}x\} \\ \cup\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq (d+a-1)x_0,\ y = \dfrac{d+b+1}{d+a-1}x\} \\ \cup\{(x,y) \mid (d+a-1)x_0,\ y = (x-2dx_0)\dfrac{-d+b+1}{-d+a-1} + 2dx_0\} \end{array} & , b+1 < d < \min\{a-1, -b+1\}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\begin{aligned}
&\{(x,y) \mid x \le \overbrace{\frac{(d+b+1)(d+a-1)x_0}{d+b-1}}^{x_1} x_0,\ y = \frac{d+b-1}{d+a-1}x\} \\
&\cup\{(x,y) \mid x_1 \le x \le (d+a-1)x_0, y = (d+b+1)x_0\} \\
&\cup\{(x,y) \mid x \ge (d+a-1)x_0, y = (x-2dx_0)\frac{-d+b+1}{-d+a-1} + 2dx_0\}
\end{aligned} & , b+1 \le d < \min\{a-1, -b+1\} \\[2ex]
\begin{aligned}
&\{(x,y) \mid x \le \overbrace{\frac{dx_0(d-b)(d+a-1)}{-db+ad-a-d+1}}^{x_2}, y = \frac{d+b-1}{d+a-1}x\} \\
&\cup\{(x,y) \mid x_2 \le x \le (d+a-1)x_0, y = (x-2dx_0)\frac{-d+b+1}{-d+a-1} + 2dx_0\} \\
&\cup\{(x,y) \mid x = (d+a-1)x_0,\ y \le (d+b+1)x_0\}
\end{aligned} & , \begin{aligned} &|a-1| < d < \min\{-b+1, b+1\}, \\ &db - ad + a + d - 1 < 0 \end{aligned} \\[2ex]
\begin{aligned}
&\{(x,y) \mid x \le (d+a-1)x_0, y = (x-2dx_0)\frac{-d+b+1}{-d+a-1} + 2dx_0\} \\
&\cup\{(x,y) \mid x = (d+a-1)x_0, y \le (d+b+1)x_0\}
\end{aligned} & , \begin{aligned} &|a-1| < d < \min\{-b+1, b+1\}, \\ &db - ad + a + d - 1 \ge 0 \end{aligned} \\[2ex]
\begin{aligned}
&\{(x,y) \mid x \le x_1,\ y = \frac{d+b-1}{d+a-1}x\} \\
&\cup\{(x,y) \mid x_1 \le x \le (d+a-1)x_0,\ y = (d+b+1)x_0\} \\
&\cup\{(x,y) \mid x = (d+a-1)x_0, y \le (d+b+1)x_0\}
\end{aligned} & , \begin{aligned} &\text{maks}\{-a+1, -b-1\} < d < -b+1, \\ &\text{maks}\{a-1, b+1\} \le d \ \textit{veya} \\ &\text{maks}\{a-1, -b-1\} \le d < -b+1, \\ &\text{maks}\{-a-1, b+1\} < d \end{aligned} \\[2ex]
\mathbb{R} \times \{(d+b+1)x_0\} & , -b+1 \le d = b+1 < a-1
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\begin{array}{ll}
\{(x,y) \mid x \leq 0, y = \frac{d+b-1}{d+a-1}x\} & \\
\cup\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq (d+a-1)x_0, y = \frac{d+b+1}{d+a-1}x\} & , -a+1 < d < -b-1, a-1 \leq d \\
\cup\{(x,y) \mid x = (d+a-1)x_0, y \leq (d+b+1)x_0\} & \\
 & \\
\{(x,y) \mid x \leq (d+a-1)x_0, y = (x-2dx_0)\frac{-d+b+1}{-d+a-1} + 2dx_0\} & \\
\cup\{(x,y) \mid (d+a-1)x_0 \leq x \leq 0, y = \frac{d+b+1}{d+a-1}x\} & , -b+1 \leq d \leq b+1, d < -a+1 \\
\cup\{(x,y) \mid x \geq 0,\ \ y = \frac{d+b-1}{d+a-1}x\} & \\
 & \\
\{(x,y) \mid x \leq (d+a-1)x_0, y = (d+b+1)x_0\} & \\
\cup\{(x,y) \mid (d+a-1)x_0 \leq x \leq 0, y = \frac{d+b+1}{d+a-1}x\} & , b+1 < d < -a+1, -b+1 \leq d \\
\cup\{(x,y) \mid x \geq 0, y = \frac{d+b-1}{d+a-1}x\} & \\
\{(x,y) \mid x \leq 0,\ \ y = (x-2dx_0)\frac{-d+b+1}{-d+a-1} + 2dx_0\} & \\
 & , -b+1 \leq d = -a+1 \leq b+1 \\
\cup\{(x,y) \mid x = 0, y \leq (d+b+1)x_0\} & \\
\{(d+a-1)x_0\} \times \mathbb{R} & , d = a-1 < b+1 \\
\{(x,y) \mid x \leq 0, y = (d+b+1)x_0\} & \\
 & , -b+1 \leq d = -a+1, b+1 < d \\
\cup\{(x,y) \mid x = 0, y \leq (d+b+1)x_0\} &
\end{array}
\end{cases}
$$

ve $\forall\ -1 \leq x_0 \leq 0$ *için*

$$
f^w(x_0,a,b,d) = \begin{cases}
+\infty & , \begin{array}{l} d < \min\{a-1, b+1\}\ \textit{veya} \\ d < \min\{-a+1, -b+1\} \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l}
\{(x,y) \mid x \leq (-d+a-1)x_0, y = (-d+b-1)x_0\} \\
\cup\{(x,y) \mid (-d+a-1)x_0 \leq x \leq 0, y = \dfrac{-d+b-1}{-d+a-1}x\} \\
\cup\{(x,y) \mid x \geq 0, y = \dfrac{-d+b+1}{-d+a-1}x\}
\end{array} & , \text{maks}\{-b+1, b+1\} \leq d < a-1 \\[2ex]
\begin{array}{l}
\{(x,y) \mid x \leq (-d+a-1)x_0, y = (x+2dx_0)\dfrac{d+b-1}{d+a-1} - 2dx_0\} \\
\cup\{(x,y) \mid (-d+a-1)x_0 \leq x \leq 0, y = \dfrac{-d+b-1}{-d+a-1}x\} \\
\cup\{(x,y) \mid x \geq 0, y = \dfrac{-d+b+1}{-d+a-1}x\}
\end{array} & , b+1 \leq d \leq -b+1, d < a-1 \\[2ex]
\begin{array}{l}
\{(x,y) \mid x \leq 0, y = \dfrac{-d+b+1}{-d+a-1}x\} \\
\cup\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq (-d+a-1)x_0, y = \dfrac{-d+b-1}{-d+a-1}x\} \\
\cup\{(x,y) \mid x = (-d+a-1)x_0, y \leq (-d+b-1)x_0\}
\end{array} & , a-1 < d \leq b-1, -a+1 \leq d \\[2ex]
\begin{array}{l}
\{(x,y) \mid x \leq (-d+a-1)x_0, y = (x+2dx_0)\dfrac{d+b-1}{d+a-1} - 2dx_0\} \\
\cup\{(x,y) \mid x = (-d+a-1)x_0, y \leq (-d+b-1)x_0\}
\end{array} & , \ |a-1| < d,\ b+1 \leq d \leq -b+1
\end{cases}
$$

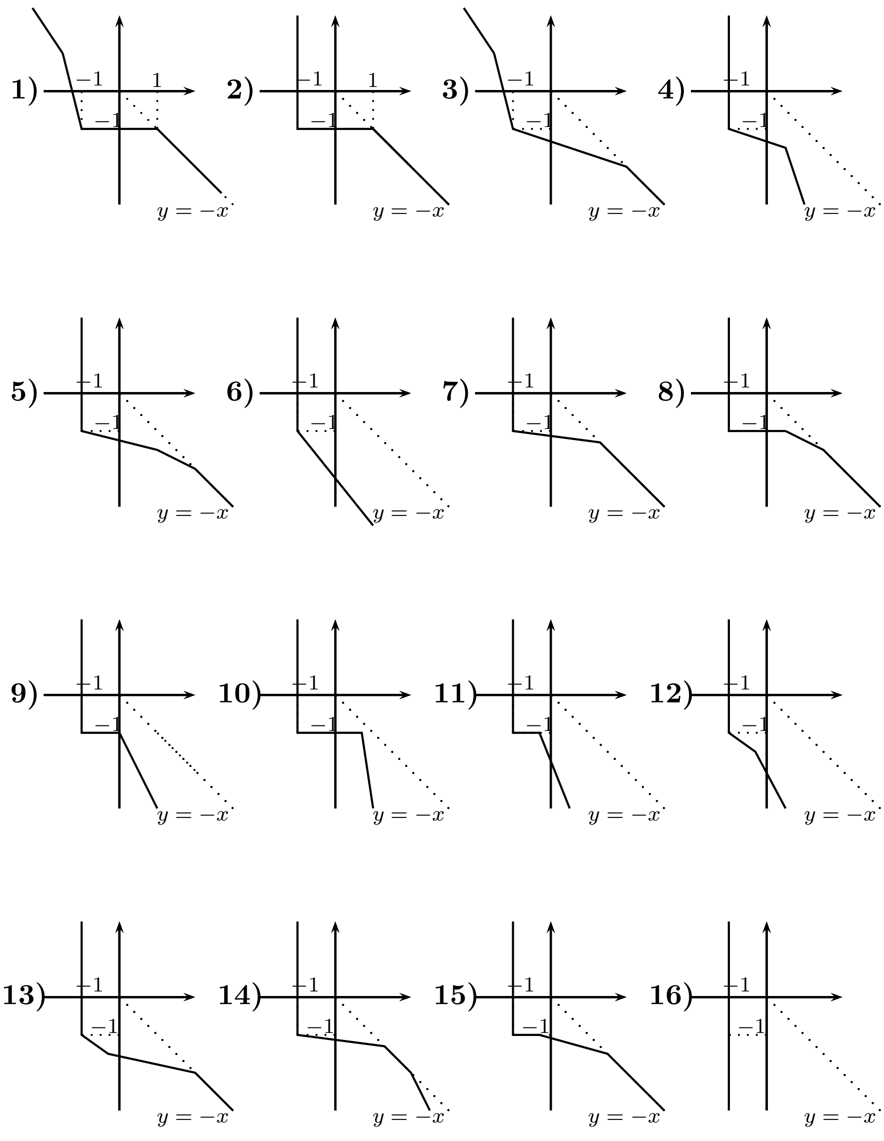
$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\{(x,y)\mid x \le \overbrace{\frac{(-d+b-1)(-d+a-1)}{-d+b+1}}^{x'} x_0,\ y = \frac{-d+b+1}{-d+a-1}x\} & \\
\cup\{(x,y)\mid x' \le x \le (-d+a-1)x_0,\ y=(-d+b-1)x_0\} & ,\ |b-1| \le d < \min\{-a+1, b+1\} \\
\cup\{(x,y)\mid (-d+a-1)x_0 \le x,\ y=(x+2dx_0)\dfrac{d+b-1}{d+a-1}-2dx_0\} & \\
\{(-d+a-1)x_0\}\times\mathbb{R} & ,\ d=-a+1<-b+1 \\
 & \\
\{(x,y)\mid x \le (-d+a-1)x_0,\ y=(-d+b-1)x_0\} & \\
\cup\{(x,y)\mid x=(-d+a-1)x_0,\ y\le(-d+b-1)x_0\} & ,\ \text{maks}\{-a+1,-b+1,b+1\}\le d,\ a-1<d \\
\{(x,y)\mid x \le (-d+a-1)x_0,\ y=(-d+b-1)x_0\} & \\
\cup\{(x,y)\mid (-d+a-1)x_0 \le x,\ y=(x+2dx_0)\dfrac{d+b-1}{d+a-1}-2dx_0\} & ,\ b+1\le d,\ -b+1<d<-a+1 \\
 & \\
\{(x,y)\mid x\le 0,\ y=(x+2dx_0)\dfrac{d+b-1}{d+a-1}-2dx_0\} & \\
\cup\{(x,y)\mid y\le(-d+b-1)x_0,\ x=0\} & ,b+1\le d=a-1<-b+1 \\
 & \\
 & \quad b-1<d=a-1<b+1\ veya \\
\{0\}\times\mathbb{R} & ,\ -b+1<d=a-1<b+1\ veya \\
 & \quad a=1, d=0, b\in\mathbb{R}
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{cases}
\begin{array}{l}
\{(x,y)\mid x\le \overbrace{\dfrac{dx_0(b-a)}{-db+ad-a+1-d}}^{x''}, y=\dfrac{-d+b+1}{-d+a-1}x\}\\
\cup\{(x,y)\mid x''\le x\le(-d+a-1)x_0, y=(x+2dx_0)\dfrac{d+b-1}{d+a-1}-2dx_0\}\\
\cup\{(x,y)\mid x=(-d+a-1)x_0, y\le(-d+b-1)x_0\}
\end{array} & , \begin{array}{l} |a-1|<d<\min\{b+1,-b+1\}\\ db-ad+a-1+d<0\end{array}\\
\begin{array}{l}
\{(x,y)\mid x\le(-d+a-1)x_0, y=(x+2dx_0)\dfrac{d+b-1}{d+a-1}-2dx_0\}\\
\cup\{(x,y)\mid x=(-d+a-1)x_0, y\le(-d+b-1)x_0\}
\end{array} & , \begin{array}{l} |a-1|<d<\min\{-b+1,b+1\}\\ db-ad+a-1+d\ge 0\end{array}\\
\begin{array}{l}
\{(x,y)\mid x\le 0, y=\dfrac{-d+b+1}{-d+a-1}x\}\\
\cup\{0\le x\le(-d+a-1)x_0, y=\dfrac{-d+b-1}{-d+a-1}x\}\\
\cup\{(x,y)\mid(-d+a-1)x_0\le x, y=(x+2dx_0)\dfrac{d+b-1}{d+a-1}-2dx_0\}
\end{array} & , \ d<\min\{-a+1,b-1\}\\
\begin{array}{l}
\{(x,y)\mid x\le x', y=\dfrac{-d+b+1}{-d+a-1}x\}\\
\cup\{(x,y)\mid x'\le x\le(-d+a-1)x_0, y=(-d+b-1)x_0\}\\
\cup\{(x,y)\mid x=(-d+a-1)x_0, y\le(-d+b-1)x_0\}
\end{array} & , \begin{array}{l} \text{maks}\{a-1,b-1\}<d<b+1\\ \text{maks}\{-a+1,-b+1\}\le d<b+1\end{array}\\
\begin{array}{l}
\{(x,y)\mid x\le 0, y=(-d+b-1)x_0\}\\
\cup\{(x,y)\mid y\le(-d+b-1)x_0, x=0\}
\end{array} & , \text{maks}\{-b+1,b+1\}\le d=a-1\\
\mathbb{R}\times\{(-d+b-1)x_0\} & , \ b+1\le d=-b+1<-a+1
\end{cases}
$$

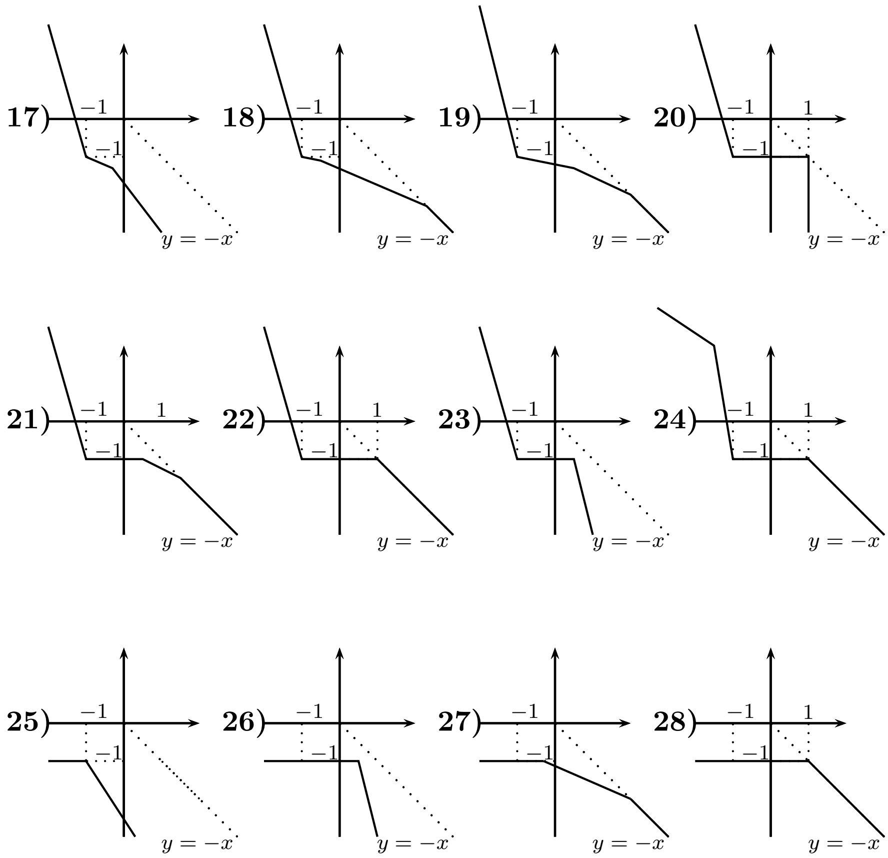
elde edilir. $(a, b, d) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ *üçlülerinin çeşitli durumlarına göre*

$$\operatorname{Inf} \bigcup_{x_0 \geq -1} [(ax_0, bx_0) + (d|x_0|, d|x_0|) - f^w(x_0, a, b, d)]$$

kümeleri Şekil 3.10 ve Şekil 3.11'de verilmiştir.



Şekil 3.10: $\operatorname{Inf} \bigcup_{x_0 \geq -1} [(ax_0, bx_0) + (d|x_0|, d|x_0|) - f^w(x_0, a, b, d)]$ kümeleri



Şekil 3.11: $\operatorname{Inf} \bigcup_{x_0 \geq -1} [(ax_0, bx_0) + (d|x_0|, d|x_0|) - f^w(x_0, a, b, d)]$ kümeleri

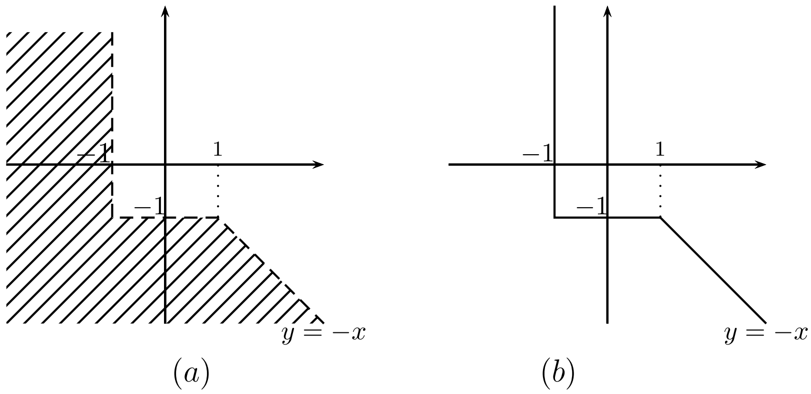
Bu şekillere göre

$$\bigcup_{(a,b,d)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+} \operatorname{Inf} \bigcup_{x_0 \geq -1} [(ax_0, bx_0) + (d|x_0|, d|x_0|) - f^w(x_0, a, b, d)]$$

birleşim kümesinin alt noktaları kümesi

$$\{(x, y) \mid x = -1, y \geq -1\} \cup \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, y = -1\} \cup \{(x, y) \mid x \geq 1,\ y = -x\}$$

kümesinin alt noktaları kümesidir. Dolayısıyla bu kümenin supremum kümesi ise (D_F^w) *zayıf Fenchel dual problemin çözümüdür ki bu çözüm* (VOP) *probleminin çözümüdür. (Bu iki küme Şekil 3.12 (a) ve Şekil 3.12 (b)'de gösterilmiştir.)*



Şekil 3.12: (a) $\bigcup\limits_{(a,b,d)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+} \text{Inf} \bigcup\limits_{x_0\geq -1} [(ax_0, bx_0) + (d|x_0|, d|x_0|) - f^w(x_0, a, b, d)]$ kümesinin alt noktaları kümesi

(b)Sup $\bigcup\limits_{(a,b,d)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+} \text{Inf} \bigcup\limits_{x_0\geq -1} [(ax_0, bx_0)+(d|x_0|, d|x_0|)-f^w(x_0, a, b, d)]$ kümesi

KAYNAKLAR

[1] Fenchel, W., "On conjugate convex functions", *Canadian Journal of Mathematics*,**1**, 73-77, 1949.

[2] Rockafellar, R.T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton N.J., 1970.

[3] Moreau, J. J., "Inf-convolution des fonctions numériques sur un espace vectoriel", *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences Paris*, **256**, 5047-5049, 1963.

[4] Ekeland, I. ve Temam, R., *Convex Analysis and Variational Problems*, Elsevier North-Holland, Amsterdam, 1976.

[5] Kuhn, H.W. ve Tucker, A.W., "Nonlinear Programming", *Proc.* 2^{nd} *Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley, California, 1951.

[6] Hanson, M.A., "On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **80**, 545-550, 1981.

[7] Jeyakumar, V. ve Wolkowicz, H.,"Zero duality gaps in infinite-dimensional prgramming", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **67**, 87-108,1990.

[8] Rockafellar, R.T., "Augmented Lagrange multiplier functions and duality in nonconvex programming", *SIAM Journal on Control and Optimization*,**12**,1-19,1974.

[9] Li, D., "Zero duality gap for a class of nonconvex optimization problems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **85**,309-324, 1995.

[10] Altangerel, L., Bot, R.I ve Wanka, G., "Conjugate Duality in Vector Optimization and Some Applications to the Vector Variational Inequality", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **329**, 1010-1035, 2007.

[11] Bot, R.I, Kassay, G.ve Wanka, G., "Strong Duality for Generalized Convex Optimization Problems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **127**, 45-70, 2005.

[12] Azimov, A.Y., "Duality for Set-Valued Multiobjective Optimization Problems, Part 1: Mathematical Programming", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **137**, 61-74, 2008.

[13] Azimov, A.Y. ve Gasimov, R.N., "On Weak Conjugacy, Weak Subdifferentials and Duality With Zero Gap In Nonconvex Optimization", *Intertnational Journal of Applied Mathematics*, **1**, 171-192, 1999.

[14] Azimov, A.Y. ve Gasimov, R.N., "Stability and Duality of Nonconvex Problems Via Augmented Lagrangian", *Cybernetics and Systems Analysis*, **38**, 412-421, 2002.

[15] Gale, D., Kuhn, H. W. ve Tucker, A.W., "Linear programming and the theory of games", *Activity Analysis of Production and Allocation* (Ed:T. C. Koopmans), John Wiley and Sons, New York, 317-329, 1951.

[16] Kornbluth, J.S.H., "Duality, indifference and sensitivity analysis in multiple objective linera programming", *Operational Research Quarterly*, *25*, 599-614, 1974.

[17] Rödder, .W, "A generalized saddlepoint theory; its application to duality theory for linear vector optimum problems", *European Journal of Operational Research*, **1 (1)**, 55-59, 1977.

[18] Isermann, H., "Duality in multiple objective linear programming", *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer Verlag, Berlin, 1978.

[19] Tanino, T. ve Sawaragi, Y., "Duality theory in multiobjective programming", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **27**, 509-529, 1979.

[20] Brumelle, S., "Duality for multiple objective convex programs", *Mathematics of Operations Research*, **6 (2)**, 159-172, 1981.

[21] Kawasaki,H., "A duality theorem in multiobjective nonlinear programming", *Mathematics of Operations Research*, **7 (1)**, 95-110, 1982.

[22] Tanino, T., "Conjugate duality in vector optimization", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **167**, 84-97, 1992.

[23] Corley,H. W., "Existence and Lagrangian duality for maximizations of set-valued functions", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **54**, 489- 501, 1987.

[24] Nakayama,H., "Geometric consideration of duality in vector optimization", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **44**, 625-655, 1984.

[25] Tanino, T., Sawaragi, Y., "Conjugate maps and duality in multiobjective optimization", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **31**, 473-499, 1980.

[26] Luc,D.T., "On duality theory in multiobjective programming", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **43**, 557-582, 1984.

[27] Luc,D.T., "About duality and alternative in multiobjective programming", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **53**, 303-307, 1987.

[28] Li, S.J., Chen, C.R. ve Wu, S.Y., "Conjugate dual problems in constrained set-valued optimization and applications", *European Journal of Operational Research*, **196**, 21-32, 2009.

[29] Altangerel, L., Bot, R.I ve Wanka, G., "Variational Principles for vector equilibrium problems related to conjugate duality", *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **8**, 179-196, 2007.

[30] Wanka, G. ve Bot, R.I, "On the relations between different dual problems in convex mathematical programming", *Operations Research Proceedings 2001* (ed: P. Chamoni, R. Leisten, A. Martin, J. Minnemann, H. Stadtler), Springer-Verlag, Berlin, 255-262, 2002.

[31] Song, W., "Conjugate duality in set valued vector optimization", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*,**216**,265-283,1997.

[32] Song, W., "A generalization of Fenchel duality in set-valued vector optimization", *Mathematical Methods of Operations Research*,**48**,259-272,1998.

[33] Tanino, T., "On supremum of a set in a multi-dimensional space", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **130**, 386-397, 1988.

[34] Jahn, J., *Vector Optimization*, Springer, Heidelberg, 2004.

[35] Aubin, J.P ve Frankowska, H., *Set-Valued Analysis*, Birkhauser, Boston, 1990.