

176004

**BİR UÇAĞIN KOORDİNELİ DÖNÜŞÜNÜN
MODEL REFERANSLI KONTROLÜ**

Hakan KORUL
Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Sivil Havacılık Anabilim Dalı
Şubat – 2003

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Hakan Korul'un Bir Uçağın Koordineli Dönüşünün Model Referanslı Kontrolü başlıklı **Sivil Havacılık** Anabilim Dalındaki, Doktora tezi 26.02.2003 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Adı-Soyadı

İmza

Üye (Tez Danışmanı) : Yrd. Doç. Dr. Osman PARLAKTUNA

Üye : Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Üye : Doç. Dr. Mustafa CAVCAR

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 26.02.2003 tarih ve 7/1 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Orhan ÖZER
Fen Bilimleri Enstitüsü
Müdürü

Anadolu Üniversitesi
Merkez Kütüphanesi

ÖZET

Doktora Tezi

BİR UÇAĞIN KOORDİNELİ DÖNÜŞÜNÜN MODEL REFERANSLI KONTROLÜ

HAKAN KORUL

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Sivil Havacılık Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr.Osman PARLAKTUNA
2003, 83 sayfa

Bu tezde bir uçağın boyutsuz kararlılık türevlerinden oluşan katsayılara sahip pay ve payda polinomu biçimindeki transfer fonksiyonlarından oluşan transfer matrisi yapısının modellenmesi ve kontrolü ele alınmıştır. Sistemin dinamik denklemleri Newton'un ikinci yasasından başlayarak türetilmiş ve sistemin dinamiği doğrusal durum uzayı modeli ile gösterilmiştir. Uçağın doğrusallaştırılmış dinamik denklemlerinden türetilmiş transfer matrisi, MATLAB dilinde hazırlanan bir benzetim programı yardımıyla çözümlenerek sistemin tepkisi bulunmuştur. Uçağın koordine viraj hareketi yapmasını sağlamak üzere model referans tekniğinden oluşturulmuş kontrol kuralını kullanan bir uçuş kontrol sistemi tasarlanmıştır. Tasarlanan kontrolörler için sistemin benzetimi yapılarak elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Transfer Matrisi, Uçuş Kontrol Sistemi, Model Referans Kontrol

ABSTRACT

PhD Thesis

MODELING AND CONTROL OF AN AIRCRAFT FOR COORDINATED TURN BY MODEL REFERENCE CONTROL

HAKAN KORUL

**Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Civil Aviation Program**

**Supervisor: Assoc.Prof.Osman PARLAKTUNA
2003, 83 pages**

In this thesis, modeling and control of an aircraft is considered. The aircraft is planned to make a coordinated turn with a single command of control system or pilot. The system is modelled by transfer matrix and the dynamics of the system is represented as transfer functions whose transfer function parameters are made of dimensionless stability derivatives. Dynamics of the aircraft and controller are solved by a simulation program developed in MATLAB in order to find the response of the system. A model reference controller is designed for multi-input multi-output system to achieve a wing level steady turning flight. Simulation results for the designed controller are presented.

Keywords: Transfer Matrix, Flight Control Systems, Model Reference Control

TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın her aşamasında yaptığı sonsuz katkılardan dolayı danıőmanım Sayın Yrd.Do.Dr. **Osman Parlaktuna**'ya en iten teőekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. UÇAK HAREKET DENKLEMLERİ	7
2.1. Durum-Uzay Formülasyonu.....	7
2.2. Serbestlik Dereceleri	8
2.3. Dinamik Analiz	9
2.3.1. Aktarımsal Hareket	9
2.3.2. Kütleli Çekim Kuvveti.....	13
2.3.3. İvmelenme Ölçümleri	16
2.3.4. Aktarımsal Denklemler	18
2.3.5. Açısal Hareket.....	19
2.4. Kinematik Analiz	24
2.4.1. Dünya Çevresinde Seyrüsefer	24
2.4.2. Dünya ve Ufka Göre Meyil Gösterimi	27
2.4.3. Üç Değişkenli Pozisyon Denklemleri	30
2.4.4. Dört Değişkenli Pozisyon Denklemleri	31
2.4.5. Kuadratik Diferansiyel Denklemleri	34
2.5. Durum Denklemlerini Birleştirmek	35
2.5.1. Yuvarlak Dünya Denklemleri	35
2.5.2. Yassı Dünya Denklemleri	35
2.6. Doğrusal Olmayan Uçak Modeli.....	37

2.6.1. Aerodinamik Kuvvet ve Momentleri Birleştirmek	39
2.6.2. Doğrusal Olmayan Denklemlerin Ayrıştırılması	40
2.7. Doğrusal Modeller ve Kararlılık Türevleri	42
2.7.1. Tekil Noktalar ve Yatışkın Durum Uçuşu	42
2.7.2. Doğrusallaştırma	45
2.7.3. Ayrışmış Doğrusal Durum Denklemleri	45
2.7.4. Boyutsuz Kararlılık ve Kontrol Türevleri	47
2.7.5. Boyutsuz Kararlılık Türevleri Tanımları	49
3. UÇUŞ KONTROL KURALI TASARIMI.....	52
4. ÇOK DEĞİŞKENLİ MODEL REFERANSLI KONTROL.....	57
5. ÇOK DEĞİŞKENLİ MODEL REFERANSLI KONTROL KURALININ KOORDİNE VİRAJ HAREKETİNE UYARLANMASI	68
6. SONUÇLAR.....	80
7. ÖNERİLER.....	81
KAYNAKLAR	82

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
1.1 Otomatik uçuş kontrol sisteminin genel yapısı.....	3
1.2 Model referans uyarlamalı sistemin blok gösterimi	5
2.1 Kinematik analiz için koordinat eksenleri	10
2.2 Yuvarlak Dünya denklemleri için kullanılan değişkenler	25
5.1 Model referanslı kontrol sisteminin yapısı	72
5.2 Model referanslı kontrol kuralının Matlab Simulink benzetim şeması	73
5.3 Referans model çıktısı ile gerçek sistem çıktısı arasındaki fark.....	74
5.4 Tüm sıfırları sol yarı düzlemde bulunan $T_0(s)$ ideal sisteminin çıktısı.....	75
5.5 Model sistem çıktısı.....	75
5.6 Hesaplanan kontrol girdisi	76
5.7 Kararlılık türevlerinin oluşturduğu transfer fonksiyonlarından oluşan $G(s)$ gerçek sistem transfer matrisi tepkisi	77
5.8 Kanatçık değişimi için takip hatası.....	78
5.9 İstikamet dümeni değişimi için takip hatası	79

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
2.1 Hareket denklemlerinde kullanılan değişkenler	12
2.2 Düz Dünya, gövde eksen sistemi 6 serbestlik derecesi denklemleri	38

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

ABC	: Uçak gövdesi eksen takımı (aircraft body coordinate system)
ATAN	: Ters tanjant
a_p	: Mutlak ivme
a'_p	: Ölçülen ivme
ail	: Kanatçık (aileron)
B	: Yerçekimi ivmesini ABC sistemine çeviren matris
B_B, B_μ, B_l	: Eksen takımları arasındaki dönüşüm matrisleri
B_ϕ, B_θ, B_ψ	: Eksen takımları arasındaki dönüşüm matrisleri
b	: Kanat açıklığı
$C_{(.)}$: Kararlılık türevleri
Cos	: Kosinüs
\bar{c}	: Kanat geometrik veteri
dt	: Hareketli yatay stabilize (differential tail)
ECI	: Dünya merkezli eylemsizlik referans sistemi
el	: İrtifa dümeni (elevator)
e	: Hata
F	: Aerodinamik ve itme kuvvetlerinin vektör toplamı
f	: Vektör fonksiyonu
g'_o	: 32.17 ft / sn ²
g	: Yer çekimi vektörü
G	: Transfer matrisi
H	: Açısal momentum vektörü
$H(s)$: Hermite normal biçim matrisi
$J_{(.)}$: Eylemsizlik momenti
L, M, N	: Yatış, yunuslama, sapma momentleri
m	: Uçak kütlesi
NED	: Kuzey doğu aşağı eksen sistemi (North-east-down)
P, Q, R	: Yatış, yunuslama, sapma açısal hızları
$p(t)$: Pozisyon vektörü

\mathbf{p}	: Eylemsizlik pozisyon vektörü
q	: Kuadratik değişken
\bar{q}	: Serbest hava akısı dinamik basıncı
rdr	: İstikamet dümeni (rudder)
r_E	: Dünya'nın yarıçapı
\sin	: Sinüs
S	: Referans kanat alanı
s	: Kompleks frekans
\mathbf{T}	: Tork vektörü
$\mathbf{T}_0(s)$: Transfer matrisi
t	: Zaman (sn)
thl	: İtme (throttle)
U, V, W	: İleri yön hızları
\mathbf{U}	: N boyutlu kontrol vektörü
\mathbf{W}_m	: Model sistem matrisi
\mathbf{v}_B	: Bağlı hız vektörü
\mathbf{x}	: Pozisyon vektörü
$\dot{\mathbf{x}}$: Pozisyon vektörüne ait hız vektörü
\mathbf{X}	: Durum vektörü
\mathbf{Y}	: Sistem çıkış vektörü
ζ	: Bozucu etki
$\zeta(s)$: "Interactor" matrisi
Σ	: Toplam
λ, μ	: Enlem açıları
μ	: Belirsizlik katsayısı
$\boldsymbol{\omega}_B$: Gövde eksen takımına göre açısal hız vektörü
$\boldsymbol{\omega}_E$: Dünya'nın dönüş hızı
δ	: Küçük fark
$\Delta(s)$: Transfer matrisi
Ψ, ϕ, θ	: Sapma, yatış, yunuslama açıları
α	: Hücüm açısı

β	: Yana kayış açısı
γ	: Yörünge açısı
∂	: Kısmi türev
\in	: Eleman
\mathfrak{R}^N	: N boyutlu gerçel uzay
Φ	: Euler açıları vektörü

Alt ve üst indisler

cg.	: Ağırlık merkezi (center of gravity)
B	: Gövde (body) eksen takımına göre
I	: Eylemsizlik
x	: Uçağın uzunlamasına eksen koordinatı
y	: Uçağın yanlamasına eksen koordinatı
z	: Uçağın düşey eksen koordinatı
W	: Rüzgar (kararlılık) eksen takımına göre

1. GİRİŞ

Herhangi bir aracın hareketi ele alındığında, hareketin başlangıç noktasından varış noktasına kadar ne ölçüde kontrol edilebildiği, bir başka deyişle kullanıcının kontrol komutlarına aracın hangi hassasiyetle tepki verdiği o aracın değerini belirler (Kahvecioğlu, 2000). Bu nedendir ki balon gibi hava araçları hassas görevler sırasında çok sıklıkla kullanılmamaktadır. Bir aracın davranışını onun hız vektörü ile tam olarak karakterize etmek mümkündür. Bu vektörün zamana göre entegrali aracın uzay içindeki yoludur. $\dot{\mathbf{x}}$ ile gösterilen hız vektörü aracın uzay içindeki pozisyonundan, \mathbf{x} , kontrol girdisinden, \mathbf{u} , herhangi bir bozucu etkiden, ξ , ve zamandan, t , etkilenir. Böylece aracın hareketi en genel şekilde bir vektör diferansiyel denklemiyle gösterilebilir (McLean, 1990).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \xi, t) \quad 1.1$$

Burada \mathbf{f} bir vektör fonksiyonudur. Uzay içindeki hareket yörüngesi vektör fonksiyonu ile belirlenmiş bir aracın hareketi büyük ölçüde çalıştığı ortamdaki fiziksel kısıtlamalara bağlıdır. Sözelimi lokomotif sadece ileri ya da geri hareket edebilir ve hızı kontrol edilebilir. Otomobiller ise hem hareket yönü hem de hareket hızı olarak kontrol edilebilmektedirler. Aynı durum gemiler içinde geçerlidir. Uçan bir cismin hareketi ise diğer araçlardan farklıdır. Bu hareket altı serbestlik derecesine sahiptir. Bunlardan üç tanesi uçağın ağırlık merkezi etrafındaki açılma hareketi ile, diğer üçü ise ağırlık merkezinin belirli bir referans sistemine göre yer değiştirmesi olarak ifade edilebilir. Büyük ölçüdeki hareket serbestliğinden dolayı uçak kontrol problemleri diğer araçların kontrol problemlerine göre daha karmaşıktır.

Uçakta kontrol problemi, uçağın uçuş zarfı içinde bir uçuş durumunda uzun süre kalmamasından kaynaklanmaktadır. İç ve dış ortam uyarılarından kaynaklanan bozuntulardan dolayı, uçağın dinamik durumu genellikle bir kaç dakika içinde değişir. Bu nedenle, herhangi bir uçuş durumu için tasarlanmış bir kontrol sistemi, bu denge durumundan sapma halinde istenen kararlılık ve performans özelliklerini vermeyebilir.

Bir uçağın hız vektörünün yönü, büyüklüğü ya da her ikisinin birden

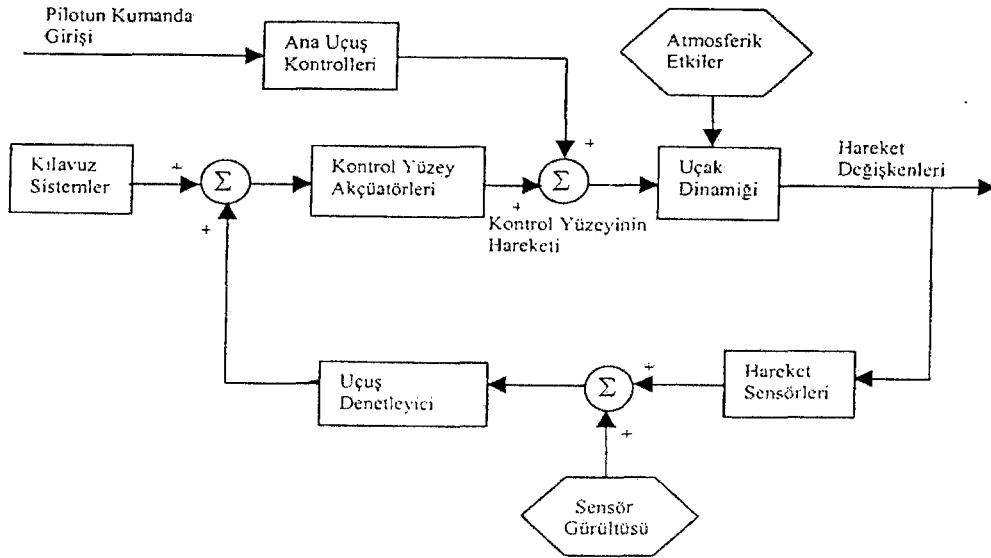
değişmeye karşı duyarlı olmasının derecesi uçağın kararlılık seviyesini oluşturmaktadır. Bunun yanı sıra hız vektörünün değiştirilebilirliği uçağın kontrol kalitesini oluşturur. Kararlılık kavramı bir uçağın yatışkın ve sabit hızlı davranışının temelini oluştururken uçak manevraları kontrol girdileri tarafından meydana getirilmektedir. Kendi haline bırakılan uçağın yörüngesi kararlı değildir. Kontrolsüz uçak devamlı olarak dönüş hareketi yapma eğilimindedir. Düzgün ve belli bir seviyede uçmak için sürekli ve kontrollü düzeltmeler ya pilot tarafından ya da otomatik uçuş kontrol sistemi yardımıyla yapılmalıdır. Uçakta kullanılan otomatik uçuş kontrol sisteminin geri besleme kontrolü kullanmasının sağladığı bazı yararlar vardır. Tepki hızının artması, verilen kumandanın uçak tarafından takibinin daha iyi yapılması ve uçuş sırasında oluşabilecek istenmeyen etkilerin belirli bir kısmının bastırılabilmesi bunlar arasında sayılabilir.

Fakat belli koşullar altında geri besleme kontrol sistemleri salınımına girme eğilimindedir. Bu durumda otomatik uçuş kontrol sistemi kararlılık açısından zayıftır. Geri besleme döngülerinde yüksek kazanç değerlerinin kullanılması dinamik tepkinin hızlı ve hassas elde edilmesine yardımcı olmasına rağmen her zaman iyi bir kararlılık sağlamayabilir. Bu nedenle, otomatik uçuş kontrol sistem tasarımcıları kararlılık ve kontrol için istenenler arasında kabul edilebilir bir denge bulmak zorundadırlar.

Uçağın, daimi yatay uçuş kabiliyeti, atmosfer içindeki bozucu etkilerin düzeltilmesi ve pilotun kumandalarına yeterlikle cevap vermesi, onun kararlılık ve kumanda karakteristikleri ile ilgilidir. Bir uçağın mükemmel olması için, yeterli performans karakteristiklerine ek olarak, iyi kararlılık ve kumanda özelliklerine de sahip olması gerekir. Bir uçağa etki eden bütün kuvvetler ve momentlerin toplamı sıfır olduğunda uçak statik denge durumundadır. Uçak statik denge durumunda iken hiç bir ivmeye sahip değildir ve pilot tarafından kumandalardan birinin oynatılması veya atmosferdeki bozucu etkilerle kuvvet veya moment dengesi bozuluncaya kadar, düzgün bir uçuş durumunu korur. Denge durumunun herhangi bir nedenle bozulması, denge durumunu geri getirecek yönde bir hareket başlatan kuvvetler veya momentler oluşturduğunda, uçak statik olarak karardır denir. Uçak bir denge durumuna getirildikten ve statik kararlılık sağlandıktan sonra dengenin bozulması halinde başlayan hareket, sonunda uçağı yeniden denge

durumuna ulaştırırsa uçak dinamik olarak da kararlılığa sahiptir denir. Bir uçak statik olarak kararlı olduğu halde, dinamik olarak kararlı olmayabilir. Fakat dinamik kararlılık için mutlaka statik kararlılığın sağlanmış olması gerekir.

Uçağı, üç boyutlu uçuş yörüngesinde belirlenen bir hedefe yönlendirmek için gerekli ivmeleri üreten kuvvetler ve momentler, her uçakta bulunan ana kontrol yüzeyleriyle sağlanır. Bunlar irtifa dümeni, kanatçıklar ve istikamet dümenidir. Bu kontrol yüzeylerine ilave olarak uçağı yönlendirmek için her uçakta bulunan diğer elemanlar ise hareket algılayıcılarıdır. Bu algılayıcılar, uçak atmosfer içinde herhangi bir bozucu etkiyle karşılaştığında ya da pilot tarafından uçağı bir kumanda verildiğinde, hareket değişkenlerindeki değişimin ölçülmesini sağlar. Algılayıcılardan gelen bu sinyallerin bir gösterge ile pilot tarafından görülmesi sağlanabilir ya da bu sinyaller otomatik uçuş kontrol sistemi için geri besleme sinyalleri olarak kullanılabilir. Böylece, bir uçuş kontrol sisteminin genel yapısı Şekil 1.1'deki blok şema ile gösterilebilir.



Şekil 1.1 Otomatik uçuş kontrol sisteminin genel yapısı

Bu şema içindeki denetleyicinin özelliğı, kumanda edilen hareket ile ölçülen hareketi karşılaştırmak, eğer bir farklılık varsa uygulanacak kontrol kuvvet ve momentini meydana getiren kontrol yüzeylerinin hareketini sağlamak için hareketi meydana getiren parçalara (akçuatör) kumanda sinyalleri

göndermektir. Bu işlem, kumanda edilen hareket ile ölçülen hareket arasında belli bir uygunluk sağlanıncaya kadar devam eder. Sonuç olarak bir uçaktaki kararlılık problemi, bozucu etkilere rağmen uçağın belli bir uçuş durumunu koruması için, hareket algılayıcılarından uçağın hareketli kontrol yüzeylerine, uygun geri besleme katsayılarının hesaplanması olarak özetlenebilir.

Nakliye amaçlı uçuşların önemli bir kısmı, askeri uçuşların da manevra uçuşu haricindeki uçuşlarının bir kısmı çeşitli hız ve irtifalarda düzgün-simetrik-yatay uçuşlar halinde gerçekleşmektedir. Uçuş zarfı içinde uçuşun mümkün olduğu her hız ve irtifa için uçuş durumu 1.1'in denge durumlarından birine karşılık gelmektedir. Burada ortaya çıkan ilk sorun, uçuş zarfı içinde sonsuz sayıda denge noktası (hız-irtifa çifti) olmasıdır (Kahvecioğlu, 2000).

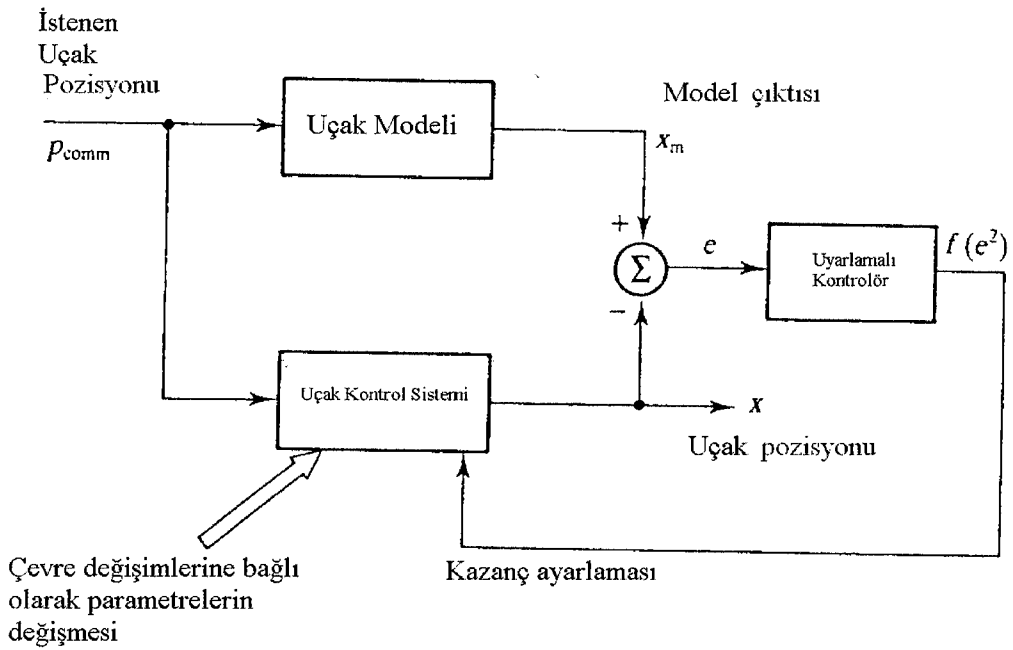
Daha önce de bahsedildiği gibi bir uçağın uçuş kalitesi içinde bulunduğu uçuş durumuna bağlı olarak büyük ölçüde değişiklik göstermektedir. Bu yüzden uçağın uçuş zarfındaki bir uçuş noktası için kabul edilebilir özellikleri olmasına rağmen bir başka noktada bu özellikler kabul edilemez hale gelebilir. Çok geniş yelpazede değişen dinamik basınç ve ivme değerlerinin tümü gözden geçirildiğinde uçuş noktalarındaki çok değişik dinamiklere rağmen kazanç ölçeklemesi dışında bir yöntem kullanan otomatik uçuş kontrol sistemi gerekliliğinin ortaya çıkmadığı söylenebilir. Ancak kazanç ölçeklemeli otomatik uçuş kontrol sistemlerinin iyi performans gösteremeyeceği dört uçuş durumundan bahsedilebilir (McLean, 1990):

1. Uygun yükseklikteki bir uçağın ani olarak dalış ya da tırmanış hareketine başlaması,
2. Uygun yükseklikteki bir uçağın büyük hücum açıları ile manevra yapması,
3. Önemli miktarda ağırlığa sahip bir dış yükü bırakan bir uçak,
4. Dünyanın atmosferi boyunca ivmelenerek tırmanan bir uçak.

Birinci ve dördüncü durumlarda araç hız ve atmosferik yoğunluk açısından çok değişik değerlere maruz kalmakta başka bir deyişle uçak etrafındaki dinamik basınç hızla değişmektedir. İkinci durumda büyük hücum açıları birçok kararlılık türevinin değerinin oldukça fazla değişmesine bu sebeple uçak dinamik tepkisinin

değişmesine neden olmaktadır. Üçüncü durumdaki kütle değişimi kararlılık türevlerini etkilemektedir.

Yukarıda sayılan dört uçuş durumu için değişik tipte bir otomatik uçuş kontrol sistemine ihtiyaç vardır. Böyle bir sistem kendinden uyarlamalı otomatik uçuş kontrol sistemidir. Bu kontrol sistemi, parametrelerini kendi içindeki ölçümler, işlemler, ayarlamalar yoluyla değiştirme kabiliyetine sahip olup, bu yolla uçağın içinde ve dışında değişen çevre koşullarına uyum sağlayarak uçağı kontrol altında tutmalıdır.



Şekil 1.2 Model referans uyarlamalı sistemin blok gösterimi

Bu amaçla kullanılan iki tip uyarlamalı kontrol sistemi mevcuttur. Bunlardan biri model referans uyarlamalı bir diğeri parametre uyarlamalı kontrol sistemleridir. Bu amaçla 1962 yılında tasarlanmış model referans uyarlamalı otomatik uçuş kontrol sistemi şeması Şekil 1.2’de verilmiştir. Belirlenen kapalı döngü dinamik tepkisi referans model ile karakterize edilmiş ve temel uçuş kontrol sisteminin bu yönde hareket etmesi düşünülmüştür. Model çıkışı uçuş kontrol sistemi çıkışı ile karşılaştırılmış eğer bu çıkışlar uygun değilse bir hata sinyali üretilmiştir. Uçuş kontrol sisteminin birçok sayıdaki parametresi hatanın karesinin toplamı en aza indirilecek biçimde değiştirilmiştir (McLean, 1990).

Model referanslı kontrol tekniğinde uçağın doğrusallaştırılmış dinamik

denklemlerinin durum uzay formunda ifade edilmiş biçimi kullanılmaktadır. Buradan türetilen transfer fonksiyonları uçağın kontrol edilmek istenen durumları ile kontrol girdileri arasındaki ilişkiyi belirlemektedir. Bu transfer fonksiyonları çok girdili çok çıktılı bir sistem oluşturmak üzere bir transfer matrisi biçiminde ifade edilmektedir. Kontrol kuralının amacı değişen şartlara göre uçağın pozisyonunu ayarlamak üzere denetleyici tasarlayanın belirlediği bir modelin çıkışından yararlanmaktır. Zaman içinde sönümlenen bir çıkışa sahip olacak bu modelin çıkışına ulaşmak üzere pilot girdisi, uçak pozisyonu ve transfer fonksiyonu polinomlarının katsayılarından yararlanarak bir kontrol girdisi üretilmektedir. Üretilen bu girdi, model sistem çıkışı ve uçak dinamiği arasındaki farkı sıfıra götüreceğ biçimde sürekli olarak güncellenmektedir.

İkinci bölümde katı bir cisim olarak düşünülen uçağın kinematik ve dinamik analizi yapılarak en genel doğrusallaştırılmış dinamik denklemleri çıkartılmıştır. Bu denklemler durum uzay biçiminde ifade edilmiştir. Ortaya çıkan katsayı matrisleri ve kararlılık türevleri arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde uçak kontrol kuralı oluşturma konusunda karşılaşılan teknikler başlıklar biçiminde ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde çok değişkenli sistemler için uygulanan model referanslı kontrol tekniği ayrıntılı bir biçimde tanıtılmıştır.

Beşinci bölümde model referanslı kontrol tekniğinin koordine viraj hareketinin kontrolü amacıyla kullanılması gösterilmiştir. Kararlılık türevleri yardımıyla hesaplanan kontrol girdisi sisteme uygulanmış ve benzetim sonuçları tartışılmıştır.

2. UÇAK HAREKET DENKLEMLERİ

2.1 Durum Uzay Formülasyonu

Bu bölümdeki amacımız katı cisim olarak bir uçağın hareket denklemlerini türetmek ve bunları durum uzay formunda ifade etmektir.

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \quad 2.1$$

Burada \mathbf{X} $n \times 1$ boyutlu durum vektörünü, \mathbf{U} $m \times 1$ boyutlu kontrol vektörünü ve \mathbf{f} bağımsız durum ve kontrollerin doğrusal olmayan vektör değerli fonksiyonunu temsil etmektedir. Bu vektör denklemi n tane birinci derece, birbiriyle iç içe geçmiş, etkileşimli (coupled) adi diferansiyel denklemi (ODE) sembolize eder. Durum denklemlerine ek olarak genel formu aşağıdaki gibi olan bir çıkış denklemi de söz konusudur. Burada \mathbf{g} , \mathbf{f} gibi doğrusal olmayan denklemleri göstermektedir.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \quad 2.2$$

Durum değişkenleri X_i 'ler, durumu tam olarak tanımlayan değişkenler grubu olacak şekilde seçilmelidir. Durum, bir sistemin depoladığı enerji (uçağın potansiyel ve kinetik enerjisi) ile onun dağılımının göstergesidir. Durum değişkenlerinin minimal bir kümesi (bağımsız durum değişkenleri) seçilmiş ve bu amaç için pozisyon ve hızın aktarımsal ve açısal birbirine dik bileşenleri kullanılmıştır. Çıkış değişkenleri, Y_i 'ler ölçüm algılayıcılarından sağlanan fiziksel niceliklere eşittir.

Büyük harf sembolleri uçak değişkenlerinin gerçek değerlerini temsil eden durum, kontrol ve çıkış vektörleri ve bunların elemanları için kullanılmış, daha sonra doğrusal sabit-katsayılı durum ve çıkış denklemleri formu elde edildiğinde ise küçük harfler durum, kontrol ve çıkış vektörlerinin yatışkın durum uçuş pozisyonları olan nominal değerlerden sapmasını ifade etmek amacıyla kullanılmıştır.

Durum değişkenlerine alternatif olarak, uçak matematik modeli çeşitli mertebelerden birbirinin benzeri, birbirine uygun ODE setlerinden de geliştirilebilir. Bu durumda belirli bir yörünge üzerindeki bir noktadan başlayan

dinamik davranışı belirlemek için çeşitli mertebelerdeki türevlerin başlangıç koşullarının bilinmesi gerekir. Gerekli bütün başlangıç koşulu bilgileri durum vektörü tarafından taşınmaktadır. Aslında, durum değişkenleri, belli bir andaki durum değişkeni vektörü bilgisi ve o andan sonraki kontrol vektörü bilindiğinde o andan sonraki tüm hareketi (durum yörüngesini) tanımlayacak bir grup değişken olarak tarif edilebilir (Kalman, 1963). Bu tip durum tanımı daha önce yapılan tarifi de kapsamaktadır: Durum vektörü her bir belli andaki dinamiğin depoladığı enerjiyi tarifler.

f_j fonksiyonları içerdikleri doğrusal olmayan etkiler yüzünden analitik olarak ifade edilemezler. Buna karşın, bir yörüngeyi takip etmekte hiçbir sorun yoktur. Bunun nedeni, 2.1'deki türevsel vektör ifadesi ve durum vektörü için bilinen başlangıç değerleridir. Bütün bunlar adi diferansiyel denklem teorisinde bir başlangıç değer problemini tarifler. Matematikçiler uzun zaman önce bu tip problemlerin nümerik entegrasyonla çözümü için teori ve algoritmalar geliştirmişlerdir. Nümerik entegrasyon algoritmaları (Runge-Kutta gibi) eğer bir önceki durum ve gereken türevlerinin oluşturulması için gerekli eşitlikler verilmiş ise kesikli zaman aralıklarında durumu peş peşe hesaplama şansı vermektedir (Stevens, 1992).

2.2 Serbestlik Dereceleri

Kullanılan katı uçak terimi, uçak yapısı üzerindeki tüm noktaların uzayda tüm zamanlar için sabit bağlı pozisyonları sağlaması anlamındadır. Ancak uçuş sırasında büyük bir yolcu uçağı kanatlarının büyümesini, bükülmesini görmek çok olağan bir durumdur. Kanat uçlarının pozisyonları uçak pistte dururken ve tam yükte uçarken karşılaştırıldığında, değişim onlarca santimetre olarak karşımıza çıkabilir. Çok mukavemetli bir savaş uçağı dahi esneklik özellikleri sergileyebilir. Esnek bir uçağın kısmi diferansiyel denklemler cinsinden matematiksel modeli, durum modeli için gerekli ODE'lere ulaşılmasını gerektirmektedir. Esneklik etkilerinin bu denklemlere katılması karmaşık modeller ortaya çıkarabilir ve günümüz araştırma konuları arasındadır. Her ne olursa olsun katı uçak modeli temel bir öneme sahiptir.

Katı bir gövdenin hareket denklemleri eğer koordinat merkezi kütle

merkezi seçilirse iki farklı grupta incelenebilir: Dönüşsel ve aktarımsal (Wells, 1967). Uçağın dönüşel hareketi daha sonra sanki uçak uzayda sabit bir nokta imiş gibi kabul edildiğinde kütle merkezi çevresindeki yalpalama, yunuslama ve yuvarlanma hareketlerine denk olacaktır. Hareketin geri kalan bileşenleri ağırlık merkezinin aktarımsal olan üç bileşenidir. Burada oluşturulacak durum modeli altı serbestlik dereceli (6-DOF) model olacaktır. Burada gövde gerilmesi ve kanat bükülmesinin oluşturduğu esnek modlarla ilgili serbestlik dereceleri göz önüne alınmayacaktır.

Seçtiğimiz durum değişkenleri doğal olan durum değişkenleridir. Hareketin üç bileşeni yer çekimsel alanda potansiyel enerjiyi belirlemek için yeterlidir. Hızın üç bileşeni aktarımsal kinetik enerjiyi belirlemek ve açışal hızın üç bileşeni de dönüşel kinetik enerjiyi belirlemek içindir. Üç durum denklemi de irtifa için gereklidir. Bu irtifa değişkenleri yer çekim vektörüne bağıl hareketi belirlemek için kullanılmışlardır. Öyleyse, temel modelin durum vektörü \mathbf{X} , 12 durum değişkeni içerecektir (Stevens, 1992).

2.3 Dinamik Analiz

2.3.1 Aktarımsal Hareket

Newton'un aktarımsal harekete uygulanan ikinci yasası kuvveti lineer momentum değişimine oranlar. Bu uygulamada göz önüne alınan kuvvetler itme, aerodinamik kuvvetler ve yerçekimidir. İtme sistemleri uçak gövdesi üzerinde reaksiyon kuvvetleri oluştururken, aerodinamik etkiler uçak gövdesinin şekline ve havanın gövdeye göre bağıl hareketine dayanmaktadır. Bu nedenle Newton'un ikinci kanunu uygulanırken kuvvet ve hız vektörleri uçak gövdesi koordinat sisteminde (ABC) tanımlanmıştır. ABC sistemi uçak kütle merkezine yerleşmiş ve uçak gövdesinin çizgilerine göre yönlenmiştir. Örneğin x eksenini uçağın hareket yönünde, z eksenini pilotun başından ayaklarına doğru ve y eksenini bu ikisine dik ve sağ kanat yönünde pozitifdir.

\mathbf{F}_B aerodinamik ve itme kuvvetlerinin vektör toplamını ifade eder. Buradaki B indisi bunların uçak gövdesi koordinat eksenine göre yazıldığını göstermektedir. Uçak gövdesi üstünde yer çekim kuvveti Bmg' dir. Burada m uçak kütlesi, B ise \mathbf{g} yer çekim vektörünü ABC sistemine çeviren matristir. Ayrıca \mathbf{v}_{abs}

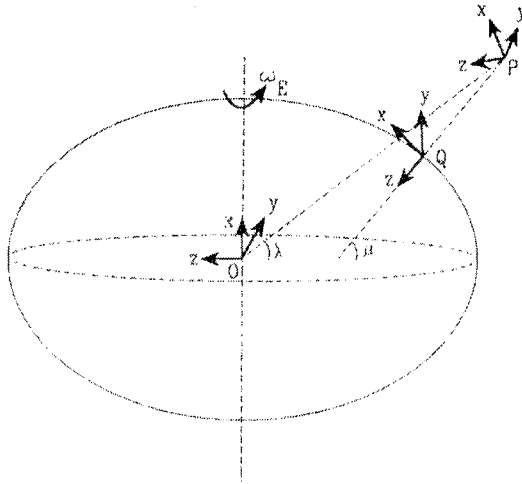
uçak gövdesi koordinat sisteminde tariflenmiş, uçak kütle merkezinin mutlak hız vektörüdür (eylemsizlik uzayına göre ölçülen). Aktarımsal hareket için Newton'un ikinci yasası

$$\mathbf{F}_B + Bm\mathbf{g} = \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}_{abs}) \quad 2.3$$

halini alır.

Türev eylemsizlik referans koordinat sistemine göre alınmıştır. Bu durum I indisi ile belirlenmiştir. Yer çekiminin sadece Dünya'nın kütesinden dolayı meydana geldiği kabul edilmiştir.

Bu noktada hareketin uçak denklemlerini geliştirmekte kullanılacak bir eylemsizlik referans koordinat sistemine gerek duyulmuştur. Sabit yıldızların ortalama pozisyonuna göre bağıl olarak dönmeyen ve ivmelenmeyen (ancak sabit hızda hareket ediyor olabilir) herhangi bir sistem bu iş için seçilebilir. Merkezi Güneş'in merkezi olan, sabit yıldızlara göre değişmeyen pozisyonu bulunan bir sistem neredeyse mükemmel bir eylemsizlik referans sistemidir. Uçan aracın yörüngesini gözleyebilme açısından çok daha yararlı, onun koordinatlarını ve Dünya'nın çekimini belirleyebilen sistem Dünya-merkezli eylemsizlik referans sistemidir (ECI). Şekil 2.1 merkezi O olan ECI sistemini, merkezi P olan ABC sistemini ve Q merkezli Dünya yüzeyinde bir orta kuzey-doğu-aşağı (NED) sistemini göstermektedir



Şekil 2.1. Kinematik analiz için koordinat eksenleri

NED sistemi uçak ile birlikte hareket etmekte ve uçak ağırlık merkezinden

dik olarak aşağıda bulunduğundan sistemin $x-y$ düzlemi Dünya yüzeyine Q noktasında teğet olmaktadır. Bu sistem azaltılmış hareket denklemleri oluşturulması aşamasında kullanılmıştır. Dünya'nın şekli oldukça eliptiktir ancak amaçlar doğrultusunda şekildeki eliptiklik abartılmıştır. ECI sisteminin merkezi elips merkezi olarak tanımlanmıştır. Enlem açıları (λ ve μ) ve boylam (l) seyrüsefer konusunda detaylı olarak incelenmiştir.

ABC ve NED sistemlerinin pozisyonu sabit ECI sistemine göre zamana bağlı biçimde değişir. ECI sisteminin pozisyonu verilen bir benzetim problemine uyacak şekilde seçilebilir. ECI sisteminin X eksenini Dünya'nın dönüş eksenini yönünde uzanacak şekilde kuzey kutbunu gösterecek yöndedir. Karada engel seyrüseferi için ECI'nın y ve z eksenlerini, $t=0$ anında NED sistemine olan bağlı pozisyonlarını sabitleyerek belirlemek uygundur. Uygun bir seçenek ECI y ve z eksenlerini eğer NED sistemi $t=0$ anında sıfır enlem ve boylamda ise NED sistemindekilerle aynı yönde kabul etmektir.

ECI koordinat sisteminde uçak ağırlık merkezi pozisyonu eylemsizlik pozisyon vektörü $\mathbf{p}(t)$ ile belirlenecektir. Vektörleri ECI sisteminden ABC sistemine aktaran dönüşüm matrisi $\mathbf{B}(t)$ 'dir. Koordinat sistemleri birbirine dik ve dönüşüm sadece dönme olduğundan, \mathbf{B} matrisi ortogonal bir matristir.

Daha önceden belirtildiği gibi uçak üstündeki aerodinamik güçler, uçağın hava kütleğine bağlı olarak yapacağı hareket sonucunda oluşur. Bu yüzden mutlak hız vektörü \mathbf{v}_{abs} 'nin oluşan iki bileşeninden biri hava kütleğine göre bağlı hız, diğeri hava kütleğinin mutlak hızı olacaktır. Tüm hava kütleğinin Dünya'nın açısal hız vektörü ile döndüğü kabul edilmiştir. Bunun anlamı, kaymanın ve kesilmelerin olmamasıdır. Çizelge 2.1 tanımları ve uçak hareketini Newton'un ikinci yasasına uygulamak için gerekli vektör ilişkilerini göstermektedir.

Uçak modelinin durum değişkenleri eylemsizlik pozisyon vektörü \mathbf{p} 'nin bağlı hız vektörü \mathbf{v}_b 'nin ve açısal hız vektörü $\boldsymbol{\omega}_b$ 'nin üçer bileşeni tarafından oluşturulmuştur. Zaman içinde değişen dönüşüm matrisi \mathbf{B} içinde bir diferansiyel denkleme ihtiyaç duyulacaktır. Bu bizim Dünya ve ufka göre meyil için üç adet daha durum belirlememiz gereğini ortaya çıkarmıştır.

Çizelge 2.1 Hareket denklemlerinde kullanılan değişkenler

<i>ECI koordinatları için</i>	
Uçak ağırlık merkezi pozisyonu	\mathbf{p}
Uçak ağırlık merkezi mutlak hızı	$\dot{\mathbf{p}}$
Dünya' nın dönüşünün mutlak açısal hızı	$\boldsymbol{\omega}_E$
P noktasını çevreleyen havanın hızı	$\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{p}$
ECI koordinatlarından ABC' ye dönüşüm matrisi	$B(t)$
Dünya' nın yerçekimsel ivmelenmesi	\mathbf{g}
<i>ABC koordinatları için</i>	
ABC sisteminin mutlak açısal hızı	$\boldsymbol{\omega}_B$
Çevreleyen havanın mutlak hızı	$B(\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{p})$
Uçak ağırlık merkezinin hava kütleğine göre bağlı hızı	\mathbf{v}_B
Uçak ağırlık merkezinin mutlak hızı	\mathbf{v}_{abs}
Uygulanan net kuvvet ve uygulanan net tork	$\mathbf{F}_B, \mathbf{T}_B$

Durum denklemlerinin bir grubu, kendi terimleri cinsinden $\dot{\mathbf{p}}$ ' nin yazılması ile ortaya çıkar.

$$\dot{\mathbf{p}} = B^T \mathbf{v}_{\text{abs}} = B^T \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{p} \quad 2.4$$

Aynı denklem, gövde koordinatlarında ifade edildiğinde Newton'un yasasında kullanılmak üzere \mathbf{v}_{abs} için bir denklem daha sağlayacaktır.

$$\mathbf{v}_{\text{abs}} = \mathbf{v}_B + B(\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{p}) \quad 2.5$$

2.4 ve 2.5, 2.3'de yerine konulursa,

$$\mathbf{F}_B + Bm\mathbf{g} = m \mathbf{v}_{\text{abs}} + m \frac{d}{dt} [\mathbf{v}_B + B(\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{p})] \quad 2.6$$

Füzeler için m terimi oldukça önemlidir ancak uçaklar için ihmal edilebilir. Uçakların dinamiklerini sabit, belirlenmiş bir ağırlık altında incelemek yeterli olacaktır. Bütünlüğü bozmamak açısından m terimi denklemlerden çıkarılacaktır.

2.6'daki türevi alırsak sonuç

$$\frac{1}{m} \mathbf{F}_B + B\mathbf{g} = (\dot{\mathbf{v}}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{v}_B) + B(\boldsymbol{\omega}_E \times \dot{\mathbf{p}}) \quad 2.7$$

olacaktır. Denklemi sadece tek değişkenin türevlerine indirgemek için $\dot{\mathbf{p}}$ ' i daha

önce bulunan durum denklemlerinden yararlanarak yerine koyarsak sonuç, vektör çarpımının dağılma özelliği, dönüş matrisinin vektör çarpımı üzerindeki dağılma özelliği ve dönüş matrisinin dikliği kullanılarak kısaltılmıştır. Türevleri denklemin sol tarafına alarak gerekli düzeltmeyi yaptığımızda

$$\dot{\mathbf{v}}_B = \frac{1}{m} \mathbf{F}_B - (\boldsymbol{\omega}_B + B \boldsymbol{\omega}_E) \times \mathbf{v}_B + B[\mathbf{g} - \boldsymbol{\omega}_E \times (\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{p})] \quad 2.8$$

elde edilir. 2.8'deki aktarımsal hız \mathbf{v}_B göreceli bağıl bir hız iken, açısal hız $\boldsymbol{\omega}_B$ mutlak hızdır. Gövde koordinatlarında tarif edilmiş, gövde koordinat sisteminin Dünya'ya göre bağıl hızı olan $\boldsymbol{\omega}_R$ kullanılarak bağıl açısal hız

$$\boldsymbol{\omega}_R \equiv \boldsymbol{\omega}_B - B\boldsymbol{\omega}_E \quad 2.9$$

şeklinde denklemlere katılmıştır. Bu durumda 2.8

$$\dot{\mathbf{v}}_B = \frac{1}{m} \mathbf{F}_B - (\boldsymbol{\omega}_R + 2B \boldsymbol{\omega}_E) \times \mathbf{v}_B + B[\mathbf{g} - \boldsymbol{\omega}_E \times (\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{p})] \quad 2.10$$

halini alır.

Bağıl açısal hız $\boldsymbol{\omega}_R$ açısal değişimlerden oluşan aerodinamik etkileri hesaplamak için kullanılmıştır. Ancak bu çok gerekli değildir çünkü aerodinamik momentler $\|B \boldsymbol{\omega}_E\|$ 'den daha büyük açısal değişimler için önemli hale gelmektedir. Sıklıkla kullanılan algılayıcılar mutlak hızları ölçmekte (yani $\boldsymbol{\omega}_B$ 'nin bileşenlerini) ve mutlak hızlar açısal hareket için daha sonraki bölümde türetilen durum denklemlerinde ortaya çıkmaktadır. $\boldsymbol{\omega}_B$ 'den türetilen aerodinamik momentleri daha sonra hesaplanmıştır. Açısal hızın tersine, Dünya atmosferinin mutlak doğrusal hızı çok büyük olabilir (örneğin Ekvator'da) ve bağıl hız \mathbf{v}_B (aerodinamik kuvvetleri oluşturan hız) buna oranla çok küçük kalabilir. Dışsal algılayıcılar hava akışına bağıl nicelikleri ölçmek için kullanılırlar.

2.8'deki durum denklemleri için yapılacak bir sonraki iş yerçekimsel ivmelenmeyi durum değişkenlerine yansıtmaktır (Stevens, 1992).

2.3.2 Kütleli Çekim Kuvveti

İki cisim arasındaki kütleli çekim kuvveti kütlelerinin çarpımına doğru orantılı ve kütle merkezlerinin arasındaki uzaklığın karesi ile ters orantılıdır. Bu

ters kare kuralı Dünya'nın kütleli çekimine uygulandığı zaman doğru oranlılık sabitini Dünya'nın kütlesi ile birleştirmek uygundur. Sonuç, Dünya kütlesi yerçekimsel sabiti olarak bilinen GM'dir. Kütlesi m olan hava-uzay taşıtına etki eden kuvvetin büyüklüğü $(GM \times m)/r^2$ olarak karşımıza çıkar. Bu kuvvetin yönü, büyük bir yakınsaklık ile, ECI pozisyon vektörü doğrultusunda Dünya'nın merkezine yönelmiştir.

ECI pozisyon vektörünün uzunluğu bu ters-kare kuralı ilişkisindeki r ayırmasını belirlemektedir. Yukarıdaki olguların ışığında yerçekimsel ivmelenme

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{\|\mathbf{p}\|^3} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad 2.11$$

şeklinde yazılabilir. $(GM/\|\mathbf{p}\|^2)$ \mathbf{g} için doğru büyüklüğü sağlarken arta kalan $\|\mathbf{p}\|$ ise \mathbf{p} vektörünü birim uzunluğa indirgemek içindir. GM'nin değeri Dünya'nın atmosfer kütlesini ihmal ederek $1,4076431 \times 10^{16} \text{ ft}^3/\text{s}^2$ 'ye eşittir.

Kütleli çekim ters-kare kuralı yüzünden \mathbf{p} 'nin uzunluğu ile değişir. Ayrıca Dünya'nın tam küre olmamasından dolayı oluşan enlem açısı ile de değişmektedir. Eğer taşıt Dünya yüzeyine yakın ya da Dünya yüzeyi üzerinde hareket etmek ile sınırlandırılmışsa Dünya'nın yarıçapının değişiminden dolayı her iki etkiyi de hissedecektir. \mathbf{g} vektörünün Dünya yüzeyinin yerel normalinden sapması ekvatordaki sıfır dereceden, kutuplarda maksimum ± 45 derecelik enlem açılarında ki 6 dakikalık yaylara kadar düzgünce değişir. $\|\mathbf{g}\|$ 'deki değişim deniz seviyesinde oldukça belirgindir (ekvatorda 32.191 ft/s^2 , kutuplarda 32.287 ft/s^2). Öyleyse ya Dünya çevresindeki yüksek-irtifa hipersonik uçuşlara da uyarlanabilecek bir yerçekimsel modele sahip olmak gerekir ya da verilen enlem açısına göre deniz seviyesinde hassas bir $\|\mathbf{g}\|$ değeri kabul edilmelidir. Belirlenen bu değer belli enlemlerde Dünya yüzeyinin küçük bir alanı üzerindeki uçuş benzetimlerinde kullanılacaktır.

2.11'de Dünya'nın yassılığının \mathbf{g} üzerindeki etkisini belirlemek için uyarlama yapılmıştır. ECI pozisyon vektörünün p_x, p_y ve p_z bileşenleri, \bar{p}_x, \bar{p}_y ve \bar{p}_z ile değiştirilmiştir.

$$\begin{aligned}
\overline{p}_x &= p_x \left[1 + 1.5 J_2 \left(\frac{r_E}{\|\mathbf{p}\|} \right)^2 (3 - 5 \sin^2 \lambda) \right] \\
\overline{p}_y &= p_y \left[1 + 1.5 J_2 \left(\frac{r_E}{\|\mathbf{p}\|} \right)^2 (1 - 5 \sin^2 \lambda) \right] \\
\overline{p}_z &= p_z \left[1 + 1.5 J_2 \left(\frac{r_E}{\|\mathbf{p}\|} \right)^2 (1 - 5 \sin^2 \lambda) \right]
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Burada J_2 ($J_2 = 1.08263 \times 10^{-3}$) yerçekimsel harmonik sabiti, r_E Dünya'nın ekvatordaki yarıçapını ve λ 'da $\text{Sin}^{-1}(p_x/\|\mathbf{p}\|)$ 'den hesaplanan enlem açısını göstermektedir. λ "geocentric" enlem açısıdır.

Durum denklemi 2.8'in son terimi ($\mathbf{g} - \boldsymbol{\omega}_E \times \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{p}$) Dünya yerçekimsel ivmelenmesini ve Dünya'nın açısal hız vektörü üzerinde, ECI sistemindeki dönüşüne bağlı olarak, oluşan merkezkaç ivmelenmesini içerir. Bu terim dünya üzerinde asılı bir sarkacın ivmelenmesini de ifade etmektedir. Dünya'nın açısal hız vektörü ve ECI pozisyonu

$$\boldsymbol{\omega}_E = \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

$\omega_x = 7.292115 \times 10^{-5}$ rad/s olmak üzere 2.13 şeklindedir. Öyleyse, $\boldsymbol{\omega}_E \times \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{p}$

terimi

$$\boldsymbol{\omega}_E \times (\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_x \\ 0 & \omega_x & 0 \end{bmatrix}^2 \mathbf{p} = -\omega_x^2 \begin{bmatrix} 0 \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

şeklini alır. Bu vektör Dünya'nın ekvatorsal düzlemine paralel şekilde uzanır ve eğer eylemsizlik pozisyon vektörü Dünya ile birlikte hareket ediyorsa Dünya'nın ekseninden $\sqrt{p_y^2 + p_z^2}$ dik uzaklıktaki dairesel yörünge için merkezkaç ivmelenmeye denk gelir. Dünya üzerindeki herhangi bir noktada $\mathbf{g}' \equiv \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega}_E \times (\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{p})$ vektörü yüzeye veya referans elipsoidin yüzeyine bir dik oluşturur.

Dünya yüzeyindeki bir sarkaç bu vektör etkisinde hareket eder. \mathbf{g}' vektörü

genellikle "ağırlık" vektörü adını alır. Büyüklük olarak \mathbf{g}' den çok az farklıdır ve Ekvator'da 32.088 ft/sn^2 den kutuplarda 32.257 ft/sn^2 değerine değişir. 2.8 denklemini kullanırken \mathbf{g} ve \mathbf{g}' farkına dikkat etmek önemlidir (Stevens, 1992).

2.3.3 İvmelenme Ölçümleri

Doğrusal ivme metre geri besleme kontrol algılayıcısı olarak kullanılabilir. Doğrusal ivme metre "hassas bir eksen" boyunca hareket kabiliyeti ile sınırlandırılmış bir kütle içerir ve bir yay tarafından zaptedilmektedir. Bir elektriksel iletici kütlenin normal pozisyondan ne kadar saptığını ölçmek için kullanılır ve buna uygun bir çıkış sinyali üretir. İvme metre mutlak (eylemsizlik) ivmeleri ölçmüştür ve bunları (katı araca bağlı olduğunu kabul ederek) gövde-sabit eksenler açısından işler. Yatışkın durum çıktısı, hassas eksen boyunca, durumun ivmesi ve yerçekimsel ivme arasındaki farkın oluşturduğu bileşene doğru orantılıdır. Öyleyse katı gövde üzerinde p noktasında bulunan bir ivme metre ivmenin \mathbf{a}'_p bileşenini ölçer.

$$\mathbf{a}'_p = \mathbf{a}_p - \mathbf{g} \quad 2.15$$

Burada \mathbf{a}_p noktanın mutlak (eylemsizlik) ivmesi, \mathbf{g} ise bu noktadaki yerçekimsel ivmeyi göstermektedir. Bu denklem gövde eksen sistemi cinsindedir.

İstenmediği şekilde eğer ivme metre uçağın tam ağırlık merkezine yerleştirildiyse ve uçak eksenlerinden bir tanesi boyunca uzanıyorsa katı uçak için tanımladığımız nicelikler 2.15 denkleminde yerine konulduğunda, ivme metre çıkışı aşağıdaki denklemin bir bileşenine doğru orantılı olur.

$$\mathbf{a}'_p = \frac{\mathbf{F}_B + Bm\mathbf{g}}{m} - B\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_B}{m} \quad 2.16$$

\mathbf{F}_B kuvveti gövde eksen sistemindeki aerodinamik ve itme kuvvetlerinin vektörel toplamıdır. Aerodinamik ve tahrik kuvvetleri sıfır olunca araç serbest düşme konumundadır ve ivme metre sıfır okur. Eğer ivme metre uçağın \mathbf{z} eksenini boyunca yerleştirilmişse ve mümkün olabildiğince dik ise, 2.16'nın pay ve paydasını g_0 (\mathbf{g} 'nin deniz seviyesindeki yerel büyüklüğü) ile çarparsak, kaldırma

kuvveti ile uçak ağırlığı eşit olduğunda ivme metre de 1 g birimi okunur. Hava taşıtı yatay uçuş yaparken genellikle gerekli hücum açısını sağlayabilmek için burun yukarı durumda uçacak, bu yüzden ivme metre tam 1 g değil ama çok yakın bir değer belirleyecektir.

p noktası uçak ağırlık merkezine \mathbf{r} pozisyon vektörü ile bağlıdır ve uçak sıfır olmayan bir açısal hız vektörü $\boldsymbol{\omega}$ 'ya (eylemsizlik referans sistemine göre) sahiptir. Eylemsizlik uzayı içinde p noktasının anlık hızı

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{cg} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad 2.17$$

ile verilir. Eylemsizlik ivmesi bu denklemin eylemsizlik sistemine göre türevinin alınması ile elde edilir, böylece

$$\mathbf{a}_p = \frac{d(\mathbf{v}_{cg})}{dt_1} + \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}{dt_1} \quad 2.18$$

ve bu denklem ivme değerini elde etmek için gövde eksenleri cinsinden ifade edilmelidir. Sağ taraftaki ilk terim basit olarak $(\mathbf{F}_B + Bm\mathbf{g}) / m$ değerine eşittir. İkinci terimde $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ teriminin türevi alınırken Coriolis teoremi kullanılmıştır. \mathbf{r} vektörü gövde eksenlerine göre sabittir ve $\boldsymbol{\omega}$ ile $\boldsymbol{\omega}_B$ daha önce tarif edildiği gibidir.

Buradan

$$\mathbf{a}_p = \frac{\mathbf{F}_B + Bm\mathbf{g}}{m} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_B \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_B \times (\boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}) \quad 2.19$$

yazılır. 2.15 denkleminde ivme denklemini yerine koyarak ve gövde eksen sisteminde ifade ederek yukarıdaki denklemin sol tarafı 2.20 denklemi olarak elde edilmiştir.

$$\mathbf{a}'_p = \frac{\mathbf{F}_B}{m} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_B \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_B \times (\boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}) \quad 2.20$$

Denklem 2.20 ivme metrenin ölçümlerini benzetmek üzere uçak modelimize dahil edilmiştir. 2.20 $\boldsymbol{\omega}_B \times (\boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r})$ merkezci bileşenini ve $\dot{\boldsymbol{\omega}}_B \times \mathbf{r}$ teğetsel bileşenini içermektedir. Eğer, sözgelimi, ivme metre uçağın boylamsal eksenine dik olarak yerleştirilmiş ve uçak aşağı doğru bir yunuslama hareketi yapıyor olsaydı merkezkaç teriminin ivme metre çıktısı üzerinde bir etkisi olmayacak, sadece $\dot{\boldsymbol{\omega}}_B \times \mathbf{r}$ bileşeni önemli olacaktır (Stevens, 1992).

2.3.4 Aktarımsal Denklemler

Denklem 2.4 ve 2.8 aktarımsal hareket denklemleridir. Bu iki denklem birbiri ile içice geçmiş ve doğrusal olmayan denklemlerdir. $\dot{\mathbf{p}}$ denklemi \mathbf{v}_B 'yi içerirken $\dot{\mathbf{v}}_B$ denklemi \mathbf{p} 'yi içerir, bu yüzden her iki denklem ayrı ayrı çözülemez. Denklemlerin doğrusal olmamaları açısal ve aktarımsal hızların vektör çarpımlarında ve zamana bağlı B matrisi çarpımlarında gözükmektedir.

Denklem 2.4 hareketin değişim miktarını hıza eşitlemektedir. Hava kütlelerinin eylemsizlik sistemine göre dönüşünden dolayı üç adet eylemsizlik pozisyon koordinatı durum değişkeni olarak gerekmektedir. Yerçekiminin değişimi bu üç pozisyon koordinatı cinsinden ifade edilmiştir.

Denklem 2.4'ün belirleyiciliği iyi kavranmalıdır. Yuvarlak rakamlarla aerodinamiksel olarak kontrol edilebilen araçlar, Dünya'nın yarıçapı olan 21×10^6 ft ile karşılaştırıldığında çok az olan 100.000 ft yükseklik ile sınırlandırılmışlardır. Eylemsizlik pozisyon vektörü \mathbf{p} 'nin büyüklüğü kabaca sabit kalacak ve Dünya'nın yarı çapına eşit olacaktır. Sonuç olarak 2.4 bir çok hava taşıtı ve füze benzetimlerinde işe yaramaz olacaktır. \mathbf{p} vektörü 2.4 ile içicedir. Bu etki \mathbf{g} vektörü ile merkezkaç ivmelenme $[\omega_E \times (\omega_E \times \mathbf{p})]$ terimini \mathbf{g}' vektörü ile yer değiştirerek sağlanabilir. \mathbf{g}' 'nin deniz seviyesinde ve 45° enlemdaki büyüklüğünü, $g'_0 = 32.17$ ft/s², bundan sonra vektörün büyüklüğü olarak kullanılacak ve Dünya'nın yüzeyine normal olacaktır (yani NED sisteminin z eksenine boyunca). Bütün bunlar sanki bir eylemsizlik referans sistemi imiş gibi düşünülen NED sistemi kullanılarak yazılan hareketin düz-dünya denklemini ortaya çıkarmıştır. Pozisyon bundan böyle \mathbf{v}_B hız vektörünü NED sistemi içinde çözerek izlenecek ve bu bileşenler üç adet NED pozisyon durumunu elde etmek için entegre edileceklerdir.

Denklem 2.4'ün bileşenleri incelendiğinde teğetsel hız bileşeni $\omega_p \times \mathbf{p}$ büyüklük olarak ekvator üzerinde 1500 ft/s'den kutuplar üzerinde sıfıra doğru değişecektir. Eğer aracın atmosfere göre bağlı hızı (\mathbf{v}_B) sıfır ise, (araç yerde duruyor) araç eylemsizlik uzayına göre 1500 ft/s'lik hıza kadar ulaşabilir. Bu nedenden dolayı uzay roketleri ekvatora yakın bir yerden ve doğu yönünde fırlatılmak istenmektedir. Ters olarak, 2.4'ün gösterdiği gibi eylemsizlik uzayı

içinde hareketsiz kalmak bile Mach 1'i aşan (1117 ft/sn standart atmosfer, deniz seviyesinde) herhangi bir atmosferik hıza denk düşebilmektedir.

Durum denklemlerinin ikinci kısmı olan 2.8'de $(\omega_B + B \omega_E) \times \mathbf{v}_B$ terimi toplam açısal ve aktarımsal hızın birleşmesinden ortaya çıkan teğetsel ivmelenme bileşenidir. Toplam açısal hızın $B\omega_E$ bileşeni bir uçağın gövde eksenleri açısal oranları ile karşılaştırıldığında ihmal edilebilir düzeydedir ve normal hızlar için onun \mathbf{v}_B ile vektör çarpımı da ihmal edilebilir. Sonuç olarak 2.8' den elde edilen düz-dünya denklemleri basitçe

$$\dot{\mathbf{v}}_B = \frac{1}{m} \mathbf{F}_B - \omega_B \times \mathbf{v}_B + B \mathbf{g}'_0 \quad 2.21$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\mathbf{g}'_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g'_0 \end{bmatrix}, \quad g'_0 = 32.17 \text{ ft} / \text{s}^2 \quad 2.22$$

Hakkında bilgi sahibi olmadığımız durum denklemleri değişkenleri \mathbf{F}_B , B ve ω_B 'dir. Uygulanan güç olan \mathbf{F}_B tahrik sistemleri ve aerodinamik etkiler sayesinde oluşur. Durum modeli karakteristiklerinin başlangıç tanımları düşünüldüğünde eksik olan dönüştürme kinetik enerjiyi belirleyen durumlarımızın olmamasıdır (Stevens, 1992).

2.3.5 Açısal Hareket

Bir taşıtın açısal ivmelenmelerini belirlemek, hava taşıtının açısal momentum değişim oranına Newton'un ikinci yasanını uygulamak yolu ile yapılır. \mathbf{H}_B katı aracın açısal momentum vektörü ve \mathbf{T}_B hava taşıtı ağırlık merkezine etkileyen net tork ise aşağıdaki denklem bulunur.

$$\mathbf{T}_B = \frac{d}{dt} (\mathbf{H}_B) \quad 2.23$$

Tork, aerodinamik kontrol yüzeyleri reaksiyon-kontrol iticilerinden herhangi biri veya ağırlık noktasına etkimeyen motor itme bileşenlerinden herhangi biri tarafından oluşturulur. I indisi değişim oranının eylemsizlik referans sistemine göre olduğunu, B indisi gövde koordinatlarında çalıştığımızı ve ABC

sisteminin yine açısal hız vektörü ω_B değeri ile döndüğünü belirtmektedir.

Açısal momentum vektörünü belirlemek üzere ABC koordinatlarına göre \mathbf{r} vektörü ile yerleşmiş bir kütle elemanı δm düşünelim. Bunun aktarımsal momentumu sonsuz küçük bir nicelik olan

$$\delta (\text{momentum}) = (\omega_B \times \mathbf{r}) \delta m \quad 2.24$$

dır. Bu partikülün açısal momentumu merkez çevresindeki aktarımsal momentumun momentidir,

$$\delta \mathbf{H}_B = [\mathbf{r} \times (\omega_B \times \mathbf{r})] \delta m \quad 2.25$$

Eğer

$$\omega_B = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad 2.26$$

ise ve üç vektör çarpım formülü bu denkleme uygulandığında

$$\delta \mathbf{H}_B = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} (x^2 + y^2 + z^2) \delta m - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} (Px + Qy + Rz) \delta m \quad 2.27$$

elde edilir. Aracın açısal momentumu \mathbf{H}_B teoride $\delta \mathbf{H}_B$ 'nin bileşenlerini tüm kütle üzerinde entegral alarak bulunur,

$$\mathbf{H}_B = \begin{bmatrix} P \int (y^2 + z^2) dm - Q \int (xy) dm - R \int (xz) dm \\ Q \int (x^2 + z^2) dm - R \int (yz) dm - P \int (yx) dm \\ R \int (x^2 + y^2) dm - P \int (zx) dm - Q \int (zy) dm \end{bmatrix} \quad 2.28$$

Açısal momentum vektörü içindeki çeşitli entegraller moment ve eylemsizliğin vektör çarpımları olarak tanımlanır, sözgelimi

$$x \text{ eksenindeki eylemsizlik momenti } J_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$\text{eylemsizliğin vektör çarpımı } J_{xy} \equiv J_{yx} = \int xy dm$$

Bu tanımları açısal momentum içinde yerine koyduğumuzda P , Q , R ve eylemsizlikler cinsinden iki taraflı olan \mathbf{H}_B bileşenleri bulunur. \mathbf{H}_B vektör matris çarpımı şeklinde yazılabilir ve

$$\mathbf{H}_B = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \equiv J \boldsymbol{\omega}_B \quad 2.29$$

J katı gövdenin eylemsizlik matrisi olarak adlandırılır.

Eylemsizlik matrisi terimleri cinsinden ifade edilen açısal momentum ve tüm katı gövdenin açısal hız vektörü, Newton'un ikinci yasasına 2.23'de tarif edildiği biçimde uygulanmıştır. Türev alma, 2.29'daki eylemsizlik matrisinin sabit olduğu varsayımı altında ve Coriolis teoremi kullanılarak yapılmıştır. Eylemsizlik matrisi eğer uçak ağırlık kaybediyorsa çok ani olarak değişir ve yakıt kullanıldıkça kademeli bir biçimde değişiklik gösterecektir. Eğer hava taşıtı kontrol sistemlerinin performansı bu etkilere bağlı olarak düşerse kontrol sistem parametreleri uçuş sırasında tahmin edilmiş kütle özelliklerinin fonksiyonu olarak değişmelidir. Aslında en önemli etki uçak ağırlık merkezinin değişimidir ve bu değer kargonun dikkatli yerleşimi sayesinde daha önceden belirlenmiş limitler arasında tutulmalıdır. Eğer kütle özelliklerinin değişimi gerekli ise, bu eylemsizlik momentlerinin türevleri dikkate alınarak yapılmamalıdır. Bunun yerine, kontrol sistemlerinin dizayn aşamasında, değişik sayıda "nominal" dizayn farklı kütle özelliklerindeki konfigürasyonlar için denenerek, uçuş kontrol bilgisayarları uçuş sırasında bu dizaynlar arasında düzgün geçişlerle ara değerleri bulacak şekilde programlanmalıdırlar. Newton'un ikinci yasasını açısal momentuma uygulamayı gövde sistemlerinden çok eylemsizlik sistemlerinde yapılmıştır. Bu yaklaşım kullanılmadığı durumda eylemsizlik matrisi zamana bağlı ve denklemleri ile uğraşması çok zor bir durumdur.

2.29'daki açısal momentum ifadesini 2.23'de verilen Newton yasasına göre türevlersek;

$$\dot{\mathbf{H}}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{H}_B = \mathbf{T}_B \quad 2.30$$

öyleyse

$$J \dot{\boldsymbol{\omega}}_B = -\boldsymbol{\omega}_B \times (J \boldsymbol{\omega}_B) + \mathbf{T}_B \quad 2.31$$

yada

$$\dot{\omega}_B = -J^{-1}(\omega_B \times (J \omega_B)) + J^{-1} T_B \quad 2.32$$

Denklem 2.32 açısal hareket için temel denklemdir. Denklem gövde eksenini açısal oranları P , Q , ve R 'yi kendi türevlerine ve uçak gövdesi üzerine uygulanan torklara ilişkilendirir. Denklem bir sonraki üçlü grup durum denklemini meydana getirir. Denklem doğrusal değildir çünkü açısal oran vektörü sağ taraftaki birinci terimde iki kere görülür.

Eylemsizlik matrisinin tersi 2.32'de oluşur ve simetri dolayısıyla çok basit bir forma sahiptir,

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_2 & k_4 & k_5 \\ k_3 & k_5 & k_6 \end{bmatrix} \quad 2.33$$

burada

$$k_1 = \frac{J_{yy} J_{zz} - J_{yz}^2}{\Delta}, k_2 = \frac{J_{yz} J_{zx} + J_{xy} J_{zz}}{\Delta}$$

$$k_3 = \frac{J_{xy} J_{yz} + J_{zx} J_{yy}}{\Delta}, k_4 = \frac{J_{zz} J_{xx} - J_{zx}^2}{\Delta}$$

$$k_5 = \frac{J_{xy} J_{zx} + J_{yz} J_{xx}}{\Delta}, k_6 = \frac{J_{xx} J_{yy} - J_{xy}^2}{\Delta}$$

ve

$$\Delta = J_{xx} J_{yy} J_{zz} - 2 J_{xy} J_{yz} J_{zx} - J_{xx} J_{yz}^2 - J_{yy} J_{zx}^2 - J_{zz} J_{xy}^2$$

biçimindedir. Genellikle eylemsizlik matrisinin ne kendisi ne de tersi tam olarak gereklidir. Öncelikle belirli bir hava taşıtı eksen takımı seçilerek eylemsizliğin vektör çarpımları sıfır yapılabilir (yani eylemsizlik matrisi köşegendir). Bu eksenler ana eksenler adını alır. Birçok hava taşıtı için x-z düzlemi simetri düzlemidir. Bu şart altında eylemsizlik hesaplamalarındaki $y_i z_i$ ya da $y_i x_i$ çarpımları büyüklük olarak aynı, işaret olarak farklı oluşur. Sadece eylemsizliğin vektör çarpımı J_{zz} sıfırdan farklıdır. Bunun üzerinde durulabilecek tek farklı örneği simetri düzlemine sahip olmayan eğik kanatlı hava taşıtlarıdır. Simetri

düzlemi kabulü ışığında eylemsizlik matrisi ve tersi

$$J = \begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_z \end{bmatrix}, J^{-1} = \frac{1}{\Gamma} \begin{bmatrix} J_z & 0 & J_{xz} \\ 0 & \Gamma & 0 \\ J_{xz} & 0 & J_x \end{bmatrix} \quad 2.34$$

$$\Gamma = J_x J_z - J_{xz}^2$$

halini alır ve eylemsizliğin momentlerindeki çift harf indisler ortadan kalkar. 2.34 ile verilen basit eylemsizlik matrisi yardımı ile 2.32 daha da geliştirilebilir. Denklem 2.32'deki ω_b x operatörünü P, Q, R vektör çarpımı matrisi ile değiştirilip uygulanan tork vektörü bileşenleri

$$\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} \bar{L} \\ M \\ N \end{bmatrix} \quad 2.35$$

olsun. \bar{L} tork vektörünün dönme moment bileşeni olarak ve L 'de taşıma için kullanılacaktır.

$$\begin{aligned} \Gamma \dot{P} &= J_{xz} [J_x - J_y + J_z] PQ - [J_z (J_z - J_y) + J_{xz}^2] QR + J_z \bar{L} + J_{xz} N \\ J_y \dot{Q} &= (J_z - J_y) PR - J_{xz} (P^2 - R^2) + M \\ \Gamma \dot{R} &= [(J_x - J_y) J_x + J_{xz}^2] PQ - J_{xz} [J_x - J_y + J_z] QR + J_{xz} \bar{L} + J_x N \end{aligned} \quad 2.36$$

2.36'daki denklemler doğrusal olmayan ve çok fazla iç içe geçmiş durumdadır. Sözelimi, üç tane simetri düzlemine sahip katı dikdörtgenel bir gövde için eylemsizliğin bütün vektör çarpımları sıfır olacak ve hiç fark oluşmayacaktır. Moment denklemleri bu durumda jiroskopik denklemlere indirgenir.

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \frac{(J_x - J_z) QR}{J_x} \\ \dot{Q} &= \frac{(J_z - J_x) PR}{J_y} \\ \dot{R} &= \frac{(J_x - J_y) PQ}{J_z} \end{aligned} \quad 2.37$$

Bu denklemler simetrik ve kendiliğinden iç içe geçmiş denklemlerdir. Herhangi iki eksenindeki açısal hızlar üçüncüde bir ivmelenme oluştururlar. Bu *eylemsizlik*

birleşikliği (inertia coupling) yüksek hücum açısındaki ani manevralarda önemli sonuçlar doğurmaktadır.

Açısal hareketin analizinde herhangi dönen bir rotorun açısal momentum etkileri ihmal edilmiştir. Bu etkiler çok önemli olabilir. Sözcüğü, bir çok Birinci Dünya Savaşı uçağı sabit krank milli ve dönen silindirik tek rotorlu motorlara sahipti. Motorun açısal momentumundan dolayı oluşan jiroskopik etkiler o uçaklara çok ustalıkla kullanım isteyen karakteristikler verdiler.

Boylamsal eksenindeki tek turbofan motorlu küçük bir jet uçağındaki durumda ise bu etkiler daha küçüktür. Manevra uçuşlarında daha etkili hale gelirler. Etkiyi temsil edebilmek için, 2.29'daki açısal momentum vektörüne sabit bir vektör eklenmiştir. Bunun sonucunda

$$\mathbf{H}_B = J \boldsymbol{\omega}_B + \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} \quad 2.38$$

Eğer analiz derinleştirilirse, etkinin anlamı 2.36'daki denklemlerin sağ tarafına aşağıdaki terimleri eklemekle eşdeğerdir.

$$\begin{aligned} & J_z (R h_y - Q h_z) + J_{xz} (Q h_z - P h_y) - R h_x + P h_z \\ & J_{xz} (R h_y - Q h_z) + J_x (Q h_x - P h_y) \end{aligned} \quad 2.39$$

Böylelikle Newton yasaları uçak hareketine uygulanmıştır (Stevens, 1992).

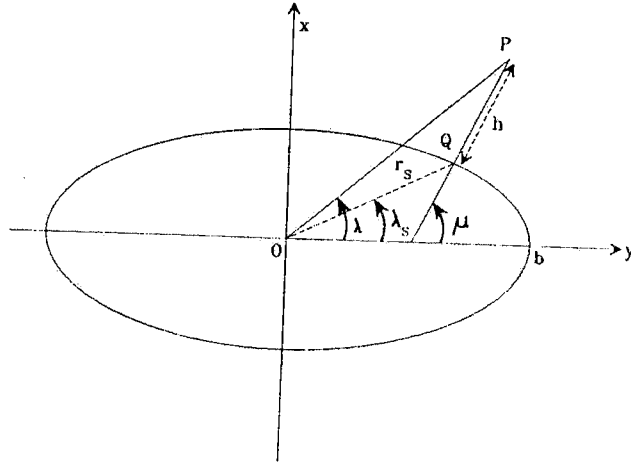
2.4 Kinematik Analiz

2.4.1 Dünya Çevresinde Seyrüsefer

Analizi yapabilmek için öncelikle Dünya'nın şekli hakkındaki bazı saptamaları ve koordinatları ECI koordinat sisteminde belirleme yöntemlerini oluşturmalıyız. Deniz seviyesi Dünya yüzeyi şekline en uygun yaklaşım bir elipsoidin dönmesinden meydana gelen şekil olacaktır. Bunun anlamı, aşağıdaki formüle sahip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, b > a > 0 \quad 2.40$$

elipsin x eksenini boyunca dönmesinden oluşan katı cisimdir ve bu x eksenini Dünya'nın dönüş eksenini ile çakışık düşünülmüştür. Şekil 2.2 Dünya'nın dönüş eksenini de içeren bir düzlem kesitini göstermektedir. Bu düzlem şekli elipsi oluşturmaktadır. Q noktasından geçen büyük daire r_s yarıçapına sahiptir (deniz yüzeyi yarıçapı) ve ekvatorial yarıçap $b = r_e$ ($r_e = 2.092565 \cdot 10^7$ ft)'dir.



Şekil 2.2 Yuvarlak-Dünya denklemleri için kullanılan değişkenler

Elipsin yarıçapı ('semiminer' ekseninin uzunluğu)

$$a = b (1 - f) \quad 2.41$$

ile verilir ve burada $f = 1/298.257$ Dünya'nın düzgünlük parametresidir.

Dünya yüzeyinde genelde kullanılan pozisyon koordinatları enlem ve boylam açılarıdır. Boylam doğu ve batı birincil meridyenine göre açı olarak ölçülür ve Greenwich, İngiltere'deki Kraliyet Gözlemevi arazisinden geçecek şekilde tanımlanmıştır. Dönmeyen ECI sistemi içindeki seyrüsefer için, gökyüzü boylam açısı (celestial) l 'yi kullanacağız. Bu açı ECI yz düzleminde (Dünya Ekvatorial düzlemi) ölçülen bir açı olarak tanımlanmıştır ve Kuzey Kutbundan bakıldığında negatif z ekseninden, saat yönünün tersi istikamette pozitif tanımlanmıştır. Öyleyse, Dünya'nın dönüşünden dolayı, bir jeostatik gözlemci sürekli artan bir l görecektir.

Enlem ölçümleri Dünya'nın basıklığından dolayı biraz daha karmaşıktır.

Şekil 2.2'de Dünya merkezine göre enlemi (geocentric) λ olarak ve μ açısı da yeryüzü düzlemini ölçme enlemi (geodetic) olarak tanımlanmıştır. Coğrafyasal harita ve kartlarda kullanılan enlemler ölçme enlemlerdir. Deniz seviyesindeki Q noktası için λ_s geocentric enlemi ile, şeklin geometrisi ve Q' da oluşturulan elipsin eğimi kullanılarak aşağıdaki denklemin varlığını gösterilmiştir.

$$(1 - f)^2 \tan \mu = \tan \lambda_s \quad 2.42$$

Q noktası (r_s, λ_s) polar koordinatlarına sahiptir. Şekil 2.2'deki elipsin denklemini kullanarak aşağıdaki deniz-seviyesi yarıçapı ifadesi türetilmiştir

$$r_s^2 = \frac{r_E^2}{1 + \left[\frac{1}{(1-f)^2} - 1 \right] \sin^2 \lambda_s} \quad 2.43$$

Şekil 2.2 bundan başka hava taşıtı eylemsizlik pozisyon vektörü OP' yi göstermekte ve Q noktasında Dünya'nın normalini cinsinden yükseklik h 'yi tanımlamaktadır.

Yörünge'nin sıfır gökyüzü boylamı (ECI negatif z ekseninin yukarısında), $h(0)$ belirlenmiş irtifası ve $f(0)$ ölçme enleminde başlanmıştır. Daha sonra z eksenini üzerinden Şekil 2.2 geometrisi kullanılarak eylemsizlik pozisyon vektörü aşağıdaki şekilde sıfırlanmıştır.

$$\mathbf{p}(0) = \begin{bmatrix} p_x(0) \\ p_y(0) \\ p_z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s \sin \lambda_s(0) + h(0) \sin \mu(0) \\ 0 \\ - [r_s \cos \lambda_s(0) + h(0) \cos \mu(0)] \end{bmatrix} \quad 2.44$$

$\lambda_s(0)$ ve r_s nicelikleri $\mu(0)$ 2.42 ve 2.43 denklemlerini sıra ile kullanarak hesaplanmıştır.

Bundan sonra, \mathbf{p} 'den h , l ve λ hesaplanmıştır. Gökyüzü boylamı ve Dünya merkezine göre enlemi \mathbf{p} 'nin bileşenlerinden aşağıdaki denklemleri kullanarak hesaplanabilir.

$$\tan l = \frac{p_y}{-p_z} \quad 2.45$$

$$\tan \lambda = \frac{p_y}{\sqrt{p_y^2 + p_z^2}}$$

l' yi hesaplamak üzere 0° den 360° 'ye bir aralığı kapsadığı için dört-çeyrekli ters tanjant fonksiyonu kullanılmıştır. Coğrafik boylam

$$l_G = \text{ana değer} (l_G(0) + l - \omega_x t) \quad 2.46$$

formülünden hesaplanmıştır. Burada, ω_x 'in Dünya'nın açısal hızıdır. Dünya'nın basırlığından dolayı h yüksekliğini hesaplamak zordur. Seyrüsefer amaçları için h 'yi kullanmadığımızdan uygun bir hassasiyetle yükseklik aşağıdaki formülle hesaplanabilir (Stevens, 1992).

$$h \cong \|\mathbf{p}\| - r_s \quad 2.47$$

2.4.2 Dünya ve Ufka Göre Meyil Gösterimi

Kinematik analiz de kullanılacak sağ el kuralı koordinat sistemleri Şekil 1.1'de gösterilmiştir. ECI sisteminde Dünya'nın merkezi O 'da olmak üzere y ve z eksenleri ekvatorial düzlemi oluşturur; x eksenini Dünya'nın dönüş eksenine çakıştıdır. Dünya'nın yüzeyine teğetsel yerel seviyedeki bir kuzey-doğu-aşağı sistemi Q noktasında gösterilmiştir. Bu sistem uçak ağırlık merkezi pozisyonu P 'nin hemen altına yerleşmiştir ve QP Dünya'nın yüzeyinden yüksekliği belirler. Hava taşıtı gövdesi eksen sistemi (ABC) merkezi P 'de olmak üzere belirlenmiştir. ABC sisteminin x , y , z eksenlerinin sırası ile ileriye, sancağa ve aşağıya yönlendirilmiştir. NED ve ABC sistemlerinin birbirlerinin özel konumlarına aşağıdaki dönüş sırasını izleyerek ulaşabilecekleri kabul edilmiştir.

ECI' den NED sistemine geçiş: ECI koordinatlarındaki bir vektör NED koordinatları cinsinden, aşağıdaki dönüşümleri uygulayarak ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{NED}} = B_\mu B_l \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{ECI}} \quad 2.48$$

Öncelikle gökyüzü boylam açısı üzerinden, B_l dönüşü uygulanır. x bileşeni

değişmeden kalır ve bu bir sağ-el dönüşüdür. B_l aşağıda gösterilmiştir. İkinci olarak B_μ dönüşü uygulanır, o da y bileşenini değişmeden bırakır ve μ bir sol-el dönüşüdür. Sonuç olarak

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{NED}} = \begin{bmatrix} \cos \mu & 0 & \sin \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \mu & 0 & \cos \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos l & \sin l \\ 0 & -\sin l & \cos l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{ECI}} \quad 2.49$$

B_G eylemsizlik sisteminden coğrafyasal sisteme tam bir dönüşüm ise B_G

$$B_G = B_\mu B_l = \begin{bmatrix} \cos \mu & -\sin \mu \sin l & \sin \mu \cos l \\ 0 & \cos l & \sin l \\ -\sin \mu & -\cos \mu \sin l & \cos \mu \cos l \end{bmatrix} \quad 2.50$$

biçiminde ortaya çıkmıştır.

NED' den ABC' ye geçiş: ABC sistemi uçak üzerinde x ileri, y sancak ve z aşağı yönlerde tanımlanmıştır. Anlık pozisyonun referans sistemine göre tarifi için uçak endüstrisinde sıklıkla ve yaygın olarak kullanılan dönüşlerin sırası aşağıdaki gibidir. Referans sisteminden başlayarak;

1. z eksen etrafında dön, burun sağa (pozitif sapma, ψ)
2. Yeni y eksen etrafında dön, burun yukarı (pozitif yunuslama, Q)
3. Yeni x eksen etrafında dön, sağ kanat aşağı (pozitif yatış, ϕ)

Araç eksen sisteminden gövde eksen sistemine gidiyorsak ters sıra izlenmelidir. Yalpa, yunuslama ve dönüş açıları ψ , Q , ϕ genellikle Euler açıları olarak adlandırılır. Eksen dönüşümleri cinsinden elimizde

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{ABC}} = B_\phi B_\theta B_\psi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{NED}} \quad 2.51$$

denklemini vardır. Temel dönüş matrisleri düzlem koordinatlar dönüşümü şekli yardımı ile yazılmıştır. Sonuç olarak

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{ABC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{NED} \quad 2.52$$

B_B , coğrafik sistemden gövde sistemine tam dönüşümü simgeler. B_B

$$B_B = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi & \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi & -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \quad 2.53$$

biçimindedir ve ECI'den ABC'ye tam dönüşüm matrisi $B(t)$ ile gösterilir. Burada

$$B = B_B B_G$$

biçimindedir. B matrisi zaman ile değişen uçak pozisyonunu tanımlar. Elemanları, bilinen μ ve l açılarının fonksiyonlarıdır, \mathbf{p} 'den hesaplanmışlardır ve Euler açıları ϕ , θ ve ψ cinsindedir. Herhangi bir andaki uçak pozisyonu yörüngenin herhangi bir yerinde oluşmuş açısal ivmelenmenin iki kere entegre edilmesinin sonucudur. Açısal hareketin dinamikleri bize gövde eksenlerinde ω_B açısal vektörü için bir grup diferansiyel denklem vermiştir. Gövde eksen takımı hızları anlık pozisyona bağlı olarak bir grup pozisyon açısal hızlar denklemine denk düşerler. Yukarıda bulunan B matrisi aşağıdaki denklemi de sağlamaktadır.

$$\dot{B} = -\Omega B \quad 2.54$$

Burada Ω , dönüş sisteminin eksenlerine göre ölçülen açısal hız vektörü çarpımını temsil eder.

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix} \quad 2.55$$

Denklem 2.54 dokuz tane iç içe geçmiş diferansiyel denklem içerir. Denklemlerden Euler açı hızlarını Euler açıları ve gövde eksenleri açısal hızları cinsinden veren üç tane durum denklemi oluşturulmuştur (Stevens, 1992).

2.4.3 Üç Değişkenli Pozisyon Denklemleri

Vektör çarpımı ilişkisi, B matrisinin sütunları cinsinden

$$\dot{\mathbf{b}}_i = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_i, i = 1,2,3 \quad 2.56$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem belli bir koordinat sistemine göre dönen herhangi bir koordinat sistemi ilişkisine tam olarak uygun bir denklemdir. B matrisi bağlı Euler açıları ve $\boldsymbol{\omega}$ vektörü bağlı açısal hızları içermektedir. 2.53 ayrıca bağlı Euler açıları cinsinden bir sistemden bir sisteme dönüşüm matrisi için de genel bir ifadedir. 2.53 kullanılarak ve \dot{b}_3 'ün birinci, ikinci elemanları ve \dot{b}_2 'nin birinci elemanı hesaplanarak Euler açılarının türevleri için

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad 2.57$$

denklemleri oluşturulmuştur. Katsayı matrisinin ortogonal olmadığına dikkat edilmelidir. Bu denklem sembolik olarak

$$\dot{\Phi} = \xi(\Phi)\boldsymbol{\omega}, \quad \Phi = [\phi, \theta, \psi]^T \quad 2.58$$

şeklinde yazılmıştır. 2.57'deki denklemler, yerine alternatifler aradığımız 2.54'deki durum denklemlerini temsil ederler. Açısal hızlar P , Q ve R ABC sisteminin mutlak açısal hız vektörü, $\boldsymbol{\omega}_B$ 'nin, elemanları haline gelirler. Yeni Euler açıları ABC sisteminin NED sistemine bağlı pozisyonunu temsil eden ϕ , θ , ψ yerine ϕ_1 , θ_1 , ψ_1 yazılarak belirlenebilir. Bundan sonra, eğer bağlı enlem ϕ , θ , ψ bulunmak istenirse 2.53

$$B_B(\phi, \theta, \psi) = B(\phi_1, \theta_1, \psi_1)B_G^T(\mu, l) \quad 2.59$$

olur ve pozisyon açıları B_B 'nin son kolonu ve ilk sırasındaki elemanlardan bulunmuştur. Böylelikle

$$\phi = \text{ATAN2}(b_{23}, b_{33}), \theta = -\sin^{-1}(b_{13}), \psi = \text{ATAN2}(b_{12}, b_{11}) \quad 2.60$$

olur. Burada b_{ij} B_B 'nin i . sıra j . sütun elemanı ve ATAN2 ters tanjant fonksiyonudur. 2.58'teki durum denklemleri, fiziksel olarak, anlamlı değişkenleri kullanmalarının ve minimal olmalarının avantajına sahiptirler (bu kullanılabilecek

en az sayıdaki birinci-derece diferansiyel denklem sayısıdır). Bunlar ayrıca çok belirli dezavantajlara da sahiptirler. İlk olarak, denklemlerin incelenmesi, yunuslama pozisyon değişkeni θ 'nin $\pm 90^0$ 'ye ulaşması durumunda sıfıra bölüm oluştuğunu göstermektedir. Sayısal benzetimde bunun olma olasılığı nerdeyse imkansız gibidir ancak tekil nokta çevresinde belirgin hesaplama hataları oluşabilir. İkincisi, Euler açıları normal yunuslama aralığı olan $\pm 90^0$ 'nin, yatış ve sapma açı değerleri normal sınır olan $\pm 180^0$ 'nin dışına taşabilir. Bu problem pozisyonu tek olarak belirlemede zorluk çıkarabilir. Son olarak, denklemlerin P , Q , R 'de doğrusal ancak istenen Euler açıları cinsinden doğrusal olmadığını gözden kaçırmamak gerekir. 2.58 denklemleri genel olarak uçak benzetiminde kullanılır ancak Dünya çevresi uçuş ve burğu yaparak (spin) uçan gövdelerin uçuşunda kullanılması uygun değildir (Stevens, 1992).

2.4.4 Dört Değişkenli Pozisyon Denklemleri

Dönen bir koordinat sisteminin konumunun belirlenmesi için Euler açıları yanında, daha pek çok yol vardır. Bu metotlar üç tane Euler açısı yerine dört, beş ya da altı değişken gerektirmektedir. Bunların hepsi Euler açıları gösteriminin ortaya koyduğu matematiksel tekilliği önleme ve seyrüsefer hesaplarında bilgisayar hızını maksimum yapma amacına yöneliktir. Aslında bu metotlardan biri birçok uzay aracı, füze ve uçak uygulamasında sıklıkla kullanılmaktadır. Bunun adı kuadratik dört-değişken gösterimidir.

Euler teoremi herhangi genel bir dönüş matrisinin, Euler ekseni çevresinde bir dönüşe denk gelen tek düzlem dönüş matrisine *benzediğini* gösterir. Bu fikirden hareketle B dönüş matrisinin bir düzlem dönüş matrisi B_p 'ye eşit olduğunu farz edelim. Bu durumda dönüş matrisi T

$$B = T^T B_p T \quad 2.61$$

biçimindedir. Bu ilişki B 'yi dört değişken cinsinden ifade etmek için kullanılmıştır. İlk olarak, Euler eksenlerinin referans eksenleri x , y ve z 'ye göre α , β , γ gibi üç eğim açısı ile belirlendiği kabul edilmiştir. Daha sonra, T dönüşünün, yeni x ekseni çevresinde B_p dönüşü yapılmış gibi, yeni bir sistem oluşturduğunu ve yeni y ekseninin eski xy düzleminde kaldığı kabul edilmiştir. B_p dönüşünün δ

açısı kadar olduğu kabulü altında B

$$B = \begin{bmatrix} \cos a & d_{21} & d_{31} \\ \cos \beta & d_{22} & d_{32} \\ \cos \gamma & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & \sin \delta \\ 0 & -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos a & \cos \beta & \cos \gamma \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \quad 2.62$$

şeklinde olacaktır. Burada d_{ij} elemanları hesaplanacak elemanlardır. Ortogonallik olduğundan

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad 2.63$$

yazılabilir. Bilinmeyen eleman d_{ij} 'ler T üzerinde uygulanan ortogonallik koşullarından oluşan denklemlerden çözümlenmektedir. Analiz sırasında oluşan işaret belirsizlikleri T 'nin birim matrise indirgenmesi koşullarının incelenmesi ile çözümlenir. Bu yapıldığında, T

$$T = \begin{bmatrix} \cos a & \cos \beta & \cos \gamma \\ -\frac{\cos \beta}{\sin \gamma} & \frac{\cos a}{\sin \gamma} & 0 \\ -\frac{\cos \alpha}{\tan \gamma} & -\frac{\cos \beta}{\tan \gamma} & \sin \gamma \end{bmatrix} \quad 2.64$$

şeklinde bulunur. 2.62'de gerekli çarpımlar yapıldığında oluşan B matrisi α, β, γ ve δ 'nin karmaşık bir fonksiyonu halindedir. 2.65'deki değişiklikler yapıldığında,

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{\delta}{2} \\ q_1 &= \cos a \sin \frac{\delta}{2} \\ q_2 &= \cos \beta \sin \frac{\delta}{2} \\ q_3 &= \cos \gamma \sin \frac{\delta}{2} \end{aligned} \quad 2.65$$

B matrisinin dört-değişken gösterimi

$$B = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad 2.66$$

formundadır. T üzerindeki ortogonallik koşulları ve 2.65'deki değişiklikler aşağıdaki denklemi ortaya çıkarır

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad 2.67$$

Genellikle *kuadratik parametreler* adını alan q_i değişkenleride Euler' e atfedilir. Bunlar Euler açıları ile aşağıdaki şekilde bağlıdır.

$$\begin{aligned} q_0 &= \pm(\cos(\varphi/2) \cos(\theta/2) \cos(\psi/2) + \sin(\varphi/2) \sin(\theta/2) \sin(\psi/2)) \\ q_1 &= \pm(\sin(\varphi/2) \cos(\theta/2) \cos(\psi/2) - \cos(\varphi/2) \sin(\theta/2) \sin(\psi/2)) \\ q_2 &= \pm(\cos(\varphi/2) \sin(\theta/2) \cos(\psi/2) + \sin(\varphi/2) \cos(\theta/2) \sin(\psi/2)) \\ q_3 &= \pm(\cos(\varphi/2) \cos(\theta/2) \sin(\psi/2) - \sin(\varphi/2) \sin(\theta/2) \cos(\psi/2)) \end{aligned} \quad 2.68$$

Pozisyonunun kuadratik gösterimi uzay ve füze uygulamalarında geniş uygulama alanı bulmuştur. Bu gösterim pozisyonun özel bir gösterimidir ve Euler denklemlerinin tekil nokta ve “wraparound” problemlerinden etkilenmemektedir. Ayrıca kuadratik diferansiyel denklemlerin doğrusallığı bazı hesaplama kolaylıkları oluşturmaktadır. Hiç bir kuadratik elemanın birim büyüklüğü geçmediği, 2.67 denkleminde belirlenebilir.

2.68 denklemleri Euler açılarının verilen başlangıç değerlerinden kuadratik parametrelerinin başlangıç değerlerini hesaplayabilmemizi sağlar. Başlangıç Euler açıları elimizde yoksa kuadratik denklemleri B matrisinden yararlanarak sıfırlamak uygun olacaktır. Bu 2.66 denklemlerini kullanarak yapılabilir. 2.66 denklemlerinin köşegen elemanları toplanırsa

$$\begin{aligned} 4 q_0^2 &= 1 + b_{11} + b_{22} + b_{33} \\ 4 q_1^2 &= 1 + b_{11} - b_{22} - b_{33} \\ 4 q_2^2 &= 1 - b_{11} + b_{22} - b_{33} \\ 4 q_3^2 &= 1 - b_{11} - b_{22} + b_{33} \end{aligned} \quad 2.69$$

olur. Bu bağıntılar kuadratik elemanlarının büyüklüklerini verir ancak işaretlerini belirlemez. 2.66'nın köşegen dışında kalan terimleri ek bağıntıları oluştururlar.

$$\begin{aligned} 4q_0q_1 &= b_{23} - b_{32} & 4q_1q_2 &= b_{12} + b_{21} \\ 4q_0q_2 &= b_{31} - b_{13} & 4q_2q_3 &= b_{23} + b_{32} \\ 4q_0q_3 &= b_{12} - b_{21} & 4q_1q_3 &= b_{13} + b_{31} \end{aligned} \quad 2.70$$

2.69 denklemlerinden en fazla büyüklüğe sahip (en azından dördünden biri

sıfırdan farklı olmalı) kuadratik eleman seçilmiştir. Kök almaya bağlı olarak gerekli işaret rasgele seçilebilir ve bu değişken 2.70'deki diğer kuadratik elemanlarını bulmak üzere bölen olarak kullanılmıştır (Stevens, 1992).

2.4.5 Kuadratik Diferansiyel Denklemleri

Euler'in orijinal tanımı kullanılarak ve kuadratik parametre ve türevler cinsinden referans eksen açısal hız bileşenleri için

$$\begin{aligned} P &= 2(q_0 \dot{q}_1 + q_3 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_3 - q_1 \dot{q}_0) \\ Q &= 2(-q_3 \dot{q}_1 + q_0 \dot{q}_2 + q_1 \dot{q}_3 - q_2 \dot{q}_0) \\ R &= 2(q_2 \dot{q}_1 - q_1 \dot{q}_2 + q_0 \dot{q}_3 - q_3 \dot{q}_0) \end{aligned} \quad 2.71$$

yazılabilir. Bu denklemler, 2.66 denkleminin tersi alınarak ve Euler açı hızları için 2.68'de yerine koyarak bulunmuştur.

Denklem 2.71 q_i terimleri ve türevleri cinsinden

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad 2.72$$

biçiminde yazılmıştır. Buradan

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & P & Q & R \\ -P & 0 & -R & Q \\ -Q & R & 0 & -P \\ -R & -Q & P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \equiv -\frac{1}{2} \Omega_q \mathbf{q} \quad 2.73$$

yazılır. 2.73 aradığımız diferansiyel denklemleri göstermektedir. Bunlar 2.57'deki uçak durum denklemlerine eklenerek $\theta = 90^\circ$ 'deki tekil nokta problemi ortadan kaldırılmıştır. Bu denklemler geri kalan durum denklemleriyle Ω_q matrisi içinde oluşan P , Q ve R durum değişkenleri üzerinden ve diğer durum eşitliklerinde kullanılmak için B matrisi türetilmesi üzerinden iç içe geçmiş durumdadırlar. Euler açılarının sadece pozisyonunun gözlenmesi ve geri besleme kontrolü yapılması gerekeceği durumlarda hesaplanması gerekmektedir. Bir benzetimde kuadratik diferansiyel denklemleri geri kalan durum eşitlikleri yardımıyla nümerik olarak entegre edilebilirler (Stevens, 1992).

2.5 Durum Denklemlerini Birleştirmek

Bu bölümde, uçak modellerinde kullanılmak üzere, tüm katı-gövde denklemleri yassı-Dünya denklemlerini türetmek üzere kullanılmış ve yassı-Dünya denklemlerine rüzgar etkisi eklenmiştir.

2.5.1 Yuvarlak Dünya Denklemleri

Tüm durum modeli için gerekli denklemler 2.4, 2.8, 2.32 ve 2.73 denklemlerdir. Bu denklemler, $(\omega_B \times)$ ve $(\omega_E \times)$ vektör çarpımı operasyonlarının Ω_B ve Ω_E matrisleri ile yer değiştirdiği, matris formunda birleştirilmişlerdir. Bu form bilgisayar programlanmasında kullanılacak formdur.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{v}}_B \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_B \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{E_i} & B^T & 0 & 0 \\ -B \Omega_{E_i}^2 & -(\Omega_B + B \Omega_{E_i} B^T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J^{-1} \Omega_B J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \Omega_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v}_B \\ \boldsymbol{\omega}_B \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Bg(\mathbf{p}) + \frac{\mathbf{F}_B}{m} \\ J^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2.74$$

Durum vektörü 13 eleman içerir: üç tane pozisyon koordinatı, üç tane aktarımsal hız bileşeni, üç tane açısal hız bileşeni ve dört kuadratik değişken. Katsayı matrisi

$$\Omega_{E_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_x \\ 0 & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \Omega_B = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix}, \Omega_q = \begin{bmatrix} 0 & P & Q & R \\ -P & 0 & -R & Q \\ -Q & R & 0 & -P \\ -R & -Q & P & 0 \end{bmatrix} \quad 2.75$$

alt matrislerini içerir. Burada ω_x Dünya'nın dönüş hızı ve P , Q ve R uçağın gövde eksen sistemi açısal hızlarıdır.

Bu durum denklemleri dönen Dünya çevresinde yüksek hızlı uçuşu benzetmek için geçerlidir. Uzay aracı yörüngeleri için yerçekimi modelinin diğer kütle çekim etkilerinin, güneş rüzgarı gibi rahatsız edici kuvvetlerin daha detaylı incelenmesi gerekmektedir. Dünya yüzeyinin küçük alanları üzerinde manevralı uçuş çalışmaları ve bunu kontrol edebilecek kontrol sistemi için \mathbf{v}_B denklemi çok karmaşıktır (Stevens, 1992).

2.5.2 Yassı Dünya Denklemleri

Yukarıda bahsedilen basitleştirilmiş denklemler için NED sistemi Dünya yüzeyinde bir eylemsizlik referans sistemi olarak kabul edilmiştir. Bu sistem hem

ivmelenecek hem de dönecektir. Bunun yanında manevra yapan bir uçak tarafından oluşturulacak ivmeler Dünya'nın dönüş oranı ile ilişkili ivmeler yanında ihmal edilmiştir. Dahası, bir uçağa manevra yaptıran kontrol sistemlerinin oluşturulması sırasında Dünya yüzeyi üstünde hassas bir seyrüsefere ihtiyaç yoktur.

NED sistemindeki hız, 2.53'deki dönüş matrisini kullanarak hesaplanmıştır.

$$\dot{\mathbf{p}}_{\text{NED}} \equiv \mathbf{v}_{\text{NED}} = B_B^T \mathbf{v}_B \quad 2.76$$

\mathbf{p}_{NED} NED coğrafyasal sistemine bağlı pozisyon vektörü olarak tanımlanır. NED ve ABC sistemleri kullanıldığında B dönüş matrisi B_B matrisi ile yer değiştirmiştir. Yassı-Dünya modelinde kuadratik gösterim yerine 2.53'deki Euler açı eşitliği kullanılmıştır. Yassı-Dünya denklemleri, sırasıyla kuvvet, moment, pozisyon ve seyrüsefer denklemlerinden oluşur

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_B &= -\Omega_B \mathbf{v}_B + B_B \mathbf{g}'_0 + \frac{\mathbf{F}_B}{m} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_B &= -J^{-1} \Omega_B J \boldsymbol{\omega}_B + J^{-1} \mathbf{T}_B \\ \dot{\boldsymbol{\Phi}} &= \xi(\boldsymbol{\Phi}) \boldsymbol{\omega}_B \\ \dot{\mathbf{p}}_{\text{NED}} &= B_B^T \mathbf{v}_B \end{aligned} \quad 2.77$$

ve durum vektörü

$$\mathbf{x}^T = [\mathbf{v}_B^T, \boldsymbol{\omega}_B^T, \boldsymbol{\Phi}^T, \mathbf{p}_{\text{NED}}^T] \quad 2.78$$

biçiminde oluşur. Denklemler doğrusal değildir ve etkileşimlidir. Moment denklemlerinin girdisi uygulanan torklardır. Bu denklem Ω_B ve $\boldsymbol{\omega}_B$ aynı terim içinde bulunduğu için doğrusal değildir ve P , Q ve R üzerinden diğer denklemlerle etkileşimlidir. Pozisyon moment denklemindeki $\boldsymbol{\omega}_B$ tarafından sürülür ve $\xi(\boldsymbol{\Phi})$ ile bunun $\boldsymbol{\omega}_B$ çarpımı üzerinden doğrusal değildir. Kuvvet eşitliği Ω_B ve B_B matris katsayıları için diğer denklemlerden $\boldsymbol{\omega}_B$ ve $\boldsymbol{\Phi}$ 'ye ihtiyaç duymaktadır (Stevens, 1992).

2.6 Doğrusal Olmayan Uçak Modeli

Hareketin vektör denklemleri genişleterek ve aerodinamik bilgileri de kullanılarak aerodinamik kuvvet ve momentlerin bu denklemlerle birleştirilmesi tanımlanmıştır. 2.77'deki düz-Dünya vektör nicelikleri kullanılmış ve uçak kontrol dizaynı için kullanılan 6 serbestlik derecesine sahip denklemler elde edilmiştir. Durum vektörünün elemanları, sırasıyla, hız vektörü \mathbf{v}_B 'nin, Euler açıları vektörü Φ 'nin, açısal hız vektörü ω_B 'nin ve pozisyon vektörü \mathbf{p}_{NED} 'in bileşenlerini içerir. Durum vektörü

$$\mathbf{X}^T = [U \ V \ W \ \phi \ \theta \ \psi \ P \ Q \ R \ p_N \ p_E \ h] \quad 2.79$$

şeklinde elde edilir. Buradaki h NED sistemindeki irtifayı temsil etmektedir.

2.77'deki vektör matris çarpımı yapıldığında, Çizelge 2.2'de görülen gövde eksen sistemi durum denklemlerinin standart grupları elde edilmiştir.

Çizelge 2.2'deki moment denklemleri daha önceden 2.36 olarak türetilmişti, ancak burada c_i sabitleri aşağıdaki tanımları ile denklemlere katılmıştır.

$$\Gamma_{c1} = (J_y - J_z)J_z - J_{xz}^2,$$

$$\Gamma_{c2} = (J_x - J_y + J_z)J_{xz}$$

$$\Gamma_{c3} = J_z,$$

$$\Gamma_{c4} = J_{xz}$$

$$c_5 = \frac{(J_z - J_x)}{J_y},$$

$$c_6 = \frac{J_{xz}}{J_y}$$

$$c_7 = \frac{1}{J_y},$$

$$\Gamma_{c8} = J_x(J_x - J_y) + J_{xz}^2$$

$$\Gamma_{c9} = J_x$$

Burada $\Gamma = J_x J_y - J_{xz}^2$, dir.

2.83'deki seyrüsefer denklemlerinde \dot{p}_N , \dot{p}_E ve \dot{h} sırasıyla, kuzeyi, doğuyu ve Dünya yüzeyi üstünde yerel seviyeli coğrafik sistem içindeki uçak hızının dikey bileşenlerini temsil eder.

Çizelge 2.2 Düz-Dünya, gövde eksen sistemi 6 serbestlik derecesi denklemleri

Kuvvet Denklemleri

$$\begin{aligned}\dot{U} &= RV - QW - g'_0 \sin \theta + \frac{F_x}{m} \\ \dot{V} &= -RU + PW + g'_0 \sin \varphi \cos \theta + \frac{F_y}{m} \\ \dot{W} &= QU - PV + g'_0 \cos \varphi \cos \theta + \frac{F_z}{m}\end{aligned}\quad 2.80$$

Kinematik Denklemleri

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= P + \tan \theta (Q \sin \varphi + R \cos \varphi) \\ \dot{\theta} &= Q \cos \varphi - R \sin \varphi \\ \dot{\psi} &= \frac{Q \sin \varphi + R \cos \varphi}{\cos \theta}\end{aligned}\quad 2.81$$

Moment Denklemleri

$$\begin{aligned}\dot{P} &= (c_1 R + c_2 P)Q + c_3 \bar{L} + c_4 N \\ \dot{Q} &= c_5 PR - c_6 (P^2 - R^2) + c_7 M \\ \dot{R} &= (c_8 P - c_2 R)Q + c_4 \bar{L} + c_9 N\end{aligned}\quad 2.82$$

Seyrüsefer Denklemleri

$$\begin{aligned}\dot{p}_N &= U \cos \theta \cos \psi + V(-\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi) \\ &+ W(\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi) \\ \dot{p}_E &= U \cos \theta \sin \psi + V(\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi) \\ &+ W(-\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi) \\ \dot{h} &= U \sin \theta - V \sin \varphi \cos \theta - W \cos \varphi \cos \theta\end{aligned}\quad 2.83$$

6-DOF denklemleri içindeki kuvvet ve moment bileşenleri $(F_x, F_y, F_z, \bar{L}, M, N)$ aerodinamik ve itme etkisi olarak ikiye bölünmelidir. Bundan başka, monte edilen motor itmesinin, irtifa ve sürate (ya da Mach sayısı) göre rejim ayarı bir parametre olmak üzere, değerlerine ihtiyaç duyulur. Bir çok

aerodinamik kuvvet ve moment bileşeni kontrol yüzeyi dönmelerine bağımlıdır. Bu bağımlılıklar modelin kontrol girişleridir. Rejim ayarı bir başka kontrol girişidir, ve doğrusal olmayan modelin uygulanan giriş vektörü aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{U}^T = [thl \quad el \quad ail \quad rdr] \quad 2.84$$

Burada sırasıyla vektör elemanları, rejim ayarını, irtifa dümeni dönmelerini, kanatçık dönmelerini ve istikamet dümeni dönmelerini ifade eder (Stevens, 1992).

2.6.1 Aerodinamik Kuvvet ve Momentleri Birleştirmek

2.80 ve 2.81'deki aerodinamik kuvvet ve moment bileşenleri aerodinamik açılara ve gerçek hava hızına bağlıdır. 6 DOF model içindeki durum değişkenleri U , V ve W yu V_T , β ve α ile değiştirilmiştir. U , V ve W kuvvet denklemleri için hesaplanmış ve yeni durum değişkenlerinin türevleri

$$\begin{aligned} \dot{V}_T &= \frac{U\dot{U} + V\dot{V} + W\dot{W}}{V_T} \\ \dot{\beta} &= \frac{\dot{V}_T - V\dot{V}_T}{V_T^2 \cos \beta} \\ \dot{\alpha} &= \frac{U\dot{W} - W\dot{U}}{U^2 + W^2} \end{aligned} \quad 2.85$$

biçiminde elde edilmiştir. Yeni durum vektörü aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{X}^T = [V_T \quad \beta \quad \alpha \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad P \quad Q \quad R \quad p_N \quad p_E \quad h] \quad 2.86$$

Bu noktada bir zorluk oluşur çünkü aerodinamik kuvvet katsayıları alfa ve betanın türevine bağımlı hale gelebilirler. Bununla beraber alfa ve betanın türevleri kuvvet denklemleri işlenmeden önce ortaya çıkmayacaklardır. Durum değişkenleri yöntemine göre gövde-eksenleri durum denklemleri, türevleri için kesin çözüm verecek bir forma getirilemezler. Bu problem bir eksen değişkenliği ile ortadan kaldırılacaktır ve bu aerodinamik kuvvetleri $\dot{\alpha}$ ve $\dot{\beta}$ 'a doğrusal bağımlı hale getirecektir.

Eğer $\dot{\alpha}$ ve $\dot{\beta}$ bağımlılığı sadece aerodinamik moment katsayılarında ortaya çıkıyorsa kesin durum eşitliklerinin ortaya çıkması basitçe moment denklemlerinden önce kuvvet denklemleri işlenerek önlenebilir. Bu sık karşılaşılan bir durumdur, oran türevlemesi C_{L_n} tüm $\dot{\beta}$ türevlemelerinde sıklıkla ihmal edilir, bunun yanında türevleme C_{m_n} belirgin durumdadır.

Kuvvet eşitliklerinde ne $\dot{\alpha}$ ne de $\dot{\beta}$ bağımlılığının olmadığı varsayılarak kesin bir durum modelini işleyebilmek için tipik olarak yapılması gereken hesaplamalar aşağıdaki gibidir (Stevens, 1992);

1. Mach sayısını ve dinamik basıncı standart atmosfer modeline göre hesapla. Bundan sonra kuvvet eşitliklerinde kullanılmak üzere motor itmesini bul.
2. Aerodinamik katsayıları kuvvet eşitliklerinden hesapla, U , V , W 'yu V_T , α ve β dan hesapla, kuvvet eşitliklerini işle ve daha sonra durum türevleri \dot{V}_T , $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ 'ı bul.
3. Moment eşitlikleri için aerodinamik katsayıları hesapla, eğer gerekiyorsa $\dot{\alpha}$ ve $\dot{\beta}$ 'ı kullan ve daha sonra moment denklemlerini işle.
4. Kinematik ve seyrüsefer eşitliklerini işle.

2.6.2 Doğrusal Olmayan Denklemlerin Ayrıştırılması

Rüzgar eksen sistemi kuvvet denklemleri yatış ve sapma açılarından biri ya da her ikisi sıfır olduğu zaman önemli ölçüde basitleşecektir. İlgili uçuş koşulları *düzgün doğrusal yana kaymasız* uçuş, $\phi = 0$ ve $\beta = 0$, *düzgün doğrusal yana kaymalı* uçuş $\phi = 0$ ve $\beta \neq 0$, ve *koordinat dönüş* uçuşu $\phi \neq 0$, $\beta = 0$ biçimindedir. Koşullardan ilki en önemli durumdur çünkü bu normal uçuş şartıdır ve bu hareket düz-Dünya denklemlerinin ayrışmasını gerektirir.

Ayrışmanın anlamı hareketin denklemlerinin iki bağımsız gruba bölünmesidir. Bir grup uçağın uzunlamasına hareketini (yunuslama ve xz

düzlemine aktarma), diğer grup uçağın yanal hareketini tanımlar (yunuslama, sapma ve yalpalama). Ayrıştırılmış denklemler analitik çalışmalar için daha elverişlidir. Ayrışma doğrusal küçük-düzensizlik denklemlerinde de ortaya çıkar ve iki setin azalmış mertebesi uçağın dinamik modları üstündeki çalışmayı basitleştirir.

$\phi = 0$ durumu ele alındığında, g -bileşeni denklemleri

$$\begin{aligned} g_1 &= -g'_0 \cos \beta \sin(\theta - a) \\ g_2 &= g'_0 \sin \beta \sin(\theta - a) \\ g_3 &= g'_0 \cos(\theta - a) \end{aligned} \quad 2.87$$

şeklini alır. Daha sonra, $\beta = 0$ kısıtı uygulanır. Bu durumda *yunuslama pozisyonu açısı* (pitch attitude angle) ve hücum açısı aynı dikey düzlemde kuzey-doğu düzleminin üstünde uzanırlar ve aralarındaki fark *uçuş yörüngesi açısı*'dır.

$$\gamma|_{\phi=\beta=0} = \theta - a \quad 2.88$$

Bu şartlar altında kuvvet denklemleri şu şekilde kısalır;

$$\begin{aligned} m \dot{V}_T &= F_T \cos a - D - m g'_0 \sin \gamma \\ m \dot{\beta} V_T &= Y - m V_T R_W \\ m \dot{a} V_T &= -F_T \sin a - L + m V_T Q_W + m g'_0 \cos \gamma \end{aligned} \quad 2.89$$

Uzunlamasına denklemler yanal değişkenler β , ϕ , ψ , P ve R 'den bağımsız hale gelmişlerdir. Bu denklemler sadece uzunlamasına hareket için kullanılan çok genel bir modeli oluştururlar.

Kinematik denklemlerinden görülebileceği üzere, yatış açısı sıfır olduğu zaman

$$\dot{\theta} = Q \quad 2.90$$

değerindedir. $\beta = 0$ ve $Q_W = Q$ olduğundan 2.89'un üçüncü denklemi genellikle

$$m \dot{\gamma} V_T = F_T \sin a + L - m g'_0 \cos \gamma \quad 2.91$$

olarak yazılır. Daha sonra geliştirilmiş gövde eksen sistemi moment denklemlerinden eğer $P \equiv R \equiv 0$ ise, yunuslama moment eşitliği dönme ve yalpalama moment denklemleri ile iç içe geçmektedir. Bu ayrılmış uzunlamasına hareket için final denklemi oluşturur;

$$J_y \dot{Q} = M \quad 2.92$$

Geri kalan moment eşitlikleri pek yararlı değildir çünkü herhangi bir dönme ve yalpalama ivmesinin entegrali sonlu dönme ve yalpalama hızları oluşturacak ve denklemler bir kez daha iç içe geçecektir (Stevens, 1992).

2.7 Doğrusal Modeller ve Kararlılık Türevleri

Kontrol sistemi ile beraber bir uçağın performansını değerlendirmek üzere bir bilgisayar benzetimi yapmak istediğimiz zaman genellikle doğrusal olmayan bir model kullanırız. Bundan başka kontrol sistem tasarımı için gerek duyulan doğrusal denklemler çok sıklıkla doğrusal olmayan bilgisayar modelinden nümerik metotlar yolu ile türetilir. Doğrusal olmayan durum modelleri sayısal bilgisayar yardımı olmadan ele alınması güç denklemlerden oluşur. Bu yüzden bir uçağın dinamiğini ve hareketin kararlılığını anlamaktaki ilk gelişmeler doğrusal küçük farklılaşma denklemlerini çalışmaya başlamakla eş zamanlıdır. Küçük farklılaşma denklemleri doğrusal olmayan denklemlerden cebirsel olarak türetilmiş doğrusal denklemlerdir. Bu denklemler içindeki doğrusal olmayan aerodinamik katsayılar kararlılık türevleri içeren terimlerle yer değiştirmiştir.

Küçük farklılaşma denklemlerini cebirsel olarak türetmenin iki önemli nedeni vardır. İlki, doğrusal denklemler için gerekli türevleri doğrusal olmayan data ortaya çıkmadan önce göreceli olarak çabukça tahmin edebilmemizdir. İkincisi, cebirsel küçük farklılaşma denklemlerinin değişik uçuş şartları altındaki çeşitli kararlılık türevlerinin bağlantılı önemini ve bunları uçak hareketinin kararlılığı üzerindeki etkilerini derinlemesine incelememizde büyük rol oynamasıdır. Doğrusal denklemleri türetmek için yatışkın-durum uçuş şartları incelenmiştir (Stevens, 1992).

2.7.1. Tekil Noktalar ve Yatışkın Durum Uçuşu

Genel formu

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \mathbf{U}) = 0 \quad 2.93$$

olan durum denklemleri ele alınmıştır. Burada \mathbf{f} n tane gerçek katsayılı doğrusal olmayan f_i fonksiyonlarının bir vektörüdür.

Doğrusal olmayan sistemler teorisinde bir otonom (dışarıdan kontrol girdisi olmayan) zaman içinde değişmez sistemin tekil nokta ya da denge noktası kavramı tanıtılmaktadır. Doğrusal olmayan durum denklemlerinin tekil nokta veya noktalarının koordinatları

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \mathbf{U}) = 0, \quad \dot{\mathbf{X}} \equiv 0; \mathbf{U} \equiv 0 \text{ ya da sabit} \quad 2.94$$

denklemini sağlayan $\mathbf{X} = \mathbf{X}_e$ çözüm vektörü tarafından belirlenmektedir. Tüm türevler sıfır olduğu zaman sistem hareketsiz konumundadır ve bundan sonra değişkenlerden bazısını az miktarda değiştirilerek tekil nokta etrafında sistemin davranışı izlenmiştir. Eğer durum yörüngesi *yunuslama durumu* gibi bir değişkenin ufak uyarılması durumunda tekil noktadan çok çabuk uzaklaşıyorsa, pilot uçak kontrolünü sağlamakta yetersiz kalabilir.

Yatışkın durum uçuşu tüm hareket değişkenlerinin sabit ya da sıfır olduğu konum olarak tanımlanabilir. Doğrusal ve açısal hız bileşenleri sabit (ya da sıfır) ve tüm ivme bileşenleri sıfırdır. Bu tanım, basitleştirici kabullenmeler yapılmazsa, çok sınırlayıcıdır, sözcüğümlü, uçak kütlelerinin sabit kaldığı varsayılmalıdır. Yuvarlak Dünya denklemleri durumunda ise, Dünyanın açısal hızı yüzünden sadece Dünya çevresindeki sabit enlem uçuşu gerçek yatışkın durum şartıdır. Dünyanın yuvarlaklığı hesaba katıldığı zaman, sabit enlemlerin oluşturduğu yörüngeler, Ekvator çevresini de hesaba katarak yer çekim büyüklüğü sabit kaldığı için işlenebilecek uygun tek yol olarak karşımıza çıkmaktadır.

Düz-Dünya denklemlerinin bütün kontrol sistemi dizayn amaçlarımız için yeterli olduğunu varsayarak, tanım yatışkın seviye uçuşuna ve yatışkın dönüş

uçuşuna izin verir. Dahası, irtifayla oluşan atmosferik yoğunluk değişimi ihmal edilirse, bir dönüşsüz tırmanma ve tırmanarak dönme de yatışkın durum uçuş şartları olarak ele alınabilir. Bu durumda NED pozisyon denklemleri tekrardan hareketin denklemleri ile içice geçmez ve yatışkın durum şartı bulmak için kullanılmaları gerekmez. Öyleyse, kontrol sistem dizaynı için bize gerekli olan yatışkın durum koşulları aşağıdaki denklemde görüleceği üzere düz-Dünya denklemlerinin geriye kalan dokuz durum değişkeni cinsinden tanımlanabilir:

$$\text{Yatışkın-durum uçuşu: } \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}, \dot{U}, \dot{V}, \dot{W} \text{ (ya da } \dot{V}_T, \dot{\beta}, \dot{\alpha}) \equiv 0, U = \text{sabit} \quad 2.95$$

Uçuş durumuna bağlı olarak ek kısıtlamalar ise,

$$\text{Yatışkın düzgülün doğrusal uçuş: } \varphi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi} \equiv 0 \quad (\because P, Q, R \equiv 0)$$

$$\text{Yatışkın dönüş uçuşu: } \dot{\varphi}, \dot{\theta} \equiv 0 \quad \dot{\psi} \equiv \text{sapma hızı}$$

$$\text{Yatışkın tırmanma uçuşu: } \varphi, \dot{\varphi}, \dot{\psi} \equiv 0, \quad \dot{\theta} \equiv \text{tırmanma hızı}$$

$$\text{Yatışkın tona uçuşu: } \dot{\theta}, \dot{\psi} \equiv 0, \quad \dot{\varphi} \equiv \text{tona hızı}$$

Yatışkın durum şartları $\dot{P}, \dot{Q}, \dot{R} \equiv 0$, açısal hızların sıfır ya da sabit olmasını gerektirir (yatışkın dönüşlerde olduğu gibi) bu da aerodinamik ve itme momentlerinin sıfır ya da sabit olmasını gerektirir. $\dot{U}, \dot{V}, \dot{W} \equiv 0$ şartları hava hızının, hücum açısının ve yengeçleme açısının sabit olması demektir ve bunun gereği olarak aerodinamik kuvvet sıfır ya da sabit olmalıdır. Öyleyse, yatışkın-durum tırmanma ya da dalış ve yatışkın-durum dönme şartları sadece anlık olarak oluşabilirler. Fakat bu uçuş koşullarında uçak dinamiğini doğrusallaştırmamız kontrol sistemleri açısından gereklidir.

Bir pilot uçağı yatışkın-durum uçuş şartlarına getirmek için çok fazla uğraşmazken, matematiksel model 2.94'dekine benzer doğrusal olmayan denklemlerin çözümünü bekler. Genellikle doğrusal olmayan denklemler yüzünden bir yatışkın durum çözümü ancak bilgisayarda nümerik bir metodu kullanarak bulunabilir (Stevens, 1992).

2.7.2 Doğrusallaştırma

Kapalı formdaki doğrusal olmayan denklem aşağıdaki gibi yazılacaktır

$$\begin{aligned} f_1(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \mathbf{U}) &= 0 \\ f_2(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \mathbf{U}) &= 0 \\ &\vdots \\ f_9(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \mathbf{U}) &= 0 \end{aligned} \quad 2.96$$

ve sırasıyla dokuz tane rüzgar eksen sistemi kuvvet, kinematik ve moment denklemlerinden bütün sıfır olmayan terimleri denklemin sağ tarafına toplayarak elde edilecektir. İndirgenmiş durum vektörü

$$\mathbf{X}^T = [V_r \ \beta \ \alpha \ \phi \ \theta \ \psi \ P_w \ Q_w \ R_w] \quad 2.97$$

şeklinde. Kontrol vektörü burada tekrar edilmiştir.

$$\mathbf{U}^T = [thl \ el \ ail \ rdr] \quad 2.98$$

Yatışkın durum şartları $\mathbf{X}_e, \mathbf{U}_e$ ' den küçük farklılaşmaları göz önüne alarak bir grup doğrusal sabit katsayılı durum denklemi türetilmiştir (Stevens, 1992).

2.7.3 Ayırışmış Doğrusal Durum Denklemleri

Doğrusal durum denklemlerinin bütün katsayı matrisleri elde edilmiş durumdadır. Katsayı bloklarının incelenmesi uzunlamasına ve yanlamasına denklemlerinin ayırışmış olduğunu göstermektedir. İtme momenti boylamsal denklemlerde gözükmemektedir, ayrıca, basitlik açısından bu etki yanlamasına denklemlerden de düşürülmüştür.

Uzunlamasına durumlar ve kontroller

$$\mathbf{x}^T = [v_r \ \alpha \ Q \ q] \quad \mathbf{u}^T = [\delta_{th} \ \delta_c] \quad 2.99$$

şeklinde ve bu değişkenler yatışkın-durum değerleri $V_r, \alpha_e, \theta_e, Q, thl$ ve el 'den sapmaları temsil etmektedirler. Uzunlamasına katsayı matrisleri

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_T - Z_{\dot{a}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -M_{\dot{a}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} X_{\delta_{th}} \cos a_e & X_{\delta_e} \\ -X_{\delta_{th}} \sin a_e & Z_{\delta_e} \\ 0 & 0 \\ M_{\delta_{th}} & M_{\delta_e} \end{bmatrix}$$

2.100

$$A = \begin{bmatrix} X_V + X_{T_V} \cos a_e & X_a & -g'_0 \cos \gamma_e & 0 \\ Z_V - X_{T_V} \sin a_e & Z_a & -g'_0 \cos \gamma_e & V_T + Z_q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ M_V + M_{T_V} & M_a & 0 & M_q \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Dikkat edilmelidir ki sallantısız uçuş için $Z_{\dot{a}}$ normal olarak küçük ve V_T belirgin olarak sıfırdan büyük olduğundan E matrisi her zaman tersi alınabilir.

Yanal durum ve kontroller

$$\mathbf{x}^T = [\beta \ \phi \ p_w \ r_w] \quad \mathbf{u}^T = [\delta_a \ \delta_r] \quad 2.101$$

şeklindedir. Burada γ durumu gözükmez. Sonuç katsayı matrisleri

$$E = \begin{bmatrix} V_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} Y_{\delta_a} & Y_{\delta_r} \\ 0 & 0 \\ L'_{\delta_a} & L'_{\delta_r} \\ N'_{\delta_a} & N'_{\delta_r} \end{bmatrix}$$

2.102

$$A = \begin{bmatrix} Y_\beta & g'_0 \cos \theta_e & Y_p & Y_r - V_T \\ 0 & 0 & \frac{\cos \gamma_e}{\cos \theta_e} & \frac{\sin \gamma_e}{\cos \theta_e} \\ L'_\beta & 0 & L'_p & L'_r \\ N'_\beta & 0 & N'_p & N'_r \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Moment türevleri

$$\begin{aligned}
L'_\beta &= \mu L_\beta + \sigma_1 N_\beta, & L'_p &= \mu L_p + \sigma_1 N_p, & L'_r &= \mu L_r + \sigma_1 N_r, \\
N'_\beta &= \mu N_\beta + \sigma_2 L_\beta, & N'_p &= \mu N_p + \sigma_2 L_p, & N'_r &= \mu N_r + \sigma_2 L_r, \\
L'_{\delta a} &= \mu L_{\delta a} + \sigma_1 N_{\delta a}, & L'_{\delta r} &= \mu L_{\delta r} + \sigma_1 N_{\delta r}, \\
N'_{\delta a} &= \mu N_{\delta a} + \sigma_2 L_{\delta a}, & N'_{\delta r} &= \mu N_{\delta r} + \sigma_2 L_{\delta r}.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Her iki grup denklem için E matrisi tersi alınabilir. Öyleyse, orijinal doğrusal olmayan denklemler kapalı formda olsa da doğrusal denklemler açıkça yazılabilir. Her iki durumda da katsayı matrisleri yatışkın-durum hücum açısı ve yunuslama durumuna bağlıdır. Her ne kadar bunlara sabit seviye yatışkın durum uçuş şartlarında küçük sapmalar uygulanabiliyorsa da denklemler saptırılmış yatış açısının birçok değeri için de yeterli olarak kullanılabilirler.

Doğrusal denklemler beta durumunun türevlerini elde edebilmek için rüzgar eksenlerinde türetilmişlerdir ve daha sonra beta sıfıra eşitlenmiştir. Beta açısının yatışkın durum değeri sıfır olduğu için kararlılık-eksenleri aerodinamik türevleri denklemlerde kullanılabilirler. Ayrıca, denklemlerde kullanılan eylemsizlik momentleri kararlılık eksenleri değerleridir. P , Q ve R oranlarındaki W indisi S indisi ile değiştirilebilir. Kararlılık türevleri tanımlamaların da indisler tamamı ile yok olacaktır çünkü kararlılık türevleri normal olarak kararlılık eksenlerinde belirlenir.

Boyutlu kararlılık türevlerinin açıklanması gerekmektedir. Bu türevler boyutsuz aerodinamik katsayıların türevleri cinsinden katsayı matrislerinde kullanılmışlardır. Sonuç boyutsuz türevleri özel uçuş ve uçak koşullarına daha az bağımlı, uçak konfigürasyonuna daha fazla bağımlı olmanın avantajına sahip olacaklardır. Boyutsuz türevleri tahmin etme metotları geliştirilmiştir ve bunlar değişik dizayn konfigürasyonlarını karşılaştırmak ve değerlendirmek için kullanılabilirler (Stevens, 1992).

2.7.4 Boyutsuz Kararlılık ve Kontrol Türevleri

Boyutlu aerodinamik türevler basit olarak doğrusal denklemler için uygun katsayıların bir grubudur. Bunlar kararlılık ve kontrol mühendisleri tarafından

kullanılan ve birçok aerodinamik veri tabanında bulunan boyutsuz kararlılık türevleri ile bağdaştırılabilirler. Kararlılık türevlerinin boyutsuzlandırılmasının yolu türevlenecek bağımsız değişkenin açı, açısal hız ya da hız olması ile ilgilidir. Bu durum bir örnek üzerinde gösterilecektir.

Türev X_v 'yi göz önüne alırsak bu türev hava hızına göre alınmıştır. Sürüklenme kuvveti hava hızına hem dinamik basınç üstünden hem de aerodinamik sürüklenme katsayısının hava hızı ile değişimi üstünden bağımlıdır. X_v 'nin tanımı ve sürüklenme denklemini kullanarak

$$X_v = -\frac{1}{m} \left[\frac{\partial \bar{q}}{\partial V_T} S C_D + \bar{q} S \frac{\partial C_D}{\partial V_T} \right] = -\frac{\bar{q} S}{m V_T} (2 C_D + C_{D_v}) \quad 2.104$$

denklemini elde edilir. Burada $C_{D_v} \equiv V_T (\partial C_D / \partial V_T)$ boyutsuz hız sönmesi türevi ve C_D sürüklenme katsayısıdır.

Açısal hıza göre alınmış bir türevi, C_{m_q} , göz önüne alalım. Boyutsuz oran sönmesi türevleri (dimensionless rate-damping derivatives) boyutlu türevlerle ilişkilendirilebilir. Yunuslama moment katsayısı tanımını kullanarak 2.105 denklemini elde edilmiştir.

$$M_q = \frac{\bar{q} S \bar{c}}{J'_y} \frac{\partial C_m}{\partial Q} = \frac{\bar{q} S \bar{c}}{J'_y} \frac{\bar{c}}{2 V_T} C_{m_q} \quad C_{m_q} = \frac{2 V_T}{\bar{c}} \frac{\partial C_m}{\partial Q} \quad 2.105$$

Açıya göre türevi alınmış 'boyutsuz' kararlılık türevleri radyan yerine derece ile ifade edildikleri zaman (derece)⁻¹ boyutuna sahip olurlar.

Altı itme türevine $(X_{T_r}, X_{\delta_{th}}, M_{T_r}, M_{T_a}, M_{\delta_{th}}, N_{T_r})$ denk gelen boyutsuz türevler itme kuvveti ve moment bileşenlerini boyutsuz katsayılar cinsinden ifade ederek tanımlanabilir. Sözgelimi, itmeye bağlı bir yunuslama moment bileşeni $M_T = \bar{q} S \bar{c} C_{m_T}$ şeklinde yazılabilir. İtme türevleri için değerler, belirli motor için hesaplanmış itme verilerine başvurarak ve incelenen değişkenin sapması yüzünden oluşan itme değişikliği belirlenerek bulunabilir. V_T 'ye ve rejim ayarına göre alınan türevlerde ise direkt olarak boyutlu türevlerle çalışmak en

uygundur. α ve β 'ya bağılı itme türevlerinin belirlenmesi çok daha karmaşıktır.

Boyutsuz kararlılık türevleri genel olarak hem uçak tasarımcısına hem de kararlılık ve kontrol mühendisine çok yararlıdır. Uçağın doğal kararlılığı, kontrol yüzeylerinin verimliliği ve manevra kabiliyeti hakkında bilgi sağlarlar. Uçağın geometrik özellikleri ile ilgilidirler ve ilk tasarım işlemi sırasında önemlidirler. Tasarımcı birçok kararlılık türevinin uçuş şartları ile ilgili (hız, hücum açısı, yengeçleme açısı gibi) tipik değişimini bunlardan öğrenir ve uçuş zarfının çeşitli bölgelerindeki tasarım problemlerini önceden belirleyebilir.

Ayrılmış doğrusal durum denklemleri direkt olarak boyutsuz türevler cinsinden ifade edilebilir. Sonuç denklemleri boyutsuz bir zaman değişkeni eklenerek boyutsuz hale getirilebilir (Stevens, 1992).

2.7.5 Boyutsuz Kararlılık Türevleri Tanımları

Geleneksel uçak için en önemli uzunlamasına kararlılık türevleri C_{L_α} , C_{m_α} , C_{m_q} , C_{m_r} , C_{m_a} , C_{D_r} ' dir. C_{L_α} türevi taşıma eğrisi eğimidir ve kritik hızdan (stall) önce taşıma eğrisinin doğrusal bölgesi için tipik olarak 1 ile 8 rad⁻¹ aralığında değişir. Mach sayısı ara ses (transonik) bölgesine yaklaştıkça artar, tepe değerine ulaşır ve yüksek ses altı (subsonik) hızlar için hızlı biçimde düşer. Bu türevin önemi rüzgar değişiklikleri ya da manevralar tarafından oluşturulan hücum açısı değişikliklerini z-ekseni ivmelenmelerine bağlamasında yatmaktadır. Uçağın manevra kabiliyeti ve türbülans tepkileri üzerinde güçlü bir etkisi vardır.

Yunuslama moment eğrisinin eğimi, C_{m_α} , uçağın yunuslama kararlılığını belirleyen faktördür. Kararlılık için genellikle negatif bir C_{m_α} değeri istenir fakat pilot normal durumdan daha fazla güç harcayarak, az bir dengesizliğe uğramış uçağı kontrol edebilir. C_{m_α} değeri tipik olarak -3 rad⁻¹'den, küçük pozitif değerler aralığında değişir. Kararlı bir uçak, doğal frekansı C_{m_α} tarafından belirlenen yunuslama kumandasına sönümlenmiş bir salınımla ve yunuslama eksen eylemsizlik momenti ile yanıt verir. Gerçekte, C_{m_α} basit yay/eylemsizlik mekanik

osilatöründeki düzenleyici torka karşılık gelir. Bu türev Mach sayısı ile ve ara ses bölgesinde düzensiz olarak değişir.

C_{m_q} ve C_{m_a} yunuslama sönümlenme türevleridir. Yukarıda anlatılan uçak yunuslama osilasyonunun sönümlenmesi bu türevlere bağlıdır. C_{m_q} genellikle C_{m_a} 'dan daha büyüktür ve tipik olarak sıfır ile yaklaşık -40 rad^{-1} arasında bir değer alabilir. Mach sayısının değişimi bunlar üzerinde düzleştiren ve kademeleştiren bir etki yapar.

Hız değişimlerinin yunuslama momenti üstündeki etkileri C_{m_r} türevinde bulunmaktadır. Eğer bu türev pozitif ise, uçak artan bir hız ile yukarı yunuslama hareketi yapmaya çalışacaktır. Buna karşılık sürüklenmedeki artış ve yerçekiminin x -ekseni boyunca artan etkisi uçağı yavaşlatmaya çalışacaktır. Bu kararlı bir davranıştır. Pratikte, bir uçağın etkili basınç merkezi artan ses altı Mach sayısı ile birlikte kuyruk konisine doğru hareket edebilir, böylelikle bağlantılı kararsız hız davranışı ile uçağın dalma hareketi (negatif C_{m_r}) yapma eğilimine girmesine neden olur. Uçağına bağlı olmakla birlikte, bu "tuck-under" etkisi büyük ara ses sürüklenme yükselişi yüzünden iyi huylu olabilir ya da Mach sayısı ile düşen etkili kontrol yüzünden sorun oluşturabilir. Bu durum hız sönümlenme türevi C_{D_r} 'nin önemini ortaya çıkarmaktadır.

Geleneksel uçak için en önemli uzunlamasına ve yanlamasına kararlılık türevleri C_{y_β} , C_{l_β} , C_{n_β} , C_{l_p} , C_{n_p} , C_{l_r} , C_{n_r} 'dir. C_{y_β} türevi yengeçlemeden dolayı oluşan yan kuvvet türevi olarak bilinir ve tipik olarak -0.1 ile -0.2 rad^{-1} aralığında değişir. Geri kalan önemli uzunlamasına ve yanlamasına türevleri moment türevleridir.

C_{l_β} türevi yengeçlemeye bağlı dönme momentidir ve genellikle dihedral türevi olarak bilinir. Pozitif dönüş kararlılığı için bu türev negatif olmalıdır. Değeri tipik olarak -0.4 , $+0.1 \text{ rad}^{-1}$ aralığında değişir ve ara ses bölgesinde Mach sayısına bağlı olarak belirgin şekilde değişir. 'Spiral mod' olarak bilinir ve uçak

dinamik davranışının kararlılığını etkilediğinden önemlidir.

C_{n_β} türevi yengeçlemeye bağlı yalpalama momentidir, 'yaw-stifness' türevi ve 'weathercock' (fırıldak) kararlılığı ve osilasyon 'dutch roll mod' özellikleri ile bağlantılıdır. Yalpalamada ki kararlılık için pozitif olmalıdır. 0 ile 0.4 rad⁻¹ arasında değişir ve ara ses bölgesinden ses üstü bölgesine geçen Mach sayılarına bağlı olarak düşme hatta negatif olma eğilimindedir. Yüksek hücum açılarında, dikey kuyruk kuyruktan akan havanın içine gömüldüğü zaman negatif değerde olabilir. Uygun bir C_{n_β} değeri sağlamak uçağın dikey kuyruğu planlanırken göz önüne alınacak bir husustur.

$C_{l_p}, C_{n_p}, C_{n_r}, C_{l_r}$ ' nin tümü sönümlenme moment türevleridir. 'Roll-damping' türevi C_{l_p} genellikle -0.10 ile 0.80 rad⁻¹ aralığında oynar, ara ses bölgesinde büyüklük olarak artar ve daha yüksek Mach sayılarında düşmeye başlar. Bu türev yüksek manevra kabiliyetli bir uçağın dönüş hızı performansını belirlemekte önemli rol oynar. 'Yaw-damping' türevi C_{n_r} ' dir; her zaman negatiftir ve tipik olarak -1 rad⁻¹ ile sıfıra yakın bir nokta arasındadır. Ara ses bölgesinde büyüklük olarak artabilir.

C_{n_p}, C_{l_r} türevleri uçağın dönme ve yalpalama hareketlerinin iç içe geçmesinden dolayı oluşan çapraz türevlerdir. Ölçülmeleri zordur ve Mach sayısına bağlı olarak büyük ölçüde değişirler. C_{n_p} genellikle -0.5 ile +0.1rad⁻¹ aralığında bulunurlar ve ara ses bölgesinde dramatik şekilde negatif değerlerden pozitif değerlere değişir. C_{l_r} tipik olarak 0 ile 0.6 rad⁻¹ arasında değerler alır; Mach sayısına bağlı olarak belirgin biçimde değişir ve taşıma katsayısının da bir fonksiyonudur (Stevens, 1992).

3. UÇUŞ KONTROL KURALI TASARIMI

Uçuş kontrolünün en ilgi çekici konularından biri de uçağın uzunlamasına ve yanlamasına eksenlerinin koordineli olarak kontrol edilebilmesi problemidir. Böyle bir kontrol kuralının oluşturulması pilotun dönüş ve yatış hareketlerini basit komutlarla yapabilmesine olanak sağlar. Bu basitlik pilotun sabit irtifada ve hızda dönüş hareketi, başka bir deyişle koordine viraj hareketi, yaparken yatıştan dolayı içeriye ya da dışarıya doğru oluşacak savrulmayı önlemek üzere lövyeye ile beraber ve orantılı olarak istikamet dümeni pedalını da kullanma zorunluluğunu ortadan kaldıracaktır. Dönüş ve yatış eksenlerinin oluşturduğu dinamik denklem parametreleri birbirleri ile etkileşimli olduğundan tek bir lövyeye hareketi ile koordine viraj manevrasını başarmaya çalışacak kontrol sistemi, bu işi ancak gerekli kontrol yüzeylerini belli bir harmoni içinde ve aynı anda hareket ettirerek yapabilecektir (Sparks, 1994).

Bu tip çok değişkenli problemlerin çözümünde kullanılacak en etkili yöntem çok değişkenli kontrol tasarım teknikleridir. Belli bir anda tek bir değer geri beslenmesine dayalı klasik kontrol teknikleri, dinamik denklem katsayılarının güçlü biçimde birbiri ile etkileşim içinde bulunduğu uçak benzeri yapıların kontrolünde, etkileşimi hesaba katamadıklarından, verimsiz olmaktadır. Bundan başka klasik teknikler sadece tek bir geri besleme döngüsünün kararlılığını, döngü içindeki sinyalin sınırlılığı açısından, tartışıp tüm sistem içinde olan salınımları izleyemediğinden bu tekniklerin çok değişkenli sistem için kontrol oluşturmakta kullanılması, kontrol kuralının gürbüzlüğü bakımından da tatmin edici sonuçlar vermemektedir (Sparks, 1994).

Uçuş kontrol kuralı yaratmadaki en önemli yaklaşımlardan biri de kontrol edicinin değişen uçuş şartlarına bağlı olarak kendisini yeniden yapılandırmasıdır. Klasik kontrol kuralları denklemlerinin kazanç ya da dinamik süzgeç eleman değerleri belli bir anda tek bir sayı ile ifade edilebildiğinden denetleyicinin yeniden yapılandırılması açısından bakıldığında bu durum klasik tekniklerin bir avantajı olarak karşımıza çıkmaktadır. Çok değişkenli denetleyicilerin tüm uçuş zarfı boyunca kullanılmaları ise genellikle yüksek mertebeli ve durum-uzay yapısında gerçekleştirilebilmelerinden ötürü oldukça zordur. Bu tip denetleyicilerin

değişen uçuş koşullarına bağlı olarak yeniden yapılandırılmalarının zorluğu, durum-uzay yapısındaki kontrol kuralı elemanlarının değişen şartlara göre düzgün ve doğrusal biçimde değişmemesi ve hatta bu elemanların hangi uçuş şartı değişiminden etkilendiğinin de açık olarak belli olmamasından kaynaklanmaktadır.

Bu noktada değişen uçuş şartlarına bağlı olarak uçağın dinamik modeli üstündeki değişimleri, oluşturulmuş matematiksel modelin belirsizliği olarak düşünmek ve bu varsayım yoluyla tek ve sabit bir kontrol kuralı oluşturmak oldukça iyi bir yaklaşım olarak gözükmektedir. Böylelikle denetleyicinin uçuş koşullarındaki değişimlere göre yeniden yapılandırılmasına gerek kalmayacak ve uçak dinamik denklemlerinde, uçuş koşullarına bağlı olarak oluşacak tüm değişimlere karşı gürbüz bir denetleyici elde edilecektir. Ancak bu durumda da performans kriteri büyük ölçüde göz ardı edilmiş olacaktır. Hiçbir sabit kontrol edici çok geniş bir aralıkta değişen değer kümesinin kontrolünde olumlu sonuç veremez. Bundan başka belirli noktadaki her uçuş şartı bir parça belirsizlik içerir. Ancak aracın hareketine bağlı olarak dinamik modelin ne yönde değişeceği konusunda az da olsa bir miktar bilgi her zaman vardır. Bu durumda da tek ve sabit bir denetleyiciye mahkum kalmanın anlamsızlığı daha net bir biçimde görülmektedir. Sonuç olarak sistemin parametre değişimine bağlı, dinamik model belirsizliklerini ifade edebilmenin iyi bir alternatif olacak başka bir yolunun bulunması gereklidir.

Böyle bir problemin açık bir çözümü kazanç değerleri uçuş şartlarına bağlı olarak belirlenen sabit kazançlı çok değişkenli denetleyicilerdir. Bu yöntemi kullanan tekniklerin sayısı sınırlı olsa da belirtilen tipteki denetleyiciler bir çok durumda kullanışlı bir yaklaşım olarak görülebilir. Ayrıca bu tekniklerin gereği olarak işe başlarken dizayn modeli üstünde, durum geri beslemesi gibi bazı sınırlamaları da kabul etmek zorunluluğu vardır. Bundan başka gürbüz kontrol amacıyla model içindeki belirsizlikleri frekansa bağlı sınırlar içinde tutmaya çalışmak ve küçük kazanç teoremini kullanarak gürbüzlüğü sağlamaya yönelik yaklaşımlar sonuçta karşımıza dinamik kontrol kurallarını çıkarmaktadır. Doğrusal, zaman içinde değişmez sistemler için belli performans ve gürbüzlük şartlarını sağlayan çok değişkenli denetleyiciler kullanmanın gerekliliği açıkça

ortada iken bu biçimdeki denetleyici yaklaşımını doğrusal olmayan sistemlerin kontrolunda kullanmak üzerinde çalışılması gereken bir konu olarak durmaktadır (Sparks, 1994).

Literatürde kazanç ölçekli çok değişkenli denetleyicilerin gerçekleştirildiği örnekler vardır. Reichert ve ark. (1992) yüksek manevra kabiliyetine sahip bir füzenin yunuslama eksenini oto pilotu için birbirinden oldukça farklı dört çalışma noktasında H-sonsuz kontrol yasalarını kullandı. Kullanılan yaklaşım süreç dinamiklerini dinamik basınç ve hücum açısı parametrelerinin bir fonksiyonu olarak tanımlıyordu. Değişik denge noktalarındaki doğrusal denetleyiciler o anki çalışma noktasına yakınlıklarına göre interpolasyona tabi tutuluyorlardı. Ancak uçak dinamiklerini sadece kendi parametrelerine bağlayan denklemler kullanmak çok da doğru bir yaklaşım olarak gözükmemektedir. Hyde ve Glover (1990) bir VSTOL uçağı için bir çok noktada H-sonsuz denetleyiciler tasarlamış ve çalışma noktasına en yakın olanı kullanma yoluna gitmişlerdir. Shamma ve Cloutier (1992) süreç dinamiklerini parametrelerin doğrusal-benzeri (quasi-linear) denklemlerini kullanarak tarif eden yeni bir yaklaşım kullanmışlardır. Hücum açısı parametresinin değişimine bağlı olarak denetleyicinin parametrelerinin değiştiği tasarımı uzunlamasına eksen oto pilotu olarak bir füze üzerinde kullanmışlardır (Sparks, 1994).

Sparks ve ark. (1992) ve Adams ve ark. (1992) bir test uçağı için entegral tipi LQ düzenleyicileri (regulators) kullanarak uçuş kontrol kuralı tasarlamışlardır. Bulunan denetleyiciler oransal toplayıcı (PI) tipi biçimindeydi ve uçuş şartları değiştikçe dinamik basınç değişimine göre ölçeklenmekteydiler. Maclay ve Howitt (1992) H-sonsuz sentezini kullanarak oluşturdukları kontrol kuralında kazancı ölçeklenen bir iç döngü oluşturdular. İç döngü ile aynı anda bir dış döngü de yunuslama hareketi, yatış hareketi, kayış açısı ve varyo değerlerini kontrol etmekteydi. Postelthwaite ve Walker (1992) gerçek bir uçuşta test edilen kazanç ölçekli H-sonsuz denetleyiciyi geliştirdiler. Samblancat ve ark. (1990) öz yapı (eigenstructure) atamasını kullanarak oluşturdukları kazanç değerleri sabit bir iç döngüyü H-sonsuz teknikleri ile geliştirdikleri bir dış döngü ile beraber kullandılar (Sparks, 1994).

Sparks ve ark. (1994) çok değişkenli kazanç ölçeklemesi problemine bir iç ve dış döngü tasarlayarak yaklaştılar. İç döngü, uçuş şartlarındaki değişikliklere bağlı olarak, değişen uçak dinamiğini denetleyen denetleyici parametrelerinin kazanç ölçeklemesini yaparken dış döngü de sistemin istenen performans ve gürbüzlük derecesinde çalışabilmesi için gerekli kontrol kurallarını oluşturmaktaydı. İç döngü genelleştirilmiş kontrol komutlarını, aerodinamik kontrol yüzeylerine iletilecek sinyallere dönüştüren bir anahtarlama devresi ile değişik uçuş şartlarında iç döngü parametrelerinde durumdan duruma oluşacak hatalar arasındaki farkları en aza indirmeyi amaçlayan bir iç döngü geri besleme kazanç matrisini içermektedir. İç döngü içindeki her iki birimde değişen uçuş şartlarına bağlı olarak ölçeklenmektedir. Amaç dış döngünün, iç döngünün uçak dinamiğinde yaptığı değişikliklerden bağımsız, habersiz hareket etmesini sağlamaktır. Dış döngü istenen performans ve gürbüzlük kriterlerini sağlayacak sabit bir dinamik hata düzeltici (compensator) içermektedir. Bu yapı ister pilottan, isterse de bir başka dış döngüden yada oto pilottan gelen sinyalleri giriş kabul etmektedir.

Uçuş kontrol konusunun göz önünde bulundurulması gereken bir başka önemli problemi de tüm uçuşun kalitesini garanti edebilmek üzere çok değişkenli kontrol kurallarını iyi bir kapalı döngü performansı elde etmek için kullanmaktır. Literatürde çeşitli yaklaşımlar söz konusudur. Thompson ve ark. (1987) kapalı döngü kutuplarının çıktı tarafından belirlenen değerlere eşitlenerek iyi bir performansa ulaşılabilmesi için entegral LQG kontrol kurallarını kullanmışlardır. Doyle ve ark. (1987) uzay mekiğinin uzunlamasına ve yanlamasına eksenlerini kontrol etmek üzere gerçek sistem dinamikleri ile ideal sistem dinamikleri arasındaki hatayı en aza indiren μ sentezi kontrol kurallarından yararlanmışlardır. Benzer biçimde Sparks ve Banda (1992) bir savaş uçağının tek bir noktadaki doğrusal kontrolünü oluşturmak için μ sentezi kurallarından yararlanmış ve arzu edilen uçuş karakteristiklerini içeren hedef dinamikleri ile gerçek dinamikler arasındaki hatayı sıfırlamaya çalışmışlardır.

Bu çalışmada ise uçağın aerodinamik kontrol yüzeylerinin yer değiştirilmesi ile bu yüzeylerin hareketi sonucu uçağın ağırlık merkezine bağlı koordinat eksen takımına göre oluşan açısal hız ve açılar arasındaki transfer fonksiyonları göz

önüne alınmıştır. Bu transfer fonksiyonları tüm uçuş zarfı boyunca belli kararlılık türevlerinden oluşmaktadır. Ancak bu kararlılık türevleri uçağın irtifasına ve hızına göre değişmektedir. Bunun sonucu olarak transfer fonksiyonunu oluşturan pay ve payda polinomlarının katsayıları da sürekli değişmektedir. Tüm uçuş zarfı boyunca değişen bu tipteki transfer fonksiyonlarının istenen performans şartlarını ve gürbüz kontrol kurallarını sağlaması için model referanslı kontrol (MRC) tekniklerinden yararlanılmıştır. Bu teknikte uçak transfer fonksiyonları çok girdili çok çıktılı bir sistem oluşturmak amacı ile bir transfer matrisi içinde toplanmıştır. Transfer matrisi çıktısı daha önceden belirlenmiş bir başka model transfer matrisinin çıktısı ile karşılaştırılarak oluşan hatanın sıfıra götürülmesine çalışılmıştır.

4. ÇOK DEĞİŞKENLİ MODEL REFERANSLI KONTROL

Çok değişkenli bir sistemin model referanslı kontrolü (MRC), tek girdili tek çıktılı bir sistem için geçerli kurallar üzerinde yapılacak değişikliklerle sağlanabilir. Tek girdili tek çıktılı (Single input single output, SISO) sistemin model referanslı kontrolünde olduğu gibi problem iki bölüme ayrılarak incelenebilir. Birinci bölüm sistemin modellenmiş kısmının ve kontrolörün değişkenlerinin, doğrusal bir denklem biçiminde ifade edilmesi ile ilgilenirken, ikinci bölüm de kontrol kuralı geliştirme ve oluşacak geri beslemeli sistemin kararlılık probleminin çözümü ile ilgilenir (Tao, 1988).

Çok girdili çok çıktılı (Multi input multi output, MIMO) sistem modeli

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(s)\mathbf{u} \quad 4.1$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada \mathbf{y} ve \mathbf{u} , N boyutlu gerçel sayılar kümesinin elemanıdır ($\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^N$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^N$). $\mathbf{G}(s)$ ise $N \times N$ boyutlarına sahip bir transfer matrisini göstermektedir. Kontrol edilecek sistem ve model sistemin oluşturduğu kapalı döngü sistemin çıktısını takip edeceği model sistem ise

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{W}_m(s)\mathbf{r} \quad 4.2$$

eşitliğiyle verilebilir.

Burada \mathbf{y}_m ve \mathbf{r} , N boyutlu gerçel sayılar kümesinin elemanıdır. $\mathbf{G}(s)$ birden fazla transfer fonksiyonundan oluştuğundan sadece tek bir transfer fonksiyonunun kontrolü için bilinmesi gereken yüksek frekans kazancı, bağıl derece, transfer fonksiyonu sıfırları ve transfer fonksiyonu derecesi kavramlarının MIMO sistem karşılıklarının bulunması gereklidir. Sözelimi, bağıl derece kavramının MIMO sistem için karşılığı *Hermite normal biçim* matrisi, $\mathbf{H}(s)$ ya da “*interactor*” matrisi $\boldsymbol{\xi}(s)$ 'ın belirlenebilir olmasıdır (Goodwin, 1996). Aşağıda verilen kurallar MIMO sistemlerde yüksek frekans kazancı ve bağıl derece değerleri karşılıklarının bulunması için kullanılmaktadır.

Kural 4.1 Herhangi bir tam “rank”, payda polinomunun derecesi pay polinomu derecesinden en az bir büyük olan, N adet sütun ve N adet satır elemanına sahip $\mathbf{T}_0(s)$ transfer matrisi için aşağıda gösterilen matris biçiminde, tek bir sol

“interactor” (LI) alt üçgensel polinom matrisi $\xi_l(s)$ vardır.

$$\xi_l(s) = \begin{bmatrix} s^{l_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ s^{l_1} h_{l/21}(s) & s^{l_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s^{l_1} h_{l/N1}(s) & s^{l_2} h_{l/N2}(s) & \cdots & s^{l_{N-1}} h_{l/N(N-1)}(s) & s^{l_N} \end{bmatrix} \quad 4.3$$

Burada $h_{lij}(s)$ 'ler $j=1, \dots, N-1$ ve $i=2, \dots, N$ olmak üzere s 'ye bölünebilen polinomları, l_i ise sıfıra eşit ya da sıfırdan büyük tam sayıları temsil etmektedir. Bu değerler aşağıdaki denklemi \mathbf{K}_{lp} sıfırdan farklı olacak biçimde sağlamalıdır;

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_l(s) \mathbf{T}_0(s) = \mathbf{K}_{lp} \quad 4.4$$

$\xi_l(s)$ matrisinin tersi alındığında oluşacak matris, transfer matrislerinin paydalarına gelecek s terimlerinden dolayı kritik kararlı bir transfer matrisi oluşturacaktır. MRC kontrol kuralı oluşturabilmek için $\xi_l^{-1}(s)$ matrisinin kararlı olması gerektiğinden aşağıdaki kural ile verilen uyarlamaya gereksinim vardır (Tao, 1988).

Kural 4.2 Herhangi bir tam “rank”, payda polinomunun derecesi pay polinomu derecesinden en az bir büyük olan N adet sütun ve N adet satır elemanına sahip $\mathbf{T}_0(s)$ transfer matrisi için aşağıda gösterilen matris biçiminde, birden fazla olabilen uyarlanmış sol “interactor” (MLI) alt üçgensel polinom matrisi $\xi_l^m(s)$ vardır.

$$\xi_l^m(s) = \begin{bmatrix} d_{l1}^m(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_{l/21}^m(s) & d_{l2}^m(s) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ h_{l/N1}^m(s) & \cdots & \cdots & h_{l/N(N-1)}^m(s) & d_{lN}^m(s) \end{bmatrix} \quad 4.5$$

Burada $h_{lij}^m(s)$ 'ler $j=1, \dots, N-1$ ve $i=2, \dots, N$ olmak üzere bulunacak polinomları, $d_h^m(s)$ 'ler ise $i=1, \dots, N$ sınırları için l_i pozitif sayısına eşit dereceye sahip, en yüksek dereceye sahip terimin katsayısı bir ve tüm kökleri sol yarı düzlemde olan (monic Hurwitz) polinomları temsil etmektedir. $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_l^m(s) \mathbf{T}_0(s) = \mathbf{K}_{lp}^m$ formülü ile

bulunan değer sonlu ve sıfırdan farklıdır. Burada $h_{ij}^m(s)$ polinomları

$$h_{ij}^m(s) = \left\{ s^{l_j} (h_{ij}(s) + a_1^i s^{-1} h_{ij}(s) + \dots + a_l^i s^{-l_i} h_{ij}(s)) \right\} \quad 4.6$$

ifadesinin polinom kısmına eşit olacak biçimde seçilirse, $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_l^m(s) \mathbf{T}_0(s) = \mathbf{K}_{lp}$ değeri elde edilir (Tao, 1988).

Bundan sonra

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{T}_0(s) \mathbf{u}(s) \quad 4.7$$

biçiminde ifade edilen MIMO sistem doğrusal zamanla değişmeyen (LTI) sistem denklemi

$$\mathbf{y}(s) = f_l(s) (\xi_l^m(s))^{-1} \mathbf{y}_f(s) \quad \mathbf{y}_f(s) = \mathbf{T}_l(s) \mathbf{u}(s) \quad 4.8$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{T}_l(s)$, MLI matrisi $f_l(s) \mathbf{I}$ biçiminde olan $N \times N$ boyutlu bir transfer matrisidir. \mathbf{K}_{lp}^m matrisi ise $\mathbf{T}_l(s)$ matrisinin yüksek frekans kazanç matrisini verir. $f_l(s)$, derecesi d_l olan kararlı rasgele bir polinomdur. d_l ise $\xi_l^m(s)$ matrisi elemanlarının en yüksek derecesine eşit ya da daha büyük seçilmelidir. Ayrıca,

$$\mathbf{T}_l(s) = f_l^{-1}(s) \xi_l^m(s) \mathbf{T}_0(s) \quad 4.9$$

şeklinde tanımlanmıştır (Tao, 1988).

N giriş ve N çıkışlı MIMO LTI sistem aşağıdaki denklemlerle ifade edilebilir,

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{u}(s) + \mathbf{w}(t) \quad \mathbf{G}(s) = \mathbf{T}_0(s) [\mathbf{I} + \mu \Delta_m(s)] + \mu \Delta_u(s) \quad 4.10$$

Burada $\mathbf{G}(s)$ payda polinomu dereceleri pay polinomu derecelerinden en az bir büyük transfer fonksiyonlarından oluşan sistem transfer matrisini; $\mathbf{T}_0(s)$, $\mathbf{G}(s)$ 'in baskın ya da modellenen kısmını; $\mathbf{w}(t)$ sınırlı bir bozucu sinyali; $\mu \Delta_m(s)$ ve $\mu \Delta_u(s)$ sistemin çarpım ve toplam biçiminde ifade edilmiş modellenememiş kısımlarını belirtmektedir. Modellenememiş kısım için aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

S1. $\Delta_m(s)$ ve $\Delta_a(s)$ pay polinomu bölü payda polinomu biçiminde transfer fonksiyonlarından oluşmuş transfer matrisleridir. $\Delta_a(s)$ katı düzgün bir transfer matrisidir.

S2. $f_l(s)$, derecesi $T_0(s)$ matrisine ait $\xi_l^m(s)$ matrisinin en yüksek derecesine eşit, tüm sıfırlarının gerçekteki kısmı $-q$ gibi bir değerden küçük ve en yüksek dereceli teriminin katsayısı bir olan polinom olarak seçildiğinde

$$\mathbf{D}_a = \lim_{s \rightarrow \infty} \Delta_a(s)s \quad \mathbf{D}_m = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{f_l(s)} \Delta_m(s)s \quad 4.11$$

tanımları yapılabilir. $\|\mathbf{X}(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{X}(j\omega)\|$ olarak tanımlandığında $p > 0$ için aşağıdaki tanımlarla verilen ve $k_a, k_m > 0$ olacak biçimde değerler bulunabilir.

$$\|\mathbf{D}_a\| < k_a \quad \|\mathbf{D}_m\| < k_m \quad 4.12$$

$$\|(\Delta_a(s-q)s - \mathbf{D}_a)(s+p)\|_\infty < k_a \quad 4.13$$

$$\left\| \left(\frac{1}{f_l(s-q)} \Delta_m(s-q)s - \mathbf{D}_m \right) (s+p) \right\|_\infty < k_m \quad 4.14$$

Model referans kontrol tekniğini kullanabilmek için sistemin modellenmiş kısmı hakkında da aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

S3. $T_0(s)$ matrisi için MLI matrisi, $\xi_l^m(s)$ biliniyor olmalıdır.

S4. $f_l^{-1}(s)\xi_l^m(s)T_0(s)$ matrisinin gözlenebilirlik indisi için bir üst sınır v_l biliniyor olmalıdır.

S5. $\mathbf{K}_l \mathbf{K}_p^m$ matris çarpımını pozitif kesin yapacak \mathbf{K}_l matrisi bilinmelidir. Burada \mathbf{K}_p^m , MLI matrisinin yüksek frekans kazanç matrisidir.

S6. $f_l(s)$ polinomunun derecesi d_l , $f_l(s)\mathbf{W}_m(s)$ çarpımının oluşturduğu transfer fonksiyonlarının payda polinomu derecelerini pay polinomu derecelerine eşit yapacak biçimde seçilmelidir.

S7. $T_0(s)$ matrisinin determinantı sıfırdan farklı olmalı ve kararlı sıfırlara sahip olmalıdır (Tao, 1988).

biçimine dönüşür. Burada γ_i , $i=1,\dots,m$ gözlenebilirlik indislerini vermektedir (Goodwin, 1996).

Kontrol amacını gerçekleştirmek üzere aşağıdaki denklemle verilen bir transfer fonksiyonu tarif edilmiştir.

$$\mathbf{y}_m(s) = \mathbf{W}_m(s)\mathbf{r}(s) \quad 4.19$$

Burada $\mathbf{W}_m(s)$ seçilen model transfer matrisini, $\mathbf{r}(t) \in \mathfrak{R}^N$ olmak üzere parçalı sürekli, düzgün sınırlı bilinen, referans giriş sinyalini göstermektedir. Kontrol kuralının amacı $\mathbf{y}(t)$ sinyalinin $\mathbf{y}_m(t)$ sinyalini mümkün olduğunca takip etmesini sağlamak üzere bir $\mathbf{u}(t)$ sinyali bulmaktır. Bulunan $\mathbf{u}(t)$ için kapalı döngü sistemdeki bütün sinyaller, sınırlı başlangıç şartları için sınırlı olmalıdır.

Daha önce belirtilen kabullerle birlikte sistem çıktısının denk olmasını istediğimiz model sistem hakkında da aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

M1. $\mathbf{W}_m(s)$ transfer matrisini oluşturan tüm transfer fonksiyonlarının kutup ve sıfırları kompleks sayı düzleminin sol yarı tarafında olmalıdır.

M2. s kompleks frekansı sonsuz büyüklüğe yaklaştıkça $\mathbf{W}_m(s)$ transfer matrisinin sıfır yapısı $\mathbf{T}_0(s)$ transfer matrisinin sıfır yapısı ile aynı olmalıdır. Bunun anlamı $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_l^m(s)\mathbf{W}_m(s)$ denkleminin sonucunun sonlu ve sıfırdan farklı olması gerekliliğidir (Ioannou, 1996).

Yukarıda belirtilen şartlar daha önce SISO sistem için yapılan kabullerin bir MIMO sistemin MRC kontrolü için genişletilmiş halidir. MLI matrisinin bulunabilir olması SISO durumdaki bağıl derecenin bilinmesine eşdeğerdir.

Uyarlamalı kontrol tekniğinde $\mathbf{G}(s)$ transfer matrisi elemanları katsayılarının bilinmediği varsayılır. Bu durumda $\xi_l(s)$ matrisinin bulunabilmesi için $\mathbf{G}(s)$ matrisinin yapısı hakkındaki ön bilgi çok değerlidir. Eğer $\xi_l(s)$ matrisi köşegen ve $\mathbf{G}(s)$ matrisi elemanlarının bağıl derecesi biliniyor ise $\mathbf{G}(s)$ matrisi elemanlarının katsayıları bilinmiyor olsa da MLI matrisi tam olarak belirlenebilir durumdadır. Ayrıca $\xi_l(s)$ matrisi köşegen olmasa da $\mathbf{G}(s)$ matrisi elemanlarının bağıl dereceleri biliniyor ise köşegen, kararlı dinamik bir ön düzenleyici $\mathbf{W}_p(s)$

matrisi bulunabilir. Genellikle $\mathbf{G}(s)\mathbf{W}_p(s)$ çarpımı köşegen bir MLI matrisine sahiptir. Böyle bir ön düzenleyici matrisin varlığı araştırılmadan önce uyarlanmış sağ “interactor” (MRI) matrisinin olup olmadığına da bakılabilir. MRI kullanılarak ortaya çıkarılacak kontrol yapısı da MLI ile yapılacak kontrol için aşağıda verilen yönteme çok benzer biçimdedir (Ioannou, 1996).

Bundan sonra 4.10 denklemi ile verilen sistem daha önceden belirtilen parametreler cinsinden doğrusal bir denklem olarak aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

$$\mathbf{y}_f(s) = \mathbf{G}_l(s)\mathbf{u}(s) + \mathbf{w}_f(s) \quad \mathbf{y}(s) = f_l(s)(\xi_l^m(s))^{-1}\mathbf{y}_f(s) \quad 4.20$$

Burada,

$$\mathbf{G}_l(s) = \mathbf{T}_l(s)[\mathbf{I} + \mu\Delta'_m(s)] + \mu\Delta'_a(s)$$

$$\mathbf{T}_l(s) = f_l^{-1}(s)\xi_l^m(s)\mathbf{T}_0(s) = \mathbf{R}_l(s)\mathbf{P}_l^{-1}(s)$$

$$\Delta'_m(s) = \Delta_m(s) \quad \Delta'_a(s) = f_l^{-1}(s)\xi_l^m(s)\Delta_a(s) \quad \mathbf{w}_f(s) = f_l^{-1}(s)\xi_l^m(s)\mathbf{w}(s) \quad 4.21$$

$\mathbf{R}_l(s)$ ve $\mathbf{P}_l(s)$ boyutları $N \times N$, sağdan “coprime” polinom matrisleridir. Ayrıca $\mathbf{P}_l(s)$ sütun uygun (column proper) olmalıdır.

Kural 4.3 $\mathbf{P}(s)$ ve $\mathbf{R}(s)$ aynı sütun sayısına sahip polinom matrisleri olsun. Eğer ve sadece eğer bu iki matrisin en büyük ortak sağdan bölen (greatest common right divisor, GCRD) matrisi “unimodular” ise $\mathbf{P}(s)$ ve $\mathbf{R}(s)$ bağıl sağdan “prime” ya da sağdan “coprime” polinom matrislerdir (Wolovich, 1974).

Kural 4.4 $\mathbf{P}(s)$ p satır, q sütun ve $\mathbf{R}(s)$ t satır, q sütun boyutlu, aynı sütun sayısına sahip, polinom matrisleri olsun. Eğer

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}(s) \\ \mathbf{R}(s) \end{bmatrix} \quad 4.22$$

matrisi

$$\begin{bmatrix} p_{11}(s) & p_{12}(s) & \cdots & \cdots & \cdots & p_{1q}(s) \\ 0 & p_{22}(s) & \cdots & \cdots & \cdots & p_{2q}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{pp}(s) & \cdots & p_{pq}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_R(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad 4.23$$

biçiminde üst sağ üçgensel forma getirilebiliyorsa $G_R(s)$, $P(s)$ ve $R(s)$ polinom matrislerinin GCRD matrisi olur (Wolovich, 1974).

Kural 4.5 Herhangi bir p satır, q sütun boyutlu $P(s)$ matrisini üst sağ üçgensel $\hat{P}(s)$ matrisine dönüştürecek bir "unimodular" $U_L(s)$ matrisi her zaman bulunur. Burada

$$\hat{P}(s) = U_L(s)P(s) \quad 4.24$$

biçimindedir (Wolovich, 1974).

Tanım 4.1 Herhangi bir polinom matrisinin determinanı sıfırdan farklı bir sabit sayı ise o matris "unimodular" matris olarak adlandırılır (Wolovich, 1974).

Kural 4.6 Herhangi bir p satır, q sütun boyutlu $P(s)$ matrisi, eğer ve sadece eğer bu matrisin her sütununda bulunan polinomların en yüksek dereceli elemanlarının katsayılarından oluşan Γ matrisi tam rank ise sütun uygundur. Eğer $P(s)$ matrisi kare matris ise Γ matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması sütun uygunluğu için yeterlidir.

Örnek 4.1 Eğer

$$P(s) = \begin{bmatrix} s^2 - 3 & 1 & 2s \\ 4s + 2 & 2 & 0 \\ -s^2 & s + 3 & -3s + 2 \end{bmatrix}$$

biçimindeyse Γ matrisi

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

şeklinde oluşur. Γ matrisinin determinanı sıfır olduğundan $P(s)$ sütun uygun değildir.

Uygulanacak kontrol girdisi

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{C}_f(s, \theta_1') \mathbf{N}_f^{-1}(s) \mathbf{u} + \mathbf{D}_f(s, \theta_2') \mathbf{N}_f^{-1}(s) \mathbf{y}_f + \mathbf{K}_0' \xi_f^m(s) \mathbf{W}_m(s) \mathbf{r} \\ \mathbf{y}_f(s) &= f_f^{-1}(s) \xi_f^m(s) \mathbf{y}(s) \end{aligned} \quad 4.25$$

biçimindedir. Burada,

$$C_l(s, \theta'_1) = \theta'_{11} s^{v_l-2} + \dots + \theta'_{1v_l-1}$$

$$D_l(s, \theta'_2) = \theta'_{21} s^{v_l-2} + \dots + \theta'_{2v_l-1} + \theta'_{2v_l} N_l(s) \quad 4.26$$

$$\theta'_1 = [\theta'_{11}, \dots, \theta'_{1v_l-1}]^T \quad \theta'_2 = [\theta'_{21}, \dots, \theta'_{2v_l-1} + \theta'_{2v_l}]^T \quad N_l(s) = \text{diag}\{n_l(s)\}$$

$n_l(s)$ derecesi $v_{l,1}$ olan rasgele seçilmiş uygun bir polinomdur. \mathbf{K}'_0 ise sabit bir matristir. Diğer sabit matrisler olan θ'_1, θ'_2 ile birlikte $T_l(s)$ aşağıdaki eşitliği sağlarlar.

$$\mathbf{R}_l(s) [\mathbf{N}_l(s) - \mathbf{C}_l(s, \theta'^*_1)] \mathbf{P}_l(s) - \mathbf{D}_l(s, \theta'^*_2) \mathbf{R}_l(s)]^{-1} \mathbf{N}_l(s) \mathbf{K}'_0 f_l(s) = \mathbf{I} \quad 4.27$$

$\mathbf{R}_l(s)$ ve $\mathbf{P}_l(s)$ matrisleri parametreleri bilindiğinden 4.27 denkleminde bulunan $\theta'^*_1, \theta'^*_2, \mathbf{K}'_0$ matrisleri 4.25 denkleminde yerlerine koyularak oluşturulan \mathbf{u} kontrol girdisi $w(t)=0, \mu=0$ için $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_m(t)\| \rightarrow 0$ biçiminde tanımlanmış hatanın üssel olarak artan bir hızla sifıra gitmesini sağlar.

Elde edilen kontrol girdisi \mathbf{u} , $w(t) \neq 0, \mu \neq 0$ durumunda 4.10 denklemlerle belirtilen gerçek sisteme uygulandığında ortaya çıkan kararlılık ve gürbüzlük problemi Kural 4.7'de verilen teorem yardımıyla incelenmiştir.

Kural 4.7 $\mu^* > 0$ ve $\forall \mu \in [0, \mu^*)$ için 4.10 ve 4.25 denklemleriyle ifade edilen kapalı döngü sistemin tüm sinyalleri sınırlı başlangıç koşulları için sınırlı kalır. Bunun yanı sıra izleme hatası $e_l(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_m(t)$ üssel olarak artan bir hızla

$$S^* = \|e_l\| < k(\mu r_0 + w_0) \quad 4.28$$

biçiminde ifade edilen değer kümesine yaklaşır. Burada $k \in R^+$ ve r_0, w_0 sırasıyla $\|\mathbf{r}(t)\|$ ve $\|\mathbf{w}(t)\|$ için üst sınır değerlerini belirtmektedir (Tao, 1988).

4.20 ve 4.27 denklemlerinden

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_f &= f_l^{-1}(s) \xi_l^m(s) \mathbf{W}_m(s) \mathbf{r} + \mu [(\mathbf{I} + f_l^{-1}(s) \mathbf{K}'_0{}^{l*-1} \mathbf{F}'_2(s)) \Delta'_a(s) \\ &+ f_l^{-1}(s) \mathbf{K}'_0{}^{l*-1} (\mathbf{I} - \mathbf{F}'_1(s)) \Delta'_m(s)] [\mathbf{I} - \mu \mathbf{T}_l^{-1}(s) f_l^{-1}(s) \mathbf{K}'_0{}^{l*-1} \mathbf{F}'_2(s) (\Delta'_a(s) \\ &+ \mathbf{T}_l(s) \Delta'_m(s))]^{-1} (\mathbf{T}_l^{-1}(s) f_l^{-1}(s) \xi_l^m(s) \mathbf{W}_m(s) \mathbf{r} \\ &+ \mathbf{T}_l^{-1}(s) f_l^{-1}(s) \mathbf{K}'_0{}^{l*-1} f_l^{-1}(s) \xi_l^m(s) \mathbf{w}(t)) + (f_l^{-1}(s) \mathbf{K}'_0{}^{l*-1} \mathbf{F}'_2(s) + \mathbf{I}) f_l^{-1}(s) \xi_l^m(s) \mathbf{w}(t) \end{aligned} \quad 4.29$$

yazılabilir. Burada

$$\mathbf{F}'_1(s) = \mathbf{C}_l(s)\mathbf{N}_l^{-1}(s) \quad \mathbf{F}'_2(s) = \mathbf{D}_l(s)\mathbf{N}_l^{-1}(s) \quad 4.30$$

biçimindedir. Eğer

$$(\mathbf{I} - \mu \mathbf{T}_l^{-1}(s) \mathbf{K}_0^{l^*-1} \mathbf{F}'_2(s) \mathbf{T}_l(s) f_l^{-1}(s) (\mathbf{T}_l^{-1}(s) \Delta'_a(s) + \Delta'_m(s)))^{-1} \quad 4.31$$

ifadesi kararlı ise 4.29 kararlıdır.

$f_l(s)$ ve $\mathbf{W}_m(s)$ ifadelerinin kararlı seçilmesinden ve $\mathbf{T}_l^{-1}(s)$, $\Delta'_a(s)$ ve $\Delta'_m(s)$ değerlerinin kararlılığından dolayı

$$f_l^{-1}(s) (\mathbf{T}_l^{-1}(s) \Delta'_a(s) + \Delta'_m(s)) \quad \mathbf{T}_l^{-1}(s) \mathbf{W}_m(s) \quad \mathbf{T}_l^{-1}(s) f_l^{-1}(s) \quad 4.32$$

ifadeleri kararlı ve payda polinomu dereceleri, pay polinomu derecelerinden en az bir büyük durumdadır.

4.27 eşitliğinden

$$\mathbf{T}_l^{-1}(s) \mathbf{K}_0^{l^*-1} \mathbf{F}'_2(s) \mathbf{T}_l(s) = \mathbf{T}_l^{-1}(s) \mathbf{K}_0^{l^*-1} (\mathbf{I} - \mathbf{F}'_1(s)) - f_l(s) \mathbf{I} \quad 4.33$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\mathbf{T}_l^{-1}(s) \mathbf{K}_0^{l^*-1} \mathbf{F}'_2(s) \mathbf{T}_l(s) \quad 4.34$$

eşitliği kararlıdır. $f_l(s)$ polinomunun seçiminden dolayı

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f_l(s) \mathbf{T}_l(s) = \mathbf{K}_0^{l^*-1} \quad 4.35$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{T}_l^{-1}(s) \mathbf{K}_0^{l^*-1} \mathbf{F}'_2(s) \mathbf{T}_l(s) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{T}_l^{-1}(s) f_l^{-1} \mathbf{K}_0^{l^*-1} \mathbf{F}'_2(s) f_l(s) \mathbf{T}_l(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{F}'_2(s) \mathbf{K}_0^{l^*-1} \end{aligned} \quad 4.36$$

Bu sonuç

$$\mathbf{T}_l^{-1}(s) \mathbf{K}_0^{l^*-1} \mathbf{F}'_2(s) \mathbf{T}_l(s) \quad 4.37$$

matrisinin payda polinomu derecesinin pay polinomu derecesine en az eşit olacağını göstermektedir. Böylece

$$\mathbf{T}_l^{-1}(s) \mathbf{K}_0^{l^*-1} \mathbf{F}'_2(s) \mathbf{T}_l(s) f_l^{-1}(s) (\mathbf{T}_l^{-1}(s) \Delta'_a(s) + \Delta'_m(s)) \quad 4.38$$

ifadesi kararlı ve payda polinomu derecesi, pay polinomu derecesinden en az bir büyük durumdadır. Bu sonuçtan hareketle

$$\frac{1}{\left\| \mathbf{T}_l^{-1}(s) \mathbf{K}_0^{l^*-1} \mathbf{F}_2'(s) \mathbf{T}_l(s) f_l^{-1}(s) (\mathbf{T}_l^{-1}(s) \mathbf{\Delta}_a'(s) + \mathbf{\Delta}_m'(s)) \right\|_{s=j\omega}} > c \quad 4.39$$

her zaman $\forall \omega \in [-\infty, +\infty]$ için 4.39 eşitsizliğini sağlayacak bir $c \in R^+$ sayısı bulunabilir.

c sayısını μ^* değerine eşitleyerek, $\forall \mu \in [0, \mu^*)$ aralığındaki μ değerleri için kapalı döngü sistemin kararlı olacağı söylenebilir. μ^* değeri

$$\mu^* = \inf_{\omega \in [-\infty, +\infty]} \left(\frac{1}{\left\| \mathbf{T}_l^{-1}(s) \mathbf{K}_0^{l^*-1} \mathbf{F}_2'(s) \mathbf{T}_l(s) f_l^{-1}(s) (\mathbf{T}_l^{-1}(s) \mathbf{\Delta}_a'(s) + \mathbf{\Delta}_m'(s)) \right\|_{s=j\omega}} \right) \quad 4.40$$

biçiminde seçilirse 4.29 denklemi kararlı olacaktır.

Kural 4.8 Eğer $\mathbf{y}(t) = g^{-1}(s) \mathbf{H}(s) \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{H}(s)$ bir polinom matrisi, $g(s)$ bir polinom, $g^{-1}(s) \mathbf{H}(s)$ kararlı olarak tersi alınabilir ve payda polinomu derecesi pay polinomu derecesine en az eşit bir matris, $\mathbf{x}(t)$ herhangi bir zaman dilimi için sınırlı ve $c_1 \in R^+$ sayısı için $\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \leq c_1 \sup_{t \geq \tau} \|\mathbf{x}(\tau)\|$ eşitsizliği geçerli ise $c_2 \in R^+$ için

$$\|\mathbf{x}(\tau)\| \leq c_2 \sup_{t \geq \tau} \|\mathbf{y}(t)\| \quad 4.41$$

yazılabilir (Tao, 1988).

$\mathbf{y}_f = f_l^{-1}(s) \mathbf{\xi}_l^m(s) \mathbf{y}$ ve bu eşitlikte $f_l^{-1}(s) \mathbf{\xi}_l^m(s)$ kararlı olarak tersi alınabilir ve payda polinomu derecesi pay polinomu derecesine en az eşit bir matris olduğundan Kural 4.8 kullanılarak kapalı döngü sistemin kararlı olduğu söylenebilir. $\mathbf{y}_{mf} = f_l^{-1}(s) \mathbf{\xi}_l^m(s) \mathbf{y}_m$ olduğundan $\mathbf{e}_{lf}(t) = \mathbf{y}_f(t) - \mathbf{y}_{mf}(t)$ hata değeri için bir üst sınır 4.29 denklemi kullanılarak bulunabilir. Bu üst sınır aynı zamanda $\mathbf{e}_l(t)$ olarak tarif edilen takip hatası için de bir üst sınır değeri olacaktır. Bu yargının doğruluğu $\mathbf{e}_{lf} = f_l^{-1}(s) \mathbf{\xi}_l^m(s) \mathbf{e}_l(t)$ denklemi ve Kural 4.8 bir arada düşünüldüğünde kolayca ortaya konulabilir.

Bu durumda çok değişkenli MRC kuralı ile uçuş zarfının tümünde uçak kararlılığı garanti edilmiş olacaktır.

5. ÇOK DEĞİŞKENLİ MODEL REFERANSLI KURALININ KOORDİNE VİRAJ HAREKETİNE UYGULANMASI

Koordine viraj hareketinin kontrol kuralını gerçekleştirebilmek amacı ile bu harekete etki eden durumlar ve kontrol girdileri boyutsuz kararlılık türevleri cinsinden seçilmiştir. Göz önüne alınacak üçüncü derece yanal ve boylamasına eksen doğrusal modeli aşağıda verilmiştir (Sparks, 1994).

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_p & L_r & L_\beta \\ N_p & N_r & N_\beta \\ 0 & 1 & Y_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ r \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{\delta dt} & L_{\delta a} & L_{\delta r} \\ N_{\delta dt} & N_{\delta a} & N_{\delta r} \\ 0 & 0 & Y_{\delta r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta dt \\ \delta a \\ \delta r \end{bmatrix} \quad 5.1$$

Burada p yatış hızını, r sapma hızını, β yana kayış açısını, δdt yatay stabilize açısının değişmesini, δa kanatçık açısının değişmesini ve δr dikey stabilize açısının değişmesini temsil etmektedir. Yüksek manevra yeteneğine sahip bir F-18 Hornet savaş uçağının 0.5 Mach ve 20000 feet (6096 m) uçuş şartı altında elde edilen A, B ve C matris değerleri aşağıdadır. Bütün değerler derece ve derece/saniye cinsindedir.

$$A = \begin{bmatrix} -1.4689 & 0.5126 & -10.3721 \\ -0.0148 & -0.1277 & 2.2811 \\ 0.0904 & -0.9949 & -0.1354 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9.9302 & 121227 & 0.9416 \\ 0.2757 & -0.2797 & -0.7419 \\ -0.0109 & -0.0057 & 0.0156 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad 5.2$$

$C(sI-A)^{-1}B$ formülü kullanılarak yatay stabilize açısı değişiminden yatış hızına transfer fonksiyonu,

$$G_{11}(s) = \frac{p}{\delta dt} = \frac{-0.0109s^2 + 0.6060s - 0.2629}{s^3 + 1.7320s^2 + 3.6116s + 3.3884} \quad 5.3$$

kanatçık açısı değişiminden yatış hızına transfer fonksiyonu,

$$G_{12}(s) = \frac{p}{\delta a} = \frac{-0.0057s^2 + 1.3741s + 0.5538}{s^3 + 1.7320s^2 + 3.6116s + 3.3884} \quad 5.4$$

dikey stabilize açısı değişiminden yatış hızına transfer fonksiyonu,

$$G_{13}(s) = \frac{p}{\delta_r} = \frac{0.0156s^2 + 0.8481s + 1.0650}{s^3 + 1.7320s^2 + 3.6116s + 3.3884} \quad 5.5$$

yatay stabilize açısı değişiminden sapma hızına transfer fonksiyonu,

$$G_{21}(s) = \frac{r}{\delta_{dt}} = \frac{9.9302s^2 + 2.867s + 25.5739}{s^3 + 1.7320s^2 + 3.6116s + 3.3884} \quad 5.6$$

kanatçık açısı değişiminden sapma hızına transfer fonksiyonu,

$$G_{22}(s) = \frac{r}{\delta_a} = \frac{12.2227s^2 + 3.1315s + 25.0455}{s^3 + 1.7320s^2 + 3.6116s + 3.3884} \quad 5.7$$

dikey stabilize açısı değişiminden sapma hızına transfer fonksiyonu;

$$G_{23}(s) = \frac{r}{\delta_r} = \frac{0.9416s^2 - 0.2944s - 5.5567}{s^3 + 1.732s^2 + 3.6116s + 3.3884} \quad 5.8$$

yatay stabilize açısı değişiminden yana kayış açısına transfer fonksiyonu,

$$G_{31}(s) = \frac{\beta}{\delta_{dt}} = \frac{0.2757s^2 + 0.4027s + 2.3224}{s^3 + 1.7320s^2 + 3.6116s + 3.3884} \quad 5.9$$

kanatçık açısı değişiminden yana kayış açısına transfer fonksiyonu,

$$G_{32}(s) = \frac{\beta}{\delta_a} = \frac{-0.2797s^2 - 0.4798s + 2.1809}{s^3 + 1.7320s^2 + 3.6116s + 3.3884} \quad 5.10$$

dikey stabilize açısı değişiminden yana kayış açısına transfer fonksiyonu;

$$G_{33}(s) = \frac{\beta}{\delta_r} = \frac{-0.7419s^2 - 1.1560s - 0.5967}{s^3 + 1.732s^2 + 3.6116s + 3.3884} \quad 5.11$$

biçiminde bulunmuştur. Bu tek girdili tek çıktılı transfer matrisleri çok girdili çok çıktılı, çok değişkenli, sistem transfer matrisini oluşturmuşlardır.

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & G_{13}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & G_{23}(s) \\ G_{31}(s) & G_{32}(s) & G_{33}(s) \end{bmatrix} \quad 5.12$$

$G(s)$ transfer matrisi elemanlarının bazıları sağ yarı düzlemde sıfırlara sahiptir. S7 kuralında belirtilen şartı sağlayabilmek amacıyla $G(s)$ üzerinde

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{T}_0(s)[\mathbf{I} + \mu\Delta_m(s)] + \mu\Delta_a(s) \quad 5.13$$

ayrıştırması uygulanmıştır. Sistem ayrıştırmasından sonra ortaya çıkan $T_0(s)$ aşağıda gösterilmiştir. Karakteristik denklem $k(s) = s^3 + 1.73s^2 + 3.61s + 3.39$ değerindedir.

$$\mathbf{T}_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.0109}{k(s)} & \frac{-0.0057(s+0.4024)}{k(s)} & \frac{0.0156s^2 + 0.85s + 1.065}{k(s)} \\ \frac{9.93s^2 + 2.867s + 25.57}{k(s)} & \frac{12.22s^2 + 3.13s + 25.05}{k(s)} & \frac{0.94(s+2.28)}{k(s)} \\ \frac{0.28s^2 + 0.4027s + 2.32}{k(s)} & \frac{-0.28(s+3.779)}{k(s)} & \frac{-0.74s^2 - 1.156s - 0.5967}{k(s)} \end{bmatrix} \quad 5.14$$

M2 kuralı gereği sistem çıktısı y 'nin takip edeceği y_m 'yi oluşturan model sistem olarak aşağıdaki biçimde seçilmiştir.

$$\mathbf{W}_m(s) = \begin{bmatrix} \frac{10}{s+15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{20}{s+25} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{30}{s+35} \end{bmatrix} \quad 5.15$$

$T_0(s)$ matrisi için Kural 4.2'ye göre seçilen MLI matrisi aşağıda belirtilmiştir.

$$\xi_l^m(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix} \quad 5.16$$

Denklem 4.21'de verilen $T_l(s)$ aşağıdaki biçimde bulunmuştur. Burada $f_l(s) = s+3$ olarak seçilmiştir.

$$\mathbf{T}_l(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.0109s - 0.0109}{s^4 + 4.7s^3 + 8.8s^2 + 14.2s + 10.2} & \frac{-0.0057s^2 - 0.008s - 0.0023}{s^4 + 4.7s^3 + 8.8s^2 + 14.2s + 10.2} & \frac{0.0156s^3 + 0.8637s^2 + 1.913s + 1.065}{s^4 + 4.7s^3 + 8.8s^2 + 14.2s + 10.2} \\ \frac{9.932s^3 + 12.799s^2 + 28.437s + 25.57}{s^4 + 4.7s^3 + 8.8s^2 + 14.2s + 10.2} & \frac{12.22s^3 + 15.532s^2 + 28.182s + 25.05}{s^4 + 4.7s^3 + 8.8s^2 + 14.2s + 10.2} & \frac{0.9416s^2 + 3.0886s + 2.145}{s^4 + 4.7s^3 + 8.8s^2 + 14.2s + 10.2} \\ \frac{0.2757s^3 + 0.6774s^2 + 2.7237s + 2.322}{s^4 + 4.7s^3 + 8.8s^2 + 14.2s + 10.2} & \frac{0.2797s^2 - 1.3367s - 1.057}{s^4 + 4.7s^3 + 8.8s^2 + 14.2s + 10.2} & \frac{0.7419s^3 - 1.8984s^2 - 1.7532s - 0.5967}{s^4 + 4.7s^3 + 8.8s^2 + 14.2s + 10.2} \end{bmatrix} \quad 5.17$$

Bulunan $\mathbf{T}_l(s)$ matrisinden yararlanarak $\mathbf{R}_l(s)$ ve $\mathbf{P}_l(s)$ matrisleri aşağıdaki biçimde belirlenmiştir.

$$\mathbf{R}_l(s) = \begin{bmatrix} -0.0109s - 0.0109 & -0.0057s^2 - 0.008s - 0.0023 & 0.0156s^3 + 0.8637s^2 + 1.913s + 1.065 \\ 9.932s^3 + 12.799s^2 + 28.437s + 25.57 & 12.22s^3 + 15.532s^2 + 28.182s + 25.05 & 0.9416s^2 + 3.0886s + 2.145 \\ 0.2757s^3 + 0.6774s^2 + 2.7237s + 2.322 & 0.2797s^2 - 1.3367s - 1.057 & -0.7419s^3 - 1.8984s^2 - 1.7532s - 0.5967 \end{bmatrix} \quad 5.18$$

$$\mathbf{P}_l(s) = \begin{bmatrix} s^4 + 4.732s^3 + 8.8076s^2 + 14.223s + 10.165 & 0 & 0 \\ 0 & s^4 + 4.732s^3 + 8.8076s^2 + 14.223s + 10.165 & 0 \\ 0 & 0 & s^4 + 4.732s^3 + 8.8076s^2 + 14.223s + 10.165 \end{bmatrix} \quad 5.19$$

Burada $\begin{bmatrix} \mathbf{R}_l(s) \\ \mathbf{P}_l(s) \end{bmatrix}$ biçiminde oluşturulan matris satır ve sütun işlemleri yardımı ile

$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(s) \\ 0 \end{bmatrix}$ biçimine getirildiğinde $\mathbf{X}(s)$, $\mathbf{R}_l(s)$ ve $\mathbf{P}_l(s)$ matrislerinin en büyük

sağdan ortak bölen (GCRD) matrisidir. $\mathbf{X}(s)$ “unimodular” bir matristir. Bunun anlamı bu matrisin s frekansının bir fonksiyonu olmaması ve determinantının sıfırdan farklı olmasıdır. $\mathbf{X}(s)$ “unimodular” bir matris ise $\mathbf{R}_l(s)$ ve $\mathbf{P}_l(s)$ matrisleri sağdan “coprime” polinom matrisleridir. Ayrıca $\mathbf{P}_l(s)$ matrisinde her bir sütunun elemanlarının en yüksek dereceli terimlerin katsayılarının oluşturduğu matrisin determinanı sıfırdan farklı olduğundan sütun uygundur.

4.26 denkleminde belirtilen ve seçimi kontrol kuralı tasarımcısına bırakılan $\mathbf{N}_l(s) = \text{diag}\{n_l(s)\}$ matrisi ise aşağıdaki biçimde seçilmiştir.

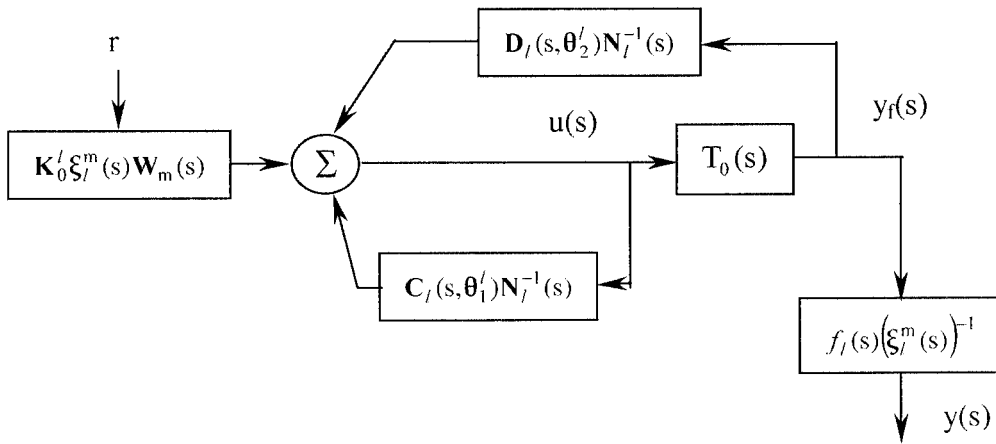
$$\mathbf{N}_l(s) = \begin{bmatrix} (s+2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (s+2)^3 & 0 \\ 0 & 0 & (s+2)^3 \end{bmatrix} \quad 5.20$$

Bulunan matrisler 4.27 denkleminde yerine konarak,

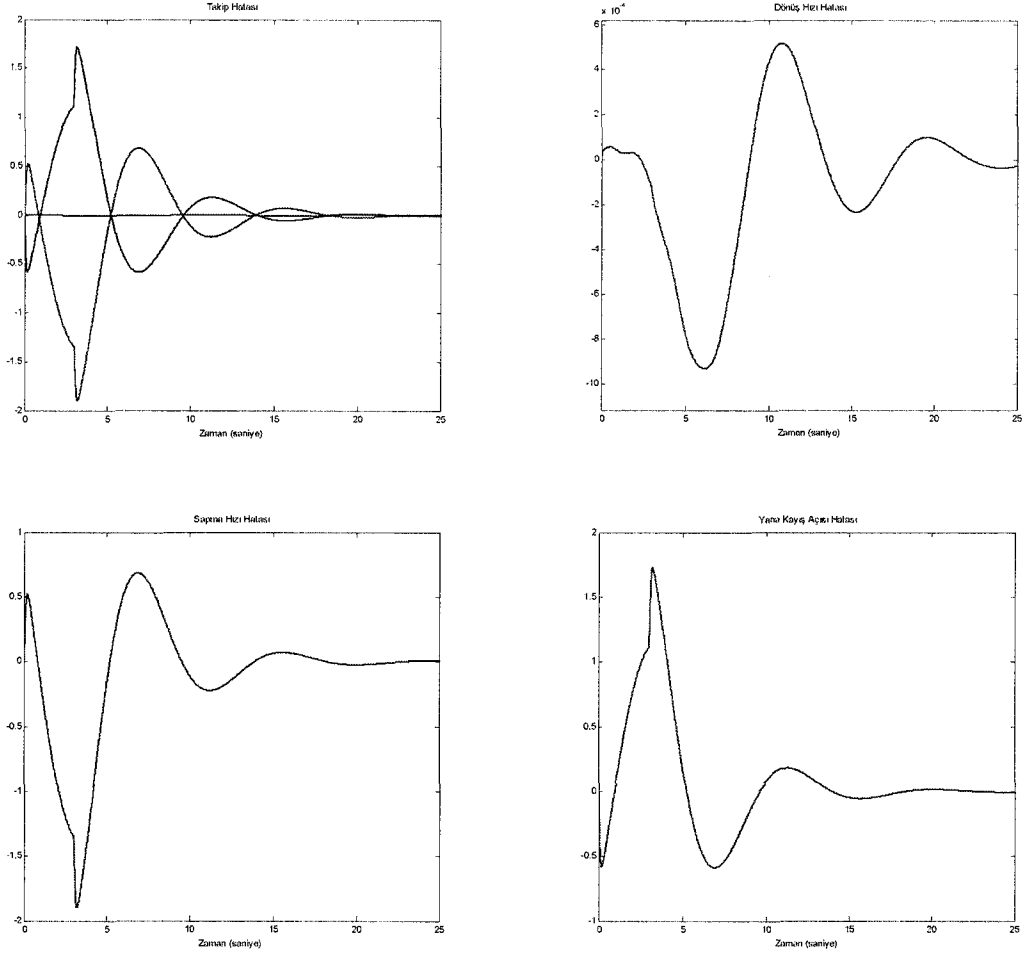
$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_l(s, \boldsymbol{\theta}_1^*) &= \begin{bmatrix} 4.02s^2 + 4.4s + 1.55 & 0.46s^2 + 6.38s + 4.66 & -13748s^2 - 29753s - 15934 \\ 0.57s^2 + 3.85s + 3.16 & 4.36s^2 + 4.52s + 2.17 & 11166s^2 + 24156s + 12932 \\ 0.16s^2 + 0.85s + 0.81 & 0.54s^2 + 0.62s + 0.32 & -4826s^2 - 1110s - 61.89 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D}_l(s, \boldsymbol{\theta}_2^{l*}) &= \begin{bmatrix} 81493s^2 + 37893s + 34983 - 74108(s+2)^3 & 0.036s^2 + 0.20s + 0.11 - 0.038(s+2)^3 & 1773s^2 + 8124s + 77 - 1578(s+2)^3 \\ -0624s^2 - 3080s - 27946 - 60234(s+2)^3 & 0.33s^2 + 1.55s + 1.57 - 0.319(s+2)^3 & -144s^2 - 6601s - 6258 + 1282(s+2)^3 \\ 2582s^2 + 12983s + 12599 - 26153(s+2)^3 & 0.014s^2 + 0.094s + 0.044 - 0.014(s+2)^3 & 0.53s^2 + 1.06s + 1.14 - 0.094(s+2)^3 \end{bmatrix} \quad 5.21 \\
 \mathbf{K}_0^{l*} &= \begin{bmatrix} 168.03 & 0 & 3.62 \\ -136.57 & 0.082 & -2.95 \\ 62.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

olarak bulunmuştur.

Yukarıda bulunan değerler 4.25 denkleminde yerlerine konmuş ve çok değişkenli sistem için bir kontrol kuralı oluşturulmuştur. Bu kural Şekil 5.1’de verilen yapıya bağlı kalınarak benzetim işlemine tabi tutulmuştur. Burada \mathbf{r} pilot kontrol girdisini temsil etmektedir. Bu vektörün değerleri bir uçağın ana kontrol yüzeylerindeki derece cinsinden değişimleri göstermektedir. Bu değişimler pilotun bu yüzeyleri değiştirmek amacıyla kokpitteki lövyeye ve pedalları hareket ettirmesiyle olabileceği gibi ani olarak oluşabilecek sağanaklardan da kaynaklanabilir.



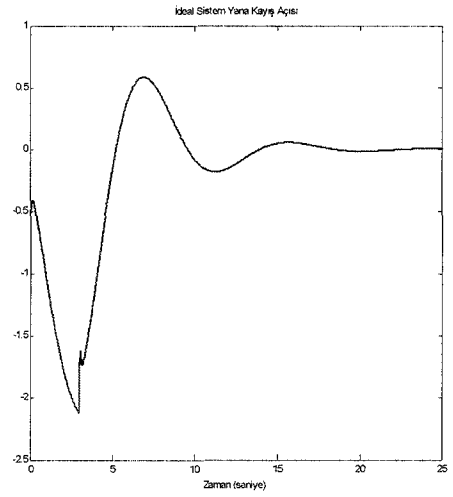
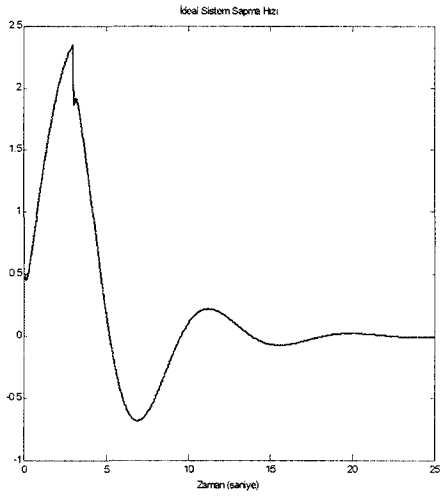
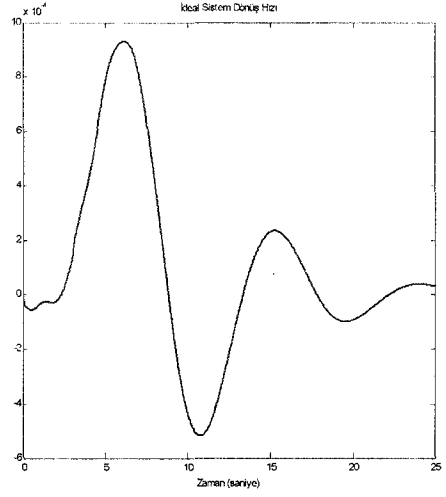
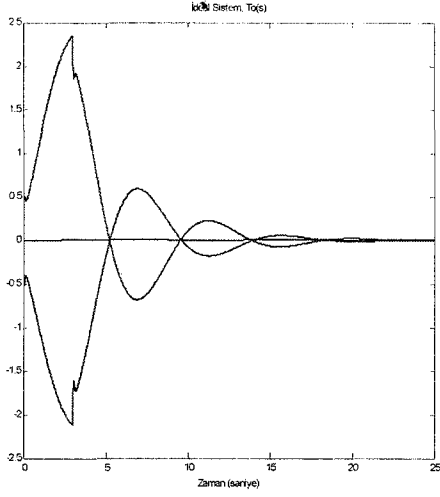
Şekil 5.1 Model referanslı kontrol sisteminin yapısı



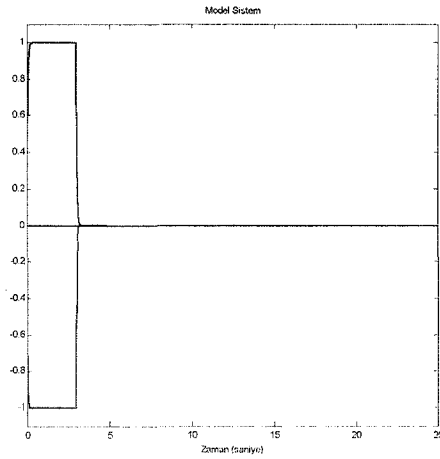
Şekil 5.3 Referans model çıktısı ile ideal sistem çıktısı arasındaki fark, takip hatası

Dönüş hareketini yapabilmek üzere sapma hızı ve yana kayış açısında oluşan değişiklik ise kumandanın kesilmesi ile birlikte takip hatasını sıfır yapmak üzere denetleyici tasarlayanın belirlemiş olduğu model sistem çıktısına ulaşmaktadır.

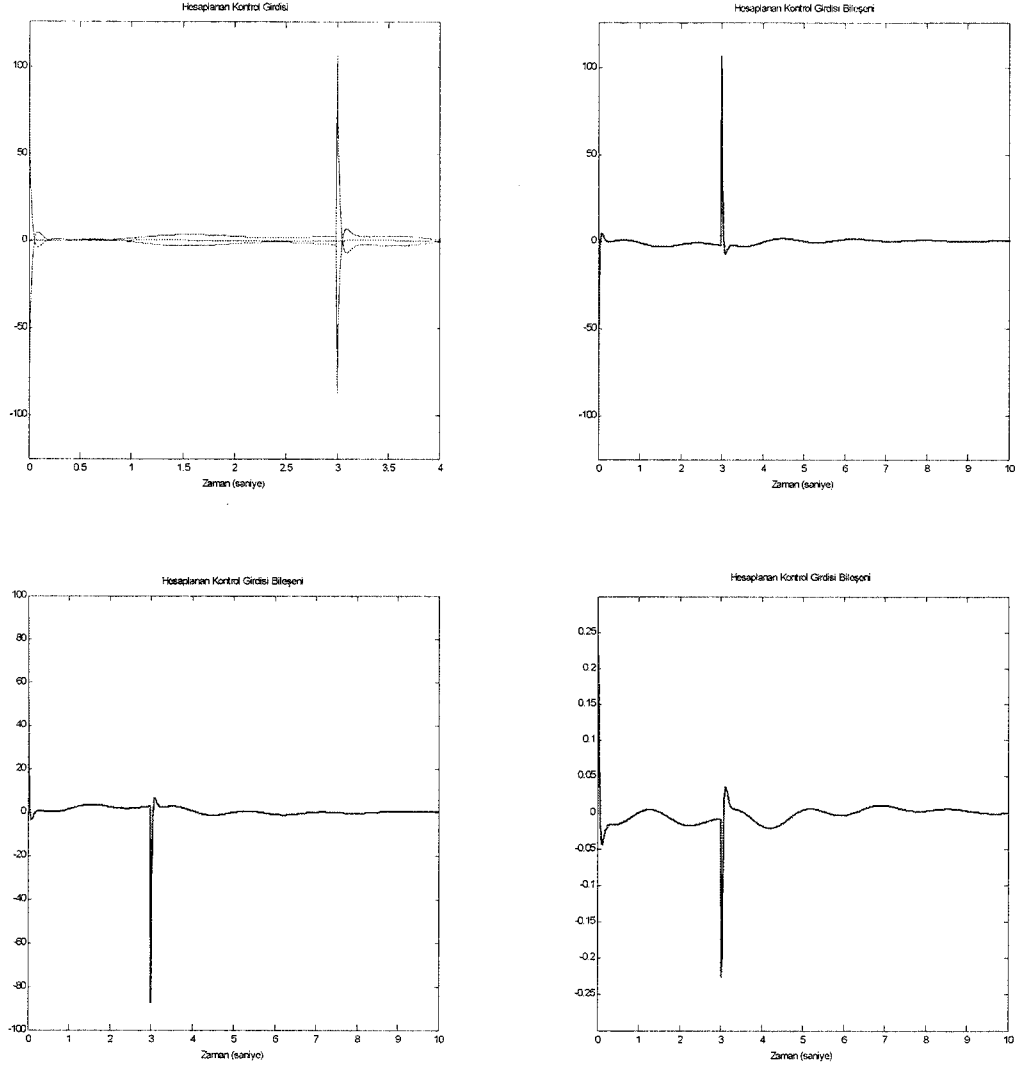
Şekil 5.4 ideal sistem olarak isimlendirilen ve 4.10 denkleminde belirtilen $T_0(s)$ sisteminin pilot kumandasına verdiği tepkiyi göstermektedir. Açıkça görülmektedir ki sapma hızı ve yana kayış açısındaki değişiklikler uçağın irtifa kaybetmeden belli bir dönüş yarıçapı ile baş açısını değiştirmesine neden olmaktadır. Dönüş hızındaki değişim diğerlerine göre çok küçük kalmaktadır. Bu da uçağın tona hareketi yapmadığını göstermektedir. Şekil 5.5 ise seçilmiş modelimizin pilot tarafından üretilen kumandaya verdiği tepkiyi göstermektedir.



Şekil 5.4 Tüm sıfırları sol yarı düzlemde bulunan $T_0(s)$ ideal sisteminin çıktısı

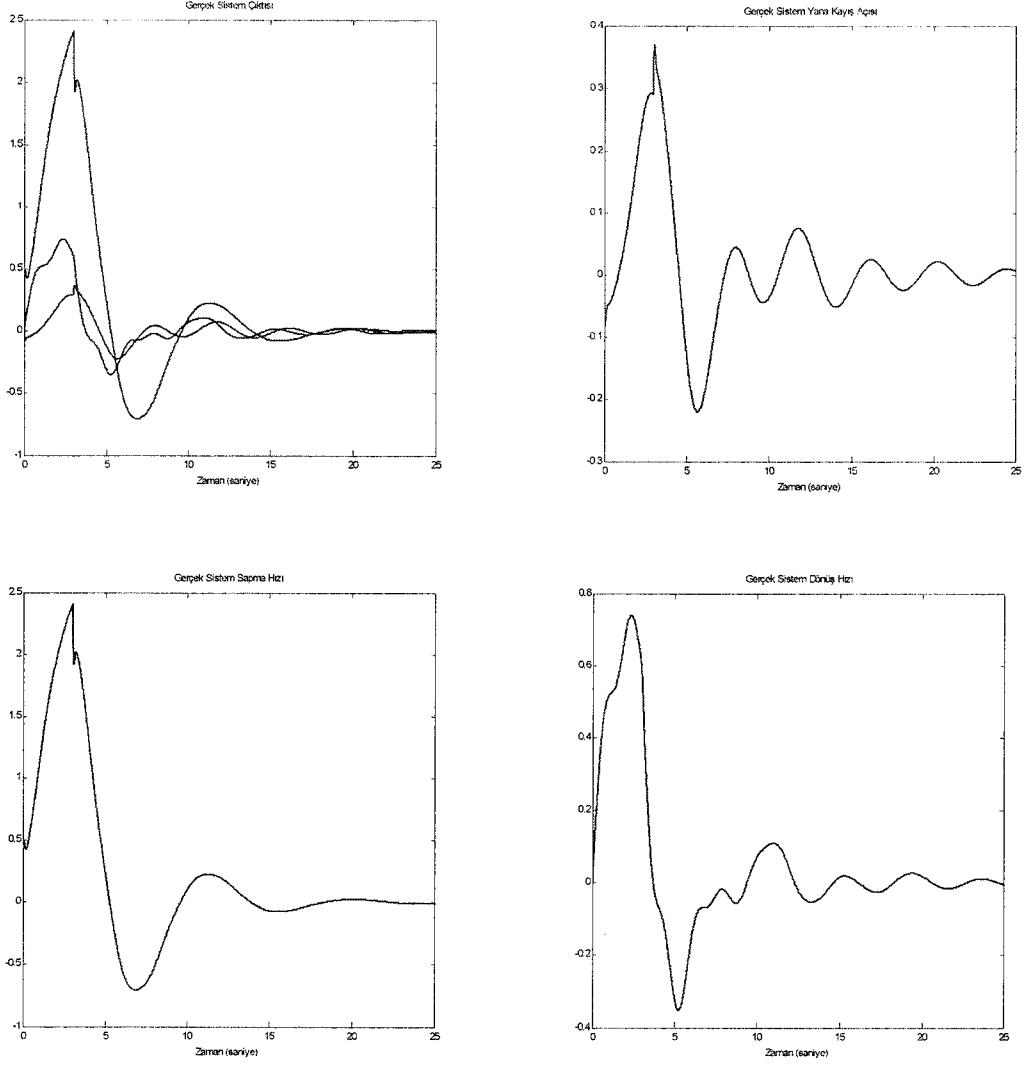


Şekil 5.5 Model sistem çıktısı



Şekil 5.6 Hesaplanan kontrol girdisi, U

Şekil 5.6 ile gösterilen kontrol girdisi uçağı pilotun ya da otomatik kontrol sisteminin istediğı biçimde hareket ettirebilmek üzere kontrol yüzeylerini hareket ettiren motorlara uygulanan girdileri göstermektedir. Ele alınan kontrol kuralı için akçuatör dinamiklerinin uçak dinamiğinin içinde olduğu düşünölmüştür. Uygulanan bu girdinin uçağı nereye götürdüğü, uçağın durumlarından yapılan geri besleme ile takip edilmektedir. Hesaplanan kontrol girdisi sağ yarı düzlemde sıfırları olan $G(s)$ transfer matrisi ile belirtilen gerçek uçak dinamiğine açık döngü kontrol sistemi oluşturacak biçimde uygulandığında, hatanın sonlu bir değer tarafından belirlenen sınırlar içinde kaldığı görölmüştür.

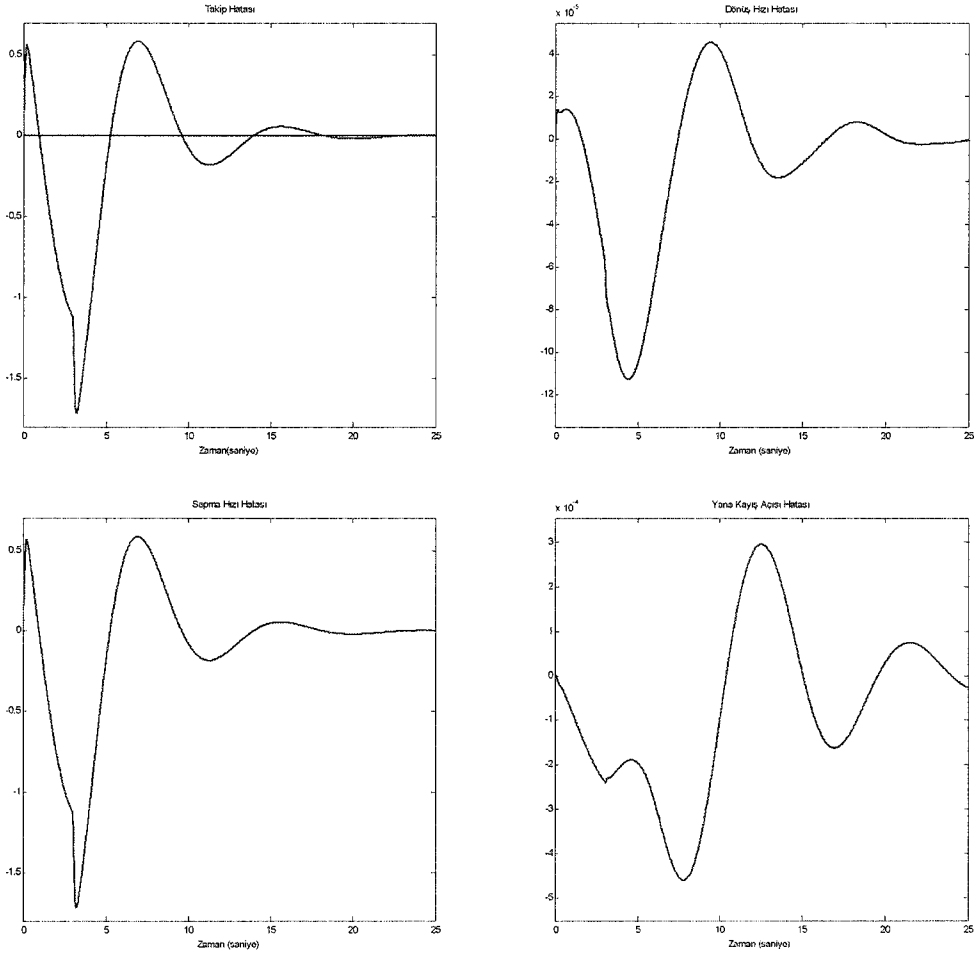


Şekil 5.7 Kararlılık türevlerinin oluşturduğu transfer fonksiyonlarından oluşan $G(s)$ gerçek sistem transfer matrisi tepkisi

4.25 denklemi ile önerilen kontrol kuralı, uçağın içinde bulunduğu uçuş şartlarına bağlı olarak oluşan kararlılık türevlerinin meydana getirdiği katsayılarından oluşan transfer matrislerini aynı anda ve bir harmoni içinde kontrol edebilmiştir. Şekil 5.3 ile belirtilen hata değerinin kabul edilebilir bir zaman diliminde sıfıra gitmesi uçağın istenen sapma ve yatış hızında ve sabit bir kayma açısı ile döndüğünü göstermektedir. Şekil 5.7 ile gösterildiği üzere gerçek sistemin modellenen kısmından türetilen u kontrol girdisi, tüm sistem üzerinde de gürbüz bir kontrol sağlayabilmektedir.

İkinci olarak kontrol girdimiz $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ değerine ayarlanarak Şekil 5.2 ile

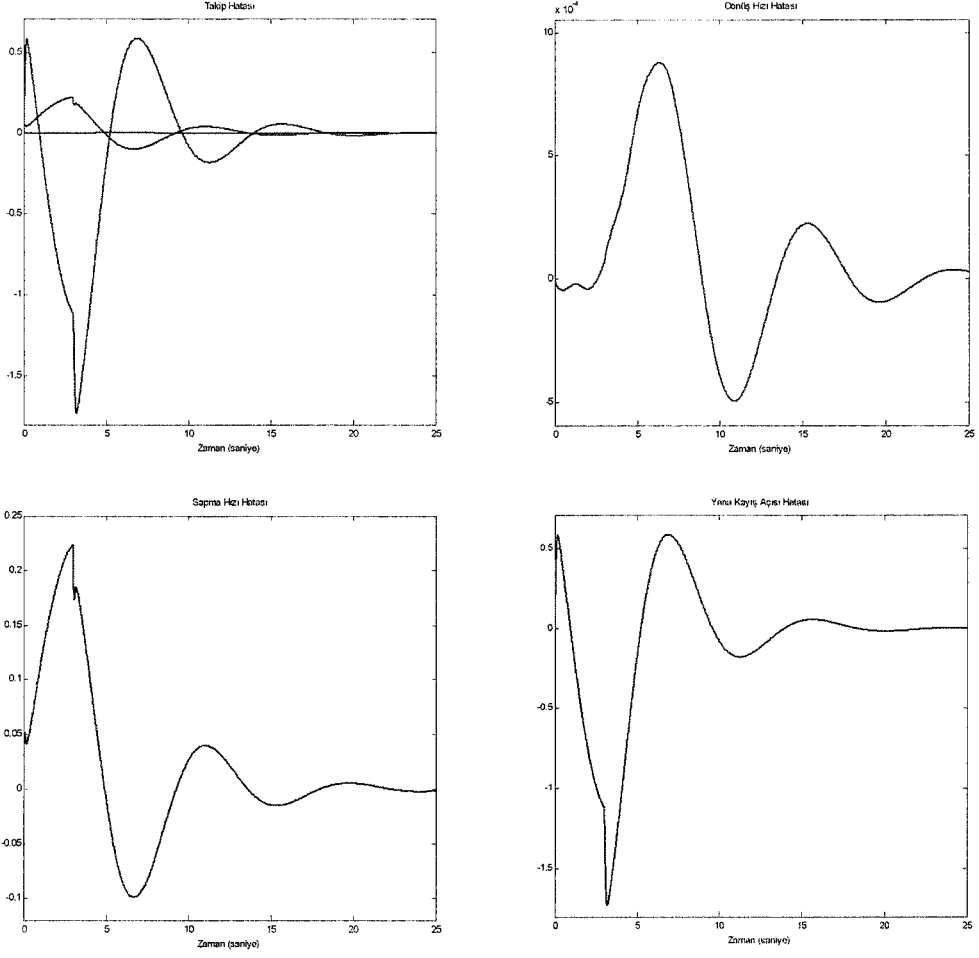
verilen benzetim sistemi bir kez daha çalıştırılmıştır. Bu girdinin anlamı sadece uçağın x eksenine göre hareketini sağlayan kanatçıkların hareket ettirildiğidir. Bu girdi de üç birim zaman sonra sıfırlanmaktadır. Bu şartlar altında gerçekleştirilen benzetim sonuçlarından takip hatası Şekil 5.8 ile verilmiştir.



Şekil 5.8 Kanatçık değişimi için takip hatası

Daha sonra girdimiz $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olarak ayarlanmıştır. Bu girdi değeri sadece

istikamet dümeninin hareket ettirilmesi anlamını taşımaktadır. Üç birim zaman sonra sıfırlanan bu girdi şartı altında gerçekleştirilen benzetim sonuçlarından takip hatası Şekil 5.9 ile verilmiştir.



Şekil 5.9 İstikamet dümeni değişimi için takip hatası

Şekil 5.8 ve Şekil 5.9'dan görülebileceği üzere tek bir kontrol yüzeyi hareket etmesi halinde de takip hatası sıfıra gitmekte ve sistem kontrol edilebilmektedir.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada, bir uçağın koordine viraj hareketi yapabilmesini sağlayan bir denetleyici tasarlanmış ve bilgisayar üzerinde benzetim olarak denenmiştir.

Koordine viraj hareketinin doğru bir şekilde yapılabilmesi için uçağın ana kontrol yüzeylerinin belli bir harmoni ile aynı anda hareket etmesi gerekmektedir. Uçak modeli çok girdili çok çıktılı bir sistem olarak ele alınarak ana kontrol yüzeyleri değişimlerinin uçak hareketinin tümüne ve her bir kontrol yüzeyinin direkt olarak etkilediği durum dışında kalan durumlara etkileri birlikte incelenmiş ve kontrol edilmiştir. Denetleyici, uçağın hızına ve irtifasına bağlı olarak değişen ve uçuş sırasında ölçülebilen kararlılık türevlerinin oluşturduğu transfer fonksiyonlarından yararlanılarak tasarlanmıştır. Böylelikle uçak kontrol kuralı oluşturmada karşılaşılan tekniklerden farklı olarak birden fazla kontrol kuralı oluşturmaya ya da uçuş öncesinde yapılacak kazanç ölçeklemesi hesaplamalarına bağımlı kalınmamıştır.

Bundan başka uçak modeli daha önceden belirlenmiş kararlı bir modelin çıkışına ulaşmaya çalışıldığından ve bu değişim, kontrol girdisi oluşturma aşamasında, transfer fonksiyonları ile birlikte dikkate alındığından sisteme uygulanan girdi, ana kontrol yüzeyleri aynı anda hareket etmese de uçağın kontrolünü sağlama da önemli ölçüde başarılı olmaktadır.

Kararlılık türevlerinin hesaplanmasını sağlayacak algılayıcılar uçak üstüne yerleştirilebilir ve 4.27 denklemleri ile verilen kesin denklik kuralından yola çıkılarak, kontrol girdisi katsayılarını hesaplamaya yönelik bir program geliştirilebilir ise model referanslı kontrol tekniği, uzunlamasına ve yanlamasına uçak hareketi bir bütün olarak düşünüldüğünde, uçağın istenen manevrayı yapabilmesine olanak sağlayan önemli bir yöntem olarak görülmüştür.

7. ÖNERİLER

Bu çalışmada uçağın sadece üç durum değişkeni göz önüne alınmış ve belli bir hareketin kontrol edilip edilemeyeceği tartışılmıştır. Uçağın diğer manevralarının da aynı yöntemle kontrol edilebilirliği tartışılabilir. Sistemin boyutu büyütülerek, uçak modelini oluşturan durumlardan daha fazlası aynı anda kontrol edilmeye çalışılabilir.

Tasarlanan denetleyici belli bir irtifa ve hız değeri için oluşturulmuştur. Kararlılık türevleri değerlerine bağlı olarak uçuş zarfının belli noktalarında transfer fonksiyonları oluşturularak tüm uçuş zarfı için yöntemin geçerliliği tartışılabilir.

Bu aşamada model referanslı uyarlamalı kontrol tekniğinden yararlanılarak transfer fonksiyonu katsayıları anlık olarak güncellenebilir. Böylelikle herhangi bir uçuş zarfı için tek denetleyicinin verimliliği araştırılabilir.

KAYNAKLAR

ADAMS, R. J., SPARKS, A. G., ve BANDA S. S., *Full envelope multivariable control law synthesis for a high performance test aircraft*, Proceedings of the 1992 IEEE Conference on Control Applications, Dayton, Ohio, USA (1992).

DOYLE, J. C., LENZ, K. ve PACKARD, A., *Design examples using μ -synthesis: space shuttle lateral axis FCS during reentry*. NATO ASI Series Modeling, Robustness and Sensitivity Reduction in Control Systems (Ed: CURTAIN, R. F.), Springer-Verlag, Berlin, Germany, **F34** (1987).

GOODWIN, G. C. ve SIN, K. S., *Adaptive filtering prediction and control*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA (1996).

HYDE, R. ve GLOVER, K., *VSTOL aircraft flight control design using H-infinity controllers and a switching strategy*, Proceedings of the 1990 IEEE Conference on Decision and Control, Honolulu, Hawaii, USA (1990).

IOANNOU, P.A. ve SUN, J., *Robust adaptive control*, Prentice-Hall Inc., A Simon & Schuster Company Upper Saddle River, New Jersey, USA (1996).

KAILATH, T., *Linear Systems*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA (1980).

KAHVECİOĞLU, A., *Uçuş kontrol sistem tasarımında katlı model yaklaşımı ve genetik algoritma tekniğinin uygulanması*, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, Türkiye (2000).

KALMAN, R. E., *Mathematical description of linear dynamical systems*, J.S.I.A.M. Control Series, **A1**, No:2, 152-192 (1963).

MACLAY, D. ve HOWITT, J., *Design and handling qualities analysis of a full envelope multivariable controller for a combat rotorcraft*, Proceedings of the Institute of Mathematics and its Applications Conference on Aerospace Vehicle Dynamics and Control (1992).

McLEAN, D., *Automatic flight control systems*, Prentice Hall International (UK) Ltd, Hemel Hempstead Hertfordshire, Great Britain (1990).

McRUER, D., ASHKENAS, I. ve GRAHAM, D., *Aircraft dynamics and automatic control*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA (1973).

POSTELTHWAITE, I. ve WALKER, D. J., *Advanced control of high performance rotorcraft*, Proceedings of the Institute of Mathematics and its Applications Conference on Aerospace Vehicle Dynamics and Control (1992).

REICHERT, R. T., NICHOLS, R. A. ve RUGH, W.J., *Gain scheduling for H-infinity controllers: a flight control example*, Proceedings of the 1992 American Control Conference, Chigaco, Illinois, USA (1992).

SAMBLANCAT, C., APKARIAN, P. ve PATTON, R., J., *Improvement of helicopter robustness and performance control law using eigenstructure techniques and H-infinity synthesis*, Proceedings of the 16th European Rotorcraft Forum (1990).

SHAMMA, J. ve CLOUTIER, J., *A linear parameter varying approach to gain scheduled missile autopilot design*, Proceedings of the 1992 American Control Conference, Chigaco, Illinois, USA (1992).

SPARKS, A. G., ADAMS, R. J. ve BANDA, S. S., *Control law development for the lateral axis of a fighter aircraft*, Proceedings of the 1992 AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Hilton Head, New York, USA (1992).

SPARKS, A. G. ve BANDA, S. S., *Application of structured singular value synthesis to a fighter aircraft*, Proceedings of the 1992 American Control Conference, Chigaco, Illinois, USA (1992).

SPARKS, A. G., BUFFINGTON, J. ve BANDA, S. S., *Fighter aircraft lateral directional axes full envelope control law design*, International Journal of Control, Taylor & Francis, Ltd., **59**, 893-924 (1994).

STEVENS, B.L. ve LEWIS, F.L., *Aircraft Control and Simulation*, John Wiley & Sons, Inc., USA (1992).

THOMPSON, C., COLEMAN, E. ve BLIGHT, J., *Integral LQG controller design for a fighter aircraft*, Proceedings of the 1987 AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Monterey, California, USA (1987).

TAO G. ve IOANNOU P.A., *Robust Adaptive Refrence Adaptive Control For Multivariable Plants*, International Journal of Adaptive Control, John Wiley & Sons, Ltd., **2**, 217-248 (1988).

WELLS, D., *Theory and Problems of Lagrangian Dynamics*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, USA (1967).

WOLOVICH, W. A., *Linear Multivariable Systems*, Springer-Verlag New York Inc., New York, USA (1974).