

DERLEME/REVIEW

## GRAVİTASYON KÖKENLİ ÇÖKME VE KARADELİKLER

Göksel Daylan ESMER<sup>1</sup>

### ÖZ

Bu çalışmada fiziğin temel konuları arasında ağırlığı giderek artan karadelik fiziğine ilişkin temel bilgiler ayrıntılı bir biçimde sunulmaktadır. Önce karadelik fiziğinin bugünkü durumu ve temel problemler özetlendikten sonra Schwarzschild çözümü diye bilinen ve termonükleer evriminin sonunda bir karadeliğe evrimleşen, küresel simetrik bir alana sahip cismin özellikleri incelenmiştir. Schwarzschild koordinatlarında,  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$  yarıçapı için ortaya çıkan singularitenin bir koordinat dönüşümüyle kaldırılabilir bir singularite olduğu ve  $r = r_s$  yüzeyinin aslında, M kütleli küresel simetrik bir cisim için hem sonsuz kırmızıya kayma yüzeyini hem de karadelik ufkunu oluşturduğu, Kruskal - Szekerez koordinatları aracılığıyla gösterilmiştir. Bu kez Einstein denklemlerinin, Kerr çözümü diye bilinen ve spine sahip bir cismin gravitasyon alanını belirleyen, ekstenel simetrik çözümü göz önüne alınarak, karadeliğe evrimleşmesi halinde bu cismin özellikleri incelenmiştir. Burada önce “*Tek yönlü zar yüzeyi*” kavramı tanıtılmış ve bu şekilde dönen karadelik ufkunu oluşturan tek yönlü zar yüzeyinin, Schwarzschild karadeliğinden farklı olarak, iki farklı yüzey aracılığıyla temsil edilmekte olduğu gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Karadelik, Schwarzschild Karadeliği, Kerr Karadeliği, Dinamik Kuşak.

## GRAVITATIONAL COLLAPSE AND BLACKHOLES

### ABSTRACT

In this study the fundamentals of Black Holes physics which has increasingly importance in fundamental subjects of physics is reviewed in details. We mentioned about the already known aspects of black holes and give a summary of the related basic problems. We give a detailed analysis of the underlying mechanism governing and identifying the properties of the Schwarzschild Black Hole evolving from a thermonuclear evolution. It is shown that with the aid of Kruskal-Szekeres coordinates the singularity arising from the Schwarzschild horizon  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$  is a removable singularity and for a Black Hole possessing spherical symmetry with mass M the Black Holes horizon is the surface of infinite red shift. We consider the evolution of a gravitational mass into a Black Hole and restate the solutions of the Einstein field equations in the Kerr approach where the mass distribution is supposed to be axial symmetric with non-zero spin. The one way membrane is discussed and it is shown that for a rotating Black Hole the one way membrane, characterizing the Black Hole horizon can be studied through the replacement of it with two distinct surfaces different a the Schwarzschild Black Holes case.

**Key words:** Back Hole, Schwarzschild BlackHole, Kerr Black Hole, Ergosphere.

<sup>1</sup> İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü, E-mail: gokselde @ hotmail. com, Fax: 0 212 5190834  
Geliş: 10 Kasım 1999; Kabul: 3 Şubat 2000.

## 1. GİRİŞ

Kütlesi yeterince büyük ( $3M_{\odot}$  dolayında) bir yıldızın termonükleer evriminin, *Schwarzschild yarıçapı* (ya da *gravitasyon yarıçapı*) diye bilinen  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$

den daha küçük bir yarıçap içine büzülmesiyle başlayan ve sürekli bir büzülmeye devam eden son evresi, karadeliği (karaçukuru) oluşturur. Esas olarak karadelik, uzay-zamanda ışığın bile kendisinden kaçamayacağı kadar güçlü gravitasyon alanına sahip bir bölge olarak tanımlanır. Gerçekten de gravitasyon yarıçapına karşılık gelen kaçış hızının ışık hızına eşit olacağı ve bir fiziksel informasyonun taşınma hızı için ışık hızının limit hız olduğu göz önünde bulundurulacak olursa, ne bir informasyon sinyalinin ne de bir taneciğin karadeliğin dışına kaçamayacağı anlaşılır. Sistemin toplam enerjisiyle orantılı bir kütleli varlığından kaynaklanan ve gravitasyon etkileşmesinin sonucu olan bu durum Einstein'ın Genel Gravitasyon Teorisi ile tutarlı ve geçerli bir biçimde tasvir edilebilmektedir. Burada önemle belirtilmesi gereken nokta, sıfırdan farklı bir enerjiye sahip bütün öğelerin bu gravitasyon etkisine katılmakta olduğudur.

Einstein denklemlerinin, gravitasyon kökenli çökme tasvir eden genel çözümlerinin bulunması, bu denklemlerin oldukça karmaşık nonlineer denklemler olması yüzünden, çok zor bir problem olup bilgisayar kullanmak suretiyle, nümerik integrasyonla yaklaşık çözümler bulma gayretleri de henüz tatmin edici sonuçlar vermekten uzaktır. Bununla birlikte çökme süreci için olmasa bile, oluşumlarının hemen ardından stasyonere hale gelebildikleri için karadeliklerin gravitasyon alanı, çok az sayıda parametreye bağlı olarak, tek bir biçimde belirlenebilmektedir.

Karadeliklerin olağanüstü güçlü gravitasyon alanları, alan denklemlerinin bu gün bilinen, 1) M kütleli tek parametrelili SCHWARZSCHILD, 2) M kütleli ve Q yüküne bağlı iki parametrelili REISNER-NORDSTROM, 3) M kütleli ve J açısal momentumuna bağlı iki parametrelili KERR, 4) M kütleli, J açısal momentumu ve Q yüküne bağlı üç parametrelili KERR-NEWMANN çözümleri ile tasvir edilirler.

Karadelik (BlackHole) deyimini ilk kez 1968 de Wheeler tarafından kullanılmış olmakla beraber, Newtonsal tanecik teorisi çerçevesi içinde, ışığın yeterince büyük kütleli bir cisimden kaçamayacağı, dolayısıyla bu tür nesnelere mümkün olabileceği ilk kez 1795 de Laplace tarafından ortaya konmuştur.

Öte yandan bir karadeliğin nasıl oluşacağını ise, Oppenheimer ve Synder, genel rölativite çerçevesi içinde, basıncı ihmal edilen, homogen akışkan bir kürenin

kendi gravitasyon alanının etkisi altında çökmesinin, dışındaki evrenle bütün iletişiminin kesileceği bir evreyle son bulacağını belirlemek suretiyle, ilk kez 1939 da göstermişlerdir. [Oppenheimer ve Synder (1939), Weinberg (1972)].

K. Schwarzschild tarafından 1916 da bulunan, Einstein'ın gravitasyon alan denklemlerinin ilk çözümünü kullanarak, gravitasyon alanının uzay-zaman yapısının incelenmesine ilişkin Flam, Weyl, Edington, Rosen ve diğerlerinin çalışmalarının [örneğin; Einstein-Rosen (1935)] ardından Sygne, Finkelstein, Fronsdal, Kruskal, Szekeres ve Novikov gibilerinin çalışmalarıyla [Finkelstein (1958), Fronsdal(1959), Kruskal (1960)], bu çözüm çerçevesi içinde, karadelik problemi bütünüyle çözülmüştür.

R.P.Kerr tarafından, spine sahip bir cismin gravitasyon alanını tasvir eden çözümünün bulunmasından [Kerr(1963)] sonra, dönen bir karadeliğin gravitasyon alanını tasvire yönelik yoğun teorik çalışmaların yer aldığı yeni bir dönem başlamıştır. Bu dönemin sonuçlarına ait ayrıntılı ve geniş bilgi için [Misner, Thorne, Wheeler(1973), Hawking, Ellis (1973)] e bakılabilir.

Bir çift yıldız sistemi içinde ya da tek başına bulunan bir karadeliğin, üzerine madde yığılması ve yığılan bu maddenin sıkışıp ısınması sonucu, X-ışınları yayınlaması süreci altmışlı yıllarda teorik olarak etraflıca incelenmiş [Zel'dovich ve Novikov (1967), Hayakawa ve Matsuka (1964)] ve 1971 de de ilk kez Uhuru uydusu ile X-ışını kaynağı çift yıldız sistemleri saptanmıştır. Bu olay karadeliklerin detekte edilmesi bakımından büyük önem taşıyan bir dönemin başlangıcı olmuştur.

Üzerine madde yığılması nedeniyle güçlü bir X-ışını kaynağı haline gelen, çift yıldız sistemi içindeki, gravitasyonel çökmeye uğramış bir cismin varlığı ve astromik özellikleri, bu cisim optik yolla gözlenmese de, görülebilir eşinin kapalı bir yörünge üzerindeki hareketinin incelenmesiyle, dolaylı olarak belirlenebilmektedir. Bir beyaz cüce ya da bir nötron yıldızı da olabileceğinden, optik yolla görülemeyen cismin bir karadelik olduğuna kütleliğini belirlemek suretiyle karar verilebilecektir. Genel rölativite teorisi çerçevesi içinde, bir nötron yıldızının kütleliğin  $3,2M_{\odot}$  den daha büyük olamayacağı gösterilmiştir [Rhoades ve Ruffini (1974)]. Örneğin, Sygnus X-1 çift yıldız sistemi içindeki görünmeyen üyenin kütleliğin  $9M_{\odot}$  mertebesinde olduğu belirlenmiş olduğundan bunun bir karadelik olduğu kesindir. Bunun gibi LMC X-1, A0620-00, SS433 çift yıldız sistemleri de birer karadelik içerdikleri kesinleşmiş sistemlere örnek oluştururlar [Sato ve Nakamura (1986)].

Karadelikler oluşumları açısından, 1- Bir yıldızın son evresini oluşturanlar, 2- Galaksilerin ya da küresel kümelerin çekirdeklerinde oluşanlar, 3- Evrenin büyük patlamayı izleyen en erken çağlarındaki çok büyük homojensizliğin bir sonucu olarak oluşanlar, olmak üzere, üç grupta ele alınırlar. Gerçekten de bu gün küresel kümeler ve galaksilerin çekirdeklerinde kütleleri  $10^{10}M_{\odot}$  ne kadar değişen çok büyük kütleli karadeliklerin varlığına ilişkin ikinci sıradaki oluşumu destekleyen bazı gözlemler de [Giacconi ve Ruffini (1980)] bulunmaktadır.

Karadeliklerin gözlenmesiyle ilgili olarak önem kazanan bir problem de, stasyoner bir karadelikğin gravitasyon alanında taneciklerin hareketi problemidir. İlgili Riemannsal uzaylarda jeodezik denklemlerinin integrasyonuna karşı düşen, bütünüyle matematiksel, bu problem genellikle çözülebilmektedir. Bu konuda elde edilmiş bulunan sonuçlar Chandrasekhar tarafından yayınlanan monografide [Chandrasekhar (1992)] sunulmaktadır.

Bir yıldızın çökmesi sonucu değil fakat, madde ve enerji yoğunluğunun olağanüstü yüksek düzeyde bulunduğu, evrenin büyük patlamayı izleyen en erken çağlarında, homojensizliğin yol açtığı, kütlesi güneşin kütlesinden çok küçük (örneğin,  $10^{15}$  gr. lık bir kütleyle sahip olmakla birlikte gravitasyon yarıçapı  $10^{-13}$  cm. dolayında, yani protonun yarıçapı mertebesinde) karadeliklerin de oluşabileceği öngörülmüştür (Zel'dovich and Novikov (1967), Hawking (1971)). Bu küçük kütleli karadelikler, *mini karadelikler (MDK)* olarak anılmaktadırlar.

Öte yandan, yakın çevresinden tanecik yayınlanması ile karadelikğin dönme enerjisinin azalması sonucunu doğuran Penrose sürecine [Penrose (1969)] bağlı olarak Kerr karadeligi, Schwarzschild karadeligine evrimleşmektedir. Ancak açılal momentum sifira indirgenmiş olsa bile, bu halin de kararlı bir hal olmayacağı ve ısı emisyona karadelikten sürekli bir şekilde tanecik yayınlanmasının devam edeceği Hawking tarafından gösterilmiştir [Hawking (1975)]. Penrose sürecine ve Hawking emisyonuna bağlı olarak karadelikğin sürekli bir kütle-enerji kaybı olayına *karadelikğin buharlaşması* denilmektedir. Küçük kütleli karadeliklerin çok daha büyük bir hızla buharlaşmaları yüzünden 10 gr. dan daha küçük MKD lerin evrenin yaşından daha kısa bir süre içinde yok oldukları gösterilir [Hawking (1975)]. Bir yıldızın çökmesiyle oluşan karadelikler için buharlaşma, bunların yarı ömürlerinin, kütlelerinin büyüklüğüne bağlı olarak, çok çok büyük olması yüzünden, ilgi çekici değildir.

Isıl emisyonla buharlaşan karadeliklerin sıcaklıkları kütleleriyle ters orantılıdır. Dolayısıyla daha sıcak olan küçük kütleli karadelikler daha fazla tanecik yayınlayarak kütle ve enerji kaybederler. Bu şekilde kütlesi azalan karadelik giderek büyük sıcaklığa sahip olduğundan daha büyük bir hızla küçülecek ve süreç, aşırı derecede yüksek enerjiye sahip olan her türlü tanecikğin ortaya çıktığı, mini karadelikğin varlığına son veren, bir patlamayla son bulacaktır. Bugün evrende oluşabilecek bu türlü çok yüksek enerjili taneciklerin (ve fotonların) kaynağı olan patlamalar, evrenin ilk evrelerinde oluşmuş olan MKD lerin varlığının kanıtlarını oluşturacağı için, büyük bir önem taşımakla birlikte henüz bu yönde hiç bir gözlem verisi elde edilebilmiş değildir.

## 2. KRUSKAL-SZEKERES KOORDİNLARI VE KÜRESEL SİMETRİK KARADELİK (SCHWARZSCHILD KARADELİĞİ)

Einstein'ın gravitasyon alan denklemlerinin küresel simetrik, statik çözümü, Schwarzschild koordinatlarında, M ile gravitasyon alanını doğuran cismin kütlesi ve m ile de  $m = \frac{GM}{c^2}$  gösterilmek üzere

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.1)$$

dir [Adler, Bazin, Schiffer (1975)]. Bu yay elemanı  $r = 2m$  için bir singularite içermektedir. Öte yandan aynı metriğin

$$r = \rho \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2$$

dönüşümüyle elde edilen

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2} (dx^0)^2 - \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4 [d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\phi^2]$$

şeklindeki İzotropik Formu  $\rho = \frac{m}{2}$  için, ayrıca  $R = r - m$  olmak üzere,

$X_1 = R \sin\theta \cos\phi$ ,  $X_2 = R \sin\theta \sin\phi$ ,  $X_3 = R \cos\theta$ , dönüşümüyle elde edilen,

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{m}{R}}{1 + \frac{m}{R}}\right) (dx^0)^2 - \left(1 + \frac{m}{R}\right)^2 (d\vec{X})^2 - \left(\frac{1 + \frac{m}{R}}{1 - \frac{m}{R}}\right) \frac{m^2}{R^4} (\vec{X} \cdot d\vec{X})^2$$

şeklindeki Harmonik formu da  $R = m$  için bir singülarite içermektedir. (2.1) in tekil olduğu  $r = 2m$  değerine Schwarzschild yarıçapı (*yada gravitasyon yarıçapı*) denilmektedir. Burada hemen belirtmemiz gereken nokta normal bir yıldız için, yarıçapıyla kıyaslandığında bunun çok küçük olduğu ve yıldızın içinde yer aldığıdır. Schwarzschild çözümü de zaten gök cisminin içinde geçerli olmayıp dışındaki gravitasyon alanının uzay-zaman geometrisini tasvir eder.

Görüldüğü gibi  $r = 2m$  için (2.1) de  $g_{11}$  sonsuz olurken  $g_{00}$  da sıfır olmaktadır. bu ise,  $x_{(k)}^{\mu}$  noktasındaki ışık kaynağının frekansı  $\nu_0$  ve  $x_{(a)}^{\mu}$  noktasında algılanan ışığın frekansı da  $\nu_a$  ile gösterilmek üzere

$$\frac{\nu_a}{\nu_0} = \frac{[g_{00}(x_{(k)}^{\mu})]^{1/2}}{[g_{00}(x_{(a)}^{\mu})]^{1/2}} = \left[ \frac{1 - \frac{2m}{r_k}}{1 - \frac{2m}{r_a}} \right]^{1/2} < 1$$

olduğundan [Adler, Bazin, Schiffer (1975)]  $r = 2m$  deki küresel yüzeyin bir sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi olduğunu gösterir.

Öte yandan (2.1) den görüleceği üzere,  $r < 2m$  olduğunda  $g_{00}$  ve  $g_{11}$  metrik bileşenleri işaret değiştirmekte  $g_{00} < 0$ ,  $g_{11} > 0$  olmaktadır. Bu husus bizi  $r < 2m$  için  $r$  ve  $t$ 'nin fiziksel anlamlarını yeniden düşünmeye iter. Gerçekten de  $t$  eksenini boyunca bir evrim yolu ( $r, \theta, \varphi$ ; sabit) için  $ds^2 < 0$  (uzay cinsinden) ve  $r$ -ekseni boyunca bir evrim yolu için  $ds^2 > 0$  (zaman cinsinden) olmaktadır. Bu yüzden  $r < 2m$  için  $r$  yi zaman  $t$  yi de radyal koordinat olarak yorumlamak uygun görünmektedir. Ayrıca bir taneciğin hareketi söz konusu olduğunda, taneciğin evrim yolu boyunca  $ds^2 > 0$  olmak zorunda olduğundan gravitasyon yarıçapı içinde kütleli bir test taneciğinin  $r$  nin sabit bir değerine karşılık gelen bir halde bulunması mümkün değildir.

Bütün bu özellikler  $r = 2m$  nin sıradışı bir yarıçap olduğunun göstergeleridir. Yukarıda vermiş olduğumuz gibi, her ne kadar, gerek izotropik koordinatlarda gerekse harmonik koordinatlarda metriğin içerdiği singülarite kaldırılamamış olsa da, uzay-zaman geometrisinin koordinat sistemlerinden bağımsız, özde  $r = 2m$  için singüler olduğu anlamına gelmez. Nitekim  $R_{\mu}^{\mu}$  skaler eğriliği,  $R_{\lambda\mu\nu\sigma} R^{\lambda\mu\nu\sigma}$ , metriğinin determinantı, ayrıca  $R_{\mu\nu}^{\lambda\sigma}$  eğrilik tansörü ve görel Newtonsal kuvvetlere karşı düşen  $R^i_{0j0}$  büyüklükleri  $r = 2m$  için sonludurlar. Örneğin  $R_{\mu}^{\mu}$  skaler invariantı böyle bir singülariteyi haiz olsaydı bu bütün koordinat sistemlerinde geçerli olurdu. Bütün bu hususlar, singülaritenin uzay-zaman geometrisini tasvir etmek üzere kullandığımız koordinatlardan kaynaklanan suni bir singülarite olabileceğini kuvvetle telkin etmektedirler. Gerçekten de Kruskal ko-

ordinatlarında [Kruskal (1960)] bu singülaritenin kaldırılabilirliğini göstereceğiz.

Şimdi bir test taneciğinin,  $r = 2m$  yi de içeren bir dış Schwarzschild alanındaki serbest düşmesini (radyal hareketini gözönüne almak suretiyle) Schwarzschild singülaritesinin özelliklerini, önce Schwarzschild koordinatları daha sonra da Kruskal koordinatları yardımıyla irdelemek istiyoruz.  $r$  ve  $t$  koordinatları  $2m < r < \infty$  ve  $-\infty < t < \infty$  için Schwarzschild geometrisini çok iyi tasvir etme imkanı sağlamakla birlikte, uygun seçilmiş bir başka koordinat takımıyla bu geometri,  $r = 2m$  küresi ve bunun içindeki bölge de dahil olmak üzere, bütünüyle tasvir edilebilecektir.

Bir test taneciğinin Schwarzschild geometresindeki, içeri doğru radyal hareketini göz önüne alalım. Schwarzschild alanında,  $r$  ve  $t$  için yazılan Euler-Lagrange hareket denklemleri radyal hareket için düzenlenerek

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad \dot{r}^2 = \frac{2m}{r} \quad (2.2)$$

şeklinde yazılırlar. Radyal hareket, önce test taneciğinin  $\tau = \frac{s}{c}$  öz zamanının fonksiyonu olarak daha sonra da  $t$  koordinat zamanının fonksiyonu olarak incelenip sonuçlar karşılaştırılabilir.

Şimdi, (2.2) den  $r$  yi  $s$  nin fonksiyonu olarak alırsak

$$\frac{2}{3\sqrt{2m}} (r^{3/2} - r_0^{3/2}) = s_0 - s \quad (s = s_0 \text{ için } r = r_0) \quad (2.3)$$

bulunur. Burada ilginç olan (2.3) ün klasik sonucun analoğu olmasıdır. Görüldüğü gibi Schwarzschild yarıçapında bir singülarite söz konusu değildir ve tanecik  $r = 0$  a kadar sürekli olarak düşebilir.

$t$  koordinat zamanı cinsinden hareketi tasvir etmek için (2.2) den

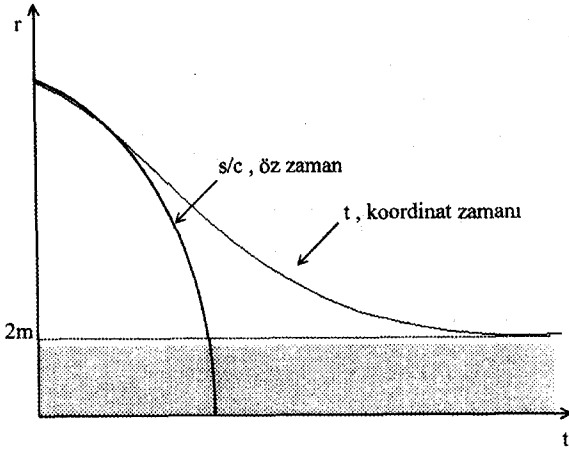
$$\frac{dr}{dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{t}} = -c\sqrt{\frac{2m}{r}} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad \dot{r} \equiv \frac{dr}{ds}, \quad \dot{t} \equiv \frac{dt}{ds}$$

çekilerek integre edilecek olursa,  $t = t_0$  için  $r = r_0$  olmak üzere

$$c(t_0 - t) = \frac{2}{3\sqrt{2m}} (r^{3/2} - r_0^{3/2} + 6m\sqrt{r} - 6m\sqrt{r_0}) - 2m \log \frac{(\sqrt{r} + \sqrt{2m})(\sqrt{r_0} - \sqrt{2m})}{(r_0 + \sqrt{2m})(\sqrt{r} - \sqrt{2m})} \quad (2.4)$$

bulunur. (2.3) ve (2.4) sonuçları  $r \gg 2m$  ve dolayısıyla  $r_0 \gg 2m$  için yaklaşık olarak aynıdırlar. Fakat,  $r$  nin  $2m$  ye çok yakın değerleri için (2.4) den asimtotik olarak

$$r - 2m = 8me^{-\frac{c}{2m}(t-t_0)}$$



Şekil 1. Schwarzschild geometrisinin, bir test taneciğinin koordinat zamanı ve öz zaman cinsinden, orijine yönelik radyal hareketi.

olması gerektiği, dolayısıyla zaman koordinatı olarak  $t$  seçildiğinde test taneciğinin  $r - 2m$  ye yaklaşabileceği ancak bu sınırı geçemeyeceği görülür.  $r_0$  başlangıç noktası  $2m$  nin bir kaç katı alınmak suretiyle çizilen (2.3) ve (2.4), şekil 1 de niteliksel olarak gösterilmiştir.

Buraya kadar sunduğumuz bilgilerden, Schwarzschild geometrisinin  $r$  ve  $t$  cinsinden tasvirinin sınırlı olduğu görülmektedir. Öz-zamanı kullandığımızda,  $t = \infty$  a kadar olan olayları inceleyebilmemize rağmen, gök cisminin çok uzakta sükunette bulunan bir gözlemcinin ölçtüğü zamanı temsil eden  $t$  nin önemi inkar edilemez. Ancak bu durumda da  $r = 2m$  den sonraki düşüşün fiziksel anlamı çelişkili bir hal almaktadır. Şimdi tamamen matematik olarak, bu düşme olayının nasıl geliştiğini ortaya koymak ve Schwarzschild geometrisini uygun bir şekilde bütünüyle tasvir etmek üzere Kruskal koordinatlarını ele alacağız. Schwarzschild koordinatlarında ışığın radyal doğrultudaki evrim yolu için

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0$$

olduğundan, radyal hızı

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2$$

olur. Buradan radyal koordinat hızının  $r = 2m$  için sıfır olacağı görülmektedir. Bu ise, kuşkusuz Schwarzschild koordinatlarının istenmeyen bir özelliğini yansıtmaktadır. Bu durumu bertaraf etmek üzere  $r$  ve  $t$  koordinatlarından, boyutsuz  $u$  ve  $v$  koordinatlarına öyle bir dönüşüm bulalım ki bu yeni koordinatlarda  $ds^2$  yay elemanı  $f^2$  ile Schwarzschild geometrisi içinde hiç bir yerde sıfır olmayan bir fonksiyon gösterilerek

$$ds^2 = f^2(u, v)(dv^2 - du^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.5)$$

şeklinde olsun. Bu kez ışığın radyal hızı  $u$ ,  $v$  cinsinden her yerde  $\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = 1$  olur. Bu şekilde  $u$ ,  $v$  koordinatlarında ışığın radyal doğrultuda yayılmasına ilişkin doğal bir sınır bulunmayacaktır.

Şimdi (2.5) den hareketle  $r$ ,  $t$  koordinatlarından  $u$ ,  $v$  koordinatlarına dönüşümü verecek diferansiyel denklemleri ve sıfırdan farklı  $f(u, v)$  yi belirleyeceğiz. Metrik tensör için temel dönüşüm bağıntısının

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} \bar{g}_{\mu\nu}$$

olduğu ve (2.1) ile (2.5) göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} g_{00} &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = f^2 \left[ \left(\frac{\partial v}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x^0}\right)^2 \right] \\ g_{11} &= -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} = f^2 \left[ \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$g_{01} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x^0} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial x^0} \frac{\partial u}{\partial r}$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Ancak bu denklemlerden  $u$  ve  $v$  nin işaretlerinin belirlenemeyeceğini belirtelim. Şimdi basitliği sağlamak üzere  $\xi$  ile yeni bir radyal koordinatı ve bir  $F(\xi)$  fonksiyonunu

$$\xi = r + 2m \log \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| \quad (2.7)$$

$$F(\xi) = \frac{1 - \frac{2m}{r}}{f^2(r)} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlayacağız. (2.8) de yalnızca  $r$  ye bağlı bir  $f(r)$  fonksiyonunun göz önüne alınmış olması, işin en can alıcı noktasını oluşturur. Gerçekten de (2.5) şeklindeki bir metriğe götüren sonsuz sayıda dönüşüm bulunmasına karşılık yalnızca bu varsayım bizi Kruskal koordinatlarına götürmekte ve  $r = 2m$  deki singularite giderilebilmektedir. (2.6) bağıntıları (2.7) ve (2.8) yardımıyla yeniden düzenlenecek olursa

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x^0}\right)^2 = F(\xi) \quad (2.9)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 = -F(\xi) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^0} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial x^0} \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \quad (2.11)$$

olur. (2.9) ile (2.10) toplandıktan sonra elde edilen ifade ile (2.11) i bir kez toplar, bir kez de çıkarırsak

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^0} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x^0} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 \quad (2.12)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^0} - \frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x^0} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 \quad (2.13)$$

denklemleri elde edilir. (2.12) de (+), (2.13) te (-) işaretini seçerek (her ikisinin işareti aynı seçilecek olursa dönüşümün Jacobien'i sıfır olmaktadır.)

$$\frac{\partial v}{\partial x^0} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x^0} + \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x^0} - \frac{\partial v}{\partial \xi} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x^0} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial x^0}$$

ve buradan da

$$\frac{\partial v}{\partial x^0} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x^0} \quad (2.14)$$

bulunur. Buradan gerek u gerekse v nin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^{0^2}} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^{0^2}} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0 \quad (2.15)$$

şeklinde dalga denklemini sağlamakta olduğu anlaşılır. (2.12) ve (2.13) de  $J \neq 0$  olacak şekilde, işaretler şimdikininki tersi seçilecek olursa gene aynı (2.15) denklemleri elde edilirler.

Bilindiği gibi dalga denkleminin çözümü

$$v = h(\xi + x^0) + g(\xi - x^0) \quad (2.16)$$

$$u = \bar{h}(\xi + x^0) + \bar{g}(\xi - x^0)$$

şeklinindedir. (2.14) den  $h(\xi + x^0) = \bar{h}(\xi + x^0)$  ve

$g(\xi - x^0) = -\bar{g}(\xi - x^0)$  olacağından (2.16) ifadeleri yalnızca iki keyfi fonksiyona bağlı olarak,

$$v = h(\xi + x^0) + g(\xi - x^0)$$

$$u = h(\xi + x^0) - g(\xi - x^0) \quad (2.17)$$

olur. Bunlar (2.9) -(2.10) denklemlerinde yerlerine konacak olursa, (2.11) eşitliği otomatik olarak sağlanır.

Öte yandan  $g'$  ile  $g$  nin  $(\xi - x^0)$  ve  $h'$  ile  $h$  nin  $(\xi + x^0)$  a göre türevleri gösterilerek (2.9) ve (2.10) da birbirine eşdeğer aynı

$$-4h'(\xi + x^0)g'(\xi - x^0) = F(\xi) \quad (2.18)$$

bağıntısı elde edilir. Bu denklem  $h$ ,  $g$  ve  $F$  fonksiyonlarını belirleyebilmek bakımından önemli bir denklemdir.

Belirlemeye çalıştığımız dönüşümümüzde şu ana kadar  $r$  nin değişim aralığıyla ilgili olarak bir sınırlama yapmadık. Şimdi  $r$  nin  $2m$  den büyük mü yoksa küçük mü olduğu konusunu belirterek, sınırda sürekli olacak

şekilde farklı iki bölge için, farklı dönüşümler elde edeceğiz.

i) Önce  $r \geq 2m$  olduğunu varsayalım: (2.8) den bu halde  $F(\xi)$  nin pozitif olduğu görülmektedir. (2.8) denklemini çözmek için, bunu  $\xi$  ye ve  $x^0$  a göre türetirsek, basit bir düzenlemeden sonra

$$\frac{F'(\xi)}{F(\xi)} = \frac{h''(\xi + x^0)}{h'(\xi + x^0)} + \frac{g''(\xi - x^0)}{g'(\xi - x^0)}$$

$$0 = \frac{h''(\xi + x^0)}{h'(\xi + x^0)} + \frac{g''(\xi - x^0)}{g'(\xi - x^0)}$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{F'(\xi)}{F(\xi)} = 2 \frac{h''(\xi + x^0)}{h'(\xi + x^0)} \quad \left( = 2 \frac{g''(\xi - x^0)}{g'(\xi - x^0)} \right)$$

buradan da

$$[\log F(\xi)]' = 2 [\log h'(\xi + x^0)]' \quad (2.19)$$

olur. Bu denklemde bağımsız iki değişkenimiz  $\xi$  ve  $\xi + x^0 \equiv y$  dir ve görüldüğü gibi bu denklemin her iki yanı bağımsız değişkenlerden yalnızca birinin fonksiyonudur. Bu ise (2.19) un her iki yanının aynı bir  $\beta$  sabitine eşit olduğu anlamına gelir. Böylece

$$[\log h'(y)]' \beta \rightarrow h'(y) = A_1 e^{\beta y} \rightarrow h(y) = \frac{A_1}{\beta} e^{\beta y + B_1}$$

$$[\log g'(y)]' \beta \rightarrow g'(y) = A_2 e^{\beta y} \rightarrow g(y) = \frac{A_2}{\beta} e^{\beta y + B_2}$$

$$[\log F(\xi)]' 2\beta \rightarrow F(\xi) = A_3 e^{2\beta \xi}$$

bulunur. Uygun olduğu için  $B_1 = B_2 = 0$ , ayrıca (2.18) yardımıyla görüldüğü üzere,  $F > 0$  olabilmesi için  $h$  ve  $g$  nin zıt işaretli olması gerektiğini de gözönünde bulundurarak  $\frac{A_1}{\beta} = \frac{1}{2}$  ve  $\frac{A_2}{\beta} = -\frac{1}{2}$  seçilecek olursa,

gene (2.18) den  $A_3 = \beta^2$  olması gerektiği görülür. Buna göre

$$h(y) = \frac{1}{2} e^{\beta y}, \quad g(y) = -\frac{1}{2} e^{\beta y}, \quad F(\xi) = \beta^2 e^{2\beta \xi} \quad (2.20)$$

olur. Böylece (2.7), (2.8), (2.17) ve (2.20) yardımıyla

$$u = \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{2m\beta} e^{\beta r} \operatorname{ch} \beta x^0$$

$$v = \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{2m\beta} e^{\beta r} \operatorname{sh} \beta x^0 \quad (2.21)$$

$$f^2 = \frac{2m}{\beta^2 r} \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{4m\beta} e^{-2\beta r}$$

elde edilir. Şimdi  $\beta$  keyfi sabitinin değerini belirlemek istiyoruz.  $f^2$  nin  $r = 2m$  için sıfır ya da singüler olması koşulu göz önünde bulundurulacak olursa (2.21) eşitliklerinin sonucundan,

$$\left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{1-4m\beta} = 1 \rightarrow 1-4m\beta = 0$$

dolayısıyla  $\beta = \frac{1}{4m}$  olması gerektiği görülür. Buna göre boyutsuz  $u, v$  koordinatları

$$u = \sqrt{\frac{r}{2m} - 1} e^{\frac{r}{4m}} \operatorname{ch} \frac{x^0}{4m}$$

$$v = \sqrt{\frac{r}{2m} - 1} e^{\frac{r}{4m}} \operatorname{sh} \frac{x^0}{4m} \quad (r \geq 2m \text{ için}) \quad (2.22)$$

$$f^2 = \frac{32m^3}{r} e^{\frac{r}{2m}}$$

şeklinde elde edilmiş olur.  $u, v$  düzleminin  $r \geq 2m$  için (2.22) ile tanımlanan bölgesi, Şekil (2.2) de B ile gösterdiğimiz  $u \geq |v|$  bölgesidir. İlgili çekici bazı durumları irdeleyelim:  $r, t$  düzlemindeki  $r = 2m$  doğrusu  $u, v$  düzleminde sonlu herhangi bir  $x^0$  için  $u = v = 0$  noktasına karşılık düşerken herhangi bir  $r > 2m$  için  $x^0 \rightarrow \infty$ ;  $u = v$  ve  $x^0 \rightarrow -\infty$   $u = -v$  doğrularına karşılık düşerler. Öte yandan B'deki diğer noktalar için durumu görebilmek üzere (2.22) den

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{\frac{r}{2m}}, \quad \frac{v}{u} = \operatorname{tgh} \frac{x^0}{4m} \quad (2.23)$$

şeklindeki ters dönüşümü çekerim. Buradan,  $x^0 = \text{sabit}$  doğruları ile  $r = \text{sabit}$  eğrilerinin sırasıyla bir ışınlar ve hiperboller şebekesi oluşturduğu görülmektedir (bkz. Şekil 2).  $r, 2m$  ye yaklaşırken, hiperboller  $u \geq |v|$  doğrularına yaklaşır.

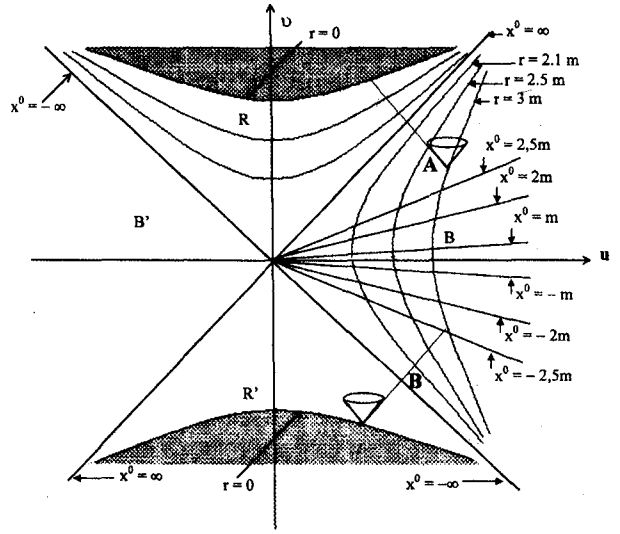
Ancak tam  $r = 2m$  için hiperbol  $u = v = 0$  noktasında olur. (2.20) de  $h$  nin işaretini keyfi olarak pozitif seçmiştik ve bunun sonucu olarak  $g$  negatif olmalıydı. Eğer  $h$  için birinci kez yaptığımız seçimin tersini göz önüne alacak olursak  $g$  de işaret değiştirecek ve böylece (2.22) şeklindeki dönüşümlerimizde  $u$  ve  $v$  'nin her ikisi de işaret değiştireceklerdir. Bu halde,  $-u, -v$  yi  $u, v$  ile değiştirmek suretiyle  $(u, v)$  düzleminde birbirini örtmeyen B ve B' bölgelerinin her ikisinin de gravitasyon yarıçapının dışını temsil edecekleri anlaşılır.

ii)  $r < 2m$  için daha önce yaptığımız hesabı gözden geçirecek olursak, bu halde (2.8) den, F' nin negatif olacağı dolayısıyla  $g$  ve  $h$  exponansiyel fonksiyonlarının aynı işaretli olması gerektiği kolayca görülür. Önce  $g$  ve  $h$  nin her ikisinin de pozitif olduğu hali göz önüne alalım. Bu halde daha önce izlediğimiz yoldan gravitasyon yarıçapı içinde, dönüşümümüzün,

$$u = \sqrt{1 - \frac{r}{2m}} e^{\frac{r}{4m}} \operatorname{sh} \frac{x^0}{4m}$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{r}{2m}} e^{\frac{r}{4m}} \operatorname{ch} \frac{x^0}{4m} \quad (2.24)$$

$$f^2 = \frac{32m^3}{r} e^{\frac{r}{2m}}$$



Şekil 2. Kruskal Koordinatlarında Schwarzschild geometrisi. B ve B' bölgeleri  $r > 2m$ , R ve R' bölgeleri  $r < 2m$  ye karşılık düşmekte ve bir ışık ışınının radyal doğrultuda, içeri ve dışarı yöndeki yayılımı sırasıyla A ve B doğrularıyla gösterilmiş bulunmaktadır.

şeklinde olacağı kolayca görülür. (2.2) ve (2.24) dönüşümleriyle tanımlanan  $u, v$  koordinatlarına "Kruskal-Szekeres koordinatları" denilmektedir. (2.24) dönüşümü  $r, t$  düzlemindeki  $r < 2m$  bölgesini, şekilde R ile gösterilen  $v > |u|$  bölgesine bağlar. Burada önemle belirtilmesi gereken nokta (2.22) ve (2.24) dönüşümlerinin  $u, v$  düzleminde,  $x^0 = \infty$  doğrusu üzerinde birbirine gitmekte olduğu hususudur ( $x^0 = -\infty$  için de uygun bir işaret değişimi ile aynı durum görülecektir). Bu yüzden (2.22) ve (2.24) dönüşümleri birbirleriyle tutarlıdır. Öte yandan (2.24) dönüşümünün tersi de

$$v^2 - u^2 = \left(1 - \frac{r}{2m}\right) e^{\frac{r}{2m}} \quad (2.25)$$

$$\frac{v}{u} = \operatorname{tgh} \frac{x^0}{4m}$$

olarak elde edilir. Bu şekilde R bölgesinde,  $x^0$  ve  $r$  nin sabit değerlerine karşılık düşen, bir diğer ışınlar ve hiperboller ailesi elde edilir. (2.23) ve (2.25) tamamen birbirinin aynı olduğundan,  $u = v$  sınırına her iki yandan yaklaşırken B ve R bölgelerinde elde edilen sonuçlar birbirleriyle tutarlı olacaklardır.  $r, t$  düzlemindeki  $r = 0$  orijini,  $u, v$  düzleminde,

$$v^2 - u^2 = 1 \quad (r = 0 \text{ için})$$

hiperbölu ile temsil edilmektedir. Daha önce B' bölgesi için tartışmış olduğumuz gibi R' bölgesindeki  $(u, v)$  noktaları da B'deki noktalara karşılık düşürülebilir. Bu şekilde, birbirini örtmeyen R' ve R bölgeleri eşdeğer olarak  $r, t$  düzlemindeki  $r < 2m$  bölgesini temsil ederler.

Kruskal koordinatlarında yazılmış,  $f^2$  nin (2.22) ile verilen ifadesine bağlı, (2.5) yay elemanı, Einstein denklemlerinin hiçbir yerde singüler olmayan bir çözümdür. Yalnızca  $r = 0$  a karşılık gelen  $v^2 - u^2 = 1$  hiperbolü boyunca Riemann tansörü bir singülarite içerir. Ayrıca, ilk isteğimize uygun olarak, Özel rölativitede olduğu gibi, ışık daima  $\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = 1$  doğruları boyunca yayılmaktadır. Bu yüzden  $u$  global radyal koordinat ve  $v$  de global zaman koordinatlarını temsil eder. Bununla beraber Schwarzschild koordinatları gibi asimtotik uzaklıklarda küresel koordinatlara karşılık düşmedikleri açıktır. Ayrıca (2.23) ve (2.25) aracılığıyla  $r$  nin,  $u$  ve  $v$  nin implisit fonksiyonu olarak tek bir biçimde tanımlanması istenir. Bunun mümkün olabilmesi, (2.25) in ilk eşitliğinde sağ yanın,  $r$  nin monoton bir fonksiyonu olmasına bağlıdır. Gerçekten de sağ yanın türevi

$$-\frac{r}{(2m)^2} e^{\frac{r}{2m}}$$

şeklinde olduğundan, sağ yanı oluşturan fonksiyon,  $r > 0$  için monoton bir fonksiyondur. Bu durum yalnızca  $r = 0$  için bozulur. Bu yüzden Kruskal diyagramında  $r = 0$  a karşılık gelen  $v^2 - u^2 = 1$  hiperbolü kabul edilebilir bölgenin dışında bırakılmış bulunmaktadır.

Schwarzschild metriği her ne kadar  $B$ ,  $B'$  ve  $R'$ ,  $R$  bölgelerinde Einstein alan denklemlerinin tekil olmayan bir çözümü ise de  $r = 2m$  de bir singülarite içermektedir. Oysa aynı bölgede, Einstein denklemlerinin gene tekil olmayan bir çözümü olan, Kruskal metriği  $r = 2m$  de de bir teklilik içermektedir.

Şimdi bir ışık ışınının, daha önce Schwarzschild koordinatlarında incelediğimiz, radyal doğrultuda içeriye, gravitasyon yarıçapına doğru yayılmasını, Kruskal koordinatları yardımıyla inceleyelim.

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = 1 \quad \left(\frac{du}{dv}\right) = \pm 1 \quad \rightarrow \quad v = \pm u + C_{1,2}$$

olduğundan böyle bir ışın Şekil (2) deki A doğrusu ile temsil edilecektir. Kuşkusuz A doğrusu,  $-1$  eğimine sahip doğru ailesinin üyelerinden yalnızca biridir.  $r$ ,  $t$  cinsinden bakıldığında, sonlu bir  $x^0$  ve sonlu bir  $r > 2m$  noktasından başlayarak  $x^0 \rightarrow \infty$  için  $r = 2m$  ye yaklaşan ışık ışınının bu sınırı aşıp Schwarzschild küresinin içine girmesi  $x^0 = \infty$  için bile mümkün olmaktadır. Bunu izleyen evrede  $r$  yörünge boyunca azalmaya devam ederken, artması gereken  $x^0$  da azalır.  $x^0$  in Schwarzschild küresi içinde zaman koordinatını temsil etme açısından uygun olmadığı, bu şekilde bir kez daha görülmektedir. Kruskal koordinatları açısından gerek  $r \geq 2m$  gerekse  $r < 2m$  için bu türlü bir problem yoktur. A doğrusu boyunca  $r = 0$  a doğru yayılan ışık ışını için radyal koordinata karşılık gelen  $u$  sürekli olarak azalırken, zaman koordinatına karşılık gelen

$v$  sürekli olarak artmaktadır. Schwarzschild küresinin içinden dışarı doğru yayınlanan bir ışık ışını için de Kruskal koordinatları yayılmayı tutarlı bir biçimde tasvir etmektedirler. Örneğin,  $r = 0$  dan, Schwarzschild küresinin dışına doğru yayınlanan B ışını göz önüne alalım. Bu ışın için  $r$  artarken, artması gerektiği halde  $x^0$  azalır ve  $x^0 = -\infty$  doğrusunu katederek dışarı çıkar. Schwarzschild küresinin dışındaki yayılma ise kuşkusuz  $r$ ,  $t$  koordinatları bakımından tutarlıdır.

Yukarıdaki irdelemeyle; aslında gelen ışığın Schwarzschild küresi tarafından bütünüyle yutulmakta olduğu görülmektedir. Ancak küreden çıkan ışığın,  $x^0 = -\infty$  dan bu yana (yani zamanın başlangıcından da önce) yayılıyor olması, böyle bir ışığın gözlenebilirliğini kuşkulu kılmaktadır. Bu haliyle  $r = 2m$  yüzeyinin üzerine düşen bütün ışığı soğuran, hiç ışık yayınlamayan bir karadelinin özelliklerine sahip olduğu anlaşılmaktadır. Işık için gördüğümüz bu durum maddesel tanecikler için de geçerlidir. Gerçekten, ışık konisinin içinde hareket eden maddesel tanecikler için yalnızca yörünge eğimi farklı olup, bu kez  $\left(\frac{du}{dv}\right) > 1$  bağıntısıyla belirlenecektir.

### 3. DÖNEN KARADELİK (KERR KARADELİĞİ)

Kerr çözümü diye bilinen, Einstein denklemlerinin aksel simetrik, stasyoner çözümü [Kerr (1963)],  $M$  gök cisminin kütlesi ve  $J$  de açıl momentumunun büyüklüğü olmak üzere,  $m$  ve cismin birim kütlesi başına açıl momentumun bir ölçüsü olan  $a$  ile

$$m \equiv \frac{GM}{c^2} \quad a \equiv -\frac{J}{Mc}$$

gösterilmek üzere, Boyer-Lindquist koordinatlarında [Boyer, Lindquist (1967)] ,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) c^2 dt^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 - 2mr} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + 2 \frac{2mra \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} c dt d\phi - \left[ (r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{2mra^2 \sin^4 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] d\phi^2 \quad (3.1)$$

şeklinde dir.

Öncelikle, Kerr geometrisinde sükunette bulunan bir kaynağın yayınladığı ışığın kırmızıya kaymasını ele alalım. Girişde belirtmiş olduğumuz gibi  $x_k^\mu$  noktasında sükunetteki bir kaynağın  $v_0$  frekansıyla yayınladığı ışık  $x_k^\mu$  noktasında

$$v = v_0 \left[ \frac{g_{00}(x_k^\mu)}{g_{00}(x^\mu)} \right]^{1/2}$$



frekans ile algılanmaktaydı. Açıkça görüldüğü gibi  $g_{00}(x_k^\mu) = 0$  bağıntısını sağlayan noktalardan yayınlanan ışık, bu halde  $v = 0$  (dolayısıyla  $\lambda = \frac{c}{v} \rightarrow \infty$ ) olacağından, kırmızıya kayma gösterecek ve Kerr geometrisi içinde hangi nokta algılanırsa algılsın, ışık kaynağı görülmeyecektir. (2.1) ve (3.1) metriklerinde  $g_{00}$  birbirinden  $\frac{a}{r}$  nin ikinci mertebeden kuvvetleri kadar farklı olduğundan  $r$  nin büyük değerleri için Kerr ve Schwarzschild alanlarında kırmızıya kayma miktarlarının yaklaşık olarak aynı olacağını belirtelim. (3.1) de  $g_{00}$  büyüklüğünü sıfıra eşitlemek suretiyle, üzerinde sükunette bulunan noktalardan yayınlanan ışığın sonsuz kırmızıya kayma gösterdiği noktaların geometrik yerini belirleyebiliriz.  $\rho$  nun reel olmasını sağlamak için  $|a| < m$  olmak üzere

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) = 0$$

$$r = m \pm (m^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \quad (3.2)$$

bağıntısıyla tanımlanan iki yüzey elde edilir. Spinin sıfır olması halinde  $r = 2m$  küresel yüzeyine ve  $r = 0$  a indirgenmekte olan (3.2) yüzeylerinden, fiziksel bakımından önemli olanı artı işaretlidir. Bu yüzeyin, kutuplarında  $m + (m^2 - a^2)^{1/2}$  ve ekvatorunda  $2m$  yarıçapını haiz olduğu görülmektedir. Eksi işaretli yüzey ise, açıkça görüldüğü gibi, bütünüyle artı işaretli

$$r_\infty = m + (m^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \quad (3.3)$$

yüzeyinin içinde kalmaktadır.  $r_\infty$  gravitasyon yarıçapı mertebesinde olduğundan, (3.3) ile tanımlanan *dış sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi* de Schwarzschild yüzeyi gibi, normal bir yıldız için, dış çözümün zaten geçerli olmadığı, yıldızın iyice iç kısmında kalır. Ancak gravitasyonel çökmeye uğramış aşırı yoğun bazı gök cisimleri (karadelikler) için bu yüzey gök cisminin dışında bulunabilecektir.

Girişte ele aldığımız Schwarzschild yüzeyi, (i) üzerinde sükunette bulunan kaynaklar için bir sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi olmak ve (ii) fiziksel nesnelere için (maddesel tanecikler, fotonlar) tek yönlü zar yüzeyi olmak gibi iki temel role sahiptir. Oysa şimdi göstereceğimiz gibi Kerr alanında bu iki rol farklı iki yüzeye aittir.

Gerçekten de, Schwarzschild geometrisinde  $r = \text{sabit}$  küresel yüzeyi, normali

$$n_\alpha = (0, 1, 0, 0) \quad \rightarrow \quad n^\alpha n_\alpha = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$$

ile verildiğinden  $r$  nin  $2m$  ye doğru azalan değerleri için sırasıyla, uzay cinsinden, ışık cinsinden ( $r = 2m$  için) ve daha sonra da zaman cinsinden bir yüzeye dönüşür. Işık

cinsinden bir yüzeyin ise, bir tek yönlü zar yüzeyi oluşturduğu göz önünde bulundurulacak olursa sonlu bir uzay bölgesini sınırlayan  $r = 2m$  yüzeyinin sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi olmanın yanısıra aynı zamanda, tek yönlü zar yüzeyi rolünü de üstleneceği anlaşılmaktadır. Şimdi Kerr geometrisi için ışık cinsinden hiperyüzeyleri belirlemek istiyoruz. Bunun için öyle bir ışık cinsinden yüzey arayacağız ki, Kerr geometrisi gibi hem zamandan bağımsız olsun, hem de eksenel simetrik bir yüzey olsun. Böyle bir yüzey kuşkusuz

$$u(r, \theta) = \text{sabit}$$

şeklinde olacağından normali de,

$$n_\alpha = u_{,\alpha} = \left(0, \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, 0\right)$$

olur. Metriğin kontravaryant bileşenleri göz önünde bulundurularak,  $\rho^2 \equiv (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)$  olmak üzere,  $n^\alpha$ ,

$$n^\alpha = g^{\alpha\beta} n_\beta = \left(0, -\frac{r^2 + a^2 - 2mr}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial r}, -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}, 0\right)$$

şeklinde bulunur. Işık cinsinden bir yüzey elde edebilmek üzere  $n_\alpha$  nın normu sıfıra eşitlenecek olursa

$$-(r^2 + a^2 - 2mr) \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = 0$$

şeklinde bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklem değişkenlere ayrışım yöntemiyle çözülebilmektedir. Gerçekten de

$$u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

konarak

$$-(r^2 + a^2 - 2mr) \frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = \frac{1}{\Theta^2} \left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)^2$$

olur. Bu ifadenin her iki yanının aynı bir pozitif sabite eşit olması gerektiği açıktır. Bu sabiti  $\lambda$  ile ve  $C$  ile de bir başka integrasyon sabiti gösterilerek

$$\Theta = C \exp \sqrt{\lambda} \theta$$

bulunur. Ancak, periyodik olmadığı için bu çözüm kabul edilebilir bir çözüm olmayıp,  $\lambda = 0$  olmadıkça reel bir yüzeye karşılıkmaz.  $\lambda = 0$  halinde ise  $\Theta$  bir sabit olacağından çözüm  $\theta$  ya bağlı olmayacaktır.

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 (r^2 + a^2 - 2mr) = 0$$

olur.  $\frac{dR}{dr} = 0$  çözümü bir yana bırakılacak olursa buradan

$$r_\pm = m \pm (m^2 - a^2)^{1/2} \quad (|a| < m) \quad (3.4)$$

şeklinde iki çözüm elde edilir. Yalnızca  $|a| < m$  için tanımlı bu iki küresel yüzey, görüldüğü gibi,  $a \rightarrow 0$  limitinde  $r = 2m$  Schwarzschild yüzeyine ya da  $r = 0$  a indirgenmektedir.  $r_+ = m + (m^2 - a^2)^{1/2}$

dış tek yönlü zar yüzeyi, Kerr alanında içine girebilen nesnelere geri dönemediği bir bölgeyi sınırlamakta olduğundan karadelik ufku oluşturur. Gerek iç tek yönlü zar yüzeyi gerekse iç sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi Şekil 2 de görüldüğü gibi bütünüyle karadelik ufku içinde kaldığından fiziksel bakımdan bir önem taşımazlar.

Öte yandan, (3.3) dış sonsuz kırmızıya kayma yüzeyinin her iki yönde de bir engel oluşturmadığı, dolayısıyla bir tek yönlü zar yüzeyi olmadığı kolaylıkla görülebilir. Gerçekten de bu yüzey, normal ve normalinin normu

$$n_\alpha = u_\alpha = \left( 0, 1, -\frac{a^2 \sin \theta \cos \theta}{(m^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{1/2}}, 0 \right)$$

$$n^\alpha n_\alpha = -\frac{1}{\rho^2} \left[ r^2 + a^2 - 2mr + \frac{a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \right] < 0$$

olduğundan uzay cinsinden yüzey olup, ufuk yüzeyi ile çakıştığı  $\theta = 0$  ve  $\theta = \pi$  noktaları dışında bir tek yönlü zar yüzeyi değildir.

Şimdi gravitasyonel çökmeyle yüzeyi sonsuz kırmızıya kayma yüzeyine yaklaşan bir yıldız göz önüne alalım. Eğer yıldız, dışındaki alanın Schwarzschild alanıyla belirlendiği bir yıldız ise yüzeyindeki bir atom sükunette bulunacak yani  $r = \text{sabit}$ ,  $\theta = \text{sabit}$ ,  $\phi = \text{sabit}$  olan bir evrim yoluna sahip olacaktır. Yıldızın yüzeyi  $r=r_\infty$  yüzeyine eriştiğinde de, bu yüzeyde sükunette bulunacak atomların yayımlandığı ışık sonsuz kırmızıya kayma göstereceğinden yıldız artık görünmeyecektir. Dönen bir yıldız için durum bundan farklıdır. Bu halde yıldızın yüzeyinde bulunan atomlar için  $\phi$  sabit olmayacağından, koordinat sistemine göre sükunette olmayacaklardır. Bu yüzden Kerr alanını doğuran yıldızın yüzeyi,  $r=r_\infty$  yüzeyine eriştiğinde üzerindeki atomlar  $r=r_\infty$  yüzeyine göre sükunette olmayacaklarından yayımlayacakları ışık sonsuz kırmızıya kayma gösterecektir. Daha önce belirtmiş olduğumuz gibi Kerr alanında  $r = r_\infty$  yüzeyi üzerinde sükunette bulunan bir atomun yayımlayacağı ışık sonsuz kırmızıya kayma gösterir. Hem bu yüzden hem de bu yüzeyin bir tek yönlü zar yüzeyi olmaması yüzünden,  $r = r_\infty$  yüzeyine erişen bir yıldızın, Schwarzschild alanında olduğu gibi, bir karadelik olacağı söylenemez. Buna karşılık  $r = r_+$  tek yönlü zar yüzeyi için durum farklıdır. Bu yüzeyde bulunan bir kaynağın, hareketi ne olursa olsun, yayımlayacağı ışık bu yüzeyin dışına kaçamayacaktır. Bu yüzden dönen bir yıldız ancak  $r = r_+$  yarıçapına

büzülmesi halinde bir karadelik olur.

$r = r_\infty$  yüzeyi ile  $r = r_+$  yüzeyleri arasındaki bölgeye *dinamik kuşak* ya da *ergosfer* denilmektedir. Burada belirtilmesi gereken nokta, gerek sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi üzerinde gerekse dinamik kuşak içinde bir maddesel taneciğin asla sükunette olamayacağıdır. Bilindiği gibi bir maddesel taneciğin evrim yolu için daima  $ds^2 > 0$  dir. Öte yandan  $g_{00}$  in,  $r = r_\infty$  yüzeyinin, dışında pozitif, üzerinde sıfır ve içinde negatif olduğu göz önünde bulundurulacak olursa, dinamik kuşak içinde  $ds^2$  nin pozitif olmasının, maddesel taneciğin asla  $r = \text{sabit}$ ,  $\theta = \text{sabit}$ ,  $\phi = \text{sabit}$  halinde bulunmasına bağlı olduğu anlaşılır. Ayrıca, sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi üzerinde de taneciğin sükunette bulunması mümkün olamazdı çünkü  $dr = d\theta = d\phi = 0$  olduğu bu halde,  $r = r_\infty$  yüzeyi üzerinde bir de  $g_{00} = 0$  olduğundan bu tanecik için  $ds^2 = 0$  olacak, yani sükunette olan taneciğin ışık hızıyla hareket etmekte olduğu gibi kabul edilemez bir sonuç ortaya çıkacaktı. Bu bakımdan sonsuz kırmızıya kayma yüzeyine *statiklik sınırı* da denilmektedir.

#### 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Einstein alan denklemlerinin tek parametrelili Schwarzschild ve iki parametrelili Kerr çözümleri yardımıyla, önce statik daha sonra da spine sahip olduğu hal için, küresel simetrik bir karadelik tutarlı bir biçimde tasvir edilebilmekte olduğu gösterilmiş bulunmaktadır. Her iki halde karadelik sifirdan farklı bir yük dağılımına sahip olduğu sırasıyla Reisner-Nordstrom ve Kerr-Newmann çözümleri de bu hallere karşışın karadeliklerin tasvirine olanak sağlarlar. Konunun fazla dağılmaması için bunun üzerinde özellikle durulmamıştır. Kaynakça bu konuda ayrıntılı bilgi içermektedir.

#### KAYNAKÇA

- Adler, R., Basin, M., Schiffer, M. (1975): *Introduction to General Theory of Relativity*, ISBN 0-07-000423-4, Mac Graw Hill, New York
- Chandrasekhar, S. (1992): *The Mathematical Theory of Black Holes*, ISBN 0-19-851291-0, Oxford university press, New York, Oxford.
- Einstein, A., Rosen, N. (1935): *The Particle Problem in the General Theory of Relativity*, *Phys. Rev.* 48, 73 - 77
- Finkelstein, D. (1958): *Past - Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle*, *Phys. Rev.* 110, 965 -967
- Fronsdal, C., (1959): *Completion and Embedding of the Schwarzschild Solution*, *Phys. Rev.* 116, 778 - 781

- Ginacconi, R., Ruffini, R (EDS). (1980) : *Physics and Astrophysics of Neutron Stars and Black Holes*, ISBN 0-444-85446-0, North-Holland- Italy.
- Hawking, S.W. (1971) : Gravitationally Collapsed Object of Very Low Mass, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 152, 75-78
- Hawking, S.W. (1975) : Particle Creation by Black Holes, *Commun. Math. Phys.*, 43, 199 - 220
- HAWKING, S.W., Ellis, G.F. (1973) : *The Large - scale Structure of Space-time*, ISBN 0-521 - 20016-4, Cambridge Univ. Press.
- Hayakawa, S., Matsuoka, M. (1964) : Origin of Cosmic X-Rays, *Suppl. Prog.Theor. Phys.*, 30,204-228
- Kerr, R.P. (1963) : Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics, *Phys. Rev. Lett.* 11, 237 - 238
- Kruskal, M.D. (1960) : Maximal Extension of Schwarzschild Metric, *Phys. Rev.* 119, 1743 - 1745
- Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A. (1973) : *Gravitation*, ISBN 0-7167 - 0334 - 3, Freeman, San Francisco.
- Openheimer, J.R., Snyder, H. (1939) : On Continued Gravitational Contraction, *Phys. Rev.* 56, 455 - 459 .
- Penrose, R. (1969) : Gravitational Collapse, The Role of General Relativity, *Riv. Nuova Cimento*, 1, 242
- Rhoades, C., Ruffini, R. (1974) : Maximum Mass of a Neutron Star, *Phys. Rev.* 32, 324 - 327
- Sato, H., Nakamura, T. (eds) (1986) : *Gravitational Collapse and Reality*, ISBN 9971 - 50 - 207 - 0, World Scientific, Singapore.
- Weinberg G, S., (1972) : *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications General Theory of Relativity*, ISBN 0 - 471 - 92567 - 5. John Wiley, New York.



**Göksel Daylan Esmer**, 1965 Mardin doğumludur. 1987 yılında İstanbul Üniversitesi Fizik Bölümü'nden mezun olduktan sonra 1990 da yüksek lisansını, 1997'de doktorasını aynı bölümde tamamlamıştır. Esmer'in araştırma alanları, Genel Rölativite Teorisi, Karadelik Fiziği'dir.